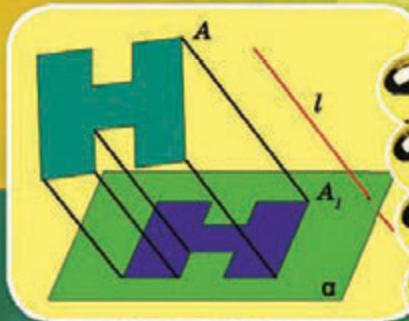
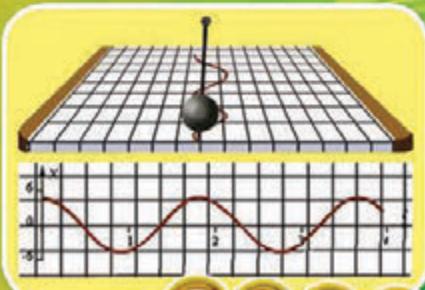


МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ

РІВЕНЬ СТАНДАРТУ

10



УДК 512(075.3)
I-89

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(Наказ МОН України від 31.05.2018 № 551)*

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Істер О.С.

I-89 Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер. — Київ : Генеза, 2018. — 384 с. : іл.

ISBN 978-966-11-0110-3.

Підручник відповідає програмі з математики для 10 класу закладів загальної середньої освіти (рівень стандарту) і складається з двох частин: «Алгебра і початки аналізу» та «Геометрія». Навчальний матеріал кожної частини структуровано за допомогою розділів, параграфів, рубрик та умовних позначень.

УДК 512(075.3)

ISBN 978-966-11-0110-3

© Істер О.С., 2018
© Видавництво «Генеза»,
оригінал-макет, 2018

Шановні десятикласниці та десятикласники!

Математика є основним засобом у багатьох галузях науки і техніки. Без математики не можуть існувати медицина, економіка, машинобудування. Певних знань з математики та готовності їх застосовувати вимагає й вивчення багатьох шкільних навчальних предметів. Наприклад, без математики неможливо уявити фізику, хімію, інформатику. Сучасний ринок праці, отримання якісної професійної освіти, продовження освіти на наступних етапах також потребують володіння певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосування до розв'язування практичних задач. Тому одне з головних завдань курсу математики старшої школи – допомогти кожному з вас досягти такої практичної компетентності, яка б забезпечила готовність до повсякденного життя, до найважливіших видів суспільної діяльності, до оволодіння обраною професією. Підручник, який ви тримаєте в руках, допоможе вам у цьому.

Для зручності матеріал підручника структуровано за допомогою розділів, параграфів, рубрик. Кожен параграф містить теоретичний матеріал, зразки розв'язування задач і виконання вправ, запитання до теоретичного матеріалу, завдання для класної і домашньої роботи тощо. Теоретичний матеріал підручника автор намагався викласти простою, доступною мовою, проілюструвати малюнками та прикладами застосування математики в повсякденному житті.

Вивчення математики потребуватиме від вас наполегливості, логіки мислення, просторової уяви.

У підручнику ви побачите умовні позначення. Ось що вони означають:

-  –означення та математичні твердження, які треба запам'ятати;
-  –запитання і завдання до теоретичного матеріалу;
-  – теорема;  – наслідок;  – доведення завершено;
-  – «ключова» задача (задача, висновки якої використовуються для розв'язування інших задач);
- 1.23** – вправа для виконання в класі;
- 1.24** – вправа для виконання вдома.

Усі задачі і вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і викремлено так:

- з позначки **1** починаються вправи початкового рівня;
- з позначки **2** починаються вправи середнього рівня;
- з позначки **3** починаються вправи достатнього рівня;
- з позначки **4** починаються вправи високого рівня.

Рубрика  «**Розв'яжіть задачі та виконайте вправи**» містить значну кількість завдань для класної і домашньої роботи, усих вправ, практичних завдань, що відповідають темі параграфа та допоможуть добре її опрацювати. У рубриці  «**Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу**» пропонується виконати вправи, необхідні для вивчення

наступної теми. У рубриці  «Життєва математика» зібрано задачі, які відображають реальні життєві ситуації, пов’язані з економічною грамотністю і підприємливістю, екологічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, тобто всім тим, без чого неможливо уявити людину в сучасному світі.

Підручник містить багато цікавих фактів з історії становлення та розвитку математичної науки, виникнення основних її понять, життєвого шляху українських учених, які долучилися до творення шкільного курсу математики.

Бажаємо вам успіхів у наєчанні!

Шановні вчительки та вчителі!

Програма з математики рівня стандарту складається з двох навчальних курсів: алгебра і початки аналізу та геометрія. Тому пропонований підручник, відповідно до програми, також складається з двох частин.

Сподіваємося, що підручник суттєво допоможе вам в організації процесу навчання математики. Автор намагався створити його таким, щоб він у повній мірі реалізував мету державної програми з математики, формував в учнів науковий світогляд, усвідомлення що математичні знання є невід’ємною складовою загальної культури людини і необхідною умовою повноцінного життя в сучасному суспільстві, допоміг оволодіти системою математичних знань, навичками та вміннями, потрібними в повсякденному житті та в майбутній професійній діяльності, забезпечив розвиток логічного мислення, інтуїції, просторової уяви, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури, формував життєві й предметні компетентності, загальнолюдські цінності особистості, виховував національну самосвідомість.

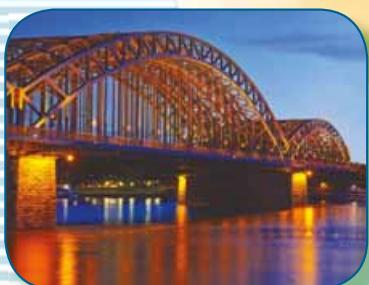
Окрім традиційної структури (розділи, параграфи, рубрики), поділу навчального матеріалу на теоретичну та практичну складові, підручник містить рубрику «Життєва математика», що сприятиме реалізації наскрізних ліній програм з математики та допоможе формувати в учнів практичну компетентність. У підручнику включено велику кількість задач і вправ, задач практичного змісту. Диференційованість задач і вправ за чотирма рівнями складності забезпечить особистісно орієнтований підхід до організації процесу навчання та сприятиме формуванню позитивної мотивації учнів до навчання.

Додатковий дидактичний матеріал для узагальнення, систематизації та перевірки знань можна знайти на сайті видавництва «Генеза» geneza.ua.

Щастя вам у вашій нелегкій праці!

РОЗДІЛ 1

ФУНКЦІЇ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ



У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ МИ

- **пригадаємо**, що таке область визначення та множина значень, зростання і спадання функції; як знайти значення функції для даного значення аргументу і значення аргументу за відповідним йому значенням функції;
- **дізнаємося**, що таке парність, непарність, неперервність, монотонність функції; корінь n -го степеня із числа; степінь з раціональним показником; степенева функція;
- **навчимося** описувати властивості функції, у тому числі за її графіком; спрощувати, обчислювати, оцінювати й порівнювати значення виразів, що містять степені з раціональними показниками та ірраціональні вирази.

§ 1. ЧИСЛОВА ФУНКЦІЯ. ГРАФІК ФУНКЦІЇ

1. Поняття функції,
її області визначення
і множини значень

З функцією ми почали знайомитися в курсі алгебри основної школи.

Нагадаємо означення функції.



Числою функцією (або функціональною залежністю) називають таку залежність між двома змінними, при якій кожному значенню незалежної змінної з деякої множини відповідає за певним правилом єдине значення залежної змінної.

Нагадаємо, що функції, зазвичай, позначають латинськими (інколи грецькими) літерами.

Розглянемо функцію f , у якої кожному натуральному значенню x від 1 до 5 відповідає число y , удвічі більше за x (мал. 1.1). Стрілка вказує на число y , яке відповідає числу x . Число y називають *значенням функції f у точці x* і позначають через $f(x)$. На малюнку 1.1, зокрема, $f(3) = 6$.

Нагадаємо, що незалежну змінну x ще називають *аргументом* функції, а про залежну змінну y кажуть, що вона є *функцією від цього аргументу*.



Областю визначення функції $y = f(x)$ називають множину всіх значень, яких може набувати аргумент x .

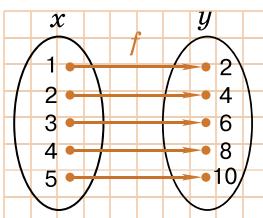
Позначають область визначення символом $D(f)$ або $D(y)$.

Наприклад, областью визначення функції, яку ми розглянули вище, є множина, що складається із чисел 1, 2, 3, 4, 5, тобто $D(f) = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, а областью визначення функції $y = x^2 - 2x + 3$ є множина всіх дійсних чисел, що можна записати так: $D(y) = R$.

Задача 1. Знайти область визначення функції:

$$1) y = \frac{x-2}{x+1}; \quad 2) y = \sqrt{x-2}.$$

- Розв'язання. 1) Оскільки знаменник дробу не може дорівнювати нулю, то областью визначення функції є множина усіх значень x , для яких $x+1 \neq 0$, тобто $x \neq -1$. Отже, $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.
- 2) Оскільки підкореневий вираз має бути невід'ємним, то областью визначення функції є множина всіх тих значень x ,



Мал. 1.1

для яких $x - 2 \geq 0$, тобто $x \geq 2$. Отже, $D(y) = [2; +\infty)$.

Відповідь. 1) $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; 2) $D(y) = [2; +\infty)$.



Множиною (або областю) значень функції $y = f(x)$ називають множину, що складається з усіх чисел $f(x)$, де $x \in D(f)$.

Позначають множину значень символом $E(f)$ або $E(y)$. Для функції на малюнку 1.1 маємо: $E(f) = \{2; 4; 6; 8; 10\}$. Щоб знайти множину значень функції $y = x^2 - 2x + 3$, перетворимо вираз, який записано у формулі функції:

$$x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2.$$

Отже, функцію можна записати у вигляді: $y = (x - 1)^2 + 2$. Оскільки $(x - 1)^2 \geq 0$, то $(x - 1)^2 + 2 \geq 2$. Тому $E(y) = [2; +\infty)$.

Задача 2. Знайти область значень функції $y = 3 - \sqrt{x}$.

• Розв'язання. За означенням арифметичного квадратного кореня: $\sqrt{x} \geq 0$. Тоді: $-\sqrt{x} \leq 0$. Далі додамо до обох частин цієї нерівності число 3, отримаємо: $3 - \sqrt{x} \leq 3$, тобто $y \leq 3$. Тому $E(y) = (-\infty; 3]$.

Відповідь. $E(y) = (-\infty; 3]$.

Як відомо, функції є математичними моделлями реальних процесів і явищ навколошнього світу. Тому їх часто застосовують під час дослідження різноманітних проблем у фізиці, економіці, біології тощо.

Задача 3. Початкова вартість деякого обладнання складає 200 000 грн. Щороку вона зменшується на 5 %. Знайти:

1) Функцію P залежності вартості обладнання від терміну експлуатації t (років).

2) Вартість обладнання через 4 роки, використовуючи функцію P .

• Розв'язання. 1) За умовою щороку вартість обладнання становитиме $100\% - 5\% = 95\%$ від вартості обладнання за минулій рік. Тому вартість обладнання складатиме:

• через рік $- 200\ 000 \cdot 0,95$,

• через 2 роки $- 200\ 000 \cdot 0,95 \cdot 0,95 = 200\ 000 \cdot 0,95^2$, ...;

• через t років $- 200\ 000 \cdot 0,95^t$.

• Маємо функцію:

$$P(t) = 200\ 000 \cdot 0,95^t, \text{ де } t \in N.$$

2) Якщо $t = 4$, то $P(4) = 200\ 000 \cdot 0,95^4 = 162\ 901,25$ (грн).

Відповідь. 1) $P(t) = 200\ 000 \cdot 0,95^t$; 2) 162 901,25 грн.

Зауважимо, що функцію залежності вартості обладнання P від терміну експлуатації можна було знайти і за формuloю складних відсотків¹: $P(t) = 200\ 000 \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right)^t$, тобто $P(t) = 200\ 000 \cdot 0,95^t$.

Задача 4. Записати формулу для обчислення кінетичної енергії кульки масою 50 г. З'ясувати, чи задає ця формула функцію, і, якщо так, указати її аргумент.

• Розв'язання. Як відомо, кінетичну енергію W_k обчислюють за формuloю $W_k = \frac{mv^2}{2}$. Тому маємо: $W_k = \frac{50v^2}{2}$, тобто $W_k(v) = 25v^2$.

Відповідь. W_k є функцією від аргументу v , де $v \geq 0$.

2. Способи задання функцій

Нагадаємо, що функцію можна задавати різними способами: формuloю, графіком, таблицею, словесно тощо.

Наприклад, кожну з функцій, які ми розглянули вище, $y = x^2 - 2x + 3$, $y = \frac{x-2}{x+1}$, $y = \sqrt{x-2}$, $y = 3 - \sqrt{x}$, $W_k = 25v^2$, $P(t) = 200\ 000 \cdot 0,95^t$, задано формuloю. Цей спосіб задання функції є досить зручним, адже дає змогу для довільного значення аргументу з області визначення функції знайти відповідне йому значення функції, а часто розв'язати її обернену задачу.

Задача 5. Функцію задано формuloю $y = \frac{x+3}{x-5}$.

1) Знайти значення функції для $x = 4$.

2) Порівняти $y(0)$ і $y(1)$.

3) Знайти, при якому значенні аргументу значення функції дорівнює 0.

• Розв'язання. 1) $y(4) = \frac{4+3}{4-5} = \frac{7}{-1} = -7$.

• 2) Оскільки $y(0) = \frac{0+3}{0-5} = -0,6$, а $y(1) = \frac{1+3}{1-5} = -1$, то $y(0) > y(1)$.

• 3) Оскільки $y = 0$, маємо рівняння: $\frac{x+3}{x-5} = 0$, звідки $x = -3$.

Відповідь. 1) $y(4) = -7$; 2) $y(0) > y(1)$; 3) $x = -3$.

¹ Формулу складних відсотків можна знайти в підручнику «Алгебра. 9 клас» («Генеза», 2017, автор Істер О.С., с. 178–179) або в іншій математичній літературі.

Задача 6. Формула описує зміну температури води в баку (у $^{\circ}\text{C}$) залежно від часу t (у хв):

$$p(t) = \begin{cases} 2t + 20, & \text{якщо } 0 \leq t < 40, \\ 100, & \text{якщо } 40 \leq t < 50, \\ -0,8t + 140, & \text{якщо } 50 \leq t \leq 120. \end{cases}$$

Знайти: 1) $p(10)$; 2) $p(45)$; 3) $p(80)$.

Розв'язання. 1) Оскільки $0 < 10 < 40$, то $p(10)$ обчислюємо за формулою $p(t) = 2t + 20$. Отже, $p(10) = 2 \cdot 10 + 20 = 40$.

2) Оскільки $40 < 45 < 50$, то $p(45) = 100$.

3) Оскільки $50 < 80 < 120$, то $p(80)$ обчислюємо за формулою $p = -0,8t + 140$. Отже, $p(80) = -0,8 \cdot 80 + 140 = 76$.

Відповідь. 1) 40; 2) 100; 3) 76.

Функцію також можна задавати таблицею. *Табличний спосіб задання* дозволяє безпосередньо вказати значення функції, але лише для скінченного набору значень аргументу.

Припустимо, щогодини, починаючи з дев'ятої ранку і до п'ятнадцятої, вимірювали атмосферний тиск і результат заносили в таблицю:

Час t , год	9	10	11	12	13	14	15
Атмосферний тиск p , мм. рт. ст.	754	755	757	755	754	753	754

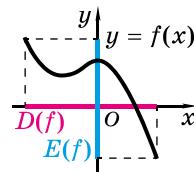
У результаті отримали функцію, область визначення якої складається із чисел 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15 (цифри першого рядка таблиці), а множина значень – із чисел 753; 754; 755; 757 (цифри другого рядка таблиці).

Часто функцію задають за допомогою графіка. *Графічний спосіб задання* дає можливість уточнити властивості функції.

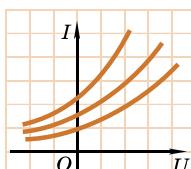
Наприклад, на малюнку 1.2 зображено, як за графіком функції можна знайти її область визначення і множину значень.

На малюнку 1.3 зображено вольт-амперні характеристики деяких електричних елементів, тобто залежність сили струму від напруги задано графічно. Цю залежність отримано не за допомогою формули, а експериментальним шляхом.

На малюнку 1.4 зображено кардіограму людини. Кардіограму можна вважати графіком зміни електричного потенціалу на волоках серцевого м'яза під час його скорочень.



Мал. 1.2



Мал. 1.3



Мал. 1.4

Задача 7. За графіком функції $y = f(x)$ на малюнку 1.5 знайти: 1) область визначення функції; 2) множину значень функції; 3) значення функції для $x = -1$; $x = 2$; 4) значення аргументу, при яких $y = -1$; $y = 3$.

- Розв'язання. 1) Спроектуємо всі точки графіка на вісь x . Отримаємо проміжок $[-2; 5]$. Отже, $D(y) = [-2; 5]$.
- 2) Спроектуємо всі точки графіка на вісь y . Отримаємо проміжок $[-2; 4]$. Отже, $E(y) = [-2; 4]$.

3) За графіком: $y(-1) = -1$; $y(2) = 0$.

4) Оскільки пряма $y = -1$ перетинає графік у точках з абсцисами $x = -1$ і $x = 1$, то $f(x) = -1$ для $x = -1$ або $x = 1$. Пряма $y = 3$ перетинає графік у точці з абсцисою 4. Отже, $f(x) = 3$, якщо $x = 4$.

Відповідь. 1) $D(y) = [-2; 5]$; 2) $E(y) = [-2; 4]$; 3) $y(-1) = -1$; $y(2) = 0$; 4) $f(x) = -1$, якщо $x = -1$ або $x = 1$; $f(x) = 3$, якщо $x = 4$.

Словесний спосіб задання функції полягає в тому, що функціональну залежність формулюють словами. Наприклад, «кожному числу x ставимо у відповідність квадрат цього числа, зменшений на 10». Якщо сказане задати формулою, то вона виглядатиме так: $y = x^2 - 10$. Словесний спосіб задання функції використовують дуже рідко.

3. Графік функції



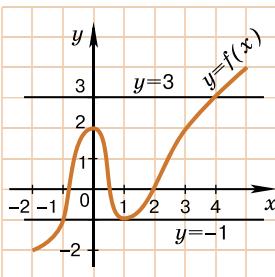
Графіком функції називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним їм значенням функції.

Раніше ми вже працювали з функціями вигляду $y = kx + b$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2 + bx + c$. Використовуючи довідкову літературу та комп’ютерні програми для побудови графіків функцій, пригадайте властивості цих функцій та вигляд їх графіків.

А ще раніше...

Функція – одне з найважливіших понять сучасної математики. Його появу у XVII ст. пов’язують із розвитком механіки та втіленням у життя ідеї використання поняття змінної.

Так, французькі математики Рене Декарт (1596–1650) та П’єр Ферма (1601–1665) розглядали функцію як залежність ординати точки кривої від її абсциси.



Мал. 1.5

Термін «функція» (від лат. *functio* – виконання, звершення) для назви залежностей вперше ввів німецький філософ, фізик і математик Готфрід Лейбніц (1646–1716). Він пов'язував функцію з графіками.

Швейцарські математики Йоганн Бернуллі (1667–1748) та його видатний учень Леонард Ейлер (1707–1783) розглядали функцію як аналітичний вираз, тобто вираз, утворений зі змінних чисел за допомогою тих чи інших аналітичних операцій (математичних дій). Функцію як залежність однієї змінної величини від іншої ввів чеський математик Бернард Больцано (1781–1848).

Найзагальніше сучасне означення функції запропонувала в середині ХХ ст. група математиків, яка працювала під псевдонімом Нікола Бурбакі.¹



- Що називають числововою функцією?
- Що називають областю визначення функції і що множиною значень функції?
- Назвіть способи задання функцій, до кожного наведіть приклади.
- Що називають графіком функції?
- Пригадайте, як будувати графіки за допомогою перетворень графіків функцій.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



1.1. (Усно). Чи є функцією залежність:

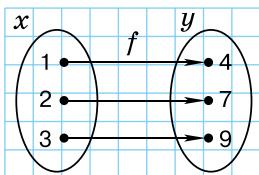
- 1) $p = m^2 + p^2$;
- 2) $x - 2x^2 = y$;
- 3) $t = z + \sqrt{z^2 + 1}$;
- 4) $x = \frac{a}{x+a}$;
- 5) $ab = a + b$;
- 6) $(p^2 - p^3) : 7 = c$?

Для функцій назвіть незалежну змінну (аргумент) та залежну (значення функції).

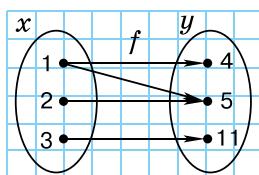
1.2. Для функції $f(x) = (x - 2)^3$ знайдіть $f(2)$, $f(1)$.

1.3. Для функції $g(x) = (x + 1)^2$ знайдіть $g(0)$, $g(-1)$.

1.4. (Усно). На малюнках 1.6 і 1.7 зображені відповідності між числами. Яка з них є функцією? Чому?



Мал. 1.6



Мал. 1.7

¹ Детальніше про виникнення і розвиток учення про функцію можна прочитати в підручнику «Алгебра. 9 клас» (видавництво «Генеза», автор О.С. Істер, с. 71–72) та в додатковій літературі.

2

Знайдіть значення функції (1.5–1.6):

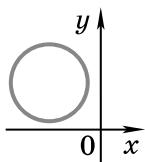
1.5. 1) $f(x) = 3x + \frac{1}{x}$ у точках $-1; 2; 0,1;$

2) $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$ у точках $0; 2; -2.$

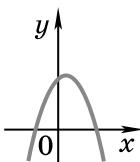
1.6. 1) $f(x) = \frac{2}{x-1} + x$ у точках $0; -1; 0,8;$

2) $g(x) = \sqrt{3x - x^2}$ у точках $0; 1; 3.$

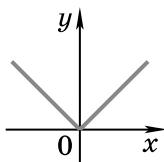
1.7. (Усно). Чи є графіками функцій $y = f(x)$ фігури, зображені на малюнках 1.8–1.11?



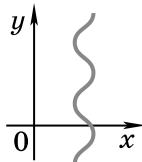
Мал. 1.8



Мал. 1.9



Мал. 1.10



Мал. 1.11

Побудуйте графік функції (1.8–1.9):

1.8. 1) $y = 2x - 3;$ 2) $y = -\frac{8}{x};$ 3) $y = \sqrt{x};$ 4) $y = x^2 - 2x.$

1.9. 1) $y = -2x;$ 2) $y = \frac{4}{x};$ 3) $y = x^2;$ 4) $y = x^2 + 4x.$

1.10. Функцію задано формулою $f(x) = \frac{x+1}{x-1}.$ Знайдіть:

1) $f(5);$ 2) таке значення $x,$ при якому $f(x) = 3.$

1.11. Функцію задано формулою $g(x) = \frac{2-x}{2+x}.$ Знайдіть:

1) $g(-1);$ 2) таке значення $x,$ при якому $g(x) = -5.$

Знайдіть область визначення функції (1.12–1.13):

1.12. 1) $f(x) = x - 2;$ 2) $f(x) = \frac{2-x}{3};$ 3) $f(x) = \frac{3}{2-x};$

4) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4};$ 5) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3};$ 6) $f(x) = \sqrt{x+3}.$

1.13. 1) $f(x) = 2x - 1;$ 2) $f(x) = \frac{x+1}{2};$ 3) $f(x) = \frac{2}{x+1};$

4) $f(x) = \frac{1}{1-x^2};$ 5) $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6};$ 6) $f(x) = \sqrt{x-2}.$

1.14. Функцію задано таблицею:

x	1	2	3	4	5	6
y	5	-1	0	5	0	4

Знайдіть: 1) значення функції, якщо $x = 2; 5$; 2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 4; 5; 3) область визначення функції; 4) область значень функції.

1.15. Функцію задано таблицею:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4	-1	0	5	3	4	0

Знайдіть: 1) значення функції, якщо $x = -2; 3$; 2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0; 4; 3) область визначення функції; 4) область значень функції.

3 **1.16.** За допомогою перетворень графіка функції $y = x^2$ побудуйте графік функції:

- 1) $y = x^2 + 1$; 2) $y = x^2 - 2$;
3) $y = (x - 3)^2$; 4) $y = (x + 2)^2$.

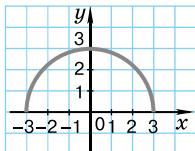
1.17. За допомогою перетворень графіка функції $y = \sqrt{x}$ побудуйте графік функції:

- 1) $y = \sqrt{x} + 2$; 2) $y = \sqrt{x} - 3$;
3) $y = \sqrt{x + 1}$; 4) $y = \sqrt{x - 2}$.

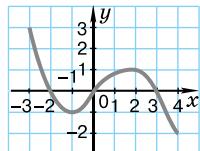
1.18. Під час вільного падіння тіло долає відстань $S = 0,5gt^2$, де t – час у секундах, $g \approx 10$ м/с². Побудуйте графік цієї функції. Яку відстань подолає тіло за 1 с? За який час тіло подолає 20 м?

1.19. На малюнках 1.12–1.14 функції задано графіками. Дляожної з функцій укажіть:

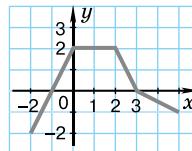
- 1) область визначення; 2) область значень;
3) координати точок перетину з осями координат.



Мал. 1.12



Мал. 1.13



Мал. 1.14

1.20. Побудуйте графік деякої функції $y = f(x)$, область визначення якої – проміжок $[0; 5]$, а область значень – проміжок $[-3; 3]$.

Знайдіть область визначення функції (1.21–1.22):

1.21. 1) $f(x) = \frac{4}{|x| - 5}$;

2) $f(x) = \frac{5}{3 + |x|}$;

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$;

4) $f(x) = \frac{1}{x - 1} + \frac{x + 1}{x^2 + 3x}$;

5) $f(x) = \frac{\sqrt{x + 1}}{x^2 + x - 2}$;

6) $f(x) = \frac{3}{1 - \sqrt{x}}$;

7) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x - 5}$;

8) $f(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt{-x}$.

1.22. 1) $f(x) = \frac{3}{7 - |x|}$;

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$;

3) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 - x - 2}$;

4) $f(x) = \frac{\sqrt{x + 3}}{x^2 + 2x - 8}$;

5) $f(x) = \frac{1}{2 - x} + \sqrt{x}$;

6) $f(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x}$.

1.23. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & \text{якщо } x < 1, \\ x - 3, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$

Знайдіть $f(-2); f(0); f(1); f(-3)$.

1.24. Дано функцію $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{якщо } x \leq -1, \\ x + 5, & \text{якщо } x > -1. \end{cases}$

Знайдіть $g(-3); g(-1); g(0); g(2)$.

1.25. Наведіть приклад функції, областью визначення якої є:

1) множина всіх дійсних чисел;

2) множина всіх дійсних чисел, крім числа 2;

3) множина всіх дійсних чисел, крім чисел 1 і -3;

4) множина всіх дісних чисел, більших або рівних числу 4.

Знайдіть множину значень функції (1.26–1.27):

1.26. 1) $f(x) = x^2$;

2) $f(x) = x^2 - 3$;

3) $f(x) = x^2 + 4$;

4) $f(x) = \sqrt{x}$;

5) $f(x) = \sqrt{x} - 2$;

6) $f(x) = \sqrt{x} + 3$.

1.27. 1) $f(x) = |x|$;

2) $f(x) = |x| + 5$;

3) $f(x) = |x| - 3$.

1.28. Знайдіть координати вершини параболи $y = 3x^2 - 6x + 5$. Побудуйте схематично графік функції та знайдіть її область значень.

 **1.29.** Побудуйте графік функції:

$$1) f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x < 1, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } 1 \leq x \leq 4, \\ |x-6|, & \text{якщо } x > 4; \end{cases} \quad 2) g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & \text{якщо } x < 0, \\ 2x, & \text{якщо } 0 \leq x < 2, \\ \frac{8}{x}, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$$

1.30. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{якщо } x < 0, \\ 2\sqrt{x}, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 4, \\ x^2 - 4x + 4, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$

Знайдіть множину значень функції (1.31–1.32):

1.31. 1) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$; 2) $f(x) = \sqrt{-(x-1)^2}$;

3) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$; 4) $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$;

5) $f(x) = \sqrt{x^2+9} - 2$; 6) $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+3}$.

1.32. 1) $f(x) = \sqrt{-x^2}$; 2) $f(x) = \frac{6}{x^2+1}$; 3) $f(x) = \sqrt{x^2+4} + 1$.

Побудуйте графік функції (1.33–1.34):

1.33. 1) $y = x^2 - 2x - 3$;

2) $y = |x^2 - 2x - 3|$;

3) $y = x^2 - 2|x| - 3$;

4) $y = |x^2 - 2|x| - 3|$.

1.34. 1) $y = x^2 - 2x$; 2) $y = |x^2 - 2x|$;

3) $y = x^2 - 2|x|$; 4) $y = |x^2 - 2|x||$.



1.35. Пляшечка шампуню коштує 40 грн. Яку найбільшу кількість таких пляшечок можна придбати на 170 грн під час дії акції, коли знижка на цей шампунь складає 25 %?





Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

1.36. Побудуйте схематично графік функції та знайдіть проміжки зростання та проміжки спадання функції:

- 1) $y = x + 3$;
- 2) $y = 5 - 3x$;
- 3) $y = x^2$;
- 4) $y = \sqrt{x}$;
- 5) $y = \frac{8}{x}$;
- 6) $y = -\frac{10}{x}$.

1.37. Дано: $f(x) = x^4$. Порівняйте:

- 1) $f(-2)$ і $f(2)$;
- 2) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ і $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Чи можна дійти висновку, що для будь-якого значення x справджується рівність: $f(-x) = f(x)$?

1.38. Дано: $g(x) = x^3$. Порівняйте:

- 1) $g(3)$ і $-g(-3)$;
- 2) $g\left(-\frac{1}{3}\right)$ і $-g\left(\frac{1}{3}\right)$.

Чи можна дійти висновку, що для будь-якого значення x справджується рівність: $g(-x) = -g(x)$?

§ 2. МОНОТООННІСТЬ І НЕПЕРЕВНІСТЬ ФУНКЦІЙ. ПАРНІ ТА НЕПАРНІ ФУНКЦІЇ

У цьому параграфі ми пригадаємо вже відомі нам та вивчимо нові властивості функцій.

1. Монотонність функцій

У курсі алгебри 9 класу ми вже ознайомилися з такими властивостями функцій, як зростання і спадання. Пригадаємо їх.

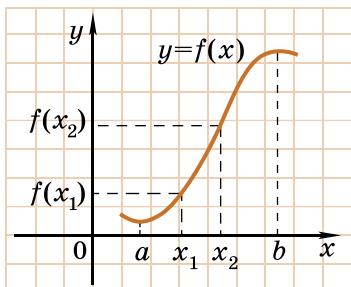


Функцію $y = f(x)$ називають **зростаючою** на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає більше значення функції.

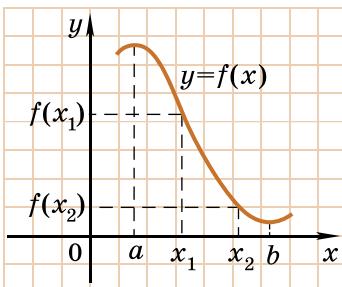
Інакше кажучи, функцію $y = f(x)$ називають зростаючою на деякому проміжку, якщо для будь-яких x_1 і x_2 із цього проміжку таких, що $x_2 > x_1$, справджується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$. На малюнку 2.1 зображено графік функції $y = f(x)$, яка зростає на проміжку $[a; b]$, при цьому проміжок $[a; b]$ називають **проміжком зростання функції**.



Функцію $y = f(x)$ називають **спадною** на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає менше значення функції.



Мал. 2.1



Мал. 2.2

Тобто, функцію $y = f(x)$ називають спадною на деякому проміжку, якщо для будь-яких x_1 і x_2 із цього проміжку таких, що $x_2 > x_1$, справджується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$. На малюнку 2.2 зображеного графік функції $y = f(x)$, яка спадає на проміжку $[a; b]$, при цьому проміжок $[a; b]$ називають *проміжком спадання функції*.

Неважко помітити, що при русі вздовж графіка зліва направо (тобто в напрямку зростання аргументу x), графік зростаючої на деякому проміжку функції «прямує вгору» («зростає»), а графік спадної функції – «прямує вниз» («спадає»).



Функцію $y = f(x)$ називають монотонною на деякому проміжку, якщо вона на цьому проміжку або зростає, або спадає.

На кожному з малюнків 2.1 і 2.2 функція $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$ є монотонною. У такому разі проміжок $[a; b]$ називають *проміжком монотонності функції*.

Задача 1. Знайти проміжки зростання і спадання функції:

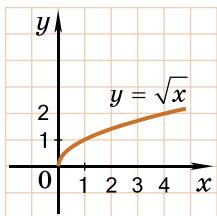
$$1) \ y = \sqrt{x}; \quad 2) \ y = -3x + 2; \quad 3) \ y = x^2 - 2x + 4.$$

Розв'язання. 1) Графік функції $y = \sqrt{x}$ зображенено на малюнку 2.3. Функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$.

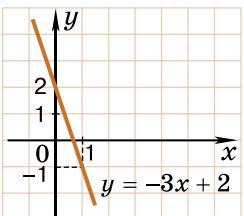
2) Графіком функції $y = -3x + 2$ є пряма, для побудови якої знайдемо дві її точки: $(0; 2)$ і $(1; -1)$. Графік зображенено на малюнку 2.4. Функція спадає на $(-\infty; +\infty)$.

3) Графіком функції $y = x^2 - 2x + 3$ є парабола, гілки якої напрямлені вгору. Знайдемо абсцису і ординату вершини параболи: $x_{\text{в}} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$; $y_{\text{в}} = y(x_{\text{в}}) = 1 - 2 \cdot 1 + 3 = 2$.

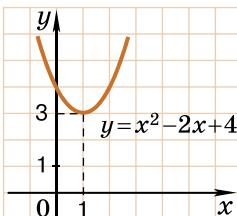
Графік зображенено на малюнку 2.5. Функція спадає на проміжку $(-\infty; 1]$ і зростає на проміжку $[1; +\infty)$.



Мал. 2.3



Мал. 2.4



Мал. 2.5

2. Парність та непарність функцій

Ці містить також і число $(-x)$. Серед функцій, область визначення яких симетрична відносно нуля, розрізняють парні та непарні.

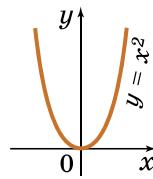
Функцію $y = f(x)$ називають парною, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного x з області визначення справджується рівність:

$$f(-x) = f(x).$$

Задача 2. Дослідити на парність функцію $f(x) = x^2$.

- Розв'язання. $D(f) = (-\infty; +\infty)$, тобто область визначення функції симетрична відносно нуля.
- Крім того, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
- Отже, функція $f(x) = x^2$ – парна.
- Відповідь. Функція парна.

На малюнку 2.6 схематично зображеного графік функції $y = x^2$. Він є симетричним відносно осі y . Узагалі,



Мал. 2.6

графік будь-якої парної функції симетричний відносно осі y .

Дійсно, коли функція $y = f(x)$ – парна, то будь-яким двом протилежним значеням аргументу x і $-x$ відповідає одне й те саме значення функції y , а точки $(x; y)$ і $(-x; y)$, як відомо, – симетричні відносно осі ординат.

Функцію $y = f(x)$ називають непарною, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного x з області визначення справджується рівність:

$$f(-x) = -f(x).$$

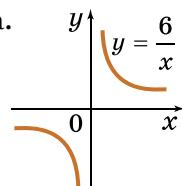
Задача 3. Дослідити на парність функцію $f(x) = \frac{6}{x}$.

Розв'язання. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Область визначення функції симетрична відносно нуля. Крім того,

$$f(-x) = \frac{6}{-x} = -\frac{6}{x} = -f(x). \text{ Отже, } f(x) = \frac{6}{x} \text{ — непарна.}$$

Відповідь. Функція непарна.

На малюнку 2.7 схематично зображеного графік функції $y = \frac{6}{x}$. Він є симетричним відносно початку координат. У загалі,



Мал. 2.7



графік будь-якої непарної функції симетричний відносно початку координат.

Дійсно, коли функція $y = f(x)$ — непарна, то будь-яким двом протилежним значенням аргументу x і $-x$ відповідають протилежні значення функції y і $-y$, а точки $(x; y)$ і $(-x; -y)$, як відомо, — симетричні відносно початку координат.

Якщо область визначення функції $y = f(x)$ не є симетричною відносно нуля або не виконується жодна з рівностей $f(-x) = f(x)$ і $f(-x) = -f(x)$, то кажуть, що функція $y = f(x)$ *ні парна, ні непарна*.

Задача 4. Дослідити на парність функцію:

$$1) f(x) = \frac{1}{x-1}; \quad 2) f(x) = x^2 + x.$$

Розв'язання. 1) $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Область визначення функції не є симетричною відносно нуля, оскільки $-1 \in D(f)$, а $1 \notin D(f)$. Тому функція — *ні парна, ні непарна*.

2) $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Область визначення симетрична відносно нуля. Знайдемо $f(-x)$. Маємо:

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x = -(-x^2 + x).$$

Оскільки $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$, то функція — *ні парна, ні непарна*.

Відповідь. 1) *ні парна, ні непарна*; 2) *ні парна, ні непарна*.

3. Неперервність функції

Важливою властивістю функції є її *неперервність*. Інтуїтивне уявлення про неперервність функції можна отримати, будуючи її графік.

Будемо називати функцію *неперервною на деякому проміжку*, якщо її графік на цьому проміжку — неперервна лінія.

Наприклад, функція $y = -3x + 2$, графік якої зображенено на малюнку 2.4, є неперервною на проміжку $(-\infty; +\infty)$, а функція $y = \frac{6}{x}$, графік якої зображенено на малюнку 2.7, є неперервною на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

Будемо казати, що функція $y = f(x)$ неперервна в точці x , якщо ця точка належить деякому проміжку, на якому функція $y = f(x)$ є неперервною. Функція $y = \frac{6}{x}$ є неперервною, наприклад у точці $x = -8$, адже ця точка належить проміжку $(-\infty; 0)$, на якому функція $y = \frac{6}{x}$ неперервна, та в точці $x = 5$, адже ця точка належить проміжку $(0; +\infty)$, на якому функція $y = \frac{6}{x}$ також є неперервною.

У точці $x = 0$ функція $y = \frac{6}{x}$ не є неперервною, адже ця точка не належить жодному з проміжків $(-\infty; 0)$ або $(0; +\infty)$, на яких функція неперервна. У такому разі кажуть, що в точці $x = 0$ функція $y = \frac{6}{x}$ має розрив, а точку $x = 0$ при цьому називають *точкою розриву*.

Зауважимо, що *всі відомі нам функції, які задаються однією формулою, неперервні в кожній точці своєї області визначення, оскільки їх графіки на кожному з проміжків області визначення – неперервні лінії*. Це зауваження дає можливість досліджувати нескладні функції на неперервність та точки розриву без побудови їх графіків.

Задача 5. Дослідити функцію $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$ на неперервність і точки розриву.

Розв'язання. Областю визначення функції є множина всіх значень x , для яких $x^2 + 2x - 3 \neq 0$, тобто $x \neq 1$; $x \neq -3$. Отже, $D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (1; +\infty)$.

Тому функція $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$ є неперервною на кожному з проміжків $(-\infty; -3)$, $(-3; 1)$ та $(1; +\infty)$, а точки $x = 1$ і $x = -3$ є точками розриву функції.

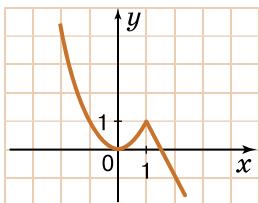
Відповідь. $(-\infty; -3)$, $(-3; 1)$, $(1; +\infty)$ – проміжки неперервності, 1 і -3 – точки розриву.

Дослідимо на неперервність і точки розриву функції, які для різних значень аргументу задано різними формулами.

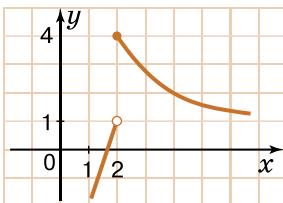
Задача 6. Дослідити на неперервність і точки розриву функцію:

$$1) y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 1, \\ -2x + 3, & \text{якщо } x > 1; \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} 3x - 5, & \text{якщо } x < 2, \\ \frac{8}{x}, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$$

- Розв'язання. 1) Графік функції зображенено на малюнку 2.8. Функція неперервна на $(-\infty; +\infty)$, точок розриву немає.
- 2) Графік функції зображенено на малюнку 2.9. Функція неперервна на кожному з проміжків $(-\infty; 2)$ і $(2; +\infty)$, а в точці $x = 2$ має розрив.



Мал. 2.8



Мал. 2.9

Відповідь. 1) Неперервна на $(-\infty; +\infty)$, точок розриву немає. 2) $(-\infty; 2); (2; +\infty)$ – проміжки неперервності, 2 – точка розриву.

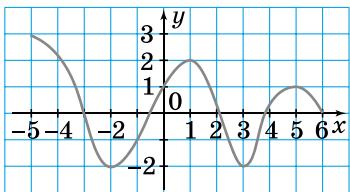


- Яку функцію називають зростаючою на деякому проміжку, а яку – спадною? • Яку функцію називають монотонною на деякому проміжку? • Яку область визначення функції називають симетричною відносно нуля? • Яку функцію називають парною, а яку – непарною? • Яку властивість має графік парної функції, а яку – непарної? • Яку функцію називають неперервною на проміжку? • Яку функцію називають неперервною в точці?

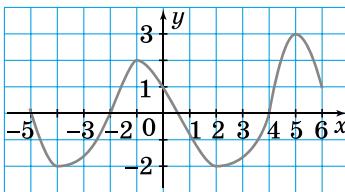


Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1. На малюнку 2.10 зображенено графік функції, визначеного на проміжку $[-5; 6]$. Знайдіть проміжки зростання і проміжки спадання функції.
2. На малюнку 2.11 зображенено графік функції, визначеного на проміжку $[-5; 6]$. Знайдіть проміжки зростання і проміжки спадання функції.
3. Відомо, що $f(-1) = 7$. Знайдіть $f(1)$, якщо функція f :
 - 1) парна;
 - 2) непарна.



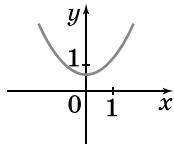
Мал. 2.10



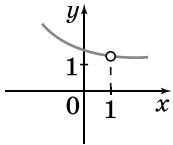
Мал. 2.11

- 2.4.** Відомо, що $g(2) = 9$. Знайдіть $g(-2)$, якщо функція g :
- 1) парна;
 - 2) непарна.

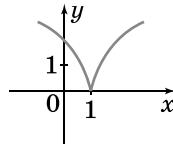
- 2.5. (Усно).** Серед функцій, графіки яких зображені на малюнках 2.12–2.17, знайдіть ті, що є неперервними в точці $x = 1$.



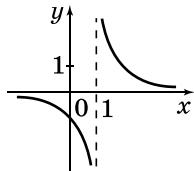
Мал. 2.12



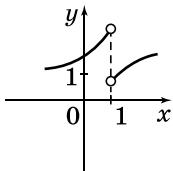
Мал. 2.13



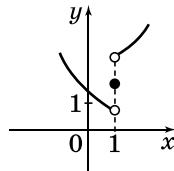
Мал. 2.14



Мал. 2.15



Мал. 2.16



Мал. 2.17

- 2.6.** Функція $f(x)$ зростає на проміжку $[-3; 3]$. Порівняйте:

- 1) $f(1,2)$ і $f(1)$;
- 2) $f\left(-\frac{1}{5}\right)$ і $f\left(-\frac{1}{4}\right)$.

- 2.7.** Функція $g(x)$ спадає на проміжку $[0; 4]$. Порівняйте:

- 1) $g(2)$ і $g(2,1)$;
- 2) $g\left(\frac{1}{7}\right)$ і $g\left(\frac{1}{8}\right)$.

- 2.8.** Функцію $f(x)$ задано на проміжку $[-4; 4]$, причому на проміжку $[-4; 0]$ вона зростає, а на проміжку $[0; 4]$ – спадає. Порівняйте:

- 1) $f(-3)$ і $f(-1)$;
- 2) $f(1)$ і $f(3,2)$.

- 2.9.** Зобразіть схематично графік функції $f(x)$, якщо:

- 1) $f(x)$ зростає на проміжку $[-5; 1]$ і спадає на проміжку $[1; 4]$;
- 2) $f(x)$ спадає на проміжках $[-6; -2]$ та $[2; 6]$ і зростає на проміжку $[-2; 2]$.

2.10. Зобразіть схематично графік функції $g(x)$, якщо:

- 1) $g(x)$ спадає на проміжку $[0; 3]$ і зростає на проміжку $[3; 7]$;
- 2) $g(x)$ зростає на проміжках $[-5; -1]$ та $[2; 5]$ і спадає на проміжку $[-1; 2]$.

Знайдіть проміжки зростання і проміжки спадання функції, попередньо побудувавши схематично її графік (2.11–2.12):

2.11. 1) $f(x) = 2x - 7$; 2) $g(x) = 3 - x$; 3) $h(x) = x^2$;

4) $t(x) = \frac{6}{x}$; 5) $p(x) = \sqrt{x}$; 6) $\varphi(x) = -\frac{2}{x}$.

2.12. 1) $f(x) = 5x$; 2) $g(x) = -x$; 3) $p(x) = \frac{8}{x}$; 4) $\psi(x) = -\frac{6}{x}$.

Доведіть, що парною є функція (2.13–2.14):

2.13. 1) $f(x) = x^6$; 2) $f(x) = x^2 - 2$;

3) $f(x) = 3|x|$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$.

2.14. 1) $f(x) = x^4$; 2) $f(x) = |x| - 3$;

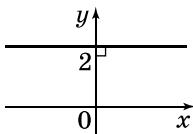
3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Доведіть, що непарною є функція (2.15–2.16):

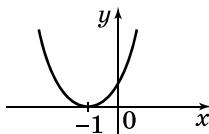
2.15. 1) $f(x) = x^5$; 2) $f(x) = \frac{4}{x}$; 3) $f(x) = x^3 + x$; 4) $f(x) = -\frac{1}{x^7}$.

2.16. 1) $f(x) = x$; 2) $f(x) = -\frac{5}{x}$; 3) $f(x) = x - x^5$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

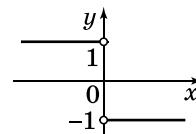
2.17. (Усно). Які з функцій на малюнках 2.18–2.23 є парними, які – непарними, а які – ні парними, ні непарними?



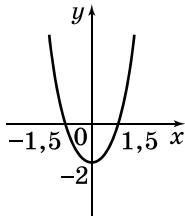
Мал. 2.18



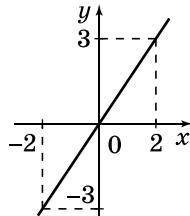
Мал. 2.19



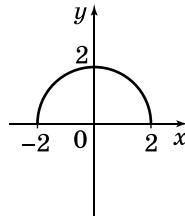
Мал. 2.20



Мал. 2.21



Мал. 2.22



Мал. 2.23

Знайдіть проміжки неперервності і точки розриву функції (2.18–2.19):

2.18. 1) $y = 2x - 7$; 2) $y = \frac{2}{x-1}$; 3) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}$; 4) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$.

2.19. 1) $y = -8x + 1$; 2) $y = \frac{7}{x+1}$;

3) $y = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}$; 4) $y = \frac{1}{5+x^6}$.

 Знайдіть проміжки зростання і проміжки спадання функції (2.20–2.21):

2.20. 1) $y = x^2 - 2x$; 2) $y = -x^2 + 4x - 1$.

2.21. 1) $y = -x^2 + 6x$; 2) $y = x^2 + 8x + 3$.

2.22. М'яч рухається за законом $s(t) = 8t - 4t^2$, де s – відстань у метрах від поверхні землі, t – час у секундах, $t \geq 0$.

1) Побудуйте графік руху м'яча.

2) Визначте, у який момент часу м'яч буде на землі.

3) Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $s(t)$.

4) Знайдіть найбільшу висоту, на яку підніметься м'яч.

Дослідіть функцію на парність (2.23–2.24):

2.23. 1) $f(x) = 5 + x$; 2) $f(x) = x^2 - 0,1$; 3) $f(x) = 7x^5$;

4) $f(x) = x^4 - x$; 5) $f(x) = 6x^6 + 8x^8$; 6) $f(x) = x^3 + x$;

7) $f(x) = \frac{1}{x+2}$; 8) $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x^4 + 3}$; 9) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;

10) $f(x) = x^2 + 2x - 3$;

11) $f(x) = (x+2)(x-3) + x$;

12) $f(x) = (x-2)^2 - (x+2)^2$.

2.24. 1) $f(x) = -7x$; 2) $f(x) = 3x^2 + 2x$; 3) $f(x) = 2x^8 - x^2$;

4) $f(x) = \frac{1}{x-3}$; 5) $f(x) = \frac{x}{x^4 + 1}$; 6) $f(x) = \frac{2+x}{x}$;

7) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$; 8) $f(x) = x^2 - 4x$;

9) $f(x) = (x-3)(x+5) - 2x$.

2.25. Чи є функція $g(x) = x^4$ парною, якщо її область визначення є множина:

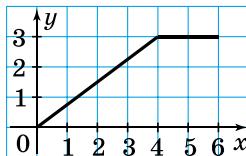
- 1) $[-2; 1]$; 2) $[-4; 4]$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$?

2.26. Чи є функція $g(x) = x^3$ непарною, якщо її область визначення є множина:

- 1) $[-1; 1]$; 2) $[-1; 2]$; 3) $(-\infty; -1]$; 4) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$?

2.27. Функцію $y = f(x)$ задано на проміжку $[-6; 6]$. Частину її графіка зображенено на малюнку 2.24. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона:

- 1) парна; 2) непарна.



Мал. 2.24

Знайдіть проміжки неперервності та точки розриву функції (2.28–2.29):

$$2.28. 1) y = \begin{cases} -1, & \text{если } x \leq 1, \\ 1, & \text{если } x > 1; \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} 2, & \text{если } x < 0, \\ x + 2, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{2.29. 1) } y = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \leq 0, \\ -1, & \text{якщо } x > 0; \end{cases} \quad 2) \quad y = \begin{cases} x + 3, & \text{якщо } x < 1, \\ 4, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$$

4 Побудуйте графік функції та знайдіть проміжки, на яких вона зростає, та проміжки, на яких – спадає (2.30–2.31):

$$2.30. f(x) = \begin{cases} \frac{8}{x}, & \text{якщо } x \leq -4, \\ 0, 5x, & \text{якщо } -4 < x \leq 4, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq -4. \end{cases}$$

$$\text{2.31. } f(x) = \begin{cases} -4x, & \text{якщо } x < 0, \\ x^2, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 2, \\ 5 - \frac{1}{2}x, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Дослідіть функцію на парність (2.32–2.33):

$$\begin{array}{ll} \text{2.32. 1) } f(x) = \frac{1}{x^5 + 4x}; & 2) f(x) = \frac{x^4 - x}{x}; \\ 3) f(x) = |x - 2| + |x + 2|; & 4) f(x) = |x - 1| - |x + 1|. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \textbf{2.33.} \quad & 1) f(x) = \frac{3}{x^2 + x^4}; & 2) f(x) = \frac{x + x^6}{x}; \\ & 3) f(x) = |x + 7| - |x - 7|; & 4) f(x) = |x + 1| + |x - 1|. \end{aligned}$$

2.34. Функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені на множині всіх дійсних чисел. Чи є функція $u(x)$ парною або непарною, якщо:

- 1) $u(x) = f^5(x) \cdot g(x)$, $f(x)$ – парна, $g(x)$ – непарна;
 - 2) $u(x) = 4f(x) - 2g(x)$, $f(x)$ і $g(x)$ – парні;
 - 3) $u(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x)$ – непарна, $g(x)$ – парна;
 - 4) $u(x) = f(x) \cdot g^2(x)$, $f(x)$ і $g(x)$ – непарні?

2.35. При якому значенні a функція $y = f(x)$ є неперервною на множині R , якщо:

$$1) f(x) = \begin{cases} 4x + 1, & \text{якщо } x \neq 1, \\ a, & \text{якщо } x = 1; \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{якщо } x \leq -1, \\ x + a, & \text{якщо } x > -1? \end{cases}$$

2.36. При якому значенні a функція $y = g(x)$ є неперервною на множині R , якщо:

$$1) g(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{якщо } x \neq 2, \\ a, & \text{якщо } x = 2; \end{cases} \quad 2) g(x) = \begin{cases} 4 + x, & \text{якщо } x \leq 1, \\ 2x - a, & \text{якщо } x > 1? \end{cases}$$



Життєва математика

2.37. Машина таксі за місяць проїхала 6000 км. Витрати пального для цієї автівки в середньому складають 9 літрів на 100 км. Вартість пального – 22 грн/л. Скільки було витрачено на бензин за цей місяць?



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

2.38. Обчисліть:

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt{25}; & 2) \sqrt{16} - 2\sqrt{0,01}; & 3) \frac{1}{2}\sqrt{100} - (\sqrt{3})^2; \\ 4) \sqrt{0} + \frac{1}{4}(2\sqrt{2})^2; & 5) 5(-\sqrt{7})^2; & 6) (\sqrt{5})^4 + \sqrt{2^3 + 1}. \end{array}$$

2.39. При яких значеннях x має зміст вираз:

$$1) \sqrt{x}; \quad 2) \sqrt{2x - 7}; \quad 3) \sqrt{1 + 8x}; \quad 4) \sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 7}?$$

2.40. Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^2 = 36; \quad 2) x^2 = 0; \quad 3) x^2 = -9; \quad 4) x^2 = 7.$$

§ 3. КОРІНЬ n -ГО СТЕПЕНЯ. АРИФМЕТИЧНИЙ КОРІНЬ n -ГО СТЕПЕНЯ

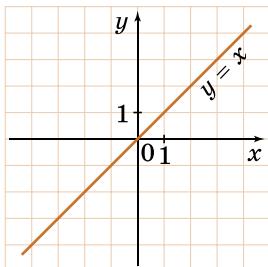
1. Функція $y = x^n$,
де $n \in N$

Розглянемо функцію $y = x^n$, де n – натуральне число. Її називають степеневою функцією з натуральним показником.

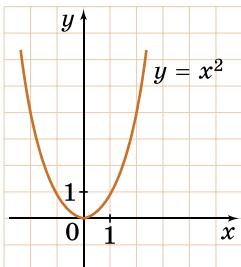
Степеневі функції для $n = 1$ та $n = 2$, тобто функції $y = x$ та $y = x^2$, нам відомі ще з курсу алгебри попередніх класів. Їх графіки зображені на малюнках 3.1 та 3.2.

З'ясуємо властивості функції $y = x^n$ та вигляд її графіка для будь-яких значень n .

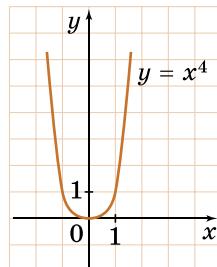
Спочатку розглянемо випадок, коли n – парне число. На малюнку 3.2 подано графік функції $y = x^2$, а на малюнку 3.3 – графік функції $y = x^4$. Оскільки $(-x)^n = x^n$, якщо n – парне, то функція $y = x^n$ є парною, а отже, її графік симетричний відносно осі ординат.



Мал. 3.1



Мал. 3.2



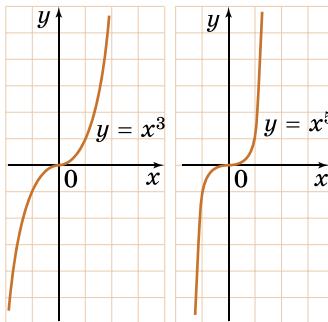
Мал. 3.3

Розглянемо випадок, коли n – непарне число. На малюнку 3.4 зображенено графік функції $y = x^3$, а на малюнку 3.5 – графік функції $y = x^5$.

Оскільки $(-x)^n = -x^n$, коли n – непарне, то функція $y = x^n$ є непарною, а отже, її графік симетричний відносно початку координат.

Графік функції $y = x^n$ з парним натуральним показником n зображенено на малюнку 3.6.

Графік функції $y = x^n$ з непарним натуральним показником n при $n \geq 3$ зображенено на малюнку 3.7.



Мал. 3.4

Мал. 3.5



Мал. 3.6



Мал. 3.7

Узагальнимо властивості функції $y = x^n$, де n – натуральне число, і подамо їх у таблиці.

Функція $y = x^n$, $n \in N$			
Властивості		n – парне	n – непарне
1	Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
2	Область значень	$[0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
3	Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
4	Знакосталість ($y > 0$)	$x < 0$ або $x > 0$	$x > 0$
5	Знакосталість ($y < 0$)	–	$x < 0$
6	Парність, непарність	парна	непарна
7	Проміжки зростання	$[0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
8	Проміжки спадання	$(-\infty; 0]$	–

2. Корінь n -го степеня

Нагадаємо, що *квадратним коренем із числа a називають таке число, квадрат якого дорівнює a .*

Наприклад, числа 4 і -4 – квадратні корені із числа 16, бо $4^2 = 16$ і $(-4)^2 = 16$; 0 – квадратний корінь із числа 0, оскільки $0^2 = 0$. Квадратного кореня із числа -9 не існує, бо не існує числа, квадрат якого дорівнює -9 .

У той самий спосіб визначимо і корінь n -го степеня із числа a , де $n \in N$, $n > 1$.

Коренем n -го степеня із числа a називають таке число, n -й степінь якого дорівнює a .

Наприклад, корінь третього степеня із числа 64 дорівнює 4, оскільки $4^3 = 64$. Числа 3 і -3 є коренями четвертого степеня із числа 81, бо $3^4 = 81$ і $(-3)^4 = 81$. Коренем п'ятого степеня із числа -32 є число -2 , оскільки $(-2)^5 = -32$.

3. Арифметичний корінь n -го степеня

Як і для квадратного кореня, для кореня n -го степеня розглянемо поняття арифметичного кореня. Нагадаємо, що *арифметичним квадратним коренем з невід'ємного числа a називають таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a .* Арифметичний квадратний корінь із числа a позначають \sqrt{a} і читають так: *квадратний корінь із числа a* (слово «арифметичний» при цьому домовилися не вживати).



Арифметичним коренем n -го степеня з невід'ємного числа a називають невід'ємне число, n -й степінь якого дорівнює a .

Арифметичний корінь n -го степеня із числа a позначають $\sqrt[n]{a}$, при цьому число n називають *показником кореня*, а число a – *підкореневим виразом*. Знак кореня $\sqrt[n]{}$ ще називають *радикалом*. Запис $\sqrt[n]{a}$ читають так: корінь n -го степеня із числа a (тут також слово «арифметичний» не вживають).

Якщо $n = 2$, матимемо арифметичний квадратний корінь із числа a , який позначають \sqrt{a} (показник кореня в цьому випадку не пишуть). Якщо $n = 3$, матимемо $\sqrt[3]{a}$ – *арифметичний кубічний корінь* із числа a (слово *арифметичний* під час читання не вживають).

Задача 1. Знайти: 1) $\sqrt[3]{27}$; 2) $\sqrt[4]{16}$; 3) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$; 4) $\sqrt[7]{0}$.

• Розв’язання. 1) $\sqrt[3]{27} = 3$, бо $3 \geq 0$ і $3^3 = 27$;

• 2) $\sqrt[4]{16} = 2$, бо $2 \geq 0$ і $2^4 = 16$;

• 3) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$, бо $\frac{1}{2} \geq 0$ і $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$;

• 4) $\sqrt[7]{0} = 0$, бо $0 \geq 0$ і $0^7 = 0$.

З означення випливає, що рівність $\sqrt[n]{a} = b$, де $a \geq 0$, є правильною, якщо виконуються одночасно дві умови: 1) $b \geq 0$; 2) $b^n = a$. Тому, якщо в рівності $b^n = a$ замість b підставити $\sqrt[n]{a}$, то отримаємо тотожність $(\sqrt[n]{a})^n = a$.



Для будь-якого $a \geq 0$, $n \in N$, $n \geq 2$ маємо тотожність $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Наприклад, $(\sqrt[7]{17})^7 = 17$;

$$(-\sqrt[4]{8})^4 = (-1 \cdot \sqrt[4]{8})^4 = (-1)^4 \cdot (\sqrt[4]{8})^4 = 1 \cdot 8 = 8;$$

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt[6]{16}\right)^6 = \left(-\frac{1}{2}\right)^6 \cdot (\sqrt[6]{16})^6 = \frac{1}{64} \cdot 16 = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Задача 2. Знайти значення виразу: $\sqrt[5]{3^4 + 5^2 + 137}$.

• Розв’язання. Спочатку треба знайти значення підкореневого виразу $3^4 + 5^2 + 137$, а потім з отриманого значення добути корінь 5-го степеня:

$$\sqrt[5]{3^4 + 5^2 + 137} = \sqrt[5]{81 + 25 + 137} = \sqrt[5]{243} = 3.$$

Відповідь. 3.

4. Тотожність для арифметичного кореня n -го степеня

з від'ємного числа. Наприклад, $\sqrt[5]{-32} = -2$, бо $(-2)^5 = -32$;
 $\sqrt[7]{-1} = -1$, бо $(-1)^7 = -1$; $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = -\frac{2}{3}$, бо $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$.

Тому рівність $\sqrt[n]{a} = x$, де a – будь-яке число, n – непарне, є правильною, якщо виконується лише одна умова: $x^n = a$. Приходимо до висновку:

! для будь-якого числа a , непарного натурального числа n , де $n \geq 3$, маємо тотожність: $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Оскільки $\sqrt[3]{-8} = -2$ і $-\sqrt[3]{8} = -2$, то $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$. У загалі,

! для коренів непарного степеня маємо тотожність:

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}.$$

Отже,

- 1) якщо $a \geq 0$, $n \in N$, $n \geq 2$, то вираз $\sqrt[n]{a}$ означає арифметичний корінь n -го степеня із числа a ;
- 2) якщо $a < 0$, то при непарному n вираз $\sqrt[n]{a}$ означає корінь n -го степеня із числа a , при парному n цей вираз не має змісту.

Приходимо до висновку:

! вираз $\sqrt[n]{a}$ при парному n має зміст для $a \geq 0$, а при непарному n – для будь-якого значення a .

Задача 3. При яких значеннях x має зміст вираз:

1) $\sqrt[7]{x+2}$; 2) $\sqrt[4]{2x-10}$?

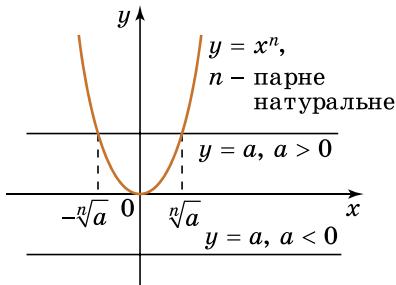
- Розв’язання. 1) Корінь 7-го (непарного) степеня існує для будь-якого значення підкореневого виразу, тому вираз має зміст для будь-якого значення x .
- 2) Корінь 4-го (парного) степеня має зміст лише в тому випадку, коли підкореневий вираз – невід’ємний. Розв’яжемо нерівність: $2x - 10 \geq 0$, звідки $x \geq 5$.
- Відповідь. 1) x – будь-яке число; 2) $x \geq 5$.

5. Рівняння $x^n = a$, $n \in N$, $n \geq 2$

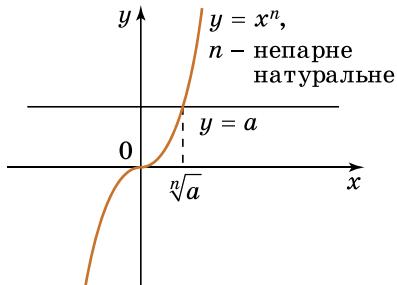
Розглянемо рівняння $x^n = a$, де $a \in R$, $n \in N$, $n \geq 2$.

Нехай маємо випадок, коли n – парне. Розв’яжемо рівнян-

ня $x^n = a$ графічно. Для цього побудуємо графіки функцій $y = x^n$, де n – парне, і $y = a$ (мал. 3.8). Якщо $a > 0$, то графіки перетинаються у двох точках, тобто рівняння $x^n = a$ матиме два корені. Оскільки $(\sqrt[n]{a})^n = (-\sqrt[n]{a})^n = a$, при парному n , то $x_1 = \sqrt[n]{a}$ і $x_2 = -\sqrt[n]{a}$ – корені рівняння $x^n = a$ у випадку парного n . Якщо $a = 0$, то рівняння $x^n = 0$ має єдиний корінь – число 0. Якщо $a < 0$, то рівняння $x^n = a$, при парному n , коренів не має.



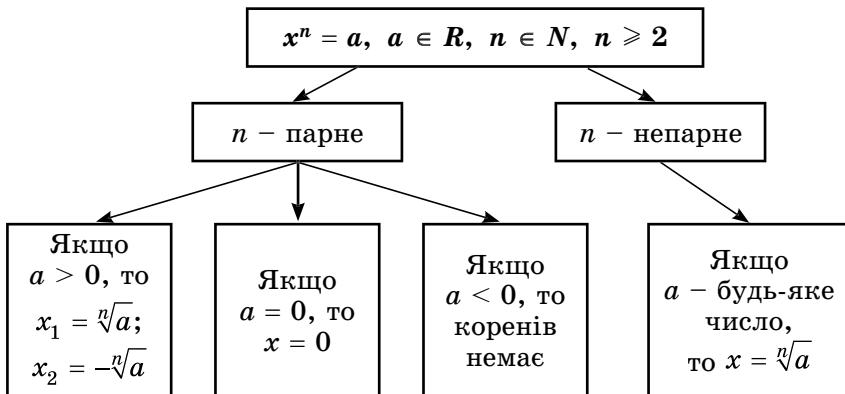
Мал. 3.8



Мал. 3.9

Нехай n – непарне, тоді для будь-якого a рівняння $x^n = a$ має єдиний корінь (мал. 3.9). Оскільки $(\sqrt[n]{a})^n = a$, то $x = \sqrt[n]{a}$ – єдиний корінь рівняння $x^n = a$, коли n – непарне.

Систематизуємо дані про розв'язки рівняння у вигляді схеми.



Задача 5. Розв'язати рівняння:

- 1) $x^4 = 81$; 2) $x^6 = -1$; 3) $x^5 = 19$; 4) $(2x - 1)^8 = 1$.
- Розв'язання. 1) $x_1 = \sqrt[4]{81}, x_2 = -\sqrt[4]{81}$; отже, $x_1 = 3; x_2 = -3$.
- 2) Коренів немає.
- 3) $x = \sqrt[5]{19}$; корінь рівняння $x^5 = 19$ є ірраціональним числом.

$$4) \text{ Маємо: } 2x - 1 = \sqrt[8]{1} \quad \text{або} \quad 2x - 1 = -\sqrt[8]{1};$$

$$\begin{array}{ll} 2x - 1 = 1 & 2x - 1 = -1; \\ x = 1 & x = 0. \end{array}$$

Отже, рівняння має два корені: 0 і 1.

Відповідь. 1) 3; -3; 2) коренів немає; 3) $\sqrt[5]{19}$; 4) 0; 1.

А ще раніше...

Терміни «радикал» і «корінь», які було введено у ХІІІ ст., походять від латинського слова *radix*, яке має два значення: сторона і корінь. Грецькі математики замість «добувати корінь» говорили « знайти сторону квадрата за його даною величиною ». Під величиною квадрата вони мали на увазі його площину.

Знак кореня у вигляді символу $\sqrt{}$ уперше з'явився в 1525 р. У 1626 р. голландський математик Альберт Жірап (1595–1663) увів позначення $2\sqrt{}$, $3\sqrt{}$..., при цьому над підкореневим виразом ставили риску. Замість сучасних $\sqrt{5}$ писали $\sqrt[2]{5}$. Сучасне позначення кореня з'явилося завдяки французькому математику, фізику і філософу Рене Декарту (1596–1650). У своїй праці «Геометрія» (1637 р.) він з'єднав горизонтальну риску зі знаком $\sqrt{}$. Англійський математик, фізик і механік Ісаак Ньютона (1643–1727) записував корені будь-яких степенів у сучасному вигляді: $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$ тощо.



- Яку функцію називають степеневою функцією з натуральним показником?
- Сформулюйте властивості функції $y = x^n$ для парного n і для непарного n .
- Що називають коренем n -го степеня із числа a ?
- Що називають арифметичним коренем n -го степеня із числа a ?
- При яких значеннях a має зміст вираз $\sqrt[n]{a}$ у випадку парного n ; непарного n ?
- Що можна сказати про корені рівняння $x^n = a$, залежно від значень a і n , де $n \in N$, $n \geq 2$?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



Чи має зміст вираз:

3.1. 1) $\sqrt[3]{19}$; 2) $\sqrt[4]{-1}$; 3) $\sqrt[6]{8}$; 4) $\sqrt[5]{-17}$; 5) $\sqrt[8]{0}$; 6) $\sqrt{-3}$?

3.2. 1) $\sqrt[6]{1}$; 2) $\sqrt[9]{0}$; 3) $\sqrt[7]{-11}$; 4) $\sqrt[6]{-10}$; 5) $\sqrt[8]{12}$; 6) $\sqrt[5]{11}$?

3.3. Доведіть, що:

1) число $\frac{1}{2}$ є арифметичним кубічним коренем із числа $\frac{1}{8}$;

2) число 5 є арифметичним коренем четвертого степеня із числа 625;

- 3) число -1 не є арифметичним коренем шостого степеня із числа 1 ;
 4) число $0,1$ не є арифметичним коренем п'ятого степеня із числа $0,0001$.

Доведіть, що (3.4–3.5):

$$\begin{array}{lll} \text{3.4. } 1) \sqrt[3]{361} = 19; & 2) \sqrt[3]{-125} = -5; & 3) \sqrt[6]{1} = 1; \\ 4) \sqrt[5]{\frac{1}{243}} = \frac{1}{3}; & 5) \sqrt[8]{0} = 0; & 6) \sqrt[4]{0,0001} = 0,1. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{3.5. } 1) \sqrt{121} = 11; & 2) \sqrt[3]{0,027} = 0,3; & 3) \sqrt[4]{0} = 0; \\ 4) \sqrt[5]{-1} = -1; & 5) \sqrt[6]{64} = 2; & 6) \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}. \end{array}$$

Знайдіть значення виразу (3.6–3.7):

$$\begin{array}{lll} \text{3.6. } 1) \sqrt{0,25}; & 2) \sqrt[3]{64}; & 3) \sqrt[4]{1}; \\ 4) \sqrt[5]{-\frac{1}{32}}. & & \\ \text{3.7. } 1) \sqrt{0,81}; & 2) \sqrt[5]{32}; & 3) \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}; \\ 4) \sqrt[6]{1}. & & \end{array}$$

3.8. (Усно). Чи має розв'язки рівняння:

$$1) x^6 = 2; \quad 2) x^8 = -1; \quad 3) x^{10} = 0; \quad 4) x^7 = -2?$$

Обчисліть (3.9–3.10):

$$\begin{array}{lll} \text{3.9. } 1) 10\sqrt[3]{0,216}; & 2) 0,25\sqrt[3]{64}; & 3) 4\sqrt[3]{-\frac{3}{8}}; \\ 4) 3\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}. & & \\ \text{3.10. } 1) 2\sqrt[3]{0,125}; & 2) \frac{1}{3}\sqrt[4]{81}; & 3) 2\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}; \\ 4) 12\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}. & & \end{array}$$

Знайдіть значення виразу (3.11–3.12):

$$\begin{array}{ll} \text{3.11. } 1) \sqrt[3]{\frac{1}{8}} - \sqrt[4]{\frac{1}{16}}; & 2) \sqrt[5]{-0,00032} + \sqrt[3]{\frac{1}{125}}; \\ 3) 10\sqrt[6]{\frac{1}{64}} + \sqrt[4]{\frac{81}{125}}; & 4) \sqrt[7]{\frac{128}{2187}} + \sqrt[4]{\frac{81}{625}}. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{3.12. } 1) \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} - \sqrt[4]{\frac{16}{625}}; & 2) \sqrt[5]{-0,00001} + \sqrt[3]{\frac{8}{125}}; \\ 3) -3\sqrt[5]{\frac{1}{32}} + \sqrt[6]{\frac{64}{729}}; & 4) \sqrt[4]{\frac{16}{625}} - \sqrt[5]{\frac{243}{10\,000}}. \end{array}$$

Схематично побудуйте графік функції (3.13–3.14):

$$\text{3.13. } 1) y = x^4; \quad 2) y = x^9.$$

$$\text{3.14. } 1) y = x^3; \quad 2) y = x^6.$$

При яких значеннях змінної має зміст вираз (3.15–3.16):

- 3.15.** 1) $\sqrt{x+2}$; 2) $\sqrt[3]{a+9}$; 3) $\sqrt[4]{9-3b}$; 4) $\sqrt[6]{5c-4}$?
3.16. 1) $\sqrt{a-4}$; 2) $\sqrt[5]{b+7}$; 3) $\sqrt[6]{2x+6}$; 4) $\sqrt[8]{10-4y}$?

Обчисліть (3.17–3.18):

- 3.17.** 1) $(\sqrt{5})^2$; 2) $(\sqrt[3]{7})^3$; 3) $(-\sqrt[6]{2})^6$; 4) $(\sqrt[4]{17})^4$.
3.18. 1) $(\sqrt{3})^2$; 2) $(\sqrt[5]{9})^5$; 3) $(\sqrt[8]{2})^8$; 4) $(-\sqrt[10]{12})^{10}$.

Розв'яжіть рівняння (3.19–3.20):

- 3.19.** 1) $x^3 = 64$; 2) $x^3 = -64$; 3) $x^6 = 1$; 4) $x^6 = -1$;
5) $x^5 = 17$; 6) $x^5 = -17$; 7) $x^8 = 0$; 8) $x^{10} = 2$.
3.20. 1) $x^3 = 8$; 2) $x^3 = -8$; 3) $x^4 = 16$; 4) $x^4 = -16$;
5) $x^7 = 2$; 6) $x^7 = -2$; 7) $x^8 = 3$; 8) $x^{12} = 0$.

3.21. Чи належить графіку функції $y = \sqrt[4]{x}$ точка:

- 1) $A(0; 0)$; 2) $B(-1; 1)$; 3) $C(16; 2)$; 4) $D(81; -3)$?

 Знайдіть значення виразу (3.22–3.25):

- 3.22.** 1) $\sqrt[5]{0,01024} - \sqrt[3]{-\frac{27}{125}}$; 2) $\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}} - \sqrt{12\frac{1}{4}}$.
3.23. 1) $\sqrt[3]{-0,343} - \sqrt[5]{-\frac{243}{1024}}$; 2) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}} - \sqrt[3]{-15\frac{5}{8}}$.

- 3.24.** 1) $(2\sqrt[3]{5})^3$; 2) $(-3\sqrt[4]{2})^4$; 3) $(-2\sqrt[5]{11})^5$; 4) $(5\sqrt[3]{-0,1})^3$.

- 3.25.** 1) $(3\sqrt[3]{2})^3$; 2) $(-2\sqrt[4]{5})^4$; 3) $(-3\sqrt[5]{2})^5$; 4) $(10\sqrt[3]{-0,2})^3$.

При яких значеннях x має зміст вираз (3.26–3.27):

- 3.26.** 1) $\sqrt[6]{2x-x^2}$; 2) $\sqrt[5]{x^2-2x-3}$;
3) $\sqrt[4]{x^2+2x-8}$; 4) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x^2-4}$?

- 3.27.** 1) $\sqrt[8]{x^2+3x}$; 2) $\sqrt[7]{x^2-2x}$;
3) $\sqrt{-x^2+2x+3}$; 4) $\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[5]{x-7}$?

Розв'яжіть рівняння (3.28–3.29):

- 3.28.** 1) $\frac{1}{4}x^4 - 4 = 0$; 2) $\frac{1}{4}x^5 + 8 = 0$; 3) $9x^3 - \frac{1}{3} = 0$;
4) $(x-2)^6 = 1$; 5) $(x+5)^3 = 8$; 6) $(x-3)^7 = 5$.

- 3.29.** 1) $\frac{1}{16}x^6 - 4 = 0$; 2) $\frac{1}{3}x^3 + 9 = 0$; 3) $7x^4 + 7 = 0$;
4) $(x+7)^5 = 0$; 5) $(x+3)^4 = 81$; 6) $(x+1)^5 = 2$.

3.30. Знайдіть два послідовних цілих числа, між якими міститься число: 1) $\sqrt[3]{1,2}$; 2) $-\sqrt[4]{0,85}$; 3) $\sqrt[5]{33}$; 4) $-\sqrt[3]{7,8}$.

3.31. Бак має форму куба і вміщує $2,744 \text{ м}^3$ води. Знайдіть висоту бака і площину його основи.

4 **3.32.** Вкладник поклав на банківський депозит 10 000 грн, а через 3 роки на його депозитному рахунку стало 17 280 грн. Який відсоток річних виплачує банк вкладникам?

3.33. Вкладник відкрив у банку депозитний рахунок на суму 20 000 грн, а через 4 роки отримав 29 282 грн. Який відсоток річних надає банк?

Розв'яжіть рівняння (3.34–3.35):

3.34. 1) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$; 2) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$;
3) $x^{12} + 3x^6 + 2 = 0$; 4) $x^{16} - 4x^8 + 3 = 0$.

3.35. 1) $x^8 + x^4 - 2 = 0$; 2) $x^6 + 26x^3 - 27 = 0$;
3) $x^{16} + 5x^8 + 4 = 0$; 4) $x^{12} - 6x^6 + 5 = 0$.

Знайдіть область визначення функції (3.36–3.37):

3.36. $y = \sqrt[4]{x^2 - 4x - 5} + \frac{1}{\sqrt[6]{x+3}}$.

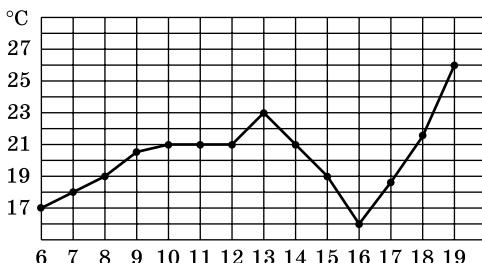
3.37. $y = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 3x + 10}} + \sqrt[3]{x+3}$.

3.38. Для всіх значень a розв'яжіть рівняння:

1) $x^6 = a + 1$; 2) $x^3 = a - 2$; 3) $ax^4 = a$; 4) $ax^{10} = 2$.

Життєва математика

3.39. На малюнку точками позначено щоденну середньодобову температуру повітря в Одесі з 6 по 19 червня. По горизонталі вказано дату місяця, по вертикалі – температуру у градусах Цельсія. Для наочності точки з'єднано лінією. Визначте по малюнку різницю між найбільшою і найменшою середньодобовими температурами у вказаний період. Відповідь подайте у градусах Цельсія.





Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

Обчисліть (3.40–3.41):

3.40. 1) $\sqrt{0,16 \cdot 25}$; 2) $\sqrt{2^4 \cdot 3^2}$; 3) $\sqrt{7^2 \cdot 0,01 \cdot 64}$;

4) $\sqrt{\frac{36}{625}}$; 5) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; 6) $\sqrt{2^2 \cdot 1\frac{9}{16}}$.

3.41. 1) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}$; 3) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{32}}$.

3.42. При яких значеннях x справдіжується рівність:

1) $\sqrt{x^2} = x$; 2) $\sqrt{x^2} = -x$?

3.43. Замініть вираз йому тотожно рівним, що не містить знака кореня:

1) $\sqrt{m^2}$; 2) $3\sqrt{p^2}$; 3) $\sqrt{100a^2}$;
4) $-\sqrt{36t^2}$; 5) $\sqrt{n^6}$; 6) $\sqrt{b^{12}}$.

3.44. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{l^2}$, де $l \geq 0$; 2) $\sqrt{t^4}$;
3) $3\sqrt{c^2}$, де $c < 0$; 4) $5\sqrt{p^6}$, де $p \geq 0$;
5) $\sqrt{m^{10}}$, де $m < 0$; 6) $x\sqrt{x^{14}}$, де $x < 0$.

§ 4. ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНОГО КОРЕНЯ n -ГО СТЕПЕНЯ

1. Корінь з добутку і дробу

З курсу алгебри 8 класу ми знаємо, що:

коли $a \geq 0$ і $b \geq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;

коли $a \geq 0$ і $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Такі самі властивості має й арифметичний корінь n -го степеня для $n > 2$.



Теорема 1 (про корінь n -го степеня з добутку). **Корінь n -го степеня з добутку двох невід'ємних чисел дорівнює добутку коренів n -го степеня із цих чисел, тобто якщо $a \geq 0$ і $b \geq 0$, то**

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Доведення. Оскільки $a \geq 0$ і $b \geq 0$, то вирази $\sqrt[n]{a}$ і $\sqrt[n]{b}$ мають зміст і $\sqrt[n]{a} \geq 0$, $\sqrt[n]{b} \geq 0$. Тому $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0$. Крім того,

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab.$$

Отже, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0$ і $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab$. Тоді, за означенням арифметичного кореня n -го степеня, маємо: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. ■

Теорему можна поширити і на випадок, коли множників під знаком кореня більше двох.

(Н) Наслідок. Корінь n -го степеня з добутку невід'ємних множників дорівнює добутку коренів n -го степеня із цих множників.

Доведення. Доведемо цей наслідок, наприклад, для трьох невід'ємних чисел $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$. Маємо:

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{(ab)c} = \sqrt[n]{ab} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}. \blacksquare$$

За властивістю про корінь з добутку, наприклад, маємо:

$$1) \sqrt[3]{27 \cdot 64} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 3 \cdot 4 = 12;$$

$$2) \sqrt[4]{8 \cdot 162} = \sqrt[4]{8 \cdot 2 \cdot 81} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Зauważення 1. Очевидно, що вираз $\sqrt[n]{ab}$ при парному n має зміст, коли $ab \geq 0$, тобто коли числа a і b – одного знака, а значить, і тоді, коли a і b – від'ємні. У такому випадку рівність у теоремі 1 набуває вигляду $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{-a} \cdot \sqrt[n]{-b}$. Отже, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}$, якщо $ab \geq 0$ і n – парне.

Якщо в рівності $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ помінити місцями ліву і праву частини, то одержимо тотожність:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \text{ де } a \geq 0, b \geq 0.$$

! **Добуток коренів n -го степеня з невід'ємних чисел дорівнює кореню n -го степеня з добутку цих чисел.**

$$\text{Наприклад, } \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{4 \cdot 8} = \sqrt[5]{32} = 2.$$

T Теорема 2 (про корінь n -го степеня з дробу). Корінь n -го степеня з дробу, чисельник якого невід'ємний, а знаменник додатній, дорівнює кореню n -го степеня із чисельника, поділеному на корінь n -го степеня із знаменника, тобто якщо $a \geq 0$ і $b > 0$, то

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Пропонуємо довести цю теорему самостійно.

За теоремою 2, наприклад, маємо:

$$1) \sqrt[4]{\frac{1}{256}} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{256}} = \frac{1}{4}; \quad 2) \sqrt[3]{15 \frac{5}{8}} = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{5}{2} = 2 \frac{1}{2}.$$

Зауваження 2. Очевидно, що корінь із частки при парному n має зміст, коли $ab \geq 0$, $b \neq 0$, отже, і у випадку, коли $a \leq 0$,

$b < 0$. У цьому випадку $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{-a}}{\sqrt[n]{-b}}$. Отже, якщо $ab \geq 0$, $b \neq 0$ і

n – парне, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$.

Якщо в рівності $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ помінити місцями ліву і праву частини, то матимемо тотожність:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ де } a \geq 0, b > 0.$$



Частка, чисельник якої корінь n -го степеня з невід'ємного числа, а знаменник – корінь n -го степеня з додатного числа, дорівнює кореню n -го степеня із частки цих чисел.

Наприклад, $\frac{\sqrt[5]{486}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\frac{486}{2}} = \sqrt[5]{243} = 3$;

$\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{250}} = \sqrt[3]{\frac{128}{250}} = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}$.

2. Корінь із степеня



Теорема 3 (про корінь n -го степеня із степеня). Для будь-якого дійсного a і натурального n , $n \geq 2$, маємо:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & \text{якщо } n \text{ – парне,} \\ a, & \text{якщо } n \text{ – непарне.} \end{cases}$$

- Доведення. 1) Якщо n – парне, то вираз $\sqrt[n]{a^n}$ має зміст для будь-якого a , оскільки в цьому випадку $a^n \geq 0$. Крім того, $|a| \geq 0$ і $|a|^n = a^n$. За означенням кореня n -го степеня, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

- 2) Якщо n – непарне, то вираз $\sqrt[n]{a^n}$ також має зміст для будь-якого a , і, за означенням кореня n -го степеня, маємо: $\sqrt[n]{a^n} = a$. ■

За теоремою 3, наприклад, маємо:

$$\sqrt[8]{9^8} = |9| = 9; \quad \sqrt[6]{(-2)^6} = |-2| = 2;$$
$$\sqrt[9]{7^9} = 7; \quad \sqrt[5]{2^{10}} = \sqrt[5]{(2^2)^5} = \sqrt[5]{4^5} = 4.$$

3. Корінь із кореня



Теорема 4. Якщо n і k – натуральні числа і $a \geq 0$, то

$$\sqrt[kn]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}.$$

- Доведення. Оскільки $a \geq 0$, то вирази $\sqrt[kn]{\sqrt[n]{a}}$ і $\sqrt[kn]{a}$ мають зміст і невід'ємні. Крім того, $(\sqrt[kn]{a})^{kn} = ((\sqrt[kn]{a})^k)^n = (\sqrt[k]{a})^n = a$.
- За означенням кореня n -го степеня маємо: $\sqrt[kn]{a} = \sqrt[kn]{a}$. ■

За теоремою 4, наприклад, маємо:

$$\sqrt[4]{\sqrt[7]{2}} = \sqrt[28]{2}; \quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{36}} = \sqrt[6]{36} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{36}} = \sqrt[3]{6}.$$



Теорема 5. Якщо n , k і m – натуральні числа і $a \geq 0$, то

$$\sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^k}.$$

- Доведення. Використовуючи попередню теорему, маємо:

$$\sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{mk}}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{(a^k)^m}} = \sqrt[n]{a^k}. ■$$

Зauważення 3. Якщо m – парне число, то вираз $\sqrt[mn]{a^{mk}}$ має зміст при будь-якому дійсному a , і тоді для будь-якого a має місце рівність: $\sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{|a|^k}$ (доведіть самостійно).

Зauważення 4. Домовимося, що корінь першого степеня із числа a дорівнює числу a . Це дозволяє використовувати тотожність $\sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^k}$ і у випадку, коли $n = 1$.

Враховуючи теорему 5 і зауваження, наприклад, маємо:

$$\sqrt[20]{a^{15}} = \sqrt[5\cdot 4]{a^{5\cdot 3}} = \sqrt[4]{a^3}; \quad \sqrt[10]{b^6} = \sqrt[5\cdot 2]{b^{3\cdot 2}} = \sqrt[5]{|b^3|};$$

$$\sqrt[21]{128} = \sqrt[21]{2^7} = \sqrt[7\cdot 3]{2^7} = \sqrt[3]{2^1} = \sqrt[3]{2};$$

$$\sqrt[5]{243^4} = \sqrt[5]{(3^5)^4} = \sqrt[5]{3^{5\cdot 4}} = 3^4 = 81.$$



Теорема 6. Якщо n – натуральне число, k – ціле число і $a > 0$, то

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

- Доведення. Оскільки $((\sqrt[n]{a})^k)^n = ((\sqrt[n]{a})^n)^k = a^k$, то, за означенням кореня n -го степеня, маємо: $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$. ■

Наприклад, 1) $(\sqrt[6]{4})^3 = \sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{(2^2)^3} = \sqrt[6]{2^6} = 2$;

2) $(\sqrt[3]{5})^{-6} = \sqrt[3]{5^{-6}} = \sqrt[3]{(5^3)^{-2}} = (\sqrt[3]{5^3})^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$.

4. Перетворення іrrаціональних виразів

Властивості арифметичного кореня n -го степеня використовують для тотожних перетворень виразів: *внесення множника з-під знака кореня, внесення множника під знак кореня, спрощення іrrаціональних виразів.*

Задача 1. Винести множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[3]{108}; \quad 2) \sqrt[5]{x^{11}}$.

• Розв'язання. 1) $\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{27 \cdot 4} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{4} = 3\sqrt[3]{4}$.

• 2) $\sqrt[5]{x^{11}} = \sqrt[5]{x^{10} \cdot x} = \sqrt[5]{(x^2)^5} \cdot \sqrt[5]{x} = x^2\sqrt[5]{x}$.

• Відповідь. 1) $3\sqrt[3]{4}; \quad 2) x^2\sqrt[5]{x}$.

Задача 2. Внести множник під знак кореня:

1) $2\sqrt[5]{3}; \quad 2) -3\sqrt[6]{2}; \quad 3) m\sqrt[8]{2}$, якщо $m \geq 0$; 4) $a\sqrt[4]{b}$, якщо $a < 0$.

• Розв'язання. 1) $2\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{32 \cdot 3} = \sqrt[5]{96}$.

• 2) $-3\sqrt[6]{2} = -\sqrt[6]{3^6} \cdot \sqrt[6]{2} = -\sqrt[6]{729 \cdot 2} = -\sqrt[6]{1458}$.

• 3) $m\sqrt[8]{2} = |m|\sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{m^8}\sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2m^8}$.

• 4) $a\sqrt[4]{b} = -|a|\sqrt[4]{b} = -\sqrt[4]{a^4}\sqrt[4]{b} = -\sqrt[4]{a^4b}$.

• Відповідь. 1) $\sqrt[5]{96}; \quad 2) -\sqrt[6]{1458}; \quad 3) \sqrt[8]{2m^8}; \quad 4) -\sqrt[4]{a^4b}$.

Задача 3. Спростити вираз: $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$.

• Розв'язання. Внесемо множник 5 під знак квадратного кореня та застосуємо теореми 4 і 5, матимемо:

• $\sqrt[3]{5\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{5^2 \cdot 5}} = \sqrt[3]{\sqrt{5^3}} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[2]{5^3} = \sqrt{5}$.

• Відповідь. $\sqrt{5}$.

Задача 4. Скоротити дріб: $\frac{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$.

• Розв'язання. Вирази $\sqrt[6]{a}$ і $\sqrt[6]{b}$ мають зміст, якщо $a \geq 0$ і $b \geq 0$, тому $\sqrt[3]{a} = (\sqrt[6]{a})^2$ і $\sqrt[3]{b} = (\sqrt[6]{b})^2$. Маємо:

• $\frac{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}{(\sqrt[6]{a})^2 - (\sqrt[6]{b})^2} = \frac{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}{(\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b})(\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b})} = \frac{1}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}}$.

• Відповідь. $\frac{1}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}}$.

Задача 5. Звільнитися від ірраціональності у знаменнику дробу: 1) $\frac{1}{\sqrt[5]{4}}$; 2) $\frac{10}{\sqrt[3]{4} + 1}$.

Розв'язання. 1) $\frac{1}{\sqrt[5]{4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^3}} = \frac{\sqrt[5]{8}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{\sqrt[5]{8}}{2}$.

2) Помножимо чисельник і знаменник дробу $\frac{10}{\sqrt[3]{4} + 1}$ на неповний квадрат різниці чисел $\sqrt[3]{4}$ і 1, матимемо:

$$\begin{aligned} \frac{10}{\sqrt[3]{4} + 1} &= \frac{10((\sqrt[3]{4})^2 - \sqrt[3]{4} \cdot 1 + 1^2)}{(\sqrt[3]{4} + 1)((\sqrt[3]{4})^2 - \sqrt[3]{4} \cdot 1 + 1^2)} = \frac{10(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4} + 1)}{(\sqrt[3]{4})^3 + 1^3} = \\ &= \frac{10(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4} + 1)}{4 + 1} = \frac{10(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4} + 1)}{5} = 2(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4} + 1). \end{aligned}$$

Відповідь. 1) $\frac{\sqrt[5]{8}}{2}$; 2) $2(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4} + 1)$.



- Сформулюйте і доведіть теорему про корінь n -го степеня з добутку.
- Чому дорівнює добуток коренів n -го степеня?
- Сформулюйте теорему про корінь n -го степеня з дробу.
- Чому дорівнює частка коренів n -го степеня?
- Сформулюйте і доведіть теорему про корінь n -го степеня із степеня.
- Сформулюйте теорему про корінь n -го степеня з кореня.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

4.1. (Усно). Чи правильно виконано обчислення:

$$1) \sqrt[3]{64 \cdot 125} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{125} = 4 \cdot 5 = 20; \quad 2) \sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{49}} = \frac{3}{49}?$$

4.2. Чи правильно виконано обчислення:

$$1) \sqrt{100 \cdot 4} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{4} = 10 \cdot 4 = 40; \quad 2) \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{2}?$$

Закінчіть обчислення (4.3–4.4):

$$4.3. 1) \sqrt[3]{1000 \cdot 216} = \sqrt[3]{1000} \cdot \sqrt[3]{216} = \dots; \quad 2) \sqrt[4]{\frac{16}{625}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{625}} = \dots.$$

$$4.4. 1) \sqrt[4]{81 \cdot 10\,000} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{10\,000} = \dots; \quad 2) \sqrt[3]{\frac{27}{343}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{343}} = \dots.$$

Подайте вираз у вигляді добутку коренів (4.5–4.6):

$$4.5. 1) \sqrt{2 \cdot 5}; \quad 2) \sqrt[3]{5p}; \quad 3) \sqrt[4]{7a}, \text{де } a \geq 0; \quad 4) \sqrt[9]{mp}.$$

$$4.6. 1) \sqrt[3]{7 \cdot 6}; \quad 2) \sqrt[6]{2a}, \text{де } a \geq 0; \quad 3) \sqrt[5]{ab}; \quad 4) \sqrt[8]{3p}, \text{де } p \geq 0.$$

Подайте вираз у вигляді частки коренів (4.7–4.8):

4.7. 1) $\sqrt[4]{\frac{3}{7}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{5}{p}}$, де $p > 0$; 3) $\sqrt[5]{\frac{x}{y}}$; 4) $\sqrt[8]{\frac{m}{11}}$, де $m \geq 0$.

4.8. 1) $\sqrt[6]{\frac{2}{7}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{m}{3}}$; 3) $\sqrt{\frac{a}{19}}$, де $a \geq 0$; 4) $\sqrt[5]{\frac{p}{t}}$.

 Знайдіть значення виразу (4.9–4.14):

4.9. 1) $\sqrt{36 \cdot 49}$; 2) $\sqrt[3]{27 \cdot 64}$; 3) $\sqrt[4]{16 \cdot 256}$;

4) $\sqrt[4]{0,0001 \cdot 81}$; 5) $\sqrt[5]{\frac{1}{243} \cdot 32}$; 6) $\sqrt[6]{64 \cdot \frac{1}{729}}$.

4.10. 1) $\sqrt{9 \cdot 100}$; 2) $\sqrt[3]{8 \cdot 125}$;

3) $\sqrt[4]{0,0016 \cdot 625}$; 4) $\sqrt[5]{\frac{1}{1024} \cdot 243}$.

4.11. 1) $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{4}$; 2) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$; 3) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$; 4) $\frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{96}}$.

4.12. 1) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16}$; 2) $\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{9}$; 3) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{54}}$.

4.13. 1) $\sqrt[8]{2^8}$; 2) $\sqrt[6]{(-3)^6}$; 3) $\sqrt[7]{2^{14}}$; 4) $\sqrt[5]{3^{15}}$.

4.14. 1) $\sqrt[4]{3^4}$; 2) $\sqrt[8]{(-1)^8}$; 3) $\sqrt[9]{2^{27}}$; 4) $\sqrt[7]{4^{21}}$.

Внесіть множник з-під знака кореня (4.15–4.16):

4.15. 1) $\sqrt[3]{64m}$; 2) $\sqrt[3]{3000}$; 3) $\sqrt[4]{81p}$;
4) $\sqrt[4]{32}$; 5) $\sqrt[5]{486}$; 6) $\sqrt{50c}$.

4.16. 1) $\sqrt[4]{32}$; 2) $\sqrt{25p}$; 3) $\sqrt[3]{27a}$;
4) $\sqrt[5]{96}$; 5) $\sqrt[4]{162}$; 6) $\sqrt{72b}$.

Внесіть множник під знак кореня (4.17–4.18):

4.17. 1) $2\sqrt[3]{6}$; 2) $5\sqrt[4]{\frac{1}{5}}$; 3) $2\sqrt[5]{m}$; 4) $3\sqrt{2p}$.

4.18. 1) $3\sqrt{7}$; 2) $4\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$; 3) $3\sqrt[4]{a}$; 4) $2\sqrt[5]{3m}$.

Звільнітесь від ірраціональності у знаменнику дробу (4.19–4.20):

4.19. 1) $\frac{1}{\sqrt{7}}$; 2) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$; 3) $\frac{9}{\sqrt[4]{27}}$; 4) $\frac{5}{\sqrt[3]{16}}$.

4.20. 1) $\frac{10}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; 3) $\frac{8}{\sqrt[5]{16}}$; 4) $\frac{7}{\sqrt[4]{8}}$.

3 Знайдіть значення виразу (4.21–4.26):

4.21. 1) $\sqrt[3]{3^6 \cdot 5^3}$; 2) $\sqrt[4]{2^8 \cdot 3^{12}}$; 3) $\sqrt[6]{\frac{5^6}{3^{12}}}$; 4) $\sqrt[7]{\frac{4^7 \cdot 2^{14}}{6^{21}}}$.

4.22. 1) $\sqrt[4]{7^8 \cdot 2^4}$; 2) $\sqrt[3]{2^9 \cdot 3^6}$; 3) $\sqrt[7]{\frac{5^7}{4^{14}}}$; 4) $\sqrt[5]{\frac{2^{20} \cdot 3^5}{5^{15}}}$.

4.23. 1) $\sqrt[3]{4 \cdot 54}$; 2) $\sqrt[5]{48} \cdot \sqrt[5]{162}$; 3) $\sqrt[4]{7^8 \cdot 5} \cdot \sqrt[4]{5^3}$; 4) $\sqrt[6]{\frac{7^{10} \cdot 2^{21}}{6^{29} \cdot 7^4}}$.

4.24. 1) $\sqrt[3]{375 \cdot 9}$; 2) $\sqrt[4]{54} \cdot \sqrt[4]{24}$; 3) $\sqrt[5]{3^{10} \cdot 4^2} \cdot \sqrt[5]{4^3}$; 4) $\sqrt[8]{\frac{3^{21} \cdot 2^{10}}{3^5 \cdot 2^2}}$.

4.25. 1) $\sqrt{6 + \sqrt{11}} \cdot \sqrt{6 - \sqrt{11}}$; 2) $\sqrt[3]{5 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{5 + \sqrt{17}}$;
 3) $\sqrt[4]{\sqrt{82} + \sqrt{66}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{82} - \sqrt{66}}$; 4) $\sqrt[5]{5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}} \cdot \sqrt[5]{5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}$.

4.26. 1) $\sqrt[3]{7 + \sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7 - \sqrt{22}}$; 2) $\sqrt[4]{3\sqrt{11} - 3\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{3\sqrt{11} + 3\sqrt{2}}$.

Подайте вираз у вигляді одночлена (змінні є невід'ємними числами) (4.27–4.28):

4.27. 1) $\sqrt{64a^2}$; 2) $\sqrt[3]{64p^6}$; 3) $\sqrt[4]{625a^8b^{12}}$; 4) $\sqrt[5]{\frac{32p^{20}x^{15}}{243}}$.

4.28. 1) $\sqrt{25m^4}$; 2) $\sqrt[3]{8b^3}$; 3) $\sqrt[5]{1024t^{10}m^{25}}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16x^4m^{24}}{81}}$.

Спростіть вираз (4.29–4.31):

4.29. 1) $\sqrt{(t+2)^2}$; 2) $\sqrt[4]{(a+1)^8}$;
 3) $\sqrt[6]{(x-1)^6}$, якщо $x \geq 1$; 4) $\sqrt[8]{(b-5)^8}$, якщо $b < 5$.

4.30. 1) $\sqrt[4]{(5-\sqrt{2})^4}$; 2) $\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}$;
 3) $\sqrt[3]{(3-\sqrt{11})^3}$; 4) $\sqrt[4]{(7-5\sqrt{3})^4} + \sqrt[6]{(9-5\sqrt{3})^6}$.

4.31. 1) $\sqrt[4]{(x+2)^4}$, якщо $x \geq -2$; 2) $\sqrt[6]{(c-7)^6}$, якщо $c < 7$;
 3) $\sqrt[8]{(\sqrt{2}-5)^8}$; 4) $\sqrt{(5-2\sqrt{3})^2} + \sqrt[4]{(3-2\sqrt{3})^4}$.

Винесіть множник з-під знака кореня (4.32–4.33):

4.32. 1) $\sqrt{32a^4}$; 2) $\sqrt[4]{162p^6}$, якщо $p \geq 0$;
 3) $\sqrt{50x^2}$, якщо $x < 0$; 4) $\sqrt[3]{54c^8}$;
 5) $\sqrt[6]{a^{13}b^8}$, якщо $b > 0$; 6) $\sqrt[4]{32x^6y^4}$, якщо $x > 0, y < 0$.

4.33. 1) $\sqrt{75a^6}$, якщо $a \geq 0$; 2) $\sqrt[4]{48p^{16}}$;

3) $\sqrt[6]{128m^{18}}$, якщо $m < 0$; 4) $\sqrt[3]{250x^4}$.

Внесіть множник під знак кореня (4.34–4.35):

4.34. 1) $a\sqrt[3]{2}$; 2) $x\sqrt{3}$, якщо $x \geq 0$; 3) $y\sqrt[4]{7}$, якщо $y < 0$;

4) $a\sqrt[6]{a}$; 5) $p\sqrt[8]{-p}$; 6) $xy\sqrt[4]{2}$, якщо $x < 0, y > 0$.

4.35. 1) $b\sqrt[5]{3}$; 2) $m\sqrt[4]{2}$, якщо $m \geq 0$;

3) $t\sqrt{a}$, якщо $t < 0$; 4) $c\sqrt[6]{c^3}$.

Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу (4.36–4.37):

4.36. 1) $\frac{12}{\sqrt{13}-1}$; 2) $\frac{10}{\sqrt{17}+\sqrt{2}}$; 3) $\frac{6}{\sqrt[3]{5}+1}$; 4) $\frac{9}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}$.

4.37. 1) $\frac{7}{\sqrt{11}+2}$; 2) $\frac{18}{\sqrt{15}-\sqrt{3}}$; 3) $\frac{6}{\sqrt[3]{7}-1}$; 4) $\frac{6}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$.

Скоротіть дріб (4.38–4.39):

4.38. 1) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b^2}}$.

4.39. 1) $\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 2) $\frac{\sqrt[5]{m^2}-\sqrt{n}}{\sqrt[5]{m}+\sqrt[4]{n}}$.

Спростіть вираз (4.40–4.41):

4.40. 1) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}}$; 2) $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{16}}$;
4) $\sqrt[7]{x\sqrt{x}}$; 5) $\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}$; 6) $\sqrt[11]{x^2\sqrt[5]{x}}$.

4.41. 1) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}}$; 2) $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{125}}$;
4) $\sqrt[5]{m\sqrt[3]{m}}$; 5) $\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x^2}}$; 6) $\sqrt[7]{x^2\sqrt[3]{x}}$.

Порівняйте числа (4.42–4.43):

4.42. 1) $\sqrt[4]{5}$ і $\sqrt[8]{26}$; 2) $\sqrt[6]{3}$ і $\sqrt[18]{26}$.

4.43. 1) $\sqrt[3]{7}$ і $\sqrt[6]{48}$; 2) $\sqrt[5]{4}$ і $\sqrt[15]{65}$.

 Скоротіть дріб (4.44–4.45):

4.44. 1) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}$; 2) $\frac{\sqrt[6]{x^2y^3}+\sqrt[6]{x^3y^2}}{\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{x}}$;

3) $\frac{a+8}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{a}+4}$; 4) $\frac{x-y}{\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x}}$.

$$4.45. \quad 1) \frac{\sqrt{m} - \sqrt[4]{mn}}{\sqrt[4]{mn} - \sqrt{n}}; \quad 2) \frac{9 + 3\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}}{a - 27}.$$

Порівняйте числа (4.46–4.47):

$$4.46. \quad 1) \sqrt[3]{5} \text{ i } \sqrt{3}; \quad 2) \sqrt[8]{10} \text{ i } \sqrt[5]{3\sqrt[4]{3}}.$$

$$4.47. \quad 1) \sqrt[3]{3} \text{ i } \sqrt[4]{4}; \quad 2) \sqrt[9]{7} \text{ i } \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}.$$

Обчисліть (4.48–4.49):

$$4.48. \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{7 + 4\sqrt{3}}. \quad 4.49. \sqrt{\sqrt{5} + 2} \cdot \sqrt[4]{9 - 4\sqrt{5}}.$$

Спростіть вираз (4.50–4.51):

$$4.50. \quad 1) 11a^5\sqrt[5]{\frac{3}{a^4}} + 4\sqrt[5]{96a} - a^2\sqrt[5]{\frac{3}{a^9}}; \quad 2) \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{xy}} + \frac{1}{\sqrt[4]{xy} + \sqrt{y}}.$$

$$4.51. \quad 1) 7p^4\sqrt[4]{\frac{2}{p^3}} - \sqrt[4]{162p} - p^2\sqrt[4]{\frac{2}{p^7}}; \quad 2) \frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[6]{ab}} - \frac{1}{\sqrt[6]{ab} - \sqrt[3]{b}}.$$

Життєва математика

4.52. Клієнт «Добробанку» взяв кредит у розмірі 24 000 грн на рік під 16 %. Погашати банку кредит він має, вносячи щомісяця однакову суму коштів так, щоб через рік виплатити всю суму кредиту разом з відсотками. Скільки коштів має щомісяця вносити в банк цей клієнт?



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

4.53. Подайте:

$$1) \text{ числа } 16; 2; \frac{1}{4}; \frac{1}{128} \text{ у вигляді степеня з основою } 2;$$

$$2) \text{ числа } 0,001; \frac{1}{10}; 10; 100 \text{ у вигляді степеня з основою } 10.$$

4.54. Обчисліть:

$$1) 5^2; \quad 2) 2^{-3}; \quad 3) 4^0 + (-1)^8 + 1^{-5};$$

$$4) 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}; \quad 5) 7^{-1} + 5^2 - 0,1^{-1}; \quad 6) \left(2\frac{1}{3}\right)^{-3}.$$

4.55. Подайте вираз у вигляді степеня з основою a :

$$1) a^{-1}a^{14}; \quad 2) a^2a^{-2}a^{11}; \quad 3) a^7 : a^{-3}; \quad 4) a^{-8} : a^3;$$

$$5) (a^{-2})^7; \quad 6) (a^{-1})^{-6} \cdot a; \quad 7) (a^{-1})^4 \cdot (a^2)^2; \quad 8) \frac{(a^8)^3 a^{-1}}{(a^{-2})^4}.$$

4.56. Знайдіть значення виразів, використовуючи властивості степенів:

$$1) 2^{-3} \cdot 2^{12} \cdot 2^{-10}; \quad 2) 7^{-3} : 7^2 \cdot 49^3;$$

$$3) (5^2)^{-6} \cdot (25^{-3})^{-2}; \quad 4) \frac{3^{-8} \cdot 4^7}{9^{-4} \cdot 2^{11}}.$$

4.57. Спростіть вираз:

$$1) (x^{-1} + 3)^2 - 6x^{-1}; \quad 2) (a^{-2} + y)(a^{-2} - y) + y^2;$$
$$3) p^{-3}(p^2 + 6) - p^{-2}(p - 5p^{-1}); \quad 4) (m^{-1} + 2)(m^{-1} - 3) - m^{-2}.$$

§ 5. СТЕПІНЬ З РАЦІОНАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

У попередніх класах ми розглядали степінь з натуральним та із цілім показниками.

1. Означення степеня з раціональним показником

Пригадаємо основні поняття, пов'язані зі степенем:

$\underbrace{aaa \cdot \dots \cdot a}_n = a^n$ – степінь, a – основа, n – множників

n – показник, $a \in R$, $n \in N$, $n > 1$;

$$a^1 = a, \text{ де } a \in R; \quad a^0 = 1, \text{ де } a \neq 0; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ де } n \in N, a \neq 0.$$

Тепер розглянемо поняття степеня для виразів вигляду $3^{\frac{4}{5}}$; $2^{0,3}$; $8^{-\frac{1}{3}}$ тощо, тобто для *степеня з раціональним показником*.

Означення степеня з раціональним показником $a^{\frac{m}{n}}$ природно дати так, щоб цей степінь мав ті самі властивості, що й раніше вивчені степені із цілими показниками. Так, наприклад, має спрощуватися властивість піднесення степеня

до степеня $(a^p)^q = a^{pq}$. Тоді $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$, а тому, за означенням

кореня n -го степеня, дійдемо висновку, що $a^{\frac{m}{n}}$ має бути коренем n -го степеня із числа a^m . Отже, маємо означення:

 якщо $a > 0$, m – ціле число, n – натуральне число, $n > 1$, то степенем числа a з дробовим показником $\frac{m}{n}$ є вираз $\sqrt[n]{a^m}$, тобто

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Наприклад, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $b^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{b^3}$; $7^{0,3} = 7^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{7^3}$;
 $2^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{-1}{2}} = \sqrt{2^{-1}}$; $18^{-\frac{3}{4}} = 18^{\frac{-3}{4}} = \sqrt[4]{18^{-3}}$;
 $(x - y)^{-0,2} = (x - y)^{\frac{-1}{5}} = \sqrt[5]{(x - y)^{-1}}$.

І навпаки, $\sqrt{12} = 12^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[4]{7^3} = 7^{\frac{3}{4}}$; $\sqrt[9]{3a} = (3a)^{\frac{1}{9}}$;
 $\sqrt[5]{3^{-4}} = 3^{-\frac{4}{5}} = 3^{-0,8}$; $\sqrt[8]{27} = \sqrt[8]{3^3} = 3^{\frac{3}{8}}$; $\sqrt[7]{(a + b)^5} = (a + b)^{\frac{5}{7}}$.

Якщо $a = 0$, то $0^r = 0$ для $r > 0$, тому $0^{\frac{m}{n}}$ має зміст, коли m і n – натуральні. Наприклад, вирази $0^{-\frac{1}{7}}$, $0^{-0,3}$ змісту не мають.

Зауваження. 1) Оскільки $a > 0$, то очевидно, що $a^{\frac{m}{n}} > 0$ для будь-якого натурального n і цілого m .

2) Для $a < 0$ степінь з дробовим показником $a^{\frac{m}{n}}$ не має змісту. Доведемо це. Оскільки $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, то має справджу-
ватися рівність $a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{6}}$. Перевіримо її, наприклад, для $a = -1$. За формулою $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ маємо: $(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$, а
 $(-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$; $1 \neq -1$.

Отже, для $a < 0$ отримали, що $a^{\frac{1}{3}} \neq a^{\frac{2}{6}}$. Тому вищенаведене означення степеня з дробовим показником не розглядають для від'ємних значень a . Наприклад, вирази $(-8)^{\frac{1}{3}}$; $(-4)^{0,5}$;
 $(-1,3)^{\frac{1}{8}}$ змісту не мають.

Задача 1. Обчислити: 1) $25^{\frac{1}{2}}$; 2) $64^{-\frac{1}{3}}$; 3) $36^{1,5}$; 4) $32^{-\frac{4}{5}}$.

• Розв'язання. 1) $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$;

• 2) $64^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$;

• 3) $36^{1,5} = 36^{\frac{3}{2}} = \sqrt{36^3} = \sqrt{6^{2 \cdot 3}} = 6^3 = 216$;

• 4) $32^{-\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{32^{-4}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32^4}} = \frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{2^{5 \cdot 4}}} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$.

Відповідь. 1) 5; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 216; 4) $\frac{1}{16}$.

2. Властивості степеня

Степінь з раціональним показником має усі ті самі властивості, що й степінь із цілим показником, а саме:

якщо $a > 0$, $b > 0$, p і q – раціональні числа, то:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}; \quad (ab)^p = a^p b^p;$$

$$a^p : a^q = a^{p-q};$$

$$(a^p)^q = a^{pq};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

Усі згадані властивості легко довести, використовуючи означення степеня з раціональним показником і властивості кореня n -го степеня, які ми довели в попередньому параграфі.

Доведемо, наприклад, властивість для добутку степенів. Запишемо раціональні числа p і q як дроби з однаковими знаменниками (як відомо, будь-які два дроби можна завжди звести до спільного знаменника).

Нехай $p = \frac{k_1}{t}$; $q = \frac{k_2}{t}$. Тоді $a^p \cdot a^q = a^{\frac{k_1}{t}} \cdot a^{\frac{k_2}{t}} = \sqrt[t]{a^{k_1}} \cdot \sqrt[t]{a^{k_2}} =$
 $= \sqrt[t]{a^{k_1} \cdot a^{k_2}} = \sqrt[t]{a^{k_1+k_2}} = a^{\frac{k_1+k_2}{t}} = a^{\frac{k_1}{t} + \frac{k_2}{t}} = a^{p+q}.$

Отже, $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.

Для степеня з раціональним показником спрощуються і такі властивості:

якщо $a > 0$, $b > 0$, p – раціональне число, то

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p.$$

Задача 2. Спростити вираз: 1) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}}$; 2) $x^{\frac{4}{5}} : x^{-1,2}$;

3) $(b^{-5})^{-\frac{4}{5}}$; 4) $(\sqrt{y} \cdot y^{1,7})^{-1}$; 5) $(8m^{-3})^{-\frac{1}{3}}$.

Розв'язання. 1) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2} + (-\frac{1}{3})} = a^{\frac{1}{6}}$;

2) $x^{\frac{4}{5}} : x^{-1,2} = x^{\frac{4}{5} - (-1,2)} = x^2$; 3) $(b^{-5})^{-\frac{4}{5}} = b^{-5 \cdot (-\frac{4}{5})} = b^4$;

4) $(\sqrt{y} \cdot y^{1,7})^{-1} = \left(y^{\frac{1}{2}} \cdot y^{1,7}\right)^{-1} = (y^{0,5+1,7})^{-1} = (y^{2,2})^{-1} = y^{2,2 \cdot (-1)} = y^{-2,2}$;

5) $(8m^{-3})^{-\frac{1}{3}} = 8^{-\frac{1}{3}} \cdot (m^{-3})^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^{-1}} \cdot m^{-3 \cdot (-\frac{1}{3})} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \cdot m^1 = \frac{1}{2}m$.

Задача 3. Знайти значення виразу:

$$1) 49^{-0,5}; \quad 2) 16^{\frac{3}{4}}; \quad 3) 0,125^{-\frac{1}{3}}.$$

Розв'язання. 1) $49^{-0,5} = (7^2)^{-0,5} = 7^{2(-0,5)} = 7^{-1} = \frac{1}{7}$;

$$2) 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4 \cdot \frac{3}{4}} = 2^3 = 8;$$

$$3) 0,125^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{125}{1000}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{8}{1}\right)^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 2^1 = 16.$$

Відповідь. 1) $\frac{1}{7}$; 2) 8; 3) 16.

Зауважимо, що в останній задачі обчислення можна було виконати за означенням степеня з дробовим показником, тобто, як у задачі 1 цього параграфа.

Задача 4. Обчислити: 1) $36^{\frac{1}{3}} : 36^{-\frac{1}{6}}$; 2) $(7^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{3}{5}} \cdot 7^{1,7}$.

Розв'язання.

$$1) 36^{\frac{1}{3}} : 36^{-\frac{1}{6}} = 36^{\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{6}\right)} = 36^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6.$$

$$2) (7^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{3}{5}} \cdot 7^{1,7} = 7^{-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)} \cdot 7^{1,7} = 7^{\frac{3}{10}+1,7} = 7^2 = 49.$$

Відповідь. 1) 6; 2) 49.

Далі розглянемо тотожні перетворення виразів, що містять степені з дробовим показником.

Задача 5. Спростити вираз: 1) $(x^{1,5} + y^{2,5})(x^{1,5} - y^{2,5})$;

$$2) 3x^{\frac{1}{3}} \left(2 - x^{\frac{2}{3}}\right) - 6x^{\frac{1}{3}}; \quad 3) \left(a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2a^{\frac{3}{4}}.$$

Розв'язання.

$$1) (x^{1,5} + y^{2,5})(x^{1,5} - y^{2,5}) = (x^{1,5})^2 - (y^{2,5})^2 = x^3 - y^5;$$

$$2) 3x^{\frac{1}{3}} \left(2 - x^{\frac{2}{3}}\right) - 6x^{\frac{1}{3}} = 6x^{\frac{1}{3}} - 3x - 6x^{\frac{1}{3}} = -3x;$$

$$3) \left(a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2a^{\frac{3}{4}} = \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2 + 2a^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{2}} + \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2a^{\frac{3}{4}} =$$

$$= a^{\frac{1}{2}} + 2a^{\frac{3}{4}} + a - 2a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2}} + a.$$

Відповідь. 1) $x^3 - y^5$; 2) $-3x$; 3) $a^{0,5} + a$.

Задача 6. Спростити вираз

$$\left(\frac{y^{0,5}}{x - x^{0,5}y^{0,5}} + \frac{x^{0,5}}{y - x^{0,5}y^{0,5}} \right) \cdot \frac{xy^{0,5} + yx^{0,5}}{x - y}$$

і знайти його значення, якщо $x = 25$, $y = 36$.

Розв'язання. Введемо позначення: $x^{0,5} = a$; $y^{0,5} = b$.

Тоді $x = (x^{0,5})^2 = a^2$; $y = (y^{0,5})^2 = b^2$.

Маємо:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b}{a^2 - ab} + \frac{a}{b^2 - ab} \right) \cdot \frac{a^2b + b^2a}{a^2 - b^2} = \left(\frac{b}{a(a-b)} - \frac{a}{b(a-b)} \right) \cdot \frac{ab(a+b)}{(a-b)(a+b)} = \\ & = \frac{(b^2 - a^2) \cdot ab}{ab \cdot (a-b)(a-b)} = \frac{(b-a)(b+a)}{(a-b)(a-b)} = \frac{b+a}{b-a} = \frac{y^{0,5} + x^{0,5}}{y^{0,5} - x^{0,5}}. \end{aligned}$$

Якщо $x = 25$, $y = 36$, то $\frac{y^{0,5} + x^{0,5}}{y^{0,5} - x^{0,5}} = \frac{36^{0,5} + 25^{0,5}}{36^{0,5} - 25^{0,5}} = \frac{6+5}{6-5} = 11$.

Відповідь. $\frac{y^{0,5} + x^{0,5}}{y^{0,5} - x^{0,5}}$; 11.

3. Обчислення степенів за допомогою калькулятора

Для обчислення значень степенів у більшості калькуляторів використовують клавішу $[x^y]$ (у деяких калькуляторах це клавіша $[y^x]$ або $[\wedge]$).

Задача 7. Обчислити з точністю до тисячних $8^{1,2}$.

Розв'язання. Спочатку вводимо основу степеня – число 8, потім натискаємо клавішу $[x^y]$, далі – показник степеня 1,2 і клавішу $[=]$. Округлюємо отримане значення до тисячних: $8^{1,2} \approx 12,126$.

Зауважимо, що в деяких калькуляторах порядок обчислень може бути іншим, тому перед використанням калькулятора радимо ознайомитися з інструкцією. Також за допомогою калькулятора можна знаходити значення коренів n -го степеня.

У деяких калькуляторах є клавіша $[\sqrt[n]{\square}]$ (або подібна), що дозволяє виконувати такі обчислення безпосередньо. Якщо така клавіша відсутня, то обчислення виконують, користуючися формуловою $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Задача 8. Обчислити з точністю до тисячних $\sqrt[7]{5}$.

Розв'язання. $\sqrt[7]{5} = 5^{\frac{1}{7}}$. Схема обчислення може бути такою:

5	x^y	(1	÷	7)	=
---	-------	---	---	---	---	---	---

Маємо: $\sqrt[7]{5} \approx 1,258$.

А ще раніше...

Поняття степеня було відоме ще у Давній Греції та Вавілоні. Квадрат і куб числа використовували відповідно для знаходження площин квадрата та об'єму куба. Сучасні позначення степеня у вигляді a^4, a^5, \dots у XVII ст. ввів Рене Декарт (1596–1650).

Поняття про дробові показники степеня і найпростіші правила дій над степенями з дробовими показниками в 1368 р. виклав французький математик Нікола Орем (1323–1382). Інший французький математик Нікола Шюке (1445 – бл. 1500) у трактаті «Наука про число» (1484 р., опубліковано в 1848 р. у Ліоні) уперше розглянув степені з від'ємним та нульовим показниками.

Німецький математик Міхаель Штифель (1487–1567) дав означення $a^0 = 1$, де $a \neq 0$, та ввів термін показник (це буквальний переклад з німецької слова *exponent*), німецьке слово *potenzieren* означає піднесення до степеня. Голландський математик та інженер Симон Стевін (1548–1620) запропонував під записом $a^{\frac{1}{n}}$ розуміти $\sqrt[n]{a}$.



- Сформулюйте означення степеня з дробовим показником.
- Сформулюйте властивості степеня з дробовим показником.
- Як обчислити значення степеня за допомогою калькулятора?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



Запишіть степінь з дробовим показником у вигляді кореня (5.1–5.2):

5.1. 1) $a^{\frac{1}{2}}$; 2) $4^{\frac{1}{3}}$; 3) $7^{\frac{4}{5}}$; 4) $8^{-\frac{1}{4}}$;

5) $t^{-\frac{2}{3}}$; 6) $3^{0,2}$; 7) $14^{1,3}$; 8) $p^{-1,2}$.

5.2. 1) $7^{\frac{1}{2}}$; 2) $a^{\frac{1}{4}}$; 3) $8^{\frac{5}{6}}$; 4) $p^{-\frac{1}{3}}$;

5) $m^{-\frac{4}{5}}$; 6) $5^{0,4}$; 7) $t^{1,5}$; 8) $m^{-0,8}$.

Замініть степенем з дробовим показником арифметичний корінь (літерами позначено додатні числа) (5.3–5.4):

5.3. 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[7]{a}$; 3) $\sqrt[6]{b^5}$; 4) $\sqrt[10]{m^{-3}}$.

5.4. 1) \sqrt{p} ; 2) $\sqrt[9]{11}$; 3) $\sqrt[7]{2^5}$; 4) $\sqrt[9]{a^{-5}}$.

 Замініть на корені степені з дробовим показником (5.5–5.6):

5.5. 1) $7p^{\frac{2}{3}}$; 2) $-9m^{\frac{4}{7}}$; 3) $(2m)^{-\frac{1}{8}}$;

4) $(a-b)^{\frac{4}{9}}$; 5) $p^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{3}{4}}$; 6) $ax^{1,8} + by^{-1,2}$.

5.6. 1) $4m^{-\frac{1}{8}}$; 2) $-10a^{\frac{3}{7}}$; 3) $(3m)^{-\frac{1}{7}}$;

4) $(x+2y)^{\frac{3}{8}}$; 5) $t^{\frac{1}{5}} + b^{\frac{2}{5}}$; 6) $xa^{-1,5} + yb^{2,5}$.

Обчисліть (5.7–5.8):

5.7. 1) $64^{\frac{1}{2}}$; 2) $100^{-\frac{1}{2}}$; 3) $216^{-\frac{1}{3}}$; 4) $0,04^{\frac{3}{2}}$;

5) $0,125^{\frac{2}{3}}$; 6) $0,00001^{0,4}$; 7) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 8) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$.

5.8. 1) $9^{\frac{1}{2}}$; 2) $121^{-\frac{1}{2}}$; 3) $16^{\frac{1}{4}}$; 4) $0,008^{\frac{2}{3}}$;

5) $0,0016^{-\frac{1}{4}}$; 6) $0,36^{0,5}$; 7) $\left(11\frac{1}{9}\right)^{-1,5}$; 8) $\left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

5.9. Запишіть вираз у вигляді степеня з основою a :

1) $a^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{5}}$; 2) $a^{-\frac{1}{8}}a^{\frac{3}{8}}$; 3) $a^{-4}a^{-\frac{1}{3}}$; 4) $a^{\frac{1}{8}} : a^{\frac{1}{9}}$;

5) $a^{\frac{1}{3}} : a^{-\frac{1}{2}}$; 6) $a^{-\frac{4}{7}} : a^{-\frac{1}{21}}$; 7) $\left(a^{\frac{1}{8}}\right)^{-8}$; 8) $\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{9}{10}}$.

5.10. Запишіть вираз у вигляді степеня з основою b :

1) $b^3b^{\frac{1}{2}}$; 2) $b^{-\frac{1}{10}}b^{\frac{1}{2}}$; 3) $b^{-2}b^{-\frac{1}{8}}$; 4) $b^{\frac{1}{4}} : b^{\frac{1}{8}}$;

5) $b^{\frac{1}{5}} : b^{-\frac{1}{15}}$; 6) $b^{-\frac{3}{8}} : b^{-\frac{1}{24}}$; 7) $\left(b^{-\frac{1}{3}}\right)^3$; 8) $\left(b^{-\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{10}{27}}$.

Спростіть вираз (5.11–5.12):

5.11. 1) $(a^{0,2})^{0,8}a^{0,34}$; 2) $\left(b^{\frac{4}{7}}\right)^{1,4} \cdot \left(b^{-\frac{3}{8}}\right)^{1,6}$;

$$3) \frac{p^{\frac{3}{8}} p^{\frac{1}{4}}}{p^{-\frac{3}{8}}};$$

$$4) \frac{m^{1,8} m^{-3,7}}{m^{4,5} m^{-6,4}}.$$

$$\textbf{5.12.} 1) (p^{0,1})^4 \cdot p^{0,6};$$

$$2) \left(m^{\frac{1}{3}} \right)^{1,2} \cdot \left(m^{\frac{1}{5}} \right)^{-1,5};$$

$$3) \frac{m^{\frac{4}{7}} m^{-\frac{1}{21}}}{m^{\frac{11}{21}}};$$

$$4) \frac{a^{1,2} a^{-1,8}}{a^{1,5} a^{-1,1}}.$$

Обчисліть (5.13–5.14):

$$\textbf{5.13.} 1) 4^{-\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{5}} \cdot 4^{0,8}; \quad 2) (1000 \cdot 8)^{\frac{1}{3}};$$

$$3) (1000 \cdot 8)^{-\frac{1}{3}}; \quad 4) \left(\frac{1}{16} \cdot 81 \right)^{-\frac{1}{4}}.$$

$$\textbf{5.14.} 1) 81^{\frac{1}{6}} \cdot 81^{\frac{1}{3}} \cdot 81^{-\frac{1}{4}}; \quad 2) (64 \cdot 25)^{\frac{1}{2}};$$

$$3) (64 \cdot 25)^{-\frac{1}{2}}; \quad 4) \left(\frac{1}{27} \cdot 64 \right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Подайте вираз у вигляді суми (5.15–5.16):

$$\textbf{5.15.} 1) \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}} \right) a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}}; \quad 2) \left(x^{\frac{1}{4}} - 3 \right) \left(x^{\frac{1}{4}} + 3 \right);$$

$$3) (a^{1,5} - b^{0,5})^2; \quad 4) \left(p^{\frac{1}{6}} + t^{\frac{1}{8}} \right)^2.$$

$$\textbf{5.16.} 1) x^{\frac{1}{5}} y^{\frac{1}{5}} \left(x^{\frac{4}{5}} + y^{\frac{4}{5}} \right); \quad 2) \left(7 + m^{\frac{1}{2}} \right) \left(7 - m^{\frac{1}{2}} \right);$$

$$3) \left(x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{5}{2}} \right)^2; \quad 4) (m^{3,5} + n^{4,5})^2.$$

5.17. (Усно). Чи має зміст вираз:

$$1) 4^{\frac{2}{3}}; \quad 2) (-13)^{\frac{1}{8}}; \quad 3) (-25)^{\frac{1}{2}}; \quad 4) 8^{-0,01}; \quad 5) 0^{\frac{3}{4}}; \quad 6) 0^{-\frac{4}{7}}?$$

5.18. За допомогою калькулятора знайдіть значення виразу (результат округліть до тисячних):

$$1) 2^{1,8}; \quad 2) 3,4^{-1,2}; \quad 3) 7^{\frac{2}{5}}; \quad 4) \sqrt[7]{13}.$$

5.19. За допомогою калькулятора знайдіть значення виразу (результат округліть до сотих):

$$1) 3^{0,9}; \quad 2) 4,7^{-2,3}; \quad 3) 4\frac{3}{7}; \quad 4) \sqrt[6]{19}.$$



Знайдіть значення виразу (5.20–5.21):

$$\text{5.20. } 1) 16^{\frac{3}{4}} + (0,5)^{-3}; \quad 2) \left(27^{\frac{2}{3}} + 125^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{1}{3}} \right)^{-0,25};$$

$$3) 81^{0,25} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} - 32^{-\frac{1}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{3}};$$

$$4) (0,25)^{-2} + 81^{0,5} - (0,0001)^{-0,75} \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^{-0,5}.$$

$$\text{5.21. } 1) 0,0016^{-0,25} + \left(\frac{1}{81} \right)^{-\frac{3}{4}}; \quad 2) 81^{-0,25} \cdot \left(\frac{1}{9} \right)^{-0,5} + 8^{-\frac{4}{3}} \cdot 0,01^{-1,5};$$

$$3) \left(8^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{9} \right)^{-\frac{3}{2}} + 125^{\frac{1}{3}} \right)^{1,5}; \quad 4) (0,125)^{-\frac{1}{3}} + 216^{\frac{2}{3}} - (0,25)^{-2} : \left(\frac{1}{8} \right)^{-1}.$$

5.22. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = x^{\frac{2}{7}}; \quad 2) y = x^{-\frac{3}{4}}; \quad 3) y = (x-2)^{-0,2}; \quad 4) y = (x^2 + 2x)^{\frac{1}{8}}.$$

5.23. Знайдіть дозволені значення змінної у виразі:

$$1) m^{\frac{1}{3}}; \quad 2) p^{-\frac{4}{5}}; \quad 3) (a+2)^{1,4}; \quad 4) (4x-x^2)^{-\frac{2}{7}}.$$

Подайте у вигляді степеня (5.24–5.25):

$$\text{5.24. } 1) \left(x^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{x^8} \right)^{-2}; \quad 2) (\sqrt[4]{x} : \sqrt[5]{x^3})^{-20}.$$

$$\text{5.25. } 1) \left(a^{\frac{4}{7}} \sqrt[7]{a^3} \right)^{-3}; \quad 2) (\sqrt[4]{a^5} : \sqrt[3]{a})^{-12}.$$

Обчисліть (5.26–5.27):

$$\text{5.26. } 1) \left(2^{-\frac{1}{7}} \right)^{1,4} \cdot 4^{0,1}; \quad 2) 81^{\frac{1}{8}} \cdot 27^{-\frac{5}{6}} \cdot 9^{2,5}; \quad 3) \frac{16^{0,4} \cdot 2^{0,5}}{4^{0,3} \cdot 8^{\frac{1}{6}}};$$

$$4) (20,5)^{0,5} \cdot (0,5)^{-0,25}; \quad 5) \left(\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{2\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}}; \quad 6) \left(\sqrt[3]{\frac{25}{36}} \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

5.27. 1) $\left(5^{-\frac{1}{9}}\right)^{1,8} \cdot 25^{0,1};$ 2) $16^{0,25} \cdot 8^{-\frac{1}{6}} \cdot 4^{0,75};$ 3) $\frac{243^{0,42} \cdot 9^{0,6}}{81^{0,3} \cdot 3^{0,1}};$
 4) $\left(\sqrt[6]{28} \cdot \sqrt[6]{2 \frac{2}{7}}\right)^{-2};$ 5) $(5^{0,7})^{-0,7} \cdot (0,2)^{-0,49};$ 6) $\left(\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{27}}\right)^{-\frac{4}{3}}.$

Спростіть вираз (5.28–5.31):

5.28. 1) $\left(9b^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}};$ 2) $(81x^8)^{-\frac{3}{4}};$ 3) $(64t^{-9})^{\frac{1}{3}};$ 4) $(0,25a^{-0,6})^{\frac{1}{2}}.$

5.29. 1) $(8m^{-1})^{\frac{2}{3}};$ 2) $(16a^{-4})^{-\frac{1}{4}};$ 3) $(0,0016b^{-4})^{\frac{3}{4}};$ 4) $\left(\frac{4}{9}c^{-6}\right)^{-\frac{1}{2}}.$

5.30. 1) $(4 - x^{0,5})^2 + 8x^{0,5};$ 2) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{4}}\right)^2;$
 3) $\left(2x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 4x^{\frac{7}{12}};$ 4) $\left(a^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(a^{\frac{1}{4}} - 1\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right).$

5.31. 1) $\left(\sqrt{a} + b^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(a^{\frac{1}{2}} - \sqrt{b}\right)^2;$ 2) $\left(3a^2 + a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 6a^3.$

5.32. Спростіть вираз

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{3}{b^2}\right)\left(a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} + b^3\right) + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2}\right)\left(a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} + b^3\right)$$

та знайдіть його значення, якщо $a = 4, b = 2100.$

Винесіть за дужки спільний множник (5.33–5.34):

5.33. 1) $x - 2x^{\frac{2}{3}};$ 2) $m^{\frac{1}{2}} + 3m^{\frac{1}{4}};$ 3) $ab^{\frac{1}{5}} + ba^{\frac{1}{6}};$
 4) $(ab)^{\frac{1}{2}} - (ac)^{\frac{1}{2}};$ 5) $12^{\frac{1}{3}} - 4^{\frac{1}{3}};$ 6) $18^{\frac{3}{4}} - 15^{\frac{3}{4}}.$

5.34. 1) $a + 3a^{\frac{1}{8}};$ 2) $a^{\frac{1}{3}} + 4a^{\frac{1}{4}};$ 3) $mn^{\frac{1}{2}} + m^{\frac{1}{3}}n;$
 4) $(ax)^{\frac{3}{5}} + (bx)^{\frac{3}{5}};$ 5) $6^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}};$ 6) $12^{\frac{3}{8}} - 8^{\frac{3}{8}}.$

За формулою $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ розкладіть на множники (5.35–5.36):

5.35. 1) $5 - m^2;$ 2) $a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}};$ 3) $x^{\frac{4}{7}} - y^{\frac{6}{13}};$

4) $9m - n,$ де $m > 0, n > 0.$

5.36. 1) $a^2 - 7;$ 2) $p^{\frac{2}{5}} - q^{\frac{2}{5}};$ 3) $m^{\frac{8}{9}} - n^{\frac{2}{7}};$
 4) $a - 25b,$ де $a > 0, b > 0.$

Скоротіть дріб (5.37–5.38):

$$\begin{array}{lll} \text{5.37. } 1) \frac{x + 5x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + 5}; & 2) \frac{3a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}} - 7a^{\frac{1}{4}}}; & 3) \frac{a - b}{a^{0,5} - b^{0,5}}; \\ 4) \frac{a^{0,5}b - b^{0,5}a}{b^{1,5}a - a^{1,5}b}; & 5) \frac{m - 5m^{\frac{1}{2}}}{5m - m^{\frac{3}{2}}}; & 6) \frac{x^{0,5}y^{0,5} + 2x}{4x - y}. \end{array}$$

$$\text{5.38. } 1) \frac{m - 3m^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{2}{3}} - 3}; \quad 2) \frac{x^{0,5} + y^{0,5}}{x - y}; \quad 3) \frac{x - 9x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}} - 9x}; \quad 4) \frac{9a - b}{a^{0,5}b^{0,5} + 3a}.$$

 Порівняйте числа (5.39–5.40):

$$\text{5.39. } 1) 3^{\frac{1}{2}} \text{ і } 5^{\frac{1}{3}}; \quad 2) 2^{-\frac{1}{6}} \text{ і } 3^{-\frac{1}{8}}.$$

$$\text{5.40. } 1) 2^{\frac{1}{4}} \text{ і } 3^{\frac{1}{5}}; \quad 2) 3^{-\frac{1}{2}} \text{ і } 4^{-\frac{1}{3}}.$$

Спростіть вираз (5.41–5.42):

$$\text{5.41. } 1) \frac{a - 1}{a - a^{\frac{1}{2}} + 1} : \frac{\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} - 1}{a^{\frac{1}{2}} + 1} - 2a^{\frac{1}{2}};$$

$$2) \frac{x^{0,5}}{x^{0,5} - 3} - \frac{3}{x^{0,5} + 3} + \frac{x}{9 - x}.$$

$$\text{5.42. } 1) \frac{\frac{3}{x^2} + \frac{3}{y^2}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}} \cdot \frac{x - y}{x - x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y} - 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}};$$

$$2) \frac{m}{1 - m} - \frac{1}{m^{0,5} + 1} + \frac{m^{0,5}}{m^{0,5} - 1}.$$

5.43. Доведіть, що значення виразу

$$\left(\frac{1}{a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a^3 - b^3}$$

не залежить від значення змінних.

5.44. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{a + b}{a - 25b} : \left(\frac{5a^{0,5} + b^{0,5}}{a^{0,5} - 5b^{0,5}} + \frac{5a^{0,5} - b^{0,5}}{a^{0,5} + 5b^{0,5}} \right)$$

не залежить від значення змінних.

5.45. Спростіть вираз:

$$\frac{2\sqrt{ab}}{a-b} : \left(\frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{ab^2} + \frac{1}{a^2b}} + \frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{ab^2} - \frac{1}{a^2b}} \right)$$

та знайдіть його значення, якщо $a = 3$, $b = 7$.



Життєва математика

5.46. Деяка модель смартфона коштувала 3500 грн. Згодом ціну знизили до 2800 грн. На скільки відсотків подешевіла ця модель смартфона?



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

5.47. Побудуйте графік функції та пригадайте її властивості:

$$1) y = x; \quad 2) y = x^2; \quad 3) y = \frac{1}{x}; \quad 4) y = \sqrt{x}.$$

5.48. Установіть на свій комп’ютер (планшет або телефон) одну з програм для побудови графіків функцій та побудуйте за допомогою цієї програми графіки функцій з попереднього завдання та графіки функцій $y = x^3$, $y = x^4$, $y = \frac{1}{x^2}$.

§ 6. СТЕПЕНЕВІ ФУНКЦІЇ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ

1. Степенева функція



Функцію вигляду $y = x^\alpha$, де α – деяке стало число, називають *степеневою*.

Наприклад, $y = x^3$, $y = x^{0,2}$, $y = x^{-\frac{1}{3}}$ – степеневі функції.

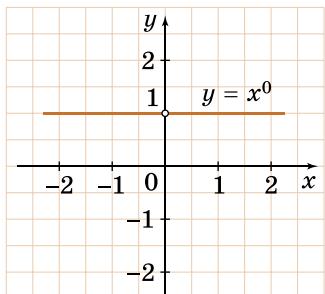
Властивості степеневих функцій та вигляд їх графіків залежать від виду числа α . Розглянемо степеневу функцію для різних видів числа α , уважаючи α раціональним числом.

Випадок, коли $\alpha \in N$, ми детально розглянули в п. 1 § 3.

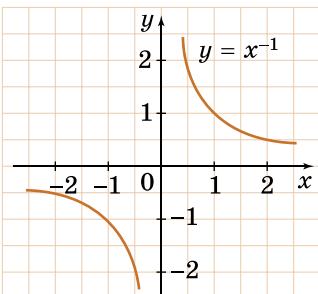
2. Функція $y = x^\alpha$, якщо $\alpha = 0$

Нехай $\alpha = 0$. Тоді маємо функцію $y = x^0$, яка визначена для всіх значень x , крім 0, бо вираз 0^0 не має змісту. Оскільки $x^0 = 1$ при $x \neq 0$,

то функція набуває лише одного значення: $y = 1$. Графік зображенено на малюнку 6.1.



Мал. 6.1



Мал. 6.2

**3. Функція $y = x^\alpha$,
де α – ціле від'ємне
число**

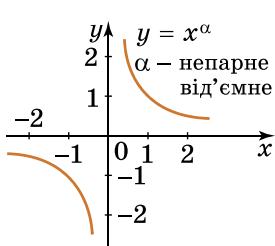
У цьому випадку функція визначена для всіх значень x , крім $x = 0$. Якщо $\alpha = -1$, то матимемо функцію $y = x^{-1}$, тобто $y = \frac{1}{x}$, графіком

якої є гіпербола (мал. 6.2). Функція спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$, є непарною, тому її графік симетричний відносно початку координат.

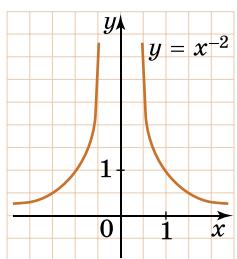
Ті самі властивості має функція $y = x^\alpha$ для будь-якого цілого від'ємного непарного α , тобто коли $\alpha = -1; -3; -5; \dots$. Схематично графік функції $y = x^\alpha$, де α – ціле від'ємне непарне число, зображенено на малюнку 6.3.

Якщо $\alpha = -2$, маємо функцію $y = x^{-2}$, тобто $y = \frac{1}{x^2}$. Функція – парна, тому її графік симетричний відносно осі ординат. Її графік зображенено на малюнку 6.4. Функція зростає на проміжку $(-\infty; 0)$ і спадає на проміжку $(0; +\infty)$.

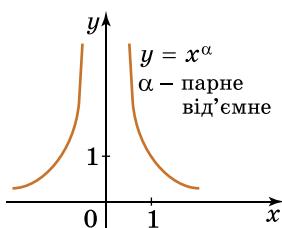
Ті самі властивості має функція $y = x^\alpha$ для будь-якого від'ємного парного числа α , тобто коли $\alpha = -2; -4; -6; \dots$. Схематично графік функції $y = x^\alpha$, де α – ціле від'ємне парне число, зображенено на малюнку 6.5.



Мал. 6.3



Мал. 6.4



Мал. 6.5

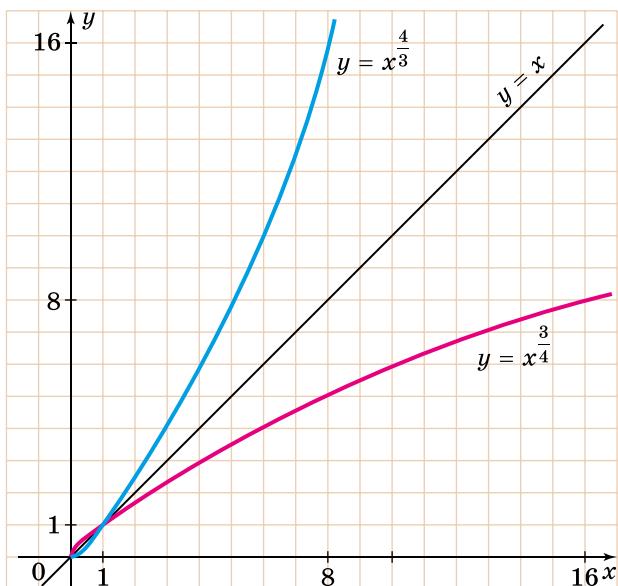
**4. Функція $y = x^\alpha$,
де α – не ціле
додатне число**

У випадку, коли α – додатне, але не ціле число, область визначення функції є проміжок $[0; +\infty)$. Оскільки область визначення не є симетричною відносно нуля, то

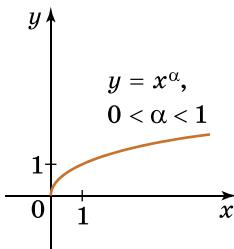
функція – ні парна, ні непарна. На малюнку 6.6 зображені

графіки функцій $y = x^{\frac{3}{4}}$ і $y = x^{\frac{4}{3}}$ та для наочності їх взаємного розташування графік функції $y = x$.

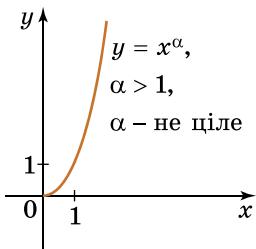
На малюнку 6.7 зображені графік функції $y = x^\alpha$, якщо $0 < \alpha < 1$, а на малюнку 6.8 – якщо $\alpha > 1$, де α – не ціле число. У кожному із цих випадків функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$.



Мал. 6.6



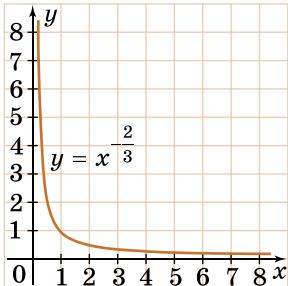
Мал. 6.7



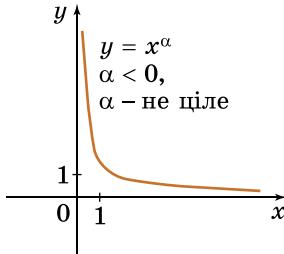
Мал. 6.8

**5. Функція $y = x^\alpha$,
 α – не ціле від’ємне
 число**

На малюнку 6.10 схематично зображеного графік функції $y = x^\alpha$, де $\alpha < 0$ – не ціле. Функція в цьому випадку спадає на $(0; +\infty)$.



Мал. 6.9



Мал. 6.10

Узагальнимо всі згадані вище властивості функції $y = x^\alpha$ у вигляді таблиці (с. 61).

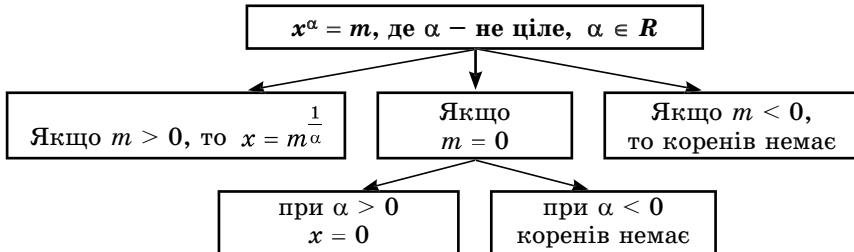
**7. Рівняння $x^\alpha = m$,
 де α – не ціле, $\alpha \in R$.**

рівняння $x^\alpha = 0$ розв’язків не має.

Якщо $m > 0$, рівняння $x^\alpha = m$ має єдиний корінь, оскільки графіки функцій $y = x^\alpha$ і $y = m$, де $m > 0$, як у випадку не цілого додатного α , так й у випадку не цілого від’ємного α , перетинаються в одній точці. Щоб знайти цей єдиний розв’язок, треба ліву і праву частини рівняння $x^\alpha = m$ піднести до

степеня $\frac{1}{\alpha}$. Маємо: $(x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = m^{\frac{1}{\alpha}}$, тоді $x = m^{\frac{1}{\alpha}}$.

Систематизуємо дані про розв’язки рівняння $x^\alpha = m$ у вигляді схеми:



Властивості	Функція $y = x^\alpha$					
	$\alpha -$ на- туральне парне	$\alpha -$ на- туральне непарне	$\alpha = 0$	$\alpha -$ непарне від'ємне	$\alpha -$ парне від'ємне	$\alpha -$ не ціле додатне
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$
Множина значень	$[0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	1	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$[0; +\infty)$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$	—	—	—	$x = 0$
Знако- сталисть $(y > 0)$	$x < 0$ або $x > 0$	$x > 0$	$x < 0$ або $x > 0$	$x > 0$	$x < 0$ або $x > 0$	$x > 0$
Знакоста- лість ($y < 0$)	—	$x < 0$	—	$x < 0$	—	—
Парність, непарність	Парна	Непарна	Парна	Непарна	Парна	Ні пар- на, ні непар- на
Проміжки зростання	$[0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	—	—	$(-\infty; 0)$	$[0; +\infty)$
Проміжки спадання	$(-\infty; 0]$	—	—	$(-\infty; 0), (0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$

Приклад 1. Розв'яжемо рівняння:

1) $x^{\frac{1}{3}} = 2;$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^3;$$

$$x = 8.$$

Відповідь. 8.

2) $x^{\frac{4}{3}} = 5;$

$$\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{3}{4}};$$

$$x = \sqrt[4]{5^3};$$

$$x = \sqrt[4]{125}.$$

Відповідь. $\sqrt[4]{125}.$

3) $x^{-\frac{2}{3}} = 4;$

$$\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 4^{-\frac{3}{2}};$$

$$x = (2^2)^{-\frac{3}{2}};$$

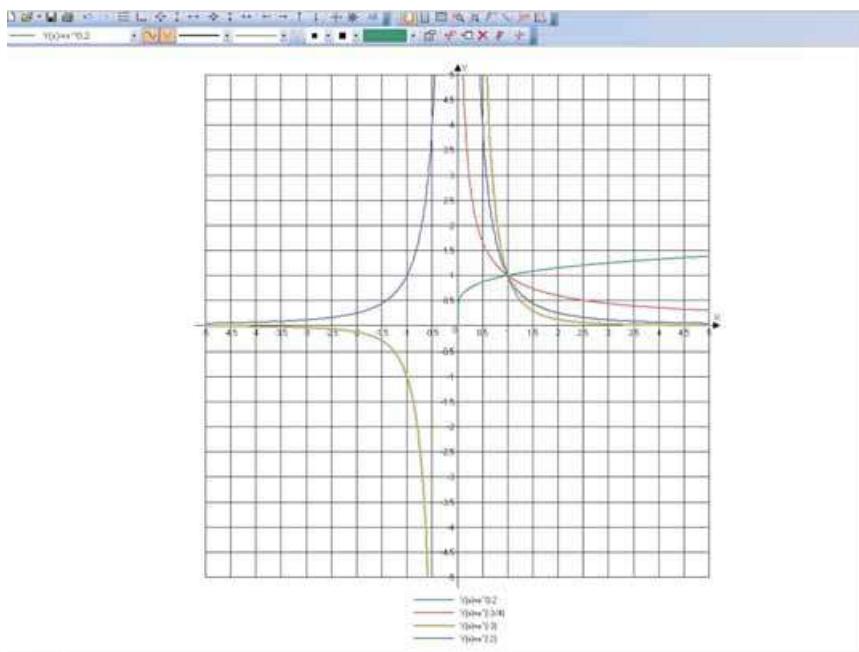
$$x = 2^{-3};$$

$$x = \frac{1}{8}.$$

Відповідь. $\frac{1}{8}.$

8. Побудова графіків за допомогою комп'ютера

Існує велика кількість програм, які дають змогу будувати графіки функцій, а потім їх аналізувати. На малюнку 6.11 зображене вікно однієї з програм, за допомогою якої побудовано графіки функцій $y = x^{0,2}$ (зеленого кольору), $y = x^{-\frac{3}{4}}$ (червоного), $y = x^{-3}$ (сірого) і $y = x^{-2}$ (синього).



Мал. 6.11

Серед корисних опцій подібних програм слід відзначити опцію руху курсора вздовж графіка, за допомогою якої можна встановлювати координати точок графіка, знаходити точки перетину двох графіків (за допомогою цієї опції можна, наприклад, знаходити наближений розв'язок рівняння вигляду $x^\alpha = m$, де $m \in R$), збільшення чи зменшення окремих ділянок графіка тощо.



- Яку функцію називають степеневою? • Пригадайте властивості цієї функції та вигляд її графіка для різних значень (парних та непарних) показника степеня. • Сформулюйте властивості степеневої функції $y = x^\alpha$ залежно від значення α . • Як розв'язати рівняння $x^\alpha = m$, де α – не ціле число?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

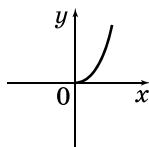


6.1. (Усно). Укажіть, які з даних функцій є степеневими:

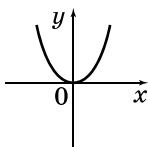
- 1) $y = x^2$;
- 2) $y = 2x - x^2$;
- 3) $y = x^{-\frac{1}{3}}$;
- 4) $y = x^{\frac{3}{4}}$;
- 5) $y = \sqrt[3]{x}$;
- 6) $y = 5$.

6.2. (Усно). Визначте, на якому з малюнків 6.12–6.17 схематично зображенено графік функції $y = x^3$, $y = x^{\frac{4}{3}}$, $y = x^{-4}$?

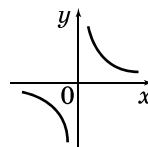
6.3. На якому з малюнків 6.12–6.17 схематично зображенено графік функції $y = x^2$, на якому – $y = x^{-5}$, а на якому – $y = x^{-\frac{1}{3}}$?



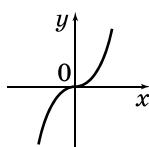
Мал. 6.12



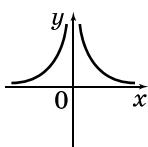
Мал. 6.13



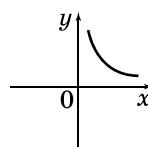
Мал. 6.14



Мал. 6.15



Мал. 6.16



Мал. 6.17



Схематично побудуйте графік функції та запишіть її властивості (6.4–6.5):

6.4. 1) $y = x^{-5}$; 2) $y = x^{\frac{2}{3}}$.

6.5. 1) $y = x^4$; 2) $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

Розв'яжіть рівняння (6.6–6.7):

6.6. 1) $x^{\frac{1}{3}} = 2$; 2) $x^{0,25} = 0$; 3) $x^{\frac{1}{6}} = 1$; 4) $x^{\frac{1}{2}} = 3$.

6.7. 1) $x^{\frac{1}{4}} = 1$; 2) $x^{\frac{1}{7}} = 0$; 3) $x^{\frac{1}{3}} = 4$; 4) $x^{0,5} = 5$.



6.8. Побудуйте графік функції $y = x^{\frac{1}{4}}$. За допомогою графіка знайдіть:

- 1) значення функції для значення аргументу 0,5; 16;
- 2) значення аргументу, що відповідають значенням функції 1; 1,5.

6.9. Побудуйте графік функції $y = x^3$. За допомогою графіка знайдіть:

- 1) значення функції, що відповідає значенню аргументу 0,5; 8;

- 2) значення аргументу, що відповідають значенням функції 1; 1,5.

Побудуйте графік функції та запишіть її властивості (6.10–6.11):

6.10. 1) $y = 2 + x^3$; 2) $y = (x - 2)^{-\frac{2}{5}}$.

6.11. 1) $y = x^{-2} - 3$; 2) $y = (x + 1)^{\frac{5}{4}}$.

Розв'яжіть рівняння (6.12–6.13):

6.12. 1) $(x - 3)^{\frac{1}{2}} = 5$; 2) $(x + 1)^{0,5} = 0$; 3) $(x - 2)^{-\frac{1}{3}} = 0$;

4) $(x^2 - 2)^{0,5} = \sqrt{7}$; 5) $(x^2 - 6x)^{\frac{1}{3}} = 3$; 6) $(x^2 + x)^{-1} = \frac{1}{2}$.

6.13. 1) $(x + 2)^{\frac{1}{3}} = 4$; 2) $(x - 4)^{0,4} = 0$;

3) $(x^2 + 2)^{0,5} = \sqrt{6}$; 4) $(x^2 - 2x)^{-1} = \frac{1}{3}$.

Порівняйте числа (6.14–6.15):

6.14. 1) $7^{1,2}$ і $7,2^{1,2}$; 2) $1,8^{-0,4}$ і $2^{-0,4}$.

6.15. 1) $3^{\frac{1}{8}}$ і $2^{\frac{1}{8}}$; 2) 5^{-6} і $4,8^{-6}$.



6.16. Накресліть графік функції $y = (x + 3)^{0,8} - 2$ та запишіть її властивості.

6.17. Накресліть графік функції $y = (x - 1)^{-1,2} + 3$ та запишіть її властивості.

Розв'яжіть рівняння (6.18–6.21):

6.18. 1) $(x^2 - 7x)^{\frac{2}{3}} = 4$; 2) $(x^2 - 9)^{-0,75} = \frac{1}{8}$.

6.19. 1) $(x^2 + 6x)^{0,75} = 8$; 2) $(x^2 + 4)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{25}$.

6.20. $x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} - 6 = 0$.

6.21. $x^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{6}} - 4 = 0$.

6.22. (Практичне завдання.) За допомогою будь-якої комп'ютерної програми для побудови графіків, побудуйте графіки функцій $y = x^{0,8}$, $y = x^{-\frac{2}{5}}$, $y = x^{1,5}$, $y = x^{-4}$ та заповніть таблицю.

№	Завдання	$y = x^{0,8}$	$y = x^{-\frac{2}{5}}$	$y = x^{1,5}$	$y = x^{-4}$
1	Знайти значення функції, що відповідає значенню аргумента: $x = 1,5$				
	$x = 3$				
	$x = 4$				
2	Знайти значення аргумента, що відповідає значенню функції: $y = 0,5$				
	$y = 1$				
	$y = 1,5$				
3	Знайти наближений розв'язок рівняння	$x^{0,8} = 1,5$ $x \approx$	$x^{-\frac{2}{5}} = 0,5$ $x \approx$	$x^{1,5} = 5$ $x \approx$	$x^{-4} = 3$ $x \approx$



Життєва математика

6.23. Шоколадка коштує 16 гривень. У вихідні в супермаркеті діє спеціальна пропозиція: заплативши за три шоколадки, покупець отримує чотири (одну в подарунок). Яку максимальну кількість шоколадок матиме покупець, що розрахувався за них на касі, якщо він планував витратити на купівлю шоколадок не більше ніж 100 гривень?

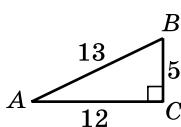


Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

6.24. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, $AC = 12$, $BC = 5$, $AB = 13$ (мал. 6.18).

Знайдіть:

- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| 1) $\sin A$; | 2) $\cos B$; | 3) $\tg A$; |
| 4) $\cos A$; | 5) $\tg B$; | 6) $\sin B$. |



6.25. Обчисліть:

- | | | | |
|---------------------------------------|---|-------------------------------------|-------------------------|
| 1) $\sin 30^\circ$; | 2) $\sqrt{2} \cos 45^\circ$; | 3) $\tg 120^\circ - \tg 60^\circ$; | 4) $\cos^2 150^\circ$; |
| 5) $\sin 120^\circ - \cos 30^\circ$; | 6) $(\cos 120^\circ + 5\tg 45^\circ)^2$. | | Мал. 6.18 |

6.26. Знайдіть за допомогою калькулятора або комп’ютера:

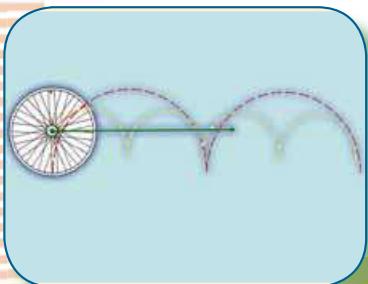
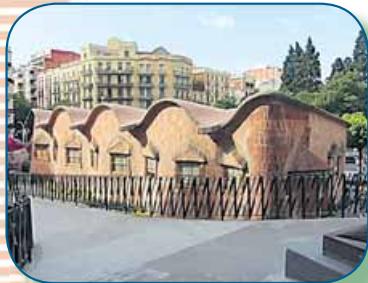
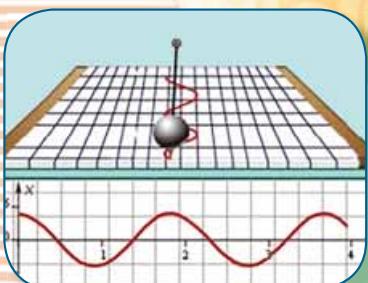
- | | | |
|---------------------------|---------------------------|-------------------------|
| 1) $\sin 15^\circ$; | 2) $\cos 48^\circ$; | 3) $\tg 138^\circ$; |
| 4) $\sin 130^\circ 45'$; | 5) $\cos 107^\circ 30'$; | 6) $\tg 13^\circ 15'$. |

Українці у світі

1611 року німецький філософ і вчений Йоганн Кеплер поставив одне з найскладніших питань у математиці – задачу про пакування куль (задачу комбінаторної геометрії про розміщення однакових куль в евклідовому просторі без їх взаємного перетинання). Знадобилося понад чотири століття, аби розв’язати один з її окремих випадків. І зробила це українка **Марина В’язовська**. Вона зуміла запакувати кулі у 8-та 24-вимірному просторах і 15 березня 2016 року опублікувала своє розв’язання, яке математики визнали як дуже елегантне і лаконічне. За це досягнення Марину В’язовську було відзначено «Премією Салема» – однією з найпрестижніших премій, що є аналогом Нобелівської премії, але для молодих математиків.



ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ



У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ МИ

- **пригадаємо** відомості з геометрії про синус, косинус і тангенс кута трикутника;
- **дізнаємось** про радіанну міру кута; тригонометричні функції кута та числового аргумента; основні співвідношення між тригонометричними функціями;
- **навчимося** переходити від радіанної міри кута до градусної і навпаки; перетворювати тригонометричні вирази та обчислювати їх значення; будувати графики тригонометричних функцій; розв'язувати тригонометричні рівняння.

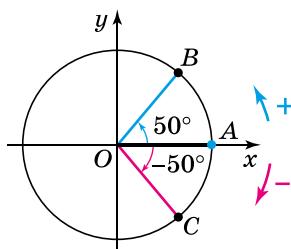
§ 7. СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС І КОТАНГЕНС КУТА

З курсу геометрії нам уже відомо, що таке синус, косинус і тангенс кута α , де $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. У цьому параграфі ознайомимося з поняттями синуса, косинуса і тангенса довільного кута, а також з поняттям котангенса кута.

1. Кути довільної величини

Радіус OA будемо називати *початковим радіусом*.

Повернемо радіус OA навколо точки O на 50° проти руху годинникової стрілки, отримаємо радіус OB . Кут AOB , який при цьому утворився, називають *кутом повороту*. У нашому випадку кут повороту дорівнює 50° . Повернемо тепер початковий радіус OA на кут 50° у напрямку руху годинникової стрілки, отримаємо радіус OC . У цьому випадку кут повороту дорівнює -50° . На малюнку 7.1 стрілками вказано кути повороту 50° і -50° та напрям повороту. Узагалі,

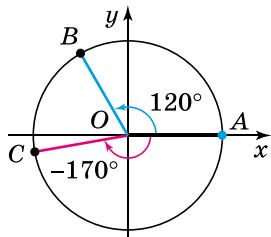


Мал. 7.1

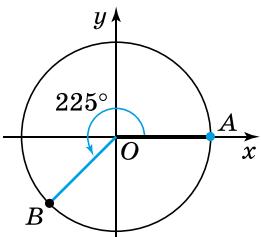
Розглянемо коло радіуса R із центром у початку координат (мал. 7.1). Позначимо на додатній півосі абсцис точку A , яка належить колу. Радіус OA будемо називати *початковим радіусом*. Повернемо радіус OA навколо точки O на 50° проти руху годинникової стрілки, отримаємо радіус OB . Кут AOB , який при цьому утворився, називають *кутом повороту*. У нашому випадку кут повороту дорівнює 50° . Повернемо тепер початковий радіус OA на кут 50° у напрямку руху годинникової стрілки, отримаємо радіус OC . У цьому випадку кут повороту дорівнює -50° . На малюнку 7.1 стрілками вказано кути повороту 50° і -50° та напрям повороту. Узагалі,

при повороті початкового радіуса проти руху годинникової стрілки кут повороту вважають додатним, а за рухом годинникової стрілки – від'ємним (мал. 7.1).

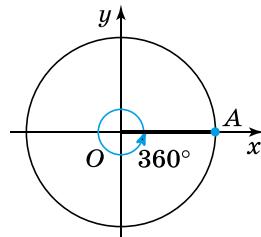
Кут повороту може бути будь-яким числом. На малюнку 7.2 маємо кути повороту 120° і -170° .



Мал. 7.2



Мал. 7.3

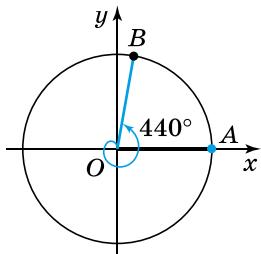


Мал. 7.4

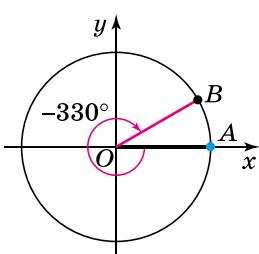
Покажемо кут повороту 225° . Оскільки $225^\circ = 180^\circ + 45^\circ$, повернемо початковий радіус OA в додатному напрямі на 180° , а потім у тому ж напрямі ще на 45° (мал. 7.3). Якщо початковим радіусом виконати повний оберт проти руху годин-

никової стрілки, то отримаємо кут повороту 360° (мал. 7.4). Початковий радіус можна повернути і більш ніж на повний оберт, наприклад, на малюнку 7.5 маємо кут повороту 440° .

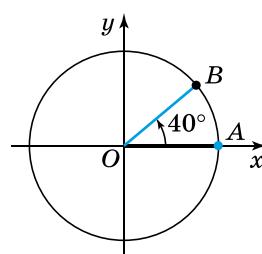
Якщо початковий радіус повернути за рухом годинникової стрілки на 330° , тобто у від'ємному напрямі, отримаємо кут повороту -330° (мал. 7.6).



Мал. 7.5



Мал. 7.6



Мал. 7.7

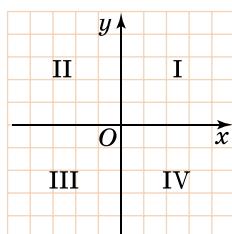
Нехай при повороті на 40° початковий радіус OA перейшов у радіус OB (мал. 7.7). Якщо після цього радіус OB повернути на кут 360° або -360° , то знову отримаємо радіус OB . Із цього можна дійти висновку, що радіус OA переходить у радіус OB як при повороті на кут $40^\circ + 360^\circ = 400^\circ$, так і при повороті на кут $40^\circ - 360^\circ = -320^\circ$, та й узагалі при повороті на кут $40^\circ + 360^\circ k$, де k – будь-яке ціле число, тобто $k \in \mathbb{Z}$.

Очевидно, що й будь-який кут α можна подати у вигляді $\alpha = \alpha_0 + 360^\circ k$, де $0 \leq \alpha_0 < 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$. Наприклад, $1100^\circ = 20^\circ + 360^\circ \cdot 3$, а $-640^\circ = 80^\circ + 360^\circ \cdot (-2)$.

Задача 1. Серед кутів повороту 460° , -270° , 810° , -660° знайти ті, при повороті на які початковий радіус прийме те саме положення, що й при повороті на кут 90° .

- Розв’язання. Оскільки $460^\circ = 100^\circ + 360^\circ \cdot 1$;
- $-270^\circ = 90^\circ + 360^\circ \cdot (-1)$; $810^\circ = 90^\circ + 360^\circ \cdot 2$;
- $-660^\circ = 60^\circ + 360^\circ \cdot (-2)$, то такими є кути -270° і 810° .
- Відповідь. -270° і 810° .

Нагадаємо, що координатні осі ділять координатну площину на чотири чверті (мал. 7.8). Нехай при повороті на кут α початковий радіус OA перейшов у радіус OB , тоді кут α називають кутом тої чверті, у якій міститьсяся радіус OB . Так, наприклад, $\alpha = 50^\circ$ – кут першої чверті (мал. 7.1), $\alpha = 120^\circ$ – кут другої чверті (мал. 7.2), $\alpha = 225^\circ$ – кут третьої чверті (мал. 7.3), $\alpha = -50^\circ$ – кут четвертої чверті (мал. 7.1).



Мал. 7.8

Кути 0° ; $\pm 90^\circ$; $\pm 180^\circ$; $\pm 270^\circ$; $\pm 360^\circ$; ... не належать жодній чверті.

Задача 2. Кутом якої чверті є кут: 1) 1999° ; 2) -2010° ?

• Розв'язання.

- 1) $1999^\circ = 199^\circ + 360^\circ \cdot 5$, тому 1999° – кут III чверті.
- 2) $-2010^\circ = 150^\circ + 360^\circ \cdot (-6)$, тому -2010° – кут II чверті.

Відповідь. 1) кут III чверті; 2) кут II чверті.

2. Означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса

Нехай при повороті на кут α початковий радіус OA перейшов у радіус OB , причому точка B має координати $(x; y)$ (мал. 7.9).

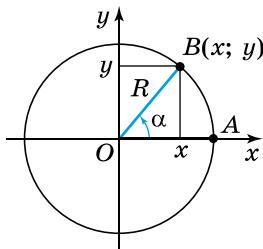
Синусом кута α називають відношення ординати точки B до довжини радіуса: $\sin \alpha = \frac{y}{R}$.

Косинусом кута α називають відношення абсциси точки B до довжини радіуса: $\cos \alpha = \frac{x}{R}$.

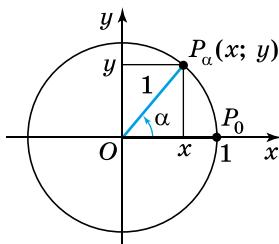
Тангенсом кута α називають відношення ординати точки B до її абсциси: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$ (якщо $x \neq 0$).

Котангенсом кута α називають відношення абсциси точки B до її ординати: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$ (якщо $y \neq 0$).

Зауважимо, що вказані означення не суперечать означенням синуса, косинуса і тангенса кутів від 0° до 180° , раніше введеним у геометрії.



Мал. 7.9



Мал. 7.10

3. Одичнічне коло

Як відомо з курсу геометрії, значення $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, де $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, залежить лише від

градусної міри кута α і не залежить від довжини радіуса R . Тому зручно розглядати коло з радіусом $R = 1$ і центром у початку координат (мал. 7.10). Таке коло називають *одиничним колом*.

Нехай при повороті на кут α початковий радіус OP_0 переходить у радіус OP_α , де точка P_α має координати $(x; y)$ (мал. 7.10). Кажуть, що куту α відповідає точка P_α одинично-го кола. Тоді



синусом кута α називають ординату точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола, тобто $\sin \alpha = y$;

косинусом кута α називають абсцису точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола, тобто $\cos \alpha = x$;

тангенсом кута α називають відношення ординати точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола до її абсциси, тобто $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$ (якщо $x \neq 0$);

котангенсом кута α називають відношення абсциси точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола до її ординати, тобто

$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$ (якщо $y \neq 0$).

Означення тангенса можна сформулювати й так:



тангенсом кута α називають відношення синуса цього кута до його косинуса.

Справді, оскільки $y = \sin \alpha$, а $x = \cos \alpha$, то $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, де $\cos \alpha \neq 0$. Аналогічно:



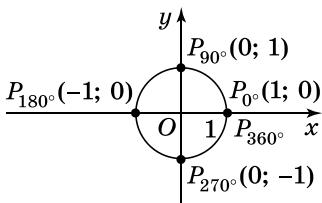
котангенсом кута α називають відношення косинуса цього кута до його синуса.

Справді, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, де $\sin \alpha \neq 0$.

Вирази $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ мають зміст для будь-якого значення α . Вираз $\operatorname{tg} \alpha$ має зміст, коли $x \neq 0$, тобто коли $\alpha \neq \pm 90^\circ, \pm 270^\circ, \pm 450^\circ, \dots$, оскільки для цих кутів абсциса відповідної точки одиничного кола дорівнює нулю. Вираз $\operatorname{ctg} \alpha$ має зміст, коли $y \neq 0$, тобто коли $\alpha \neq 0^\circ, \pm 180^\circ, \pm 360^\circ, \dots$, оскільки для цих кутів ордината відповідної точки одиничного кола дорів-нює нулю.

Отже, кожному допустимому значенню кута α відповідає єдине значення $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$. Тому синус, косинус, тангенс і котангенс є функціями кута α . Їх називають *триго-нометричними функціями кута*.

4. Тригонометричні значення деяких кутів



Мал. 7.11

$\cos 270^\circ = 0$; $\operatorname{tg} 270^\circ$ – не існує; $\operatorname{ctg} 270^\circ = 0$.

Точка P_{360° має такі самі координати, як і точка P_{0° , тому $\sin 360^\circ = \sin 0^\circ = 0$; $\cos 360^\circ = \cos 0^\circ = 1$; $\operatorname{tg} 360^\circ = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$; $\operatorname{ctg} 360^\circ$ – не існує.

Подамо отримані значення у вигляді таблиці, доповнивши її значеннями синуса, косинуса і тангенса гострих і тупих кутів, відомих нам з курсу геометрії. Невідомі значення тангенса і котангенса для цієї таблиці обчислимо відповідно за формулами $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ і $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$. Кути α першого рядка цієї таблиці ще називають *табличними кутами*. Маємо:

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

Задача 3. Обчислити: $\operatorname{ctg} 135^\circ + \sin^2 30^\circ$.

Розв’язання. Кути 135° і 30° є табличними. Отже,

$$\operatorname{ctg} 135^\circ + \sin^2 30^\circ = -1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -1 + \frac{1}{4} = -0,75.$$

Відповідь. -0,75.

5. Знаходження тригонометричних значень за допомогою калькулятора

Для знаходження синуса, косинуса і тангенса в калькуляторах є відповідні клавіші \sin , \cos і \tg (у деяких калькуляторах \tan).

Спочатку перемикач «Г-Р» треба «Г» для задання кутів у градусах. У деяких калькуляторах це досягається за допомогою клавіші **MODE** і вибору відповідного режиму. Залежно від типу калькуляторів послідовність обчислень може бути різною, тому радимо уважно ознайомитися з інструкцією до вашого калькулятора. Наведемо порядок обчислень для двох найбільш поширених типів калькуляторів.

Приклад	Калькулятори I типу	Результат (з точністю до десятичесячних)
$\sin 28^\circ$	$28 \quad \sin$	$\approx 0,4695$
$\cos 12^\circ 20'$	$20 \quad \div \quad 60 \quad + \quad 12 \quad = \quad \cos$	$\approx 0,9769$
$\tg 17^\circ$	$17 \quad \tg$	$\approx 0,3057$
$\ctg 54^\circ$	$54 \quad \tg \quad 1/x$	$\approx 0,7265$

Приклад	Калькулятори II типу	Результат (з точністю до десятичесячних)
$\sin 28^\circ$	$\sin \quad 28 \quad =$	$\approx 0,4695$
$\cos 12^\circ 20'$	$\cos \quad 12 \quad \circ, ' \quad 20 \quad \circ, ' \quad =$	$\approx 0,9769$
$\tg 17^\circ$	$\tg \quad 17 \quad =$	$\approx 0,3057$
$\ctg 54^\circ$	$1 \quad \div \quad \tg \quad 54 \quad =$	$\approx 0,7265$

В останньому рядку обох таблиць скористалися тим, що котангенс є числом, оберненим до тангенса.

А ще раніше...

Термін тригонометрія походить від грецьких слів «тригоном» – трикутник і «метріо» – вимірюю, що разом означає вимірювання трикутників.

Потреба у вимірюванні відстаней і кутів виникла ще у стародавні часи через необхідність визначення положення зірок на небі, кораблів у відкритому морі, караванів у пустелі тощо.

Деякі знання з тригонометрії накопичили і вчені Стародавнього Вавилону. Засновниками ж тригонометрії прийнято вважати давньогрецьких вчених Гіпарха (бл. 180 р. – бл. 125 р. до н.е.) і Птолемея (бл. 100 р. – бл. 178 р.). Зокрема, Гіпарх склав таблиці хорд – перші тригонометричні таблиці. Більш точні таблиці синусів склав Птолемей. Крім цих таблиць, його праця «Альмагест» містила також тогочасні відомості з астрономії та суміжних наук.

У Європі вперше тригонометрія як самостійна наука трактується у праці «П'ять книг про трикутник усіх видів» Йоганна Мюллера (1436–1476). Подальший розвиток тригонометрії відбувся завдяки Миколаю Копернику (1473–1543), Франсуа Вієту (1540–1603), Йоганну Кеплеру (1571–1630) і був пов'язаний з дослідженнями в астрономії. Сучасного вигляду тригонометрія набула у працях Леонарда Ейлера (1707–1783), який уперше сформулював означення тригонометричних функцій, розглянув їх для довільних кутів та довів кілька тригонометричних формул.

Термін «синус» уперше з'явився у працях індійського вченого Ариабхатти (476–550). Термін «косинус» є скороченням латинського «complementy sinus», тобто додатковий синус.

Сучасні позначення « $\sin x$ » і « $\cos x$ » уперше запропонував Йоганн Бернуллі в 1739 р. в листі до Ейлера. Ейлер їх прийняв і систематизував.

Терміни «тангенс» і «котангенс» уведено арабським математиком Абу-н-Вефа (940–998). Він же склав перші таблиці тангенсів і котангенсів.



- Що називають початковим радіусом; кутом повороту? Який кут повороту вважають додатним, а який – від'ємним?
- Сформулюйте означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута α .
- Яке коло називають одиничним?
- Сформулюйте означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута α , заданого на одиничному колі.



Роз'яжіть задачі та виконайте вправи



- 7.1. (Усно.) Куту α на одиничному колі відповідає точка $P_\alpha\left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$. Назвіть значення $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$.

7.2. Куту β на одиничному колі відповідає точка $P_\beta(0,8; 0,6)$.
Запишіть значення $\sin \beta$ і $\cos \beta$.

Знайдіть (7.3–7.4):

- 7.3.** 1) $\sin 45^\circ$; 2) $\cos 90^\circ$; 3) $\tg 30^\circ$; 4) $\ctg 135^\circ$;
5) $\cos 120^\circ$; 6) $\sin 180^\circ$; 7) $\ctg 60^\circ$; 8) $\tg 0^\circ$.

- 7.4.** 1) $\sin 120^\circ$; 2) $\cos 30^\circ$; 3) $\tg 45^\circ$; 4) $\ctg 90^\circ$;
5) $\cos 270^\circ$; 6) $\sin 0^\circ$; 7) $\ctg 120^\circ$; 8) $\tg 60^\circ$.

 Накресліть коло із центром у початку координат і позначте на ньому, використовуючи транспортир, кут повороту (7.5–7.6):

- 7.5.** 1) 60° ; 2) 210° ; 3) -40° ; 4) -320° .

- 7.6.** 1) 110° ; 2) 300° ; 3) -130° ; 4) -200° .

Запишіть кут α у вигляді $\alpha = \alpha_0 + 360^\circ k$, де $0^\circ \leq \alpha_0 < 360^\circ$, $k \in Z$, якщо (7.7–7.8):

- 7.7.** 1) $\alpha = 420^\circ$; 2) $\alpha = 765^\circ$; 3) $\alpha = -320^\circ$; 4) $\alpha = -1060^\circ$.

- 7.8.** 1) $\alpha = 730^\circ$; 2) $\alpha = 395^\circ$; 3) $\alpha = -710^\circ$; 4) $\alpha = -770^\circ$.

Кутом якої чверті є кут градусної міри (7.9–7.10):

- 7.9.** 1) 190° ; 2) -190° ; 3) 105° ; 4) -105° ;
5) 89° ; 6) -89° ; 7) 320° ; 8) -320° ?

- 7.10.** 1) 95° ; 2) -95° ; 3) 210° ; 4) -210° ;
5) 20° ; 6) -20° ; 7) 280° ; 8) -280° ?

7.11. Відомо, що $\sin \gamma = -\frac{12}{13}$; $\cos \gamma = -\frac{5}{13}$. Знайдіть $\tg \gamma$ і $\ctg \gamma$.

7.12. Відомо, що $\sin \beta = \frac{8}{17}$; $\cos \beta = -\frac{15}{17}$. Знайдіть $\tg \beta$ і $\ctg \beta$.

Знайдіть на калькуляторі (округліть до тисячних) (7.13–7.14):

- 7.13.** 1) $\sin(-15^\circ)$; 2) $\cos 127^\circ$; 3) $\tg 1000^\circ$; 4) $\ctg(-37^\circ)$.

- 7.14.** 1) $\sin 190^\circ$; 2) $\cos(-100^\circ)$; 3) $\tg(-29^\circ)$; 4) $\ctg 1200^\circ$.

Обчисліть (7.15–7.16):

- 7.15.** 1) $\cos 90^\circ + \sin 0^\circ$; 2) $3\cos 180^\circ \cdot \sin 90^\circ$;
3) $2\tg 180^\circ - 4\ctg 90^\circ$; 4) $\ctg 270^\circ - \cos 270^\circ + \sin 270^\circ$.

- 7.16.** 1) $5\sin 360^\circ + \cos 360^\circ$; 2) $\tg 0^\circ + \sin 180^\circ - \cos 0^\circ$.

Знайдіть значення виразу (7.17–7.18):

- 7.17.** 1) $4\cos 30^\circ - 2\sin 60^\circ$; 2) $\sqrt{2}\sin 45^\circ + 2\sqrt{2}\cos 45^\circ$;
3) $\tg 60^\circ : \ctg 30^\circ$; 4) $\sin 150^\circ + \cos 120^\circ$.

- 7.18.** 1) $\operatorname{ctg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ$; 2) $\sqrt{3} \sin 120^\circ - \cos 60^\circ$;
 3) $\sin 135^\circ + \cos 135^\circ$; 4) $\operatorname{tg} 120^\circ : \operatorname{ctg} 150^\circ$.

3 **7.19.** Серед кутів повороту $520^\circ; 440^\circ; -310^\circ; 220^\circ; 770^\circ; -560^\circ$ знайдіть ті, у яких початковий радіус прийматиме те саме положення, що й при повороті на кут:
 1) 50° ; 2) 160° .

- 7.20.** У проміжку від 0° до 360° знайдіть кут β такий, щоб поворот початкового радіуса на цей кут збігався з поворотом на кут α , якщо:
 1) $\alpha = 480^\circ$; 2) $\alpha = -70^\circ$; 3) $\alpha = 1150^\circ$; 4) $\alpha = -670^\circ$.

Знайдіть на калькуляторі (округліть до сотих) (7.21–7.22):

7.21. 1) $\sin 12^\circ 37' + \cos 15^\circ 13'$; 2) $\operatorname{tg} 105^\circ 12' + \operatorname{ctg} 185^\circ 38'$.

7.22. 1) $\cos 113^\circ 24' + \operatorname{tg} 17^\circ 36'$; 2) $\sin 190^\circ 15' + \operatorname{ctg} 12^\circ 30'$.

- 7.23.** Укажіть кут α з проміжку $[360^\circ; 720^\circ]$, для якого:
 1) $\sin \alpha = 1$; 2) $\cos \alpha = 0$; 3) $\sin \alpha = 0$; 4) $\cos \alpha = -1$.

- 7.24.** Укажіть кут β з проміжку $[-360^\circ; 0^\circ]$, для якого:
 1) $\sin \beta = -1$; 2) $\cos \beta = 1$.

- 7.25.** Укажіть три таких значення x , для яких:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{tg} x = 0$.

- 7.26.** Укажіть два таких значення α , для яких:

1) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\operatorname{ctg} \alpha = 0$.

Обчисліть (7.27–7.28):

- 7.27.** 1) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ$; 2) $\sin 30^\circ \cos 180^\circ \operatorname{tg} 45^\circ$;
 3) $\operatorname{tg}^2 180^\circ + \cos^2 120^\circ$;
 4) $(2 \operatorname{ctg} 270^\circ - 2 \cos 60^\circ + \sin^2 60^\circ)^{-1}$.

- 7.28.** 1) $\sin^2 120^\circ - \cos^2 0^\circ$; 2) $\cos 45^\circ \sin 135^\circ \operatorname{ctg} 45^\circ$;
 3) $\operatorname{ctg}^2 60^\circ + \sin^2 30^\circ$;
 4) $(2 \cos^2 0^\circ - \operatorname{ctg} 135^\circ - 10 \cos^2 60^\circ)^{-1}$.

- 7.29.** Знайдіть значення виразу $\sin 3\alpha + \sin 2\alpha$, якщо:
 1) $\alpha = 15^\circ$; 2) $\alpha = 30^\circ$; 3) $\alpha = 60^\circ$; 4) $\alpha = 90^\circ$.

- 7.30.** Знайдіть значення виразу $\cos \alpha + \cos 2\alpha - \cos 3\alpha$, якщо:
 1) $\alpha = 30^\circ$; 2) $\alpha = 60^\circ$.

4 Обчисліть (7.31–7.32):

- 7.31.** 1) $\sqrt{(1 - 2 \cos 45^\circ)^2} - \sqrt{(1 + 2 \sin 45^\circ)^2}$;
 2) $\sqrt{(\operatorname{ctg} 30^\circ - 2)^2} + \sqrt{(\operatorname{tg} 60^\circ - 1)^2}$.

7.32. 1) $\sqrt{(1 - 2 \sin 60^\circ)^2} - \sqrt{(1 + 2 \cos 30^\circ)^2};$
 2) $\sqrt{(3 \operatorname{tg} 30^\circ - 1)^2} + \sqrt{(3 \operatorname{ctg} 60^\circ - 2)^2}.$

7.33. Знайдіть координати точок $P_{-\alpha}$ і $P_{\alpha+180^\circ}$ на одиничному колі, якщо $P_\alpha(a; b)$.



Життєва математика

7.34. Для табору пластунів треба придбати цукор з розрахунком 50 г цукру на добу (на одну особу). У таборі 4 курені на 28 місць кожен. Скільки кілограмових упаковок цукру знадобиться на 5 діб для всього табору?



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

7.35. Радіус кола дорівнює 1 дм. Знайдіть довжину дуги, що відповідає центральному куту:

- | | | | |
|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1) 30° ; | 2) 45° ; | 3) 60° ; | 4) 90° ; |
| 5) 120° ; | 6) 135° ; | 7) 150° ; | 8) 180° ; |
| 9) 210° ; | 10) 235° ; | 11) 240° ; | 12) 270° . |

§ 8. РАДІАННЕ ВИМІРЮВАННЯ КУТІВ. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТУ

Як відомо, кути вимірюють у градусах та його частинах – мінутах, секундах. Проте в математиці, астрономії, фізиці та інших науках використовують також і *радіанну міру* кута, яка має певні переваги перед градусною.

1. Радіанна міра кута

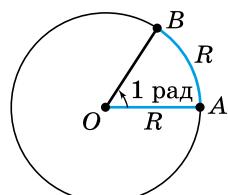


Кутом в 1 (один) радіан називають центральний кут, довжина дуги якого дорівнює довжині радіуса кола.

На малюнку 8.1 $\angle AOB = R$, тому кут AOB має міру 1 радіан (скорочено «рад»).

Установимо зв'язок між радіанною і градусною мірами кута.

Довжина півколо, радіус якого R , дорівнює πR , що в π разів більше за довжину дуги AB . Тому розгорнутому куту відповідає дуга, міри π радіанів. Отже,



Мал. 8.1

$180^\circ = \pi \text{ рад.}$



Тоді $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ рад, 1 рад $= \frac{180^\circ}{\pi}$, тому

 $n^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot n$ рад; α рад $= \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha$; 1 рад $\approx 57^\circ 18'$.

Ці формули, зокрема, допомагають перейти від градусної міри кута до радіанної, і навпаки, але можна застосовувати і пропорцію, врахувавши, що $180^\circ = \pi$ рад.

Задача 1. Знайти радіанну міру кута 144° .

• Розв'язання. 1-й спосіб (за формуллою):

$$144^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 144^\circ = \frac{144\pi}{180} = \frac{4\pi}{5} \text{ (рад).}$$

• 2-й спосіб (за допомогою пропорції): $180^\circ - \pi$ рад
 $144^\circ - x$ рад

• Маємо рівняння: $\frac{180}{144} = \frac{\pi}{x}$, звідки $x = \frac{144\pi}{180}$, тобто $x = \frac{4\pi}{5}$ (рад).

• Відповідь. $\frac{4\pi}{5}$ рад.

Задача 2. Знайти градусну міру кута: 1) $1,5$ рад; 2) $\frac{5\pi}{6}$.

• Розв'язання. 1) $1,5$ рад $= \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 1,5 = \frac{270^\circ}{\pi} \approx 85^\circ 59'$.

• 2) Знайти можна в той самий спосіб, що й для попереднього кута, але тут доцільніше буде замінити π на 180° . Матимемо: $\frac{5\pi}{6} = \frac{5 \cdot 180^\circ}{6} = 150^\circ$.

• Відповідь. 1) $\approx 85^\circ 59'$; 2) 150° .

 **Задача 3.** Знайдемо радіанні міри табличних кутів:

$$30^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 30 = \frac{\pi}{6} \text{ рад}; \quad 45^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi}{4} \text{ рад};$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 60 = \frac{\pi}{3} \text{ рад}; \quad 90^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 90 = \frac{\pi}{2} \text{ рад};$$

$$120^\circ = 2 \cdot 60^\circ = 2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ рад}; \quad 135^\circ = 3 \cdot 45^\circ = 3 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ рад};$$

$$150^\circ = 5 \cdot 30^\circ = 5 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \text{ рад}; \quad 270^\circ = 3 \cdot 90^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ рад};$$

$$360^\circ = 2 \cdot 180^\circ = 2\pi \text{ рад.}$$

2. Тригонометричні функції числового аргументу

Радіанну міру кута, так само як і градусну, використовують для запису тригонометричних виразів. Так, запис $\sin 2$ означає синус кута, міра якого дорівнює 2 радіани, за-

пис $\cos \frac{3\pi}{4}$ означає косинус кута міри $\frac{3\pi}{4}$ радіанів, запис $\operatorname{tg}(-3)$ – тангенс кута, міра якого дорівнює -3 радіани.

Кожному допустимому значенню числа x (кута, що містить x радіанів) відповідає *єдине* значення $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$. Тому синус, косинус, тангенс і котангенс є функціями числового аргументу x . Їх називають *тригонометричними функціями числового аргументу*.

$$\text{Наприклад, } \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Задача 4. Знайти значення виразу $\cos x + x$, якщо $x = 0$.

- Розв'язання. Якщо $x = 0$, маємо:
- $\cos x + x = \cos 0 + 0 = 1 + 0 = 1$.
- Відповідь. 1.

3. Знаходження значень тригонометричних функцій за допомогою калькулятора

Значення тригонометричних функцій числового аргументу за допомогою калькулятора знаходить так само, як і значення тригонометричних функцій кутів, які задано у градусах (див. § 7, п. 5), але в цьому випадку для задання кутів у радіанах перемикач $\langle\Gamma-P\rangle$ треба

виставити в положення «P». Нагадаємо, що в деяких калькуляторах це досягається за допомогою клавіші **MODE** і вибору відповідного режиму.

Перевірте на своєму калькуляторі, що

$$\begin{aligned}\sin 2 &\approx 0,9093; & \cos 30 &\approx 0,1543; \\ \operatorname{tg}(-2,7) &\approx 0,4727; & \operatorname{ctg} 2,95 &\approx -5,1554.\end{aligned}$$

А ще раніше...

Перше використання радіана замість кутового градуса зазвичай приписують Роджеру Комсу (XVII ст.), який вважав цю одиницею вимірювання кутів найбільш природною. Однак ідею вимірювання довжини дуги кола використовували й інші математики. Наприклад, Аль-Каші використовував оди-

ницею вимірювання, яку називав «частина діаметра» і яка дорівнювала $\frac{1}{60}$ сучасного розуміння радіана. Також він використовував і більш дрібні частини цієї одиниці вимірювання.

Термін «радіан» уперше було вживто 5 червня 1873 року в екзаменаційних билетах, складених Джеймсоном Томсоном для студентів університету Кейнса в Белфасті (Північна Ірландія). Томсон почав використовувати цей термін ще до того, як склав ці билети. Саме тоді його колега Томас Мюїр із Сент-Ендрюського університету намагався визначитися з назвою терміну, вагаючись між назвами «рад», «радіал» і «радіан». У 1879 році Мюїр, проконсультувавши з Томсоном, вирішив використовувати термін «радіан».



- Що називають кутом в 1 радіан?
- Яка радіанна міра кута 180° ?
- Як перейти від градусної міри до радіанної, і навпаки?
- Укажіть наближено градусну міру кута в 1 рад.
- Що називають тригонометричною функцією числового аргументу?
- Запам'ятайте радіанні міри табличних кутів.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



Знайдіть радіанну міру кута (8.1–8.2):

8.1. 1) 20° ; 2) 75° ; 3) -40° ; 4) 720° ; 5) -110° ; 6) 225° .

8.2. 1) 25° ; 2) -30° ; 3) 130° ; 4) -160° ; 5) 50° ; 6) 240° .

Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює (8.3–8.4):

8.3. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 3π ; 3) $-\frac{3\pi}{4}$; 4) $-\pi$; 5) $0,5$; 6) -2 .

8.4. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) -2π ; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{6}$; 5) $1,5$; 6) -3 .



Кутом якої чверті є кут (8.5–8.6):

8.5. 1) $\frac{\pi}{5}$; 2) $\frac{4\pi}{3}$; 3) $-\frac{\pi}{6}$; 4) $\frac{7\pi}{8}$?

8.6. 1) $\frac{9\pi}{10}$; 2) $-\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{20}$; 4) $\frac{5\pi}{3}$?

8.7. Дах має форму трикутника. Радіанна міра двох кутів цього трикутника дорівнює $\frac{2\pi}{3}$ і $\frac{\pi}{6}$. Знайдіть радіанну і градусну міри третього кута трикутника.

8.8. Туристичний намет має форму рівнобічної трапеції, один з кутів якої дорівнює 72° . Знайдіть градусну і радіанну міри більшого з кутів трапеції.

За допомогою калькулятора знайдіть число з точністю до сотих (8.9–8.10):

8.9. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{8}$; 3) 2π ; 4) $-4,5\pi$.

8.10. 1) $-\frac{\pi}{5}$; 2) $\frac{\pi}{10}$; 3) $-1,5\pi$; 4) 8π .

Знайдіть за допомогою калькулятора (округліть до тисячних) (8.11–8.12):

8.11. 1) $\sin 1$; 2) $\cos(-2,5)$; 3) $\tg \frac{\pi}{7}$; 4) $\ctg\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$.

8.12. 1) $\sin(-3)$; 2) $\cos 0,8\pi$; 3) $\tg\left(-\frac{\pi}{12}\right)$; 4) $\ctg 4,2$.

 **8.13.** Накресліть таблицю в зошиті та заповніть її.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$											
$\cos \alpha$											
$\tg \alpha$											
$\ctg \alpha$											

Обчисліть (8.14–8.15):

8.14. 1) $4 \sin \frac{\pi}{6} + \ctg \frac{\pi}{4}$; 2) $\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2}$;

3) $2 \cos \pi - \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3}$; 4) $2 \cos \frac{2\pi}{3} + \tg \frac{3\pi}{4}$.

8.15. 1) $2 \cos \frac{\pi}{3} - \tg \frac{\pi}{4}$; 2) $\sin \pi + \cos 2\pi$;

3) $\sin \frac{3\pi}{2} - \ctg \frac{3\pi}{4}$; 4) $4 \sin \frac{5\pi}{6} + \ctg \frac{\pi}{2}$.

8.16. Знайдіть значення виразу $3\sin \alpha + 2\cos \alpha$, якщо:

1) $\alpha = 0$; 2) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; 3) $\alpha = \pi$; 4) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

8.17. Знайдіть значення виразу $5\cos \beta - 2\sin \beta$, якщо:

1) $\beta = 0$; 2) $\beta = \frac{\pi}{2}$; 3) $\beta = \pi$; 4) $\beta = \frac{3\pi}{2}$.



8.18. Знайдіть радіанну міру внутрішнього кута правильного:

- 1) трикутника;
- 2) чотирикутника;
- 3) шестикутника;
- 4) десятикутника;
- 5) дванадцятикутника;
- 6) двадцятикутника.

8.19. Знайдіть радіанну міру кутів трикутника, якщо вони відносяться як $1 : 4 : 5$.

Порівняйте числа (8.20–8.21):

8.20. 1) $\frac{\pi}{2}$ і $1,6$; 2) π і $3\frac{1}{8}$; 3) $-\frac{3\pi}{2}$ і -5 ; 4) -2π і -6 .

8.21. 1) $-\frac{\pi}{2}$ і $-1,5$; 2) 2π і $6,3$; 3) $-\pi$ і $-3,2$; 4) $\frac{3\pi}{2}$ і $4,5$.

Обчисліть (8.22–8.23):

8.22. 1) $5 \cos^2 \frac{\pi}{3} - 2 \sin^2 \frac{\pi}{6}$; 2) $\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} + \sin \frac{5\pi}{6} \right)^2$;

3) $\left(\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6} \right)^2 - \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$; 4) $\sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4}$.

8.23. 1) $\left(\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6} \right)^2 - \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$; 2) $\sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4}$;

3) $\left(\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{5\pi}{6} \right)^2 - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$; 4) $\cos^2 \frac{3\pi}{4} + \sin^2 \frac{3\pi}{4} + \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{4}$.

Знайдіть значення виразу (8.24–8.25):

8.24. 1) $\sin 2\alpha - 4\cos \alpha$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \pi$;

2) $4\sin \alpha + 2\cos 3\alpha$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}$.

8.25. 1) $2\cos 2\alpha + \sin \alpha$, якщо $\alpha = 0; \frac{\pi}{6}; \pi$;

2) $3\cos \alpha - \sin 3\alpha$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$.



8.26. Скільки сторін має правильний многокутник, якщо:

1) його внутрішній кут дорівнює $\frac{3\pi}{4}$;

2) його зовнішній кут дорівнює $\frac{\pi}{8}$?

Знайдіть значення виразу (8.27–8.28):

8.27. 1) $\frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) + 2\tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

2) $\frac{4\cos(\alpha + \beta) - 3\sin(\alpha - \beta)}{6\sin(\alpha + \beta)}$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{3}$; $\beta = \frac{\pi}{6}$.

8.28. 1) $\frac{\sqrt{3}\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) + 2\sin \alpha}$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

2) $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{2\sin(\alpha - \beta) + 4\cos(\alpha + \beta)}$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{3}$; $\beta = \frac{\pi}{6}$.

Порівняйте (8.29–8.30):

8.29. 1) $\tg \frac{2\pi}{3} + \ctg \frac{2\pi}{3}$ і -2 ; 2) $\sin \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{6}$ і $\sqrt[3]{4}$.

8.30. 1) $\tg \frac{\pi}{3} + \ctg \frac{\pi}{3}$ і 2 ; 2) $\cos \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}$ і $-\sqrt[5]{5}$.

8.31. Доведіть, що $\sin \frac{\pi}{3} \ctg \frac{\pi}{6} = \tg^2 \frac{\pi}{3} \left(1 - \cos^2 \frac{3\pi}{4}\right)$.

8.32. Доведіть, що $\cos \frac{\pi}{6} \tg \frac{\pi}{3} - 1 = \ctg^2 \frac{\pi}{3} \left(1 + \sin^2 \frac{3\pi}{4}\right)$.



Життєва математика

8.33. Перші п'ять цифр ідентифікаційного податкового номера (ІПН) громадянина України – це число, що точно дорівнює кількості днів від 1 січня 1900 року до дати народження власника ІПН включно.

- 1) Знайдіть, якими мають бути перші п'ять цифр вашого ІПН.
- 2) Знайдіть число, місяць та рік народження особи, ІПН якої дорівнює числу 2395312785.



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

8.34. 1) Назвіть кілька значень кута α , для яких $\tg \alpha$ не існує.

2) Назвіть кілька значень кута β , для яких $\ctg \beta$ не існує.

8.35. Нехай $A(x; y)$ – довільна точка, що лежить на одиничному колі. Чи правильні нерівності $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$?

8.36. Порівняйте з нулем координати x і y , якщо точка $A(x; y)$ лежить у:

- 1) I чверті; 2) II чверті; 3) III чверті; 4) IV чверті.

8.37. Точки A і A' симетричні відносно осі абсцис. Знайдіть координати точки A' , якщо:

1) $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

8.38. Парною чи непарною є функція:

1) $y = x^4$; 2) $y = x^3$; 3) $y = 7x - x^5$; 4) $y = \frac{1}{|x| - 1}$?

§ 9. ВЛАСТИВОСТІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо властивості тригонометричних функцій, які безпосередньо випливають з їх означень.

1. Область визначення тригонометричних функцій

Як ми вже зазначали раніше, вирази $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ мають зміст для будь-якого кута α (див. § 7, п. 3). Так само мають зміст вирази $\sin x$ і $\cos x$ для будь-якого числа x (кута x у радіанах). Отже,



областю визначення функцій синуса і косинуса є множина всіх дійсних чисел.

Це можна записати так: $D(\sin x) = D(\cos x) = (-\infty; +\infty)$

або $D(\sin x) = D(\cos x) = R$.

Вираз $\operatorname{tg} \alpha$ має зміст для будь-яких кутів α , крім $\pm 90^\circ$, $\pm 270^\circ$, $\pm 450^\circ$, ..., тобто крім кутів, які можна задати формулою $90^\circ + 180^\circ k$, де $k \in Z$. Тому вираз $\operatorname{tg} x$ не має змісту, коли $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.



Областю визначення функції тангенса є множина всіх дійсних чисел, крім чисел $\frac{\pi}{2} + \pi k$, де $k \in Z$.

Вираз $\operatorname{ctg} \alpha$ має зміст для будь-яких кутів α , крім 0° , $\pm 180^\circ$, $\pm 360^\circ$, ..., тобто крім кутів, які можна задати формулою $180^\circ k$, де $k \in Z$. Тому вираз $\operatorname{ctg} x$ не має змісту, коли $x = \pi k$, де $k \in Z$.



Областю визначення функції котангенса є множина всіх дійсних чисел, крім чисел πk , де $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 1. Знайти область визначення функції $y = \operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. Знайдемо значення x , для яких котангенс не існує, розв'язавши рівняння: $2x - \frac{\pi}{4} = \pi k$.

Маємо: $2x = \frac{\pi}{4} + \pi k; x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, де $k \in \mathbb{Z}$.

Отже, область визначення функції є множина всіх дійсних чисел, крім чисел $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Скорочено це можна записати так: $D(y): x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

2. Множина значень тригонометричних функцій

Синус і косинус кута α є відповідно ординатою і абсцисою точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола (див. § 7, п. 3). Тому ординати і абсциси точок одиничного кола набувають будь-яких

значень від -1 до 1 . Отже,



множиною значень функцій синуса і косинуса є проміжок $[-1; 1]$.

Той самий проміжок $[-1; 1]$ є множиною значень і у випадку синуса і косинуса числового аргументу x (кута x у радианах). Отже,

$$E(\sin x) = E(\cos x) = [-1; 1].$$

Задача 2. Чи існує значення x , для якого:

$$1) \cos x = -\frac{5}{6}; \quad 2) \sin x = \sqrt{2}?$$

Розв'язання. 1) Оскільки $-1 \leq -\frac{5}{6} \leq 1$, то значення x , при якому $\cos x = -\frac{5}{6}$, існує.

2) Оскільки $\sqrt{2} > 1$, то не існує значення x , при якому $\sin x = \sqrt{2}$.

Відповідь. 1) Так; 2) ні.

Задача 3. Знайти множину значень функції:

1) $y = \sin x + 2$; 2) $y = \cos^2 x - 3$.

Розв'язання. 1) Як відомо, $-1 \leq \sin x \leq 1$. Маємо:

$-1 \leq \sin x \leq 1$;

$-1 + 2 \leq \sin x + 2 \leq 1 + 2$ (додали до всіх частин числа 2);
 $1 \leq \sin x + 2 \leq 3$.

Отже, $E(y) = [1; 3]$.

2) Зрозуміло, що $\cos^2 x \geq 0$, з іншого боку, $-1 \leq \cos x \leq 1$, тому $\cos^2 x \leq 1$. Маємо:

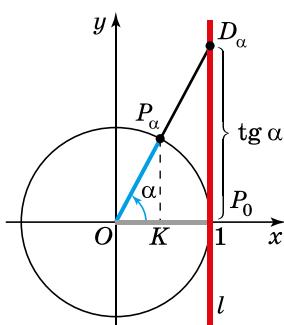
$0 \leq \cos^2 x \leq 1$;

$0 - 3 \leq \cos^2 x - 3 \leq 1 - 3$ (відняли від усіх частин числа 3);
 $-3 \leq \cos^2 x - 3 \leq -2$.

Отже, $E(y) = [-3; -2]$.

Відповідь. 1) $[1; 3]$; 2) $[-3; -2]$.

Множину значень тангенса знайдемо за допомогою графічної інтерпретації.



Мал. 9.1

Розглянемо пряму l , що проходить через точку $(1; 0)$ перпендикулярно до осі абсцис. Вона є дотичною до одиничного кола (мал. 9.1). Нехай при повороті на кут α початковий радіус OP_0 одиничного кола переходить у радіус OP_α , а пряма OP_α перетинає пряму l у точці D_α . Нехай $P_\alpha(x; y)$, тому $x = \cos \alpha$; $y = \sin \alpha$. Проведемо перпендикуляр $P_\alpha K$ на вісь абсцис. Тоді $\triangle OP_\alpha K \sim \triangle OD_\alpha P_0$, тому маємо:

$$\frac{P_\alpha K}{OK} = \frac{D_\alpha P_0}{OP_0}, \quad \text{тобто} \quad \frac{y}{x} = \frac{D_\alpha P_0}{1}, \quad \text{отже,}$$

$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = D_\alpha P_0$, тому $D_\alpha P_0 = \operatorname{tg} \alpha$. Отже, ордината точки D_α дорівнює тангенсу кута α .

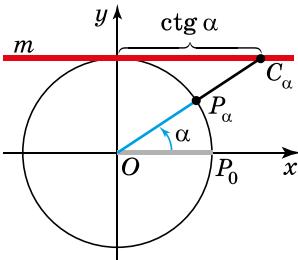
Пряму, що проходить через точку $(1; 0)$ перпендикулярно до осі абсцис, називають лінією тангенсів.

У разі зміни кута повороту від -90° до 90° змінюються і положення точки P_α на одиничному колі, отже, і положення точки D_α на лінії тангенсів. Очевидно, що ордината точки D_α може набувати будь-яких значень (мал. 9.1). Отже, множиною значень тангенса є множина всіх дійсних чисел.

У той самий спосіб розглянемо питання і про множину значень котангенса.

Пряму m , яка проходить через точку $(0; 1)$ перпендикулярно до осі ординат, називають *лінією котангенсів* (мал. 9.2). Можна довести, що абсциса точки C_α перетину прямої OP_α з лінією котангенсів дорівнює котангенсу α .

У разі зміни кута повороту від 0° до 180° точка C_α може набувати будь-яких значень, тому множиною значень котангенса є множина всіх дійсних чисел. Отже,



Мал. 9.2

! множиною значень функцій тангенса і котангенса є множина всіх дійсних чисел.

Аналогічно і для числового аргументу: $E(\operatorname{tg} x) = E(\operatorname{ctg} x) = R$.

3. Знаки тригонометричних функцій

Синус кута α є ординатою точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола (мал. 7.10). У I та II чвертях $y > 0$, а у III та IV чвертях $y < 0$. Тому:

- $\sin \alpha > 0$, якщо α – кут I або II чверті,
- $\sin \alpha < 0$, якщо α – кут III або IV чверті.

Косинус кута α є абсцисою точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола (мал. 7.10). У I та IV чвертях $x > 0$, а у II та III чвертях $x < 0$. Тому:

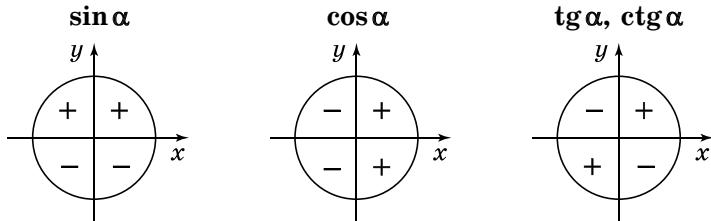
- $\cos \alpha > 0$, якщо α – кут I або IV чверті,
- $\cos \alpha < 0$, якщо α – кут II або III чверті.

Оскільки $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, а $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, то знаки $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ за-

лежать від знаків $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$. У I та III чвертях знаки $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ мають однакові знаки, а у II та IV чвертях – різні. Тому:

- $\operatorname{tg} \alpha > 0$ і $\operatorname{ctg} \alpha > 0$, якщо α – кут I або III чверті;
- $\operatorname{tg} \alpha < 0$ і $\operatorname{ctg} \alpha < 0$, якщо α – кут II або IV чверті.

Висновки щодо знаків тригонометричних функцій кутів зручно запам'ятати за малюнком 9.3.



Мал. 9.3

Задача 4. Порівняти з нулем число:

1) $\sin 152^\circ$; 2) $\cos(-12^\circ)$; 3) $\operatorname{tg}(-125^\circ)$; 4) $\operatorname{ctg} 2$.

- Розв'язання. 1) 152° – кут II чверті, тому $\sin 152^\circ > 0$.
• 2) -12° – кут IV чверті, тому $\cos(-12^\circ) > 0$.
• 3) -125° – кут III чверті, тому $\operatorname{tg}(-125^\circ) > 0$.
• 4) 2 радіани $\approx 2 \cdot 57^\circ = 114^\circ$, отже, 2 радіани – кут II чверті, тому $\operatorname{ctg} 2 < 0$.
- Відповідь. 1) $\sin 152^\circ > 0$; 2) $\cos(-12^\circ) > 0$;
3) $\operatorname{tg}(-125^\circ) > 0$; 4) $\operatorname{ctg} 2 < 0$.

4. Парність і непарність тригонометричних функцій

Нехай при повороті на кут α початковий радіус OP_0 одиничного кола переходить у радіус OP_α , а при повороті на кут $-\alpha$ – у радіус $OP_{-\alpha}$ (мал. 9.4). Точки P_α і $P_{-\alpha}$ – симетричні відносно осі абсцис, тому їх абсциси однакові, а ординати протилежні. Маємо:

$$\cos \alpha = x \text{ i } \cos(-\alpha) = x, \text{ тому } \cos(-\alpha) = \cos \alpha;$$

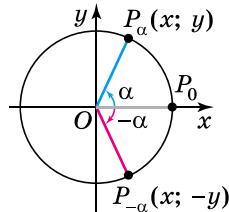
$$\sin \alpha = y \text{ i } \sin(-\alpha) = -y, \text{ тому}$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

$$\text{Тоді } \operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Отже,



Мал. 9.4



синус, тангенс і котангенс – непарні функції, косинус – парна функція, тобто:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

Ці формули можна використовувати для обчислень значень тригонометричних виразів. Наприклад,

$$1) \cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 2) \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$3) \operatorname{tg}(-180^\circ) = -\operatorname{tg} 180^\circ = 0; \quad 4) \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1.$$

5. Періодичність тригонометричних функцій

Якщо при повороті на кут α початковий радіус OP_0 одиничного кола переходить у радіус OP_α (мал. 9.4), то цей самий радіус OP_α отримаємо

й при повороті радіуса OP_0 на кут, відмінний від α на повний оберт або на будь-яку кількість повних обертів, тобто на число $360^\circ k$ (або $2\pi k$), де $k \in Z$. Приходимо до висновку, що

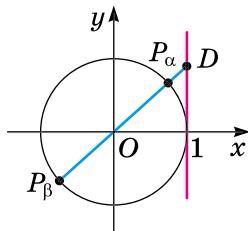


при зміні кута на ціле число обертів значення тригонометричних функцій синуса і косинуса не змінюються:

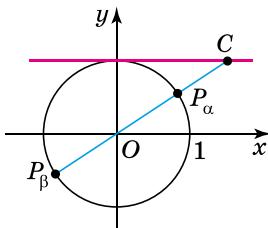
$$\begin{aligned}\sin(\alpha + 360^\circ k) &= \sin \alpha \quad \text{або} \quad \sin(\alpha + 2\pi k) = \sin \alpha, \\ \cos(\alpha + 360^\circ k) &= \cos \alpha \quad \text{або} \quad \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos \alpha.\end{aligned}$$

Отже, значення тригонометричних функцій синус і косинус не змінюються, якщо до їх аргументів додати (або відняти) число, кратне числу 2π . Кожне таке число для синуса і косинуса є періодом, а 2π – найменшим періодом. Функції, що мають таку властивість, називають *періодичними*.

Число 2π також є періодом функцій тангенс і котангенс, проте для цих функцій можна знайти і менший період. Розглянемо точки O , P_α та P_β , які лежать на одній прямій (мал. 9.5). Тоді прямі OP_α і OP_β збігаються, а тому перетинають вісь тангенсів в одній і тій самій точці D .



Мал. 9.5



Мал. 9.6

Аналогічно, прямі OP_α і OP_β перетинають вісь котангенсів в одній і тій самій точці C (мал. 9.6). Отже,



при зміні кута на ціле число півобертів (π , 2π , 3π , 4π , ...)
значення функцій тангенса і котангенса не змінюються.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ k) &= \operatorname{tg} \alpha \quad \text{або} \quad \operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg} \alpha. \\ \operatorname{ctg}(\alpha + 180^\circ k) &= \operatorname{ctg} \alpha \quad \text{або} \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{ctg} \alpha.\end{aligned}$$

Виходячи з періодичності, знаходження значень синуса і косинуса будь-якого кута можна звести до знаходження значення цієї ж функції невід'ємного кута, меншого від 360° (або від 2π), а значень тангенса і котангенса будь-якого кута – до знаходження значення цієї ж функції невід'ємного кута, меншого від 180° (або від π).

Задача 6. Обчислити: 1) $\sin 780^\circ$; 2) $\operatorname{tg}\left(-\frac{14\pi}{3}\right)$.

- Розв'язання. 1) 1-й спосіб. Оскільки $780^\circ = 60^\circ + 360^\circ \cdot 2$ і $\sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha$, $k \in Z$, матимемо:
 $\sin 780^\circ = \sin(60^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 2-й спосіб. Від 780° віднімемо два періоди по 360° . Матимемо:
 $\sin 780^\circ = \sin(780^\circ - 2 \cdot 360^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 2) Ураховуючи, що період тангенса дорівнює π , матимемо:
 $\operatorname{tg}\left(-\frac{14\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{14\pi}{3} + 5\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ (1-й спосіб) або
 $\operatorname{tg}\left(-\frac{14\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 5\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ (2-й спосіб).
- Відповідь. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sqrt{3}$.

Інколи знаходить значення тригонометричної функції деякого кута за допомогою періодичності доцільніше через значення цієї функції від'ємного кута, що лежить у межах від -180° до 0° (або від $-\pi$ до 0), а далі застосувати залежність між однайменними функціями протилежних кутів.

Наприклад,

$$\cos 330^\circ = \cos(330^\circ - 360^\circ) = \cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(\frac{13\pi}{4} - 4 \cdot \pi\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -(-1) = 1.$$



- Назвіть область визначення синуса, косинуса, тангенса і котангенса. • Назвіть множину значень синуса, косинуса, тангенса і котангенса. • Які знаки мають тригонометричні функції в кожній з координатних чвертей? • Назвіть тригонометричні функції, що є парними; непарними. Запишіть відповідні рівності. • Поясніть, у чому полягає періодичність тригонометричних функцій.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



9.1. (Усно). Чи існує таке значення x , для якого:

- 1) $\sin x = 0,3$; 2) $\cos x = 1,2$; 3) $\sin x = -1,8$;
- 4) $\cos x = -\frac{7}{8}$; 5) $\operatorname{tg} x = 12$; 6) $\operatorname{ctg} x = -14$?

9.2. Чи існує таке значення α , для якого:

1) $\sin \alpha = 1\frac{7}{9}$; 2) $\cos \alpha = 0,33$; 3) $\operatorname{tg} \alpha = -4,7$;

4) $\cos \alpha = -1,8$; 5) $\sin \alpha = \frac{1}{19}$; 6) $\operatorname{ctg} \alpha = 1,18$?

Який знак має (9.3–9.4):

9.3. 1) $\sin \alpha$, якщо $\alpha = 13^\circ$; $\alpha = 115^\circ$; $\alpha = 215^\circ$; $\alpha = 288^\circ$;

2) $\cos \alpha$, якщо $\alpha = 83^\circ$; $\alpha = 132^\circ$; $\alpha = 193^\circ$; $\alpha = 315^\circ$;

3) $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\alpha = 37^\circ$; $\alpha = 158^\circ$; $\alpha = 235^\circ$; $\alpha = 328^\circ$;

4) $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\alpha = 42^\circ$; $\alpha = 173^\circ$; $\alpha = 217^\circ$; $\alpha = 359^\circ$?

9.4. 1) $\sin \beta$, якщо $\beta = 57^\circ$; $\beta = 123^\circ$; $\beta = 240^\circ$; $\beta = 329^\circ$;

2) $\cos \beta$, якщо $\beta = 32^\circ$; $\beta = 142^\circ$; $\beta = 215^\circ$; $\beta = 278^\circ$;

3) $\operatorname{tg} \beta$, якщо $\beta = 12^\circ$; $\beta = 137^\circ$; $\beta = 189^\circ$; $\beta = 280^\circ$;

4) $\operatorname{ctg} \beta$, якщо $\beta = 68^\circ$; $\beta = 163^\circ$; $\beta = 237^\circ$; $\beta = 342^\circ$?

Закінчіть обчислення (9.5–9.6):

9.5. 1) $\sin 750^\circ = \sin(30^\circ + 360^\circ \cdot 2) = \sin 30^\circ = \dots$;

2) $\cos 405^\circ = \cos(405^\circ - 360^\circ) = \dots$;

3) $\operatorname{tg} 240^\circ = \operatorname{tg}(60^\circ + 180^\circ) = \dots$;

4) $\operatorname{ctg}(-510^\circ) = \operatorname{ctg}(-510^\circ + 180^\circ \cdot 3) = \dots$

9.6. 1) $\cos 720^\circ = \cos(0^\circ + 360^\circ \cdot 2) = \cos 0^\circ = \dots$;

2) $\sin 420^\circ = \sin(420^\circ - 360^\circ) = \dots$;

3) $\operatorname{ctg} 600^\circ = \operatorname{ctg}(60^\circ + 180^\circ \cdot 3) = \dots$;

4) $\operatorname{tg}(-330^\circ) = \operatorname{tg}(-330^\circ + 180^\circ \cdot 2) = \dots$

 Порівняйте вираз з нулем (9.7–9.10):

9.7. 1) $\sin(-12^\circ)$; 2) $\cos(-88^\circ)$; 3) $\operatorname{tg}(-115^\circ)$; 4) $\operatorname{ctg}(-97^\circ)$;

5) $\cos \frac{\pi}{8}$; 6) $\sin\left(-\frac{11\pi}{10}\right)$; 7) $\operatorname{tg} \frac{23\pi}{20}$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{19}\right)$.

9.8. 1) $\sin(-112^\circ)$; 2) $\cos(-139^\circ)$; 3) $\operatorname{tg}(-13^\circ)$; 4) $\operatorname{ctg}(-46^\circ)$;

5) $\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)$; 6) $\sin \frac{13\pi}{12}$; 7) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$; 8) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}$.

9.9. 1) $\sin 92^\circ \cos 193^\circ$; 2) $\sin 342^\circ \operatorname{tg} 310^\circ$;

3) $\frac{\cos 263^\circ}{\operatorname{ctg} 127^\circ}$; 4) $\frac{\operatorname{tg} 85^\circ}{\operatorname{ctg} 191^\circ}$.

9.10. 1) $\cos 15^\circ \sin 207^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 195^\circ \operatorname{ctg} 279^\circ$;

3) $\frac{\operatorname{tg} 113^\circ}{\sin 1^\circ}$; 4) $\frac{\cos 107^\circ}{\operatorname{ctg} 89^\circ}$.

Обчисліть (9.11–9.12):

9.11. 1) $\cos(-60^\circ)$; 2) $\sin(-90^\circ)$; 3) $\operatorname{ctg}(-45^\circ)$;

4) $\operatorname{tg}(-60^\circ)$; 5) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

9.12. 1) $\cos(-45^\circ)$; 2) $\sin(-60^\circ)$; 3) $\operatorname{ctg}(-30^\circ)$;

4) $\operatorname{tg}(-45^\circ)$; 5) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; 6) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

9.13. Чи можна стверджувати, що $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ є значенням:

1) $\sin \alpha$; 2) $\cos \alpha$; 3) $\operatorname{tg} \alpha$; 4) $\operatorname{ctg} \alpha$?

9.14. Чи можна стверджувати, що $\frac{\sqrt{13}}{4}$ є значенням:

1) $\sin \alpha$; 2) $\cos \alpha$; 3) $\operatorname{tg} \alpha$; 4) $\operatorname{ctg} \alpha$?

Обчисліть (9.15–9.16):

9.15. 1) $\cos 390^\circ$; 2) $\sin 405^\circ$; 3) $\operatorname{ctg} 420^\circ$;
4) $\operatorname{tg} 750^\circ$; 5) $\sin 720^\circ$; 6) $\cos 780^\circ$.

9.16. 1) $\cos 420^\circ$; 2) $\sin 390^\circ$; 3) $\operatorname{ctg} 405^\circ$;
4) $\operatorname{tg} 390^\circ$; 5) $\cos 750^\circ$; 6) $\sin 765^\circ$.

9.17. Доведіть, що функція є парною:

1) $f(x) = 3 + \cos x$; 2) $f(x) = x \sin x$.

9.18. Доведіть, що функція є непарною:

1) $f(x) = x \cos x$; 2) $f(x) = x + \sin x$.

9.19. Доведіть, що функція:

1) $f(x) = x^2 \cos x$ є парною;

2) $f(x) = x^3 - \sin x$ є непарною.

3 Знайдіть найменше і найбільше значення виразу (9.20–9.21):

9.20. 1) $1 + \sin \alpha$; 2) $2 - \cos \alpha$; 3) $4 + \sin^2 \alpha$; 4) $\cos^2 \alpha - 3$.

9.21. 1) $\cos \alpha - 3$; 2) $\sin \alpha - 1$; 3) $\cos^2 \alpha + 1$; 4) $2 - \sin^2 \alpha$.

9.22. Чи існує такий кут α , при якому спрощується рівність:

1) $\cos \alpha = \cos 60^\circ + \cos 45^\circ$; 2) $\sin \alpha = \sin 30^\circ - \sin 45^\circ$?

9.23. Який чверті належить кут β , якщо:

1) $\sin \beta < 0$ і $\cos \beta > 0$; 2) $\sin \beta > 0$ і $\operatorname{tg} \beta < 0$;

3) $\cos \beta < 0$ і $\operatorname{ctg} \beta > 0$; 4) $\operatorname{tg} \beta < 0$ і $\cos \beta > 0$?

9.24. Кутом якої чверті є кут α , якщо:

- 1) $\cos \alpha < 0$ і $\sin \alpha > 0$; 2) $\cos \alpha > 0$ і $\operatorname{ctg} \alpha > 0$;
3) $\sin \alpha < 0$ і $\operatorname{tg} \alpha > 0$; 4) $\operatorname{ctg} \alpha < 0$ і $\sin \alpha < 0$?

Знайдіть значення виразу (9.25–9.26):

9.25. 1) $\sin(-60^\circ) + \cos(-30^\circ) - 2\operatorname{ctg}(-60^\circ)\operatorname{tg}(-30^\circ)$;

2) $6\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos(-\pi) - 4\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

9.26. 1) $\cos(-45^\circ) + \sin(-45^\circ) + 6\cos(-60^\circ) - 3\sin(-30^\circ)$;

2) $4\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 5\sin(-\pi) + 2\sqrt{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Знайдіть область визначення функції (9.27–9.28):

9.27. 1) $y = \operatorname{ctg} 2x$; 2) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

9.28. 1) $y = \operatorname{tg} 4x$; 2) $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Знайдіть множину значень функції (9.29–9.30):

9.29. 1) $y = 4\sin x - 3$; 2) $y = 2 - 3\cos x$.

9.30. 1) $y = 2\cos x + 7$; 2) $y = 4 - 5\sin x$.

Дослідіть функцію на парність та непарність (9.31–9.32):

9.31. 1) $f(x) = x + \cos x$; 2) $f(x) = x^5 + \sin x$.

9.32. 1) $f(x) = x^2 + \cos x$; 2) $f(x) = \sin x + x^4$.

4 9.33. Відомо, що β – кут другої чверті. Спростіть вираз:

- 1) $|\sin \beta| - \sin \beta$; 2) $\cos \beta - |\cos \beta|$;
3) $|\operatorname{tg} \beta| + \operatorname{tg} \beta$; 4) $2|\operatorname{ctg} \beta| - \operatorname{ctg} \beta$.

9.34. Кутом якої чверті може бути кут x , якщо:

- 1) $\sin x \cos x > 0$; 2) $\cos x \operatorname{ctg} x < 0$;
3) $|\cos x| = \cos x$; 4) $|\operatorname{ctg} x| = -\operatorname{ctg} x$?

9.35. Кутом якої чверті може бути кут α , якщо:

- 1) $\sin \alpha \cos \alpha < 0$; 2) $\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha > 0$;
3) $|\sin \alpha| = -\sin \alpha$; 4) $|\operatorname{tg} \alpha| = \operatorname{tg} \alpha$?

9.36. При яких значеннях b для деякого кута x є правильною рівністю: 1) $\sin x = \sqrt{b}$; 2) $\cos x = \frac{1}{b}$?

9.37. При яких значеннях a для деякого кута x є правильною рівністю: 1) $\cos x = a^2$; 2) $\sin x = \sqrt{a-1}$?



Життєва математика

9.38. Пачка офісного паперу формату А4 налічує 500 аркушів. Офіс у середньому витрачає 1700 таких аркушів на тиждень. Яку найменшу кількість пачок паперу треба придбати для офісу на 4 тижні?



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

9.39. На колі $x^2 + y^2 = 1$ знайдіть точки:

- 1) з абсцисою $-\frac{1}{2}$;
- 2) з ординатою $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9.40. Знайдіть точку, що належить колу $x^2 + y^2 = 1$ та має:

- 1) абсцису $\frac{\sqrt{2}}{2}$ і розміщена в IV чверті;
- 2) ординату $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ і розміщена у III чверті.

§ 10. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ ОДНОГО АРГУМЕНТУ

У цьому параграфі розглянемо залежність між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу.

1. Основна тригонометрична тотожність

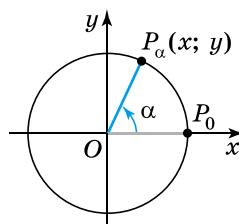
$P_\alpha(x; y)$ задовольняють $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$, тому

Нехай при повороті на кут α початковий радіус OP_0 одиничного кола переходить у радіус OP_α (мал. 10.1). Оскільки радіус кола дорівнює 1, то координати точки рівняння кола: $x^2 + y^2 = 1$. Але

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

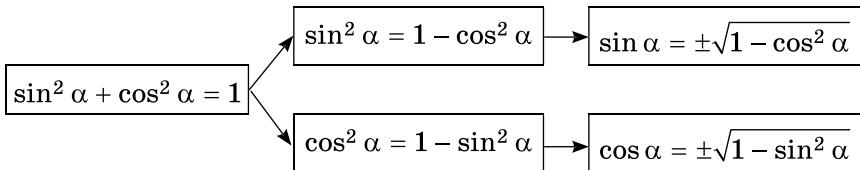


Це співвідношення називають *основною тригонометричною тотожністю*. Вона задає залежність між значеннями синуса і косинуса одного й того самого кута, отже дозволяє знаходити одне із цих значень через інше.



Мал. 10.1

Покажемо це на схемі:



У формулах $\sin \alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ і $\cos \alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ знак перед радикалом залежатиме від чверті, у якій лежить кут α .

Задача 1. Спростити вираз:

1) $(1 - \sin x)(1 + \sin x)$; 2) $\frac{\cos^2 2\alpha - 1}{\sin 2\alpha}$.

• Розв'язання.

• 1) $(1 - \sin x)(1 + \sin x) = 1^2 - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$.

• 2) $\frac{\cos^2 2\alpha - 1}{\sin 2\alpha} = \frac{-(1 - \cos^2 2\alpha)}{\sin 2\alpha} = \frac{-\sin^2 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -\sin 2\alpha$.

• Відповідь. 1) $\cos^2 x$; 2) $-\sin 2\alpha$.

Задача 2. Знайти $\sin \alpha$, якщо $\cos \alpha = -0,6$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

• Розв'язання. Оскільки α – кут II чверті, то $\sin \alpha > 0$.

• З формули $\sin \alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ маємо:

• $\sin \alpha = +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - (-0,6)^2} = \sqrt{1 - 0,36} = \sqrt{0,64} = 0,8$.

• Відповідь. 0,8.

2. Інші тригонометричні тотожності

Перемноживши почленно рівності $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ і $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, матимемо:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1, \text{ якщо } \cos \alpha \neq 0, \sin \alpha \neq 0.$$

Отже,



$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Тоді



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \quad \text{та} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Задача 3. Довести тотожність: $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin(-\alpha)} + \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$.

• **Доведення.** Перетворимо ліву частину тотожності:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha}{1 - \sin(-\alpha)} + \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin \alpha(1 + \sin \alpha)}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha + \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}. \end{aligned}$$

Отримали праву частину тотожності. ■

3. Наслідки з основної тригонометричної тотожності

Поділимо обидві частини тотожності $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ на $\cos^2 \alpha$ (за умови, що $\cos^2 \alpha \neq 0$). Отримаємо:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ тобто}$$



$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Якщо обидві частини тотожності $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ поділити на $\sin^2 \alpha$ (за умови, що $\sin^2 \alpha \neq 0$), то отримаємо:

$$1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \text{ тобто}$$



$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Задача 4. Довести, що при всіх допустимих значеннях β ,

значення виразу $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta}$ не залежить від β .

• **Доведення.**

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \beta}} + \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 \beta}} = \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1.$$

Отже, значення виразу від значення β не залежить. ■

Задача 5. Відомо, що $\operatorname{ctg} x = -\frac{5}{12}$ і $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$. Знайти всі

інші тригонометричні функції кута x .

• **Розв'язання.** Треба знайти $\sin x$, $\cos x$ і $\operatorname{tg} x$. Маємо:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = 1 : \left(-\frac{5}{12} \right) = -\frac{12}{5} = -2,4.$$

$$\text{З формулі } 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \text{ матимемо: } \sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}.$$

Тоді $\sin^2 x = \frac{1}{1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{144}{169}$. За умовою x – кут IV чверті,

тому $\sin x < 0$, отже, $\sin x = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$.

Тепер знайдемо $\cos x$, враховуючи, що $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Матимемо: $\cos x = \operatorname{ctg} x \sin x = -\frac{5}{12} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{5}{13}$.

Відповідь. $\operatorname{tg} x = -2,4$; $\sin x = -\frac{12}{13}$; $\cos x = \frac{5}{13}$.



- Запам'ятайте основну тригонометричну тотожність. ● Запишіть означення тангенса і котангенса кута через синус і косинус цього самого кута. ● Як пов'язані між собою тангенс і котангенс?
- Запам'ятайте формули, що є наслідками з основної тригонометричної тотожності.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



10.1. Спростіть вираз: 1) $1 - \cos^2 \alpha$; 2) $2 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$.

10.2. Спростіть вираз: 1) $1 - \sin^2 \alpha$; 2) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + 3$.

Знайдіть значення виразу (10.3–10.4):

10.3. 1) $\sin^2 17^\circ + \cos^2 17^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 3 \operatorname{ctg} 3$.

10.4. 1) $\cos^2 2 + \sin^2 2$; 2) $\operatorname{ctg} 12^\circ \operatorname{tg} 12^\circ$.

Доведіть, що (10.5–10.6):

10.5. 1) $\sin^2 \alpha - 1 = -\cos^2 \alpha$; 2) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 0$;
3) $\sin \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha$.

10.6. 1) $\cos^2 \alpha - 1 = -\sin^2 \alpha$; 2) $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 0$;
3) $\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha$.



Спростіть вираз (10.7–10.8):

10.7. 1) $2 \sin^2 \alpha + (1 - \cos^2 \alpha)$; 2) $\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1$;
3) $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos(-\alpha))$; 4) $(\sin \alpha - 1)(1 + \sin \alpha)$.

10.8. 1) $3 \cos^2 \alpha + (1 - \sin^2 \alpha)$; 2) $\cos^2 \alpha + 5 \sin^2 \alpha - 1$;
3) $(1 + \sin \alpha)(1 + \sin(-\alpha))$; 4) $(1 + \cos \alpha)(\cos \alpha - 1)$.

Спростіть вираз (**10.9–10.10**):

10.9. 1) $\sin^2 x + \cos^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$;

3) $\sin x - \sin x \cos^2 x$;

5) $\operatorname{tg}^3 \gamma \operatorname{ctg}^3 \gamma - \cos^2 \beta$;

10.10. 1) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$;

3) $\cos^3 x - \cos^3 x \sin^2 x$;

2) $\cos^2 \beta (1 + \operatorname{tg}^2 \beta)$;

4) $\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha$;

6) $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - 1}$.

2) $\sin^2 x (1 + \operatorname{ctg}^2 x)$;

4) $\operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \beta$.

Доведіть тотожність (**10.11–10.12**):

10.11. 1) $(1 - \sin^2 x)(1 + \operatorname{ctg}^2 x) = \operatorname{ctg}^2 x$; 2) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

10.12. 1) $(1 - \cos^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) = \operatorname{tg}^2 x$; 2) $\frac{\operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \beta} + 1 = \frac{1}{\sin^2 \beta}$.

Спростіть вираз (**10.13–10.14**):

10.13. 1) $\cos(-x) + \cos x \operatorname{tg}^2(-x)$; 2) $\operatorname{ctg}(-\beta) \operatorname{tg} \beta + \sin^2(-\beta)$.

10.14. 1) $\sin(-\beta) - \sin \beta \operatorname{ctg}^2(-\beta)$; 2) $\operatorname{ctg} x \operatorname{tg}(-x) + \cos^2(-x)$.

10.15. Доведіть, що не можуть одночасно виконуватися рівності:

1) $\sin x = 1$; $\cos x = -1$; 2) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$; $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Чи можуть одночасно виконуватися рівності (**10.16–10.17**):

10.16. 1) $\sin \alpha = 0,6$; $\cos \alpha = -0,8$; 2) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$; $\cos \alpha = \frac{2}{3}$;

3) $\operatorname{tg} \alpha = 3$; $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{3}$; 4) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{7}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}$?

10.17. 1) $\cos \alpha = \frac{1}{4}$; $\sin \alpha = \frac{3}{4}$; 2) $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$; $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$;

3) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{8}$; $\operatorname{ctg} \alpha = 8$; 4) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{3}$; $\operatorname{tg} \alpha = -1,5$?

Знайдіть (**10.18–10.19**):

10.18. 1) $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{7}}$;

2) $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = 0,8$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\sin \varphi$, $\operatorname{tg} \varphi$, $\operatorname{ctg} \varphi$, якщо $\cos \varphi = -\frac{12}{13}$ і $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$;

4) $\cos \beta$, $\operatorname{tg} \beta$, $\operatorname{ctg} \beta$, якщо $\sin \beta = -\frac{24}{25}$ і $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

10.19. 1) $\operatorname{ctg} \beta$, якщо $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

2) $\sin x$ і $\operatorname{tg} x$, якщо $\cos x = \frac{3}{5}$ і $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$;

3) $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = -\frac{15}{17}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

4) $\sin \beta$, $\operatorname{tg} \beta$, $\operatorname{ctg} \beta$, якщо $\cos \beta = -0,8$ і $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.



Доведіть тотожність (10.20–10.21):

10.20. 1) $\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha} = \cos^2 2\alpha$;

2) $\frac{1 + \operatorname{ctg} 4\beta}{1 + \operatorname{tg} 4\beta} = \operatorname{ctg} 4\beta$.

10.21. 1) $\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg} 3x} = \sin^2 3x$;

2) $\frac{1 - \operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{ctg} 2\alpha - 1} = \operatorname{tg} 2\alpha$.

Спростіть вираз (10.22–10.23):

10.22. 1) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$;

2) $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1 + \sin x}{\cos x}$;

3) $\frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta} - \frac{\sin \beta}{1 - \cos \beta}$;

4) $\frac{1 + \sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} - \operatorname{tg}(-\alpha)$;

5) $\frac{\sin(-2x)}{1 - \cos(-2x)} - \operatorname{ctg}(-2x)$;

6)
$$\frac{\cos^2\left(-\frac{x}{4}\right) - \cos^4\left(-\frac{x}{4}\right)}{\sin^2\left(-\frac{x}{4}\right)}$$
.

10.23. 1) $\frac{\cos \beta + \operatorname{ctg} \beta}{1 + \sin \beta}$;

2) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x}$;

3) $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha}$;

4) $\frac{1 + \cos(-x)}{\sin(-x)} - \operatorname{ctg}(-x)$;

5) $\frac{\cos(-2\alpha)}{1 + \sin(-2\alpha)} + \operatorname{tg}(-2\alpha)$;

6)
$$\frac{\sin^2\left(-\frac{x}{3}\right) - \sin^4\left(-\frac{x}{3}\right)}{\cos^2\left(-\frac{x}{3}\right)}$$
.

Доведіть тотожність (10.24–10.25):

10.24. 1) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$;

2) $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x} = \sin x + \cos x$;

3) $\frac{\sin^2 \beta}{\operatorname{ctg}^2 \beta - \cos^2 \beta} = \operatorname{tg}^4 \beta$; 4) $2 \cos^2 x + \sin^4 x - \cos^4 x = 1$.

10.25. 1) $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha$;

2) $\frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{1 + \cos x \sin x} = \cos x - \sin x$;

3) $\frac{\cos^2 \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta - \sin^2 \beta} = \operatorname{ctg}^4 \beta$;

4) $2 \sin^2 x + \cos^4 x - \sin^4 x = 1$.

10.26. Спростіть вираз:

1) $\sin^4 2x - \cos^4 2x + \cos^2 2x$; 2) $\frac{\sin^2 5\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 5\alpha} - \frac{\cos^2 5\alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 5\alpha}$.

Знайдіть (**10.27–10.28**):

10.27. 1) $\cos \alpha$ і $\sin \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\sin x$ і $\cos x$, якщо $\operatorname{ctg} x = 2$ і x – кут III чверті.

10.28. 1) $\cos \beta$ і $\sin \beta$, якщо $\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{12}$ і β – кут I чверті;

2) $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = -1$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

10.29. Знайдіть значення усіх інших тригонометричних функцій кута α , якщо:

1) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ і α – кут II чверті; 2) $\operatorname{tg} \alpha = -5$ і $\pi < \alpha < 2\pi$.

10.30. Знайдіть значення усіх інших тригонометричних функцій кута β , якщо:

1) $\cos \beta = -\frac{1}{5}$ і $0 < \beta < \pi$; 2) $\operatorname{ctg} \beta = 0,5$ і β – кут I чверті.

4 Спростіть вираз (**10.31–10.32**):

10.31. 1) $\frac{1 - 2 \sin 3\alpha \cos(-3\alpha)}{\cos 3\alpha + \sin(-3\alpha)}$; 2) $\frac{\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha + \cos^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$.

10.32. 1) $\frac{1 - 2 \sin(-2\beta) \cos 2\beta}{\cos(-2\beta) + \sin 2\beta}$; 2) $\frac{\cos^2 x + \operatorname{ctg}^4 x + \sin^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$.

Доведіть тотожність (**10.33–10.34**):

10.33. 1) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$;

2) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1$.

10.34. 1) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$;

2) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

10.35. Відомо, що $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,8$. Знайдіть $\sin \alpha \cos \alpha$.

10.36. Знайдіть $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$, якщо $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 5$.

10.37. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{2 \cos x + 8 \sin x}{3 \cos x - 4 \sin x}$, якщо $\operatorname{tg} x = \frac{1}{4}$;

2) $\frac{\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x}{3 \cos^2 x - 2 \sin^2 x}$, якщо $\operatorname{ctg} x = -2$.

10.38. Відомо, що $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Знайдіть значення виразу

$$\frac{4 \cos \alpha + 5 \sin \alpha}{2 \cos \alpha - \sin \alpha}.$$

10.39. Доведіть, що значення виразу не залежить від α :

1) $\frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}$; 2) $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{1 + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

10.40. Знайдіть найменше і найбільше значення виразу:

1) $4 \sin^2 x - 3 \cos^2 x$; 2) $4 \cos^2 x + 3 \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$.

10.41. Знайдіть область значень функції $y = 7 \cos^2 x + 3 \sin^2 x$.



Життєва математика

10.42. Освітлення кімнати споживає 300 Вт щогодини. Щодня його вмикають на 6 годин. Якщо провести заміну освітлення на енергозберігаюче, то витрати зменшаться на 30 %. 1) Скільки кВт·год протягом тижня можна заощадити на освітленні кімнати, використовуючи енергозберігаюче освітлення?

2) Скільки коштів можна заощадити протягом тижня за діючими тарифами на електроенергію, перейшовши на енергозберігаюче освітлення?



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

10.43. Пригадайте формулі з курсу геометрії та заповніть пропуски:

1) $\sin(180^\circ - \alpha) = \dots$; 2) $\cos(180^\circ - \alpha) = \dots$;

3) $\sin(90^\circ - \alpha) = \dots$; 4) $\cos(90^\circ - \alpha) = \dots$.

10.44. Порівняйте з нулем вираз, де $0^\circ < \alpha < 90^\circ$:

- | | | |
|---|---|--|
| 1) $\sin(90^\circ + \alpha)$; | 2) $\cos(180^\circ - \alpha)$; | 3) $\operatorname{tg}(270^\circ + \alpha)$; |
| 4) $\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha)$; | 5) $\sin(180^\circ + \alpha)$; | 6) $\cos(270^\circ - \alpha)$; |
| 7) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$; | 8) $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha)$; | 9) $\cos(360^\circ + \alpha)$. |

§ 11. ФОРМУЛИ ЗВЕДЕННЯ

Тригонометричні функції кутів $x \pm \alpha$, де $x = \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$, (або $x = 90^\circ; 180^\circ; 270^\circ; 360^\circ$) можна зводити до тригонометричних функцій кута α за допомогою формул, які називають *формулами зведення*.

З курсу геометрії ми знаємо, що:

$$\begin{array}{ll} \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha; & \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha; \\ \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha; & \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha; \end{array}$$

або у радіанах:

$$\begin{array}{ll} \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha; & \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha; \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha; & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha. \end{array}$$

Застосовуючи ці формули та властивості тригонометричних функцій, можна знайти формули зведення для різних кутів.

Наприклад, для кута $\frac{\pi}{2} + \alpha$, матимемо:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha.$$

А для кута $\pi - \alpha$, ураховуючи вищезгадані формули, матимемо:

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

У той самий спосіб можна знайти формули зведення для всіх зазначених на початку параграфа кутів. Усього таких формул тридцять дві. Запишемо їх у вигляді таблиці (с. 103).

Ці формули не треба запам'ятовувати. Достатньо лише помітити в них певну закономірність, сформулювати її у вигляді правила і запам'ятати. Для цього домовимося називати синус *кофункцією* косинуса, косинус – кофункцією синуса, тангенс – кофункцією котангенса, і котангенс – кофункцією тангенса.

x	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$	$360^\circ + \alpha$
$\sin x$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\cos x$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

Тепер сформулюємо *правило застосування цих формул.*



У правій частині формул зведення записуємо той знак (+ або -), який має ліва частина формул за умови, що кут α – гострий, причому для кутів $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ *назву тригонометричної функції не змінюємо*, для кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ – *назву змінюємо на кофункцію*.

Зауважимо, що кут α вважаємо гострим тільки для зручності використання правила. Кожна з формул зведення є правильною для будь-якого α з області визначення тригонометричної функції.

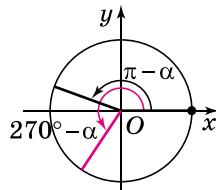
Зверніть увагу, що послідовність міркувань за згаданим правилом можна стисло сформулювати у вигляді *мнемонічного¹ правила*: «Чверть. Знак. Назва». Розглянемо приклад на застосування правила.

Задача 1. Записати через тригонометричну функцію кута α :

$$1) \cos(\pi - \alpha); \quad 2) \operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha).$$

Розв'язання. 1) Чверть: $(\pi - \alpha)$ – кут II чверті (мал. 11.1). Знак: косинус у II чверті – від'ємний, тому матимемо знак «-». Назва: для кута $(\pi - \alpha)$ назва тригонометричної функції зберігається, тобто матимемо «cos». Отже, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$.
 2) $(270^\circ - \alpha)$ – кут III чверті (мал. 11.1), тангенс у III чверті має знак «+». Оскільки $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$, то назву функції змінюємо на кофункцію, тобто на «tg». Отже, $\operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$.

Відповідь. 1) $-\cos \alpha$; 2) $\operatorname{tg} \alpha$.



Мал. 11.1

¹ **Мнемоніка** (давньогр. – *мистецтво запам'ятовування*) – сукупність прийомів і методів запам'ятовування інформації.

Формули зведення допомагають обчислювати значення тригонометричних функцій деяких кутів, що перевищують π (або 180°).

Для формули зведення такі кути можна записувати одним із двох способів, у вигляді суми або різниці. Наприклад, кут 195° лежить на одиничному колі між кутами 180° і 270° , тому його можна записати і як $180^\circ + 15^\circ$, і як $270^\circ - 75^\circ$.

Задача 2. Обчислити: 1) $\tg 315^\circ$; 2) $\sin \frac{7\pi}{6}$.

Розв'язання.

1) 1-й спосіб. $\tg 315^\circ = \tg(360^\circ - 45^\circ) = -\tg 45^\circ = -1$.

2-й спосіб. $\tg 330^\circ = \tg(270^\circ + 45^\circ) = -\ctg 45^\circ = -1$.

2) $\sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} = -0,5$.

Відповідь. 1) -1 ; 2) $-0,5$.

За допомогою формул зведення, властивостей періодичності, парності чи непарності тригонометричних функцій знаходження значень тригонометричних функцій будь-якого кута можна звести до знаходження значень тригонометричних функцій гострого кута.

Задача 3. Обчислити $\cos(-945^\circ)$.

Розв'язання. Послідовно використаємо парність косинуса, його періодичність та формулу зведення:

$$\cos(-945^\circ) = \cos 945^\circ = \cos(225^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \cos 225^\circ =$$

$$= \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Формули зведення використовують і для тотожних перетворень тригонометричних виразів.

Задача 4. Спростити вираз: $\cos(\alpha - \pi) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Оскільки:

$$\cos(\alpha - \pi) = \cos(-(\pi - \alpha)) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha, \text{ то}$$

$$\cos(\alpha - \pi) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha - (-\cos \alpha) = -\cos \alpha + \cos \alpha = 0.$$

Відповідь. 0.

Задача 5. Довести, що $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos \frac{\gamma}{2}$, де α , β і γ – кути трикутника.

• Розв'язання. α , β і γ – кути трикутника, тому $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, отже, $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ і $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi - \gamma}{2}$, тобто $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$. Тоді $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) = \cos \frac{\gamma}{2}$. ■



Сформулюйте правило та мнемонічне правило застосування формул зведення.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



Користуючись таблицею формул зведення (с. 103), зведіть до тригонометричної функції кута α (11.1–11.2):

- 11.1. 1) $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$; 2) $\operatorname{tg} (90^\circ + \alpha)$;
3) $\operatorname{ctg} (\pi - \alpha)$; 4) $\cos (180^\circ + \alpha)$;
5) $\cos (270^\circ - \alpha)$; 6) $\sin \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right)$;
7) $\operatorname{tg} (360^\circ - \alpha)$; 8) $\operatorname{ctg} (2\pi + \alpha)$.

- 11.2. 1) $\cos (90^\circ - \alpha)$; 2) $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$;
3) $\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha)$; 4) $\sin (\pi + \alpha)$;
5) $\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right)$; 6) $\cos (270^\circ + \alpha)$;
7) $\operatorname{ctg} (2\pi - \alpha)$; 8) $\sin (360^\circ + \alpha)$.



Користуючись правилом, зведіть до тригонометричної функції кута α (11.3–11.4):

- 11.3. 1) $\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha)$; 2) $\sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$;
3) $\cos (180^\circ - \alpha)$; 4) $\operatorname{ctg} (\pi + \alpha)$;
5) $\sin \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right)$; 6) $\operatorname{ctg} (270^\circ + \alpha)$;
7) $\cos (2\pi - \alpha)$; 8) $\operatorname{tg} (360^\circ + \alpha)$.

- 11.4.** 1) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 2) $\cos(90^\circ + \alpha)$;
 3) $\sin(\pi - \alpha)$; 4) $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)$;
 5) $\operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;
 7) $\sin(360^\circ - \alpha)$; 8) $\cos(2\pi + \alpha)$.

Зведіть до тригонометричної функції гострого кута (**11.5–11.6**):

- 11.5.** 1) $\sin 182^\circ$; 2) $\cos 217^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 342^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 690^\circ$;
 5) $\sin(-126^\circ)$; 6) $\cos(-592^\circ)$; 7) $\operatorname{tg}(-227^\circ)$; 8) $\operatorname{ctg}(-190^\circ)$.

- 11.6.** 1) $\sin 318^\circ$; 2) $\cos 142^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 459^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 219^\circ$;
 5) $\sin(-193^\circ)$; 6) $\cos(-249^\circ)$; 7) $\operatorname{tg}(-549^\circ)$; 8) $\operatorname{ctg}(-251^\circ)$.

Обчисліть (**11.7–11.8**):

- 11.7.** 1) $\operatorname{tg} 135^\circ$; 2) $\cos 210^\circ$; 3) $\operatorname{ctg} 315^\circ$; 4) $\sin 570^\circ$;
 5) $\sin \frac{13\pi}{6}$; 6) $\cos \frac{5\pi}{4}$; 7) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{6}$; 8) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3}$.

- 11.8.** 1) $\cos 150^\circ$; 2) $\sin 240^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 300^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 495^\circ$;
 5) $\cos \frac{4\pi}{3}$; 6) $\sin \frac{7\pi}{4}$; 7) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$; 8) $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{6}$.

Спростіть вираз (**11.9–11.12**):

- 11.9.** 1) $\sin(270^\circ - \alpha) - \cos(180^\circ - \alpha)$; 2) $\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) \operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha)$;
 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(\pi - \alpha)$; 4) $\sin(\pi + \alpha) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

- 11.10.** 1) $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) - \operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha)$;
 2) $\sin(180^\circ - \alpha) \operatorname{ctg}(360^\circ + \alpha)$;
 3) $\cos(2\pi - \alpha) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

-  **11.11.** 1) $\sin(\alpha - \pi)$; 2) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$;
 3) $\operatorname{tg}(\alpha - 2\pi)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$.

- 11.12.** 1) $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$; 2) $\sin(\alpha - 2\pi)$;
 3) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; 4) $\operatorname{tg}(\alpha - \pi)$.

Зведіть до тригонометричної функції гострого кута (11.13–11.14):

11.13. 1) $\sin \frac{43\pi}{4}$; 2) $\cos \left(-\frac{36\pi}{5} \right)$;
 3) $\operatorname{tg} \left(-\frac{37\pi}{5} \right)$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{36\pi}{7}$.

11.14. 1) $\sin \frac{19\pi}{5}$; 2) $\cos \frac{25\pi}{8}$; 3) $\operatorname{tg} \frac{24\pi}{5}$; 4) $\operatorname{ctg} \left(-\frac{12\pi}{7} \right)$.

Знайдіть значення виразу (11.15–11.18):

11.15. 1) $\sin(-930^\circ) + \sqrt{3} \cos(-210^\circ) + \operatorname{tg} 675^\circ$;

2) $\operatorname{tg} \frac{15\pi}{4} + 2 \sin \left(-\frac{7\pi}{6} \right) - 2 \cos \left(-\frac{23\pi}{6} \right)$.

11.16. 1) $\cos(-585^\circ) - \sin 225^\circ - \operatorname{tg} 765^\circ$;

2) $\cos \left(-\frac{8\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \sin \frac{23\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{13\pi}{4}$.

11.17. 1) $\frac{\cos 35^\circ}{\sin 55^\circ}$; 2) $\cos 125^\circ + \cos(-55^\circ)$;

3) $\operatorname{tg} 189^\circ \operatorname{ctg} 171^\circ$; 4) $\sin^2(-15^\circ) + \sin^2 75^\circ$.

11.18. 1) $\frac{\operatorname{tg} 42^\circ}{\operatorname{ctg} 48^\circ}$; 2) $\sin 136^\circ - \sin 44^\circ$;

3) $\operatorname{ctg} 179^\circ \operatorname{tg} 181^\circ$; 4) $\cos^2(-10^\circ) + \cos^2 80^\circ$.

Спростіть вираз (11.19–11.20):

11.19. 1) $1 + \sin(90^\circ + \alpha) \cos(180^\circ + \alpha)$;

2) $\cos^2(270^\circ - \alpha) + \sin^2(90^\circ - \alpha)$;

3) $\cos(\alpha - \pi) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \sin^2(\pi - \alpha)$;

4) $\sin(2\pi + \alpha) \sin(\alpha - \pi) + 1$.

11.20. 1) $1 - \cos(270^\circ + \alpha) \sin(180^\circ - \alpha)$;

2) $\cos(\pi + \alpha) \cos(\alpha - 2\pi) + \sin^2 \left(\alpha - \frac{3\pi}{2} \right)$.

Доведіть тотожність (11.21–11.22):

11.21. 1) $\sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$;

2) $\frac{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) \sin(180^\circ + \alpha) \cos(90^\circ + \alpha)}{\cos(270^\circ - \alpha) \sin(90^\circ + \alpha)} = \operatorname{tg}^2 \alpha$.

11.22. 1) $\sin(30^\circ + \alpha) = \cos(60^\circ - \alpha)$;

$$2) \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \sin^2(\pi - \alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos(\pi + \alpha)} = \sin \alpha \cos \alpha.$$

 **11.23.** Дано: $\cos \alpha = -0,8$. Знайдіть:

- 1) $\cos(180^\circ + \alpha)$; 2) $\sin(270^\circ - \alpha)$;
3) $\cos(270^\circ + \alpha)$; 4) $\sin(180^\circ - \alpha)$.

11.24. Дано: $\sin \alpha = 0,6$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Знайдіть:

1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; 2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

11.25. α і β – суміжні кути, $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. Знайдіть $\sin \beta$ і $\cos \beta$.

11.26. α і β – суміжні кути, $\sin \beta = \frac{8}{17}$. Знайдіть $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$.

Нехай α , β , γ – кути трикутника. Доведіть, що (11.27–11.28):

11.27. 1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma$; 2) $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$.

11.28. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\operatorname{tg} \gamma$.



Життєва математика

11.29. Залежність обсягу попиту q (одиниць у місяць) від ціни p (тис. грн) на продукцію підприємства-монополіста задається формулою $q = 50 - 5p$. Виручка підприємства за місяць r (у тис. грн) обчислюється за формулою $r(p) = qp$. Визначте найбільшу ціну p , при якій виручка за місяць $r(p)$ складе не менше ніж 120 тис. грн.



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

11.30. Обчисліть:

- 1) $\cos 390^\circ$; 2) $\sin 765^\circ$; 3) $\sin(-300^\circ)$; 4) $\cos(-1050^\circ)$.

11.31. Знайдіть нулі функції:

1) $y = \frac{x+1}{x}$; 2) $y = 4x - 12$;

3) $y = \sqrt{2x+6}$; 4) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{x}$.

11.32. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \sqrt{x + 1}$; 2) $y = \sqrt{x - 3}$; 3) $y = \sqrt{x} + 2$;
4) $y = \sqrt{x} - 4$; 5) $y = 3\sqrt{x}$; 6) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

§ 12. ПЕРІОДИЧНІСТЬ ФУНКЦІЙ. ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

1. Періодичність функцій

Процеси і явища у природі, техніці, медицині часто мають повторювальний характер: рух Землі навколо Сонця, рух маятника, різні обертові рухи тощо. Такі процеси називають *періодичними*, а функції, що їх описують, – *періодичними функціями*.

Ми вже знаємо, що тригонометричні функції є періодичними, адже значення синуса і косинуса при зміні кута на ціле число обертів не змінюються (див. § 9, п. 5). При зміні ж кута на ціле число півобертів не змінюються значення тангенса і котангенса, тобто тригонометричні функції синуса і косинуса не змінюються, якщо до їх аргументу додати деяке число, кратне 2π , а тангенса і котангенса, – якщо додати число, кратне π .



Функцію $y = f(x)$ називають *періодичною з періодом $T \neq 0$* , якщо для будь-якого x з області визначення функції числа $x + T$ і $x - T$ також належать області визначення і справджується рівність: $f(x + T) = f(x) = f(x - T)$.

Оскільки $\sin(x + 2\pi) = \sin(x - 2\pi) = \sin x$ і $\cos(x + 2\pi) = \cos(x - 2\pi) = \cos x$ для будь-якого x , то функції синус і косинус періодичні з періодом 2π . Періодами цих функцій також будуть числа, кратні 2π , тобто числа $-2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi; \dots$.

Для дослідження властивостей функцій та побудови їх графіків важливо знати *найменший додатний період функції*.

Доведемо, що найменшим додатним періодом функції $y = \cos x$ є 2π . Нехай T – довільний період косинуса, тоді $\cos(x + T) = \cos x$ для будь-якого x , зокрема для $x = 0$. Маємо: $\cos T = \cos 0 = 1$. Найменшим додатним значенням T , для якого $\cos T = 1$, є число 2π . Отже, 2π – найменший додатний період функції $y = \cos x$.

У той самий спосіб можна довести, що найменшим додатним періодом функції $y = \sin x$ також є число 2π . Отже,



найменший додатний період для кожної з функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ дорівнює 2π .

Оскільки $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg}x$ і $\operatorname{tg}(x - \pi) = -\operatorname{tg}(\pi - x) = \operatorname{tg}x$, а також $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg}x$ і $\operatorname{ctg}(x - \pi) = \operatorname{ctg}x$ для будь-якого x з області визначення тангенса і котангенса відповідно, то можна дійти висновку про те, що тангенс і котангенс – періодичні функції з періодом π .

Доведемо, що π – найменший додатний період функції $y = \operatorname{tg}x$. Нехай T – довільний період функції $y = \operatorname{tg}x$, тоді $\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg}x$ для будь-якого x з області визначення, зокрема і для $x = 0$. Тоді $\operatorname{tg}T = \operatorname{tg}0 = 0$. Найменшим додатним значенням T , для якого $\operatorname{tg}T = 0$, є число π . Отже, π – найменший додатний період функції $y = \operatorname{tg}x$.

У той самий спосіб можна довести, що найменшим додатним періодом функції $y = \operatorname{ctg}x$ також є число π . Отже,

найменший додатний період для кожної з функцій $y = \operatorname{tg}x$ і $y = \operatorname{ctg}x$ дорівнює π .

Періодичність функції використовують для побудови її графіка:



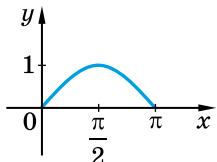
для побудови графіка періодичної функції з найменшим додатним періодом T_0 достатньо побудувати графік на будь-якому проміжку довжиною T_0 (наприклад, $[0; T_0]$), а потім доповнити його одержаним графіком, паралельно перенесеним вправо і вліво вздовж осі абсцис на відстань kT_0 , де k – будь-яке натуральне число.

2. Графік функції $y = \sin x$

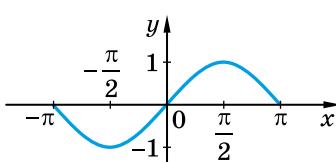
Спочатку побудуємо графік функції $y = \sin x$ на проміжку $[0; \pi]$. Використаємо таблицю значень:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Будуємо графік функції $y = \sin x$ на проміжку $[0; \pi]$, враховуючи, що $\pi \approx 3,14$. На малюнку 12.1 зображеного графік функції $y = \sin x$ на проміжку $[0; \pi]$.



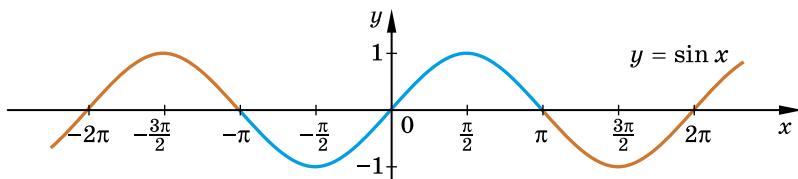
Мал. 12.1



Мал. 12.2

Оскільки функція $y = \sin x$ є непарною, то її графік симетричний відносно початку координат. Виконаємо симетричне відображення лінії, зображененої на малюнку 12.1, відносно початку координат і отримаємо графік функції $y = \sin x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ (мал. 12.2).

Далі врахуємо періодичність функції $y = \sin x$, найменший додатний період якої дорівнює 2π . Паралельно перенесемо одержаний графік вліво і вправо вздовж осі абсцис на $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$. Одержано графік функції $y = \sin x$ на всій області визначення (мал. 12.3). Лінію, яка є графіком функції $y = \sin x$, називають *синусоїдою*.

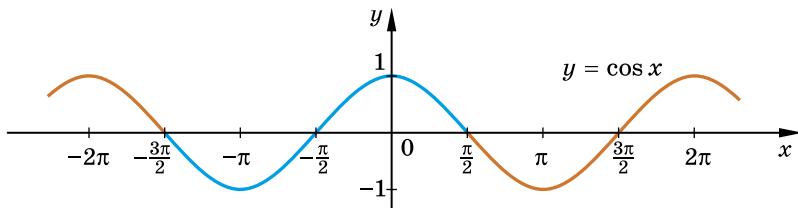


Мал. 12.3

3. Графік функції $y = \cos x$

Побудувати графік функції $y = \cos x$ можна в той самий спосіб, яким будували графік функції $y = \sin x$. Але, враховуючи, що $\cos x =$

$= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, графік функції $y = \cos x$ можна отримати з графіка функції $y = \sin x$ за допомогою паралельного перенесення вздовж осі абсцис вліво на $\frac{\pi}{2}$ (мал. 12.4). Графіком функції $y = \cos x$ є також синусоїда, бо це та сама лінія, що й графік функції $y = \sin x$, тільки розміщена інакше відносно системи координат. Графік функції $y = \cos x$ зображенено на малюнку 12.4, його ще називають *косинусоїдою*.



Мал. 12.4

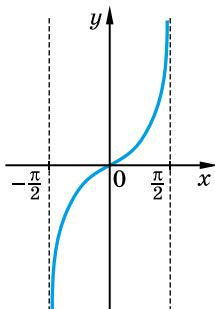
4. Графік функції $y = \operatorname{tg} x$

Спочатку побудуємо графік функції $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

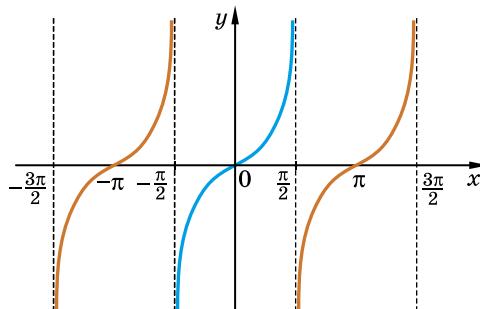
Для цього складемо таблицю значень функції:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-

Графік функції зображенено на малюнку 12.5. Зауважимо, що він не перетинає прямі $x = \frac{\pi}{2}$ й $x = -\frac{\pi}{2}$ (оскільки тангенс у точках $\frac{\pi}{2}$ і $-\frac{\pi}{2}$ не існує), при наближенні x до $\frac{\pi}{2}$ значення $\operatorname{tg} x$ стає як завгодно величим, а при наближенні до $-\frac{\pi}{2}$ – як завгодно малим.



Мал. 12.5



Мал. 12.6

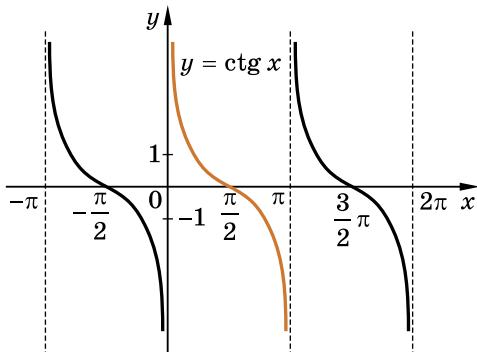
Далі, враховуючи періодичність функції $y = \operatorname{tg} x$, найменший додатний період якої дорівнює π , отримаємо графік функції $y = \operatorname{tg} x$ на всій області визначення (мал. 12.6). Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ називають *тангенсоїдою*, він складається з безлічі окремих гілок – гілок тангенсоїди.

5. Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$

Функція $y = \operatorname{ctg} x$ не визначена для $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Графік цієї функції можна спочатку побудувати на проміжку $(0; \pi)$, і далі використати пе-

ріодичність функції. А можна, оскільки $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, отримати з графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ паралельним перенесенням на $\frac{\pi}{2}$ вліво вздовж осі абсцис, а потім симетричним відображенням отриманого графіка відносно цієї осі.

Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ зображенено на малюнку 12.7. Це та-
кож тангенсоїда, але розміщена інакше відносно системи коор-
динат. Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ називають ще *котангенсоїдою*.



Мал. 12.7

6. Властивості тригонометричних функцій

Узагальнимо вивчені раніше влас-
тivостi тригонометричних функ-
цій та властивостi, отриманi з iх
графікiв, у таблицi (с. 114 i 115).

Тепер ми можемо знаходити
властивостi не тiльки функцiй, зазначених у цих таблицях, а
i інших тригонометричних функцiй.

Задача 1. Зnайти нулi функцiї $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)$.

• Розв'язання. Нулями функцiї $y = \operatorname{tg} x$ є значення аргу-
менту вигляду πk , $k \in \mathbf{Z}$. Тому для даної функцiї знайдемо
тi значення x , для яких $2x - \frac{\pi}{8} = \pi k$. Розв'яжемо отримане

лiнiйне рiвняння: $2x - \frac{\pi}{8} = \pi k$;

$$2x = \frac{\pi}{8} + \pi k;$$

$$x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ — нулi функцiї.}$$

Вiдповiдь. $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Задача 2. Зnайти промiжки зростання функцiї $y = \sin 3x$.

• Розв'язання. Оскiльки $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$, — про-
miжки зростання функцiї $y = \sin x$, розв'яжемо нерiвнiсть:

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant 3x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\left[-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right], \quad k \in \mathbb{Z}.$

№	Властивості	Функція	
		$y = \sin x$	$y = \cos x$
1	Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
2	Множина значень	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
3	Парність, непарність	Непарна	Парна
4	Найменший додатний період	2π	2π
5	Нулі функції	πk	$\frac{\pi}{2} + \pi k$
6	Знакосталість, $y > 0$	$(2\pi k; \pi + 2\pi k)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)$
7	Знакосталість, $y < 0$	$(-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right)$
8	Проміжки зростання	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right]$	$[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$
9	Проміжки спадання	$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right]$	$[2\pi k; \pi + 2\pi k]$
10	Найбільше значення функції	1 при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$	1 при $x = 2\pi k$
11	Найменше значення функції	-1 при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	-1 при $x = \pi + 2\pi k$

№	Властивості	Функція	
		$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
1	Область визначення	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$	$x \neq \pi k$
2	Множина значень	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
3	Парність, непарність	Непарна	Непарна
4	Найменший додатний період	π	π
5	Нулі функції	πk	$\frac{\pi}{2} + \pi k$
6	Знакосталість, $y > 0$	$\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$	$\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$
7	Знакосталість, $y < 0$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$
8	Проміжки зростання	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$	—
9	Проміжки спадання	—	$(\pi k; \pi + \pi k)$
10	Найбільше значення функції	—	—
11	Найменше значення функції	—	—

Для знаходження періодів деяких тригонометричних функцій скористаємося властивістю, яку приймемо без доведення:



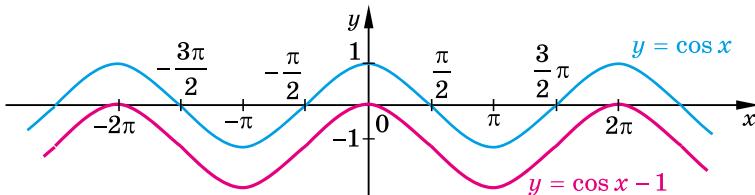
найменший додатний період функцій вигляду $y = \sin(kx + \varphi)$ і $y = \cos(kx + \varphi)$, де k і φ – числа, дорівнює $\frac{2\pi}{|k|}$, а функцій вигляду $y = \operatorname{tg}(kx + \varphi)$ і $y = \operatorname{ctg}(kx + \varphi)$ дорівнює $\frac{\pi}{|k|}$.

Наприклад, найменшим додатним періодом T функції $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{7}\right)$ буде число $\frac{2\pi}{|4|}$, тобто $T = \frac{\pi}{2}$, а функції $y = \operatorname{ctg}\left(3 - \frac{1}{8}x\right)$ буде число $\frac{\pi}{\left|\frac{-1}{8}\right|}$, тобто $T = 8\pi$.

7. Побудова графіків тригонометричних функцій за допомогою перетворень

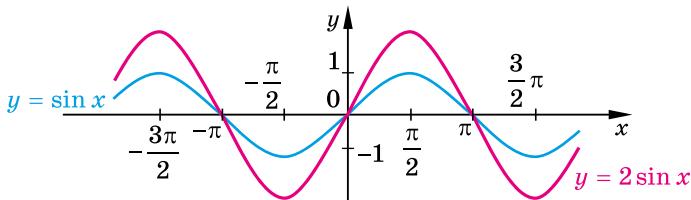
Для побудови графіків тригонометричних функцій, відмінних від тих, які ми розглянули вище, можна використовувати перетворення графіків функцій.

Наприклад, для побудови графіка функції $y = \cos x - 1$ достатньо графік функції $y = \cos x$ перенести вздовж осі y на 1 вниз (мал. 12.8).



Мал. 12.8

А для побудови графіка функції $y = 2 \sin x$ достатньо графік функції $y = \sin x$ розтягнути у 2 рази від осі абсцис (мал. 12.9).



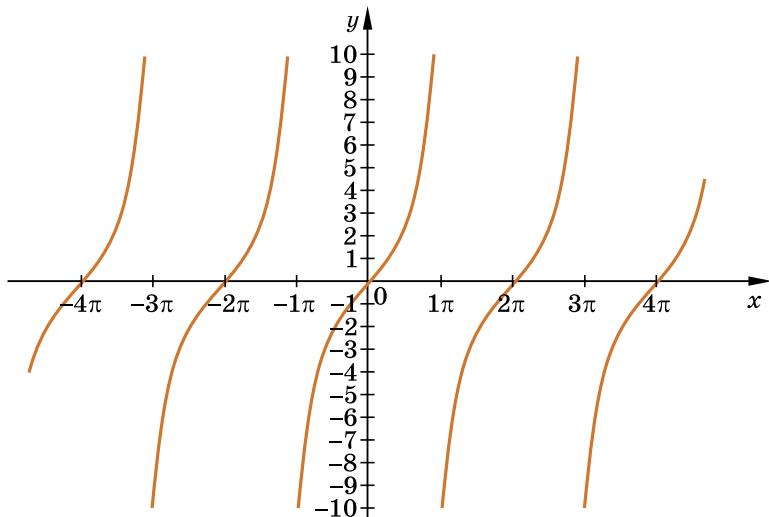
Мал. 12.9

8. Побудова графіків тригонометричних функцій за допомогою комп'ютера

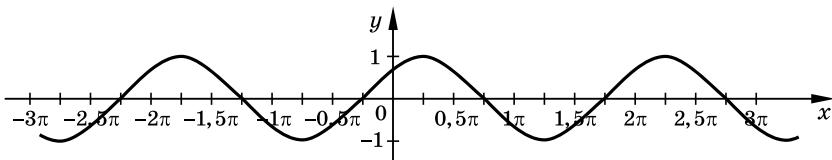
За допомогою спеціальних комп'ютерних програм можна будувати графіки будь-яких тригонометричних функцій. На малюнку 12.10 зображене графік функції $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, а на

малюнку 12.11 – графік функції $y = \cos(x - 0,25\pi)$, побудовані за допомогою однієї з таких програм.

Радимо під час використання конкретної програми знайомитися з файлом допомоги (часто для цього достатньо натиснути клавішу **F1**, знаходячись у вікні програми). У більшості програм є спеціальні опції або інструменти для роботи з тригонометричними функціями, наприклад опція «тригонометричний набір» дозволяє по осі x відкладати позначки, що залежать від π . Саме таку опцію застосовано до графіків на малюнках 12.10 і 12.11.



Мал. 12.10



Мал. 12.11

За графіками легко визначати властивості функцій. Наприклад, нулями функції $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ є числа вигляду $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а функція $y = \cos(x - 0,25\pi)$ спадає на проміжках $[0,25\pi + 2\pi k; 1,25\pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$, тощо.



• Яку функцію називають періодичною з періодом $T \neq 0$? • Назвіть найменший додатній період функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ та $y = \sin(kx + \phi)$, $y = \cos(kx + \phi)$, $y = \operatorname{tg}(kx + \phi)$, $y = \operatorname{ctg}(kx + \phi)$. • Як використовують періодичність для побудови графіків? • За графіками функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ сформулюйте їх властивості.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



12.1. Для функції $y = \sin x$ знайдіть:

- 1) $y(0)$;
- 2) $y\left(\frac{\pi}{4}\right)$;
- 3) $y\left(\frac{\pi}{3}\right)$;
- 4) $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

12.2. Для функції $y = \cos x$ знайдіть:

- 1) $y(0)$; 2) $y\left(\frac{\pi}{6}\right)$; 3) $y\left(\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

 **12.3.** Побудуйте графік функції $y = \cos x$ на проміжку $[0; 2\pi]$. Укажіть область значень функції, проміжок зростання і проміжок спадання, нулі функції.

12.4. Побудуйте графік функції $y = \sin x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Укажіть область значень функції, проміжок зростання і проміжок спадання, нулі функції.

12.5. Побудуйте графік функції $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Укажіть нулі функції, проміжки зростання і проміжки спадання функції.

Знайдіть найменший додатний період функції (12.6–12.7):

12.6. 1) $y = \cos 4x$; 2) $y = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{x}{3}\right)$;

3) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{7}x - \frac{\pi}{8}\right)$; 4) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{9} - x\right)$.

12.7. 1) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{9}\right)$; 2) $y = \cos\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right)$;

3) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{18}\right)$; 4) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{7} - \frac{1}{7}x\right)$.

12.8. За графіками функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ визначте знак числа:

1) $\sin 0, 9\pi$; 2) $\cos \frac{9\pi}{8}$; 3) $\operatorname{tg} 1, 1\pi$; 4) $\operatorname{ctg} (-0, 2\pi)$;

5) $\sin (-1, 6)$; 6) $\cos (-1)$; 7) $\operatorname{tg} 4$; 8) $\operatorname{ctg} 3$.

12.9. За графіками функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ порівняйте з нулем число:

1) $\sin 3, 5$; 2) $\cos (-0, 2\pi)$; 3) $\operatorname{tg} 0, 6\pi$;

4) $\sin (-1, 1\pi)$; 5) $\operatorname{ctg} (-1)$; 6) $\cos 2$.

 Побудуйте графік функції та за зразком таблиць на с. 114 і 115 запишіть її властивості (12.10–12.11):

12.10. 1) $y = \sin x - 2$; 2) $y = 3 \cos x$.

12.11. 1) $y = \cos x + 3$; 2) $y = 2 \sin x$.

12.12. Побудуйте графік функції $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Укажіть:

- 1) нулі функції;
- 2) проміжки, на яких функція набуває додатних значень, і проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень;
- 3) проміжки зростання і проміжки спадання функції.

12.13. Побудуйте графік функції $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Укажіть:

- 1) нулі функції;
- 2) проміжки, на яких функція набуває додатних значень, і проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень;
- 3) проміжки зростання і проміжки спадання функції.

12.14. Чи є число T періодом функції f , якщо:

- 1) $f(x) = \cos \frac{x}{2}; T = 2\pi;$
- 2) $f(x) = \sin \frac{x}{3}; T = \frac{2\pi}{3};$
- 3) $f(x) = \operatorname{ctg} \pi x; T = 2;$
- 4) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}; T = 2?$

Не виконуючи побудови, знайдіть нулі функції (12.15–12.16):

12.15. 1) $f(x) = \cos 4x;$ 2) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{6}\right).$

12.16. 1) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right);$ 2) $f(x) = \operatorname{ctg} 2x.$

Використовуючи графіки функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, порівняйте числа (12.17–12.18):

12.17. 1) $\sin 0,7\pi$ і $\sin 0,8\pi;$ 2) $\cos 2$ і $\cos 3;$
3) $\operatorname{tg}(-2)$ і $\operatorname{tg}(-1);$ 4) $\operatorname{ctg} 1,6$ і $\operatorname{ctg} 3,5.$

12.18. 1) $\sin 1$ і $\sin 4;$
2) $\cos(-0,2\pi)$ і $\cos(-0,1\pi);$
3) $\operatorname{tg} 0,2\pi$ і $\operatorname{tg} 0,3\pi;$
4) $\operatorname{ctg}(-3)$ і $\operatorname{ctg}(-2).$

 **12.19.** Не виконуючи побудови, знайдіть:

- 1) проміжки зростання функції $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right);$
- 2) значення x , при яких функція $y = \cos\left(4x - \frac{\pi}{8}\right)$ набуває від'ємних значень.

12.20. Не виконуючи побудови, знайдіть:

1) проміжки спадання функції $y = \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{9}\right)$;

2) значення x , при яких функція $y = \sin\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{4}\right)$ набуває додатних значень.

Побудуйте графік функції (12.21–12.22):

12.21. 1) $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$.

12.22. 1) $y = 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$.

12.23. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{1}{1 + \cos 4x}$.

12.24. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{1}{1 - \sin 2x}$.

12.25. При яких значеннях x , $x \in [0; 2\pi]$, функція $f(x)$ набуває найменшого значення, а при яких – найбільшого? Знайдіть ці значення, якщо:

1) $f(x) = \sin 2x + 1$; 2) $f(x) = 3 - \cos x$.

12.26. (*Практичне завдання.*) За допомогою будь-якої комп’ютерної програми, що будує графіки, побудуйте графіки функцій $y = \operatorname{tg}\frac{x}{4} - 1$; $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$; $y = 2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - 1$ та за зразком таблиць на с. 114–115 укажіть їх властивості.



Життєва математика

12.27. Для дорослих вхідний квиток на 2-й поверх Ейфелевої вежі коштує 8 євро, для осіб віком 12–24 роки – 6,4 євро, а для дітей 4–11 років – 4 євро. Родина тернопільчан, що складається з батька, мами, студента Сергія (19 років), школярки Марійки (10 років) та малюка Ореста (2 роки), хоче відвідати 2-й поверх Ейфелевої вежі. У паризькому банку 1 євро коштує 32 гривні. Яку суму (у грн) заплатить ця родина за таку екскурсію. Округліть до цілих гривень.





Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

12.28. Знайдіть скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо:

- 1) $\vec{a}(\cos \alpha; \sin \alpha); \vec{b}(\cos \beta; \sin \beta)$;
- 2) $\vec{a}(\sin \alpha; \cos \alpha); \vec{b}(\cos \beta; \sin \beta)$.

12.29. Дано: $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$. Перевірте, що:

- 1) $\cos(\alpha + \beta) \neq \cos \alpha + \cos \beta$;
- 2) $\sin(\alpha + \beta) \neq \sin \alpha + \sin \beta$;
- 3) $\cos(\alpha - \beta) \neq \cos \alpha - \cos \beta$;
- 4) $\sin(\alpha - \beta) \neq \sin \alpha - \sin \beta$.

§ 13. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ

У цьому параграфі розглянемо формулі, які дають можливість записувати тригонометричні функції суми і різниці двох кутів через тригонометричні функції цих кутів.

1. Косинус різниці і суми

Для того, щоб отримати формулу для $\cos(\alpha - \beta)$, спочатку розглянемо випадок, коли $\alpha > \beta$ і $\alpha - \beta < \pi$.

Нехай при повороті на кут α початковий радіус OP_0 одиничного кола перейшов у радіус OP_α , $P_\alpha(x; y)$ (мал. 13.1). Оскільки $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$, то маємо вектор $\overrightarrow{OP_\alpha}(\cos \alpha; \sin \alpha)$. Аналогічно, $\overrightarrow{OP_\beta}(\cos \beta; \sin \beta)$. Тоді:

$$\overrightarrow{OP_\alpha} \cdot \overrightarrow{OP_\beta} = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

З іншого боку:

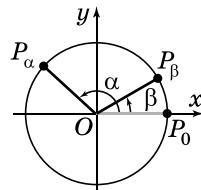
$$\overrightarrow{OP_\alpha} \cdot \overrightarrow{OP_\beta} = |\overrightarrow{OP_\alpha}| \cdot |\overrightarrow{OP_\beta}| \cdot \cos \angle P_\alpha OP_\beta.$$

Але $|\overrightarrow{OP_\alpha}| = 1$, $|\overrightarrow{OP_\beta}| = 1$, $\angle P_\alpha OP_\beta = \alpha - \beta$.

Маємо: $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$.

Аналогічно розглядають і випадки, коли $\alpha < \beta$ або $\alpha - \beta > \pi$.

Отримали формулу косинуса різниці:



Мал. 13.1



$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Із цієї формулі маємо:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Отримали формулу косинуса суми:



$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Задача 1. Обчислити $\cos 75^\circ$.

Розв'язання.

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \text{ Відповідь. } \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Задача 2. Спростити вираз $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язання. $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \\ = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{3} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{3} - \left(\cos \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{3} \right) = \\ = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = -\sqrt{3} \sin \alpha.$

Відповідь. $-\sqrt{3} \sin \alpha$.

2. Синус різниці й суми

Знайдемо формулу для $\sin(\alpha - \beta)$.

Маємо: $\sin(\alpha - \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right) =$

$$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \\ = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

Отримали формулу синуса різниці:



$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

Для $\sin(\alpha + \beta)$ матимемо:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha - (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) - \cos \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Отримали формулу синуса суми:



$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Задача 3. Знайти $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, якщо $\sin \alpha = 0,6$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Розв'язання.

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha - \cos \alpha).$$

Оскільки α – кут II чверті, то $\cos \alpha < 0$. Маємо:

- $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,6^2} = -0,8.$
- Тоді $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,6 - (-0,8)) = 0,7\sqrt{2}.$
- Відповідь. $0,7\sqrt{2}.$

Задача 4. Спростити вираз $\sin 12x \cos 4x + \cos 12x \sin 4x.$

- Розв'язання. Неважко помітити, що даний вираз – це права частина формули $\sin(\alpha + \beta)$, де $\alpha = 12x$, $\beta = 4x$.
- Отже, $\sin 12x \cos 4x + \cos 12x \sin 4x = \sin(12x + 4x) = \sin 16x.$
- Відповідь. $\sin 16x.$

3. Тангенс різниці ї суми

Виразимо $\tg(\alpha - \beta)$ через $\tg \alpha$ і $\tg \beta$ за умови, що кожен із цих виразів має зміст, тобто, що $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$, $\cos \alpha \neq 0$, $\cos \beta \neq 0$. Маємо:

$$\tg(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}.$$

Поділимо чисельник і знаменник на добуток $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$.
Матимемо:

$$\tg(\alpha - \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tg \alpha - \tg \beta}{1 + \tg \alpha \tg \beta}.$$

Отримали формулу тангенса різниці:



$$\tg(\alpha - \beta) = \frac{\tg \alpha - \tg \beta}{1 + \tg \alpha \tg \beta}.$$

Для тангенса суми матимемо:

$$\tg(\alpha + \beta) = \tg(\alpha - (-\beta)) = \frac{\tg \alpha - \tg(-\beta)}{1 + \tg \alpha \tg(-\beta)} = \frac{\tg \alpha + \tg \beta}{1 - \tg \alpha \tg \beta}.$$

Отримали формулу тангенса суми:



$$\tg(\alpha + \beta) = \frac{\tg \alpha + \tg \beta}{1 - \tg \alpha \tg \beta}.$$

Задача 5. Обчислити: 1) $\tg \frac{\pi}{12}$; 2) $\frac{\tg 42^\circ + \tg 18^\circ}{1 - \tg 42^\circ \tg 18^\circ}.$

- Розв'язання. 1) $\tg \frac{\pi}{12} = \tg\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tg \frac{\pi}{3} - \tg \frac{\pi}{4}}{1 + \tg \frac{\pi}{3} \tg \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} =$

$$\begin{aligned} & \bullet = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}. \\ & \bullet 2) \frac{\operatorname{tg} 42^\circ + \operatorname{tg} 18^\circ}{1 - \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 18^\circ} = \operatorname{tg}(42^\circ + 18^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Відповідь. 1) $2 - \sqrt{3}$; 2) $\sqrt{3}$.

А ще раніше...

Для складання тригонометричних таблиць важливо мати формули, що дають можливість знаходити тригонометричні функції суми та різниці аргументів ($\alpha \pm \beta$) через тригонометричні функції аргументів α і β .

Першим, який дійшов до нас, трактатом, що містить такі формули, став «Альмагест» Птолемея. У цій праці видатний математик геометричним шляхом на основі теореми Птолемея виводить формули різниці і суми двох кутів для хорд. Індійські вчені, зокрема Бхаскара (XII ст.), використовували формули, які в сучасній символіці можна записати так:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{R}, \text{ де } R - \text{радіус кола.}$$

Цю та інші формули додавання використовували вчені середньовічних країн Азії та Європи.

У сучасному вигляді формули додавання стали використовувати після праці І. Клюгера «Аналітична тригонометрія» (1770 р.). У ній автор вводить тригонометричні функції як спiввiдношення мiж сторонами трикутника. Так, наприклад, формулу синуса суми Клюгер отримує з формули:

$$\sin C = \sin A \cos B + \cos A \sin B, \text{ де } A, B, C - \text{кути трикутника.}$$



Запам'ятайте формули косинуса різниці й суми; синуса різниці й суми; тангенса різниці й суми.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



Чи правильна рівність (13.1–13.2):

13.1. 1) $\sin(2x + y) = \sin 2x \cos y - \cos 2x \sin y$;

2) $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$?

13.2. 1) $\sin(3x - y) = \sin 3x \cos y - \cos 3x \sin y$;

2) $\cos(x + y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$?

Чи правильно виконано спрощення (13.3–13.4):

13.3. 1) $\sin 20^\circ \cos 5^\circ - \sin 5^\circ \cos 20^\circ = \sin(20^\circ + 5^\circ) = \sin 25^\circ$;

2) $\cos 40^\circ \cos 10^\circ - \sin 40^\circ \sin 10^\circ = \cos(40^\circ + 10^\circ) = \cos 50^\circ$?

13.4. 1) $\sin 15^\circ \cos 6^\circ + \cos 15^\circ \sin 6^\circ = \sin(15^\circ + 6^\circ) = \sin 21^\circ$;

2) $\cos 17^\circ \cos 7^\circ + \sin 17^\circ \sin 7^\circ = \cos(17^\circ - 7^\circ) = \cos 24^\circ$?

2 За формулами додавання перетворіть вираз (13.5–13.6):

13.5. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$; 2) $\cos(45^\circ + \alpha)$;

3) $\sin(\alpha - 45^\circ)$; 4) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$.

13.6. 1) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$;

3) $\cos(45^\circ - \alpha)$; 4) $\sin(\alpha + 60^\circ)$.

За формулами додавання перевірте істинність формул зведення (13.7–13.8):

13.7. 1) $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$;

3) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$; 4) $\cos(270^\circ + \alpha) = \sin \alpha$.

13.8. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$; 2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$;

3) $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$; 4) $\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$.

13.9. Запишіть кут 105° як суму $60^\circ + 45^\circ$ та обчисліть:

1) $\sin 105^\circ$; 2) $\cos 105^\circ$; 3) $\tg 105^\circ$.

13.10. Запишіть кут 15° як різницю $60^\circ - 45^\circ$ (або $45^\circ - 30^\circ$) та обчисліть: 1) $\sin 15^\circ$; 2) $\cos 15^\circ$; 3) $\tg 15^\circ$.

Спростіть вираз (13.11–13.16):

13.11. 1) $\cos(\alpha + \beta) - \cos \alpha \cos \beta$; 2) $\sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha - \beta)$;

3) $\cos(\alpha - 30^\circ) - \frac{1}{2} \sin \alpha$; 4) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$.

13.12. 1) $\sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha \cos \beta$; 2) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \cos \alpha$.

13.13. 1) $\cos \alpha - \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; 2) $\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \sin \alpha$;

3) $2 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \sin \alpha$; 4) $2 \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \alpha\right) - \cos \alpha$.

13.14. 1) $2 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \cos \alpha$; 2) $\sqrt{3} \sin \alpha + 2 \cos(\alpha + 60^\circ)$.

- 13.15.** 1) $\cos 2\alpha \cos 7\alpha + \sin 2\alpha \sin 7\alpha$;
 2) $\sin 4\alpha \cos \alpha - \cos 4\alpha \sin \alpha$;
 3) $\cos 4x \cos 2x - \sin 4x \sin 2x$;
 4) $\sin 2y \cos 8y + \cos 2y \sin 8y$.

- 13.16.** 1) $\sin 4y \cos y - \cos 4y \sin y$;
 2) $\cos 3\alpha \cos \alpha - \sin 3\alpha \sin \alpha$;
 3) $\cos 14x \cos 2x + \sin 14x \sin 2x$;
 4) $\sin 2\beta \cos \beta + \sin \beta \cos 2\beta$.

Знайдіть значення виразу (13.17–13.18):

- 13.17.** 1) $\cos 28^\circ \cos 62^\circ - \sin 28^\circ \sin 62^\circ$;
 2) $\sin 11^\circ \cos 19^\circ + \cos 11^\circ \sin 19^\circ$;
 3) $\cos \frac{5\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} + \sin \frac{5\pi}{16} \sin \frac{\pi}{16}$;
 4) $\sin \frac{7\pi}{18} \cos \frac{\pi}{18} - \cos \frac{7\pi}{18} \sin \frac{\pi}{18}$.

- 13.18.** 1) $\cos 31^\circ \cos 1^\circ + \sin 31^\circ \sin 1^\circ$;
 2) $\sin 92^\circ \cos 2^\circ - \cos 92^\circ \sin 2^\circ$;
 3) $\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{5\pi}{7}$;
 4) $\sin \frac{3\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} + \sin \frac{\pi}{16} \cos \frac{3\pi}{16}$.

- 13.19.** Відомо, що $\operatorname{tg} \alpha = 4$; $\operatorname{tg} \beta = -0,5$. Знайдіть:
 1) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$;
 2) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

- 13.20.** Відомо, що $\operatorname{tg} \alpha = 0,25$; $\operatorname{tg} \beta = -8$. Знайдіть:
 1) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$;
 2) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

Обчисліть (13.21–13.22):

- 13.21.** 1) $\frac{\operatorname{tg} 51^\circ - \operatorname{tg} 6^\circ}{1 + \operatorname{tg} 51^\circ \operatorname{tg} 6^\circ}$;
 2) $\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} + \operatorname{tg} \frac{6\pi}{7}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \operatorname{tg} \frac{6\pi}{7}}$.
- 13.22.** 1) $\frac{\operatorname{tg} 18^\circ + \operatorname{tg} 12^\circ}{1 - \operatorname{tg} 18^\circ \operatorname{tg} 12^\circ}$;
 2) $\frac{\operatorname{tg} \frac{7\pi}{16} - \operatorname{tg} \frac{3\pi}{16}}{1 + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{16} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{16}}$.

3 Спростіть вираз (13.23–13.24):

$$\begin{array}{ll}
 \textbf{13.23.} 1) \sin(\alpha + 45^\circ) + \sin(\alpha - 45^\circ); & 2) \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right); \\
 3) \frac{\cos(x-y) - \cos x \cos y}{\cos(x+y) + \sin x \sin y}; & 4) \frac{\sin(x-y) - \sin x \cos y}{\cos x \cos y}.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \textbf{13.24.} 1) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right); & 2) \cos(\alpha + 30^\circ) + \cos(\alpha - 30^\circ); \\
 3) \frac{\cos(x+y) - \cos x \cos y}{\cos(x-y) - \sin x \sin y}; & 4) \frac{\sin(x+y) - \cos x \sin y}{\sin x \sin y}.
 \end{array}$$

Доведіть тотожність (13.25–13.26):

$$\begin{array}{ll}
 \textbf{13.25.} 1) \cos(\alpha + \beta) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos \alpha \cos \beta; \\
 2) \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta; & 3) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right); \\
 4) \frac{\sin(\alpha - \beta) + 2 \cos \alpha \sin \beta}{2 \cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta).
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \textbf{13.26.} 1) \cos(\alpha - \beta) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \cos \alpha \cos \beta; \\
 2) \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1; \\
 3) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right); \\
 4) \frac{\cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha - \beta)} = \operatorname{ctg}(\alpha + \beta).
 \end{array}$$

Спростіть вираз (13.27–13.28):

$$\begin{array}{ll}
 \textbf{13.27.} 1) \sin\left(\frac{\pi}{5} + \alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{10} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{10} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{5} + \alpha\right); \\
 2) \cos(13^\circ + 2x)\cos(17^\circ - 2x) - \sin(13^\circ + 2x)\sin(17^\circ - 2x).
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \textbf{13.28.} 1) \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right); \\
 2) \cos(70^\circ + 3x)\cos(10^\circ + 3x) + \sin(70^\circ + 3x)\sin(10^\circ + 3x).
 \end{array}$$

Знайдіть значення виразу (13.29–13.30):

$$\begin{array}{ll}
 \textbf{13.29.} 1) \sin(\alpha - 30^\circ), \text{ якщо } \cos \alpha = -0,6 \text{ і } 90^\circ < \alpha < 180^\circ; \\
 2) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right), \text{ якщо } \sin \alpha = -\frac{5}{13} \text{ і } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.
 \end{array}$$

13.30. 1) $\cos(\alpha - 60^\circ)$, якщо $\sin \alpha = 0,8$ і $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;

2) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$, якщо $\cos \alpha = \frac{8}{17}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

13.31. Дано: $\sin \alpha = 0,28$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\cos \beta = -0,6$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

Знайдіть: 1) $\sin(\alpha + \beta)$; 2) $\cos(\alpha - \beta)$.

13.32. Дано: $\cos \alpha = 0,96$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\sin \beta = -0,8$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

Знайдіть: 1) $\sin(\alpha - \beta)$; 2) $\cos(\alpha + \beta)$.

 **13.33.** Доведіть формули котангенса суми й різниці:

1) $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$; 2) $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$.

13.34. Застосовуючи формулі з попередньої вправи, обчисліть:

1) $\frac{\operatorname{ctg} 40^\circ \operatorname{ctg} 20^\circ - 1}{\operatorname{ctg} 40^\circ + \operatorname{ctg} 20^\circ}$; 2) $\frac{\operatorname{ctg} 70^\circ \operatorname{ctg} 25^\circ + 1}{\operatorname{ctg} 25^\circ - \operatorname{ctg} 70^\circ}$.

 **13.35.** Доведіть, що коли α , β , γ – кути трикутника, то $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin \gamma$.

13.36. Знайдіть $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, якщо $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\sin \beta = \frac{8}{17}$, α і β – кути II чверті.

13.37. Знайдіть $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, якщо $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \beta = \frac{12}{13}$, α і β – кути I чверті.

13.38. Доведіть тотожність: $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$.

13.39. Доведіть тотожність: $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$.

13.40. Знайдіть найменше і найбільше значення виразу:

1) $\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha$; 2) $\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha$.

13.41. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$; 2) $y = \sqrt{3} \cos x + \sin x$.

Життєва математика

13.42. Коефіцієнт корисної дії (ККД) деякого двигуна визначають за формулою $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100 \%$, де T_1 – температура на-

грівача (у градусах Кельвіна), T_2 – температура холодильника (у градусах Кельвіна). При якій мінімальній температурі нагрівача T_1 ККД цього двигуна становитиме не менше 20 %, якщо температура холодильника $T_2 = 320$ К? Відповідь запишіть у градусах Кельвіна.



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

13.43. Для $\alpha = 30^\circ$ і $\alpha = 60^\circ$ порівняйте значення виразів:

$$1) \sin 2\alpha \text{ і } 2\sin \alpha \cos \alpha; \quad 2) \cos 2\alpha \text{ і } \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

§ 14. ФОРМУЛИ ПОДВІЙНОГО І ПОЛОВИННОГО КУТА. ФОРМУЛИ ПОНИЖЕННЯ СТЕПЕНЯ

Розглянемо формулі, що є *наслідками формул додавання*.

1. Формули подвійного кута

Формула

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

є істинною для будь-яких значень

α і β . Якщо припустимо, що $\beta = \alpha$, матимемо:

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha, \text{ тобто}$$



$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Отримали *формулу синуса подвійного кута*.

Аналогічно для формулі $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, коли $\beta = \alpha$, матимемо: $\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$, тобто



$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Отримали *формулу косинуса подвійного кута*.

Якщо в отриману формулу спочатку замість $\cos^2 \alpha$ підставити $1 - \sin^2 \alpha$, а потім замість $\sin^2 \alpha$ підставити $1 - \cos^2 \alpha$, отримаємо ще дві формули косинуса подвійного кута:



$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \text{ та } \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

Так само з формули $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ отримаємо формулу тангенса подвійного кута $\operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha}$, тобто



$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Отримали формулу тангенса подвійного кута, яка є істинною, коли $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{tg} 2\alpha$ існують.

Задача 1. Спростити вираз: 1) $\frac{2 \cos^2 \alpha}{\sin 2\alpha}$; 2) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$.

Розв'язання.

$$1) \frac{2 \cos^2 \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$2) \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \\ = \cos \alpha + \sin \alpha.$$

Відповідь. 1) $\operatorname{ctg} \alpha$; 2) $\cos \alpha + \sin \alpha$.

Задача 2. Обчислити: $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$.

Розв'язання. $\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \\ = \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot 15^\circ) = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{4} = 0,25.$

Відповідь. 0,25.

Зауважимо, що отримані формулі можна застосовувати до будь-якого кута 2α , адже будь-який кут можна подати як подвійний. Наприклад, $\sin 6x = \sin(2 \cdot 3x) = 2 \sin 3x \cos 3x$.

$$\cos \alpha = \cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(2 \cdot \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(2 \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right) = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)}.$$

2. Формули пониження степеня

Якщо з формул $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ і $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ виразити відповідно $\sin^2 \alpha$ і $\cos^2 \alpha$, отримаємо:



$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \text{та} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

Ці формули називають *формулами пониження степеня*. Вони дають можливість записати квадрати синуса і косинуса кута α через косинус кута 2α .

Оскільки $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$, маємо ще

одну формулу пониження степеня:



$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}.$$

Ця формула істинна, якщо $\operatorname{tg} \alpha$ існує.

Задача 3. Понизити степінь виразу:

$$1) \cos^2 2\alpha; \quad 2) \sin^2 \frac{\alpha}{4}; \quad 3) \operatorname{tg}^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right).$$

Розв'язання. 1) $\cos^2 2\alpha = \frac{1 + \cos(2 \cdot 2\alpha)}{2} = \frac{1 + \cos 4\alpha}{2}$.

$$2) \sin^2 \frac{\alpha}{4} = \frac{1 - \cos \left(2 \cdot \frac{\alpha}{4} \right)}{2} = \frac{1 - \cos \frac{\alpha}{2}}{2}.$$

$$3) \operatorname{tg}^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 - \cos \left(2 \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \right)}{1 + \cos \left(2 \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \right)} = \frac{1 - \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{2} \right)}{1 + \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{2} \right)} =$$

$$= \frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right)}{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right)} = \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}.$$

Відповідь. 1) $\frac{1 + \cos 4\alpha}{2}$; 2) $\frac{1 - \cos \frac{\alpha}{2}}{2}$; 3) $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$.

3. Формули половинного кута

Якщо у формулах $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$,

$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$

замість кута α підставити кут $\frac{\alpha}{2}$, отримаємо *формули половинного кута*:



$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}; \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}; \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Задача 4. Знайти $\sin \frac{\alpha}{2}$, якщо $\cos \alpha = \frac{7}{9}$ і $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$.

Розв'язання. За формулою половинного кута

$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$. Оскільки $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$, то $\frac{2\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\frac{5\pi}{2}}{2}$; тобто $\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{5\pi}{4}$, отже, $\sin \frac{\alpha}{2} < 0$, і тому

$$\sin \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{7}{9}}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}. \text{ Відповідь. } -\frac{1}{3}.$$

Для $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ можна отримати ще дві формулі. Оскільки

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\text{i } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \text{ то маємо формулі:}$$



$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \text{ i } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Задача 6. Обчислити $\operatorname{ctg} 15^\circ$.

Розв'язання.

$$\operatorname{ctg} 15^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sin 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 + \sqrt{3}.$$

Відповідь. $2 + \sqrt{3}$.

А ще раніше...

Складаючи таблиці хорд, Птолемей уже використовував співвідношення, яке в сучасних позначеннях виглядає так:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

До деяких формул, що після спрощень зводилися до цієї формулі, дійшли також і давньоіндійські математики. Індуси

знали і кілька інших тригонометричних формул. Так, наприклад, Абу-л-Вафа (940–998) винайшов формулу

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Ця, а також формули подвійного та половинного кутів для синуса і косинуса, є у працях багатьох середньовічних учених.

Франсуа Вієт у праці «Числення трикутників» знаходив синуси і косинуси будь-яких кратних дуг, використовуючи прийоми, подібні до прийомів множення комплексних чисел.

Англієць Джон Пелль, француз Г. Роберваль та інші математики XVIII ст. різними шляхами прийшли до формули

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Видатний математик Л. Ейлер у праці «Введення в аналіз» запропонував формулу:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha).$$

Яка, проте, зараз не має широкого вжитку.



- Запам'ятайте формули синуса, косинуса і тангенса подвійного кута.
- Запам'ятайте формули пониження степеня.
- Запам'ятайте формули половинного кута.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



1 Чи правильно використано формули подвійного кута (14.1–14.2):

14.1. 1) $2 \sin x \cos x = \sin 2x;$ 2) $\cos 2y = \cos^2 y + \sin^2 y;$

3) $\operatorname{tg} 4x = \frac{2 \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg}^2 2x};$ 4) $\sin 6\alpha = 2 \sin 12\alpha \cos 12\alpha?$

14.2. 1) $\cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \cos 2\beta;$ 2) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha;$

3) $\sin 4\gamma = 2 \sin 2\gamma \cos 2\gamma;$ 4) $\cos 8\alpha = \cos^2 16\alpha - \sin^2 16\alpha?$



Спростіть вираз (14.3–14.4):

14.3. 1) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha};$ 2) $\frac{\sin 2\beta}{\cos \beta} - \sin \beta;$ 3) $\frac{\cos \alpha \sin 2\alpha}{\operatorname{tg} \alpha};$

4) $\cos 2x - \cos^2 x;$ 5) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} + \sin \alpha;$ 6) $\frac{1 - \sin 2\alpha}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}.$

14.4. 1) $\frac{\cos \alpha}{\sin 2\alpha};$ 2) $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \cos x;$

3) $\cos 2\beta + \sin^2 \beta;$ 4) $\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} - \cos x.$

Скоротіть дріб (14.5–14.6):

$$14.5. \quad 1) \frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ};$$

$$2) \frac{2 \cos 10^\circ}{\sin 20^\circ};$$

$$3) \frac{\cos 50^\circ}{\sin 25^\circ + \cos 25^\circ};$$

$$4) \frac{\sin 40^\circ - \cos 40^\circ}{\cos 80^\circ}.$$

$$14.6. \quad 1) \frac{\cos 5^\circ}{\sin 10^\circ};$$

$$2) \frac{\sin 100^\circ}{2 \sin 50^\circ};$$

$$3) \frac{\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ};$$

$$4) \frac{\cos 140^\circ}{\sin 70^\circ - \cos 70^\circ}.$$

Обчисліть (14.7–14.8):

$$14.7. \quad 1) 2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ;$$

$$2) 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8};$$

$$3) \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12};$$

$$4) (\cos 15^\circ - \sin 15^\circ)^2;$$

$$5) \cos^2 22^\circ 30' - \sin^2 22^\circ 30';$$

$$6) \sin^2 \frac{5\pi}{12} - \cos^2 \frac{5\pi}{12}.$$

$$14.8. \quad 1) 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12};$$

$$2) 2 \sin 22^\circ 30' \cos 22^\circ 30';$$

$$3) \sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12};$$

$$4) (\sin 75^\circ + \cos 75^\circ)^2;$$

$$5) \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8};$$

$$6) \sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ.$$

Спростіть вираз (14.9–14.12):

$$14.9. \quad 1) \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha};$$

$$2) \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}};$$

$$3) \frac{\sin 4x}{\sin 2x};$$

$$4) 4 \sin \frac{\alpha}{8} \cos \frac{\alpha}{8};$$

$$5) \cos 5x \sin 5x;$$

$$6) 4 \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha.$$

$$14.10. \quad 1) \frac{\sin 6\alpha}{\cos 3\alpha};$$

$$2) \frac{\cos 8\alpha}{\sin 4\alpha + \cos 4\alpha};$$

$$3) 8 \sin 10\beta \cos 10\beta;$$

$$4) 4 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha.$$

$$14.11. \quad 1) \frac{2 \operatorname{tg} 25^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 25^\circ};$$

$$2) \frac{8 \operatorname{tg} 40^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 40^\circ}.$$

$$14.12. \quad 1) \frac{2 \operatorname{tg} 5^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 5^\circ};$$

$$2) \frac{4 \operatorname{tg} 20^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 20^\circ}.$$

$$14.13. \quad \text{Знайдіть } \operatorname{tg} 2\beta, \text{ якщо: } 1) \operatorname{tg} \beta = \sqrt{2}; \quad 2) \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{3}.$$

14.14. Знайдіть $\operatorname{tg} 2\alpha$, якщо: 1) $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2}$.

14.15. Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо: 1) $\cos \alpha = 0,1$; 2) $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$.

14.16. Знайдіть $\cos 2x$, якщо: 1) $\cos x = -\frac{1}{3}$; 2) $\sin x = 0,4$.

Запишіть тригонометричну функцію кута через тригонометричну функцію вдвічі меншого кута (14.17–14.18):

14.17. 1) $\cos \alpha$; 2) $\sin 8\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 3\beta$;

4) $\sin \frac{x}{3}$; 5) $\cos \frac{\alpha}{8}$; 6) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

14.18. 1) $\sin \alpha$; 2) $\operatorname{tg} 6\alpha$; 3) $\cos 5x$;

4) $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$; 5) $\sin \frac{x}{4}$; 6) $\cos(\alpha + \beta)$.

Виконайте пониження степеня у виразі (14.19–14.22):

14.19. 1) $\cos^2 3\alpha$; 2) $\sin^2 8x$.

14.20. 1) $\sin^2 4\alpha$; 2) $\cos^2 5x$.

 **14.21.** 1) $\cos^2\left(\frac{\alpha}{4} - 30^\circ\right)$; 2) $\sin^2\left(\frac{5\alpha}{2} + 10^\circ\right)$;
3) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; 4) $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)$.

14.22. 1) $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2} - 16^\circ\right)$; 2) $\cos^2\left(\frac{\alpha}{8} - 15^\circ\right)$;
3) $\operatorname{tg}^2\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right)$; 4) $\sin^2\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)$.

Подайте у вигляді добутку вираз (14.23–14.24):

14.23. 1) $1 + \cos \alpha$; 2) $1 - \cos 2\alpha$; 3) $1 + \cos 10^\circ$;
4) $1 - \cos 15^\circ$; 5) $1 + \sin \beta$; 6) $1 - \sin 20^\circ$.

14.24. 1) $1 - \cos x$; 2) $1 + \cos \frac{\alpha}{2}$; 3) $1 - \cos 20^\circ$;
4) $1 + \cos 25^\circ$; 5) $1 - \sin x$; 6) $1 + \sin 40^\circ$.

14.25. Спростіть вираз: 1) $\frac{1 - \cos 4\alpha}{\sin^2 2\alpha}$; 2) $(1 + \cos 2x) \operatorname{tg} x$.

14.26. Спростіть вираз: 1) $\frac{1 + \cos 6\alpha}{2 \cos 3\alpha}$; 2) $(1 - \cos 2x) \operatorname{ctg} x$.

14.27. Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

14.28. Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\cos \alpha = -0,8$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

14.29. Відомо, що $\cos \alpha = \frac{7}{25}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Знайдіть:

$$1) \sin \frac{\alpha}{2}; \quad 2) \cos \frac{\alpha}{2}; \quad 3) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; \quad 4) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

14.30. Відомо, що $\cos \alpha = -\frac{7}{25}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Знайдіть:

$$1) \sin \frac{\alpha}{2}; \quad 2) \cos \frac{\alpha}{2}; \quad 3) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; \quad 4) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

14.31. Чи існує таке значення α , при якому:

$$1) \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{3}{7}; \quad 2) \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{5}{4}?$$

14.32. Чи існує таке значення β , при якому:

$$1) \sin \beta \cos \beta = -0,75; \quad 2) \sin^2 \beta - \cos^2 \beta = 0,1?$$

Спростіть вираз (**14.33–14.34**):

$$\begin{aligned} \text{14.33. } 1) \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}; & \quad 2) \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) \sin^2 2\alpha; \\ 3) \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}; & \quad 4) \frac{\sin 4x}{1 - \cos 4x} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{\cos 2x}. \end{aligned}$$

$$\text{14.34. } 1) (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \sin 2x; \quad 2) \frac{\sin 8x}{1 + \cos 8x} \cdot \frac{\cos 4x}{1 + \cos 4x}.$$

Доведіть тотожність (**14.35–14.36**):

$$\begin{aligned} \text{14.35. } 1) \left(\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} \right) \sin 2\alpha &= 4 \sin \alpha; \\ 2) \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} &= -\operatorname{tg} 2\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{14.36. } 1) \left(\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \right) \sin 2\alpha &= 4 \cos \alpha; \\ 2) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} &= \operatorname{tg} 2\alpha. \end{aligned}$$

 **14.37.** Знайдіть $\sin \alpha$, якщо $\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = 0,4$.

14.38. Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\cos \alpha + \sin \alpha = -0,2$.



14.39. Доведіть формули потрійного кута:

$$1) \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \quad 2) \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

Спростіть вираз (14.40–14.41):

$$14.40. 1) \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\alpha}{4}}{2}}; \quad 2) \sqrt{\frac{1 - \cos 4\alpha}{1 + \cos 4\alpha}}, \text{ якщо } \frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi.$$

$$14.41. 1) \sqrt{\frac{1 + \cos 4\alpha}{2}}, \text{ якщо } \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}; \quad 2) \sqrt{\frac{1 + \cos 3\alpha}{1 - \cos 3\alpha}}.$$

14.42. Косинус кута при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 0,8. Знайдіть косинус і синус кута при вершині.



Життєва математика

14.43. Літр бензину на автозаправці коштує 22 грн. Марія залила в бак 30 літрів бензину та придбала пакет соку вартістю 12 грн. Скільки решти вона отримає із 700 грн?



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

14.44. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$, де x і y – змінні.

14.45. Порівняйте значення виразів $2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ і $\sin \alpha + \sin \beta$, якщо:

$$1) \alpha = 45^\circ; \beta = 135^\circ; \quad 2) \alpha = 90^\circ; \beta = -30^\circ.$$

§ 15. ФОРМУЛИ СУМИ Й РІЗНИЦІ ОДНОЙМЕННИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКІЙ. ФОРМУЛИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДОБУТКУ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКІЙ У СУМУ

Розглянемо ще кілька формул, що є наслідками формул додавання.



1. Формули суми
i різниці
тригонометричних
функцій

Додамо почленно формули додавання:

$$\begin{aligned} + \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ + \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \sin(x + y) + \sin(x - y) &= 2 \sin x \cos y \end{aligned}$$

Нехай $x + y = \alpha$, $x - y = \beta$. Тоді $2x = \alpha + \beta$, $2y = \alpha - \beta$, тобто $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ і $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$. Підставимо ці вирази для x і y у вище знайдену суму формул додавання. Отримаємо:

 $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ – *формула суми синусів.*

Замінимо в цій формулі β на $-\beta$:

$$\sin \alpha + \sin(-\beta) = 2 \sin \frac{\alpha + (-\beta)}{2} \cos \frac{\alpha - (-\beta)}{2}. \text{ Тоді:}$$

 $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ – *формула різниці синусів.*

Аналогічно можна отримати:

 $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ – *формула суми косинусів;*

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$
 – *формула різниці косинусів.*

Оскільки $\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \sin \left(-\frac{\beta - \alpha}{2} \right) = -\sin \frac{\beta - \alpha}{2}$, то останню формулу можна записати ще й так:

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Для суми тангенсів маємо:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

 $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ – *формула суми тангенсів.*

Замінивши в цій формулі β на $-\beta$ і врахувавши, що $\operatorname{tg}(-\beta) = -\operatorname{tg} \beta$, матимемо:

 $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ – *формула різниці тангенсів.*

Задача 1. Подати у вигляді добутку вираз:

1) $\sin 4\alpha + \sin 2\alpha$; 2) $\cos 6\alpha - \sin 2\alpha$.

• Розв'язання. 1) За формулою суми синусів:

$$\begin{aligned} \sin 4\alpha + \sin 2\alpha &= 2 \sin \frac{4\alpha + 2\alpha}{2} \cos \frac{4\alpha - 2\alpha}{2} = 2 \sin 3\alpha \cos \alpha. \\ 2) \text{ Використаємо формулу різниці косинусів, ураховуючи,} \\ \text{що за формулою зведення } \sin 2\alpha &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right). \text{ Матимемо:} \\ \cos 6\alpha - \sin 2\alpha &= \cos 6\alpha - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) = \\ &= -2 \sin \frac{6\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right)}{2} \sin \frac{6\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right)}{2} = \\ &= -2 \sin \frac{4\alpha + \frac{\pi}{2}}{2} \sin \frac{8\alpha - \frac{\pi}{2}}{2} = -2 \sin \left(2\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(4\alpha - \frac{\pi}{4} \right). \\ \text{Відповідь. 1) } &2 \sin 3\alpha \cos \alpha; \quad 2) -2 \sin \left(2\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(4\alpha - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Задача 2. Обчислити $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ$.

Розв'язання. За формулою різниці синусів маємо:

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ - \sin 15^\circ &= 2 \sin \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} = 2 \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \\ \text{Відповідь. } &\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Задача 3. Подати вираз $\sqrt{2} + 2 \cos \alpha$ у вигляді добутку.

Розв'язання. Спочатку винесемо число 2 за дужки та врахуємо, що $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$, далі використаємо формулу суми косинусів.

Маємо:

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \alpha \right) &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + \cos \alpha \right) = 2 \cdot 2 \cos \frac{\frac{\pi}{4} + \alpha}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{4} - \alpha}{2} = \\ &= 4 \cos \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

Відповідь. $4 \cos \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2} \right)$.

2. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

Додамо почленно формули додавання:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ + \quad \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \hline \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) &= 2 \cos \alpha \cos \beta.\end{aligned}$$

Звідси маємо:

 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$

Віднімемо почленно від першої формули додавання другу:

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta, \text{ звідси}$$

 $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$

Додамо почленно формули додавання:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ + \quad \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \hline \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) &= 2 \sin \alpha \cos \beta, \text{ звідси:}\end{aligned}$$

 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$

Отримали три *формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму*.

Задача 4. Обчислити $\sin 75^\circ \sin 105^\circ$.

Розв'язання. Перетворимо добуток синусів у суму:

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ \sin 105^\circ &= \frac{1}{2}(\cos(75^\circ - 105^\circ) - \cos(75^\circ + 105^\circ)) = \\ &= \frac{1}{2}(\cos(-30^\circ) - \cos 180^\circ) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - (-1)\right) = \frac{\sqrt{3} + 2}{4}.\end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{3} + 2}{4}$.

Задача 5. Спростити вираз: $2 \cos 7x \cos 5x - \cos 2x$.

Розв'язання. $2 \cos 7x \cos 5x - \cos 2x = 2 \cdot \frac{1}{2}(\cos(7x - 5x) + \cos(7x + 5x)) - \cos 2x = \cos 2x + \cos 12x - \cos 2x = \cos 12x.$

Відповідь. $\cos 12x$.

А ще раніше...

Потреба у перетвореннях добутку тригонометричних функцій у суму і навпаки залежала не лише від мети перетворень, а й від обчислювальних засобів, що використовувалися на той час. Для множення, особливо якщо мова йшла про багатоцифрові числа, завжди вважалася складнішою, ніж дія додавання. Тому в давні часи шукали формулі перетворення добутку тригонометричних величин у суму, щоб замінити множення додаванням.

У XVI ст. астрономи, у тому числі й попередник Кеплера, датський вчений Тихо Браге, вперше застосували формулу

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

для заміни добутку сумою. Для доведення тотожностей, обчислень тощо із цією ж метою їх застосовують і в наш час.



- Запишіть формулі суми й різниці синусів; суми й різниці косинусів; суми й різниці тангенсів.
- Запишіть формулі перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



Чи правильно застосовано формулі суми й різниці тригонометричних функцій (15.1–15.2):

15.1. 1) $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$;

2) $\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}$;

3) $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$;

4) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\cos(x+y)}{\cos x \cos y}$?

15.2. 1) $\cos x + \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}$;

2) $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$?

2) Перетворіть суму на добуток (15.3–15.6):

15.3. 1) $\sin 3\alpha + \sin 5\alpha$;

2) $\cos 4\alpha - \cos 2\alpha$;

3) $\sin 6\alpha - \sin 2\alpha$;

4) $\cos 7\alpha + \cos \alpha$.

15.4. 1) $\sin 8\alpha - \sin 2\alpha$;

2) $\cos 4\alpha + \cos 6\alpha$;

3) $\sin 7\alpha + \sin 3\alpha$;

4) $\cos 5\alpha - \cos \alpha$.

- 15.5.** 1) $\sin(12^\circ + \alpha) - \sin \alpha$; 2) $\cos(18^\circ + x) + \cos(12^\circ + x)$;
 3) $\cos 36^\circ - \cos 18^\circ$; 4) $\sin 70^\circ + \sin 20^\circ$.
- 15.6.** 1) $\cos(10^\circ + \beta) - \cos \beta$; 2) $\sin(\alpha + 10^\circ) + \sin(\alpha + 20^\circ)$;
 3) $\cos 25^\circ + \cos 35^\circ$; 4) $\sin 12^\circ - \sin 8^\circ$.

Доведіть, що (15.7–15.8):

15.7. 1) $\cos 21^\circ - \cos 39^\circ = \sin 9^\circ$; 2) $\sin 70^\circ + \sin 50^\circ = \sqrt{3} \cos 10^\circ$.

15.8. 1) $\sin 65^\circ - \sin 5^\circ = \cos 35^\circ$; 2) $\cos 61^\circ + \cos 1^\circ = \sqrt{3} \cos 31^\circ$.

Запишіть вираз у вигляді частки (15.9–15.10):

15.9. 1) $\operatorname{tg} 5\alpha - \operatorname{tg} \alpha$; 2) $\operatorname{tg} 18^\circ + \operatorname{tg} 12^\circ$.

15.10. 1) $\operatorname{tg} 4\alpha + \operatorname{tg} \alpha$; 2) $\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ$.

Перетворіть добуток у суму (15.11–15.12):

15.11. 1) $\sin 4\alpha \sin \alpha$; 2) $\cos 3x \cos 2x$; 3) $\sin 5\beta \cos \beta$;
 4) $\sin 20^\circ \sin 10^\circ$; 5) $\cos 11^\circ \cos 41^\circ$; 6) $\sin 4^\circ \cos 5^\circ$.

15.12. 1) $\sin 6x \sin x$; 2) $\cos 4\alpha \cos \alpha$; 3) $\sin \beta \cos 3\beta$;
 4) $\sin 16^\circ \sin 14^\circ$; 5) $\cos 8^\circ \cos 68^\circ$; 6) $\sin 12^\circ \cos 9^\circ$.

Обчисліть (15.13–15.14):

15.13. 1) $\sin 105^\circ \sin 15^\circ$; 2) $\cos 15^\circ \sin 75^\circ$.

15.14. 1) $\cos 75^\circ \cos 105^\circ$; 2) $\sin 15^\circ \cos 105^\circ$.

 Спростіть вираз (15.15–15.16):

15.15. 1) $\frac{\sin 3\alpha + \sin 7\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 7\alpha}$; 2) $\frac{\sin 9\alpha - \sin \alpha}{\cos 9\alpha - \cos \alpha}$.

15.16. 1) $\frac{\cos 5\alpha - \cos 3\alpha}{\sin 5\alpha + \sin 3\alpha}$; 2) $\frac{\sin 14\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 14\alpha + \cos 2\alpha}$.

Запишіть у вигляді добутку (15.17–15.20):

15.17. 1) $\sin 10^\circ + \cos 18^\circ$; 2) $\cos 40^\circ - \sin 20^\circ$.

15.18. 1) $\cos 32^\circ + \sin 40^\circ$; 2) $\sin 50^\circ - \cos 70^\circ$.

15.19. 1) $\sin \alpha - \cos \beta$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \sin \alpha$.

15.20. 1) $\cos \alpha + \sin \beta$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \cos \alpha$.

 **15.21.** Доведіть формули суми і різниці котангенсів:

1) $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$; 2) $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$.

Запишіть вираз у вигляді частки (15.22–15.23):

15.22. 1) $\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x$; 2) $\operatorname{ctg} 18^\circ + \operatorname{ctg} 12^\circ$.

15.23. 1) $\operatorname{ctg} 3\alpha + \operatorname{ctg} \alpha$; 2) $\operatorname{ctg} 50^\circ - \operatorname{ctg} 5^\circ$.

Подайте вираз у вигляді добутку (15.24–15.25):

15.24. 1) $\sin^2 40^\circ - \sin^2 20^\circ$; 2) $\cos^2 70^\circ - \cos^2 50^\circ$.

15.25. 1) $\sin^2 80^\circ - \sin^2 40^\circ$; 2) $\cos^2 10^\circ - \cos^2 50^\circ$.

Доведіть тотожність (15.26–15.27):

15.26. 1) $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$;

2) $\frac{\sin 6\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 6\alpha - \cos 2\alpha} = -\operatorname{ctg} 2\alpha$;

3) $\frac{\sin 9\alpha - \sin \alpha + \sin 4\alpha}{\cos 9\alpha + \cos \alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$;

4) $\frac{\sin \alpha + \sin 5\alpha + \sin 9\alpha + \sin 13\alpha}{\cos \alpha + \cos 5\alpha + \cos 9\alpha + \cos 13\alpha} = \operatorname{tg} 7\alpha$.

15.27. 1) $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$; 2) $\frac{\cos \beta + \cos 5\beta}{\sin 5\beta - \sin \beta} = \operatorname{ctg} 2\beta$;

3) $\frac{\sin 15\alpha - \sin \alpha + \sin 7\alpha}{\cos 15\alpha + \cos \alpha + \cos 7\alpha} = \operatorname{tg} 7\alpha$;

4) $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x} = \operatorname{tg} 4x$.

Подайте вираз у вигляді добутку (15.28–15.29):

15.28. 1) $\frac{1}{2} + \cos \alpha$; 2) $2 \sin \alpha - 1$;

3) $\sqrt{3} - 2 \cos \alpha$; 4) $4 \sin \alpha + 2\sqrt{2}$.

15.29. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin \alpha$; 2) $\sqrt{2} + 2 \cos x$.

Подайте вираз у вигляді частки (15.30–15.31):

15.30. 1) $\operatorname{tg} \alpha + 1$; 2) $3 \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{3}$.

15.31. 1) $1 - \operatorname{tg} \alpha$; 2) $\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha + 3$.

Доведіть тотожність (15.32–15.33):

15.32. 1) $\cos \left(\frac{\pi}{14} - 2\alpha \right) \cos \left(2\alpha - \frac{4\pi}{7} \right) = \frac{1}{2} \cos \left(4\alpha - \frac{9\pi}{14} \right)$;

2) $4 \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) = 1 - 4 \cos^2 \alpha$.

15.33. 1) $\sin\left(3\alpha - \frac{\pi}{10}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{5} - 3\alpha\right) = \frac{1}{2}\cos\left(6\alpha - \frac{7\pi}{10}\right);$
 2) $2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 2\cos^2 \alpha - 1.$

15.34. Перетворіть на добуток вираз:

- 1) $\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha;$
- 2) $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \sin 8\alpha.$

Спростіть вираз (**15.35–15.36**):

15.35. 1) $\frac{\sin \alpha + 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha};$ 2) $\frac{\sin 5\alpha - 2\sin 3\alpha \cos 3\alpha}{2\sin^2 3\alpha + \cos 5\alpha - 1}.$
15.36. 1) $\frac{\sin 4\alpha + 2\cos 3\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha - 2\sin 3\alpha - \cos 2\alpha};$ 2) $\frac{2\sin 2\alpha \cos 2\alpha + \sin 5\alpha}{2\cos^2 2\alpha + \cos 5\alpha - 1}.$



Обчисліть (**15.37–15.38**):

15.37. 1) $2\cos 80^\circ \cos 50^\circ + \sin 140^\circ;$ 2) $4\cos 40^\circ - \frac{1}{\sin 70^\circ}.$
15.38. 1) $2\sin 70^\circ \sin 50^\circ + \cos 160^\circ;$ 2) $4\sin 10^\circ + \frac{1}{\cos 40^\circ}.$

Спростіть вираз (**15.39–15.40**):

15.39. 1) $\cos^2 x + \cos^2 y - \cos(x - y)\cos(x + y);$
 2) $\sin^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{3\pi}{8}\right);$
 3) $\left(\frac{1}{\sin 3\alpha} + \frac{1}{\sin \alpha}\right)\left(\frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 4\alpha}{\cos \alpha}\right);$
 4) $\frac{(\cos \alpha - \cos 3\alpha)(\sin \alpha + \sin 3\alpha)}{1 - \cos 4\alpha}.$

15.40. 1) $\sin^2 x + \sin^2 y + \cos(x + y)\cos(x - y);$
 2) $\left(\frac{1}{\cos 3\alpha} - \frac{1}{\cos \alpha}\right)\left(\frac{\cos 4\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin 4\alpha}{\cos \alpha}\right).$

Доведіть тотожність (**15.41–15.42**):

15.41. 1) $1 - \cos x + \sin x = 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right);$
 2) $1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$

15.42. $1 - \cos x - \sin x = -2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$



Життєва математика

15.43. Військовий збір у 2016 році складав 1,5 % від заробітної плати. Заробітна плата директора приватного підприємства «Патріот» протягом року становила 8000 грн на місяць, а кожного з трьох його робітників – по 6000 грн на місяць. окрім військового збору, щомісяця директор перераховував 500 грн, а кожний з його робітників – по 300 грн у фонд на підтримку української армії. Яку загальну суму коштів сплатили робітники цього приватного підприємства у 2016 році на потреби української армії?



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

15.44. Чи існує таке значення x , що:

- | | | |
|---|--------------------|--------------------------------|
| 1) $\sin x = 1,7;$ | 2) $\cos x = 0,8;$ | 3) $\sin x = -0,4;$ |
| 4) $\operatorname{tg} x = \frac{4}{7};$ | 5) $\cos x = -2;$ | 6) $\operatorname{ctg} x = 5?$ |

15.45. Укажіть значення кута α , де $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, для якого справдіжується рівність:

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2};$ | 2) $\cos \alpha = \frac{1}{2};$ | 3) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}};$ |
| 4) $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3};$ | 5) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2};$ | 6) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$ |

§ 16. НАЙПРОСТИШІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ



Рівняння, що містить змінну під знаком тригонометричної функції, називають *тригонометричним рівнянням*.

Такі рівняння ми вже розглядали у вправах 7.23–7.26, де шукали їх окремі розв’язки. Тригонометричними є також рівняння $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin x - \cos x = 0$; $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3}$ тощо.

У цьому параграфі навчимося знаходити розв’язки найпростіших тригонометричних рівнянь, для чого спочатку ознайомимося з оберненими тригонометричними функціями та поняттями арксинуса, арккосинуса, арктангенса і арккотангенса.

1. Обернені тригонометричні функції



Арксинусом числа a , де $-1 \leq a \leq 1$, називають такий кут із проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює a .

Позначають арксинус числа a через $\arcsin a$. З означення арксинуса випливає, що



$x = \arcsin a$ тоді і тільки тоді, коли:

$$1) x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \quad 2) \sin x = a.$$

Наприклад, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, бо $\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin \frac{\pi}{2} = 1$;

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, бо $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Арккосинусом числа a , де $-1 \leq a \leq 1$, називають такий кут із проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює a .

Позначають арккосинус числа a через $\arccos a$. З означення арккосинуса випливає, що



$x = \arccos a$ тоді і тільки тоді, коли:

$$1) x \in [0; \pi]; \quad 2) \cos x = a.$$

Наприклад, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, бо $\frac{\pi}{2} \in [0; \pi]$ і $\cos \frac{\pi}{2} = 0$;

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, бо $\frac{2\pi}{3} \in [0; \pi]$ і $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Кілька найчастіше вживаних значень арксинуса і арккосинуса подамо у таблиці (їх ще називають *табличними значеннями*):

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos a$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0



Арктангенсом числа a , де $a \in R$, називають такий кут із проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a .

Позначають арктангенс числа a через $\operatorname{arctg} a$. З означення арктангенса випливає, що



$\operatorname{arctg} a = x$ тоді і тільки тоді, коли:

$$1) x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); \quad 2) \operatorname{tg} x = a.$$

Наприклад, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, оскільки $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$;

$$\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}, \text{ оскільки } -\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ і } \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$



Арккотангенсом числа a , де $a \in R$, називають такий кут із проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює a .

Позначають арккотангенс числа a через $\operatorname{arcctg} a$. З означення арккотангенса випливає, що



$\operatorname{arcctg} a = x$ тоді і тільки тоді, коли:

$$1) x \in (0; \pi); \quad 2) \operatorname{ctg} x = a.$$

Наприклад, $\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, оскільки $\frac{\pi}{6} \in (0; \pi)$ і $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$;

$$\operatorname{arcctg} (-1) = \frac{3\pi}{4}, \text{ оскільки } \frac{3\pi}{4} \in (0; \pi) \text{ і } \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} = -1.$$

Кілька найчастіше вживаних значень арктангенса і арккотангенса подамо у таблиці:

a	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} a$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} a$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Якщо тригонометричні вирази містять табличні значення, значення таких виразів легко обчислити.



Задача 1. Знайти значення виразу:

$$1) \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \operatorname{arctg} (-1); \quad 2) \cos\left(\arcsin \frac{1}{2}\right).$$



$$\text{Розв'язання. } 1) \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \operatorname{arctg} (-1) =$$

$$= \frac{5\pi}{6} + 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 3 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} = \frac{10\pi + 6\pi + 9\pi}{12} = \frac{25\pi}{12}.$$

2) Оскільки $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, то $\cos\left(\arcsin \frac{1}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

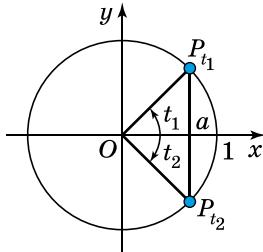
Відповідь. 1) $\frac{25\pi}{12}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Найпростіші тригонометричні рівняння

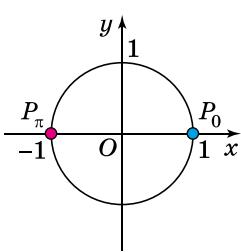
Рівняння вигляду $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\tg x = a$, $\ctg x = a$, x – змінна, $a \in R$, називають **найпростішими тригонометричними рівняннями**. Розглянемо, як їх розв'язати.

Рівняння $\cos t = a$.

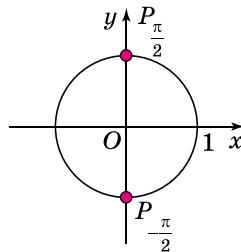
Якщо $a < -1$ або $a > 1$, то рівняння $\cos t = a$ розв'язків не має, оскільки $|\cos t| \leq 1$ для будь-якого значення t . Нехай $-1 \leq a \leq 1$. Тоді рівняння $\cos t = a$ має розв'язки, які проілюструємо на одиничному колі. За означенням, $\cos t$ – це абсциса точки P_t на одиничному колі. Для розв'язання рівняння $\cos t = a$ треба на одиничному колі знайти кути, косинус яких дорівнює a , тобто знайти такі точки, абсциси яких дорівнюють a . Якщо $|a| < 1$, то таких точок дві (мал. 16.1 і 16.3), кожній з яких відповідає певний кут t_1 і t_2 . А якщо $a = 1$ або $a = -1$, то одна (мал. 16.2).



Мал. 16.1



Мал. 16.2



Мал. 16.3

Оскільки $t_1 \in [0; \pi]$ і $\cos t_1 = a$, тому $t_1 = \arccos a$, тоді $t_2 = -t_1 = -\arccos a$. Враховуючи, що функція $y = \cos x$ є періодичною з найменшим додатним періодом 2π , розв'язками рівняння будуть також усі кути вигляду $t_1 + 2\pi k$ і $t_2 + 2\pi k$. Отже, маемо формули для коренів рівняння $\cos t = a$:

$t = \arccos a + 2\pi k$, $k \in Z$ та $t = -\arccos a + 2\pi k$, $k \in Z$,

які легко об'єднати в одну:



$$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z.$$

(1)

Рівняння $\cos t = a$, якщо $a = -1$, $a = 0$, $a = 1$, можна не розв'язувати за формулою (1), а знайти його розв'язки за допомогою одиничного кола:

1) $\cos t = -1$, то $t = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$ (мал. 16.2);

2) $\cos t = 0$, то $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ (мал. 16.3);

3) $\cos t = 1$, то $t = 2\pi k$, $k \in Z$ (мал. 16.2).

Рівняння $\cos t = 1$, $\cos t = 0$, $\cos t = -1$ прийнято ще називати **частковими випадками** рівняння $\cos t = a$.

Подамо розв'язки рівняння $\cos t = a$ у вигляді таблиці:

$\cos t = a$				
$ a > 1$	$ a \leq 1$			
розв'язків немає	$a \neq 0$; $a \neq \pm 1$	$a = 0$	$a = 1$	$a = -1$
	$t = \pm \arccos a + 2\pi k$, $k \in Z$	$t = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$	$t = 2\pi k$, $k \in Z$	$t = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$

Задача 3. Розв'язати рівняння:

$$1) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 2) \cos 4x = 0; \quad 3) \cos x = \frac{\pi}{3}; \quad 4) \cos x = \frac{1}{7}.$$

• Розв'язання. 1) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\left| -\frac{\sqrt{3}}{2} \right| < 1$. За формулою (1):

• $x = \pm \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2\pi k$, $k \in Z$, тобто $x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

• Відповідь. $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

• 2) $\cos x = \frac{\pi}{3}$; оскільки $\frac{\pi}{3} \approx \frac{3,14}{3} > 1$, то розв'язків немає.

• Відповідь. \emptyset .

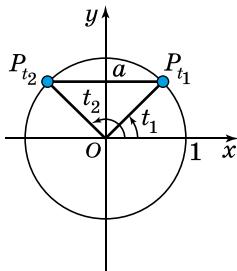
• 3) $\cos x = \frac{1}{7}$; $\left| \frac{1}{7} \right| < 1$, тоді: $x = \pm \arccos \frac{1}{7} + 2\pi k$, $k \in Z$. Значен-

ня $\arccos \frac{1}{7}$ можна знайти лише наблизено (наприклад, за допомогою калькулятора). Для прикладних задач значення $\arccos \frac{1}{7}$ знаходять наблизено: $\arccos \frac{1}{7} \approx 1,4274$, і розв'язок записують наблизено: $x \approx \pm 1,4274 + 2\pi k$, $k \in Z$.

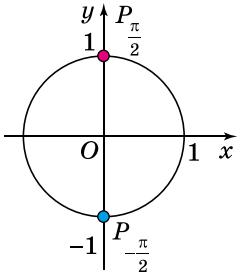
- У математиці ж у відповідь прийнято записувати точний розв'язок: $x = \pm \arccos \frac{1}{7} + 2\pi k, k \in Z$.
- Відповідь. $\pm \arccos \frac{1}{7} + 2\pi k, k \in Z$.
- 4) $\cos 4x = 0$;
 $4x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$;
 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z$.
- Відповідь. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z$.

Рівняння $\sin t = a$.

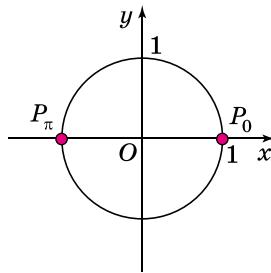
Якщо $a < -1$ або $a > 1$, то рівняння $\sin t = a$ розв'язків не має, оскільки $-1 \leq \sin t \leq 1$ для будь-якого значення t . Нехай $-1 \leq a \leq 1$. Тоді рівняння має розв'язки. Проялюструємо розв'язування рівняння $\sin t = a$ на одиничному колі. За означенням, $\sin t$ – це ордината точки P_t одиничного кола. Для розв'язання рівняння $\sin t = a$ треба на одиничному колі знайти такі кути, синус яких дорівнює a , тобто такі точки, ординати яких дорівнюють a . Якщо $-1 < a < 1$, то таких точок дві (мал. 16.4 і 16.6), кожній з яких відповідає певний кут t_1 і t_2 . Якщо $a = 1$ або $a = -1$, то така точка єдина (мал. 16.5).



Мал. 16.4



Мал. 16.5



Мал. 16.6

Маємо, що: $t_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ і $\sin t_1 = a$, тому $t_1 = \arcsin a$, тоді

$t_2 = \pi - t_1 = \pi - \arcsin a$. Враховуючи, що функція $y = \sin x$ є періодичною з найменшим додатним періодом 2π , маємо формули для коренів рівняння $\sin t = a$:

$$t_1 = \arcsin a + 2\pi n, n \in Z, \text{ і } t_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z.$$

Ці розв'язки рівняння $\sin t = a$ можна об'єднати в одну формулу:



$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z. \quad (2)$$

Дійсно, якщо у формулу (2) підставити парне k , тобто $k = 2n, n \in Z$, матимемо, що $t = \arcsin a + 2\pi n$. Якщо ж підставити непарне k , тобто $k = 2n + 1, n \in Z$, матимемо, що $t = \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$.

Якщо $a = -1, a = 0, a = 1$, рівняння $\sin t = a$ можна не розв'язувати за формулою (2), а, як і у випадку рівняння $\cos t = a$, знайти розв'язки за допомогою одиничного кола. А саме, якщо:

- 1) $\sin t = -1$, то $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ (мал. 16.5);
- 2) $\sin t = 0$, то $t = \pi k, k \in Z$ (мал. 16.6);
- 3) $\sin t = 1$, то $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ (мал. 16.5).

Рівняння $\sin t = -1, \sin t = 1, \sin t = 0$ прийнято називати *частковими випадками* рівняння $\sin t = a$.

Подамо розв'язки рівняння $\sin t = a$ у вигляді таблиці:

$\sin t = a$				
$ a > 1$	$ a \leq 1$			
розв'язків немає	$a \neq 0; a \neq \pm 1$	$a = 0$	$a = 1$	$a = -1$
	$t = (-1)^n \arcsin a + \pi k, k \in Z$	$t = \pi k, k \in Z$	$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$	$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

Задача 2. Розв'язати рівняння: 1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$2) \sin x = -\frac{1}{2}; \quad 3) \sin x = -1, 2; \quad 4) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

• Розв'язання. 1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1$. За формулою (2):

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, k \in Z, \text{ тобто } x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

• Відповідь. $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

$$2) \sin x = -\frac{1}{2}; \left|-\frac{1}{2}\right| < 1, \text{ тоді: } x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k, k \in Z,$$

тобто $x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \pi k$, $k \in Z$. Оскільки $-\frac{\pi}{6} = (-1) \cdot \frac{\pi}{6}$, то

$(-1)^k \cdot (-1) \cdot \frac{\pi}{6} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6}$, тому $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

Відповідь. $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

3) $\sin x = -1, 2$; $| -1, 2 | > 1$, тому рівняння не має розв'язків.

Відповідь. \emptyset .

4) $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1$;

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z.$$

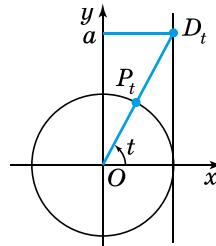
Відповідь. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Рівняння $\operatorname{tg} t = a$.

Оскільки $\operatorname{tg} t$ може набувати будь-яких дійсних значень, то рівняння $\operatorname{tg} t = a$ має розв'язки для будь-якого a .

Для розв'язування рівняння $\operatorname{tg} t = a$ на лінії тангенсів (див. § 9, п. 3) знайдемо такий кут, тангенс якого дорівнює a , тобто точку D_t , ордината якої дорівнює a (мал. 16.7), така точка єдина. Пряма OD_t перетинає одиничне коло у точці P_t . Кут t такий, що $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ і $\operatorname{tg} t = a$, тому $t = \operatorname{arctg} a$.

Оскільки функція $y = \operatorname{tg} x$ періодична з найменшим додатним періодом π , то розв'язками рівняння будуть і всі кути вигляду $t + \pi k$, $k \in Z$. Отже, маємо формулу коренів рівняння $\operatorname{tg} t = a$:



Мал. 16.7

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in Z. \quad (3)$$

Задача 4. Розв'язати рівняння:

1) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg} 2x = 5$.

Розв'язання.

- 1) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$;
- $x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi k, k \in Z$;
- $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.
- Відповідь. $-\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

$$2) 2x = \operatorname{arctg} 5 + \pi k, k \in Z.$$

Поділивши ліву і праву частини рівняння на 2, знайдемо, що $x = \frac{\operatorname{arctg} 5}{2} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

Таку відповідь прийнято записувати у вигляді:

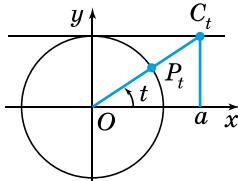
$$x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

$$\text{Відповідь. } \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

Рівняння $\operatorname{ctg} t = a$.

Оскільки $\operatorname{ctg} t$ може набувати будь-яких дійсних значень, то рівняння $\operatorname{ctg} t = a$ має розв'язки для будь-якого a .

Міркуючи, як і у випадку рівняння $\operatorname{tg} t = a$ та використовуючи лінію котангенсів (мал. 16.8), отримаємо формулу коренів рівняння $\operatorname{ctg} t = a$:



Мал. 16.8



$$t = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in Z. \quad (4)$$

Задача 5. Розв'язати рівняння:

$$1) \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad 2) \operatorname{ctg}(x + 40^\circ) = -1.$$

Розв'язання.

- 1) $x - \frac{\pi}{3} = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k, k \in Z;$
- $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z;$
- $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z;$
- $x = \frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$

Відповідь. 1) $\frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

2) Очевидно, що кут x задано в градусах. Тому, враховуючи, що $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$,

$\pi k = 180^\circ k, k \in Z$, матимемо:

$$\begin{aligned} x + 40^\circ &= 135^\circ + 180^\circ k; \\ x &= 135^\circ - 40^\circ + 180^\circ k; \\ x &= 95^\circ + 180^\circ k, k \in Z. \end{aligned}$$

Відповідь. $95^\circ + 180^\circ k, k \in Z$.

6. Тригонометричні рівняння, які зводяться до найпростіших

За допомогою перетворень тригонометричних виразів розв'язування тригонометричних рівнянь, що не є найпростішими, можна звести до розв'язування найпростіших рівнянь. Розглянемо це на прикладах.

Задача 6. Розв'язати рівняння:

$$1) 4 \operatorname{tg} \left(-\frac{x}{3} \right) + 4\sqrt{3} = 0; \quad 2) \sin x \cos x = -\frac{1}{2}$$

• Розв'язання.

1) Оскільки $\operatorname{tg} \left(-\frac{x}{3} \right) = -\operatorname{tg} \frac{x}{3}$,

маємо: $-4 \operatorname{tg} \frac{x}{3} + 4\sqrt{3} = 0;$

$$4 \operatorname{tg} \frac{x}{3} = 4\sqrt{3};$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{3} = \sqrt{3};$$

$$\frac{x}{3} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k, k \in Z;$$

$$\frac{x}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z;$$

$$x = \pi + 3\pi k, k \in Z.$$

2) Помножимо ліву і праву частини рівняння на 2, матимемо: $2 \sin x \cos x = -1$.

Оскільки $2 \sin x \cos x = \sin 2x$, отримаємо рівняння:

$$\sin 2x = -1.$$

Розв'яжемо його:

$$2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z;$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Відповідь. $\pi + 3\pi k, k \in Z$.



- Які рівняння називають тригонометричними? • Що називають арксинусом числа a ; аркосинусом числа a ; арктангенсом числа a ; арккотангенсом числа a ? • Запишіть формулі для розв'язування рівняння $\cos t = a$ у загальному випадку та для часткових випадків. • Запишіть формулі для розв'язування рівняння $\sin t = a$ у загальному випадку та для часткових випадків. • Запишіть формулу для розв'язування рівняння $\operatorname{tg} t = a$. • Запишіть формулу для розв'язування рівняння $\operatorname{ctg} t = a$.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



Чи має корені рівняння (16.1–16.2):

- 16.1. 1) $\sin x = \frac{1}{3}$; 2) $\cos x = \sqrt{2}$; 3) $\operatorname{tg} x = -1$;
4) $\cos x = -\frac{1}{8}$; 5) $\sin x = \frac{\pi}{6}$; 6) $\operatorname{ctg} x = 4$?

- 16.2.** 1) $\cos x = -\frac{\pi}{3}$; 2) $\sin x = -0,8$; 3) $\operatorname{tg} x = 2$;
 4) $\sin x = 1,4$; 5) $\cos x = \frac{2}{3}$; 6) $\operatorname{ctg} x = -3$?

Знайдіть за допомогою таблиць (с. 146–147) (16.3–16.4):

- 16.3.** 1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;
 3) $\operatorname{arctg} 0$; 4) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

- 16.4.** 1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arccos(-1)$;
 3) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 4) $\operatorname{arcctg} 1$.

(2) Обчисліть (16.5–16.6):

16.5. 1) $\arcsin\frac{1}{2} - \arccos 0$; 2) $\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \operatorname{arcctg}(-1)$.

16.6. 1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arcctg} 0$.

Знайдіть значення виразу (16.7–16.8):

16.7. 1) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; 2) $\operatorname{tg}(\arccos 1)$.

16.8. 1) $\operatorname{tg}(\arcsin 0)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

Розв'яжіть рівняння (16.9–16.12):

- 16.9.** 1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x = 0$; 3) $\sin x = \frac{9}{8}$;
 4) $\cos x = \frac{1}{2}$; 5) $\cos x = -1$; 6) $\cos x = -1,2$;
 7) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 8) $\operatorname{ctg} x = 1$.

- 16.10.** 1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = -1$; 3) $\sin x = -1,8$;
 4) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\cos x = 1,4$; 6) $\cos x = 0$;
 7) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 8) $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

16.11. 1) $\sin 2x = 1$; 2) $\cos \frac{x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
 3) $\operatorname{tg} 4x = 0$; 4) $\operatorname{ctg} 0,5x = -1$.

16.12. 1) $\sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$; 2) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 3) $\operatorname{tg} \frac{x}{4} = 1$; 4) $\operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Знайдіть усі корені рівняння (16.13–16.16):

16.13. 1) $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$; 2) $\cos \left(x - \frac{\pi}{8} \right) = 1$;
 3) $\operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = -1$; 4) $\operatorname{ctg} \left(4x + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3}$.

16.14. 1) $\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -1$; 2) $\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 0$.

16.15. 1) $\sin x = \frac{1}{3}$; 2) $\cos x = -0,2$;
 3) $\operatorname{tg} x = 4$; 4) $\operatorname{ctg} x = -3$.

16.16. 1) $\sin x = -0,1$; 2) $\cos x = \frac{1}{8}$;
 3) $\operatorname{tg} x = -2$; 4) $\operatorname{ctg} x = 0,01$.

 Знайдіть область визначення функції (16.17–16.18):

16.17. 1) $y = \frac{3}{\sin 4x + 1}$; 2) $y = \frac{4}{2 \cos x + \sqrt{3}}$;
 3) $y = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) - \sqrt{3}}$; 4) $y = \frac{2}{5 \operatorname{ctg} 2x + 5}$.

16.18. 1) $y = \frac{2}{3 \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - 3}$; 2) $y = \frac{4}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{6} - 1}$.

Розв'яжіть рівняння (16.19–16.23):

16.19. 1) $\cos(2x + 30^\circ) = -1$; 2) $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{4} - 15^\circ \right) = \sqrt{3}$.

16.20. 1) $\sin(2x - 10^\circ) = 1$; 2) $\operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2} + 35^\circ \right) = -1$.

16.21. 1) $3 \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) + 3 = 0$; 2) $2 \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) - \sqrt{3} = 0$.

16.22. 1) $\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)} = 3$; 2) $\frac{5\sqrt{3}}{\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} = -5$.

16.23. 1) $5 \cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) - 5 = 0$; 2) $\frac{4}{\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{8}\right)} = -4$.

16.24. Запишіть хоча б одне рівняння, розв'язками якого є числа:

- | | |
|---|---|
| 1) πk , $k \in Z$; | 2) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; |
| 3) $2\pi k$, $k \in Z$; | 4) $\pi + 2\pi k$, $k \in Z$; |
| 5) $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; | 6) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. |

Використовуючи тригонометричні формули, зведіть рівняння до найпростішого і розв'яжіть його (**16.25–16.26**):

16.25. 1) $\sin 4x \cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{4}$; 2) $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$;

3) $\sin 4x \cos x - \cos 4x \sin x = \frac{1}{2}$; 4) $\sin^2 \frac{x}{3} = \frac{3}{4}$.

16.26. 1) $4 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} = 1$; 2) $2 \cos^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) - 2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 2$;

3) $\sin 5x \cos 3x + \cos 5x \sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos^2 \frac{3x}{2} = \frac{1}{2}$.

 Розв'яжіть рівняння (**16.27–16.28**):

16.27. 1) $\cos x^2 = 1$; 2) $\operatorname{tg} \frac{2}{x} = -\sqrt{3}$.

16.28. 1) $\sin \sqrt{x} = 1$; 2) $\operatorname{ctg} \frac{4}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

16.29. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння:

1) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

16.30. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$; 2) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16.31. Знайдіть найменший додатний і найбільший від'ємний корені рівняння $\sin\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) = -1$.

16.32. Розв'яжіть рівняння $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$ та знайдіть ті його корені, що належать проміжку $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

16.33. При яких значеннях a має корені рівняння:

$$1) \sin \frac{x}{5} = \sqrt{a+5};$$

$$2) (a-1) \cos x = a^2 - 1?$$

Життєва математика

16.34. Ви хочете орендувати автомобіль на одну добу для поїздки на відстань 400 км. У таблиці наведено характеристики трьох автомобілів та вартість їх оренди. Крім оренди, ви можете оплатити паливо для автомобіля на всю поїздку. Скільки коштуватиме ця поїздка, якщо ви виберете найдешевший варіант?

Вартість дизельного палива – 20 грн за літр, бензину – 22 грн за літр, газу – 12 грн за літр.

Автомобіль	Паливо	Витрата палива (л на 100 км)	Орендна плата (грн за добу)
А	Дизельне	7	500
Б	Бензин	10	400
В	Газ	14	450



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

16.35. Дано функцію: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

- 1) Знайдіть її область визначення та побудуйте її графік.
- 2) Чи можна знайти $f(2)$?
- 3) Знайдіть за допомогою калькулятора $f(1,9)$, $f(1,99)$, $f(1,999)$ та $f(2,001)$, $f(2,01)$, $f(2,1)$. До якого значення наближаються значення функцій у зазначених точках?

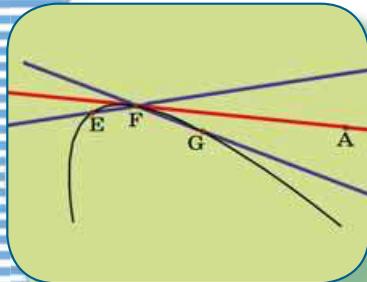
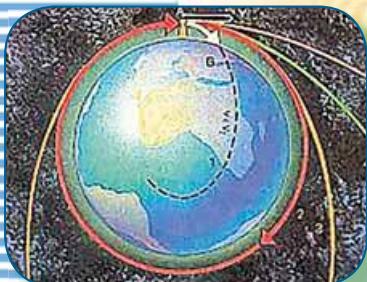
16.36. Для яких з наведених функцій можна знайти $f(1)$, а для яких – ні:

$$1) f(x) = 2x + 7; \quad 2) f(x) = \frac{x-1}{x+1}; \quad 3) f(x) = \frac{x+1}{x-1};$$

$$4) f(x) = \frac{4x}{1-x^2}; \quad 5) f(x) = \frac{x-1}{x^3-1}; \quad 6) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+5}?$$

РОЗДІЛ 3

ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ



У ЦЮМОУ РОЗДІЛІ МИ

- **ознайомимося** з поняттям границі функції в точці, похідної, таблицею похідних;
- **дізнаємося** про геометричний і фізичний зміст похідної, правила обчислення похідних;
- **навчимося** застосовувати похідну для дослідження функцій і побудови їх графіків, розв'язування прикладних задач.

§ 17. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ В ТОЧКІ

1. Поняття граници функції в точці

Розглянемо функцію $f(x) = x - 1$. Знайдемо її значення в точці $x = 3$, отримаємо: $f(3) = 3 - 1 = 2$.

Складемо таблицю значень функції $f(x) = x - 1$ у точках, які на числовій прямій лежать досить близько до числа 3.

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	3,0001	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	1,9999	2,0001	2,001	2,01	2,1

З таблиці помічаємо, що чим ближче аргумент x до числа 3, тим ближче значення функції в цій точці до числа 2.

У такому разі, кажуть, що якщо *аргумент прямує до числа 3* (позначають так: $x \rightarrow 3$), то *значення функції прямує до числа 2* (позначають так: $f(x) \rightarrow 2$). Для запису цього факту використовують позначення \lim , а саме, $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 1) = 2$ (читають:

«ліміт (або границя) $x - 1$ при x , що прямує до 3, дорівнює 2»). Число 2 при цьому називають *граничою функції $f(x) = x - 1$ у точці 3*. Позначення \lim прийшло в математику від латинського слова *limes*, що означає «границя».

У загальному випадку запис $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ означає, що границя функції $y = f(x)$ у точці x_0 дорівнює числу A .

Зауважимо, що у прикладі, який ми щойно розглянули, границя функції $f(x) = x - 1$ у точці 3 дорівнює значенню функції в цій точці. У цьому випадку кажуть, що функція $f(x) = x - 1$ *неперервна* в точці 3.



Функцію $y = f(x)$ називають неперервною в точці x_0 , якщо вона визначена в цій точці і виконується рівність $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Зауважимо, що це означення не суперечить інтуїтивно зрозумілому поняттю неперервності функції, даному у п. 3 § 2.

Зверніть увагу, що *всі відомі нам раніше функції неперервні в кожній точці своєї області визначення*.

Наприклад, функція $f(x) = 3x^7 - 5x^2 + 4x - 11$ неперервна для всіх значень x (іншими словами, функція *неперервна на R*), а функція $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ неперервна для всіх значень x ,

за винятком значення $x = 2$. Нагадаємо, що у цьому випадку кажуть, що функція $g(x)$ неперервна на кожному з проміжків $(-\infty; 2)$ і $(2; +\infty)$, а в точці $x = 2$ має *роздріб*.

Незважаючи на те, що функція $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ в точці $x = 2$ має розрив, границю функції в цій точці знайти можна.

Приклад 1. Розглянемо функцію $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, значення якої в точці $x = 2$ не існує. Складемо таблицю значень цієї функції в точках, які на числовій прямій розташовані досить близько до числа 2.

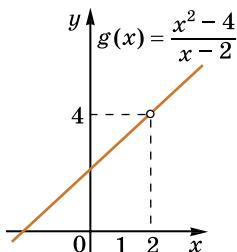
x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2,0001	2,001	2,01	2,1
$g(x)$	3,9	3,99	3,999	3,9999	4,0001	4,001	4,01	4,1

Отже, чим ближче аргумент x до числа 2, тим ближче значення функції $g(x)$ до числа 4. Запишемо це так: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

Такого висновку можна дійти і розглянувши графік функції $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

$D(g): x \neq 2$. Спростимо формулу функції на $D(g)$, маємо: $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$.

Отже, графіком функції $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ є пря-



Мал. 17.1

ма $y = x + 2$ з «порожньою» точкою $(2; 4)$ (мал. 17.1). По графіку бачимо, що при наближенні аргументу x до числа 2 значення функції наближається до числа 4.

2. Означення границі функції в точці

Повернемося до п. 1 параграфа. Запис $x \rightarrow 3$ означає, що відстань між точками x і 3 є дуже малою; наприклад, меншою за якесь до-

датне число δ , тобто $|x - 3| < \delta$. Зауважимо, що запис $x \rightarrow 3$ означає, що x саме прямує до числа 3, але не обов'язково досягає значення 3. Тому в означенні границі функції в точці не розглядають значення функції в цій точці.

Запис $f(x) \rightarrow 2$ означає, що коли $x \rightarrow 3$, відстань між значеннями функції і точкою 2 є дуже малою, наприклад, меншою за деяке додатне число ε , тобто $|f(x) - 2| < \varepsilon$.

Для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке значення $\delta > 0$, що для всіх x таких, що $x \neq 3$ і $|x - 3| < \delta$, справді жуватиметься нерівність: $|f(x) - 2| < \varepsilon$.

Дійсно, нехай, наприклад, $\varepsilon = 0,02$, тоді $|f(x) - 2| < 0,02$. Оскільки $f(x) = x - 1$, маємо: $|x - 1 - 2| < 0,02$, тобто $|x - 3| < 0,02$, отже, $\delta = 0,02$.

Сформулюємо означення границі функції в точці.



Число A називають границею функції $y = f(x)$ в точці x_0 , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що для всіх $x \neq x_0$ таких, що $|x - x_0| < \delta$, справджується нерівність: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Задача 1. Довести за означенням, що $\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 1) = 4$.

- Розв'язання. Розглянемо $\varepsilon > 0$ таке, що $|(5x - 1) - 4| < \varepsilon$.
- Маємо: $|5x - 5| < \varepsilon$;
- $|5(x - 1)| < \varepsilon$;
- $5|x - 1| < \varepsilon$;
- $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{5}$.
- Позначивши $\frac{\varepsilon}{5} = \delta$, отримаємо: $|x - 1| < \delta$. Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайшлося таке $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, що для всіх значень x таких, що $x \neq 1$, які задовольняють умову $|x - 1| < \delta$, справджується нерівність: $|(5x - 1) - 4| < \varepsilon$. Отже, за означенням, $\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 1) = 4$.

Зауважимо, що оскільки функція $f(x) = 5x - 1$ є неперевною на R , зокрема і в точці 1, то значення границі дорівнює значенню функції $f(x)$ в точці $x = 1$, тому $\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 1) = f(1) = 5 \cdot 1 - 1 = 4$.

3. Правила обчислення граници функції в точці

Розглянемо основні властивості граници функції в точці.

Властивість 1. $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

Властивість 2. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ мають граници в точці x_0 , то в цій точці існують граници їх суми, різниці і добутку, причому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Властивість 3. $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$, де C – деяке число.

Властивість 4. Якщо існує границя функції $f(x)$ у точці x_0 , то в цій точці існує і границя функції $kf(x)$, де $k \neq 0$ – деяке число, причому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Властивість 5. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ мають граници в точці x_0 , причому границя функції $g(x)$ відмінна від нуля, то існує границя частки функцій $\frac{f(x)}{g(x)}$ у точці x_0 , причому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

Ці властивості використовують для обчислення границь.

Задача 2. Обчислити: 1) $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 2x + 7)$; 2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 8}{x + 1}$.

• **Розв'язання. 1) 1-й спосіб.**

$$\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 2x + 7) = \lim_{x \rightarrow 5} x^2 - \lim_{x \rightarrow 5} 2x + \lim_{x \rightarrow 5} 7 = \lim_{x \rightarrow 5} x \cdot \lim_{x \rightarrow 5} x - 2 \lim_{x \rightarrow 5} x + 7 = 5 \cdot 5 - 2 \cdot 5 + 7 = 22.$$

• **2-й спосіб.** Оскільки функція $f(x) = x^2 - 2x + 7$ неперервна для $x \in R$, і зокрема в точці 5, то $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 2x + 7) = f(5) = 22$.

• 2) Функція $f(x) = \frac{x^2 - 8}{x + 1}$ має числове значення в точці -2 ,

$$f(-2) = \frac{(-2)^2 - 8}{-2 + 1} = \frac{-4}{-1} = 4, \text{ тому вона неперервна в цій точці.}$$

$$\text{Отже, } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 8}{x + 1} = f(-2) = 4.$$

Відповідь. 1) 22; 2) 4.

Властивості та вправи, що ми розглянули, приводять до висновку:



якщо значення функції $y = f(x)$ у точці x_0 існує і функція в цій точці неперервна, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Задача 3. Обчислити: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$.

Розв'язання. Значення виразу $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$ для $x = 1$ не існує.

Розкладемо на множники чисельник і знаменник дробу:

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}.$$

Оскільки $x \rightarrow 1$, але $x \neq 1$, то $x - 1 \neq 0$ і дріб можна скоротити на $x - 1$. Отримаємо дріб $\frac{x+3}{x+1}$, для якого значення в точці $x = 1$ існує. Отже, маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x+1} = \frac{1+3}{1+1} = 2.$$

Відповідь. 2.

А ще раніше...

Походження поняття границі, що сягає корінням у сиву давнину, пов'язане зі знахodженням площ криволінійних фігур і об'ємів тіл, обмежених кривими поверхнями.

Перше теоретичне узагальнення і обґрунтування методів обчислення площ і об'ємів, у яких неявно використовувалися граничні переходи, було дане найвидатнішим грецьким математиком IV ст. до н. е. Евдоксом Кнідським. Метод Евдокса в XVII ст. був названий методом вичерпання. Так, наприклад, за допомогою свого методу Евдокс довів, що об'єм піраміди дорівнює третині об'єму призми з тією ж основою і тією ж висотою, а об'єм конуса – третині об'єму відповідного циліндра.

Дінострат, сучасник і учень Евдокса, застосовуючи методи свого вчителя, знайшов, що $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$, названий в сучасній термінології «першою чудовою границею».

Наступними цеглинами до фундаменту теорії границь слід вважати праці «Геометрія неподільних безперервних» (1635 р.) Кавальєрі і «Геометрична праця» Грегуара де Сен-Венсана.

Величезний внесок до теорії границь був зроблений завдяки полеміці і конкурсній між двома найбільшими математичними школами XVII ст. Одну з них очолював Лейбніц, а й іншими учасниками були Лопіталь, брати Бернуллі, Ейлер. Іншу школу очолював Ньютона, а одним з її представників був Маклорен. Обидві школи створили потужні алгоритми, які привели, по суті, до одних і тих самих результатів – створення диференціального й інтегрального числення. Одним із цих алгоритмів і став метод границь.



- Коли функцію $y = f(x)$ називають неперервною в точці x_0 ?
- Сформулюйте означення границі функції в точці.
- Сформулюйте властивості границі функції в точці.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



1 Знайдіть границю (17.1–17.2):

17.1. 1) $\lim_{x \rightarrow 2} x$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (2x - 1)$. **17.2.** 1) $\lim_{x \rightarrow -1} x$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (3x + 2)$.

17.3. Чи буде функція $f(x)$ неперервною в точці 3, якщо:

1) $f(x) = 3x - 5$; 2) $f(x) = \frac{1}{x-3}$?

17.4. Чи буде функція $g(x)$ неперервною в точці 2, якщо:

1) $g(x) = 2x + 7$; 2) $g(x) = \frac{1}{2-x}$?



2 Обчисліть границі (17.5–17.6):

17.5. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 7}{x - 1}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 3x + 5)$;

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x - 5}{x - 1}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{2 - x}$.

17.6. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 + x^3}{1 + x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 4x + 7)$;

3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{20 - 10x}{2 - x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

17.7. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$. Знайдіть границю в точці 1 для функції:

1) $y = 2f(x)$; 2) $y = f(x) + 4$; 3) $y = \frac{10}{f(x)}$; 4) $y = \frac{f(x)}{f(x) - 4}$.

17.8. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 4$. Знайдіть границю в точці 2 для функції:

1) $y = 7h(x)$; 2) $y = h(x) - 3$; 3) $y = \frac{12}{h(x)}$; 4) $y = \frac{h(x)}{h(x) - 3}$.

17.9. Обчисліть: 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$; 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos x$.

17.10. Обчисліть: 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$; 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin x$.

3 Доведіть за означенням границі, що (17.11–17.12):

17.11. $\lim_{x \rightarrow -1} (2x + 3) = 1$.

17.12. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 1$.

17.13. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$ і $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 7$. Знайдіть границю в

точці 3 для функції:

1) $y = f(x) + g(x)$;

2) $y = 3f(x) - 5g(x)$;

3) $y = g^2(x) - f(x)$;

4) $y = \frac{f(x)+1}{g(x)-1}$.

17.14. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 9$ і $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4$. Знайдіть границю в

точці 1 для функції:

1) $y = f(x) - g(x)$;

2) $y = 4f(x) + 3g(x)$;

3) $y = f^2(x) + g(x)$;

4) $y = \frac{f(x)+1}{g(x)-2}$.

Обчисліть границі (17.15–17.16):

17.15. 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+2x-8}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$;

3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x+1}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$.

17.16. 1) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-x-6}{x+2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^2+5x+4}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$.

4 За означенням границі, доведіть, що (17.17–17.18):

17.17. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$.

17.18. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2} = -4$.

Обчисліть границю (17.19–17.22):

17.19. 1) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3-9x}{x^2+2x-3}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x-2} - \frac{8}{x^2-4} \right)$.

17.20. 1) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x-x^3}{2x^2+3x-2}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x-1} - \frac{6}{x^2-1} \right)$.

17.21. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

17.22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$.



Життєва математика

17.23. У вересні 1 кг винограду коштував 20 грн, у жовтні виноград здорожчав на 25 %, а в листопаді по відношенню до ціни жовтня ще на 20 %. Скільки став коштувати 1 кг винограду в листопаді?



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

17.24. Спростіть вираз $f(a+b) - f(a)$, якщо:

- | | | |
|-------------------|---------------------------|------------------------|
| 1) $f(x) = 5$; | 2) $f(x) = x$; | 3) $f(x) = x^2$; |
| 4) $f(x) = x^3$; | 5) $f(x) = \frac{1}{x}$; | 6) $f(x) = \sqrt{x}$. |

§ 18. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ. ПОХІДНІ НАЙПРОСТИШИХ ФУНКЦІЙ

1. Поняття про приріст аргументу і приріст функції

На практиці нас часто цікавить приріст величини, а не її значення.

Приріст величини позначають великою літерою грецького алфавіту Δ (дельта).

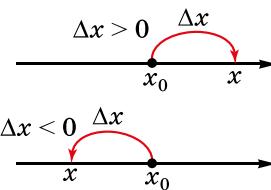
Спочатку розглянемо поняття *приросту аргументу*. Нехай x_0 – деяке фіксоване значення аргументу, а x – деяке довільне його значення.



Різницю $x - x_0$ називають *приростом аргументу* (незалежної змінної) у точці x_0 і позначають Δx (читають: «дельта ікс»).

Отже, $\Delta x = x - x_0$, звідки $x = x_0 + \Delta x$.

Зауважимо, що значення Δx може бути і додатним, і від'ємним. Зрозуміло, що коли $\Delta x > 0$, то $x > x_0$, а коли $\Delta x < 0$, то $x < x_0$ (мал. 18.1).

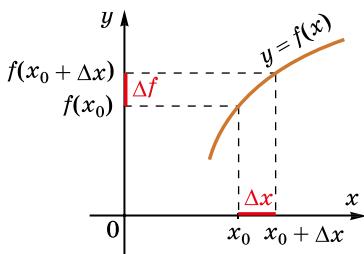


Розглянемо значення функції $f(x)$ у точках x та x_0 , тобто $f(x)$ та $f(x_0)$. Значення функції $f(x)$ змінилося при переході від точки x_0 до точки x на значення $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Мал. 18.1



Різницю $f(x) - f(x_0)$ називають приростом функції у точці x_0 і позначають Δf (читають: «дельта еф»).



Мал. 18.2

Оскільки $x = x_0 + \Delta x$, то $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, звідки $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$ (мал. 18.2).

Задача 1. Знайти приріст функції $f(x) = 3x - 2$ в точці $x_0 = 1$, що відповідає приrostу аргументу $\Delta x = 0,1$.

- Розв'язання. $x_0 + \Delta x = 1 + 0,1 = 1,1$;
 - $f(x_0) = f(1) = 3 \cdot 1 - 2 = 1$;
 - $f(x_0 + \Delta x) = f(1,1) = 3 \cdot 1,1 - 2 = 1,3$.
 - Тоді $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 1,3 - 1 = 0,3$.
- Відповідь. 0,3.

2. Похідна функції

Для функції поняття *похідної* є одним з найважливіших понять математичного аналізу. За допомогою похідної можна досліджувати властивості функції, знаходити її найбільше і найменше значення на проміжку тощо. Похідну застосовують у фізиці, економіці, інших науках.



Границю відношення приросту функції Δf у точці x_0 до приросту аргументу Δx , коли $\Delta x \rightarrow 0$, називають *похідною функції* $y = f(x)$ у точці x_0 .

Похідну позначають так: $f'(x_0)$ (читають: « f штрих у точці x_0 ») або так: $y'(x_0)$ (читають: « y штрих у точці x_0 »).

Отже, означення похідної у вигляді формули можна записати так:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо врахувати, що $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, то

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функцію $y = f(x)$, що має похідну в точці x_0 , називають **диференційованою** в цій точці. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в кожній точці деякого проміжку, то кажуть, що функція диференційовна на цьому проміжку. Дію знаходження похідної називають **диференціюванням функції**.

Знайти похідну функції $f(x)$ у точці x_0 за означенням можна за таким алгоритмом:



- 1) знайти приріст функції $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, що відповідає приросту аргументу Δx ;
- 2) знайти відношення $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ та спростити його;
- 3) знайти границю $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Задача 2. Знайти похідну функції $f(x) = x^2$ в точці $x_0 = 7$.

Розв'язання. 1) $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (7 + \Delta x)^2 - 7^2 = 49 + 14\Delta x + \Delta x^2 - 49 = 14\Delta x + \Delta x^2$;

2) $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{14\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(14 + \Delta x)}{\Delta x} = 14 + \Delta x$;

3) $f'(7) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (14 + \Delta x) = 14$. Відповідь. $f'(7) = 14$.

3. Похідні найпростіших функцій

Оскільки для кожного значення x_0 значення $f'(x_0)$ або єдине або взагалі не існує, будемо розглядати похідну $f'(x)$ як функцію від x .

Для деяких функцій можна знайти формули їх похідних. Це дозволить знаходити похідну функції в точці не за означенням, а за формулою.

Знайдемо формули похідних деяких найпростіших функцій за означенням, замінивши у запропонованому вище алгоритмі x_0 на x .

Задача 3. Нехай $f(x) = C$, де C – число. Тоді за алгоритмом:

1) $\Delta f(x) = C - C = 0$; 2) $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$; 3) $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 0$.

Отже, $C' = 0$.

Задача 4. Нехай $f(x) = x$. Тоді:

1) $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$;

2) $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$; 3) $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1$. Отже, $x' = 1$.

Задача 5. Нехай $f(x) = x^2$. Тоді:

$$1) \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = \\ = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2;$$

$$2) \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x;$$

$$3) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x. \quad \text{Отже, } (x^2)' = 2x.$$

Аналогічно можна знайти похідні й інших функцій шкільного курсу математики.

Радимо запам'ятати похідні функцій, які найчастіше використовують в курсі алгебри і початків аналізу:



$$C' = 0$$

$$x' = 1$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Зверніть увагу, що похідна функції – це також функція, а похідна функції в точці – це число. Отже, тепер, знаючи формулі похідних, похідні функцій у даних точках можна обчислювати простіше, ніж за означенням. Для цього достатньо у формулу похідної підставити дану точку і виконати обчислення.

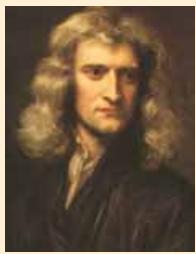
Задача 6. Дано функцію $f(x) = x^3$. Знайти $f'(-1)$, $f'(2)$.

- Розв'язання. Відомо, що похідною функції $f(x) = x^3$ є функція $f'(x) = 3x^2$. Тоді $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3$ і $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$.
- Відповідь. $f'(-1) = 3$; $f'(2) = 12$.

А ще раніше...

Розділ математики, у якому вивчають похідні функцій та їх застосування, називають диференціальним численням. Диференціальне числення сформувалося не так давно, у кінці XVII ст., завдяки Ньютону і Лейбніцу. Вони майже одночасно прийшли до поняття похідної. Ньютон прийшов до цього поняття, розглядаючи питання механіки, зокрема питання миттєвої швидкості, функцію він називав флюентою, а похідну – флюксією, функції позначав літерами x ; y ; z ; u ; v ; w , їхні похідні – тими самими буквами з крапками над ними: \dot{x} ; \dot{y} тощо.

Лейбніц прийшов до поняття похідної, виходячи з геометричних задач, а саме, розглядаючи задачу про побудову дотичної до кривої. Замість відомого нам Δx він використовував позначення dx (буква d – перша літера латинського слова *differentia – різниця*).



І. Ньютон
(1643–1727)



І.Ф. Лейбніц
(1646–1716)



М.В. Остроград-
ський
(1801–1862)



М.П. Кравчук
(1892–1942)

Подальший внесок у розвиток диференціального числення зробили, зокрема А. Лопіталь (1661–1704), Л. Ейлер (1707–1783), О. Коши (1789–1857), К.Ф. Гаус (1777–1855) та українські математики М.В. Остроградський і М.П. Кравчук.



- Що називають приростом аргументу і приростом функції в точці x_0 ? ● Що називають похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 ?
- Яку функцію називають диференційовою в точці x_0 ? ● Укажіть алгоритм знаходження похідної функції за означенням.
- Укажіть, чому дорівнюють похідні функцій $f(x) = C$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \sqrt{x}$.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



Знайдіть приріст аргументу Δx , якщо (18.1–18.2):

18.1. 1) $x_0 = 2$; $x = 2,001$; 2) $x_0 = 3$; $x = 2,9$.

18.2. 1) $x_0 = 5$; $x = 5,01$; 2) $x_0 = 0$; $x = -0,001$.

Які з похідних знайдено правильно, а які – ні (18.3–18.4):

18.3. 1) $5' = 0$; 2) $(x^2)' = 3x^2$; 3) $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$; 4) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$?

18.4. 1) $7' = 7$; 2) $(x^3)' = 3x^2$; 3) $(x^2)' = 2x$; 4) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$?



18.5. Знайдіть приріст функції $f(x)$ у точці x_0 для даного приросту аргументу:

1) $f(x) = 3x - 4$, $x_0 = 5$, $\Delta x = 0,1$;

2) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 2$, $\Delta x = -0,2$.

18.6. Знайдіть приріст функції $g(x)$ у точці x_0 для даного приросту аргументу:

- 1) $g(x) = 2x + 3$, $x_0 = 1$, $\Delta x = -0,1$;
- 2) $g(x) = x^2 - 5$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0,2$.

18.7. Знайдіть приріст функції $g(x) = \sin x$ у точці $x_0 = 0$, якщо:

- 1) $\Delta x = \frac{\pi}{6}$;
- 2) $\Delta x = -\frac{\pi}{4}$.

18.8. Знайдіть приріст функції $f(x) = \cos x$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{2}$, якщо:

- 1) $\Delta x = \frac{\pi}{4}$;
- 2) $\Delta x = -\frac{\pi}{6}$.

Використовуючи формулу, знайдіть похідну функції (18.9–18.10):

18.9. 1) $f(x) = x^2$ в точках $-5; -2; 1; 0$;

2) $g(x) = \sqrt{x}$ у точках $\frac{1}{4}; 9; 25$.

18.10. 1) $f(x) = x^3$ в точках $-1; 0; 1; 4$;

2) $g(x) = \frac{1}{x}$ у точках $-0,1; 0,2; 5$.

18.11. 1) Запишіть приріст функції $f(x) = 2x - 3$ в точці x_0 через x_0 і Δx .

2) Знайдіть $\Delta f(x_0)$, якщо $x_0 = 1$; $\Delta x = 0,5$.

3) Накресліть графік функції.

4) Проілюструйте це на малюнку.

18.12. 1) Запишіть приріст функції $g(x) = 2 - 3x$ в точці x_0 через x_0 і Δx .

2) Знайдіть $\Delta g(x_0)$, якщо $x_0 = 2$; $\Delta x = 0,5$.

3) Накресліть графік функції.

4) Проілюструйте це на малюнку.

 Користуючись означенням похідної, знайдіть похідну функції $f(x)$ у точці x_0 (18.13–18.14):

18.13. 1) $f(x) = 3x^2 - x$; $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \frac{16}{x} + 5$; $x_0 = -2$.

18.14. 1) $f(x) = 5x^2 + x$; $x_0 = -1$; 2) $f(x) = 1 - \frac{20}{x}$; $x_0 = 2$.

18.15. Порівняйте $\Delta f(x_0)$ і $\Delta g(x_0)$ у точці $x_0 = 1$ для функцій

$f(x) = -\frac{2}{x}$ і $g(x) = x^2 - 1$, якщо $\Delta x = 0,1$.

Складіть і розв'яжіть рівняння (18.16–18.17):

18.16. 1) $f'(x) = f(x)$, якщо $f(x) = x^3$;

2) $g'(x) = -4$, якщо $g(x) = \frac{1}{x}$.

18.17. 1) $f(x) = f'(x)$, якщо $f(x) = x^2$;

2) $g'(x) = 0,125$, якщо $g(x) = \sqrt{x}$.

18.18. Розв'яжіть нерівність $f'(x) \geq 3f(x)$, якщо $f(x) = x^2$.

18.19. Порівняйте $f'(3)$ і $f'(-3)$, якщо $f(x) = x^3$.

18.20. Порівняйте $g'\left(\frac{1}{4}\right)$ і $g'\left(\frac{1}{9}\right)$, якщо $g(x) = \sqrt{x}$.

 За означенням похідної знайдіть значення похідної функції $f(x)$ у точці x_0 (18.21–18.22):

18.21. 1) $f(x) = \frac{4}{x} - x$; $x_0 = 2$; 2) $f(x) = \sqrt{x+3}$; $x_0 = 1$.

18.22. 1) $f(x) = x + \frac{9}{x}$; $x_0 = 3$; 2) $f(x) = \sqrt{x-2}$; $x_0 = 6$.

Користуючись означенням, знайдіть формулу похідної функції (18.23–18.24):

18.23. 1) $f(x) = 4 - 7x$; 2) $g(x) = 3x + x^2$.

18.24. 1) $f(x) = 2x + 5$; 2) $f(x) = x^2 - 5x$.

18.25. Складіть і розв'яжіть нерівність $f'(x) + g'(x) - 5 > 0$, якщо $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$.

18.26. Складіть і розв'яжіть рівняння $|f'(x)| = f(x)$, якщо $f(x) = x^2$.

Життєва математика

18.27. Придбавши товар, ви сплатили 50 грн податку на додану вартість (ПДВ). Знайдіть вартість товару, якщо ставка ПДВ складає 20 % від вартості товару.

Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

18.28. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої:

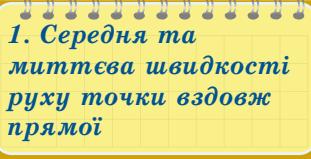
1) $y = 4x - 5$; 2) $y = -\frac{1}{3}x + 6$; 3) $y = 7$;

4) $y = 0,17x$; 5) $12x + 2y = 5$; 6) $7y = -14$.

- 18.29.** Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $K(-1; 4)$ паралельно осі абсцис.
- 18.30.** Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(2; -1)$ і має кутовий коефіцієнт:
- 1) 3;
 - 2) -7 ;
 - 3) 0;
 - 4) $0,5$.
- 18.31.** Знайдіть кут, який утворює з додатним напрямом осі абсцис пряма:
- 1) $y = x + 2$;
 - 2) $y = 7 - x$;
 - 3) $y = 5$;
 - 4) $y = \sqrt{3}x$?
- 18.32.** Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $L(2; -3)$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут:
- 1) 45° ;
 - 2) 120° .
- 18.33.** Серед даних прямих укажіть пари паралельних прямих:
- 1) $y = 5 - 2x$;
 - 2) $y = 0,5x - 7$;
 - 3) $y + 2x - 7 = 0$;
 - 4) $y = -2$;
 - 5) $y = \frac{1}{2}x$;
 - 6) $y = 2$.

§ 19. ФІЗИЧНИЙ І ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

Розглянемо деякі задачі, що приводять до поняття похідної.



Нехай точка рухається вздовж прямої, і відомо її координату $x(t)$ у момент часу t . За інтервал часу від t_0 до $t = t_0 + \Delta t$ точка подолає відстань $x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$. Тоді *середня швидкість руху* за цей час визначається формулою

$$v_c(\Delta t) = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Зауважимо, що якщо $\Delta t < 0$, то розглядаємо інтервал часу від $t_0 + \Delta t$ до t_0 , а відповідна відстань у цьому разі дорівнює $x(t_0) - x(t_0 + \Delta t)$. Тоді

$$v_c(\Delta t) = \frac{x(t_0) - x(t_0 + \Delta t)}{-\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Отже, в обох випадках середня швидкість точки, що рухається вздовж прямої, дорівнюватиме $\frac{\Delta x}{\Delta t}$.

У кожний момент часу точка рухається з певною швидкістю. Як знайти *миттєву швидкість руху* в момент часу t_0 ? Природно припустити, що якщо Δt досить мале, то за цей ін-

тервал часу швидкість практично не зміниться, тобто середня швидкість за цей момент часу практично не відрізняється від миттєвої швидкості $v_{\text{мит.}}(t_0)$. Тому спосіб знаходження миттєвої швидкості полягає в тому, щоб знайти спочатку середню швидкість $v_c(\Delta t)$ і далі її границю за умови, що $\Delta t \rightarrow 0$. Отже,

$$v_{\text{мит.}}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Права частина останньої рівності є, за означенням, похідною функції $x(t)$ у точці t_0 , тобто $x'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Маємо:



миттєва швидкість $v(t)$ визначена для будь-якої диференційованої функції $x(t)$ і при цьому

$$v(t) = x'(t),$$

або коротко:



похідна від координати за часом є швидкістю.

У цьому полягає фізичний зміст похідної.

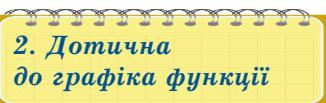
Міркуючи аналогічно, можна показати, що



похідна від швидкості за часом є прискоренням.

Задача 1. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2$ (x вимірюється в метрах, t – у секундах). Знайти швидкість точки в момент часу $t = 5$ с.

- Розв'язання. Оскільки $v(t) = x'(t)$, то $v(t) = x'(t) = (t^2)' = 2t$. Тоді $v(5) = 2 \cdot 5 = 10$ (м/с).
- Відповідь. 10 м/с.



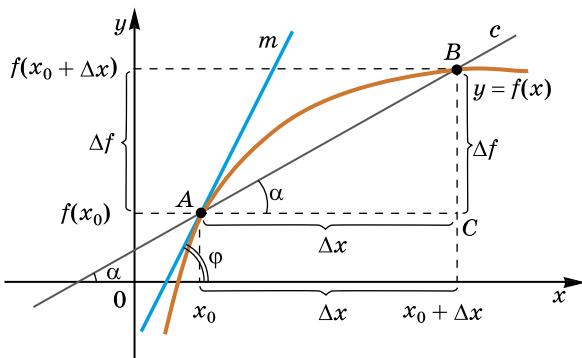
Розглянемо графік функції $y = f(x)$. Пряму c , яка проходить через будь-які дві точки графіка функції $f(x)$, називають *січною* цього графіка

(мал. 19.1). З курсу геометрії відомо, що кутовий коефіцієнт k прямої, яка проходить через точки $A(x_0; y_0)$ і $B(x; y)$, дорівнює $\frac{y - y_0}{x - x_0}$. Знаючи поняття приросту функції та приросту аргументу, це можна записати так:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$



Дотичною в точці $(x_0; y_0)$ до графіка функції $y = f(x)$ називають граничне положення січної, що проходить через цю точку, коли $\Delta x \rightarrow 0$ (мал. 19.1).



Мал. 19.1

На малюнку 19.1 пряма m – дотична до графіка функції $y = f(x)$, проведена в точці A . Для прямої m маємо:

$k = \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Оскільки $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$, то $k = f'(x_0)$. Отже,



кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x)$, проведеної в точці з абсцисою x_0 , дорівнює похідній функції у цій точці:

$$k = f'(x_0).$$

У цьому полягає геометричний зміст похідної.

Оскільки $f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \varphi$, де φ – кут, який утворює дотична з додатним напрямом осі абсцис, то коли $f'(x_0) > 0$, кут φ – гострий; коли $f'(x_0) = 0$, то $\varphi = 0^\circ$, тобто дотична паралельна осі абсцис (або збігається з нею); коли $f'(x_0) < 0$, кут φ – тупий.

Задача 2. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $f(x) = x^3$, у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

- Розв'язання. $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$, тоді $k = f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 = 12$.
- Відповідь. $k = 12$.

Задача 3. Знайти тангенс кута нахилу до осі абсцис дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt{x}$, яка проведена в точці $A(4; 2)$.

- Розв'язання. Маємо: $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

- Тоді $\operatorname{tg} \varphi = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} = 0,25$. Відповідь. 0,25.

3. Рівняння дотичної до графіка функції

Нехай рівняння прямої, що є дотичною до графіка функції $y = f(x)$ у точці $A(x_0; f(x_0))$, має вигляд $y = kx + l$. Оскільки $k = f'(x_0)$, то воно набуває вигляду: $y = f'(x_0) \cdot x + l$.

Оскільки дотична проходить через точку $A(x_0; f(x_0))$, то координати цієї точки задовольняють рівняння дотичної, тобто $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + l$, звідки $l = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

Отже, підставимо знайдені вирази для k і l в рівняння дотичної:

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0, \text{ тобто}$$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$

Отримали *рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0* .

Задача 4. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{1}{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = -4$.

Розв'язання. Маємо: $f(x_0) = f(-4) = -\frac{1}{4}$; $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$;

$f'(x_0) = f'(-4) = -\frac{1}{16}$. Підставимо отримані значення в рівняння

дотичної: $y = -\frac{1}{4} - \frac{1}{16}(x + 4)$. Спростивши вираз у цьому рівнянні, матимемо: $y = -\frac{1}{16}x - \frac{1}{2}$.

Відповідь. $y = -\frac{1}{16}x - \frac{1}{2}$.

А ще раніше...

Нагадаємо, що Ньютон прийшов до пояснення похідної, розглядаючи питання механіки, зокрема, миттєвої швидкості, а Лейбніц – виходячи з геометричних задач, а саме, задачі про побудову дотичної до кривої.

Однак питання побудови дотичних до кривих цікавило математиків задовго до Лейбніца. Так, наприклад, Евклід в «Началах» дав спосіб побудови дотичної до кола, Архімед побудував дотичну до спіралі, яку названо на його честь, Аполоній – до еліпса, гіперболи і параболи. Однак стародавні вчені так і не розв'язали задачу про побудову дотичної до довільної кривої в будь-якій її точці.

Із самого початку XVII століття багато вчених намагалися вирішити цю проблему, зокрема Торрічеллі, Вівіані, Роберваль, Барроу, однак першим загальний метод побудови дотичних запропонував Лейбніц у 1684 році.



- Як знайти миттєву швидкість точки, що рухається за законом $x = x(t)$? • У чому полягає фізичний зміст похідної? • Що називають дотичною до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0 ? • У чому полягає геометричний зміст похідної? • Запам'ятайте рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 .



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



19.1. (Усно). Відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 дорівнює 0,4. Чому дорівнює значення похідної функції $y = f(x)$ у цій точці?

19.2. Відомо, що $f'(3) = 5$. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$, проведеної у точці з абсцисою $x_0 = 3$.

19.3. Відомо, що $f'(4) = 1$. Знайдіть:

- 1) кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$, що проведена в точці з абсцисою $x_0 = 4$;
- 2) кут, який утворює ця дотична з додатним напрямом осі абсцис.

19.4. Дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 60° . Знайдіть $f'(x_0)$.



19.5. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{1}{x}$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$.

19.6. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt{x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 0,25$.

19.7. Знайдіть тангенс кута нахилу до осі абсцис дотичної до графіка функції $f(x) = x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

19.8. Знайдіть тангенс кута нахилу до осі абсцис дотичної до графіка функції $f(x) = x^3$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$.

19.9. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^3$ (t вимірюється у секундах; x – у метрах). Знайдіть швидкість тіла в момент часу: 1) $t = 2$ с; 2) $t = 3$ с.

19.10. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2$ (t вимірюється у секундах; x – у метрах). Знайдіть швидкість тіла в момент часу: 1) $t = 4$ с; 2) $t = 10$ с.

19.11. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt{x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

19.12. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{1}{x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

3 **19.13.** На графіку функції $f(x) = x^2$ знайдіть точку, у якій дотична до цього графіка утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 135° .

19.14. На графіку функції $f(x) = \sqrt{x}$ знайдіть точку, у якій дотична до цього графіка утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 45° .

19.15. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = \frac{1}{t}$. У який момент часу t ($t > 0$) швидкість точки буде дорівнювати $-\frac{1}{9}$ м/с, якщо t вимірюється в секундах, x – у метрах?

19.16. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^3$ (t вимірюється в секундах, x – у метрах). У який момент часу t ($t > 0$) швидкість точки буде дорівнювати 48 м/с?

19.17. Знайдіть точки, у яких дотична до графіка функції $f(x) = x^3$ паралельна прямій $y = 12x - 17$.

19.18. Знайдіть точки, у яких дотична до графіка функції $f(x) = \frac{1}{x}$ паралельна прямій $y = 8 - \frac{1}{9}x$.

19.19. Одна з матеріальних точок рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2$, а інша – за законом $x(t) = t^3$ (t вимірюється в секундах; x – у метрах). У який момент часу t ($t > 0$) їх швидкості будуть однаковими?

4 **19.20.** Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt{x}$, яка паралельна прямій $y = \frac{1}{6}x + 5$.

19.21. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2$, яка паралельна прямій $y = -2x + 7$.

19.22. Дано функцію $f(x) = \frac{1}{x}$.

1) Складіть рівняння дотичної до її графіка у точці з абсцисою $x_0 = -1$.

2) Виконайте малюнок.

3) Знайдіть площину трикутника, обмеженого відрізками дотичної й осей координат.

19.23. Дано функцію $f(x) = x^3$.

- 1) Складіть рівняння дотичної до її графіка у точці з абсцисою $x_0 = -1$.
- 2) Виконайте малюнок.
- 3) Знайдіть площину трикутника, обмеженого відрізками дотичної й осей координат.

19.24. У якій точці перетинаються дотичні до параболи $y = x^2$, проведені в точках з абсцисами $x_0 = -2$ і $x_0 = 1$?

Життєва математика

19.25. Ставка податку на доходи фізичних осіб (зарплату) у 2015 році становила 15 % для зарплати розміром до 12 180 грн плюс 20 % від суми, що перевищувала 12 180 грн. Із 2016 р. ця ставка становить 18 % без обмежень. Директорка підприємства у 2015 році отримувала зарплату 13 000 грн на місяць, а в 2016 році – 15 000 грн на місяць; старший менеджер у 2015 році отримував зарплату 9000 грн на місяць, а у 2016 році – 10 000 грн на місяць. На яку суму змінився щомісячний податок кожного з них у порівнянні з **2015** роком?

Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

19.26. Подайте вираз у вигляді степеня з основою x :

$$1) \frac{1}{x^3}; \quad 2) \frac{1}{x^9}; \quad 3) \frac{1}{x^2}; \quad 4) \frac{1}{x^{2018}}.$$

19.27. Дано функцію $f(x) = \sin x - \cos x$. Знайдіть:

$$1) f(0); \quad 2) f\left(\frac{\pi}{3}\right); \quad 3) f\left(\frac{\pi}{4}\right); \quad 4) f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

§ 20. ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ. ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ

У цьому параграфі розглянемо основні правила диференціювання та похідні степеневих і тригонометричних функцій. Для спрощення записів замість $u(x)$, $u'(x)$, $v(x)$, $v'(x)$ тощо писатимемо u , u' , v , v' тощо.

1. Основні правила диференціювання

Нехай функції u і v диференційовні в точці x . Тоді їх сума і різниця теж диференційовані в точці x .



Правило 1. Похідна суми (різниці) дорівнює сумі (різниці) похідних $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

Доведення. Нехай $f = u + v$. Тоді:

$$1) \Delta f = \Delta(u + v) = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - (u(x) + v(x)) = \\ = (u(x + \Delta x) - u(x)) + (v(x + \Delta x) - v(x)) = \Delta u + \Delta v.$$

$$2) \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

$$3) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

Аналогічно можна довести, що $(u - v)' = u' - v'$.

Отже, $(u \pm v)' = u' \pm v'$. ■



Наслідок. Похідна суми трьох і більше доданків дорівнює сумі похідних:

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n)' = u_1' + u_2' + u_3' + \dots + u_n'.$$



Приклад 1. 1) $(x^3 + 5)' = (x^3)' + 5' = 3x^2 + 0 = 3x^2$;

$$2) (x^2 - \sqrt{x})' = (x^2)' - (\sqrt{x})' = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Розглянемо правило диференціювання добутку.



Правило 2. $(uv)' = u'v + v'u$.

Доведення не наводимо, оскільки воно є доволі складним.



Наслідок. Сталий множник можна виносити за знак похідної $(Cu)' = Cu'$, де C – стала.



Приклад 2. 1) $(5x^3)' = 5 \cdot (x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$;

$$2) (\sqrt{x} \cdot x^2)' = (\sqrt{x})'x^2 + (x^2)' \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^2 + 2x\sqrt{x} = \\ = \frac{x^2 + 4x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2}{2\sqrt{x}}.$$

Розглянемо правило диференціювання частки і доведемо його.



Правило 3. $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0$.

Доведення. Відступимо від алгоритму, який ми використали під час доведення правила 1, і доведемо в інший спосіб.

Нехай $f = \frac{u}{v}$, тоді $u = fv$, тому $u' = f'v + v'f$. Звідси виразимо f' :

$$f'v = u' - v'f, \text{ тобто } f' = \frac{u' - v'f}{v} = \frac{u' - v' \cdot \frac{u}{v}}{v} = \frac{u'v - v'u}{v^2}. \blacksquare$$

Зауважимо, що довести можна було й у той самий спосіб, яким доведено правило 1.

Приклад 3. $\left(\frac{x^3}{x^2+1} \right)' = \frac{(x^3)'(x^2+1) - (x^2+1)'x^3}{(x^2+1)^2} =$

$$= \frac{3x^2(x^2+1) - 2x \cdot x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}.$$

2. Похідна степеневої функції

Ми знаємо, що:

$$\begin{aligned} x' &= 1 = 1 \cdot x^0; \\ (x^2)' &= 2x = 2x^1; \\ (x^3)' &= 3x^2. \end{aligned}$$

За формулою похідної добутку:

$$(x^4)' = (x^3x)' = (x^3)'x + x'x^3 = 3x^2x + 1 \cdot x^3 = 3x^3 + x^3 = 4x^3.$$

Аналогічно:

$$(x^5)' = (x^4x)' = (x^4)'x + x'x^4 = 4x^3x + 1 \cdot x^4 = 4x^4 + x^4 = 5x^4.$$

Неважко помітити закономірність, що для натурального n :

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Приймемо цей факт без доведення.

Нехай тепер $f(x) = x^n$, де n – ціле від’ємне число. Тоді $(-n)$ – число натуральнe. Маємо:

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}} \right)' = \frac{1' \cdot x^{-n} - (x^{-n})' \cdot 1}{(x^{-n})^2} = \frac{0 \cdot x^{-n} + nx^{-n-1}}{x^{-2n}} = n \cdot x^{-n-1-(-2n)} = nx^{n-1}.$$

Отже, у цьому випадку також $(x^n)' = nx^{n-1}$. Маємо:

! для будь-якого цілого n і будь-якого x ($x \neq 0$ при $n \leq 1$):
$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Похідну степеневої функції з дробовим показником знаходять за цією самою формулою.

Приклад 4. $(5x^{13} - 2x^3 + 5)' = (5x^{13})' - (2x^3)' + 5' =$
 $= 5 \cdot (x^{13})' - 2 \cdot (x^3)' + 0 = 5 \cdot 13x^{12} - 2 \cdot 3x^2 = 65x^{12} - 6x^2.$

Задача 1. Знайти похідну функції $f(x) = \frac{2}{x^3}$ у точці $x_0 = -1$.

• Розв'язання. Оскільки $\frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$, то $f(x) = 2x^{-3}$.

• Тоді $f'(x) = (2x^{-3})' = 2(x^{-3})' = 2 \cdot (-3)x^{-3-1} = -6x^{-4} = \frac{6}{x^4}$.

• Маємо: $f'(-1) = -\frac{6}{(-1)^4} = -6$. Відповідь. $f'(-1) = -6$.

3. Похідні тригонометричних функцій

Приймемо без доведення, що $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$. Використаємо його для доведення формули похідної синуса.

Tеорема 1 (похідна синуса). Для $x \in R$ маємо:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Доведення. Нехай $f(x) = \sin x$. Тоді:

$$\begin{aligned} 1) \Delta f &= \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right). \end{aligned}$$

$$2) \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x}.$$

$$3) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то $\frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0$, а тому $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$,

$$\text{а } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x.$$

Отже, $(\sin x)' = \cos x$. ■



Теорема 2 (похідна косинуса). Для $x \in R$ маємо:
 $(\cos x)' = -\sin x.$

Доведення аналогічне до доведення теореми 1.



Теорема 3 (похідна тангенса). Для будь-якого x з області визначення тангенса

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Доведення. Ураховуючи, що $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, за формулою по-зідної частки маємо:

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Отже, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. ■



Теорема 4 (похідна котангенса). Для будь-якого x з області визначення котангенса

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Доведення аналогічне доведенню теореми 3.

Приклад 5. $(2\sin x + 4\operatorname{tg} x)' = 2(\sin x)' + 4(\operatorname{tg} x)' = 2\cos x + \frac{4}{\cos^2 x}.$

Задача 2. Для функції $f(x) = 3\cos x - 5\operatorname{ctg} x$ знайти $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

• Розв'язання. $f'(x) = 3(\cos x)' - 5(\operatorname{ctg} x)' = -3\sin x + \frac{5}{\sin^2 x}.$

• $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3\sin \frac{\pi}{2} + \frac{5}{\sin^2 \frac{\pi}{2}} = -3 \cdot 1 + \frac{5}{1^2} = -3 + 5 = 2.$

Відповідь. 2.

Задача 3. Розв'язати рівняння $f'(x) = 0$, де $f(x) = \cos x + x$.

- Розв'язання. 1) $f'(x) = (\cos x + x)' = (\cos x)' + x' = -\sin x + 1$.
- 2) Маємо рівняння: $-\sin x + 1 = 0$;
 $\sin x = 1$;
 $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.
- Відповідь. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

4. Таблиця похідних

Систематизуємо дані про похідні функцій у таблицю, яку прийнято називати *таблицею похідних*.

$C' = 0$	$x' = 1$	$(x^2)' = 2x$
$(x^3)' = 3x^2$	$(x^n)' = nx^{n-1}, n \in Z$	
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$		$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(\sin x)' = \cos x$		$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$		$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$



- Чому дорівнює похідна суми, різниці, добутку, частки двох функцій?
- Чому дорівнює похідна функції Cu , де C – стала?
- Чому дорівнює похідна функції $f(x) = x^n$, де n – ціле число?
- Вивчіть таблицю похідних та правила диференціювання.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



Знайдіть похідну функції (20.1–20.10):

- | | |
|---|--|
| 20.1. 1) $f(x) = x^7$; | 2) $g(x) = \sin x$; |
| 3) $t(x) = x^9$; | 4) $\varphi(x) = x^{-4}$. |
| 20.2. 1) $f(x) = \cos x$; | 2) $p(x) = x^5$; |
| 3) $\psi(x) = x^{-7}$; | 4) $t(x) = x^{11}$. |
| 20.3. 1) $m(x) = 5x$; | 2) $f(x) = 3x^6$; |
| 3) $\varphi(x) = 2\operatorname{ctg} x$; | 4) $\psi(x) = 3x^{-2}$. |
| 20.4. 1) $g(x) = 7x$; | 2) $\varphi(x) = 3\operatorname{tg} x$; |
| 3) $f(x) = 5x^2$; | 4) $\psi(x) = 5x^{-3}$. |
| 20.5. 1) $\varphi(x) = \cos x - x^8$; | 2) $f(x) = x^3 + x^{17}$. |
| 20.6. 1) $g(x) = x^4 + \sin x$; | 2) $\varphi(x) = x^{10} - 1$. |

2

20.7. 1) $f(x) = \frac{x^3}{5}$; 2) $g(x) = -\frac{x^{10}}{2}$;

3) $t(x) = \frac{4}{x^2}$; 4) $p(x) = \frac{5}{x^7}$.

20.8. 1) $\varphi(x) = \frac{x^4}{2}$; 2) $\psi(x) = -\frac{x^9}{3}$; 3) $f(x) = \frac{3}{x}$; 4) $t(x) = \frac{2}{x^5}$.

20.9. 1) $f(x) = 3x^2 - 7x^3 + 3$; 2) $g(x) = 2\sin x - 4x^5 + \sqrt{x}$.

20.10. 1) $f(x) = 2x^{11} - 3\cos x + 7$; 2) $g(x) = 5x^7 + \frac{1}{x} - x$.

20.11. Знайдіть значення похідної функції $f(x)$ у точці x_0 :

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$, $x_0 = -1$; 2) $f(x) = 3\tan x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

20.12. Знайдіть значення похідної функції $g(x)$ у точці x_0 :

1) $g(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2$, $x_0 = 1$; 2) $g(x) = 2\cot x$, $x_0 = -\frac{\pi}{4}$.

Знайдіть похідну функції (20.13–20.16):

20.13. 1) $f(x) = x^3\sqrt{x}$; 2) $g(x) = x^4\sin x$.

20.14. 1) $g(x) = \sqrt{x} \cdot x^5$; 2) $f(x) = x^2\cos x$.

20.15. 1) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$; 2) $g(x) = \frac{\cos x}{x}$.

20.16. 1) $f(x) = \frac{x+1}{x^3}$; 2) $g(x) = \frac{x}{\sin x}$.

20.17. Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \sqrt{x}$ у точках $x_0 = 1$; $x_0 = 9$; $x_0 = 25$.

20.18. Знайдіть похідну функції $g(x) = 2x + \sqrt{x}$ у точках $x_0 = 1$; $x_0 = 16$; $x_0 = 100$.

20.19. Знайдіть похідну функції $g(x) = \sin x + \cos x$ у точках $x_0 = 0$; $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

20.20. Знайдіть похідну функції $f(x) = \cos x - \sin x$ у точках $x_0 = \frac{\pi}{2}$; $x_0 = \pi$.

20.21. Знайдіть тангенс кута нахилу до осі абсцис дотичної до графіка функції $f(x) = 3x^2 - 4x$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

20.22. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = 5x - 7x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = 0$.

20.23. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 10t$ (t вимірюється в секундах, x – у метрах). Знайдіть швидкість тіла в момент часу: 1) $t = 2$ с; 2) $t = 6$ с.

20.24. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = 5t - \frac{2}{3}t^3$ (t вимірюється в секундах, x – у метрах). Знайдіть швидкість тіла в момент часу: 1) $t = 1$ с; 2) $t = 3$ с.

20.25. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, де:

1) $f(x) = \cos x$; 2) $f(x) = x^2 - 6x$.

20.26. Розв'яжіть рівняння $g'(x) = 0$, де:

1) $g(x) = \sin x$; 2) $g(x) = 8x + x^2$.

20.27. Розв'яжіть нерівність $g'(x) > 0$, якщо $g(x) = 4x + x^2$.

20.28. Розв'яжіть нерівність $f'(x) \leq 0$, якщо $f(x) = x^2 - 10x$.

 Знайдіть похідну функції (20.29–20.30):

20.29. 1) $f(x) = (3x^2 + 7)(2x - 5)$; 2) $g(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 4x)$.

20.30. 1) $f(x) = (5x^2 - 9)(3x + 4)$; 2) $g(x) = (3x - 5x^2)\sqrt{x}$.

20.31. Обчисліть похідну функції $f(x) = (4\sqrt{x} - 3)(x^2 + 7)$ у точці $x_0 = 1$.

20.32. Обчисліть похідну функції $f(x) = (2 + 6\sqrt{x})(x^2 - 3)$ у точці $x_0 = 1$.

Знайдіть похідну функцій (20.33–20.34):

20.33. 1) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 2}$; 2) $f(x) = \frac{x^2 + 7}{x^3}$.

20.34. 1) $g(x) = \frac{8x + x^2}{x - 1}$; 2) $g(x) = \frac{3 + x^3}{x^4}$.

20.35. Знайдіть значення похідної функції $g(x) = \frac{x^2 + 4x}{x - 1}$ у точках $x_0 = 2; 0$.

20.36. Знайдіть значення похідної функції $f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1}$ у точках $x_0 = 0; -2$.

20.37. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$ та нерівність $f'(x) \leq 0$, якщо:

1) $f(x) = 3x^2 + 2x^3 + 7$; 2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$.

20.38. Розв'яжіть рівняння $g'(x) = 0$ та нерівність $g'(x) > 0$, якщо:

1) $g(x) = 9x^2 - x^3 + 8$; 2) $g(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 19$.

20.39. Розв'яжіть рівняння $g'(x) = 0$, якщо:

1) $g(x) = \frac{3-x^2}{x+2}$; 2) $g(x) = \frac{1}{x} + 4x - 7$.

20.40. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо:

1) $f(x) = \frac{5+x^2}{2-x}$; 2) $f(x) = 9x + \frac{1}{x} + 3$.

20.41. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 3t^2 - 12t + 7$ (x вимірюється в метрах, t – у секундах):

- 1) У який момент часу швидкість точки дорівнюватиме 18 м/с?
- 2) У який момент часу точка зупиниться?

20.42. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = 2t^2 - 16t + 3$ (x вимірюється в метрах, t – у секундах):

- 1) У який момент часу швидкість тіла дорівнюватиме 12 м/с?
- 2) У який момент часу тіло зупиниться?

20.43. На графіку функції $f(x) = x^2 - 3x + 7$ знайдіть точку, у якій дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 45° .

20.44. На графіку функції $g(x) = 5x + x^2 - 9$ знайдіть точку, у якій дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 135° .

20.45. Розв'яжіть рівняння $g'(x) = 0$, якщо $g(x) = \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

20.46. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \frac{x}{2} + \cos x$.

20.47. Дано функцію $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$. Доведіть, що $f'(x) > 0$ для всіх допустимих значень x .

20.48. Знайдіть абсциси тих точок графіка функції $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 5$, у яких дотична паралельна осі абсцис.

20.49. Знайдіть абсциси точок графіка функції $g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$, у яких дотична паралельна прямій $y = 2x - 7$.

- 20.50.** Складіть рівняння дотичної до графіка функції $g(x) = x^2 - 4x + 5$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.
- 20.51.** Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 + 2x - 3$ у точці з абсцисою $x_0 = 0$.
- 20.52.** Складіть і розв'яжіть рівняння $f'(x) = f'(6)$, якщо $f(x) = \frac{3x - x^2}{4 - x}$.
- 20.53.** Дано функції $f(x) = 4\cos x$ і $g(x) = 2\sqrt{3}x + 9$. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = g'(x)$.
- 20.54.** Дано функції $f(x) = 2\sin x$ і $g(x) = x + 11$. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = g'(x)$.
- 20.55.** Знайдіть похідну функції $t(x) = \frac{2\sin x}{3 - \cos x}$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{3}$.
- 20.56.** Знайдіть похідну функції $\phi(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{6}$.
-  **20.57.** Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 3x + 7$, яка паралельна прямій $y = 5x - 17$.
- 20.58.** Складіть рівняння дотичної до графіка функції $g(x) = x^2 + 4x - 6$, яка паралельна прямій $y = 6x - 7$.
- 20.59.** Складіть і розв'яжіть рівняння $\frac{|f(x)|}{f'(x)} = -1$, якщо $f(x) = -x^2 - x - 1$.
- 20.60.** Складіть і розв'яжіть рівняння $\frac{|f(x)|}{f'(x)} = 2$, якщо $f(x) = x^2 + x + 2$.
- 20.61.** На синусоїді $y = \sin x$ узято точки з абсцисами $x_1 = 0$ і $x_2 = \frac{\pi}{2}$. Через ці точки проведено січну. У якій точці з абсцисою $x_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ слід провести дотичну, щоб вона була паралельною січній?
- 20.62.** Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \operatorname{tg} x - 2x$.
- 20.63.** Розв'яжіть рівняння $g'(x) = 0$, якщо $g(x) = 2x + \operatorname{ctg} x$.
- 20.64.** До графіка функції $f(x) = \frac{x^3}{3} - \sqrt{3}x$ складіть рівняння дотичної, яка утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 60° .



Життєва математика

20.65. Сашко і Павло разом можуть пофарбувати паркан за 9 годин, Павло і Ігор разом – за 12 годин, а Сашко і Ігор – за 18 годин. За скільки годин хлопчики пофарбують цей паркан, працюючи втрьох із тією самою продуктивністю праці?

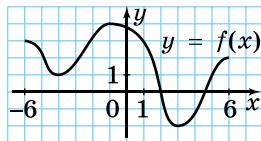


Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

20.66. Знайдіть проміжки зростання і проміжки спадання функції, попередньо схематично накресливши її графік:

- 1) $y = 3$;
- 2) $y = 2x - 3$;
- 3) $y = 4 - 5x$;
- 4) $y = x^2$;
- 5) $y = \frac{6}{x}$;
- 6) $y = -\frac{8}{x}$.

20.67. Функцію $y = f(x)$ задано на проміжку $[-6; 6]$ (мал. 20.1). Знайдіть проміжки зростання і проміжки спадання функції $f(x)$.



Мал. 20.1

§ 21. ОЗНАКИ СТАЛОСТИ, ЗРОСТАННЯ ТА СПАДАННЯ ФУНКЦІЇ

З усіх способів задання функції найбільш наочним є графічний. У попередніх класах ми навчилися «читати» графіки, тобто визначати властивості функції за її графіком.

За допомогою похідної можна розв’язати й обернену задачу: побудувати графік функції, знаючи її властивості.

Одне з основних завдань під час дослідження функції і побудови її графіка – це знаходження проміжків зростання, спадання та сталості функції. Таке дослідження можна провести за допомогою похідної.

Нагадаємо, що



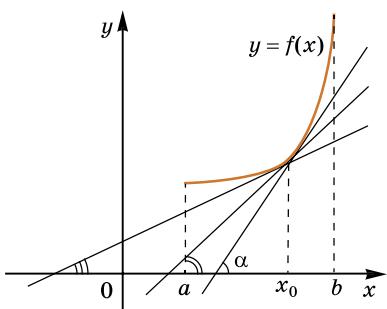
функцію називають зростаючою на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає більше значення функції;



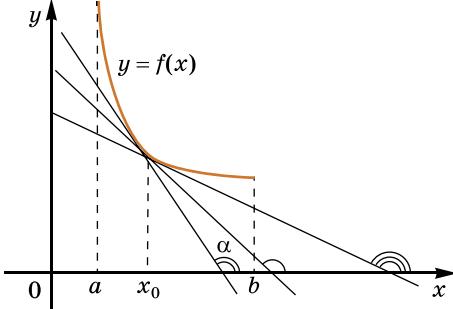
функцію називають спадною на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає менше значення функції.

Проміжки, на яких функція зростає чи спадає, ще називають *проміжками монотонності*.

На малюнку 21.1 зображене зростаючу на проміжку $(a; b)$ функцію $y = f(x)$. У якій би точці цього проміжку ми не провели дотичну до графіка функції, кут α , який вона утворюватиме з додатним напрямом осі абсцис, буде гострим. Оскільки α – гострий, то $\operatorname{tg} \alpha > 0$. Але $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, де x_0 – абсциса точки дотику, тому для будь-якої точки $x_0 \in (a; b)$ справджується умова $f'(x_0) > 0$.



Мал. 21.1



Мал. 21.2

На малюнку 21.2 зображене графік спадної на проміжку $(a; b)$ функції $y = f(x)$. У кожній точці цього проміжку дотична до графіка функції утворюватиме з додатним напрямом осі абсцис кут α , що є тупим. Оскільки α – тупий, то $\operatorname{tg} \alpha < 0$ і тому $f'(x_0) < 0$ для кожної точки $x_0 \in (a; b)$.

Отже, знаючи, зростає чи спадає функція на певному проміжку, можна визначити знак похідної на цьому проміжку. А можна і навпаки, за знаком похідної функції на проміжку визначити, зростає ця функція, спадає чи є сталаю на цьому проміжку.



Теорема 1 (ознака сталості функції). **Функція $y = f(x)$ є сталаю на проміжку $(a; b)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x) = 0$ для кожного x із цього проміжку.**



Теорема 2 (ознака зростання, спадання функції). **Якщо $f'(x) > 0$ в кожній точці проміжку $(a; b)$, то функція $y = f(x)$ зростає на $(a; b)$. Якщо $f'(x) < 0$ в кожній точці проміжку $(a; b)$, то функція $y = f(x)$ спадає на $(a; b)$.**

Строгі доведення цих теорем є досить громіздкими, тому ми їх не наводимо. Зауважимо лише, що теорему 1 ще називають необхідною і достатньою умовою сталості функції, а теорему 2 – достатньою умовою зростання або спадання функції.

Задача 1. Знайти проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = x^3 + 2x$; 2) $f(x) = \cos x - 1,5x$.

- Розв'язання. 1) За теоремою 2, щоб знайти проміжки зростання функції, треба розв'язати нерівність $f'(x) > 0$. Маємо: $f'(x) = 3x^2 + 2$. Оскільки $3x^2 + 2 > 0$ для всіх значень x , то $f'(x) > 0$ для всіх значень x . Отже, функція $f(x) = x^3 + 2x$ зростає на всій області визначення, тобто на R .
- 2) Маємо: $f'(x) = -\sin x - 1,5$. Але $-1 \leq -\sin x \leq 1$, тому $-\sin x - 1,5 < 0$ для всіх значень x , тобто $f'(x) < 0$ для всіх значень x . Отже, функція $f(x) = \cos x - 1,5x$ спадає на всій області визначення, тобто на R .

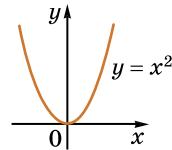
Відповідь. 1) Зростає на R ; 2) спадає на R .

На малюнку 21.3 схематично зображеного графік функції $y = x^2$.

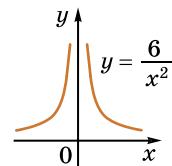
Оскільки $y' = 2x$, то $y' > 0$, коли $2x > 0$, тобто при $x > 0$, і $y' < 0$, коли $2x < 0$, тобто при $x < 0$. Отже, на $(-\infty; 0)$ функція спадає, на $(0; +\infty)$ функція зростає, що підтверджується графіком. У точці $x = 0$, що розділяє два проміжки, на одному з яких функція спадає, а на іншому зростає, похідна дорівнює нулю: $y'(0) = 0$.

На малюнку 21.4 схематично зображеного графік функції $y = \frac{6}{x^2}$. Оскільки $y' = 6 \cdot (x^{-2})' = 6 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = -\frac{12}{x^3}$, то $y' > 0$, коли $-\frac{12}{x^3} > 0$, тобто коли $x^3 < 0$, а значить при $x < 0$, і $y' < 0$, коли $x > 0$. Отже, на $(-\infty; 0)$ функція зростає, на $(0; +\infty)$ спадає, що підтверджується графіком. У точці $x = 0$, що розділяє ці дві проміжки, похідна не існує.

Отже, можемо припустити, що два сусідніх проміжки, на одному з яких функція зростає, а на іншому спадає, можуть розділятися точкою, у якій похідна не існує або дорівнює нулю. Якщо така точка належить області визначення функції, то її називають *критичною*.



Мал. 21.3



Мал. 21.4



Критичними точками функції називають внутрішні точки області визначення, у яких похідна не існує або дорівнює нулю.

Для функції $y = x^2$ точка $x = 0$ є критичною, а для $y = \frac{6}{x^2}$ не є критичною, оскільки не належить області визначення функції. Отже, точки, які не належать області визначення,

також можуть ділити графік на проміжки, на одному з яких функція зростає, а на іншому спадає.

Виходячи з наведених вище міркувань, можна сформулювати послідовність дій для дослідження функції $y = f(x)$ на зростання і спадання.



Алгоритм дослідження функції $f(x)$ на зростання і спадання:

- 1) Знайти область визначення функції.
- 2) Знайти похідну функції.
- 3) Знайти критичні точки функції.
- 4) Поділити знайденими критичними точками область визначення функції на проміжки та з'ясувати знак похідної на кожному з них (для цього достатньо визначити знак похідної $f'(x)$ в одній довільній точці проміжку).
- 5) За знаком похідної визначити проміжки зростання і спадання функції.

Зауважимо, що якщо функція $y = f(x)$ неперервна в точці, що є кінцем проміжку зростання чи спадання, то цю точку приєднують до цього проміжку. Таким чином, можна стверджувати, що функція $y = x^2$ зростає на проміжку $[0; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-\infty; 0]$, оскільки в точці $x = 0$ функція $y = x^2$ неперервна. Проміжки зростання і спадання функції $y = \frac{6}{x^2}$ залишаються без змін, оскільки в точці $x = 0$ ця функція не є неперервною (має розрив, адже $x = 0$ не належить області визначення функції).

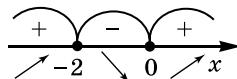
Розглянемо вправи на знаходження проміжків зростання і спадання функції за запропонованим вище алгоритмом. Критичні точки будемо позначати зафарбованими (їх прийнято приєднувати до проміжків монотонності), а точки, які не належать області визначення функції, зображені пізночкою «попорожніми» (їх не прийнято приєднувати до проміжків монотонності). Символом ↗ будемо позначати зростання, а символом ↘ – спадання функції на проміжку.

Задача 2. Знайти проміжки зростання і спадання функції $y = 2x^3 + 6x^2 + 3$.

- Розв'язання. Скористаємося вищезгаданим алгоритмом.
- 1) $D(y)$: $x \in R$.
- 2) $y' = 6x^2 + 12x = 6x(x + 2)$.
- 3) Похідна існує в усіх точках області визначення. Щоб знайти критичні точки, розв'яжемо рівняння $y' = 0$. Маємо: $6x(x + 2) = 0$, звідки $x_1 = 0$; $x_2 = -2$.

- 4) Позначимо критичні точки на області визначення функції і визначимо знак похідної на кожному з отриманих проміжків (мал. 21.5). На проміжку $(-\infty; -2)$ виберемо, наприклад, точку $x = -3$, маємо: $y'(-3) = 6 \cdot (-3) \cdot (-1) > 0$. На проміжку $(-2; 0)$ виберемо, наприклад, $x = -1$, тоді $y'(-1) = 6 \cdot (-1) \cdot 1 < 0$. На проміжку $(0; +\infty)$ виберемо точку $x = 2$. Маємо: $y'(2) = 6 \cdot 2 \cdot 4 > 0$.
- 5) Отже, функція зростає на проміжках $(-\infty; -2]$ та $[0; +\infty)$ і спадає на проміжку $[-2; 0]$.

Відповідь. $(-\infty; -2]$ і $[0; +\infty)$ – проміжки зростання; $[-2; 0]$ – проміжок спадання.



Мал. 21.5

Задача 3. Знайти проміжки монотонності функції $f(x) = x + \frac{16}{x}$.

Розв'язання. 1) $D(f) = x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2) $f'(x) = 1 - \frac{16}{x^2} = \frac{x^2 - 16}{x^2} = \frac{(x-4)(x+4)}{x^2}$.

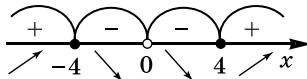
3) $f'(x) = 0$, тобто $\frac{(x-4)(x+4)}{x^2} = 0$, тоді $x_1 = 4$, $x_2 = -4$ – критичні точки.

4) Позначимо ці точки на області визначення функції та з'ясуємо знак похідної (зробіть це самостійно) на кожному з проміжків (мал. 21.6).

5) Функція зростає на проміжках

$(-\infty; -4]$ і $[4; +\infty)$, спадає на проміжках $[-4; 0)$ і $(0; 4]$.

Відповідь. $(-\infty; -4]$ і $[4; +\infty)$ – проміжки зростання, $[-4; 0)$ і $(0; 4]$ – проміжки спадання.

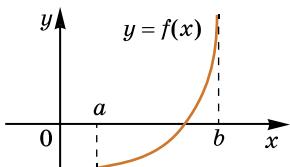


Мал. 21.6

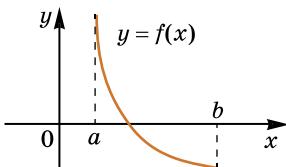
Знаючи проміжки монотонності, можна розв'язувати деякі задачі, пов'язані зі знаходженням коренів рівняння (їхньої кількості; наближеного значення кореня).

Задача 4. Довести, що рівняння $x^5 + 2x^3 + x = 0$ має тільки один корінь.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = x^5 + 2x^3 + x$. Знайдемо її похідну: $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$. Очевидно, що $f'(x) > 0$ для всіх x , тобто $f(x)$ зростає на R . Тоді графік функції $f(x) = x^5 + 2x^3 + x$ може перетинати вісь абсцис не більше ніж в одній точці, відповідно і початкове рівняння матиме не більше одного кореня. Зауважимо, що в цій задачі легко помітити, що $x = 0$ – розв'язок рівняння, адже $0^5 + 2 \cdot 0^3 + 0 = 0$.



Мал. 21.7



Мал. 21.8

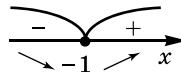
Якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою (спадною) на проміжку $[a; b]$ і на кінцях цього проміжку набуває числових значень різного знаку, це означає, що графік функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$ перетинає вісь абсцис лише в одній точці (мал. 21.7 і 21.8).

Задача 5. Чи має рівняння $2x^4 + 8x - 3 = 0$ корінь на проміжку $[0; 1]$?

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = 2x^4 + 8x - 3$ та знайдемо її проміжки монотонності. Маємо: $f'(x) = 8x^3 + 8$. Розв'яжемо рівняння: $8x^3 + 8 = 0$; $x^3 = -1$; звідки $x = -1$ – критична точка.

Функція $f(x)$ зростає на проміжку $[-1; +\infty)$ (мал. 21.9), а тому зростає і на проміжку $[0; 1]$. На кінцях проміжку $[0; 1]$ значення функції $f(x)$ мають різні знаки: $f(0) = -3$; $f(1) = 7$, отже, графік функції на проміжку $[0; 1]$ перетинає вісь x , і тому рівняння на цьому проміжку має корінь.

Відповідь. Так.



Мал. 21.9

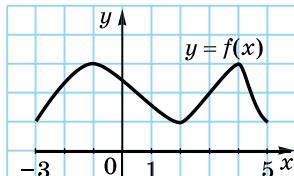


- Що таке проміжок монотонності? ● Сформулюйте ознаку зростання, спадання функції. ● Які точки називають критичними точками функції? ● Сформулюйте алгоритм дослідження функції на зростання і спадання.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

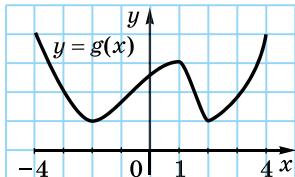
1 21.1. На малюнку 21.10 зображеного графік функції $y = f(x)$, яка визначена на проміжку $[-3; 5]$. На яких проміжках ця функція зростає, а на яких спадає?



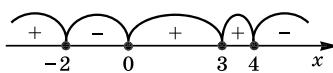
Мал. 21.10

21.2. На малюнку 21.11 зображено графік функції $y = g(x)$, яка визначена на проміжку $[-4; 4]$. На яких проміжках ця функція зростає, а на яких спадає?

21.3. Функція $y = g(x)$ визначена на проміжку $[0; 8]$, причому $f'(x) < 0$ на проміжку $[0; 5]$ і $f'(x) > 0$ на проміжку $(5; 8]$. Опишіть характер зміни функції на проміжку $[0; 8]$.



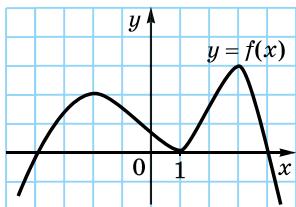
Мал. 21.11



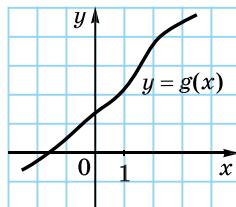
Мал. 21.12

21.4. Знак похідної функції $y = f(x)$, визначеної на R , змінюється за схемою, зображену на малюнку 21.12. Визначте, на яких проміжках функція зростає, а на яких спадає.

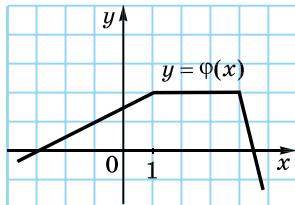
21.5. На малюнках 21.13–21.15 зображено графіки функцій, визначених на R . Укажіть проміжки, на яких похідна функції додатна, а на яких від'ємна.



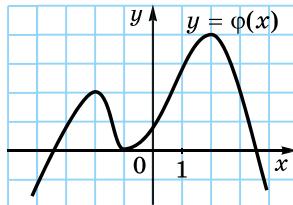
Мал. 21.13



Мал. 21.14



Мал. 21.15



Мал. 21.16

21.6. На малюнку 21.16 зображено графік функції $y = \phi(x)$. Визначте знак похідної функції на проміжку:

- 1) $(-\infty; -2)$;
- 2) $(-2; -1)$;
- 3) $(-1; 2)$;
- 4) $(2; +\infty)$.

Знайдіть критичні точки функції (21.7–21.8):

21.7. 1) $y = x^2 - 2x$; 2) $y = x^3 + 3x^2$.

21.8. 1) $y = 4x - x^2$; 2) $y = 6x^2 + x^3$.

Знайдіть проміжки зростання і спадання функції (21.9–21.10):

21.9. 1) $f(x) = 5x - 7$; 2) $g(x) = 7 - 9x$;

3) $t(x) = 2x^2 - 4x + 7$; 4) $p(x) = -x^2 + 2x$;

5) $\varphi(x) = x^3 - 9x^2 + 5$; 6) $\psi(x) = 12x - x^3$.

21.10. 1) $m(x) = 4 - x$; 2) $f(x) = 2x - 11$;

3) $g(x) = x^2 + 2x - 11$; 4) $t(x) = 4 - 6x - x^2$;

5) $\varphi(x) = x^3 + 3x^2$; 6) $\psi(x) = x^3 - 3x$.

Доведіть, що функція (21.11–21.12):

21.11. 1) $f(x) = 3x^3 + x - 7$ зростає на R ;

2) $g(x) = -x - x^3$ спадає на R .

21.12. 1) $g(x) = x^3 + 2x - 5$ зростає на R ;

2) $f(x) = -2x^3 - x$ спадає на R .

3 Знайдіть критичні точки функції (21.13–21.14):

21.13. 1) $f(x) = 2\sin x + x$; 2) $g(x) = \frac{3-x^2}{x-2}$.

21.14. 1) $g(x) = x + 2\cos x$; 2) $f(x) = \frac{3+x^2}{x+1}$.

Знайдіть проміжки монотонності функції (21.15–21.16):

21.15. 1) $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 5$;

2) $g(x) = x^5 + 3x^3 + x - 17$;

3) $\varphi(x) = -4x - x^7$; 4) $\psi(x) = x + \frac{25}{x}$.

21.16. 1) $g(x) = x^3 + x^2 - x + 7$; 2) $f(x) = 2 + 5x^3 + x^7 + x$;

3) $t(x) = -x^5 - 2x$; 4) $p(x) = \frac{1}{x} + x$.

Доведіть, що функція (21.17–21.18):

21.17. 1) $f(x) = x^3 - x^2 + 7x - \sqrt{3}$ зростає на R ;

2) $g(x) = \sin 4x - 5x$ спадає на R .

21.18. 1) $f(x) = 7x + \cos 2x$ зростає на R ;

2) $g(x) = 4 - 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ спадає на R .



Знайдіть проміжки зростання та проміжки спадання функції (21.19–21.20):

21.19. 1) $f(x) = \frac{3x-5}{2x+7}$;

2) $g(x) = \frac{3x+x^2}{4+x}$;

3) $t(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$;

4) $\varphi(x) = \cos x + \frac{1}{2}x$.

21.20. 1) $p(x) = \frac{1-2x}{3x+1}$;

2) $f(x) = \frac{x^2-3x}{4-x}$;

3) $\varphi(x) = (x-3)\sqrt{x}$;

4) $g(x) = \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

21.21. При яких значеннях a функція $f(x)$ зростає на R :

1) $f(x) = ax^2 + 3x + 5$; 2) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} + x + 7$?

21.22. При яких значеннях a функція $g(x) = 2x^3 + 3ax^2 + 24x - 8$ зростає на R ?

21.23. Доведіть, що рівняння має єдиний корінь:

1) $x^7 + 3x^5 + 2x = 0$; 2) $\sin x - x = 0$.

21.24. Доведіть, що рівняння $x^9 + x + 3 = 0$ має єдиний корінь.

21.25. Чи має рівняння $x^4 + 4x - 2 = 0$ корінь на проміжку:

1) $[-1; 0]$; 2) $[0; 1]$?

21.26. Чи має рівняння $x^6 - 6x + 1 = 0$ корінь на проміжку:

1) $[-1; 0]$; 2) $[0; 1]$?

21.27. (Задача-дослідження). Відомо, що рівняння $x^8 + 8x - 5 = 0$ має два корені.

1) Знайдіть деякі проміжки, яким належать ці корені.

2) Перевірте результат, побудувавши графік функції $y = x^8 + 8x - 5$ за допомогою якої-небудь комп'ютерної програми.



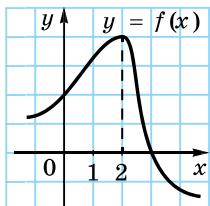
Життєва математика

21.28. Заробітна плата оператора кол-центр у пропорційна кількості відпрацьованих годин. За місяць було відпрацьовано 170 годин і за них нараховано 4590 грн. Скільки годин має відпрацювати оператор наступного місяця, щоб заробити 4860 грн?

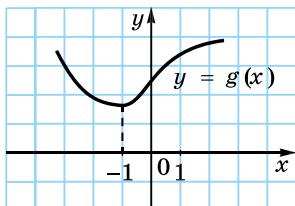


Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

- 21.29.** Використовуючи малюнок 21.17, укажіть таку точку x_0 , щоб на проміжку $(-\infty; x_0]$ функція $f(x)$ зростала, а на проміжку $[x_0; +\infty)$ функція $f(x)$ спадала.



Мал. 21.17



Мал. 21.18

- 21.30.** Використовуючи малюнок 21.18, укажіть таку точку x_0 , щоб на проміжку $(-\infty; x_0]$ функція $g(x)$ спадала, а на проміжку $[x_0; +\infty)$ функція $g(x)$ зростала.

§ 22. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКІЙ

Для дослідження функції та побудови її графіка важливо знати точки екстремуму та екстремуми функцій.

1. Екстремуми функцій

Досліджуючи поведінку функції поблизу деякої точки, зручно користуватися поняттям *околу точки*.

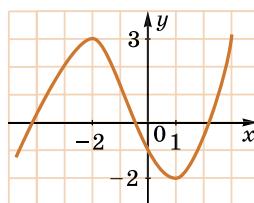


Околом точки x_0 називають будь-який проміжок, що містить цю точку.

Наприклад, околом точки 2 може бути кожен з проміжків $(1,9; 2,1)$ або $(1; 2,5)$; околом точки -3 – проміжок $(-3,8; -2,9)$ або $(-3,01; -2,99)$ тощо.

Приклад 1. Розглянемо графік функції $y = f(x)$, зображеній на малюнку 22.1.

Бачимо, що існує такий окіл точки -2 , що для всіх точок із цього околу функція $y = f(x)$ набуває найбільшого значення саме в точці -2 . Таку точку називають *точкою максимуму* функції, а значення функції в цій точці – *максимумом функції*.



Мал. 22.1



Точку x_0 називають *точкою максимуму* функції $y = f(x)$, якщо для всіх x з деякого околу точки x_0 справджується нерівність $f(x_0) > f(x)$. Значення функції в точці максимуму називають *максимумом функції*.

Будемо позначати точки максимуму через x_{\max} , а максимиуми функції через f_{\max} або y_{\max} . Отже, у прикладі 1 $x_{\max} = -2$, а $y_{\max} = y(-2) = 3$.

Повертаючись до малюнка 22.1, помічаємо, що існує деякий окіл точки 1, що для всіх точок із цього околу функція $y = f(x)$ набуває найменшого значення саме в точці 1. Таку точку називають *точкою мінімуму функції*, а значення функції в цій точці – *мінімумом функції*.



Точку x_0 називають *точкою мінімуму* функції $y = f(x)$, якщо для всіх x з деякого околу точки x_0 справджується нерівність $f(x_0) < f(x)$. Значення функції в точці мінімуму називають *мінімумом функції*.

Через x_{\min} позначають точки мінімуму, а через f_{\min} або y_{\min} – мінімуми функції. У прикладі 1 $x_{\min} = 1$, а $y_{\min} = y(1) = -2$.

Точки максимуму і мінімуму разом називають *точками екстремуму* функції (від лат. *extremum* – крайній), а значення функції в цих точках – *екстремумами функції*.

Зауважимо, що оскільки в точці максимуму (мінімуму) функція набуває найбільшого (найменшого) значення порівняно зі значеннями цієї функції в точках деякого околу, то точки максимуму (мінімуму) називають ще *локальними екстремумами*.

2. Необхідна умова екстремуму

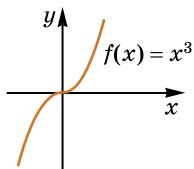
Покажемо, що точками екстремуму можуть бути лише критичні точки функції. Сформулюємо та доведемо відповідну теорему, яку називають *теоремою Ферма* (на честь французького математика П'єра Ферма).



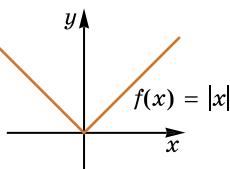
Теорема Ферма (необхідна умова екстремуму). Якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці існує похідна, то вона дорівнює нулю:

$$f'(x_0) = 0.$$

Приймемо цей факт без доведення і зауважимо, що теорема Ферма є лише необхідною умовою екстремуму. Умова $f'(x_0) = 0$ необов'язково означає, що x_0 – точка екстремуму функції.



Мал. 22.2



Мал. 22.3

Приклад 2. Зокрема для функції $f(x) = x^3$ (мал. 22.2) $f'(x) = 3x^2$ і $f'(0) = 0$, але $x_0 = 0$ – не є точкою екстремуму.

Приклад 3. Розглянемо функцію $f(x) = |x|$ (мал. 22.3), для якої $x_0 = 0$ – точка мінімуму. З'ясуємо, чи має функція $f(x) = |x|$ похідну в точці $x_0 = 0$.

Знайдемо $\frac{\Delta f}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{якщо } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Отже, $\lim \frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ не існує, а тому не існує і похідної функції $f(x) = |x|$ у точці 0.

З теореми Ферма та прикладу 2 дійдемо висновку, що

точками екстремуму функції можуть бути тільки її критичні точки.

Тому, знаходячи точки екстремуму функції, у першу чергу знаходить її критичні точки. При цьому треба пам'ятати, що не кожна критична точка є точкою екстремуму (приклад 2).

3. Достатня умова екстремуму

З'ясувати, чи є критична точка точкою екстремуму, можна за допомогою теореми – достатньої умови екстремуму.

Теорема (достатня умова екстремуму). Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 та:

- 1) $f'(x) > 0$ на проміжку $(a; x_0)$ і $f'(x) < 0$ на проміжку $(x_0; b)$, то x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$;
- 2) $f'(x) < 0$ на проміжку $(a; x_0)$ і $f'(x) > 0$ на проміжку $(x_0; b)$, то x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$.

Доведення. 1) Функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і $f'(x) > 0$ на проміжку $(a; x_0)$, тому функція $f(x)$ зростає на $(a; x_0]$ і $f(x) < f(x_0)$ для всіх $x \in (a; x_0)$.

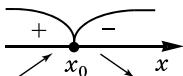
- На проміжку $[x_0; b)$ функція $f(x)$ спадає (доведення аналогічне), тому $f(x) < f(x_0)$ для всіх $x \in (x_0; b)$.
- Отже, $f(x) < f(x_0)$ для всіх $x \neq x_0$ з проміжку $(a; b)$, тому x_0 – точка максимуму функції $f(x)$.
- 2) Доведення аналогічне до пункту 1. ■

Зрозуміло, що в точках екстремуму відбувається зміна монотонності функції. Адже те, що похідна функції при переході через точку змінює знак з «-» на «+», означає, що спадання функції змінюється на зростання. Отже, точка мінімуму – це абсциса такої точки на графіку функції, у якій спадання функції змінюється на зростання. Той факт, що похідна функції при переході через точку змінює знак з «+» на «-», означає, що зростання функції змінюється на спадання. Отже, точка максимуму – це абсциса такої точки на графіку функції, у якій зростання функції змінюється на спадання.

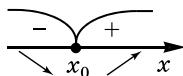
Сформулюємо висновки.

Якщо в точці x_0 похідна змінює знак з «+» на «-» (рухаючись у напрямі зростання x), то x_0 – точка максимуму (мал. 22.4), а якщо з «-» на «+», то x_0 – точка мінімуму (мал. 22.5).

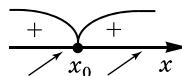
Якщо зміни знаків не відбулося (мал. 22.6 і 22.7), то x_0 не є точкою екстремуму.



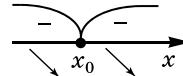
Мал. 22.4



Мал. 22.5



Мал. 22.6



Мал. 22.7

Таким чином, проміжки зростання, спадання та екстремуми функції пов'язані між собою. Тому для знаходження екстремумів функції можна застосувати такий алгоритм:

- 1) Знайти область визначення функції.
- 2) Знайти похідну функції.
- 3) Знайти критичні точки функції.
- 4) Позначити знайдені критичні точки на області визначення функції та знайти знак похідної на кожному з отриманих проміжків.
- 5) Для кожної критичної точки за знаком похідної на проміжках зліва і справа від неї визначити, чи є вона точкою екстремуму, і якою саме, максимуму чи мінімуму. Записати результат.

4. Задачі на пошук точок екстремуму та екстремумів функції

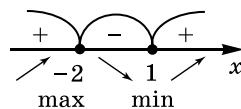
Розглянемо кілька задач.

Задача 1. Знайти точки екстремуму функції

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3.$$

Розв'язання. Скористаємося вище згаданим алгоритмом.

- 1) $D(y) = R$.
- 2) $y' = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$.
- 3) $D(y') = R$, $y' = 0$, маємо рівняння: $(x - 1)(x + 2) = 0$, звідки $x_1 = 1$; $x_2 = -2$ – критичні точки.
- 4) Позначимо критичні точки на $D(y)$ (числовій осі) і визначимо знак похідної на кожному з отриманих проміжків:
 $y'(-5) = (-5 - 1)(-5 + 2) > 0$, тобто $y' > 0$ на $(-\infty; 2)$;
 $y'(0) = (0 - 1)(0 + 2) < 0$, тобто $y' < 0$ на $(-2; 1)$;
 $y'(2) = (2 - 1)(2 + 2) > 0$, тобто $y' > 0$ на $(1; +\infty)$.
- 5) Результат зображеного на малюнку 22.8.



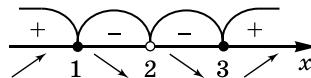
Мал. 22.8

Відповідь. $x_{\max} = -2$; $x_{\min} = 1$.

Задача 2. Знайти екстремуми функції $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

Розв'язання. 1) $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

- 2) $y' = \frac{2x(x - 2) - 1(x^2 - 3)}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(x - 2)^2}$.
- 3) $y' = 0$, тобто $\frac{(x - 1)(x - 3)}{(x - 2)^2} = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 3$ – критичні точки.
- 4) Позначимо критичні точки на області визначення функції та з'ясуємо знак похідної на кожному з отриманих проміжків (мал. 22.9).
- 5) Отже, $x_{\max} = 1$; $x_{\min} = 3$ – точки екстремуму.



Мал. 22.9

Тоді $y_{\max} = y(1) = \frac{1^2 - 3}{1 - 2} = 2$; $y_{\min} = y(3) = \frac{3^2 - 3}{3 - 1} = 3$.

Відповідь: $y_{\max} = y(1) = 2$; $y_{\min} = y(3) = 3$.

А ще раніше...

Латинські слова *такітим* і *тінітим* означають відповідно «найбільше» і «найменше» значення.

Деякими питаннями визначення найбільших і найменших значень геометричних величин займалися ще давньогрецькі математики. Так, наприклад, у 27-му реченні VI книги «Начал» Евклід виключно геометричними методами доводить, що з усіх паралелограмів, вписаних у даний трикутник, найбільшу площину має той, основа якого дорівнює половині основи трикутника.

Задачею знаходження максимумів і мінімумів функції вчені почали займатися в середньовіччі. У 1615 році Кеплер висловив ідею про те, що поблизу максимума величини зміна її непомітна, передбачивши таким чином ідею прирівнювання до нуля похідної при знаходженні максимуму.

Вперше системний підхід до знаходження екстремумів було викладено П. Ферма у його праці «Метод дослідження максимумів і мінімумів» (праця вийшла друком частково у 1642–1644 рр., а повністю – у 1779 р. після смерті автора). Листи ж Ферма кажуть про те, що цим методом він володів уже в 1629 р.

У подальшому цей метод вдосконалили Ньютона у праці «Метод флюксій» (1671 р.) і Лейбніца у своєму «Новому методі» (1684 р.).



- ➊ Що називають околов точки x_0 ? ➋ Яку точку називають точкою максимуму функції, а яку – точкою мінімуму? ➌ Що називають максимумом функції, а що – мінімумом? ➍ Які точки називають точками екстремуму, що називають екстремумом функції?
- ➎ Сформулюйте теорему Ферма (необхідну умову екстремуму).
- ➏ Сформулюйте і доведіть достатню умову екстремуму. ➐ Сформулюйте алгоритм дослідження функції на точки екстремуму та екстремуми?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1 **22.1.** На малюнку 21.11 зображеного графік функції $y = g(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 4]$. Знайдіть точки екстремуму та екстремуми цієї функції.
- 22.2.** На малюнку 21.10 зображеного графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-3; 5]$. Знайдіть точки екстремуму та екстремуми цієї функції.
- 22.3. (Усно).** Функція $y = f(x)$ неперервна в точці $x_0 = 2$, причому $f'(x) < 0$ на проміжку $(1; 2)$ і $f'(x) > 0$ на проміжку $(2; 3)$. Чи є точка $x_0 = 2$ точкою мінімуму? А точкою максимуму?

22.4. (Усно). Функція $y = t(x)$ неперервна в точці $x_0 = -1$, при чому $t'(x) > 0$ на проміжку $(-2; -1)$ і $t'(x) < 0$ на проміжку $(-1; 0)$. Чи є точка $x_0 = -1$ точкою мінімуму? А точкою максимуму?

22.5. Знаки похідної функції $y = g(x)$, визначеної на R , зображені на малюнку 22.10. Назвіть точки мінімуму і точки максимуму цієї функції.



Мал. 22.10

22.6. Зобразіть схематично графік функції та впевніться в тому, що функція не має точок екстремуму:

$$1) y = \frac{6}{x}; \quad 2) y = 4; \quad 3) y = \operatorname{tg} x; \quad 4) y = \operatorname{ctg} x.$$

Знайдіть точки екстремуму функції $y = f(x)$. Які з них є точками максимуму, а які – точками мінімуму (22.7–22.8)?

$$\begin{array}{ll} 22.7. 1) f(x) = 2x - 7; & 2) f(x) = 2x^2 - 4x + 5; \\ 3) f(x) = 6 - 12x - x^2; & 4) f(x) = 3x^2 - x^3. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 22.8. 1) f(x) = 4 - 2x; & 2) f(x) = x^2 + 6x - 8; \\ 3) f(x) = 3 + 8x - 2x^2; & 4) f(x) = x^3 - 6x^2. \end{array}$$

Знайдіть точки екстремуму та екстремуми функції (22.9–22.10):

$$\begin{array}{ll} 22.9. 1) y = x^3 - 6x^2 - 15x + 3; & 2) y = 1 + 18x + 15x^2 - 4x^3; \\ 3) y = x - 3x^3; & 4) y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 22.10. 1) y = 2x^3 + 6x^2 - 18x; & 2) y = 2 + 12x + 9x^2 - 10x^3; \\ 3) y = x^3 - 3x; & 4) y = x^4 - 2x^2 + 3. \end{array}$$

22.11. Знайдіть точки максимуму і точки мінімуму функції:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \frac{3x+1}{x-1}; & 2) g(x) = \frac{x}{9} + \frac{9}{x}; \\ 3) t(x) = \frac{2x}{x^2+1}; & 4) \varphi(x) = 4\sqrt{x} - x. \end{array}$$

22.12. Знайдіть точки мінімуму і точки максимуму функції:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \frac{2x}{x+2}; & 2) \varphi(x) = \frac{x}{9} + \frac{4}{x}; \\ 3) \psi(x) = \frac{x}{x^2+4}; & 4) p(x) = x - 2\sqrt{x}. \end{array}$$

Знайдіть точки екстремуму та екстремуми функції (22.13–22.14):

22.13. 1) $f(x) = x^2(x - 4)^2$;

2) $g(x) = -\frac{1}{x^2 - 4x + 5}$;

3) $t(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$;

4) $\psi(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 9}$.

22.14. 1) $\varphi(x) = x^2(x + 2)^2$;

2) $g(x) = \frac{1}{x^2 + 6x + 8}$;

3) $\psi(x) = \frac{x^2}{9 - x^2}$;

4) $t(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 7}$.

4 Знайдіть точки екстремуму функції (22.15–22.16):

22.15. $f(x) = \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}x$.

22.16. $g(x) = \cos x + \frac{1}{2}x$.

Знайдіть точки екстремуму та екстремуми функції (22.17–22.18):

22.17. $f(x) = 15x^3 - x^5$.

22.18. $f(x) = 7x^5 - 5x^7$.

22.19. При яких значеннях a функція $y = 2x^3 + 3ax^2 + 6x - 2$ не має точок екстремуму?



Життєва математика

22.20. Відстань l (у км) від спостерігача, що знаходить-ся на невеликій висоті h м над землею до лінії горизонту, за якою він спостерігає, обчислюється за формулою

$$l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}, \text{ де } R = 6400 \text{ км} - \text{радіус Землі.}$$

На якій найменшій висоті слід розташуватися спостерігачеві, щоб він бачив горизонт на відстані не менше ніж 4 кілометри?



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

22.21. 1) Знайдіть координати вершини параболи, що є графіком функції $f(x) = x^2 - 2x + 3$, визначте напрям її гілок та побудуйте схематично її графік.

2) Знайдіть точки екстремуму функції $f(x) = x^2 - 2x + 3$, екстремуми функції та її проміжки зростання і спадання. Побудуйте схематично графік функції.

3) Порівняйте отримані у пунктах 1) і 2) графіки функцій.

§ 23. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКІЙ І ПОБУДОВИ ЇХНІХ ГРАФІКІВ

Раніше нам вже траплялися функції, вигляд графіків яких на той час ми не знали. У таких випадках ми будували їхні графіки по точках. Так було побудовано, наприклад, графіки функцій $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$; $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, тощо.

Але, застосовуючи такий спосіб побудови для складніших функцій, які нам не траплялися, можна пропустити важливі особливості графіка функції. Для того щоб уникнути подібних помилок, треба спочатку дослідити поведінку функції, виявити її особливості, а тільки потім будувати графік. До особливостей поведінки функції належать і її зростання, спадання та екстремуми. Тому для побудови графіка будемо використовувати похідну.

Досліджувати функцію $y = f(x)$ та будувати її графік можна за таким алгоритмом:



- 1) Знайти область визначення функції.
- 2) Дослідити функцію на парність, непарність та періодичність (для тригонометричних функцій).
- 3) Знайти точки перетину графіка функції з осями координат (якщо це можливо).
- 4) Знайти похідну функції та її критичні точки.
- 5) Знайти проміжки зростання, спадання та екстремуми функції.
- 6) Дослідити поведінку функції на кінцях проміжків області визначення, якщо це можливо.
- 7) За необхідності знайти ще кілька точок графіка та, використовуючи отримані результати, побудувати графік функції.

Застосовуючи цей алгоритм, слід пам'ятати, що відомими нам методами не завжди вдається розв'язати рівняння $f(x) = 0$, тобто знайти точки перетину з віссю абсцис. Також іноді важко дослідити поведінку функції на кінцях проміжків області визначення чи поблизу точок розриву. У такому разі доцільно знайти кілька точок графіка, абсциси яких є дуже близькими до абсцис згаданих точок.

Результати дослідження по пункту 5 зручно подавати у вигляді таблиці.

Розглянемо приклади дослідження функції та побудови її графіка за вказаним алгоритмом.

Задача 1. Дослідити функцію $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ та побудувати її графік.

- Розв'язання. 1) $D(f) = R$.
- 2) $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 - 3 = x^4 - 2x^2 - 3 = f(x)$; функція парна, тому її графік симетричний відносно осі ординат.
- 3) $f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 - 3 = -3$, тобто $(0; -3)$ – точка перетину з віссю y . Нехай $y = 0$, тоді маємо: $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$, звідки $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, отже, $(\sqrt{3}; 0), (-\sqrt{3}; 0)$ – точки перетину з віссю Ox .
- 4) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1)$; тоді $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$ – критичні точки.
- 5) Складемо таблицю, у якій зазначимо проміжки зростання, спадання, критичні точки функції та висновки щодо поведінки функції:

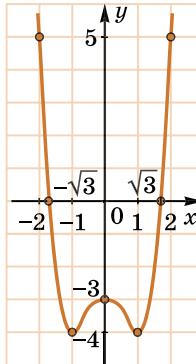
x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	–4	↗	–3	↗	–4	↗
Висновок	спадає	min	зростає	max	спадає	min	зростає

6) Оскільки $D(f) = R$, то область визначення не має кінців.

7) Будуємо графік функції, використовуючи результати дослідження та значення функції ще у двох додаткових точках, наприклад, $f(-2) = f(2) = 5$.

Графік зображено на малюнку 23.1.

Метод побудови графіка з використанням похідної значно розширює коло задач, які доцільно розв'язувати графічно (з'ясування кількості коренів рівняння, пошук наближених значень коренів тощо).



Мал. 23.1

Задача 2. Дослідити функцію $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$ та побудувати її графік. Скільки коренів має рівняння $\frac{x^2 - 3x}{x + 1} = a$ залежно від значення a ?

- Розв'язання. 1) $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.
- 2) Оскільки область визначення функції не симетрична відносно нуля, то функція ні парна, ні непарна.

3) Точка перетину з віссю y : $f(0) = \frac{0^2 - 3 \cdot 0}{0 + 1} = 0$; точки перетину з віссю Ox : $y = 0$; $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1} = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 3$.

Отже, $(0; 0)$, $(3; 0)$ – точки перетину з осями координат.

$$4) f'(x) = \frac{(2x - 3)(x + 1) - 1 \cdot (x^2 - 3x)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x + 1)^2},$$

тоді $x_1 = 1$; $x_2 = -3$ – критичні точки.

5) Дослідимо функцію на монотонність і екстремуми:

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	Не існує	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	-9	\searrow	Не існує	\searrow	-1	\nearrow
Висновок	зростає	max	спадає	точка розриву	спадає	min	зростає

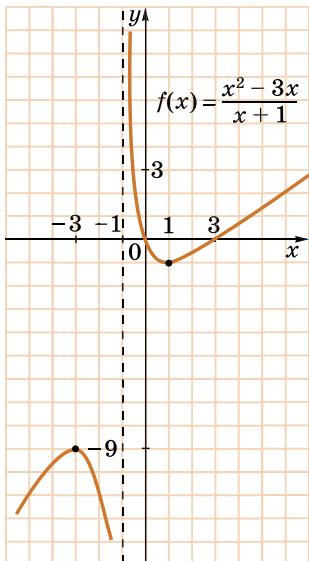
6) Точка $x = -1$ не належить області визначення функції. Дослідимо поведінку функції в околі точки -1 .

Нехай спочатку $x \rightarrow -1$, але $x < -1$ (кажуть: зліва від -1). Тоді $x + 1 \rightarrow 0$ і $x + 1 < 0$. Зауважимо, що $x^2 - 3x \rightarrow 4$ при $x \rightarrow -1$. Чим ближче x до числа -1 , тим більшим за модулем стає значення дробу $\frac{x^2 - 3x}{x + 1}$ і є від'ємним. Можна сказати, що при $x \rightarrow -1$, за умови, що $x < -1$, значення функції прямує до $-\infty$.

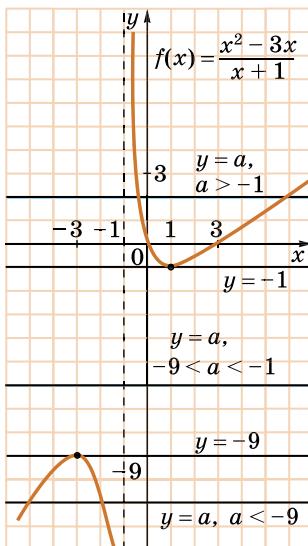
Аналогічно: у випадку $x \rightarrow -1$, де $x > -1$ значення функції прямує до $+\infty$.

Проведемо (пунктиром) пряму $x = -1$, тоді зліва від прямої $x = -1$ графік буде прямувати вниз, а справа від прямої $x = -1$ буде прямувати вгору. Пряму $x = -1$ у такому разі називають *асимптотою*. Графік функції зображенено на малюнку 23.2.

Тепер з'ясуємо, скільки коренів має рівняння $\frac{x^2 - 3x}{x + 1} = a$ залежно від значень a , графічно. Для цього розглянемо графіки функцій $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$ та $y = a$, де a – число (мал. 23.3) та знайдемо кількість точок їх перетину, це й буде кількість коренів рівняння. Для різних значень a їх кількість буде різною.



Мал. 23.2



Мал. 23.3

За малюнком 23.3 маємо, що, коли $a < -9$, то графіки перетинаються у двох точках, а тому рівняння має два корені. Якщо $a = -9$, то графіки перетинаються в одній точці, а тому рівняння має один корінь. У випадку $-9 < a < -1$ графіки не перетинаються, а тому рівняння не має коренів. При $a = -1$ графіки перетинаються в одній точці, тому рівняння має один корінь; а якщо $a > -1$, то графіки перетинаються у двох точках і рівняння має два корені.

Відповідь. Якщо $a < -9$ або $a > -1$, то рівняння має два корені; якщо $a = -9$ або $a = -1$, то рівняння має один корінь; якщо $-9 < a < -1$, то рівняння не має коренів.

Задача 3. Знайти множину значень функції $f(x) = (x - 3)\sqrt{x}$ та з'ясувати, при яких значеннях a має корені рівняння $(x - 3)\sqrt{x} = a^2 + a - 2$.

• Розв'язання. Розв'яжемо задачу графічно, тобто знайдемо множину значень функції за її графіком. Для цього дослідимо поведінку функції.

- 1) $D(f) = [0; +\infty)$.
- 2) Функція ні парна, ні непарна, бо її область визначення не симетрична відносно нуля.
- 3) Точка перетину з віссю Oy : $x = 0$; $y = f(0) = 0$; точки перетину з віссю Ox : $f(x) = 0$, тобто $(x - 3)\sqrt{x} = 0$; звідки $x_1 = 3$; $x_2 = 0$.

• Отже, $(0; 0)$, $(3; 0)$ – точки перетину з осями координат.

$$4) f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x} + (x - 3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x - 3}{2\sqrt{x}} = \frac{3(x - 1)}{2\sqrt{x}}.$$

• Тоді $x = 1$ – критична точка.

5)	x	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
	$f'(x)$	Не існує	–	0	+
	$f(x)$	0	↗	-2	↗
Висновок	не є критичною точкою	функція спадає	min	функція зростає	

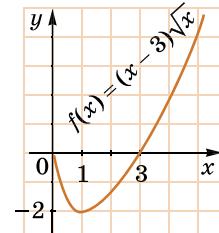
6) Точка $(0; 0)$ належить графіку функції.

7) Графік зображенено на малюнку 23.4.

За графіком легко встановити, що $y \geqslant -2$ на області визначення функції, тобто множиною значень є проміжок $[-2; +\infty)$.

Щоб рівняння $(x - 3)\sqrt{x} = a^2 + a - 2$ мало корені, треба, щоб значення виразу $a^2 + a - 2$ належало множині значень функції $f(x) = (x - 3)\sqrt{x}$, тобто, щоб справді джувалася умова $a^2 + a - 2 \geqslant -2$, звідки $a^2 + a \geqslant 0$. Розв'яжемо нерівність відносно a , отримаємо, що $a \leqslant -1$ або $a \geqslant 0$ (розв'яжіть нерівність самостійно).

Відповідь. $[-2; +\infty)$, $a \leqslant -1$ або $a \geqslant 0$.



Мал. 23.4



Сформулюйте алгоритм дослідження функції та побудови її графіка. Поясніть на прикладі 2, як можна використовувати графік функції для дослідження кількості коренів рівняння. Поясніть, як за графіком функції знайти множину її значень.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



Дослідіть функцію та побудуйте її графік (23.1–23.2):

23.1. 1) $f(x) = x^2 + 3x - 4$; 2) $f(x) = -x^2 + 5x + 4$;

3) $f(x) = -0,5x^2 - x + 1,5$;

4) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$.

23.2. 1) $f(x) = x^2 - 4x$;

2) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$;

3) $f(x) = -0,5x^2 - 2x + 2,5$;

4) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x$.

23.3. Побудуйте схематично графік функції $g(x)$ та знайдіть множину її значень:

$$1) g(x) = 3x - \frac{1}{4}x^2;$$

$$2) g(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2}.$$

23.4. Побудуйте схематично графік функції $\varphi(x)$ та знайдіть множину її значень:

$$1) \varphi(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 5x;$$

$$2) \varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}.$$



Дослідіть функцію та побудуйте її графік (23.5–23.6):

23.5. 1) $f(x) = x^3 - 3x;$

2) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - x^3;$

3) $f(x) = \frac{16}{3}x^3 - 4x^4;$

4) $f(x) = \frac{1}{2}x - x^4.$

23.6. 1) $f(x) = x^3 - 3x^2;$

2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x;$

3) $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3;$

4) $f(x) = 2x + 4x^4.$

23.7. 1) Дослідіть функцію $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1,5$ та побудуйте схематично її графік.

2) Скільки коренів має рівняння $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1,5 = 0$?

23.8. 1) Дослідіть функцію $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - 1$ та побудуйте схематично її графік.

2) Скільки коренів має рівняння $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$?

23.9. 1) Дослідіть функцію $f(x) = \frac{30x - 30}{x^2 + 15}$ та побудуйте схематично її графік.

2) Знайдіть множину значень функції $f(x) = \frac{30x - 30}{x^2 + 15}$.

23.10. 1) Дослідіть та побудуйте схематично графік функції $g(x) = \frac{24x - 24}{x^2 + 8}$.

2) Знайдіть множину значень функції $g(x) = \frac{24x - 24}{x^2 + 8}$.



Дослідіть функцію та побудуйте схематично її графік (23.11–23.12):

23.11. 1) $f(x) = \frac{3-2x}{x-5}$; 2) $g(x) = \frac{x^2+3x}{1-x}$.

23.12. 1) $f(x) = \frac{12-3x}{x-2}$; 2) $g(x) = \frac{8x-x^2}{1+x}$.

23.13. 1) Дослідіть функцію $f(x) = 2\sqrt{x} - x$ та побудуйте її графік.

2) Знайдіть область значень функції $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.

23.14. 1) Дослідіть функцію $g(x) = x - 4\sqrt{x}$ та побудуйте її графік.

2) Знайдіть область значень функції $g(x) = x - 4\sqrt{x}$.

23.15. 1) Дослідіть функцію $f(x) = \frac{7x}{2x^2 - 3x + 2}$ та побудуйте її графік.

2) Скільки коренів має рівняння $\frac{7x}{2x^2 - 3x + 2} = a$ залежно від значень a ?

23.16. 1) Знайдіть область значень функції $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$.

2) Чи має розв'язки рівняння $(x-1)\sqrt{x} = -\frac{1}{2}$?

23.17. 1) Дослідіть функцію $f(x) = x(\sqrt{x} - 6)$ та побудуйте її графік.

2) Знайдіть область значень функції $f(x) = x(\sqrt{x} - 6)$.

3) При яких значеннях a рівняння $x(\sqrt{x} - 6) = a - 20$ має розв'язки?



Життєва математика

23.18. Висота над землею підкинутого вгору м'яча змінюється за законом $h(t) = 1,6 + 8t - 5t^2$, де h – висота в метрах, t – час, що минув з моменту підкидання, у секундах. Скільки секунд м'яч перебуватиме на висоті не менше трьох метрів?



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

23.19. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^2 - 4x$ на проміжку:

- 1) $[-2; 1]$; 2) $[-1; 3]$; 3) $[-3; 3]$; 4) $[4; 5]$.

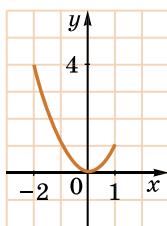
§ 24. НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКІЇ НА ПРОМІЖКУ

Розв'язування багатьох прикладних задач часто зводиться до знаходження найбільшого і (або) найменшого значення неперервної на деякому проміжку функції. Тому задачу можна розв'язати за допомогою похідної.

1. Найбільше і найменше значення функції

буде $f(-2) = 4$, а найменшим $-f(0) = 0$. Це записують так:

$$\max_{[-2; 1]} f(x) = f(-2) = 4; \min_{[-2; 1]} f(x) = f(0) = 0.$$



Мал. 24.1

Розглянемо функцію $f(x) = x^2$, яку задано на проміжку $[-2; 1]$. Її графік зображено на малюнку 24.1.

Найбільшим значенням цієї функції на заданому проміжку

буде $f(-2) = 4$, а найменшим $-f(0) = 0$. Це записують так:

$$\max_{[-2; 1]} f(x) = f(-2) = 4; \min_{[-2; 1]} f(x) = f(0) = 0.$$

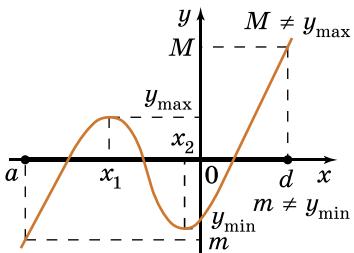
Зауважимо, що на заданому проміжку функція має точку мінімуму: $x_{\min} = 0$, але не має точок максимуму.

Від найбільшого і найменшого значень функції, неперервної на проміжку, залежить її множина значень на цьому проміжку. Так, множиною значень функції $f(x) = x^2$, заданої на проміжку $[-2; 1]$, є множина $[0; 4]$.

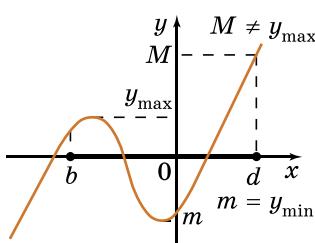
Тобто, якщо m – найменше значення неперервної на проміжку $[a; b]$ функції $y = f(x)$, а M – її найбільше значення, то множиною значень функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$ буде множина $[m; M]$.

Якщо на проміжку $[a; b]$ функція має екстремуми, це ще не означає, що найбільшого або найменшого значення функція досягає саме в точках екстремуму. Розглянемо функцію $y = f(x)$, визначену на R , графік якої зображене на малюнках 24.2–24.4.

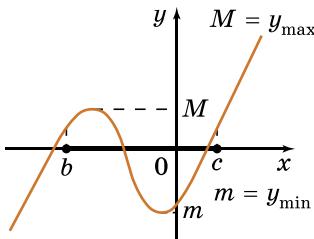
Наприклад, на відрізку $[a; d]$ найменшого і найбільшого значень функція набуває на кінцях проміжка $[a; d]$, хоча має на цьому проміжку точки максимуму і мінімуму (мал. 24.2).



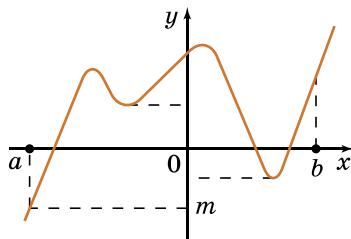
Мал. 24.2



Мал. 24.3



Мал. 24.4



Мал. 24.5

Натомість на проміжку $[b; d]$ найменшого значення функція досягає в точці мінімуму (мал. 24.3), а на проміжку $[b; c]$ – найбільшого значення в точці максимуму (мал. 24.4). Якщо ж розглядатимемо проміжок $[b; 0]$, то найбільшого і найменшого значень функція досягає відповідно в точках максимуму і мінімуму (мал. 24.4). На малюнку 24.5 функція має аж дві точки мінімуму на проміжку $[a; b]$, але вони не є її найменшими значеннями на цьому проміжку.

Можна дійти висновку, що коли функція $y = f(x)$ неперервна і монотонна (тобто або зростає, або спадає) на проміжку $[a; b]$, то найбільшого і найменшого значень ця функція точно набуватиме на його кінцях (мал. 24.6 і 24.7).

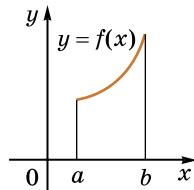
Якщо ж функція є неперервною на деякому проміжку і має на ньому лише одну точку екстремуму, то саме в цій точці функція набуватиме найбільшого (якщо ця точка – точка максимуму) або найменшого (якщо ця точка – точка мінімуму) значення на цьому проміжку.

Отже, найбільшого значення на проміжку функція може набувати або в точці максимуму, що належить цьому проміжку, або на його кінцях. Так само найменшого значення на проміжку функція може набувати або в точці мінімуму, що належить цьому проміжку, або на його кінцях. Зрозуміло, що ці значення залежать виключно від заданого проміжку та поведінки функції (її монотонності) на ньому.

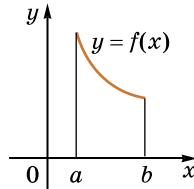
Для знаходження найбільшого і найменшого значень функції $f(x)$ на заданому проміжку можна використовувати такий алгоритм:



- 1) Перевірити, що проміжок належить області визначення функції.
- 2) Знайти похідну функції.
- 3) Знайти критичні точки функції.



Мал. 24.6



Мал. 24.7

- 4) Вибрати ті критичні точки, що належать даному проміжку.
- 5) Обчислити значення функції у вибраних критичних точках та на кінцях проміжку.
- 6) Порівняти одержані значення та вибрати з них найбільше і найменше.
- 7) Записати результат.

2. Знаходження найбільшого і найменшого значень функції на проміжку

Розглянемо знаходження найбільшого і найменшого значень функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$ за допомогою вищезгаданого алгоритма.

Задача 2.

Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ на проміжку $[0; 3]$.

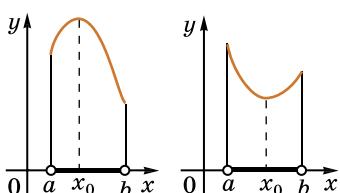
- Розв'язання. 1) $D(f) = R; [0; 3] \subset R$.
- 2) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$.
- 3) Розв'яжемо рівняння $x^2 - x - 2 = 0$, тоді $x_1 = -1; x_2 = 2$ – критичні точки.
- 4) $-1 \notin [0; 3]; 2 \in [0; 3]$.
- 5) $f(2) = -19; f(0) = 1; f(3) = -8$.
- 6) Отже, $\max_{[0; 3]} f(x) = f(0) = 1; \min_{[0; 3]} f(x) = f(2) = -19$.

Відповідь. $\max_{[0; 3]} f(x) = f(0) = 1; \min_{[0; 3]} f(x) = f(2) = -19$.

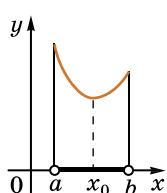
3. Практичний зміст найбільшого або найменшого значення деякої величини

Розв'язуючи прикладні задачі, пов'язані з найбільшим або найменшим значеннями деякої величини, використовують математичне моделювання так само, як для розв'язування текстових задач.

Зауважимо, що при розв'язуванні деяких прикладних задач необхідно знайти найбільше або найменше значення неперервної функції не на проміжку $[a; b]$, а на проміжку $(a; b)$. Зазвичай у таких випадках на проміжку $(a; b)$ функція має лише одну критичну точку. Якщо це точка максимуму, то саме в цій точці на проміжку $(a; b)$ функція набуває найбільшого значення (мал. 24.8), а якщо це точка мінімуму – то найменшого (мал. 24.9).



Мал. 24.8



Мал. 24.9

Задача 3. Парканом, довжина якого 80 м, треба огородити з трьох сторін ділянку прямокутної форми якомога більшої площині. Знайдіть розміри такої ділянки (мал. 24.10).



Мал. 24.10

Розв'язання. 1) Позначимо через x (у м) довжину однієї з двох паралельних сторін паркану (мал. 24.11), тоді сусідня сторона буде мати довжину $80 - 2x$, де $0 < x < 40$.

2) Складемо функцію залежності площині ділянки від довжини її сторони x :

$$S(x) = x(80 - 2x) = 80x - 2x^2.$$

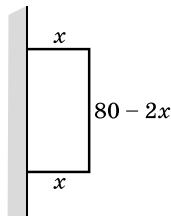
Ця функція є математичною моделлю задачі. Тому задача знаходження розмірів ділянки зводиться до знаходження значення x , при якому функція $S(x)$ на проміжку $(0; 40)$ набуватиме найбільшого значення.

3) Знайдемо найбільше значення функції $S(x)$, за умови $x \in (0; 40)$.

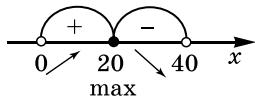
$S'(x) = 80 - 4x = 0$, тоді $x = 20$. Маємо, що $x_{\max} = 20$ (мал. 24.12).

4) Оскільки $S(x) = 80x - 2x^2$ неперервна на $(0; 40)$ і має єдину точку екстремуму – точку максимуму $x_{\max} = 20$, то саме в цій точці $S(x)$ досягає найбільшого значення. Отже, розміри ділянки будуть 20 м і $80 - 2 \cdot 20 = 40$ м.

Відповідь. 20 м і 40 м.



Мал. 24.11



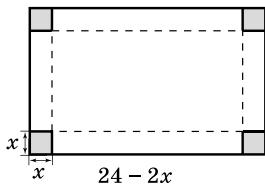
Мал. 24.12

Отже, розв'язувати прикладні задачі на знаходження найбільшого або найменшого значень деякої величини, можна за таким алгоритмом:

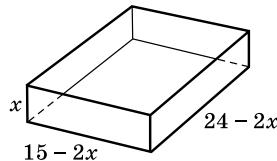


- 1) Одну з невідомих величин позначити через x та знайти межі значення x . Інші величини виразити через x .
- 2) Скласти функцію – математичну модель задачі.
- 3) Знайти найбільше чи найменше значення отриманої функції на проміжку для значень x .
- 4) Проаналізувати отриманий результат та записати відповідь до задачі.

Задача 4. З аркуша картону прямокутної форми, розміри якого 15×24 см, вирізвавши у його кутах квадрати так, як показано на малюнку 24.13, виготовили відкриту коробку найбільшого об'єму. Знайдіть об'єм цієї коробки.

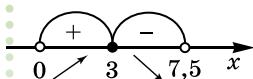


Мал. 24.13



Мал. 24.14

- Розв'язання. 1) Позначимо довжину сторони вирізаного квадратика через x (см), тоді кожна зі сторін прямокутника, який буде дном коробки, зменшаться на $2x$ і дорівнюватиме $24 - 2x$ (см) і $15 - 2x$ (см), $0 < x < 7,5$.
- 2) Складемо функцію залежності об'єму коробки від довжини сторони вирізаних квадратів (мал. 24.14):
 $V(x) = x(15 - 2x)(24 - 2x)$, тобто $V(x) = 360x - 78x^2 + 4x^3$.
- 3) Знайдемо найбільше значення функції $V(x)$ на проміжку $(0; 7,5)$.



Мал. 24.15

Маємо: $V(x) = 360 - 156x + 12x^2$.

$V'(x) = 0$, коли $x_1 = 3$; $x_2 = 10$.

Значення $x_2 = 10$ – не належить проміжку $(0; 7,5)$, маємо: $x_{\max} = 3$ (мал. 24.15).

4) Оскільки $V(x) = 360x - 78x^2 + 4x^3$ неперевна на $(0; 7,5)$ і має точку максимуму $x_{\max} = 3$, то саме в ній $V(x)$ набуватиме найбільшого значення. Знайдемо його:

$$\max_{(0; 7,5)} V(x) = V(3) = 3 \cdot 9 \cdot 18 = 486 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь. 486 см³.



Сформулюйте алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$. Сформулюйте алгоритм розв'язування прикладних задач на знаходження найбільшого або найменшого значень деякої величини.



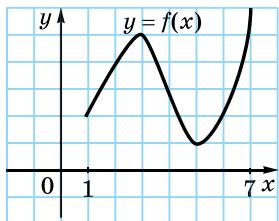
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



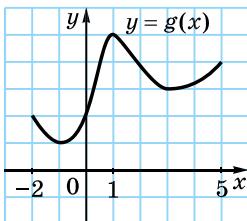
24.1. На малюнку 24.16 зображене графік функції $y = f(x)$, заданої на проміжку $[1; 7]$. Назвіть її найбільше та найменше значення на цьому проміжку. Запишіть відповідні рівності.



24.2. На малюнку 24.17 зображене графік функції $y = g(x)$, заданої на проміжку $[-2; 5]$. Назвіть її найбільше та найменше значення на цьому проміжку. Запишіть відповідні рівності.



Мал. 24.16



Мал. 24.17



24.3. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на заданому проміжку:

- 1) $f(x) = 3x - 7$, $[0; 2]$;
- 2) $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $[2; 3]$;
- 3) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$, $[1; 4]$;
- 4) $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3$, $[-2; 0]$.

24.4. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $g(x)$ на заданому проміжку:

- 1) $g(x) = -2x + 3$, $[0; 3]$;
- 2) $g(x) = x^2 - 4x$, $[0; 1]$;
- 3) $g(x) = -x^2 + 6x - 1$, $[2; 4]$;
- 4) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$, $[1; 3]$.

24.5. Поділіть відрізок завдовжки 12 см на два таких відрізки, щоб прямокутник, сторонами якого вони будуть, мав найбільшу площину.

24.6. Поділіть відрізок завдовжки 8 см на два таких відрізки, щоб прямокутний трикутник, катетами якого вони будуть, мав найбільшу площину.

24.7. Подайте число 16 у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб сума їх квадратів була найменшою.

24.8. Подайте число 10 у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб їх добуток був найбільшим.



24.9. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $g(x)$ на заданому проміжку:

- 1) $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$, $x \in [-2; 1]$;
- 2) $g(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 5$, $x \in [-3; 0]$;
- 3) $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in [-1; 3]$;
- 4) $g(x) = x^3 + 3x^2 + 1$, $x \in [-3; 1]$.

24.10. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x)$

на заданому проміжку:

- 1) $f(x) = 8x^2 - x^4$, $x \in [-1; 2]$;
- 2) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 5$, $x \in [0; 4]$;
- 3) $f(x) = 2x^2 - x^4 + 3$, $x \in [-3; 1]$;
- 4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, $x \in [-1; 3]$.

24.11. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом

$$x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 2t + 4 \quad (x \text{ вимірюється в метрах, } t \text{ - у секундах})$$

Якого найбільшого і найменшого значень набуде $x(t)$ за перші чотири секунди руху?

24.12. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 3t + 2$ (s вимірюється в метрах, t – у секундах). Якого найбільшого і найменшого значень набуде $s(t)$ за перші три секунди руху?

24.13. Число 24 подайте у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб добуток одного з них на куб другого був найбільшим.

24.14. Число 18 подайте у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб добуток одного з них на квадрат другого був найбільшим.

24.15. Площа прямокутника дорівнює 16 см^2 . Якої довжини мають бути його сторони, щоб периметр прямокутника був найменшим?

24.16. Площа прямокутного трикутника дорівнює 18 см^2 . Якої довжини мають бути його катети, щоб їхня сума була найменшою?

4 24.17. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на заданому проміжку:

$$1) f(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}, x \in [2; 4]; \quad 2) f(x) = x\sqrt{x+3}, x \in [-3; 1].$$

24.18. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $g(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$, на проміжку $[0; 2]$.

24.19. Тіло рухається за законом $s(t) = 6t^2 - \frac{1}{3}t^3$ (s вимірюється в метрах, t – у секундах). У який момент часу t , де $3 \leq t \leq 8$, швидкість тіла буде найбільшою і в який найменшою?

24.20. Матеріальна точка рухається за законом $x(t) = 3t^2 - \frac{2}{3}t^3$

(x вимірюється в метрах, t – у секундах). У який момент часу з проміжку $[0; 3]$ швидкість тіла буде найбільшою і в який найменшою?

24.21. Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$f(x) = x - \cos x$ на проміжку: 1) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $[-\pi; 0]$.

24.22. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = \sin x - x$ на проміжку: 1) $[-\pi; 0]$; 2) $[0; \pi]$.

24.23. Акваріум об'ємом 4 м^3 має форму прямокутного паралелепіпеда з квадратним дном. Які розміри цього акваріума, якщо на його виготовлення витратили найменш можливу кількість скла?

24.24. Бічні сторони і менша основа трапеції мають однакову довжину – по 5 см. Знайдіть довжину її більшої основи, за якої площа трапеції буде найбільшою.

Життєва математика

24.25. Для скління музейних вітрин треба замовити 28 однакових скляніх прямокутників, площа кожного з яких дорівнює $0,25 \text{ м}^2$. Замовлення можна зробити в одній з трьох фірм. У таблиці наведено ціни на скло і на різання скла. Скільки буде коштувати найдешевше замовлення?

Фірма	Ціна скла (грн за 1 м^2)	Різання скла (грн за одне скло)	Додаткові умови
А	140	9	
Б	150	7	
В	160	5	Для замовлень від 1200 грн різання скла безкоштовне



Завдання для перевірки знань за курс алгебри 10 класу

1

1. Дано $f(x) = x^2 - 3$. Порівняйте:
1) $f(-1)$ і $f(1)$; 2) $f(0)$ і $f(-2)$.

2. Які з рівностей є тотожностями:

- 1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; 2) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$;
3) $\cos 2\alpha = \cos \alpha - \sin \alpha$; 4) $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$?

3. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^4 + \cos x$; 2) $g(x) = 1 - 2\sqrt{x}$.

2

4. Обчисліть:

1) $\sqrt[3]{27 \cdot 64}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$;
3) $\sqrt{3} \sin(-60^\circ)$; 4) $\cos \frac{\pi}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 = 81$; 2) $\operatorname{ctg} 2x = -\sqrt{3}$.

3

6. Знайдіть проміжки монотонності, точки екстремуму та

екстремуми функції $y = 6x - x^2$.

7. Подайте у вигляді степеня:

1) $\left(\sqrt[5]{\sqrt{x}} \cdot x^{-\frac{1}{4}}\right)^{20}$; 2) $\left(\sqrt[8]{a} \cdot \sqrt[3]{a^{-2}}\right)^{-12}$.

8. Дано: $\sin \alpha = 0,6$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Знайдіть:

1) $\cos \alpha$; 2) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

4

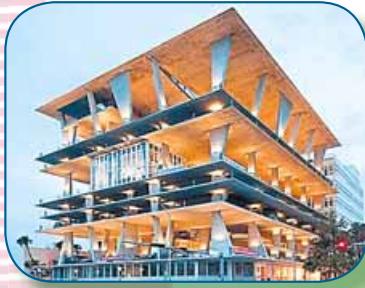
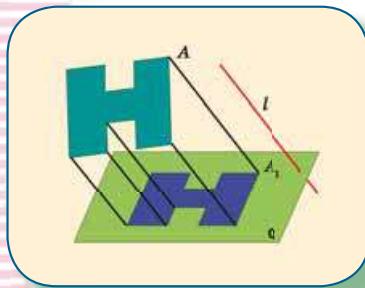
9. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 + 3x - 1$, яка паралельна до прямої $y = 7x$.

ЧАСТИНА II

ГЕОМЕТРІЯ

РОЗДІЛ 1

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ



У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ МИ

- **пригадаємо** аксіоми і основні поняття планіметрії;
- **дізнаємося** про аксіоми і основні поняття стереометрії, взаємне розміщення прямих і площин у просторі; паралельне проектування та його властивості, ознаки мимобіжності прямих, паралельності прямої і площини, паралельності площин;
- **навчимося** класифікувати взаємне розміщення прямих, прямих і площин, площин у просторі; встановлювати паралельність прямих, прямої і площини, площин; мимобіжність прямих; будувати паралельні проекції фігур.

§ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ ТА НАЙПРОСТИШІ НАСЛІДКИ З НИХ

1. Предмет стереометрії

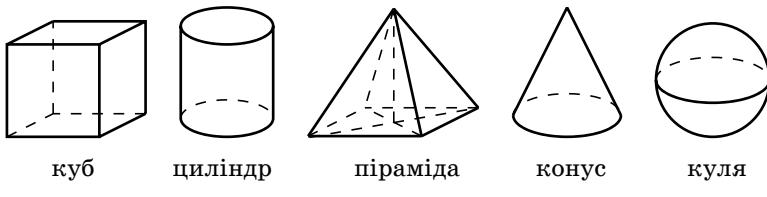
Шкільний курс геометрії складається з планіметрії і стереометрії. У курсі планіметрії 7–9 класів ми вивчали властивості *плоских геометричних фігур*, тобто фігур, усі точки яких лежать в одній площині (відрізок, коло, трикутник тощо).

Стереометрія – це розділ геометрії, який вивчає властивості геометричних фігур у просторі.

Термін «стереометрія» походить від грец. «стереос» – просторовий, «метрео» – міряти.

У стереометрії розглядають як властивості фігур, всі точки яких лежать в одній площині, – плоских фігур, так і властивості фігур, у яких не всі точки лежать в одній площині, – *просторових фігур*, які ще називають *геометричними тілами*.

У курсі математики основної школи ми вже ознайомилися з геометричними тілами – прямокутним паралелепіпедом, кубом, пірамідою, циліндром, конусом та кулею (мал. 1.1). Предмети, що нас оточують, зазвичай повторюють форму просторових фігур або їх комбінацій. Тому геометрія, зокрема стереометрія, має і прикладне (практичне) значення. Геометричні задачі доводиться розв'язувати в архітектурі та будівництві, геодезії і машинобудуванні, інших галузях науки й техніки.



Мал. 1.1

На уроках геометрії в 10–11 класах ми значно розширимо та поглибимо знання про геометричні фігури в просторі.

2. Основні поняття стереометрії

Основними (*неозначуваними, первісними*) поняттями в стереометрії є поняття *точки, прямої і площини*.

Нагадаємо, що уявлення про точку дає, наприклад, слід на папері від дотику добре загостреного олівця, слід на дощці від дотику крейди тощо. Позначати точки, як і раніше, будемо великими латинськими літерами A, B, C, D, \dots .

Уявлення про пряму дає промінь світла, струна на гітарі, розмітка між двома смугами прямолінійної дороги тощо. Прямі можна проводити за допомогою лінійки. При цьому отримують зображення лише частини прямої, а всю пряму уявляють нескінченою в обидва боки. Позначати прямі, як і раніше, будемо малими латинськими літерами a , b , c , d , ... або двома великими латинськими літерами за назвами двох точок цієї прямої: AB , CD , MN ,

Уявлення про площину дає поверхня стола, футбольне поле, віконна шибка, стеля тощо. Площину в геометрії вважають рівною та необмеженою, вона не має краю та не має товщини. На малюнку площину прийнято зображати у вигляді паралелограма (мал. 1.2) або довільної замкненої області (мал. 1.3). При цьому отримують зображення лише частини площини. Позначати площини можна малими грецькими літерами α (альфа), β (бета), γ (гама),



Мал. 1.2



Мал. 1.3

3. Аксіоми стереометрії

Основні властивості найпростіших геометричних фігур у стереометрії формулюють за допомогою *аксіом*.

Аксіоми є початковими істинними твердженнями. Усі аксіоми планіметрії, які відомі нам з 7 класу, справджаються і в стереометрії. Нагадаємо ці аксіоми та зауважимо, що коли мова йде про «две точки» або «две прямі», вважаємо, що ці точки або прямі – різні.



- I. Яка не була б пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.
- II. Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.
- III. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.
- IV. Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.
- V. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.
- VI. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180° .
- VII. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.
- VIII. На площині через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести лише одну пряму, паралельну даній.

Оскільки в планіметрії усі фігури, які ми розглядали, лежали в одній площині, а в стереометрії вони можуть лежати в різних площинах, остання аксіома, яку називають *аксіомою паралельності прямих*, потребує уточнення.

Нове поняття – *площа* – потребує ще й розширення системи аксіом, тобто доповнення стереометрії аксіомами, що відображають властивості точок, прямих і площин у просторі.

Тому розглянемо нову групу аксіом – групу аксіом С.

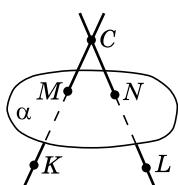


С_I. Яка б не була площа, існують точки, які її належать, і які її не належать.

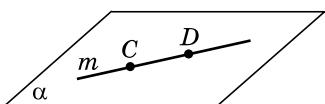
На малюнку 1.4 точки M і N належать площині α (площа α проходить через ці точки), а точки C , K і L – не належать цій площині. Для запису, як і у планіметрії, будемо використовувати символи \in і \notin . Тому твердження «точка M належить площині α » можна записати так: $M \in \alpha$, а «точка C не належить площині α » – так: $C \notin \alpha$.



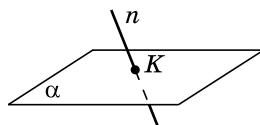
С_{II}. Якщо дві точки прямої належать площині, то всі точки прямої належать цій площині.



Мал. 1.4



Мал. 1.5



Мал. 1.6

У цьому випадку кажуть, що *пряма належить площині*, або *площа проходить через пряму*. На малюнку 1.5 точки C і D прямої m належать площині α , тому і пряма m , що проходить через ці точки, належить площині α . Для зручності замість «пряма m належить площині α » будемо писати: $m \subset \alpha$. Запис $n \not\subset \alpha$ означатиме, що пряма n не належить площині α , тобто існує така точка прямої n , яка не належить площині α (мал. 1.6 та мал. 1.7). На малюнку 1.6 пряма n і площа α мають одну спільну точку K . У цьому випадку кажуть, що пряма n перетинає площину α в точці K .

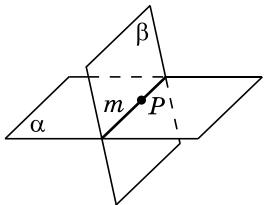
Це записують так: $n \cap \alpha = K$.

Аксіома С_{II} має різні практичні застосування. Одне з них – перевірка «рівності» лінійки. Із цією метою лінійку прикладають краєм, який перевіряють, до плоскої поверхні, наприклад столу. Якщо край лінійки рівний, то він усіма своїми точками

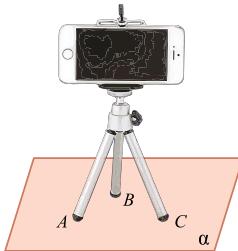
прилягає до поверхні столу. Якщо ж край нерівний, то в деяких місцях між ним і поверхнею столу утворюється просвіт.

Якщо через пряму m проходить дві різні площини α і β , то кажуть, що площини α і β перетинаються по прямій m (мал. 1.8), і записують так: $\alpha \cap \beta = m$.

С_{ІІІ}. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.



Мал. 1.8



Мал. 1.9

На малюнку 1.8 площини α і β мають спільну точку P , тобто P належить як площині α , так і площині β . Аксіома С_{ІІІ} стверджує, що тоді площини α і β перетинаються по прямій m , причому точка P , в свою чергу, належатиме цій прямій m .

С_{ІV}. Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

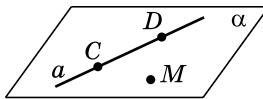
Практичною ілюстрацією цієї аксіоми є, наприклад, стійкість на підлозі будь-якої триноги (табурета на трьох ніжках, фотоштатива тощо). Три точки A , B , C , які є кінцями триноги, завжди можна розмістити у площині підлоги α (мал. 1.9), таку площину називають трьома її точками – площиною ABC і позначають (ABC) . Якщо ж узяти чотири довільні точки, то через них може не проходити жодна площаця. Практичною ілюстрацією цього факту може стати стілець, ніжки якого різні за довжиною. Тоді стілець буде стояти на трьох ніжках, тобто спиратися на три точки площини підлоги, а кінець четвертої ніжки (четверта «точка») не буде лежати у цій площині і тому стілець буде хитатися.

4. Найпростіші наслідки з аксіомою стереометрії



Теорема 1 (про існування і єдність площини, що проходить через пряму і точку, що їй не належить). Через пряму і точку, що їй не належить, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

Доведення. Розглянемо пряму a і точку M , $M \notin a$ (мал. 1.10). 1) Позначимо на прямій a довільні точки C і D . Точки C , D і M не лежать на одній прямій, тому через них за аксіомою C_{IV} можна провести площину α . Точки C і D лежать у площині α , а тому за аксіомою C_{II} вся пряма a належить площині α . Отже, площаина α проходить через пряму a і точку M .



Мал. 1.10

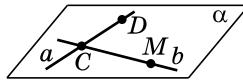
2) Доведемо, що така площаина єдина. Припустимо, що через пряму a і точку M проходить ще якась площаина α_1 . Але тоді ця площаина має проходити і через точки C і D , що лежать на прямій a . Маємо, що через точки C , D і M , які не лежать на одній прямій, проходять дві різні площаини, α і α_1 , що суперечить аксіомі C_{IV} .

Отже, наше припущення хибне, а тому через пряму a і точку M , що їй не належить, проходить єдина площаина α . ■



Теорема 2 (про існування і єдиність площаини, яка проходить через дві прямі, що перетинаються). Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площаину, і до того ж тільки одну.

Доведення. Розглянемо прямі a і b , причому $a \cap b = C$ (мал. 1.11). Позначимо на прямій b точку M , а на прямій a – точку D , обидві відмінні від точки C . Маємо три точки M , C і D , які не лежать на одній прямій, а тому далі доведення аналогічні до доведення попередньої теореми. Пропонуємо завершити його самостійно. ■



Мал. 1.11

З аксіоми C_{IV} та теорем 1 і 2 випливає, що площаину можна задавати:

- 1) трьома точками, що не лежать на одній прямій;
- 2) прямою і точкою, що їй не належить;
- 3) двома прямими, що перетинаються.

Ще один спосіб задання площаини розглянемо пізніше.

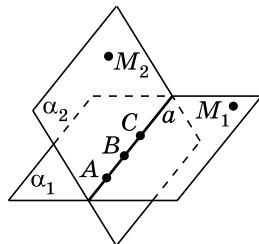


Задача 1. Довести, що через три точки, які лежать на одній прямій, можна провести площаину. Скільки існує таких площаин?

Доведення. Нехай точки A , B і C лежать на одній прямій – прямій a (мал. 1.12). 1) За аксіомою 1 існує точка, що прямій a не належить, назовемо її M_1 . За теоремою 1 через пряму a і точку M_1 можна провести площаину, назовемо її α_1 . Вона проходить через три дані точки.

- 2) За аксіомою С_I існують точки, які не належать площині α_1 . Розглянемо точку M_2 , яка не належить площині α_1 , а тому не належить і прямій a , оскільки $a \subset \alpha_1$. Тоді через пряму a і точку M_2 можна провести площину α_2 . Ця площаина також, як і площаина α_1 , проходить через три дані точки.
- Міркуючи аналогічно, можна дійти висновку, що існує безліч площин, які проходять через три точки, що лежать на одній прямій.

Відповідь. Безліч.

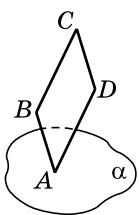


Мал. 1.12

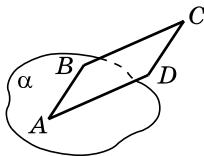
Задача 2. Дано площину α і паралелограм $ABCD$. Чи може площині α належати:

- тільки одна вершина паралелограма;
- тільки дві вершини паралелограма;
- тільки три вершини паралелограма?

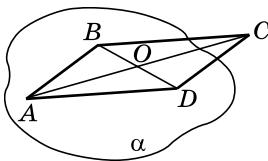
Розв'язання. У випадках 1) і 2) може (мал. 1.13 та 1.14).



Мал. 1.13



Мал. 1.14



Мал. 1.15

- Припустимо, що три вершини паралелограма A, B і D належать площині α , а вершина C – ні (мал. 1.15). Проведемо діагоналі паралелограма AC і BD . Нехай O – точка їх перетину. Оскільки $B \in \alpha$ і $D \in \alpha$, то $BD \subset \alpha$, а тому $O \in \alpha$. Оскільки $A \in \alpha$ і $O \in \alpha$, то $AO \subset \alpha$. Але $C \in AO$, тому $C \in \alpha$. Маємо, що всі чотири вершини паралелограма належать площині α , що суперечить умові. Отже, наше припущення хибне, а тому тільки три із чотирьох вершин паралелограма $ABCD$ не можуть належати площині α .

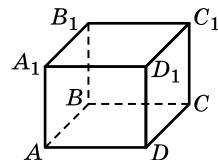
Відповідь. 1) Так; 2) так; 3) ні.

5. Найпростіші задачі з геометричними тілами

Оскільки ми вже знаємо деякі відомості про прямокутний паралелепіпед, куб і піраміду, розглянемо кілька задач, пов'язаних з цими фігурами.

Задача 3. На малюнку 1.16 зображене прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

- 1) Чи належить точка C_1 площині CDD_1 ?
- 2) У якій точці пряма AB перетинає площину B_1C_1C ?
- 3) Яка площа проходить через точку B і пряму CD ?
- 4) По якій прямій перетинаються площини ABC і A_1B_1B ?



Мал. 1.16

- Розв'язання. 1) Грань прямокутного паралелепіпеда CDD_1C_1 належить площині CDD_1 . Тому точка C_1 належить цій площині.
- 2) Оскільки $B \in AB$ і $B \in (B_1C_1C)$, то $AB \cap (B_1C_1C) = B$.
- 3) Через точку B і пряму CD проходить площа BCD .
- 4) Оскільки $AB \subset (ABC)$ і $AB \subset (A_1B_1B)$, то $(ABC) \cap (A_1B_1B) = AB$. Відповідь. 1) Так; 2) B ; 3) (BCD) ; 4) AB .

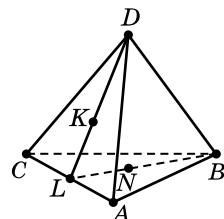
Задача 4. На малюнку 1.17 зображене трикутну піраміду $ABCD$. Укажіть:

- 1) усі площини, яким належить пряма KL ;
- 2) точку перетину прямої BN з площею CAD ;
- 3) пряму перетину площин DKB і ABC .

• Розв'язання.

- 1) $KL \subset (ACD)$, $KL \subset (DLB)$.
- 2) Оскільки $L \in BN$ і $L \in (CAD)$, то $BN \cap (CAD) = L$.
- 3) Оскільки $LB \subset (DKB)$ і $LB \subset (ABC)$, то $(DKB) \cap (ABC) = LB$.

Відповідь. 1) (ACD) , (DLB) ; 2) L ; 3) LB .



Мал. 1.17

А ще раніше...

Давньогрецький учений Евклід у своїй видатній праці «Начала» зібрав і узагальнив досвід грецьких математиків. Були

відомі Евкліду й аксіоми стереометрії, які ми розглянули в цьому параграфі. Так, наприклад, аксіому C_{II} Евклід сформулював так: «Частини прямої лінії не можуть лежати одна над площею, а інша – у самій площині», а аксіому C_{III} – так: «Дві площини перетинаються по прямій лінії».

Безсумнівно, «Начала» Евкліда вже понад два тисячоліття слугують зразком дедуктивної побудови геометрії. Однак математики впродовж сторіч наголошували на основному недоліку евклідових аксіом – іх неповноті, тобто недостатності їх для чіткої логічної побудови геометрії, за якої кожне твердження має бути логічно виведене з аксіом та доведених раніше тверджень.

Упродовж століть математики вдавалися до спроб дедуктивної побудови геометрії, завершився цей процес лише наприкінці XIX ст. завдяки роботам математиків М. Паша, Дж. Пеано, Дж. Веронезе, М. Пієрі, і в першу чергу завдяки видатному німецькому математику Давиду Гільберту. У своїй класичній праці «Основи геометрії» (1899) Гільберт сконструював аксіоматику геометрії таким чином, що логічна структура геометрії стала абсолютно прозорою. Так, наприклад, Гільберт не дав прямого означення основних геометричних об'єктів: точки, прямої, площини. Те, що необхідно знати про ці об'єкти, він виклав в аксіомах, які є, по суті, іх непрямими означеннями.

Серед аксіом Гільберта є й аксіоми стереометрії. Наприклад, одну з аксіом цього параграфа Гільберт сформулював так: «Якщо точки A і B прямої a лежать в площині α , то будь-яка точка цієї прямої лежить в площині α .



Д. Гільберт
(1862–1943)



- Що таке стереометрія? ● Які фігури називають плоскими, а які – просторовими? Наведіть приклади плоских і просторових фігур. ● Назвіть основні поняття стереометрії. ● Як зображають та позначають площини у стереометрії? ● Сформулюйте аксіоми стереометрії. ● Сформулюйте й доведіть найпростіші наслідки з аксіом стереометрії.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



1.1. Намалуйте площину α , точку M , що належить цій площині, та точку N , яка цій площині не належить. Запишіть відповідні твердження за допомогою символів.



1.2. Намалуйте площину β та пряму a , що їй належить. Запишіть відповідне твердження за допомогою символів.



1.3. Дано пряму m , що належить площині β . Виконайте малюнок та позначте на ньому точки A і B , які належать площині β , але не належать прямій m .



1.4. Точки A і B належать площині α . Виконайте малюнок та позначте на ньому точку C , яка належить площині α , але не належить прямій AB , та точку K , яка не належить площині α .



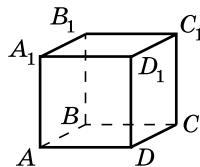
1.5. Намалуйте площину γ та пряму a , що перетинає її у точці M . Скільки точок прямої a лежить у площині γ ?

1.6. (Усно). Які з тверджень істинні:

- 1) будь-які дві точки завжди належать одній прямій;
- 2) будь-які три точки завжди належать одній прямій;
- 3) будь-які три точки завжди належать одній площині;
- 4) будь-які чотири точки завжди належать одній площині?

1.7. На малюнку 1.18 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

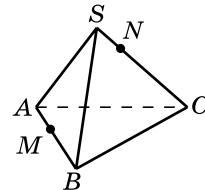
- 1) Чи належить точка C площині ABD ?
- 2) Чи належить точка B площині DCC_1 ?
- 3) У якій точці пряма AA_1 перетинає площину ABC ?
- 4) Укажіть деяку пряму, що перетинає площину AA_1B .
- 5) Яка площа проходить через точку B і пряму C_1C ?
- 6) Укажіть деяку пряму, що належить площині $A_1B_1C_1$.



Мал. 1.18

1.8. На малюнку 1.19 зображено трикутну піраміду $SABC$, точку M , що належить ребру AB , та точку N , що належить ребру SC .

- 1) Чи належить точка M площині ABC ?
- 2) Чи належить точка B площині SAC ?
- 3) У якій точці пряма SB перетинає площину ABC ?
- 4) Укажіть деяку пряму, що перетинає площину SBC .
- 5) Яка площа проходить через точку N і пряму SA ?
- 6) Укажіть деяку пряму, що належить площині SAB .



Мал. 1.19



1.9. (Усно). Чи можуть дві різні площини мати лише:

- 1) одну спільну точку;
- 2) дві спільні точки;
- 3) три спільні точки;
- 4) 2010 спільних точок?

1.10. Чи можуть пряма і площа мати лише:

- 1) одну спільну точку;
- 2) дві спільні точки;
- 3) три спільні точки;
- 4) 999 спільних точок?

1.11. На малюнку 1.19 зображено трикутну піраміду $SABC$. Укажіть:

- 1) пряму перетину площин ASB і SMC ;
- 2) площину, яка проходить через прямі BN і SC .

1.12. На малюнку 1.18 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть:

- 1) пряму перетину площин DD_1C_1 і ABD ;
- 2) площину, яка проходить через прямі A_1B і AB_1 .

1.13. (Усно). Чи однакові за змістом твердження «пряма належить площині» і «пряма й площаина мають спільну точку»? Відповідь обґрунтуйте.

1.14. Відомо, що через три дані точки можна провести принаймні дві площини.

1) Яке взаємне розміщення цих точок?

2) Скільки площин можна провести через ці три точки?

1.15. Відомо, що через дані пряму і точку можна провести принаймні дві площини.

1) Яке взаємне розміщення прямої і точки?

2) Скільки площин можна провести через ці пряму і точку?

 **1.16.** Дано дві прямі, через які не можна провести площину. Чи можуть ці прямі перетинатися? Відповідь обґрунтуйте.

1.17. Дано дві площини, які не перетинаються. Чи можуть ці площини мати спільну точку? Відповідь обґрунтуйте.

1.18. Площини α і β мають спільні точки A , B і C .

1) Чи можна дійти висновку, що α і β збігаються?

2) У якому випадку можна дійти висновку, що α і β збігаються?

1.19. (Усно). Чому мотоцикл з коляскою стоїть на дорозі стійко, а для мотоцикла без коляски потрібна додаткова опора?

1.20. Чому незамкнені двері відчиняються, а замкнені двері нерухомі?

 **1.21.** Прямі AB і CD перетинаються. Доведіть, що прямі AC і BD лежать в одній площині.

1.22. Через прямі AB і AC проведено площину. Доведіть, що цій площині належить медіана AM трикутника ABC .

1.23. Доведіть, що через будь-яку пряму і точку можна провести площину. Розгляньте два випадки.

1.24. Доведіть, що через будь-які три точки можна провести площину. Розгляньте два випадки.

1.25. Три прямі, які проходять через точку P , перетинають пряму a відповідно в точках A , B і C . Доведіть, що точки A , B , C і P лежать в одній площині.

1.26. Прямі AB і AC перетинають пряму a в точках M і N відповідно. Доведіть, що точки A , B , C , M і N лежать в одній площині.

1.27. Пряма a проходить через центр кола. Чи можна стверджувати, що пряма перетинає коло? Виконайте відповідний малюнок.

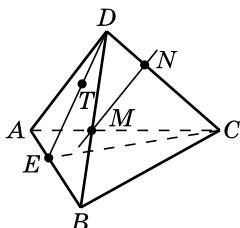
3

1.28. Пряма b проходить через центри вписаного і описаного кіл трикутника ABC . Чи можна стверджувати, що пряма b належить площині ABC ?

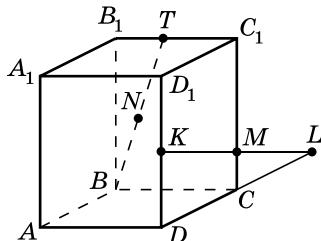
1.29. Пряма c перетинає сторони AB і AC трикутника ABC . Чи можна стверджувати, що пряма c належить площині ABC ?

1.30. На малюнку 1.20 зображені трикутну піраміду $DABC$. Укажіть:

- 1) площини, яким належать прямі TE , MN , DB , AB , EC (врахуйте всі можливі випадки);
- 2) точку перетину прямої DN з площиною ABC ; прямої CE із площиною ABD ;
- 3) точки, що належать як площині ADB , так і площині ABC ;
- 4) пряму, по якій перетинаються площини DTC і ABC .



Мал. 1.20



Мал. 1.21

1.31. На малюнку 1.21 зображені прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть:

- 1) точки, що належать як площині DCC_1 , так і площині BTB_1 ;
- 2) осі площини, яким належить пряма DL ;
- 3) точку перетину прямої KM із площиною ABC ; прямої BN із площиною $A_1B_1C_1$;
- 4) пряму, по якій перетинаються площини NB_1C_1 і ABC .

1.32. (Усно). Як за допомогою двох ниток столяр може перевірити, чи лежать кінці чотирьох ніжок стола (або стільниця) в одній площині?

1.33. Площини α і β перетинаються. Пряма a належить площині α і перетинає площину β в точці A . Пряма b належить площині β і перетинає площину α в точці B . Доведіть, що AB – пряма перетину площин α і β .

1.34. Площини α і β перетинаються по прямій c . Пряма a належить площині α і перетинає площину β . Чи перетинаються прямі a і c ? Відповідь обґрунтуйте.

1.35. Точка M не належить площині трикутника ABC . Доведіть, що прямі MA і BC не перетинаються.

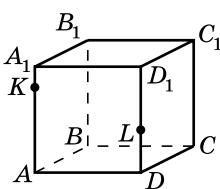
1.36. Дано пряму l і точку P , що їй не належить. Точка K не лежить у площині, що проходить через пряму l і точку P . Доведіть, що прямі l і PK не перетинаються.

1.37. (Усно). Чи однакові за змістом твердження «прямі a і b належать різним площинам» і «прямі a і b не належать одній площині»? Відповідь обґрунтуйте.

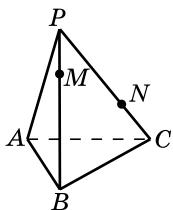
1.38. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 1.22).

1) Перемалюйте малюнок у зошит та побудуйте точку перетину прямої KL із площиною ABC та точку перетину прямої KL із площиною $A_1B_1C_1$. Побудову обґрунтуйте.

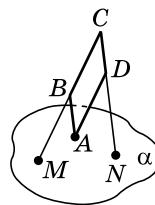
2) За якої умови вказані точки побудувати неможливо?



Мал. 1.22



Мал. 1.23



Мал. 1.24

1.39. $PABC$ – трикутна піраміда (мал. 1.23).

1) Перемалюйте малюнок у зошит та побудуйте точку перетину прямої MN із площиною ABC . Побудову обґрунтуйте.
2) За якої умови вказану точку побудувати неможливо?

1.40. Дві вершини паралелограма та точка перетину його діагоналей належать площині α . Чи можна стверджувати, що дві інші вершини паралелограма також належать площині α ?

1.41. Вершина A опуклого плоского чотирикутника належить площині α (мал. 1.24), а вершини B , C і D не належать цій площині. Прямі CB і CD перетинають площину α відповідно в точках M і N . Чи правильно виконано малюнок 1.24? Відповідь обґрунтуйте.

1.42. Вершина D плоского чотирикутника $ABCD$ належить площині β , а всі інші вершини – їй не належать. Прямі BC і AC перетинають площину β відповідно в точках K і L . Доведіть, що точки K , L і D лежать на одній прямій.

1.43. $PABC$ – трикутна піраміда (мал. 1.23). Пряма MN не паралельна прямій BC . Перемалюйте малюнок у зошит та побудуйте пряму перетину площин AMN і ABC . Побудову обґрунтуйте.

- 1.44.** $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 1.22). Пряма KL не паралельна прямій AD . Перемалюйте малюнок у зошит та побудуйте пряму перетину площин KLC і ABC . Побудову обґрунтуйте.
- 1.45.** 1) Нехай A, B, C – три точки простору. Доведіть для простору нерівність $AB \leq BC + CA$.
 2) Скільки площин можна провести через точки M, N і P , якщо $MN = 0,5$ дм, $NP = 40$ мм, $MP = 8$ см?
- 1.46.** Скільки площин можна провести через точки K, L і M , якщо $KL = 5$ см, $LM = 110$ мм, $KM = 0,6$ дм?
- 1.47.** Кожна з трьох прямих перетинається із двома іншими. Скільки різних площин можна провести через дані прямі, взяті попарно? Укажіть і обґрунтуйте всі можливі випадки.
- 1.48.** Основи трьох бісектрис трикутника належать площині α . Чи належать площині α вершини трикутника? Відповідь обґрунтуйте.
- 1.49.** Середини трьох сторін трикутника належать площині α . Чи належать площині α вершини трикутника? Відповідь обґрунтуйте.
- 1.50.** Основи трьох висот трикутника належать площині β . Чи можна стверджувати, що площині β належать і вершини трикутника?



Життєва математика

- 1.51.** Відношення висоти до ширини екрана монітора дорівнює $9 : 16$. Діагональ екрана монітора дорівнює 40 дюймів. Знайдіть ширину екрана в сантиметрах.



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

- 1.52.** На площині дано пряму m і точку A , що цій прямій не належить. Скільки прямих, паралельних прямій m , можна провести через точку A ?
- 1.53.** $ABCD$ – паралелограм. У площині паралелограма проведено пряму KL , паралельну BC . Доведіть, що $KL \parallel AD$.

§ 2. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ У ПРОСТОРИ

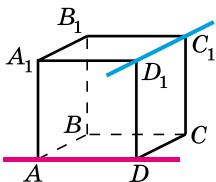
1. Прямі у просторі

Як відомо з курсу планіметрії, для двох прямих на площині є лише два випадки взаємного розміщення: вони або перетинаються, або паралельні. Оскільки в просторі існують площини і у цих площинах справджуються планіметричні властивості, то згадані розміщення прямих зберігаються також і у просторі.

Проте у просторі можливий ще один випадок розміщення прямих. Розглянемо куб (мал. 2.1). Прямі AD і D_1C_1 не мають спільних точок і не паралельні. У такому випадку кажуть, що дві прямі не лежать в одній площині, тобто не існує жодної площини, що проходила б через обидві ці прямі.

Дві прямі, які не лежать в одній площині, називають мимобіжними.

На малюнку 2.1 прямі AD і D_1C_1 – мимобіжні. Наочне уявлення про мимобіжні прямі дають дві дороги, одна з яких проходить по мосту, а інша під мостом (мал. 2.2).



Мал. 2.1



Мал. 2.2

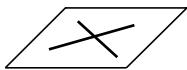
Нагадаємо, що планіметрія – це геометрія на площині, а, отже, усі фігури належать цій одній площині. Натомість у стереометрії розглядають не одну, а безліч площин, тому фігури можуть належати різним площинам. Отже, означення *паралельних прямих* у стереометрії порівняно з означенням паралельних прямих на площині потребує уточнення.

Дві прямі у просторі називають паралельними, якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються.

Паралельність прямих a і b позначать як і у планіметрії: $a \parallel b$.

Отже, у просторі є три випадки взаємного розміщення двох прямих:

1) прямі лежать в одній площині і мають спільну точку, тобто це прямі, що перетинаються (мал. 2.3);



Мал. 2.3



Мал. 2.4

Так, на малюнку 2.1 прямі AB і BC перетинаються в точці B , прямі AD і BC – паралельні, прямі AD і D_1C_1 – мимобіжні.

2. Паралельні прямі у просторі

З означення паралельних прямих випливає, що через дві паралельні прямі можна провести площину. Ця площаина єдина. Якщо припустити, що через паралельні прямі a і b можна провести дві різні площини, то це означатиме, що дві різні площини проведено через пряму a і деяку точку M прямої b . А це суперечить теоремі про існування і єдиність площини, що проходить через пряму і точку, що їй не належить. Отже,

через дві паралельні прямі можна провести площину, і до того ж тільки одну.

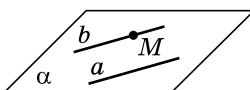
Тепер до трьох способів задання площини, які ми розглянули у попередньому параграфі, можна додати ще один: *площину можна задавати двома паралельними прямыми*.

Як відомо з курсу планіметрії, на площині через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній (*аксіома паралельності прямих на площині*). Така сама властивість спрвджується і у просторі.



Теорема 1 (про існування прямої, паралельної даній). *Через будь-яку точку простору, що не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і до того ж тільки одну.*

- Доведення. Розглянемо пряму a і точку M , що їй не належить (мал. 2.5). Через пряму a і точку M можна провести єдину площину, яку позначимо через α . У площині α має місце аксіома паралельності прямих, тобто через точку M можна провести єдину пряму b , паралельну прямій a . Отже, у просторі через точку M , яка не лежить на даній прямій a , можна провести єдину пряму, паралельну прямій a . ■



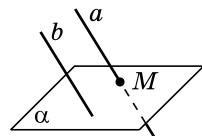
Мал. 2.5

Сформулюємо і доведемо властивість паралельних прямих.



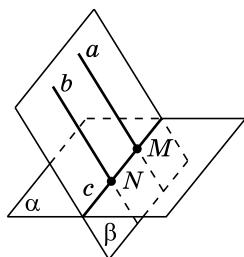
Теорема 2 (про перетин площини паралельними прямыми). Якщо одна з двох паралельних прямих перетинає площину, то і друга пряма перетинає цю площину.

Доведення. Розглянемо паралельні прямі a і b . Нехай пряма a перетинає площину α у точці M (мал. 2.6). Доведемо, що пряма b також перетинає площину α , тобто має з нею одну спільну точку.



Мал. 2.6

1) Оскільки $a \parallel b$, то через ці прямі можна провести площину β . Оскільки α і β мають спільну точку – точку M , то вони перетинаються по прямій. Позначимо цю пряму через c (мал. 2.7). Вона належить площині β і перетинає пряму a у точці M , тому вона перетинає і пряму b , паралельну a , у деякій точці N . Оскільки $N \in c$, $c \subset \alpha$, то $N \in \alpha$. Отже, точка N – спільна точка прямої b і площини α .



Мал. 2.7

2) Доведемо, що пряма b не має з площиною α інших спільних точок. Припустимо, що пряма b має з площиною α ще одну спільну точку. Тоді точки прямої b належать площині α , а тому вся пряма належить площині α . Оскільки пряма b належить площині β , то пряма b є прямою перетину площин α і β , тобто збігається з прямою c . Це неможливо, оскільки $c \cap a = M$, а за умовою $a \parallel b$. Отже, наше припущення хибне, тому пряма b має з площиною α одну спільну точку – точку N . ■

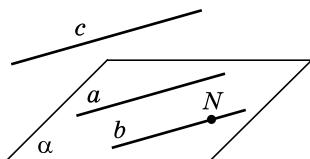
З курсу планіметрії нам відомо, що на площині дві прямі, які паралельні третій прямій, паралельні між собою. Ця властивість справджується і у просторі.



Теорема 3 (ознака паралельності прямих). Дві прямі, паралельні третьій прямій, паралельні між собою.

Доведення. Нехай $a \parallel c$ і $b \parallel c$. Доведемо, що $a \parallel b$.

1) Позначимо точку N на прямій b та проведемо через пряму a і точку N площину α (мал. 2.8). Доведемо, що $b \subset \alpha$. Припустимо, що пряма b перетинає площину α (в точці N). Тоді за попередньою теоремою площину α також перетинає і пряма c , яка паралельна прямій b . Оскіль-

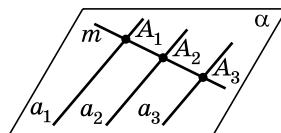


Мал. 2.8

- чи $a \parallel c$ і c перетинає α , то, за попередньою теоремою, пряма a перетинає α . Але це неможливо, оскільки $a \subset \alpha$. Отже, наше припущення хибне, тому $b \subset \alpha$.
- 2) Припустимо, що a і b перетинаються в деякій точці. Тоді через цю точку проходять дві прямі, a і b , паралельні прямій c , що суперечить теоремі про існування прямої, паралельної даній.
- Отже, прямі a і b лежать в одній площині і не перетинаються. Тому вони паралельні. ■

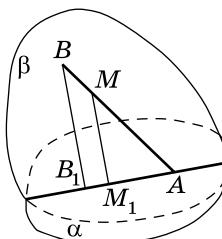
 **Задача 1.** Довести, що всі паралельні прямі, які перетинають дану пряму, лежать в одній площині.

- Доведення.** 1) Нехай паралельні прямі a_1 і a_2 перетинають пряму m в точках A_1 і A_2 відповідно (мал. 2.9). Проведемо через прямі a_1 і a_2 площину α . Оскільки $A_1 \in \alpha$ і $A_2 \in \alpha$, то $m \subset \alpha$.
- 2) Проведемо пряму a_3 , яка паралельна a_1 і a_2 і перетинає пряму m у точці A_3 . Доведемо, що $a_3 \subset \alpha$. Припустимо, що пряма a_3 має з площеиною α лише одну спільну точку – A_3 , тобто, що пряма a_3 перетинає площину α . Оскільки $a_1 \parallel a_3$ і пряма a_3 перетинає α , то за теоремою про перетин площини паралельними прямими отримаємо, що пряма a_1 перетинає площину α . Але це суперечить тому, що пряма a_1 належить α . Отже, наше припущення хибне, тому, $a_3 \subset \alpha$.
- 3) Оскільки a_3 – довільна пряма, яка паралельна прямим a_1 і a_2 і перетинає пряму m , то всі паралельні прямі, які перетинають дану пряму, лежать в одній площині, а саме, в площині α .



Мал. 2.9

 **Задача 2.** Через кінець A відрізка AB проведено площину α . Через кінець B і точку M цього відрізка проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках B_1 і M_1 відповідно (мал. 2.10). Знайти довжину відрізка MM_1 , якщо $BB_1 = 15$ см і $BM : MA = 1 : 2$.



Мал. 2.10

- Розв'язання.** 1) Оскільки $BB_1 \parallel MM_1$, то через прямі BB_1 і MM_1 можна провести площину, назвемо її β .
- 2) Площини α і β перетинаються по прямій B_1M_1 , $A \in \alpha$. Оскільки $A \in BM$, $BM \subset \beta$, то $A \in \beta$. Отже, $A \in \alpha$, $A \in \beta$, $\alpha \cap \beta = B_1M_1$, тому $A \in B_1M_1$.

3) Розглянемо $\triangle AMM_1$ і $\triangle ABB_1$, у яких кут A – спільний, $\angle ABB_1 = \angle AMM_1$ (як відповідні кути при паралельних прямих BB_1 і MM_1 та січній AB). Тоді $\triangle AMM_1 \sim \triangle ABB_1$ (за двома кутами), тому $\frac{AM}{AB} = \frac{MM_1}{BB_1}$.

4) Оскільки $BM : MA = 1 : 2$, то $BM = x$ (см), $MA = 2x$ (см). Тоді $AB = BM + MA = x + 2x = 3x$ (см).

Маємо: $\frac{2x}{3x} = \frac{MM_1}{15}$, звідки $MM_1 = 10$ (см).

Відповідь. 10 см.

Зауважимо, що паралельними бувають не лише прямі, а й промені та відрізки. *Відрізки або промені називають паралельними*, якщо вони лежать на паралельних прямих.

3. Мимобіжні прямі

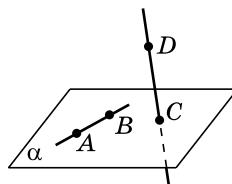
Доведемо теорему, що є ознакою мимобіжності прямих.



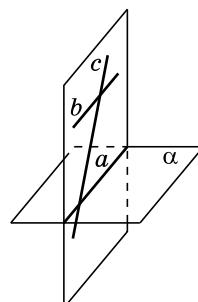
Теорема 4 (ознака мимобіжності прямих). Якщо одна з двох прямих лежить у деякій площині, а друга пряма перетинає цю площину в точці, що не належить першій прямій, то ці прямі – мимобіжні.

Доведення. Нехай пряма AB належить площині α , а пряма CD перетинає цю площину в точці C (мал. 2.11). Доведемо, що прямі AB і CD – мимобіжні.

Припустимо, що прямі AB і CD не є мимобіжними, тобто лежать у деякій площині β . Тоді площа β визначається прямою AB і точкою C , яка не належить цій прямій. Але така площа, що проходить через пряму AB і точку C вже існує, це площа α . А оскільки така площа єдина, то β збігається з α . Проте це неможливо, адже пряма CD , за умовою, не належить площині α . Прийшли до протиріччя з умовою, бо наше припущення є хибним. Отже, прямі AB і CD – мимобіжні. ■



Мал. 2.11



Мал. 2.12

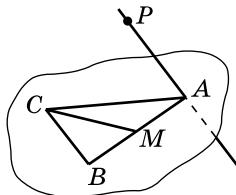
Зауважимо, що якщо одна з двох прямих лежить у площині α , а друга не лежить у цій площині, то ці прямі не обов'язково мимобіжні. На малюнку 2.12: $a \subset \alpha$, $b \not\subset \alpha$, $c \not\subset \alpha$, але a і b – не є мимобіжними (вони паралельні), також a і c – не є мимобіжними (вони перетинаються).

Задача 3. Точка P не лежить у площині трикутника ABC , CM – медіана цього трикутника (мал. 2.13). Яке взаємне розміщення прямих CM і AP ?

- Розв'язання. Оскільки $CM \in (ABC)$,
- $AP \cap (ABC) = A$, $A \notin CM$, то прямі CM і AP – мимобіжні (за ознакою мимобіжності прямих).

Відповідь. Прямі мимобіжні.

Для доведення мимобіжності прямих часто використовують метод від супротивного.



Мал. 2.13

Задача 4. Прямі AB і CD – мимобіжні. Довести, що прямі AD і BC також мимобіжні.

- Доведення. 1) Припустимо, що прямі AD і BC не є мимобіжними, тобто або паралельні, або перетинаються.
- 2) Тоді в кожному із цих двох випадків через прямі AD і BC можна провести площину, і тому всі чотири точки A, B, C, D будуть належати цій площині, тобто прямі AB і CD – не будуть мимобіжними, що суперечить умові задачі.
- 3) Отже, наше припущення про те, що прямі AD і BC не є мимобіжними, хибне, а тому прямі AD і BC – мимобіжні.



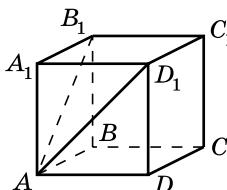
- Які дві прямі називають мимобіжними? • Які дві прямі у просторі називають паралельними? • Назвіть усі випадки взаємного розміщення двох прямих у просторі. • Сформулюйте й доведіть теорему про існування прямої, паралельної даній.
- Сформулюйте й доведіть теорему про перетин площини паралельними прямими. • Сформулюйте й доведіть ознаки паралельності та мимобіжності прямих.



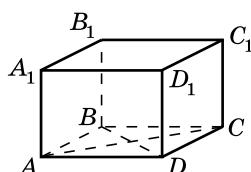
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 2.1. На малюнку 2.14 зображено куб. Яким є взаємне розміщення прямих:

- 1) AB і AB_1 ;
- 2) AD і BC ;
- 3) AD_1 і BC ;
- 4) DD_1 і CC_1 ;
- 5) A_1D_1 і B_1A_1 ;
- 6) D_1C_1 і BC ?



Мал. 2.14



Мал. 2.15

2.2. $ABCA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 2.15).

Яким є взаємне розміщення прямих:

- 1) AB і CD ;
- 2) AC і BD ;
- 3) AD і A_1D_1 ;
- 4) AC і AD_1 ;
- 5) BB_1 і DD_1 ;
- 6) A_1D_1 і DC ?

2.3. (Усно). Скільки різних площин можна провести:

- 1) через дві прямі, що перетинаються;
- 2) через дві паралельні прямі;
- 3) через дві мимобіжні прямі?

2.4. Прямі a і b не паралельні і не перетинаються. Скільки площин можна провести через ці прямі?

2.5. $ABCA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 2.15). Доведіть, що $AD \parallel B_1C_1$.

2.6. $ABCA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 2.14). Доведіть, що $DC \parallel A_1B_1$.

2.7. Пряма MN , що не лежить у площині ромба $ABCD$, паралельна стороні AB цього ромба. З'ясуйте взаємне розміщення прямих:

- 1) MN і CD ;
- 2) AM і CD . Відповідь обґрунтуйте.

2.8. Пряма KL , що не лежить у площині квадрата $ABCD$, паралельна стороні BC цього квадрата. З'ясуйте взаємне розміщення прямих:

- 1) KL і AD ;
- 2) LB і CD . Відповідь обґрунтуйте.

2.9. Прямі m і n не паралельні, пряма a паралельна прямій m . Чи можна стверджувати, що пряма a перетинає пряму n :

- 1) на площині;
- 2) у просторі?

2.10. Чи можна стверджувати, що пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає й іншу:

- 1) на площині;
- 2) у просторі?

2.11. Точки A , B , C і D не лежать в одній площині. Чи можуть прямі AB і CD :

- 1) бути паралельними;
- 2) перетинатися;
- 3) бути мимобіжними?

Відповідь обґрунтуйте.

2.12. Точки A , B , C і D лежать в одній площині. Чи можуть прямі AB і CD :

- 1) бути паралельними;
- 2) перетинатися;
- 3) бути мимобіжними?

Відповідь обґрунтуйте.

2.13. Через кінці A , B і середину M відрізка AB проведено паралельні прямі, які перетинають деяку площину α в

точках A_1 , B_1 і M_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка MM_1 , якщо відрізок AB не перетинає площину α і $AA_1 = 8$ см, $B_1B = 4$ см.

2.14. Через кінець A відрізка AB проведено площину α . Через кінець B і середину C цього відрізка проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка BB_1 , якщо $CC_1 = 7$ см.

2.15. Прямі a і b – паралельні. Пряма c перетинає пряму a і не перетинає пряму b . Доведіть, що прямі b і c – мимобіжні.

2.16. Прямі m і n перетинаються, пряма a паралельна прямій m і не перетинає пряму n . Доведіть, що прямі n і a – мимобіжні.

2.17. Пряма n , яка не лежить у площині трикутника ABC , перетинає його сторону BC в точці K .

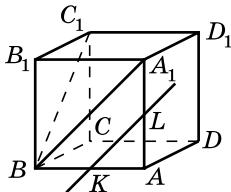
- 1) Чи може пряма n перетинати сторону AB ? Відповідь обґрунтуйте.
- 2) Яким є взаємне розміщення прямих n і AC ?

2.18. Пряма m проходить через вершину A трикутника ABC і не лежить у площині цього трикутника.

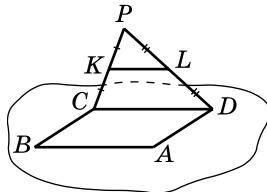
- 1) Чи може пряма m перетинати сторону BC ? Відповідь обґрунтуйте.
- 2) BM – медіана трикутника ABC . Яким є взаємне розміщення прямих m і BM ?

2.19. (Усно). У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ K – середина AB , L – середина AA_1 (мал. 2.16). Яким є взаємне розміщення прямих:

- | | | |
|----------------------|------------------------|--------------------------|
| 1) AB і KL ; | 2) BB_1 і KL ; | 3) A_1D_1 і KL ; |
| 4) C_1A_1 і AB ; | 5) A_1C_1 і BB_1 ; | 6) A_1C_1 і A_1D_1 ; |
| 7) C_1B і AB ; | 8) C_1B і BB_1 ; | 9) C_1B і A_1D_1 ; |
| 10) KL і A_1B ? | | |



Мал. 2.16



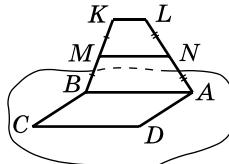
Мал. 2.17

2.20. Паралелограм $ABCD$ і трикутник CDP не лежать в одній площині (мал. 2.17), K – середина CP , L – середина PD .

- 1) Доведіть, що $KL \parallel BA$.
 2) Знайдіть KL , якщо $AB = 8$ см.

2.21. Паралелограм $ABCD$ і трапеція $ABKL$, у якої $AB \parallel KL$, не лежать в одній площині (мал. 2.18), M – середина BK , N – середина AL .

- 1) Доведіть, що $MN \parallel CD$.
 2) Знайдіть MN , якщо $CD = 10$ см, $KL = 4$ см.



Мал. 2.18

2.22. Точки M і N належать прямій a , а точки K і L прямій b , причому $a \parallel b$. Чи можуть прямі KM і LN :

- 1) перетинатися; 2) бути паралельними;
 3) бути мимобіжними?

2.23. Точки A і B належать прямій m , а точки C і D прямій n , причому m і n перетинаються. Чи можуть прямі AC і BD :

- 1) перетинатися; 2) бути паралельними;
 3) бути мимобіжними?

2.24. Прямі a і b перетинаються. Яким може бути взаємне розміщення прямих b і c , якщо прямі a і c :

- 1) паралельні; 2) перетинаються; 3) мимобіжні?
 До кожного можливого розміщення виконайте відповідний малюнок. Якщо розміщення неможливе, доведіть це.

2.25. Прямі a і c паралельні. Яким може бути взаємне розміщення прямих b і c , якщо прямі a і b :

- 1) паралельні; 2) перетинаються; 3) мимобіжні?
 До кожного можливого розміщення виконайте відповідний малюнок. Якщо розміщення неможливе, доведіть це.

2.26. Три прямі розміщено так, що кожні дві з них перетинаються. Чи лежать всі три прямі в одній площині? Відповідь обґрунтуйте.

2.27. Прямі a і b мимобіжні, $c \parallel a$, $d \parallel b$. Чи можна стверджувати, що прямі c і d мимобіжні?

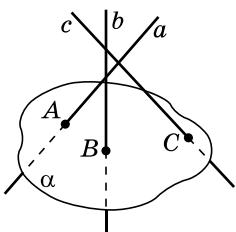
2.28. Відомо, що $a \parallel b$, $c \parallel a$, $d \parallel b$. Чи правильно, що $c \parallel d$?

2.29. Через кінець C відрізка CD проведено площину α . Через кінець D і точку A цього відрізка проведено паралельні прямі, що перетинають площину α в точках D_1 і A_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка AA_1 , якщо $DD_1 = 12$ см і $CA : AD = 3 : 1$.

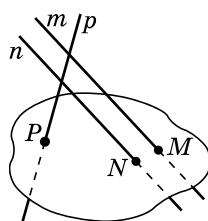
2.30. Через кінець M відрізка MN проведено площину β . Через кінець N і точку B цього відрізка проведено паралельні прямі, що перетинають площину β в точках N_1

і B_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка NN_1 , якщо $MB : BN = 3 : 2$ і $BB_1 = 15$ см.

- 2.31.** На малюнку 2.19 прямі a , b і c попарно перетинаються і перетинають площину α відповідно в точках A , B і C . Чи є помилки на малюнку? Якщо так, виконайте малюнок правильно.



Мал. 2.19



Мал. 2.20

- 2.32.** На малюнку 2.20 прямі m і n паралельні, а пряма p перетинає кожну з прямих m і n . Прямі m , n і p перетинають площину β відповідно в точках M , N і P . Чи є помилки на малюнку? Якщо так, виконайте малюнок правильно.

- 2.33.** $ABCD$ – паралелограм, $P_{ABCD} = 40$ см, точка N не належить площині паралелограма. Точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 – середини відрізків NA , NB , NC і ND відповідно. Знайдіть $P_{A_1B_1C_1D_1}$.

- 2.34.** Точка M не лежить у площині квадрата $ABCD$, $AB = 3$ см, точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 – середини відрізків MA , MB , MC і MD відповідно. Знайдіть $P_{A_1B_1C_1D_1}$.

- 2.35.** Скільки існує прямих, паралельних прямій a , кожна з яких має принаймні одну спільну точку з прямою b , якщо прямі a і b :

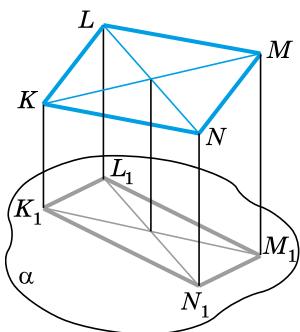
1) перетинаються; 2) паралельні; 3) мимобіжні?

- 4** **2.36.** Через кінці A , B і середину M відрізка AB проведено паралельні прямі, які перетинають деяку площину β в точках A_1 , B_1 і M_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка BB_1 , якщо $AA_1 = 9$ см, $MM_1 = 1$ см, $AA_1 > BB_1$ і відрізок AB перетинає площину β .

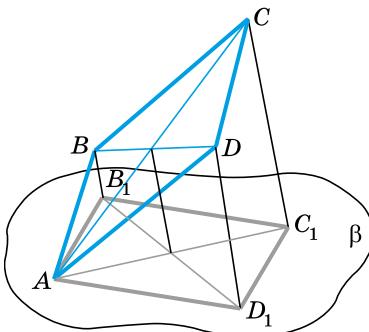
- 2.37.** Через кінці M , N і середину A відрізка MN проведено паралельні прямі, які перетинають деяку площину α в точках M_1 , N_1 і A_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка AA_1 , якщо $NN_1 = 10$ см, $MM_1 = 2$ см і відрізок MN перетинає площину α .

- 2.38.** Паралелограм $KLMN$ не перетинає площину α (мал. 2.21). Через вершини K , L , M і N проведено па-

лельні прямі, що перетинають площину α відповідно в точках K_1, L_1, M_1 і N_1 . Знайдіть KK_1 , якщо $LL_1 = 8$ см, $MM_1 = 12$ см, $NN_1 = 9$ см.



Мал. 2.21

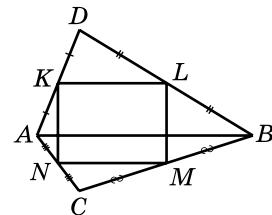


Мал. 2.22

- 2.39.** Через вершину A паралелограма $ABCD$ проведено площину β так, що вершини B, C і D їй не належать (мал. 2.22). Через точки B, C і D проведено паралельні прямі, які перетинають площину β відповідно в точках B_1, C_1 і D_1 . Знайдіть CC_1 , якщо $BB_1 = 2$ см, $DD_1 = 10$ см.

- 2.40.** Трикутники ABC і ABD не лежать в одній площині (мал. 2.23). Точки K, L, M і N – відповідно середини відрізків AD, BD, CB і AC .

- 1) Визначте вид чотирикутника $KLMN$.
- 2) Знайдіть P_{KLMN} , якщо $AB = a$ см, $CD = b$ см.



Мал. 2.23

Життєва математика

- 2.41.** У центрі Києва у 2008 році біля Майдану Незалежності зробили найбільший на той час у світі квітковий годинник. Годинниковий механізм на тлі квіткового панно розмістився на схилі біля Жовтневого палацу. Діаметр годинника – 19,5 м, діаметр циферблата – 16,5 м, а довжина стрілок – 4 м і 7 м. Знайдіть довжини кіл, які описують кінці годинної та хвилинної стрілок протягом однієї години. (Для спрощення обчислень прийміть $\pi \approx 3$)?



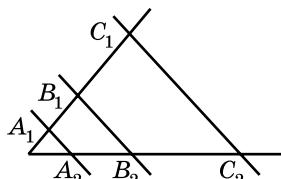


Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

2.42. На малюнку 2.24 прямі A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 паралельні між собою.

Що треба записати замість пропусків, щоб утворилися правильні співвідношення:

$$1) \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{...}; \quad 2) \frac{A_2B_2}{B_2C_2} = \dots?$$



Мал. 2.24

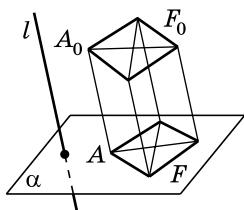
§ 3. ПАРАЛЕЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ. ЗОБРАЖЕННЯ ФІГУР У СТЕРЕОМЕТРІЇ

Для стереометрії важливе значення має таке зображення просторових фігур на площині, яке дає максимально повне уявлення про фігуру. Поки що, вивчаючи властивості найпростіших геометричних фігур (точок, прямих, площин), ми використовували суто умовні, інтуїтивно зрозумілі зображення цих найпростіших фігур. У цьому параграфі ми ознайомимося з деякими правилами зображення просторових фігур на площині.

1. Паралельне проектування

Для зображення просторових фігур на площині часто використовують **паралельне проектування**. Розглянемо цей спосіб зображення фігур.

Нехай α – деяка площа, а l – пряма, яка перетинає цю площину (мал. 3.1). Припустимо, що ми маємо на площині α зобразити фігуру F_0 , що не лежить у цій площині.

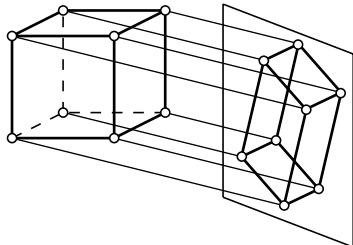


Мал. 3.1

Для цього проведемо через довільну точку A_0 фігури F_0 пряму, паралельну прямій l . Точка A перетину цієї прямої з площею α і буде зображенням точки A_0 на площині α . Побудувавши у такий спосіб зображеннякоїї точки фігури F_0 , отримаємо фігуру F – зображення фігури F_0 на площині α .

Точку A при цьому називають **зображенням** точки A_0 на площині α або **паралельною проекцією** точки A_0 на площину α , а фігуру F – зображенням фігури F_0 на площині α або **паралельною проекцією** фігури F_0 на площину α . Кажуть також, що фігуру F отримано з фігури F_0 за допомогою паралельного проектування. Пряму l називають **проектуючою прямою**, а площа α – **площиною проекції**.

За допомогою паралельного проектування можна зображені на площині як плоскі фігури (пряму, відрізок, трикутник тощо), так і просторові (піраміду, куб тощо). Уявлення про паралельне проектування просторової фігури, наприклад куба, можна отримати, якщо помістити перед екраном виготовлений із дроту каркас куба та освітити його проектором (мал. 3.2).



Мал. 3.2



Мал. 3.3

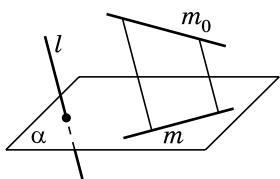
У побуті прототипом паралельного проектування можна вважати тінь, що падає на плоску поверхню (землю, стіну тощо) при сонячному або електричному освітленні (мал. 3.3).

2. Властивості паралельного проектування

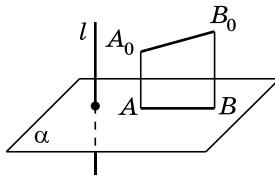
Сформулюємо основні властивості паралельного проектування за умови, що відрізки та прямі, які проектуємо, не паралельні проекуючій прямій l .

1. Проекцією прямої є пряма (мал. 3.4).

2. Проекцією відрізка є відрізок (мал. 3.5).



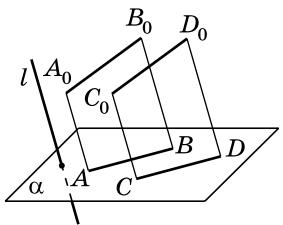
Мал. 3.4



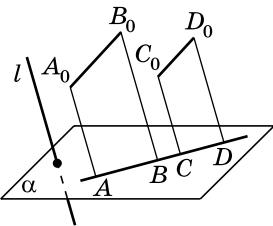
Мал. 3.5

3. Проекції паралельних відрізків – паралельні відрізки (мал. 3.6) або відрізки, що лежать на одній прямій (мал. 3.7).

4. Проекції паралельних прямих паралельні або збігаються.

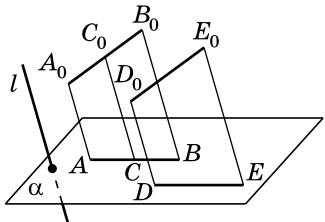


Мал. 3.6



Мал. 3.7

! 5. Проекції паралельних відрізків або відрізків, що лежать на одній прямій, пропорційні самим відрізкам.



Мал. 3.8

На малюнку 3.8 відрізки A_0C_0 і C_0B_0 – відрізки однієї прямої, AC і CB – відповідно їх проекції. За властивістю 5: $\frac{A_0C_0}{AC} = \frac{C_0B_0}{CB}$.

На цьому самому малюнку $A_0B_0 \parallel D_0E_0$, тоді $\frac{A_0B_0}{AB} = \frac{D_0E_0}{DE}$, де DE – паралельна проекція відрізка D_0E_0 на площину α .

(Н) Наслідок. Середина відрізка проектується в середину його проекції.

3. Зображення плоских фігур

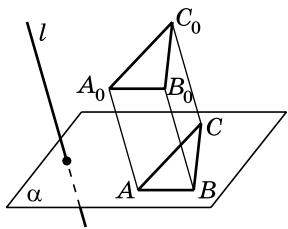
У стереометрії зображення плоских фігур ґрунтуються на властивостях паралельного проектування. Розглянемо кілька прикладів зображення плоских фігур (за умови, що площа фігури не є паралельною проектуючій прямій).

Трикутник та його елементи. Нехай $A_0B_0C_0$ – трикутник, а A, B, C – проекції відповідно точок A_0, B_0, C_0 на площину α (мал. 3.9). Оскільки проекцією відрізка є відрізок, то трикутник ABC є проекцією трикутника $A_0B_0C_0$.

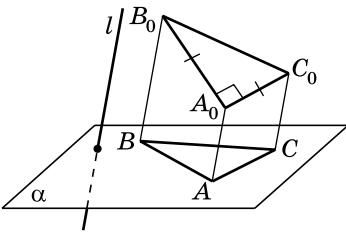
Проекцією кожного трикутника може бути трикутник довільного виду.

Наприклад, на малюнку 3.10 зображенням прямокутного рівнобедреного трикутника $A_0B_0C_0$ (з прямим кутом A_0) є різносторонній трикутник ABC .

Виходячи з наслідка властивості 5, маємо:



Мал. 3.9



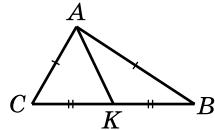
Мал. 3.10



проекцією медіані трикутника є медіана проекції трикутника, а проекцією середньої лінії трикутника – є середня лінія проекції трикутника.

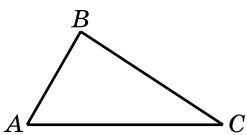
Якщо в задачі не задано метричних співвідношень між елементами трикутника, то паралельною проекцією його бісектриси буде довільний відрізок, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони. Паралельною проекцією висоти трикутника також буде довільний відрізок, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони або з точкою, що лежить на продовженні цієї сторони (у випадку, коли ця висота проведена з вершини гострого кута тупокутного трикутника).

У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, є також бісектрисою і висотою. Тому паралельною проекцією бісектриси і висоти рівнобедреного трикутника, проведених до основи, є медіана проекції трикутника, проведена до його основи. На малюнку 3.11 трикутник ABC – паралельна проекція рівнобедреного трикутника $A_0B_0C_0$, у якого $A_0B_0 = A_0C_0$. AK – проекція медіані, бісектриси й висоти цього трикутника, проведених до основи.

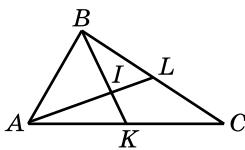


Мал. 3.11

Задача 1. Трикутник ABC є паралельною проекцією рівностороннього трикутника (мал. 3.12). Побудувати проекцію центра кола, вписаного в рівносторонній трикутник.



Мал. 3.12



Мал. 3.13

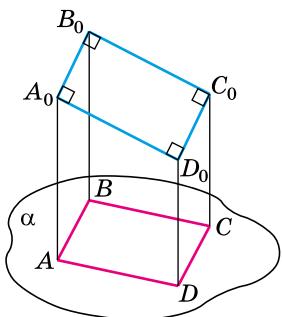
Розв'язання. Центром кола, вписаного у трикутник, є точка перетину його бісектрис. Оскільки трикутник, який

- ми проектуємо, є рівностороннім, то його бісектриси є також і медіанами, а точка перетину бісектрис відповідно збігається з точкою перетину медіан. Тому для побудови проекції центра кола, вписаного в рівносторонній трикутник, треба побудувати проекцію точки перетину медіан. Для цього маємо провести дві медіани трикутника ABC , наприклад AL і BK (мал. 3.13), які є проекціями медіан трикутника ABC , отже, і його бісектрис. Тоді точка I перетину відрізків AL і BK і буде проекцією центра кола, вписаного у рівносторонній трикутник.

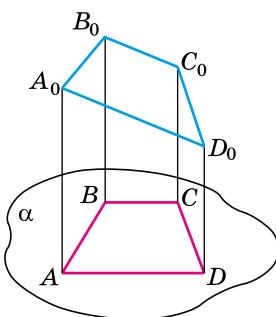
Паралелограм та його види. Оскільки проекціями паралельних і рівних між собою відрізків є паралельні і рівні між собою відрізки (за властивостями 3 і 5 паралельного проєктування), то проекцією паралелограма є паралелограм.

Проекцією кожного паралелограма є паралелограм довільного виду.

Зокрема, довільний паралелограм може бути проекцією прямокутника (мал. 3.14), ромба, квадрата. І навпаки, квадрат може бути проекцією паралелограма, який не є квадратом.



Мал. 3.14



Мал. 3.15

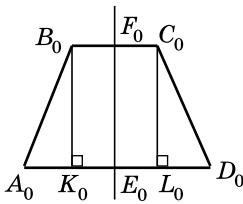
Трапеція. Оскільки проекцією паралельних відрізків є паралельні відрізки, то проекцією трапеції є трапеція. Якщо $ABCD$ – проекція трапеції $A_0B_0C_0D_0$ з основами A_0D_0 і B_0C_0 (мал. 3.15), то

$$\frac{A_0D_0}{AD} = \frac{B_0C_0}{BC} \text{ або } \frac{A_0D_0}{B_0C_0} = \frac{AD}{BC}$$

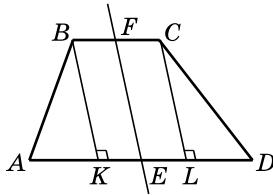
(за властивістю 5 паралельного проєктування).



Задача 2. $ABCD$ – паралельна проекція рівнобічної трапеції $A_0B_0C_0D_0$, де $A_0D_0 \parallel B_0C_0$, $A_0D_0 > B_0C_0$. Побудувати проекції висот трапеції, що виходять з вершин тупих кутів.



Мал. 3.16



Мал. 3.17

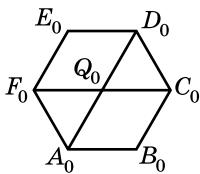
Розв'язання. 1) Нехай $A_0B_0C_0D_0$ – рівнобічна трапеція, $A_0D_0 \parallel B_0C_0$, $A_0D_0 > B_0C_0$ (мал. 3.16), $ABCD$ – її проекція, у якої $\frac{AD}{BC} = \frac{A_0D_0}{B_0C_0}$ (мал. 3.17).

2) Нехай E_0 – середина A_0D_0 , F_0 – середина B_0C_0 , тому E_0F_0 – вісь симетрії трапеції. Якщо E – середина AD , F – середина BC , то EF – проекція осі симетрії рівнобічної трапеції (за властивістю 5 паралельного проектування).

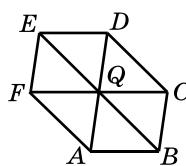
3) B_0K_0 і C_0L_0 – висоти трапеції $A_0B_0C_0D_0$, причому $B_0K_0 \parallel F_0E_0$, $C_0L_0 \parallel F_0E_0$. Оскільки проекціями паралельних відрізків є паралельні відрізки (властивість 3 паралельного проектування), то проекції висот B_0K_0 і C_0L_0 мають бути паралельними проекції осі симетрії трапеції. Тому для побудови проекцій висот B_0K_0 і C_0L_0 треба з вершин B і C провести відрізки, паралельні відрізку FE . Отже, BK і CL – зображення висот трапеції, проведених з вершин тупих кутів.

Правильний шестикутник. Нехай $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ – правильний шестикутник (мал. 3.18). Діагоналі A_0D_0 і C_0F_0 ділять його на два центрально симетричні відносно точки Q_0 ромби $F_0E_0D_0Q_0$ і $C_0B_0A_0Q_0$.

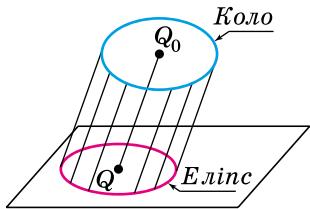
Для зображення правильного шестикутника спочатку побудуємо паралелограм $FEDQ$, який є проекцією ромба $F_0E_0D_0Q_0$ (мал. 3.19), далі – симетричний йому відносно точки Q паралелограм $CBAQ$. Сполучивши точки A і F , C і D , отримаємо зображення $ABCDEF$ правильного шестикутника $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$.



Мал. 3.18



Мал. 3.19



Мал. 3.20

А ще раніше...

Нарисна геометрія – розділ геометрії, у якому геометричні властивості предметів, що нас оточують, вивчають за допомогою зображення їх на площині або на будь-якій іншій поверхні.

Об'єктом нарисної геометрії є виклад і обґрунтування методів побудови зображень просторових форм на площині та способів розв'язання задач геометричного характеру за заданими зображеннями цих форм. Зображення, побудовані відповідно до правил нарисної геометрії, дають змогу зуявити форму предметів, їх взаємне розташування в просторі, визначити розміри. Вивчення нарисної геометрії сприяє розвитку просторової уяви і навичок логічного мислення, що має велике значення в підготовці і творчому розвитку майбутнього фахівця.

Як наука нарисна геометрія існує лише з кінця XVIII століття. Її творцем вважають французького вченого, інженера і політичного діяча Гаспара Монжа (1746–1818).

Головною науковою працею Монжа вважають «Нарисну геометрію», де викладено метод проекціювання предметів на дві взаємно перпендикулярні площини. Ця книжка вийшла другом у 1799 р., ознаменувавши народження нової науки.

Створивши нарисну геометрію, Монж звів у струнку систему розрізней і різноманітний матеріал, який частково існував і до нього. Стародавні єгиптяни вміли правильно передавати форму і розміри зведених ними пірамід і храмів. За біблійним переказом, під час зведення дивовижного за архітектурою храму Соломона в Єрусалимі (приблизно 3 тисячі років тому) не було чутно ані тесла, ані молота. Складні за формою камені, мабуть, обтісувалися на рудниках і на місце будівництва доставлялися вже готовими. А це було можливо лише за наявності креслень.

У галузі теорії зображень працювали Леонардо да Вінчі, Альбрехт Дюрер, Блез Паскаль. А деякі винахідники й інженери, зокрема І.П. Кулібін та І.І. Ползунов, виконували свої креслення за правилами прямокутного проекціювання ще до появи «Нарисної геометрії» Монжа.



- Що таке паралельне проектування? Що таке проектуюча пряма, площа проекції?
- Сформулюйте властивості па-

ралельного проектування. ● Як зобразити трикутник та його елементи? ● Як зобразити паралелограм при паралельному проектуванні? ● Як зобразити ромб, прямокутник, квадрат при паралельному проектуванні? ● Як зобразити трапецію, правильний шестикутник, коло при паралельному проектуванні?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



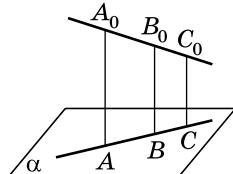
3.1. AB – паралельна проекція відрізка A_0B_0 , CD – паралельна проекція відрізка C_0D_0 . Відомо, що $A_0B_0 \parallel C_0D_0$. Чи можуть відрізки AB і CD бути:

- 1) паралельними; 2) перпендикулярними?

3.2. MN – паралельна проекція відрізка M_0N_0 , KL – паралельна проекція відрізка K_0L_0 . Відомо, що $M_0N_0 \parallel K_0L_0$. Чи можуть відрізки KL і MN :

- 1) належати одній прямій;
2) перетинатися під кутом 30° ?

3.3. Точки A_0 , B_0 , C_0 лежать на одній прямій, $A_0B_0 = 8$ см, $B_0C_0 = 5$ см (мал. 3.21). Точки A , B , C – паралельні проекції точок A_0 , B_0 , C_0 на площину α . Знайдіть відношення $AB : BC$.



Мал. 3.21

3.4. Точка B_0 ділить відрізок A_0C_0 у відношенні $7 : 4$, рахуючи від точки A_0 (мал. 3.21). Точки A , B , C – паралельні проекції точок A_0 , B_0 , C_0 на площину α . Знайдіть відношення $BC : AB$.

3.5. (Усно). Чи може паралельною проекцією трапеції бути:

- 1) квадрат; 2) трапеція;
3) прямокутник; 4) паралелограм?

3.6. (Усно). Чи може паралельною проекцією ромба бути:

- 1) паралелограм; 2) ромб;
3) трапеція; 4) квадрат?

3.7. Чи може паралельною проекцією прямокутника бути:

- 1) квадрат; 2) паралелограм;
3) прямокутник; 4) трапеція?



3.8. 1) Чи можуть різні за довжиною відрізки мати проекції однакової довжини?

2) Чи можуть рівні між собою відрізки мати проекції різної довжини?

3) Чи може довжина паралельної проекції відрізка бути більшою за довжину цього відрізка?

3.9. Які геометричні фігури можуть бути паралельними проекціями:

- 1) площини; 2) відрізка; 3) двох паралельних прямих?

3.10. Які геометричні фігури можуть бути паралельними проекціями:

- 1) прямої; 2) променя; 3) двох паралельних відрізків?

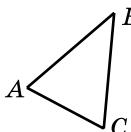
3.11. Чи можуть дві прямі, що перетинаються, проектуватися:

- 1) у дві прямі, що перетинаються;
- 2) у дві паралельні прямі;
- 3) в одну пряму;
- 4) у пряму і точку?

3.12. Чи можуть дві мимобіжні прямі проектуватися:

- 1) у дві прямі, що перетинаються;
- 2) у дві паралельні прямі;
- 3) в одну пряму;
- 4) у пряму і точку, що їй не належить?

3.13. У просторі дано пряму і точку, яка їй не належить. Чи може паралельна проекція даної точки належати проекції даної прямої? Виконайте малюнок.



3.14. Трикутник ABC – паралельна проекція рівнобедреного трикутника, AB – проекція основи (мал. 3.22). Побудуйте проекцію:

- 1) середньої лінії трикутника, що сполучає бічні сторони;

Мал. 3.22 2) висоти трикутника, проведеної до основи.

3.15. Трикутник ABC – паралельна проекція рівностороннього трикутника (мал. 3.22). Побудуйте проекцію:

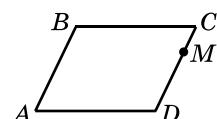
- 1) однієї із середніх ліній трикутника;
- 2) однієї із бісектрис трикутника.

3.16. Трикутник ABC – паралельна проекція рівностороннього трикутника $A_0B_0C_0$. Побудуйте проекцію центра кола, описаного навколо трикутника $A_0B_0C_0$.

3.17. Трикутник ABC – паралельна проекція рівнобедреного трикутника (BC – проекція основи). Побудуйте проекцію серединного перпендикуляра до основи рівнобедреного трикутника.



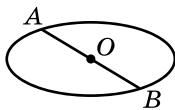
3.18. Паралелограм $ABCD$ – паралельна проекція ромба (мал. 3.23). Побудуйте проекцію перпендикуляра, проведеноого з точки M , що лежить на стороні CD , до діагоналі AC .



Мал. 3.23

- 3.19.** Паралелограм $ABCD$ – паралельна проекція квадрата (мал. 3.23), точка M лежить на стороні CD . Побудуйте проекцію перпендикуляра, проведеного з точки M до діагоналі BD .
- 3.20.** Зобразіть проекцію правильного шестикутника та проекцію перпендикуляра, проведеного з його центра до меншої діагоналі.
- 3.21.** Зобразіть проекцію правильного шестикутника та проекцію перпендикуляра, проведеного з його центра до однієї зі сторін.
- 3.22.** Чи можна при паралельному проектуванні паралелограма отримати чотирикутник, два кути якого дорівнюють 85° і 105° ? Якщо відповідь позитивна, знайдіть два інших кути цього чотирикутника.
- 3.23.** Чи можна при паралельному проектуванні квадрата отримати чотирикутник, два кути якого дорівнюють 89° і 91° ? Якщо відповідь позитивна, знайдіть два інших кути цього чотирикутника.
- 3.24.** Трикутник ABC – паралельна проекція рівностороннього трикутника $A_0B_0C_0$. Побудуйте проекції перпендикулярів, проведених із середини сторони B_0C_0 до сторін A_0B_0 і A_0C_0 .
- 3.25.** Трикутник KLM – паралельна проекція трикутника $K_0L_0M_0$, у якого $K_0L_0 : L_0M_0 = 1 : 4$. Побудуйте проекцію бісектриси кута L_0 .
- 3.26.** Трикутник ABC – паралельна проекція трикутника $A_0B_0C_0$, у якого $A_0B_0 : B_0C_0 = 1 : 3$. Побудуйте проекцію бісектриси кута B_0 .
- 3.27.** Трапеція $ABCD$ – паралельна проекція рівнобічної трапеції $A_0B_0C_0D_0$, де A_0B_0 і C_0D_0 – основи, кути A_0 і B_0 – гострі. Побудуйте проекції висот трапеції $A_0B_0C_0D_0$, проведених із вершин A_0 і B_0 .
- 3.28.** Дано паралельну проекцію трикутника і центр кола, описаного навколо нього (мал. 3.24). Побудуйте проекції висот трикутника.
- 3.29.** Паралелограм $ABCD$ є паралельною проекцією ромба з кутом 60° . Побудуйте проекції висот ромба, проведених із вершини цього кута.
- Мал. 3.24
- 3.30.** Паралелограм $KLMN$ є паралельною проекцією ромба з кутом 120° . Побудуйте проекції висот ромба, проведених із вершини цього кута.





Мал. 3.25



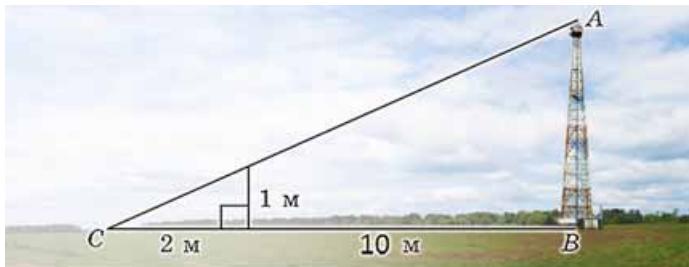
Мал. 3.26

- 3.31.** Дано паралельну проекцію кола із центром O (мал. 3.25). Побудуйте проекцію діаметра, перпендикулярного до діаметра AB .
- 3.32.** Дано паралельну проекцію кола із центром O (мал. 3.25). Побудуйте паралельну проекцію квадрата, вписаного у це коло.
- 3.33.** Дано паралельну проекцію кола (мал. 3.26). Побудуйте проекцію його центра.
- 3.34.** Маємо зображення кола, його центра і деякої точки, що належить колу. Побудуйте зображення дотичної, що проходить через цю точку.
- 3.35.** Трикутник ABC є паралельною проекцією прямокутного трикутника з гострим кутом 60° . Побудуйте проекцію бісектриси цього кута.
- 3.36.** Дано проекцію трикутника і двох його висот. Побудуйте проекцію центра кола, описаного навколо трикутника.



Життя математика

- 3.37.** Використовуючи дані, наведені на малюнку, знайдіть висоту щогли AB .



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

- 3.38.** У $\triangle ABC$ точка K – середина AB , точка L – середина BC . Знайдіть:
- 1) KL , якщо $AC = 16$ см;
 - 2) AC , якщо $KL = 3$ см.

3.39. Пряма MN паралельна стороні AB трикутника ABC , $M \in AC$, $N \in BC$, $CM = 2$ см, $AC = 6$ см, $MN = 3$ см. Знайдіть AB .

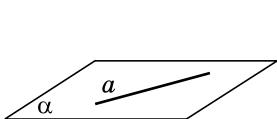
§ 4. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

1. Взаємне розміщення прямої і площини

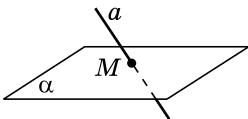
Як стверджується в аксіомі С_{II}, якщо дві точки прямої належать площині, то і вся пряма (тобто всі її точки) належить цій площині.

Пряма і площаина можуть також мати одну спільну точку або не мати спільних точок узагалі. Отже, можна зробити висновок, що є *три випадки взаємного розміщення прямої і площини*:

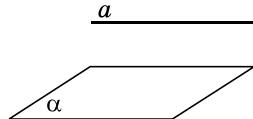
- 1) пряма може належати площині (мал. 4.1);
- 2) пряма і площаина можуть мати одну спільну точку, тобто перетинатися (мал. 4.2);
- 3) пряма і площаина можуть взагалі не мати спільних точок (мал. 4.3).



Мал. 4.1



Мал. 4.2



Мал. 4.3

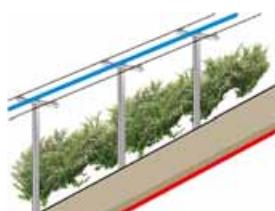
2. Паралельність прямої і площини



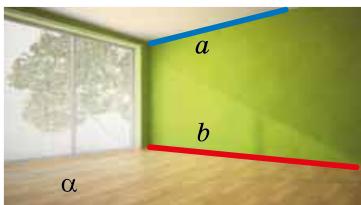
Пряму і площину називають *паралельними*, якщо вони не мають спільних точок.

На малюнку 4.3 пряма a паралельна площині α , що позначають так: $a \parallel \alpha$.

Уявлення про пряму і площину, паралельні між собою, у повсякденному житті можна отримати, наприклад, спостерігаючи за тую натягнутими електричними дротами, які паралельні поверхні землі (мал. 4.4), або за лінією перетину стіни кімнати зі стелю, яка паралельна підлозі (пряма a на малюнку 4.5 паралельна площині α). Зауважимо, що у площині підлоги є пряма b , яка паралельна прямій a . Доведемо, що наявність у площині α прямої b , паралельної прямій a , є ознакою паралельності прямої і площини.



Мал. 4.4

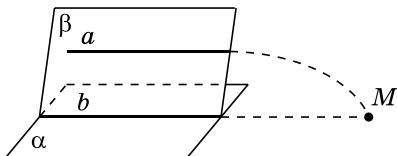


Мал. 4.5



Теорема 1 (ознака паралельності прямої і площини). Якщо пряма, яка не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині.

- Доведення. Нехай пряма a не лежить у площині α , а пряма b лежить у площині α , причому $a \parallel b$ (мал. 4.6). Доведемо, що $a \parallel \alpha$.



Мал. 4.6

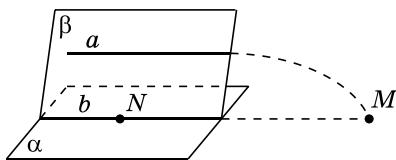
- Оскільки $a \parallel b$, то через прямі a і b можна провести площину, назовемо її β (мал. 4.6).
- Тоді пряма b лежить у кожній із площин α і β , отже, є прямою їх перетину.
- Припустимо, що пряма a не паралельна площині α , тоді вона її перетинає, тобто має з нею спільну точку M (мал. 4.6).
- Оскільки $M \in a$, $a \subset \beta$, то $M \in \beta$. Тобто точка M належить і площині α , і площині β , а тому належить прямій b перетину площин α і β .
- Отже, отримали, що прямі a і b перетинаються в точці M , що суперечить умові. Тому наше припущення хибне.
- Отже, пряма a паралельна площині α . ■

Для розв'язування задач корисною буде теорема, обернена до ознаки паралельності прямої і площини.



Теорема 2 (обернена до ознаки паралельності прямої і площини). Якщо дана пряма паралельна площині, то в цій площині знайдеться пряма, паралельна даний прямій.

Доведення. Нехай a – дана пряма, α – дана площини, $a \parallel \alpha$ (мал. 4.7).



Мал. 4.7

- 1) У площині α виберемо довільну точку N . Через пряму a і точку N , що їй не належить, проведемо площину β .
- 2) Площини β відмінна від площини α , оскільки проходить через пряму a , яка не належить площині α .
- 3) Оскільки площини α і β мають спільну точку – точку N , то вони перетинаються по деякій прямій b , що проходить через цю точку. Доведемо, що $b \parallel a$.
- 4) Прямі a і b лежать в одній площині – площині β і не збігаються. Припустимо, що вони перетинаються в точці M . Оскільки $M \in b$, а $b \subset \alpha$, то $M \in \alpha$. Маємо, що точка M – точка перетину прямої a з площиною α , а це суперечить умові.
- 5) Отже, наше припущення хибне, тому $a \parallel b$. ■



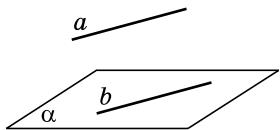
Наслідок. Якщо пряма паралельна площині, то через будь-яку точку цієї площини можна провести пряму, паралельну даній, і до того ж тільки одну.



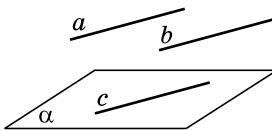
Задача 1. Довести, що коли одна з двох паралельних прямих паралельна деякій площині, то друга пряма або паралельна цій площині, або лежить у цій площині.

Доведення. Нехай a і b – дані прямі, $a \parallel b$, $a \parallel \alpha$.

1) Пряма b може належати площині α (мал. 4.8) (у цьому випадку умова задачі виконується).



Мал. 4.8



Мал. 4.9

2) Пряма b може не належати площині α (мал. 4.9). У площині α , за теоремою, оберненою до ознаки паралельності прямої і площини, існує пряма c , паралельна a . Отже, $a \parallel c$, $a \parallel b$. Тоді, за ознакою паралельності прямих, $b \parallel c$. Ураховуючи, що $c \subset \alpha$, за ознакою паралельності прямої і площини, отримаємо, що $b \parallel \alpha$. Отже, $b \subset \alpha$ або $b \parallel \alpha$.



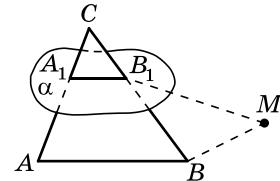
Задача 2. Довести, що коли площини проходить через пряму, паралельну іншій площині, і перетинає цю площину, то пряма перетину площини паралельна даній прямій.

- **Доведення.** Нехай через дану пряму a , паралельну площині α , проходить площини β , яка перетинає α по прямій b (мал. 4.6). Доведемо, що $b \parallel a$, від супротивного.
- 1) Прямі a і b лежать в одній площині – площині β .
- 2) Припустимо, що a і b перетинаються в точці M . Але тоді точка M – точка перетину прямої a і площини α , що суперечить умові.
- 3) Отже, наше припущення хибне, тому $a \parallel b$.

Задача 3. Площина, паралельна стороні AB трикутника ABC , перетинає сторону AC у точці A_1 , а сторону BC – в точці B_1 . Знайти довжину сторони AB , якщо $A_1B_1 = 10$ см і $AC : A_1C = 5 : 2$.

- **Розв'язання.** 1) Прямі AB і A_1B_1 лежать в одній площині – площині трикутника ABC (мал. 4.10).
- 2) Припустимо, що AB і A_1B_1 перетинаються в точці M .
- 3) Оскільки $M \in A_1B_1$, $A_1B_1 \subset \alpha$, то $M \in \alpha$. Тоді точка M є точкою перетину прямої AB і площини α , що суперечить умові. Отже, $AB \parallel A_1B_1$.
- 4) Розглянемо $\triangle ACB$ і $\triangle A_1CB_1$. Кут C у них спільний, $\angle C B_1 A_1 = \angle C B A$ (як відповідні при паралельних прямих AB і A_1B_1 та січній CB). Тому $\triangle ACB \sim \triangle A_1CB_1$ (за двома кутами).
- 5) Тоді $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C}$, тобто $\frac{AB}{10} = \frac{5}{2}$, звідки $AB = 25$ (см).

Відповідь. 25 см.



Мал. 4.10



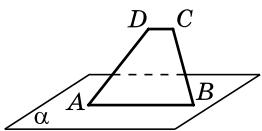
- Яким може бути взаємне розміщення прямої і площини?
- Дайте означення паралельних прямої і площини. • Сформулюйте й доведіть ознаку паралельності прямої і площини.
- Сформулюйте та доведіть теорему, обернену до ознаки паралельності прямої і площини. • Сформулюйте наслідок із цієї теореми.



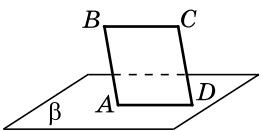
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



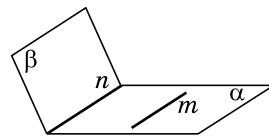
4.1. Основа AB трапеції $ABCD$ належить площині α (мал. 4.11), а основа DC не належить цій площині. Як розміщена пряма DC відносно площини α ?



Мал. 4.11



Мал. 4.12



Мал. 4.13

4.2. Сторона AD паралелограма $ABCD$ належить площині β , а сторона BC не належить цій площині (мал. 4.12). Яке взаємне розміщення прямої BC відносно площини β ?

4.3. Площина проходить через одну з двох паралельних прямих і не проходить через другу. Яке взаємне розміщення площини і другої прямі?

4.4. Площини α і β перетинаються по прямій n (мал. 4.13). У площині α проведено пряму m , паралельну прямій n . Яке взаємне розміщення прямої m і площини β ?

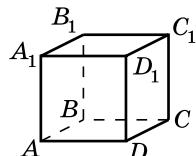
4.5. Скільки прямих, паралельних даній площині, можна провести через точку, що не лежить у цій площині? Виконайте малюнок.

4.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 4.14). Запишіть усі прямі:

- 1) паралельні площині ABC ;
- 2) які перетинають площину ABB_1 ;
- 3) які належать площині AA_1D .

4.7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 4.14). Знайдіть деякі дві прямі:

- 1) які паралельні площині BB_1C_1 ;
- 2) які перетинають площину DCC_1 ;
- 3) які належать площині $A_1B_1C_1$.



Мал. 4.14

2 **4.8.** Чи можливо, щоб пряма a перетинала площину α , але у площині α існувала пряма, паралельна a ?

4.9. Доведіть, що коли площина перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу.

4.10. Прямі a і b паралельні. Яким може бути взаємне розташування прямої b і площини α , якщо:

- 1) a і α паралельні; 2) a і α перетинаються;
- 3) пряма a лежить у площині α ?

Виконайте відповідні малюнки.

4.11. Прямі a і b перетинаються. Яким може бути взаємне розташування прямої b і площини α , якщо:

- 1) a і α паралельні; 2) a і α перетинаються;
- 3) пряма a лежить у площині α ?

Виконайте відповідні малюнки.

4.12. Пряма m перетинає площину α . Яким може бути взаємне розташування прямих m і n , якщо:

- 1) α і n паралельні;
- 2) α і n перетинаються;
- 3) n належить α ?

Виконайте відповідні малюнки.

4.13. Пряма m лежить у площині α . Яким може бути взаємне розташування прямих m і n , якщо:

- 1) α і n паралельні;
- 2) α і n перетинаються;
- 3) n належить α ?

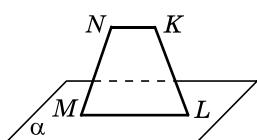
Виконайте відповідні малюнки.

4.14. Точка N не лежить у площині прямокутника $ABCD$. Доведіть, що пряма CD паралельна площині ABN .

4.15. Точка L не лежить у площині паралелограма $ABCD$. Доведіть, що пряма AB паралельна площині DLC .

4.16. Через сторону ML чотирикутника $KLMN$, у якого $\angle LNK = \angle NLM$, проведено площину α (мал. 4.15). Доведіть, що $NK \parallel \alpha$.

4.17. Через сторону ML чотирикутника $KLMN$, у якого $\angle NKL + \angle KLM = 180^\circ$, проведено площину α (мал. 4.15). Доведіть, що $NK \parallel \alpha$.



Мал. 4.15

4.18. Сторона AB трикутника ABC паралельна площині α , а сторони CA і CB перетинають площину α в точках K і L відповідно.

- 1) Доведіть, що $\triangle CKL \sim \triangle CAB$.
- 2) Знайдіть KL , якщо $CK = 3$ см, $CA = 7$ см, $AB = 14$ см.

4.19. Сторона BC трикутника ABC паралельна площині β , а сторони AB і AC перетинають площину β в точках M і N відповідно.

- 1) Доведіть, що $\triangle AMN \sim \triangle ABC$.
- 2) Знайдіть BC , якщо $MN = 2$ см, $AB = 9$ см, $AM = 3$ см.

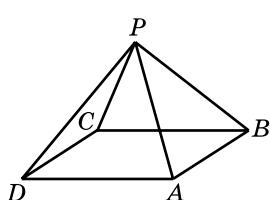
4.20. Площина α , яка паралельна основам AB і CD трапеції $ABCD$, перетинає бічні сторони AD і BC в точках M і N відповідно. Знайдіть AB , якщо M – середина AD , $MN = 6$ см, $DC = 10$ см.

4.21. Площина β , яка паралельна основам AD і BC трапеції $ABCD$, перетинає бічні сторони AB і CD в точках K і L відповідно. Знайдіть KL , якщо K – середина AB , $AD = 12$ см, $BC = 4$ см.

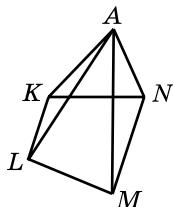


4.22. Доведіть, що коли пряма n паралельна кожній із двох площин α і β , які перетинаються, то пряма n паралельна прямій перетину площин α і β .

4.23. Точка P не належить площині паралелограма $ABCD$ (мал. 4.16). Запишіть усі пари прямих і площин, паралельних між собою.



Мал. 4.16



Мал. 4.17

4.24. Точка A не належить площині трапеції $KLMN$ з основами KL і MN (мал. 4.17). Запишіть усі пари прямих і площин, паралельних між собою.

4.25. Площина α і пряма a , що не лежить у площині α , паралельні одній і тій самій прямій b . Яке взаємне розташування прямої a і площини α ? Відповідь обґрунтуйте.

4.26. Пряма a паралельна площині β . Через пряму a проведено площину α , яка перетинає площину β по прямій c . Яке взаємне розташування прямих a і c ? Відповідь обґрунтуйте.

4.27. Площина α паралельна стороні AB трикутника ABC та перетинає сторони AC і BC у точках D і E відповідно. Знайдіть AC , якщо $AD = 8$ см, $DE = 3$ см, $AB = 7$ см.

4.28. Площина β паралельна стороні BC трикутника ABC та перетинає сторони AB і AC у точках M і N відповідно. Знайдіть AN , якщо $MN = 9$ см, $BC = 13$ см, $NC = 8$ см.

4.29. Доведіть, що коли пряма a паралельна площині α , то будь-яка пряма, яка паралельна прямій a і проходить через точку площини α , лежить у площині α .

4.30. Трикутник ABP і прямокутник $ABCD$ мають спільну сторону AB і лежать у різних площинах. Через сторону DC і точку M – середину відрізка AP проведено площину, яка перетинає PB у точці N .

- 1) Доведіть, що прямі AB і MN паралельні.
- 2) Знайдіть AB , якщо $MN = 5$ см.
- 3) Визначте вид чотирикутника $DMNC$.

4.31. Трикутник ADF і ромб $ABCD$ мають спільну сторону AD і лежать у різних площині. Через сторону BC і точку P – середину DF проведено площину, яка перетинає AF у точці T .

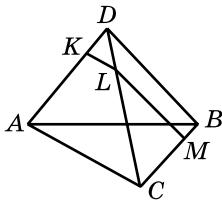
- 1) Доведіть, що прямі AD і TP паралельні.
- 2) Знайдіть TP , якщо $AD = 12$ см.
- 3) Визначте вид чотирикутника $BTPC$.

4.32. Площини α і β перетинаються по прямій n , пряма m є мимобіжною із прямою n і паралельна площині β . Яким може бути взаємне розміщення прямої m і площини α ? Відповідь обґрунтуйте.

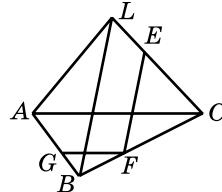
4.33. Площини α і β перетинаються по прямій c , пряма d паралельна площині α і паралельна прямій c . Яким може бути взаємне розміщення прямої d і площини β ? Відповідь обґрунтуйте.

4.34. Точка D не лежить у площині трикутника ABC (мал. 4.18). На відрізках AD , CD і BC взято точки K , L і M відповідно так, що $DK : KA = DL : LC = BM : MC = 1 : 3$.

- 1) Доведіть, що пряма AC паралельна площині KLM .
- 2) Яким є взаємне розміщення прямої BD і площини KLM ?
- 3) Побудуйте точку N – точку перетину площини KLM і відрізка AB . Побудову обґрунтуйте.
- 4) Знайдіть периметр чотирикутника $KLMN$, якщо $AC = 8$ см, $BD = 12$ см.



Мал. 4.18



Мал. 4.19

4.35. Точка L не лежить у площині трикутника ABC (мал. 4.19). На відрізках LC , BC і BA взято точки E , F і G відповідно так, що $LE : EC = BF : FC = BG : GA = 1 : 2$.

- 1) Доведіть, що пряма BL паралельна площині EFG .
- 2) Яким є взаємне розміщення прямої AC і площини EFG ?
- 3) Побудуйте H – точку перетину площини EFG і прямої AL .
- 4) Знайдіть P_{EFGH} , якщо $AC = 9$ см, $BL = 15$ см.

4.36. Доведіть, що через будь-яку точку простору, яка не лежить на жодній із двох даних мимобіжних прямих, можна провести площину, паралельну кожній із двох даних прямих. Скільки таких площин можна провести?

- 4.37.** Прямі AC і BD – мимобіжні. Точка M лежить на прямій AB між точками A і B . Побудуйте площину, яка проходить через точку M паралельно прямим AC і BD . Скільки таких площин можна побудувати?
- 4.38.** Точка P не належить площині трикутника ABC , M – середина AP . Яким є взаємне розміщення площини MPB та прямої, що проходить через середини сторін CA і CB ?
- 4.39.** Точка L лежить поза площиною паралелограма $ABCD$.
- 1) Побудуйте пряму перетину площин LAB і LCD .
 - 2) Яким є взаємне розміщення побудованої прямої і площини паралелограма?
- 4.40.** Точка M лежить поза площиною трикутника ABC , точки E і D – середини BC і AC відповідно.
- 1) Побудуйте пряму перетину площин MAB і MED .
 - 2) Яким є взаємне розміщення побудованої прямої і площини трикутника?



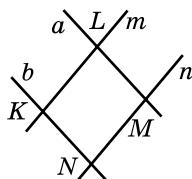
Життєва математика

- 4.41.** Іван та Іванка, розлучившись на перехресті, пішли по взаємно перпендикулярним дорогах, Іван зі швидкістю 3,6 км/год, Іванка – 2,7 км/год. Яка відстань (в км) буде між ними через 45 хв?



 Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

- 4.42.** Відомо, що $a \parallel b$, $m \parallel n$ (мал. 4.20). Укажіть вид чотирикутника $KLMN$.



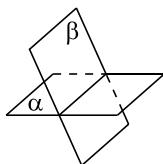
Мал. 4.20

§ 5. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПЛОЩИН

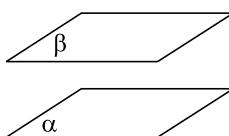
1. Взаємне розміщення двох площин

Як стверджується в аксіомі С_{III}, якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій. Отже, можна дійти висновку, що є два випадки взаємного розміщення двох площин:

- 1) площини можуть перетинатися по прямій (мал. 5.1);
- 2) площини можуть не мати спільних точок (мал. 5.2).



Мал. 5.1



Мал. 5.2

2. Паралельні площини



Дві площини називають паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

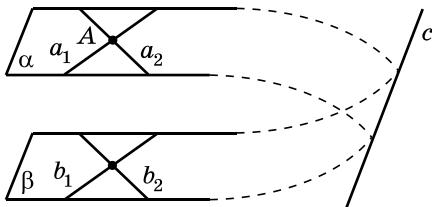
На малюнку 5.2 площини α і β паралельні, це позначають так: $\alpha \parallel \beta$.

Уявлення про паралельні площини в повсякденному житті дають, наприклад, дно та кришка закритої коробки, дві протилежні стіни кімнати, шиби склопакета тощо.



Теорема 1 (ознака паралельності площин). Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.

Доведення. Нехай α і β – дані площини (мал. 5.3), a_1 і a_2 – дві прямі, що лежать у площині α і перетинаються в точці A , b_1 і b_2 – дві прямі, що лежать у площині β , причому $a_1 \parallel b_1$, $a_2 \parallel b_2$.



Мал. 5.3

- 1) Маємо, що $a_1 \parallel \beta$, $a_2 \parallel \beta$ (за ознакою паралельності прямої і площини).
- 2) Доведемо, що $\alpha \parallel \beta$ від супротивного. Припустимо, що площини α і β не паралельні, тобто перетинаються по прямій c .
- 3) Пряма c лежить у площині α і не має спільних точок з a_1 . Дійсно, якби c і a_1 перетиналися, то ця точка була б тажою точкою перетину прямої a_1 і площини β , але ж $a_1 \parallel \beta$. Тому $a_1 \parallel c$.
- 4) Аналогічно $a_2 \parallel c$. Приходимо до того, що через точку A проходять дві різні прямі – a_1 і a_2 , паралельні прямій c , що суперечить теоремі про існування прямої, паралельної даний.
- 5) Отже, наше припущення хибне, тому $\alpha \parallel \beta$. ■

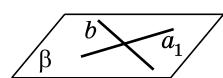


Наслідок. Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини паралельні іншій площині, то ці площини паралельні.

Задача 1. Побудувати паралельні площини, що проходять через дві дані мимобіжні прямі.

Розв'язання. Нехай a і b – мимобіжні прямі.

- 1) Через довільну точку прямої a проведемо пряму b_1 , паралельну b , а через довільну точку прямої b проведемо пряму a_1 , паралельну a (мал. 5.4).
- 2) Через прямі a і b_1 проведемо площину α , а через прямі b і a_1 – площину β .
- 3) Тоді $\alpha \parallel \beta$ (за ознакою паралельності площин). Умову задачі виконано.



Мал. 5.4



Теорема 2 (про існування площини, паралельної даний). Через точку поза даною площеиною можна провести площину, паралельну даній, і до того ж тільки одну.

Доведення цієї теореми не наводимо, оскільки воно є досить громіздким.

Задача 2. Довести, що дві площини, які паралельні третій площині, паралельні між собою.

- Доведення.** Нехай $\alpha \parallel \beta$ і $\alpha \parallel \gamma$. Доведемо, що $\beta \parallel \gamma$ від супротивного.
- 1) Припустимо, що β і γ перетинаються по деякій прямій m , а деяка точка A належить цій прямій.

2) Тоді маємо, що через точку A проходять дві площини β і γ , паралельні площині α , що суперечить теоремі про існування площини, яка проходить через дану точку паралельно даній площині.

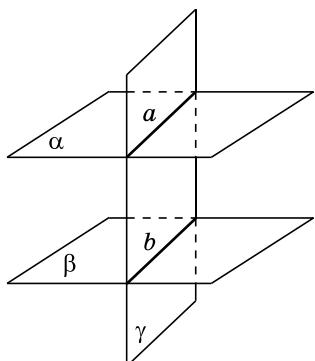
3) Отже, наше припущення хибне, тому $\beta \parallel \gamma$. ■

3. Властивості паралельних площин

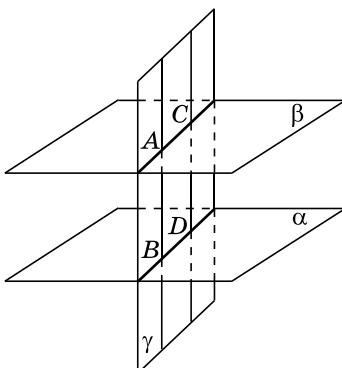
Розглянемо деякі властивості паралельних площин.

1. Якщо дві паралельні площини перетнути третьою, то прямі перетину будуть паралельні.

- Доведення. Нехай площа γ перетинає паралельні площини α і β по прямих a і b відповідно (мал. 5.5).
 - 1) Прямі a і b лежать в одній площині – площині γ , тому вони або перетинаються, або паралельні.
 - 2) Припустимо, що прямі a і b перетинаються в деякій точці. Тоді ця точка належить кожній із площин α і β , тобто площини перетинаються, що суперечить умові. Прийшли до протиріччя, отже, $a \parallel b$. ■



Мал. 5.5



Мал. 5.6

2. Відрізки паралельних прямих, кінці яких належать двом паралельним площинам, рівні між собою.

- Доведення. Розглянемо відрізки AB і CD паралельних прямих, кінці яких належать двом паралельним площинам α і β (мал. 5.6).

- 1) За попередньою властивістю $AC \parallel BD$.
- 2) Отже, $AB \parallel CD$ і $AC \parallel BD$, тому $ABDC$ – паралелограм.

Тоді $AB = CD$ (за властивістю паралелограма). ■

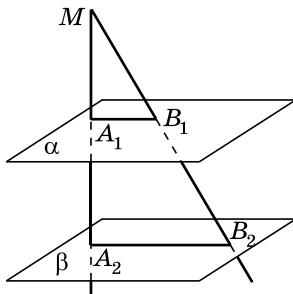
Задача 3. Два промені зі спільним початком – точкою M – перетинають паралельні площини α і β у точках A_1, B_1 і A_2, B_2 , відповідно (мал. 5.7). Довести, що трикутники A_1MB_1 і A_2MB_2 подібні.

Доведення. 1) Проведемо через прямі MA_2 і MB_2 площину. Ця площинна перетинає площину α по прямій A_1B_1 , а площину β – по прямій A_2B_2 .

2) За властивістю паралельних площин $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

3) Розглянемо $\triangle A_1MB_1$ і $\triangle A_2MB_2$. Кут M у них спільний, $\angle MB_1A_1 = \angle MB_2A_2$ (як відповідні кути при перетині паралельних прямих A_1B_1 і A_2B_2 січною MB_2).

4) Тому $\triangle A_1MB_1 \sim \triangle A_2MB_2$ (за двома кутами). ■



Мал. 5.7



- Яким може бути взаємне розміщення двох площин?
- Які площини називають паралельними?
- Сформулюйте й доведіть ознаку паралельності площин. Сформулюйте наслідок із неї.
- Сформулюйте теорему про існування площини, паралельної даній.
- Сформулюйте й доведіть властивості паралельних площин.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



5.1. Наведіть приклади паралельних площин у повсякденному житті.

5.2. Площини α і β паралельні. Пряма a лежить у площині α . Яким є взаємне розташування прямої a і площини β ?

5.3. Площини α і β паралельні. Пряма a лежить у площині α , пряма b – у площині β . Чи можуть прямі a і b перетинатися?

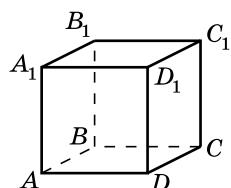
5.4. На малюнку 5.8 зображеного прямокутний паралелепіпед. Чи паралельні площини:

- 1) ABC і $A_1B_1C_1$; 2) ABB_1 і ABC ?

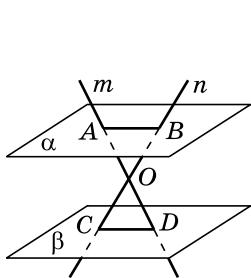
5.5. На малюнку 5.8 зображеного куба. Чи паралельні площини:

- 1) AA_1D і ACD ; 2) ABB_1 і CDC_1 ?

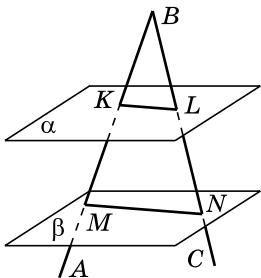
5.6. Прямі m і n перетинаються в точці O і перетинають паралельні площини α і β в точках A, B, C і D відповідно (мал. 5.9). Яким є взаємне розміщення прямих AB і CD ?



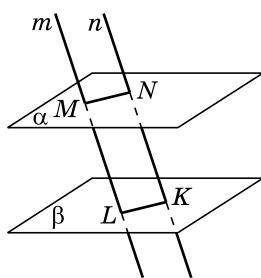
Мал. 5.8



Мал. 5.9

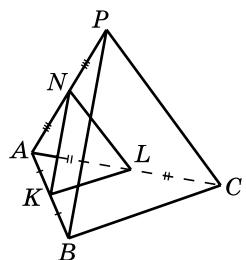


Мал. 5.10



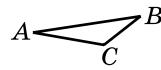
Мал. 5.11

- 5.7.** Сторони кута ABC перетинають паралельні площини α і β в точках K, L, M і N відповідно (мал. 5.10). Яким є взаємне розташування прямих KL і MN ?
- 5.8.** Площини α і β паралельні. Точка M не належить жодній із них. Скільки існує прямих, які паралельні кожній із площин α і β та проходять через точку M ?
- 5.9.** Площини α і β паралельні. Точка P не належить жодній із них. Скільки існує площин, які паралельні кожній із площин α і β та проходять через точку P ?
- 5.10.** Відрізки ML і NK паралельних прямих m і n містяться між паралельними площинами α і β (мал. 5.11). Знайдіть:
- 1) MN , якщо $LK = 3$ см;
 - 2) ML , якщо $NK = 9$ см.
- 5.11.** Відрізки ML і NK паралельних прямих m і n містяться між паралельними площинами α і β (мал. 5.11). Знайдіть:
- 1) NK , якщо $ML = 10$ см;
 - 2) LK , якщо $MN = 4$ см.
- 5.12.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 5.8). Укажіть паралельні площини, яким належать мимобіжні прямі AA_1 і DC . Відповідь обґрунтуйте.
- 5.13.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 5.8). Укажіть паралельні площини, яким належать мимобіжні прямі AB і B_1C_1 . Відповідь обґрунтуйте.
- 5.14.** Точка P не лежить у площині трикутника ABC (мал. 5.12). Точки K, L, N – середини відрізків AB, AC і AP відповідно. Доведіть, що площа KLN паралельна площині BPC .
- 5.15.** Прямі, що містять сторони AC і AB трикутника ABC , паралельні площині α (мал. 5.13). Доведіть, що пряма BC також паралельна площині α .



Мал. 5.12

- 5.16.** У площині β існують три прямі, паралельні площині α . Чи можна зробити висновок, що площини α і β паралельні?



- 5.17.** Чи можуть бути паралельними площини, які проходять через мимобіжні прямі?

- 5.18.** Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає і другу.

- 5.19.** Площини α і β паралельні. Пряма a паралельна площині α і не лежить у площині β . Доведіть, що пряма a паралельна площині β .

- 5.20.** Доведіть, що коли площаина перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає і другу.

- 5.21.** Площини α і β паралельні. Яким може бути взаємне розташування прямої a і площини β , якщо:

- 1) пряма a паралельна площині α ;
- 2) пряма a перетинає площину α ;
- 3) пряма a належить площині α ?

До кожного з випадків виконайте відповідний малюнок.

- 5.22.** Площини α і β перетинаються по прямій b . Яким може бути взаємне розміщення прямої a і площини β , якщо:

- 1) пряма a паралельна площині α ;
- 2) пряма a перетинає площину α ;
- 3) пряма a належить площині α ?

До кожного з випадків виконайте відповідний малюнок.

- 5.23.** Пряма a паралельна площині α . Яким може бути взаємне розміщення площин α і β , якщо:

- 1) пряма a належить площині β ;
- 2) пряма a перетинає площину β ;
- 3) пряма a паралельна площині β ?

До кожного з випадків виконайте відповідний малюнок.

- 5.24.** Пряма a перетинає площину α . Яким може бути взаємне розміщення площин α і β , якщо:

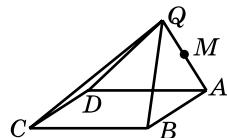
- 1) пряма a належить площині β ;
- 2) пряма a перетинає площину β ;
- 3) пряма a паралельна площині β ?

До кожного з випадків виконайте відповідний малюнок.

- 5.25.** Через точку O , яка лежить між паралельними площинами α і β , проведено прямі m і n (мал. 5.9). Пряма m перетинає площини α і β у точках A і D , а пряма n – у точках B і C відповідно. Знайдіть AB , якщо $OC = OB$ і $CD = 5$ см.

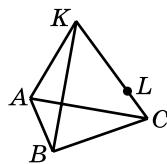
Мал. 5.13

- 5.26.** Площини α і β паралельні. Паралельні прямі a і b перетинають площину α в точках A і B , а площину β – у точках C і D відповідно. Доведіть, що $\angle ABC = \angle BCD$.
- 5.27.** Площини β і γ паралельні. Паралельні прямі m і n перетинають площину β в точках M і N , а площину γ – у точках K і L відповідно. Доведіть, що $\angle MNL + \angle NLK = 180^\circ$.
- 5.28.** Чи правильне твердження: «Якщо пряма належить площині α і паралельна площині β , то площини α і β паралельні»? Відповідь обґрунтуйте.
- 5.29.** Чи можуть перетинатися площини, що паралельні одній і тій самій прямій?
- 5.30.** Дві прямі, що належать площині α , відповідно паралельні двом прямим, що належать площині β . Чи можна стверджувати, що $\alpha \parallel \beta$?
- 5.31.** Основи трапеції паралельні площині α . Чи можна стверджувати, що площа трапеції паралельна площині α ?
-  **5.32.** Площини α і β паралельні. Через точку M площини β проведено пряму m , паралельну площині α . Доведіть, що пряма m належить площині β .
- 5.33.** Площини β і γ паралельні. У площині β проведено пряму b . Через точку C площини γ проведено пряму c , паралельну b . Доведіть, що пряма c належить площині γ .
- 5.34.** Точка S не належить площині трикутника ABC . Точки K , L і M належать відрізкам SA , SB і SC відповідно, причому $\angle MKA + \angle KAC = 180^\circ$, $\angle LKA + \angle KAB = 180^\circ$. Доведіть, що площини ABC і KLM паралельні.
- 5.35.** Точка Q не належить площині трикутника KLM . Точки A , B , C належать відрізкам QK , QL і QM відповідно, причому $\angle QAC = \angle QKM$, $\angle QCB = \angle QML$. Доведіть, що площини KML і ABC паралельні.
- 5.36.** Точку Q , що не лежить у площині паралелограма $ABCD$, сполучено з вершинами паралелограма (мал. 5.14). Побудуйте площину, що проходить через точку M відрізка QA паралельно площині паралелограма.
- 5.37.** Точку K , що не лежить у площині трикутника ABC , сполучено з його вершинами (мал. 5.15). Побудуйте площину, що проходить через точку L відрізка KC паралельно площині ABC .



Мал. 5.14

- 5.38.** Площини α і β паралельні. Через точку K , що лежить між цими площинами, проведено прямі a і b , які перетинають площину α у точках A_1 і B_1 , а площину β – у точках A_2 і B_2 . Знайдіть довжину відрізка A_2B_2 , якщо $A_1B_1 = 10$ см, $KB_1 = 6$ см, $KB_2 = 3$ см.

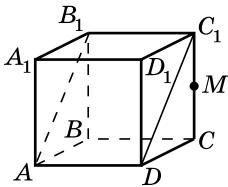


Мал. 5.15

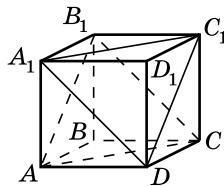
- 5.39.** Два промені з початком у точці A перетинають одну з двох паралельних площин у точках K_1 і L_1 , а другу – у точках K_2 і L_2 . Знайдіть довжину відрізка K_1L_1 , якщо $K_2L_2 = 20$ см, $AK_1 : AK_2 = 4 : 5$.

- 5.40.** Два промені з початком у точці B перетинають одну з двох паралельних площин у точках C_1 і D_1 , а другу – у точках C_2 і D_2 . Знайдіть довжину відрізка C_2D_2 , якщо $C_1D_1 = 8$ см, $BC_1 = 10$ см, $BC_2 = 15$ см.

- 5.41.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 5.16). M – середина CC_1 . Побудуйте через точку M площину, паралельну площині ADC_1 .



Мал. 5.16



Мал. 5.17

- 5.42.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 5.17). Доведіть, що площини A_1C_1D і AB_1C паралельні.

- 4** **5.43.** Площини α і β паралельні. Точки M і N належать площині α , K і L – площині β . Відрізки ML і KN перетинаються, причому $ML = KN$ і $MN = KL$.

1) Доведіть, що точки M , N , K і L лежать в одній площині.

2) Визначте вид чотирикутника $MNLK$.

3) Знайдіть площину чотирикутника $MNLK$, якщо $KL = 5$ см, $ML = 13$ см.

- 5.44.** Площини β і γ паралельні. Точки A і B належать площині β , а точки C і D – площині γ , причому $AB = CD$. Відрізки AC і BD перетинаються.

1) Доведіть, що точки A , B , C і D лежать в одній площині.

2) Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

3) Знайдіть міру кута ADC , якщо $\angle DAB = 130^\circ$.

5.45. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 10 см. Точка M – середина ребра AA_1 .

1) Побудуйте точку L – точку перетину площини CB_1M з ребром AD .

2) Знайдіть довжину відрізка ML .

5.46. Три прямі, що проходять через одну точку і не лежать в одній площині, перетинають одну з двох паралельних площин у точках A, B, C , а другу – у точках A_1, B_1, C_1 . Доведіть, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

5.47. Площина трикутника ABC зі сторонами 5 см, 5 см і 8 см паралельна площині α . Світло, що виходить з точки S , утворює на площині α тінь $A_1B_1C_1$ від трикутника ABC . Обчисліть:

1) сторони трикутника $A_1B_1C_1$, якщо $SA : AA_1 = 1 : 2$;

2) площеу трикутника $A_1B_1C_1$.

Чи можна знайти площеу трикутника $A_1B_1C_1$, не знаходячи його сторін?

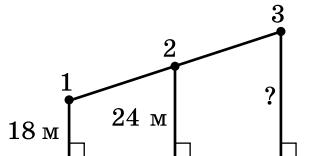
5.48. Площина β паралельна площині трикутника KLM . Світло, що виходить із точки Q , утворює на площині β тінь $K_1L_1M_1$ від трикутника KLM . Сторони трикутника $K_1L_1M_1$ дорівнюють 12 см, 15 см і 9 см. Знайдіть:

1) сторони трикутника KLM , якщо $QK : KK_1 = 2 : 1$;

2) площеу трикутника KLM .

Життєва математика

5.49. На однаковій відстані один за другим вздовж прямої встановлено три телеграфних стовпи. Перший і другий знаходяться від дороги на відстанях 18 м і 24 м. Знайдіть відстань від дороги до третього стовпа.



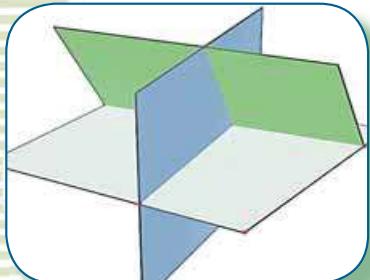
Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

5.50. Прямі a і b перпендикулярні та перетинаються у точці M . Точка A належить прямій a , а точка B – прямій b . Знайдіть:

1) AB , якщо $AM = 5$ см, $MB = 12$ см;

2) AM , якщо $AB = 10$ см, $MB = 8$ см.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ



У ЦОМУ РОЗДІЛІ МИ

- **пригадаємо** властивості похилих та їх проекцій на площині;
- **дізнаємося** про перпендикулярність прямих і площин; властивості похилих та їх проекцій у просторі; двогранний кут та його вимірювання; кут між площинами та його вимірювання; ортогональне проектування;
- **навчимося** у просторі встановлювати перпендикулярність прямих і площин; вимірювати відстані і кути.

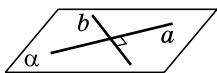
§ 6. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНІ

У цьому параграфі розглянемо питання про перпендикулярність прямих, що перетинаються, а в одному з наступних – питання про перпендикулярність мимобіжних прямих.

1. Перпендикулярність прямих у просторі

Як і на площині, у просторі

 **діві прямі, які перетинаються під прямим кутом, називають перпендикулярними (взаємно перпендикулярними)** (мал. 6.1).

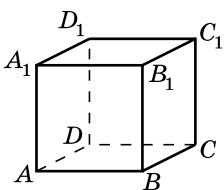


Мал. 6.1

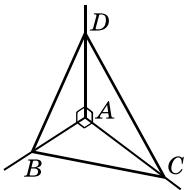
Для позначення перпендикулярності у просторі використовують той самий символ, що й на площині, наприклад, якщо прямі a і b взаємно перпендикулярні, то це записують так: $a \perp b$.

Задача 1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 6.2). Знайти всі прямі, що перетинають пряму AA_1 і перпендикулярні до неї.

Відповідь. AB, AD, A_1D_1, A_1B_1 .



Мал. 6.2



Мал. 6.3

Задача 2. Прямі AB , AC і AD попарно перпендикулярні (мал. 6.3). Знайти довжину відрізка BC , якщо $DB = \sqrt{281}$ см, $DC = 20$ см, $DA = 16$ см.

Розв'язання. 1) Із $\triangle DAB$ ($\angle A = 90^\circ$):

$$AB = \sqrt{DB^2 - DA^2} = \sqrt{(\sqrt{281})^2 - 16^2} = \sqrt{281 - 256} = \sqrt{25} = 5 \text{ (см)}.$$

2) Із $\triangle DAC$ ($\angle A = 90^\circ$):

$$AC = \sqrt{DC^2 - DA^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12 \text{ (см)}.$$

3) Із $\triangle ABC$ ($\angle A = 90^\circ$):

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 13 см.

2. Пряма, перпендикулярна до площини

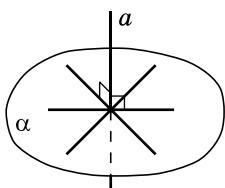
Якщо пряма не лежить у площині і не паралельна їй, то вона перетинає площину. У цьому параграфі розглянемо випадок, коли пряма перпендикулярна до площини.



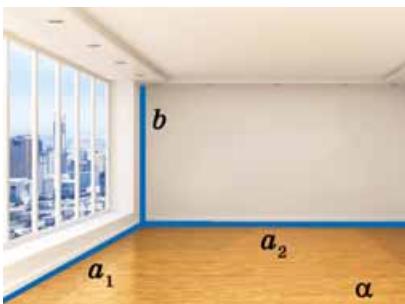
Пряму, яка перетинає площину, називають перпендикулярно до цієї площини, якщо вона перпендикулярна доожної прямої, що лежить у площині і проходить через точку перетину (мал. 6.4).

Ще кажуть, що площаина перпендикулярна до прямої, або пряма і площаина взаємно перпендикулярні. Записати це можна так: $a \perp \alpha$ або $\alpha \perp a$.

У повсякденному житті ми постійно стикаємося із взаємно перпендикулярними прямими і площаиною: телеграфний стовп перпендикулярний до поверхні землі; шнур, на якому висить лампа, перпендикулярний до площаини стелі; лінія перетину стін перпендикулярна як до площаини підлоги, так і до площаини стелі; ніжка столу перпендикулярна до його поверхні тощо.



Мал. 6.4



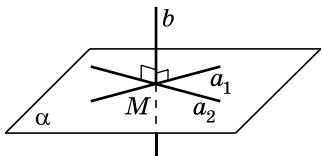
Мал. 6.5

3. Ознаки перпендикулярності прямої і площини

На малюнку 6.5 лінія перетину стін b перпендикулярна до площаини підлоги α . Також лінія перетину стін b перпендикулярна до прямих a_1 і a_2 , які лежать у площаині α і перетинаються з прямою b . Цей малюнок є наочною ілюстрацією ознаки перпендикулярності прямої і площини.



Теорема (ознака перпендикулярності прямої і площини). Якщо пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна до двох прямих цієї площини, що проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна до площини.



Мал. 6.6

На малюнку 6.6 пряма b перетинається з площиною α у точці M . Прямі a_1 і a_2 проходять через точку M , $a_1 \perp b$, $a_2 \perp b$. За ознакою перпендикулярності прямої і площини отримаємо, що: $b \perp \alpha$.

Доведення ознаки перпендику-

лярності прямої і площини не наводимо, оскільки воно є досить громіздким.



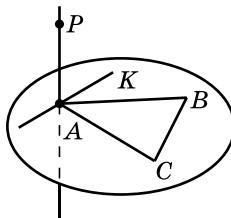
Наслідок. Пряма, що перпендикулярна до двох прямих, які перетинаються, перпендикулярна до площини, яка проходить через ці прямі.

Ознаку перпендикулярності прямої і площини застосовують на практиці. Так, наприклад, щоб перевірити, чи перпендикулярна лінія перетину стін кімнати до підлоги, достатньо перевірити, чи утворює ця лінія прямі кути із деякими двома прямими, які лежать у площині підлоги і проходять через точку перетину лінії перетину стін із підлогою.



Задача 3. Через точку P , що лежить поза площину трикутника ABC , проведено пряму AP , перпендикулярну до прямих AB і AC . Пряма AK лежить у площині трикутника ABC . Довести, що прямі AP і AK перпендикулярні.

- **Доведення.** 1) За умовою $AP \perp AB$ і $AP \perp AC$ (мал. 6.7). Тому, за ознакою перпендикулярності прямої і площини, $AP \perp (ABC)$.
- 2) Оскільки $AP \perp (ABC)$, то пряма AP перпендикулярна до будь-якої прямої, яка лежить у площині трикутника ABC і проходить через точку A , зокрема, їй до прямої AK . ■



Мал. 6.7

4. Побудова взаємно перпендикулярних прямої і площини

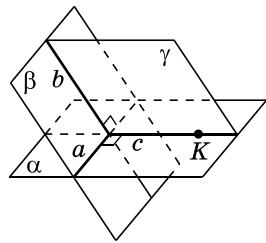
Задача 4. Довести, що через будь-яку точку простору можна провести площину, перпендикулярну до даної прямої.

- **Доведення.** Нехай дано пряму a і точку K , що їй не належить (мал. 6.8). Доведемо, що існує площа, яка проходить через точку K перпендикулярно до прямої a .
 - 1) Через пряму a і точку K , що їй не належить, проведемо площину α .
 - 2) Через пряму a проведемо площину β , відмінну від α .

- 3) У площині α через точку K проведемо пряму c , перпендикулярну до прямої a .
- 4) У площині β через точку перетину прямих a і c проведемо пряму b , перпендикулярну до прямої a .
- 5) Через прямі b і c проведемо площину γ . Ця площаина проходить через точку K і перпендикулярна до прямої a (за ознакою перпендикулярності прямої і площини).

Аналогічно доводять і випадок, коли $K \in a$.

Зауважимо, що можна також довести, що побудована площаина γ – єдина.



Мал. 6.8

5. Властивості взаємно перпендикулярних прямих і площин

У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 6.2) прямі AA_1 і BB_1 паралельні між собою і кожна з них перпендикулярна до площини ABC . Узагальнимо цей факт.

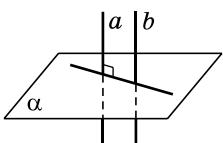
1. Якщо площаина перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої.

На малюнку 6.9: $a \parallel b$ і $a \perp \alpha$, тому, за властивістю 1, $b \perp \alpha$.

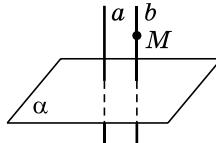
На малюнку 6.2 кожна з прямих BB_1 і CC_1 перпендикулярна до площини ABC . Між собою ці прямі паралельні. Узагальнимо цю властивість.

2. Дві прямі, перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, паралельні між собою.

На малюнку 6.9: $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$, тому, за властивістю 2, $a \parallel b$.



Мал. 6.9



Мал. 6.10

Задача 5. Пряма a перпендикулярна до площини α . Через точку M , яка не лежить на прямій a , провести пряму, перпендикулярну до площини α .

Розв'язання. За теоремою про існування прямої, паралельної даній, через точку M проведемо пряму b таку, що $b \parallel a$ (мал. 6.10). Оскільки $a \perp \alpha$, $a \parallel b$, то і $b \perp \alpha$ (за властивістю 1). Пряма b – шукана.

А ще раніше...

Три (з XI по XIII) книги «Начал» Евкліда містять майже винятково стереометричний матеріал. Зокрема, в XI-й книзі викладаються загальні основи стереометрії, питання взаємного розташування, включно з паралельністю і перпендикулярністю прямих і площин.

XI-та книга «Начал» починається з 32 означень, серед яких є і означення прямої, перпендикулярної до площини: «Пряма є перпендикулярною до площини, якщо вона є перпендикулярною до всіх прямих, які проведено в площині в точці, у якій вона цю площину зустрічає».

Це означення не дає практичного критерію, щоб встановити, чи є дана пряма перпендикулярною до площини, чи ні. Тому далі, у цій самій книзі, Евклід формулює і доводить теорему: «Якщо пряма з двома прямими, що перетинаються, у точці їх перетину утворює прямі кути, то вона перпендикулярна до площини, яка містить ці дві прямі».

Згадана теорема, яка в Евкліда, фактично, була ознакою перпендикулярності прямої до площини, у більш компактному і зручному для застосування вигляді наведена в цьому параграфі.



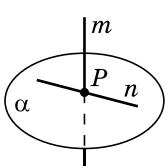
- Які прямі називають перпендикулярними?
- Яку пряму називають перпендикулярною до площини?
- Сформулюйте ознаку перпендикулярності прямої і площини та наслідок з неї.
- Сформулюйте властивості взаємно перпендикулярних прямих і площин.



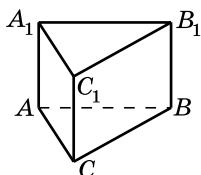
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



6.1. Пряма m перпендикулярна до площини α (мал. 6.11), а пряма n лежить у площині α і проходить через точку P перетину прямої m і площини α . Яким є кут між прямими m і n ?



Мал. 6.11



Мал. 6.12

6.2. $CC_1 \perp (ABC)$ (мал. 6.12). Яким є кут між прямими:
1) CC_1 і CB ; 2) CC_1 і AC ?

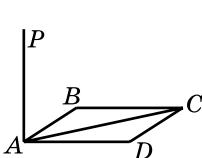
6.3. Пряма AA_1 проходить через вершину A трикутника ABC (мал. 6.12), $AA_1 \perp AC$, $AA_1 \perp AB$. Як розміщена пряма AA_1 відносно площини ABC ?

6.4. Пряма AP проходить через вершину A паралелограма $ABCD$ (мал. 6.13), $AP \perp AB$, $AP \perp AD$. Як розміщена пряма AP відносно площини паралелограма $ABCD$?

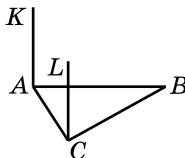
6.5. (Усно). Чи правильне твердження: «Через точку, яка лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до даної прямої»?

6.6. (Усно). Наведіть приклади з повсякденного життя:

- 1) взаємно перпендикулярних прямих;
- 2) взаємно перпендикулярних прямої і площини.



Мал. 6.13



Мал. 6.14

6.7. $AK \perp (ABC)$, $AK \parallel CL$ (мал. 6.14). Чи перпендикулярна пряма CL до площини ABC ? Відповідь обґрунтуйте.

6.8. $AK \perp (ABC)$, $CL \perp (ABC)$ (мал. 6.14). Чи паралельні прямі AK і CL ? Відповідь обґрунтуйте.

2 **6.9.** Прямі a і b взаємно перпендикулярні. Яким може бути взаємне розміщення прямих a і c , якщо прямі b і c :

- 1) перпендикулярні;
- 2) паралельні;
- 3) мимобіжні;
- 4) перетинаються, але не перпендикулярні?

До кожного випадку виконайте малюнок.

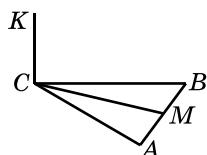
6.10. Прямі a і b перпендикулярні до прямої t . Чи можуть прямі a і b :

- 1) перетинатися;
- 2) бути перпендикулярними;
- 3) бути мимобіжними?

До кожного випадку виконайте малюнок.

6.11. Пряма AP проходить через вершину A паралелограма $ABCD$, $AP \perp AB$, $AP \perp AD$ (мал. 6.13). Доведіть, що $AP \perp AC$.

6.12. Пряма CK проходить через вершину C трикутника ABC , $CK \perp CB$, $CK \perp CA$ (мал. 6.15). Доведіть, що $CK \perp CM$, де M – довільна точка, що належить стороні AB .



Мал. 6.15

6.13. Через дві точки простору A і B , які не належать площині α , перпендикулярно до неї проведено прямі AK і BL . Доведіть, що AK і BL лежать в одній площині.

6.14. На малюнку 6.14 $AK \perp AB$, $AK \perp AC$, $LC \perp AC$, $LC \perp CB$. Доведіть, що $AK \parallel LC$.

6.15. На малюнку 6.14 $AK \perp AB$, $AK \perp AC$, $AK \parallel LC$. Доведіть, що $LC \perp CB$.

6.16. Пряма a перпендикулярна до площини α . Як можуть бути розміщені прямі b і площа α , якщо прямі a і b :

- 1) мимобіжні;
- 2) перпендикулярні;
- 3) перетинаються, але не перпендикулярні;
- 4) паралельні?

Виконайте відповідні малюнки.

6.17. Пряма a перпендикулярна до площини α . Як можуть бути розміщені прямі a і b , якщо пряма b :

- 1) належить площині α ;
- 2) паралельна площині α ;
- 3) перпендикулярна до площини α ;
- 4) перетинає площину α , але не є перпендикулярною до цієї площини?

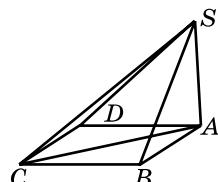
Виконайте відповідні малюнки.

6.18. Як розміщена відносно площини круга пряма, перпендикулярна до двох його діаметрів?

6.19. Як розміщена відносно площини круга пряма, перпендикулярна до двох його хорд, що перетинаються?

6.20. Пряма AS перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$ (мал. 6.16). Знайдіть SC , якщо $AB = 3$ см, $SA = 4$ см.

6.21. Пряма AS перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$ (мал. 6.16). Знайдіть AB , якщо $SC = 10$ см, $SA = 6$ см.



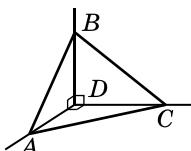
Мал. 6.16

6.22. Через вершину C прямого кута трикутника ABC проведено пряму CP , перпендикулярну до площини трикутника. Доведіть, що пряма BC перпендикулярна до площини ACP .

6.23. Через точку O – точку перетину діагоналей ромба $ABCD$ – проведено пряму OK , перпендикулярну до площини ромба. Доведіть, що пряма BD перпендикулярна до площини AKC .

6.24. Прямі DA , DB і DC попарно перпендикулярні (мал. 6.17). Знайдіть довжину відрізка AB , якщо:

- 1) $CD = 6$ см, $BC = 14$ см, $AD = 3$ см;
- 2) $AC = a$, $BC = b$, $AD = c$.



Мал. 6.17

- 6.25.** Прямі DA , DB і DC попарно перпендикулярні (мал. 6.17). Знайдіть довжину відрізка AC , якщо:
- 1) $AB = 9$ см, $BC = 16$ см, $AD = 5$ см;
 - 2) $BD = a$, $BC = b$, $AD = c$.

- 6.26.** Пряма SO перпендикулярна до площини кола із центром O . Точка M лежить на колі. Знайдіть радіус кола, якщо $SM = 12$ см, $\angle SMO = 45^\circ$.

- 6.27.** Пряма MQ перпендикулярна до площини кола із центром Q . Точка P лежить на колі. Знайдіть відстань від точки M до точки P , якщо $PQ = 8$ см, $\angle MPQ = 60^\circ$.

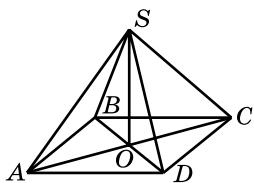
- 6.28.** Діагональ AC паралелограма $ABCD$ перпендикулярна до площини α , а вершини B і D належать цій площині. Знайдіть периметр паралелограма, якщо $AB = a$ см.

- 6.29.** Сторона BC паралелограма $ABCD$ належить площині γ , а сторона AB перпендикулярна до цієї площини. Знайдіть AC , якщо $BD = b$ см.

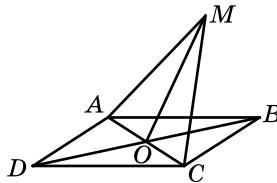
- 6.30.** З вершини A правильного трикутника ABC до площини трикутника проведено перпендикуляр AS . Знайдіть відстань від точки S до вершин трикутника, якщо $AC = 2\sqrt{3}$ см, $\angle SCA = 30^\circ$.

- 6.31.** Точка O – центр правильного трикутника ABC . Через точку O до площини трикутника проведено перпендикуляр OM . Знайдіть відстані від точки M до вершин трикутника, якщо $OM = 1$ см, $AB = 3$ см.

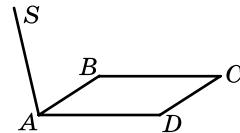
- 6.32.** $ABCD$ – паралелограм, S – точка поза площею паралелограма, $SA = SC$, $SB = SD$ (мал. 6.18). Доведіть, що пряма SO перпендикулярна до площини паралелограма.



Мал. 6.18



Мал. 6.19



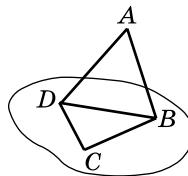
Мал. 6.20

- 6.33.** $ABCD$ – ромб, M – точка поза площею ромба, $MA = MC$ (мал. 6.19). Доведіть, що пряма AC перпендикулярна до площини MOB .

- 6.34.** $ABCD$ – прямокутник, точка S не лежить у його площині і $SA \perp AB$ (мал. 6.20). Знайдіть взаємно перпендикулярні пряму і площину.

- 6.35.** Точка A не належить площині трикутника BCD , $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle DBC = 90^\circ$ (мал. 6.21). Знайдіть взаємно перпендикулярні пряму і площину.

-  **6.36.** Точка S не лежить у площині трикутника ABC і рівновіддалена від усіх його вершин. Пряма SO перпендикулярна до площини трикутника, де O – точка перетину прямої SO і площини трикутника ABC . Доведіть, що O – центр кола, описаного навколо трикутника ABC .



Мал. 6.21

- 6.37.** Точка M лежить поза площею прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) і рівновіддалена від усіх його вершин. $MO \perp (ABC)$, де O – точка перетину прямої MO і площини ABC . Доведіть, що O – центр кола, описаного навколо трикутника ABC .

1) Визначте положення точки O .

2) Знайдіть MO , якщо $MA = 13$ см, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см.

- 6.38.** Точка S лежить поза площею правильного трикутника ABC і рівновіддалена від усіх його вершин. $SO \perp (ABC)$, де O – точка перетину прямої SO і площини ABC .

1) Визначте положення точки O .

2) Знайдіть SO , якщо $AB = 6$ см, $SA = 4$ см.

- 6.39.** Відрізок AB завдовжки 20 см не має спільних точок з площею α . Прямі AK і BM , які перпендикулярні до площини α , перетинають цю площину в точках K і M , $KM = 16$ см. Знайдіть BM , якщо $AK = 15$ см. Розгляньте два випадки: 1) $AK > BM$; 2) $AK < BM$.

- 6.40.** Відрізок CD завдовжки 15 см не має спільних точок із площею β . Прямі CA і DB , які перпендикулярні до площини β , перетинають цю площину в точках A і B . Знайдіть AB , якщо $BD = 10$ см, $AC = 22$ см.

-  **6.41.** Через вершину A прямокутника $ABCD$ проведено пряму AS , перпендикулярну до його площини, $SD = 6$ см, $SC = 9$ см, $SB = 7$ см. Знайдіть:

1) SA ; 2) площу прямокутника $ABCD$.

- 6.42.** Пряма AK перпендикулярна до площини прямокутника $ABCD$. Знайдіть AK , якщо $KD = 20$ см, $KC = 24$ см, $KB = 15$ см.

- 6.43.** У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) основа і висота, проведена до неї, мають довжину 4 см. Точка O лежить у площині трикутника ABC , OK – перпендикуляр до його площини. Відомо, що $AK = BK = CK$. Знайдіть довжину відрізка CK , якщо $OK = 6$ см.

6.44. У трикутнику ABC $AB = 8$ см, $BC = CA = 5$ см. Точка O лежить в площині трикутника ABC , OM – перпендикуляр до його площини. Знайдіть довжину відрізка OM , якщо $MA = MB = MC = 5$ см.

6.45. Прямі AC і BD перпендикулярні до площини α і перетинають її у точках A і B . Знайдіть відстань між точками C і D , якщо $AB = 24$ см, $BD = 21$ см, $AC = 11$ см. Скільки розв'язків має задача?

6.46. Через вершину A ромба $ABCD$ проведено пряму AM , перпендикулярну до прямих AD і AC . Доведіть, що пряма BD перпендикулярна до площини AMC .

6.47. Через вершину D квадрата $ABCD$ проведено пряму DN , перпендикулярну до його площини. Доведіть, що пряма AC перпендикулярна до площини DBN .



Життєва математика

6.48. Одного рулону шпалер вистачає для обклеювання смуги від підлоги до стелі завширшки 1,6 м. Скільки рулонів шпалер потрібно купити для обклеювання прямокутної кімнати розмірами 3,7 м на 4,6 м (площею дверей та вікна знехтувати)?

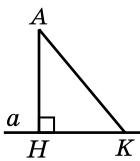


Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

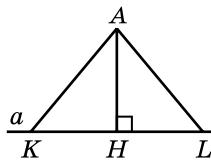
6.49. $AH \perp a$ (мал. 6.22). Як можна назвати:

- 1) відрізок AH ;
- 2) відрізок AK ;
- 3) точку H ;
- 4) точку K ?

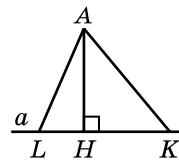
Порівняйте між собою довжини відрізків AH і AK .



Мал. 6.22



Мал. 6.23



Мал. 6.24

6.50. $AH \perp a$ (мал. 6.23). Порівняйте:

- 1) KH і HL , якщо $AK = AL$;
- 2) AK і AL , якщо $KH = HL$.

6.51. $AH \perp a$ (мал. 6.24). Порівняйте:

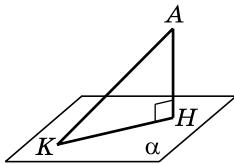
- 1) AK і AL , якщо $HK > HL$;
- 2) HK і HL , якщо $AK > AL$.

§ 7. ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА. ТЕОРЕМА ПРО ТРИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРИ

1. Перпендикуляр і похила

Розглянемо площину α і точку A ,
що їй не належить (мал. 7.1).

Перпендикуляром, проведеним із даної точки до даної площини, називають відрізок, що сполучає дану точку з точкою площини і лежить на прямій, перпендикулярній до площини.



Мал. 7.1

На малюнку 7.1 AH – перпендикуляр, проведений з точки A до площини α . Кінець H перпендикуляра, який лежить у площині α , називають *основою перпендикуляра*.

Відстанню від точки до площини називають довжину перпендикуляра, проведеного із цієї точки до цієї площини.

На малюнку 7.1 довжина відрізка AH – відстань від точки A до площини α .

Похилою, проведеною з даної точки до даної площини, називають будь-який відрізок, який сполучає цю точку з точкою площини і не є перпендикуляром.

На малюнку 7.1 AK – похила, проведена з точки A до площини α . Кінець K цієї похилої, який лежить у площині α , називають *основою похилої*. Відрізок HK , який сполучає основи перпендикуляра і похилої, називають *проекцією похилої AK на площину α* .

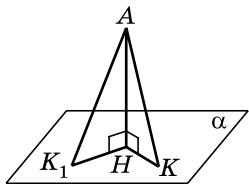
Розглянемо властивості перпендикуляра, похиліх та їх проекцій. Зауважимо, що ці властивості аналогічні до відповідних властивостей перпендикуляра, похиліх та їх проекцій на пряму у площині.

1. Довжина перпендикуляра, проведеного з точки до площини, менша за довжину будь-якої похилої, проведеної із цієї самої точки до площини.

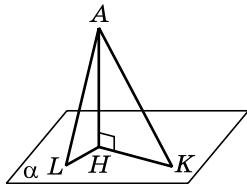
Справді, у прямокутному трикутнику AHK ($\angle H = 90^\circ$) відрізок AH є катетом, а відрізок AK – гіпотенузою (мал. 7.1), тому $AH < AK$.

2. Якщо дві похилі, проведенні з точки до площини, рівні, то рівні і їх проекції.

Нехай із точки A до площини α проведено похилі AK і AK_1 , $AK = AK_1$, та перпендикуляр AH (мал. 7.2). Тоді $\triangle AHK = \triangle AHK_1$ (за катетом і гіпотенузою), а тому $HK = HK_1$.



Мал. 7.2



Мал. 7.3

Правильним є і обернене твердження.

3. Якщо проекції двох похилих, проведених з точки до площини, рівні, то рівні й похилі.

На малюнку 7.2 $\triangle AHK = \triangle AHK_1$ (за двома катетами), тому $AK = AK_1$.

4. Якщо з точки до площини проведено дві похилі, то більшою з них є та, що має більшу проекцію на цю площину.

Нехай $AH \perp \alpha$, AK і AL – похилі до α , HK і HL – їх проекції (мал. 7.3). Нехай $HK > HL$.

Тоді в $\triangle AHK$: $AK = \sqrt{AH^2 + HK^2}$,

у $\triangle AHL$: $AL = \sqrt{AH^2 + HL^2}$.

Оскільки $HK > HL$, то $AH^2 + HK^2 > AH^2 + HL^2$, тому $AK > AL$.

Правильним є і обернене твердження.

5. Якщо з точки до площини проведено дві похилі, то більша похила має більшу проекцію на цю площину.

Нехай $AH \perp \alpha$, AK і AL – похилі до α , HK і HL – їх проекції (мал. 7.3). Нехай $AK > AL$.

Тоді в $\triangle AHK$ $HK = \sqrt{AK^2 - AH^2}$,

у $\triangle AHL$: $HL = \sqrt{AL^2 - AH^2}$.

Оскільки $AK > AL$, то $AK^2 - AH^2 > AL^2 - AH^2$, тому $HK > HL$.

Задача 1. З точки до площини проведено дві похилі завдовжки 41 см і 50 см. Знайти відстань від точки до площини та довжини проекцій похиліх, якщо вони відносяться як 3 : 10.

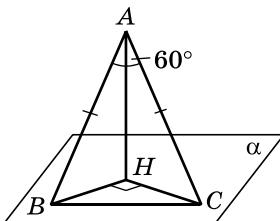
• Розв’язання. Нехай $AL = 41$ см, $AK = 50$ см і $AH \perp \alpha$ (мал. 7.3). Тоді AH – відстань від точки A до площини α .

- За властивістю 5 маємо: $HL < HK$. Нехай $HL = 3x$ (см), $HK = 10x$ (см).
- 1) Із $\triangle AHL$ $AH^2 = AL^2 - LH^2 = 41^2 - (3x)^2$.
- 2) Із $\triangle AHK$ $AH^2 = AK^2 - HK^2 = 50^2 - (10x)^2$.
- 3) Прирівнюючи отримані вирази, маємо:
 $41^2 - 9x^2 = 50^2 - 100x^2$,
звідки $x^2 = 9$, тобто $x = 3$, ураховуючи, що $x > 0$.
Отже, $HL = 3 \cdot 3 = 9$ (см), $HK = 10 \cdot 3 = 30$ (см).
- 4) Тоді $AH = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1600} = 40$ (см).

Відповідь. 40 см; 9 см і 30 см.

Задача 2. З точки до площини проведено дві похилі завдовжки 2 см кожна. Кут між похилими дорівнює 60° , а кут між їх проекціями – прямий. Знайти відстань від точки до площини.

- Розв'язання. $AC = AB = 2$ см,
- $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BHC = 90^\circ$ (мал. 7.4).
- Знайдемо AH .



- У $\triangle ABC$: $\angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$,
- тому $\triangle ABC$ – рівносторонній, $BC = 2$ см.
- Оскільки $AB = AC$, то $HB = HC$.

Мал. 7.4

Нехай $HB = HC = x$ (см).

- Із $\triangle HBC$: $HB^2 + HC^2 = BC^2$, $x^2 + x^2 = 2^2$, $2x^2 = 4$, $x^2 = 2$,
 $x = \sqrt{2}$ (см).

- 3) Із $\triangle ABH$: $AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$ (см).

Відповідь. $\sqrt{2}$ см.

2. Теорема про три перпендикуляри

Розглянемо одну з найважливіших теорем стереометрії, яку називають *теоремою про три перпендикуляри*.



Теорема (про три перпендикуляри). Якщо пряма, проведена на площині через основу похилої, перпендикулярна до її проекції, то вона перпендикулярна і до похилої. І навпаки, якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої.

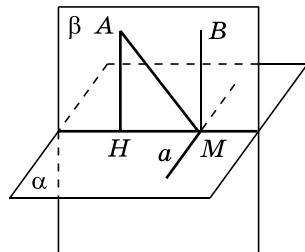
- Доведення. Нехай AH – перпендикуляр, AM – похила до площини α , пряму a проведено у площині α через точку M (мал. 7.5).

• Розглянемо першу частину теореми. Нехай $a \perp HM$. Доведемо, що $a \perp AM$.

• 1) Проведемо пряму BM паралельно прямій AH . За властивістю взаємно перпендикулярних прямих і площини, $BM \perp a$. Тому $BM \perp a$.

• 2) Проведемо через прямі BM і HM площину β .

• 3) Оскільки $a \perp BM$ і $a \perp HM$, то, за ознакою перпендикулярності прямої і площини, $a \perp \beta$. Тому пряма a перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить в площині β і проходить через точку M , зокрема, до прямої AM . Першу частину теореми доведено.



Мал. 7.5

Розглянемо другу частину теореми. Оскільки $a \perp AM$ і $a \perp BM$, то $a \perp \beta$ (за ознакою перпендикулярності прямої і площини), а тому $a \perp HM$. ■

Задача 3. З вершини A квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр AK до площини квадрата. Знайти S_{ABCD} , якщо $KD = 6$ см, $KC = 10$ см.

• Розв'язання. Нехай $ABCD$ – квадрат, $AK \perp (ABC)$, тоді KD – похила, AD – її проекція (мал. 7.6).

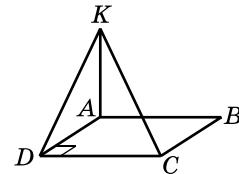
• 1) Оскільки $AD \perp DC$, то, за теоремою про три перпендикуляри, $KD \perp DC$.

• 2) Із $\triangle KDC$ ($\angle D = 90^\circ$):

$$DC = \sqrt{KC^2 - KD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ (см)}.$$

• 3) Тоді $S_{ABCD} = 8^2 = 64 \text{ (см}^2\text{)}$.

Відповідь. 64 см^2 .



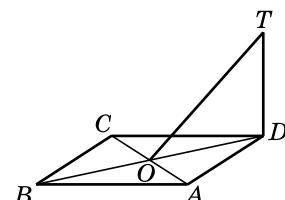
Мал. 7.6

Задача 4. Через вершину D ромба $ABCD$ проведено перпендикуляр DT до його площини. Побудувати перпендикуляр із точки T до прямої AC .

• Розв'язання. 1) Проведемо діагоналі ромба AC і BD , які перетинаються в точці O .

• 2) За властивістю діагоналей ромба $BD \perp AC$, тому $DO \perp AC$.

• 3) $DT \perp (ADC)$, TO – похила до (ADC) , DO – її проекція, $DO \perp AC$. Тоді, за теоремою про три перпендикуляри, $TO \perp AC$ (мал. 7.7). Отже, TO і є шуканим перпендикуляром.



Мал. 7.7

А ще раніше...

Теореми про три перпендикуляри, без якої сьогодні неможливо уявити курс стереометрії, у «Началах» Евкліда немає. Доведена вона була пізніше математиками Близького Сходу. Зокрема, доведення цієї теореми є у «Трактаті про повний чотиристоронник» Насир ад-Діна ат-Тусі та в тригонометричному трактаті його анонімного попередника.

У Європі теорему про три перпендикуляри вперше сформулював швейцарський математик Луї Берtrand (1731–1812), учень і друг Леонарда Ейлера, а довів її французький математик Адріан Марі Лежандр (1752–1833). Доведення міститься в його підручнику «Початки геометрії» (1794), який вважався найкращим тогочасним підручником з геометрії. Підтвердженням цього є те, що він неодноразово перевидавався, в тому числі ще за життя Лежандра, і перекладався, а наведене в ньому доведення теореми про три перпендикуляри часто використовували інші математики, зокрема, А.П. Кисельов, автор класичного підручника «Елементарна геометрія для середніх навчальних закладів», за яким навчалися майже ціле століття (перше видання датується 1892 р., а останнє – 1980 р.).

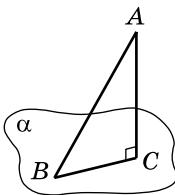


- Що називають перпендикуляром, проведеним із даної точки до даної площини?
- Що називають основою перпендикуляра?
- Що називають похилою, проведеною з даної точки до даної площини?
- Що називають основою похилої і що називають проекцією похилої?
- Сформулюйте властивості перпендикуляра і похилої.
- Сформулюйте й доведіть теорему про три перпендикуляри.

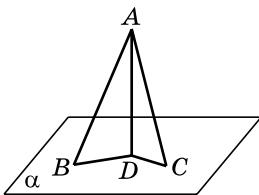


Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1.** 7.1. AC – перпендикуляр, а AB – похила до площини α (мал. 7.8). Порівняйте: 1) AB і AC ; 2) AB і BC .
- 2.** З точки A до площини α проведено перпендикуляр AC і похилу AB (мал. 7.8). Знайдіть:
 - 1) AB , якщо $BC = 5$ см, $AC = 12$ см;
 - 2) AC , якщо $AB = 10$ см, $BC = 6$ см;
 - 3) BC , якщо $AB = 20$ см, $\angle BAC = 30^\circ$;
 - 4) AC , якщо $BC = 6$ см, $\angle ABC = 45^\circ$.
- 3.** З точки A до площини α проведено перпендикуляр AC і похилу AB (мал. 7.8). Знайдіть:
 - 1) AC , якщо $AB = 15$ см, $BC = 9$ см;
 - 2) AB , якщо $AC = BC = 2$ см;
 - 3) BC , якщо $AC = 8$ см, $\angle BAC = 45^\circ$;
 - 4) AB , якщо $AC = 6$ см, $\angle ABC = 30^\circ$.



Мал. 7.8



Мал. 7.9

7.4. З точки A до площини α проведено похилі AB і AC та перпендикуляр AD (мал. 7.9). Порівняйте BD і DC , якщо $AB > AC$.

7.5. З точки A до площини α проведено похилі AB і AC та перпендикуляр AD (мал. 7.9). Порівняйте AB і AC , якщо $BD > DC$.

2 **7.6.** З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу, які утворюють між собою кут 60° . Знайдіть відстань від точки до площини, якщо проекція похилої дорівнює 3 см.

7.7. З точки до площини проведено похилу, довжина якої 10 см. Знайдіть відстань від точки до площини, якщо похила утворює зі своєю проекцією кут 45° .

7.8. З точки A до площини α проведено похилі AB і AC та перпендикуляр AD (мал. 7.9). Знайдіть відстань від точки A до площини α та довжину похилої AC , якщо $AB = 10$ см, $BD = 6$ см, $DC = 15$ см.

7.9. З точки A до площини α проведено похилі AB і AC та перпендикуляр AD (мал. 7.9). Знайдіть відстань від точки A до площини α та довжину відрізка CD , якщо $AB = 25$ см, $BD = 20$ см, $AC = 17$ см.

7.10. MB – перпендикуляр до площини прямокутника $ABCD$. Доведіть, що $\angle MAD = 90^\circ$.

7.11. KC – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$. Доведіть, що кут KDA – прямий.

7.12. Із точки A до площини проведено перпендикуляр AK і похилу AP , яка на 3 см довша за свою проекцію. Знайдіть довжину похилої, якщо $AK = 9$ см.

7.13. Із точки B до площини проведено перпендикуляр BL і похилу BM , що дорівнює 26 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, якщо він на 14 см коротший за проекцію похилої.

7.14. У трикутнику ABC $AC = BC = 10$ см, $AB = 12$ см, CH – висота трикутника, CM – перпендикуляр до площини трикутника, $CM = 6$ см.

- 1) Знайдіть відстань від точки M до вершин трикутника.
- 2) Доведіть, що $MH \perp AB$.
- 3) Знайдіть довжину відрізка MH .

7.15. У правильному трикутнику ABC AM – медіана, AP – перпендикуляр до площини трикутника, $AB = 2$ см, $AP = 2\sqrt{3}$ см.

- 1) Знайдіть відстань від точки P до вершин трикутника.
- 2) Доведіть, що $PM \perp BC$.
- 3) Знайдіть довжину відрізка PM .

7.16. З вершини D квадрата $ABCD$, площа якого дорівнює 25 см 2 , до його площини проведено перпендикуляр DK . Знайдіть відстань від точки K до вершин A і B квадрата, якщо $KC = 12$ см.

7.17. З вершини C квадрата $ABCD$, периметр якого дорівнює 32 см, до його площини проведено перпендикуляр CM . Знайдіть відстані від точки M до вершин B і D квадрата, якщо $MA = 17$ см.

7.18. Основа AB рівнобедреного трикутника ABC належить площині α , $AC = BC = 13$ см, $AB = 24$ см. З точки C до площини α проведено перпендикуляр CO , а з точки O до прямої AB – перпендикуляр OM . Знайдіть CM .

7.19. Сторона BC правильного трикутника ABC належить площині β . З точки A до площини β проведено перпендикуляр AK , а з точки K до прямої BC – перпендикуляр KN . Знайдіть AN , якщо $BC = 6$ см.

7.20. KB – перпендикуляр до площини ромба $ABCD$. Побудуйте перпендикуляр, проведений із точки K до прямої AC .

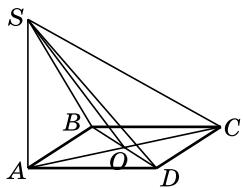
7.21. AP – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$. Побудуйте перпендикуляр, проведений із точки P до прямої BD .

 **7.22.** Точка S рівновіддалена від усіх вершин паралелограма $ABCD$. Доведіть, що $ABCD$ – прямокутник.

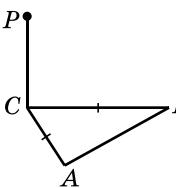
7.23. Точка P рівновіддалена від усіх вершин ромба $ABCD$. Доведіть, що $ABCD$ – квадрат.

7.24. Точка M віддалена від площини правильного трикутника на 8 см і рівновіддалена від усіх його вершин. Знайдіть відстань від точки M до вершин трикутника, якщо периметр трикутника дорівнює $18\sqrt{3}$ см.

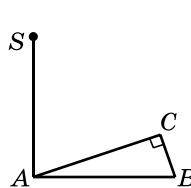
- 7.25.** Точка K віддалена від кожної вершини квадрата $ABCD$ на 26 см. Знайдіть відстань від точки K до площини квадрата, якщо його площа дорівнює 1152 см^2 .
- 7.26.** З точки до площини проведено дві похилі, довжини яких 5 см і 7 см, а різниця їх проекцій – 4 см. Знайдіть проекції похилих і відстань від точки до площини.
- 7.27.** З точки до площини проведено дві похилі, різниця довжин яких дорівнює 4 см. Знайдіть довжини похилих і відстань від точки до площини, якщо проекції похилих дорівнюють 10 см і 2 см.
- 7.28.** З вершини A ромба $ABCD$ проведено перпендикуляр AM до його площини, $AM = 1 \text{ см}$, $AB = BD = 3 \text{ см}$. Знайдіть довжину похилої MC та її проекції на площину ромба.
- 7.29.** У трикутнику ABC $\angle BAC = 31^\circ$, $\angle ACB = 59^\circ$. Пряма AD перпендикулярна до площини трикутника ABC . Визначте вид трикутника BCD .
- 7.30.** У трикутнику ABC $\angle ABC = 40^\circ$, $\angle BAC = 50^\circ$. Пряма BK перпендикулярна до площини трикутника ABC . Доведіть, що $KC \perp CA$.
- 7.31.** З точки A до площини α проведено дві похилі, кут між якими 60° , а кут між їх проекціями – 90° . Довжина кожної проекції 2 см. Знайдіть довжину похилих і відстань від точки A до площини α .
- 7.32.** З точки M до площини проведено дві похилі, кожна з яких завдовжки $\sqrt{6}$ см. Кут між похилими – 90° , а кут між їх проекціями – 120° . Знайдіть довжини проекцій похилих і відстань від точки до площини.
- 7.33.** Площа прямокутного трикутника дорівнює 6 см^2 , а різниця його катетів – 1 см. Точка M віддалена від площини трикутника на 6 см і рівновіддалена від усіх його вершин. Знайдіть відстань від точки M до вершин трикутника.
- 7.34.** Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а другий – на 2 см коротший за гіпотенузу. Точка, що не лежить у площині трикутника, віддалена від кожної з його вершин на 13 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини трикутника.
- 7.35.** AK – перпендикуляр до площини ромба $ABCD$, O – точка перетину його діагоналей. Доведіть, що пряма BD перпендикулярна до площини AKO .
- 7.36.** BL – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, Q – точка перетину його діагоналей. Доведіть, що $AC \perp (LBQ)$.



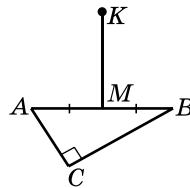
Мал. 7.10



Мал. 7.11



Мал. 7.12



Мал. 7.13

- 7.37.** AS – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$ (мал. 7.10). Знайдіть усі прямокутні трикутники з вершиною в точці S .
- 7.38.** $\triangle ABC$ – рівнобедрений, $AC = BC$, пряма CP перпендикулярна до площини ABC (мал. 7.11). Проведіть перпендикуляр із точки P до прямої AB .
- 7.39.** Пряма AS перпендикулярна до площини прямокутного трикутника ABC , $\angle C = 90^\circ$ (мал. 7.12). Проведіть перпендикуляр із точки S до прямої BC .
- 4 7.40.** $\triangle ABC$ – прямокутний, $\angle C = 90^\circ$, $AM = MB$, $MK \perp (ABC)$ (мал. 7.13). Проведіть перпендикуляри з точки K до катетів AC і BC .
- 7.41.** З точки A до площини α проведено дві рівні похилі, кут між якими 90° . Кут між проекціями похилих 120° . Знайдіть косинус кута, який утворює кожна похила зі своєю проекцією.
- 7.42.** З точки K до площини β проведено дві рівні похилі, кут між якими дорівнює 60° . Знайдіть кут, який утворює одна з похилих зі своєю проекцією на площину β , якщо проекції похилих взаємно перпендикулярні.
- 7.43.** З точки до площини проведено дві похилі. Довжина однієї з них – 8 см, а її проекції – $2\sqrt{15}$ см. Кут між похилими дорівнює 60° , а відстань між основами похилих – 7 см. Знайдіть довжину проекції другої похилої. Скільки розв'язків має задача?
- 7.44.** З точки до площини проведено дві похилі. Довжина однієї з них – $5\sqrt{5}$ см, а її проекції – 11 см. Кут між проекціями похилих дорівнює 60° , а відстань між основами похилих – $\sqrt{97}$ см. Знайдіть довжину другої похилої. Скільки розв'язків має задача?
- 7.45.** Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 13 см і 15 см. З вершини найменшого кута трикутника до його площини проведено перпендикуляр, і з другого кінця цього перпендикуляра до прямої, що містить противолежну

до цього кута сторону трикутника, проведено перпендикуляр завдовжки 13 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного до площини трикутника.

- 7.46.** Сторони трикутника дорівнюють 11 см, 25 см і 30 см. Через вершину найбільшого кута трикутника до його площини проведено перпендикуляр і з другого кінця цього перпендикуляра до протилежної цьому куту сторони проведено перпендикуляр завдовжки 11 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного до площини трикутника.
- 7.47.** Точка M лежить на відстані 30 см від площини рівнобічної трапеції та рівновіддалена від усіх вершин трапеції. Висота трапеції дорівнює 12 см, а діагональ трапеції завдовжки 20 см перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть відстань від точки M до вершин трапеції.
- 7.48.** Точка K віддалена відожної з вершин рівнобічної трапеції на 65 см. Бічна сторона трапеції перпендикулярна до її діагоналі. Знайдіть відстань від точки K до площини трапеції, якщо висота трапеції дорівнює 24 см, а діагональ трапеції – 40 см.
- 7.49.** Точка O – центр кола, вписаного в рівнобічну трапецію, периметр якої 48 см, а гострий кут 30° . Через точку O до площини трапеції проведено перпендикуляр OM завдовжки 4 см. З точки M проведено перпендикуляри до основ трапеції. Знайдіть довжини цих перпендикулярів.
- 7.50.** Точка Q – центр кола, вписаного у трикутник зі сторонами 10 см, 10 см і 12 см. З точки Q до площини трикутника проведено перпендикуляр QL завдовжки 4 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки L до найбільшої сторони трикутника.



Життєва математика

- 7.51.** Необхідно пофарбувати стелю у двох кімнатах: одна з них квадратної форми зі стороною 4 м, а інша – прямокутна з розмірами 5 м і 4 м. Для фарбування 1 m^2 стелі потрібно 240 г фарби. Фарба продається в банках по 2,5 кг. Яку найменшу кількість банок фарби треба придбати?



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

- 7.52.** Прямі a і b перетинаються під кутом 60° . Точка M належить прямій a і віддалена від прямої b на $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть відстань від точки M до точки перетину прямих a і b .

§ 8. ДВОГРАННИЙ КУТ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПЛОЩИН

1. Двогранний кут

У стереометрії, крім плоских кутів, розглядають ще й двогранні кути.

Щоб ввести поняття двогранного кута, зауважимо, що кожна пряма, проведена у площині, ділить її на дві півплощіни (мал. 8.1).

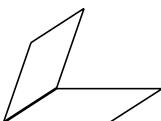
Двогранним кутом називають фігуру, яка утворена двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує.

На малюнку 8.2 зображені двогранні кути. Півплощіни, що утворюють двогранний кут, називають *гранями*, а пряму, що їх обмежує, – *ребром двогранного кута*.

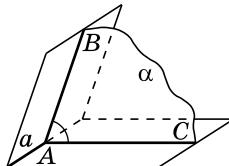
У повсякденному житті нам часто трапляються предмети, що мають форму двогранного кута, наприклад, напіврозгорнута книжка, дві суміжні стіни кімнати, двоскатні дахи будинків тощо.



Мал. 8.1



Мал. 8.2



Мал. 8.3

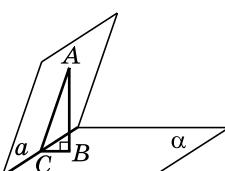
Площа α , яка перпендикулярна до ребра a двогранного кута, перетинає грані двогранного кута по променях AB і AC (мал. 8.3). Кут BAC називають *лінійним кутом двогранного кута*. Двогранний кут має безліч лінійних кутів, усі вони між собою рівні.

Градусною мірою двогранного кута називають градусну міру його лінійного кута.

Зазвичай замість «градусна міра двогранного кута дорівнює...» кажуть «двогранний кут дорівнює...».

Задача 1. Двогранний кут дорівнює 30° . На одній із граней вибрано точку на відстані 6 см від ребра двогранного кута. Знайти відстань від цієї точки до другої грані.

- Розв'язання. Нехай точка A належить одній із граней двогранного кута з ребром a , $AC \perp a$, $AC = 6$ см (мал. 8.4).



Мал. 8.4

- 1) Позначимо другу грань кута через α і проведемо до неї перпендикуляр AB . Сполучимо точки B і C .
- 2) $AB \perp \alpha$, AC – похила до α , BC – її проекція, $AC \perp a$. Тоді $BC \perp a$ (за теоремою про три перпендикуляри).
- 3) $AC \perp a$ і $BC \perp a$, тому $a \perp (ABC)$ (за ознакою перпендикулярності прямої і площини). Отже, $\angle ACB$ – лінійний кут двогранного кута, тоді $\angle ACB = 30^\circ$ (за умовою).
- 4) Із $\triangle ABC$ ($\angle B = 90^\circ$), за властивістю катета, що лежить проти кута 30° , маємо: $AB = \frac{AC}{2} = \frac{6}{2} = 3$ (см).

Відповідь. 3 см.

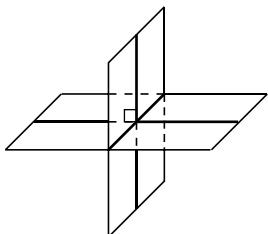
2. Перпендикулярність площин

Дві площини, що перетинаються, утворюють чотири двогранні кути. Якщо один з них дорівнює 90° , то інші, цілком очевидно, теж дорівнюють по 90° (мал. 8.5).

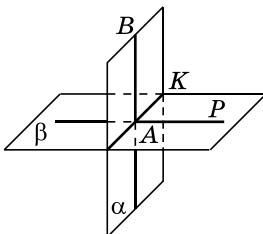


Дві площини називають **перпендикулярними (взаємно перпендикулярними)**, якщо, перетинаючись, вони утворюють прямі двогранні кути.

Якщо площини α і β перпендикулярні, це записують так: $\alpha \perp \beta$.



Мал. 8.5



Мал. 8.6



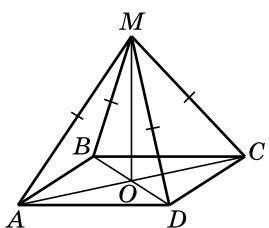
Теорема (ознака перпендикулярності площин). Якщо площа проходить через пряму, перпендикулярну до іншої площини, то ці площини взаємно перпендикулярні.

- Доведення. Нехай площа α проходить через пряму AB , яка перпендикулярна до площини β і перетинає її в точці A (мал. 8.6). Доведемо, що $\alpha \perp \beta$.
 - Нехай $\alpha \cap \beta = AK$. Оскільки $AB \perp \beta$, то AB перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у площині β і проходить через точку A , зокрема, $AB \perp AK$.

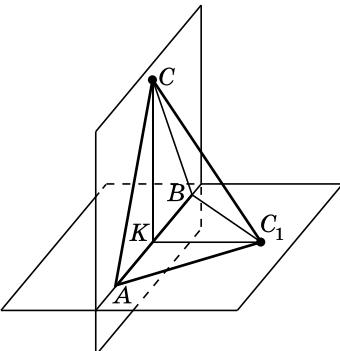
- 2) Проведемо в площині β пряму AP таку, що $AP \perp AK$. Тоді $\angle BAP$ – лінійний кут двогранного кута, грані якого належать площинам α і β .
- 3) Оскільки $\angle BAP = 90^\circ$, то $\alpha \perp \beta$. ■

Задача 2. Точка M рівновіддалена від усіх вершин прямокутника $ABCD$ і не лежить у його площині. Довести, що площини ABC і MAC взаємно перпендикулярні.

- Доведення. 1) Нехай O – точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$ (мал. 8.7), тоді $AO = OC$.
- 2) Оскільки $AM = MC$, то MO – медіана і висота трикутника AMC . Отже, $MO \perp AC$.
- 3) Аналогічно доводимо, що $MO \perp BD$.
- 4) Оскільки $MO \perp AC$ і $MO \perp BD$, то $MO \perp (ABC)$ (за ознакою перпендикулярності прямої і площини).
- 5) Тоді, за ознакою перпендикулярності площин, $(MAC) \perp (ABC)$. ■



Мал. 8.7



Мал. 8.8

Задача 3. Два рівнобедреніх трикутники ABC і ABC_1 мають спільну основу AB . Площини трикутників взаємно перпендикулярні. Знайти відстань між точками C і C_1 , якщо $AB = 16$ см, $AC = 10$ см, $AC_1 = 17$ см.

- Розв'язання. 1) Нехай K – середина AB , тоді CK – медіана і висота рівнобедреного трикутника ABC , а C_1K – медіана і висота рівнобедреного трикутника ABC_1 (мал. 8.8).
- 2) Оскільки $CK \perp AB$ і $C_1K \perp AB$, то $\angle CKC_1$ – лінійний кут двогранного кута з ребром AB , тому $\angle CKC_1 = 90^\circ$.
- 3) $AK = \frac{AB}{2} = \frac{16}{2} = 8$ (см).
- 4) У $\triangle ACK$: $KC = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (см).
- 5) У $\triangle AC_1K$: $KC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AK^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (см).

- 6) У $\triangle CKC_1$: $CC_1 = \sqrt{CK^2 + KC_1^2} = \sqrt{6^2 + 15^2} = 3\sqrt{29}$ (см).
 • Відповідь. $3\sqrt{29}$ см.

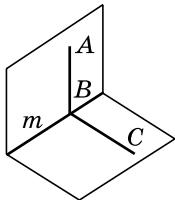


• Яку фігуру називають двогранним кутом? • Що називають гранями і ребром двогранного кута? • Що таке лінійний кут двогранного кута? • Що є градусною мірою двогранного кута? • Які площини називають взаємно перпендикулярними? • Сформулюйте й доведіть ознаку перпендикулярності площин.

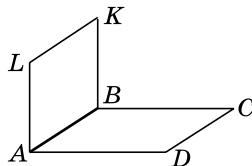


Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 8.1. (Усно). Наведіть приклади взаємно перпендикулярних площин серед предметів, що нас оточують.
- 8.2. (Усно). Кут ABC – лінійний кут двогранного кута з ребром m (мал. 8.9). Які з тверджень є правильними:
 1) $AB \parallel BC$; 2) $BC \perp m$; 3) $(ABC) \perp m$;
 4) $\angle ACB$ – також лінійний кут двогранного кута?
- 8.3. На малюнку 8.9 $\angle ABC$ – лінійний кут двогранного кута. Яким є взаємне розміщення:
 1) прямої AB і прямої m ; 2) прямої m і площини ABC ?



Мал. 8.9



Мал. 8.10

- 8.4. Лінійний кут двогранного кута дорівнює половині прямого кута. Чому дорівнює двогранний кут?
- 8.5. Двогранний кут дорівнює третині розгорнутого кута. Чому дорівнює лінійний кут цього двогранного кута?
- 8.6. Площини прямокутників $ABCD$ і $ABKL$ взаємно перпендикулярні (мал. 8.10). Яким є взаємне розміщення:
 1) прямої AL і площини ABC ;
 2) прямої DC і площини ALK ?
- 8.7. Площини квадратів $ABCD$ і $ABKL$ взаємно перпендикулярні (мал. 8.10). Яким є взаємне розміщення:
 1) прямої BC і площини ABK ;
 2) прямої LK і площини ABC ?

8.8. (Усно). Скільки пар взаємно перпендикулярних площин можна провести через дану пряму?

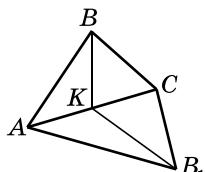
8.9. Площини квадратів $ABCD$ і $ABKL$ взаємно перпендикулярні (мал. 8.10). Знайдіть відстані від точки L до точок D і C , якщо $AB = 4$ см.

8.10. Площини прямокутника $ABCD$ і квадрата $ABKL$ взаємно перпендикулярні (мал. 8.10). Знайдіть відстані від точки K до точок C і D , якщо $AB = 3$ см, $BC = 4$ см.

8.11. Двогранний кут дорівнює 60° . На одній із його граней на відстані $2\sqrt{3}$ см від іншої грані позначено точку. Знайдіть відстань від цієї точки до ребра двогранного кута.

8.12. Двогранний кут дорівнює 45° . На одній із його граней на відстані $6\sqrt{2}$ см від ребра двогранного кута взято точку. Знайдіть відстань від цієї точки до другої грані двогранного кута.

8.13. Площини рівних між собою рівнобедрених трикутників ABC і AB_1C взаємно перпендикулярні (мал. 8.11). Медіана BK , проведена до основи трикутника ABC , дорівнює $3\sqrt{2}$ см. Знайдіть відстань між точками B і B_1 .



Мал. 8.11

8.14. Площини рівних між собою рівносторонніх трикутників ABC і AB_1C взаємно перпендикулярні (мал. 8.11). Знайдіть висоту B_1K трикутника AB_1C , якщо $BB_1 = 5\sqrt{2}$ см.

8.15. Які з тверджень правильні:

- 1) через точку, взяту поза площину, можна провести площину, перпендикулярну до цієї площини, і причому тільки одну;
- 2) якщо площа α перпендикулярна до площини β , то у площині α існує пряма a , перпендикулярна до площини β ;
- 3) якщо пряма і площа перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, то вони паралельні між собою;
- 4) якщо площа α і β взаємно перпендикулярні, то площа α перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у площині β ?

8.16. Точка, що належить одній із граней двогранного кута, лежить на відстані $4\sqrt{2}$ см від другої грані та на відстані 8 см від ребра цього кута. Знайдіть міру двогранного кута.

8.17. Точка, що належить одній із граней двогранного кута, знаходиться на відстані 10 см від ребра двогранного кута та на відстані 5 см від другої грані. Знайдіть міру двогранного кута.

- 8.18.** Площини α і β – перпендикулярні. Яким може бути взаємне розташування прямої a і площини β , якщо пряма a :
- 1) паралельна площині α ;
 - 2) належить площині α ;
 - 3) перпендикулярна до площини α ;
 - 4) і площа α перетинаються, але не є перпендикулярними?

Виконайте відповідні малюнки.

- 8.19.** Площини α і β – перпендикулярні. Яким може бути взаємне розташування площин β і γ , якщо площини α і γ :
- 1) перпендикулярні;
 - 2) паралельні;
 - 3) перетинаються, але не під прямим кутом?

Виконайте відповідні малюнки.

- 8.20.** Рівнобедрені трикутники ABC і ABC_1 лежать у різних гранях двогранного кута з ребром AB , який дорівнює 120° . Знайдіть CC_1 , якщо $CK = 3$ см, $C_1K = 5$ см, де CK і C_1K – висоти трикутників.

- 8.21.** Рівнобедрені трикутники KLM і KLM_1 лежать у різних гранях двогранного кута з ребром KL , який дорівнює 60° . Знайдіть MM_1 , якщо $MP = 3$ см, $M_1P = 8$ см, де MP і M_1P – висоти трикутників.

- 8.22.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть міру двогранного кута, який утворюють площини ABC_1 і ABC .

-  **8.23.** Щоб побудувати лінійний кут двогранного кута, проводять площину, перпендикулярну до ребра цього кута. Чи буде ця площа перпендикулярна до граней двогранного кута?

- 8.24.** Дві прямі перпендикулярні до двох граней двогранного кута й перетинаються. Знайдіть кут між прямими, якщо двогранний кут дорівнює 70° .

- 8.25.** Дві прямі перетинаються під прямим кутом і перпендикулярні до граней двогранного кута. Знайдіть градусну міру двогранного кута.

- 8.26.** Площини α і β взаємно перпендикулярні. Точка M віддалена від площини α на 8 см, а від лінії перетину площин – на 10 см. Знайдіть відстань від точки M до площини β .

- 8.27.** Точка P віддалена від двох взаємно перпендикулярних площин на 8 см і 15 см. Знайдіть відстань від точки P до лінії перетину площин.

- 8.28.** DS – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$. Доведіть, що:

- 1) $(SAD) \perp (SCD)$;
- 2) $(SBC) \perp (SCD)$.

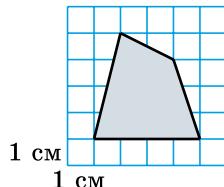
- 8.29.** Точка O – центр квадрата $ABCD$, OS – перпендикуляр до його площини. Доведіть, що:
- 1) $(SAC) \perp (ABD)$;
 - 2) $(SAC) \perp (SBD)$.
- 8.30.** З точок A і B , які належать двом перпендикулярним площинам α і β , проведено перпендикуляри AC і BD до прямої перетину площин. Знайдіть AC , якщо $AB = 7$ см, $CD = 3$ см, $BD = 2$ см.
- 8.31.** З точок M і N , які лежать у двох перпендикулярних площинах β і γ , проведено перпендикуляри MK і NL до прямої перетину площин. Знайдіть MN , якщо $ML = 8$ см, $KN = 14$ см, $KL = 2$ см.
- 8.32.** Площини рівнобедрених трикутників KLM і KLM_1 зі спільною основою KL взаємно перпендикулярні. Знайдіть MM_1 , якщо $\angle M_1 = 60^\circ$, $KL = 8$ см, $MK = 5$ см.
- 8.33.** Площини рівнобедрених трикутників ABC і ABC_1 зі спільною основою AB взаємно перпендикулярні, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10$ см, $AC_1 = 13$ см. Знайдіть CC_1 .
- 8.34.** Площини правильного трикутника ABC і квадрата $ABDE$ взаємно перпендикулярні, $AB = 2a$ см. Знайдіть:
- 1) довжини відрізків CD і CE ;
 - 2) косинус кута ECD .
- 8.35.** Два рівносторонніх трикутники ABC і ABC_1 лежать у взаємно перпендикулярних площинах, $AB = 2b$ см. Знайдіть:
- 1) довжину відрізка CC_1 ;
 - 2) косинус кута CAC_1 .
- 4** **8.36.** Точки C і D лежать на одній із граней двогранного кута γ віддалені від його ребра відповідно на $2\sqrt{2}$ і $3\sqrt{2}$ см. Знайдіть міру двогранного кута, якщо точка C віддалена від другої грані кута на 1 см менше, ніж точка D .
- 8.37.** Точки M і N лежать на одній із граней двогранного кута γ віддалені від другої грані на 3 см і 4 см. Знайдіть міру двогранного кута, якщо сума відстаней від точок M і N до ребра двогранного кута дорівнює 14 см.
- 8.38.** Чотирикутник $ABCD$, у якого $AB = AD$ і $BC = CD$, зігнули під кутом 90° по діагоналі BD . Площи трикутників ABD і BDC , що при цьому утворилися, дорівнюють відповідно 28 см 2 і 96 см 2 . Знайдіть, якою стала відстань між точками A і C після згинання, якщо $BD = 8$ см.
- 8.39.** Квадрат, площа якого дорівнює S , зігнули по діагоналі так, що його частини стали взаємно перпендикулярними. Знайдіть відстань між кінцями другої діагоналі після згинання.

- 8.40.** Відрізок завдовжки t спираєтьсяся кінцями на дві взаємно перпендикулярні площини. Відстані від кінців відрізка до лінії перетину площин дорівнюють a і b . Знайдіть відстань між основами перпендикулярів, проведених з кінців відрізка до лінії перетину площин. При яких обмеженнях на a , b і t задача має розв'язки?



Життєва математика

- 8.41.** Знайдіть площеу (в гектарах) лісового масиву, зображеного на плані з квадратною сіткою 1×1 (у см) в масштабі $1 : 20\,000$.



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

- 8.42.** Проведіть пряму a і позначте точки M і K , які віддалені від прямої a на 2 см і 3 см відповідно.
- 8.43.** Проведіть прямі a і b так, що $a \parallel b$, і відстань між ними дорівнює 2,5 см.

§ 9. ВІДСТАНІ У ПРОСТОРІ

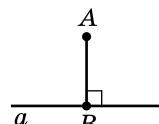
1. Відстань від точки до прямої

Як і на площині, у просторі



відстань від точки до прямої – це довжина перпендикуляра, проведеного з цієї точки до цієї прямої.

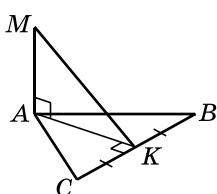
На малюнку 9.1 довжина відрізка AB – відстань від точки A до прямої a .



Мал. 9.1

Задача 1. Пряма AM перпендикулярна до площини рівностороннього трикутника ABC . Знайти відстань від точки M до прямої BC , якщо $AM = 4$ см, $AB = 2\sqrt{3}$ см.

• Розв'язання. 1) Нехай точка K – середина BC (мал. 9.2). Тоді AK – медіана і висота рівностороннього трикутника ABC .
 2) Проведемо відрізок MK . Оскільки $AM \perp (ABC)$, MK – похила до (ABC) , AK – її проекція, $AK \perp BC$, то $MK \perp BC$ (за теоремою про три перпендикуляри). Тоді



Мал. 9.2

• MK – відстань від точки M до прямої BC .

3) $CK = \frac{BC}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (см).

4) У $\triangle AKC$ ($\angle K = 90^\circ$):

$AK = \sqrt{AC^2 - CK^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3$ (см).

5) У $\triangle AMK$ ($\angle A = 90^\circ$):

$MK = \sqrt{AM^2 + AK^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (см).

Відповідь. 5 см.

2. Відстань від точки до площини

Як було зазначено в одному з попередніх параграфів,

відстань від точки до площини – це довжина перпендикуляра, проведено із цієї точки до цієї площини.

Задача 2. У прямокутнику $ABCD$ зі сторонами $AB = 6$ см, $BC = 8$ см діагоналі перетинаються в точці O , OK – перпендикуляр до площини прямокутника. Знайти відстань від точки K до площини прямокутника, якщо $AK = 13$ см.

Розв'язання. $OK \perp (ABC)$, тому OK – шукана відстань (мал. 9.3).

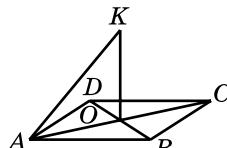
1) $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см).

2) $AO = \frac{AC}{2} = \frac{10}{2} = 5$ (см).

3) У $\triangle AOK$ ($\angle O = 90^\circ$):

$OK = \sqrt{AK^2 - AO^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

Відповідь. 12 см.



Мал. 9.3

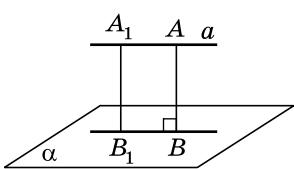
3. Відстань від прямої до площини

Якщо пряма належить площині або перетинає площину, то вважають, що відстань від прямої до площини дорівнює нулю.

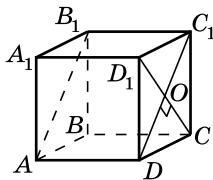
Відстанню від прямої до паралельної їй площини називають довжину перпендикуляра, проведено з будь-якої точки прямої до площини.

На малюнку 9.4 довжина відрізка AB – відстань від прямої a до паралельної їй площини α .

Можна довести, що відстань від прямої до паралельної їй площини не залежить від вибору точки A . Дійсно, $A_1B_1 = AB$ (як протилежні сторони прямокутника).



Мал. 9.4



Мал. 9.5

Задача 3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, ребро якого дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Знайти відстань від прямої BC до площини AB_1C_1 .

- Розв’язання (мал. 9.5). 1) Оскільки $BC \parallel B_1C_1$, то пряма BC паралельна площині AB_1C_1 .
- 2) $CD_1 \perp C_1D$, точка O – точка перетину діагоналей грані CD_1C_1D .
- 3) $CO \perp AB_1C_1$, тому CO – шукана відстань.
- 4) $CD_1 = CD \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$ (см).
- 5) $CO = \frac{CD_1}{2} = \frac{8}{2} = 4$ (см).

Відповідь. 4 см.

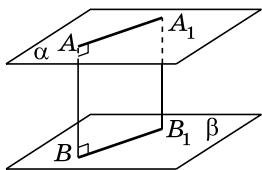
4. Відстань між площинами

Якщо площини перетинаються, то вважають, що відстань між такими площинами дорівнює нуль.

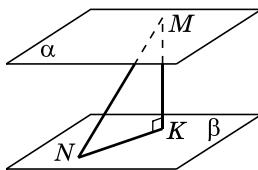


Відстанню між двома паралельними площинами називають довжину перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки однієї площини до другої.

На малюнку 9.6 довжина відрізка AB – відстань між площинами α і β . Відстань між паралельними площинами не залежить від вибору точки A .



Мал. 9.6



Мал. 9.7

Задача 4. Кінці відрізка MN завдовжки 17 см належать паралельним площинам α і β . Проекція відрізка на одну із цих площин дорівнює 8 см. Знайти відстань між площинами α і β .

- Розв’язання. 1) Проведемо MK – перпендикуляр до площини β (мал. 9.7).

- 2) Тоді MK – шукана відстань, а NK – проекція MN на площину β , $NK = 8$ см.
- 3) Із $\triangle MNK$ ($\angle K = 90^\circ$):
- $MK = \sqrt{MN^2 - NK^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (см).
- Відповідь. 15 см.

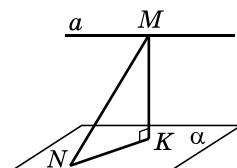


Що називають відстанню від точки до прямої; відстанню від точки до площини? Якою є відстань від прямої до площини, якщо пряма перетинає площину або їй належить? Що називають відстанню від прямої до паралельної їй площини? Якою є відстань між площинами, що перетинаються? Що називають відстанню між паралельними площинами?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 9.5). Назвіть відрізок, довжина якого є відстанню від:
- точки D_1 до прямої DC ;
 - точки A до площини $A_1B_1C_1$.
- 2.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 9.5). Назвіть відрізок, довжина якого є відстанню від:
- точки B до прямої DC ;
 - точки B_1 до площини ABC .
- 3.** Дано куб із ребром a (мал. 9.5). Знайдіть відстань:
- від точки A_1 до площини DD_1C_1 ;
 - від точки D до прямої BC ;
 - від прямої CC_1 до площини ABD ;
 - від прямої DC до площини ABB_1 ;
 - між площинами ABD і DCC_1 ;
 - між площинами ABC і $A_1B_1C_1$.
- 4.** Дано куб із ребром b (мал. 9.5). Знайдіть відстань:
- від точки D до площини $A_1B_1C_1$;
 - від точки B_1 до прямої A_1D_1 ;
 - від прямої A_1D_1 до площини ABC ;
 - від прямої AB до площини B_1C_1C ;
 - між площинами ABB_1 і DCC_1 ;
 - між площинами ADD_1 і $A_1B_1C_1$.
- 5.** Пряма a паралельна площині α (мал. 9.8). З деякої точки M прямої a до площини α проведено похилу завдовжки 5 см, проекція якої KN дорівнює 4 см. Знайдіть відстань від прямої a до площини α .

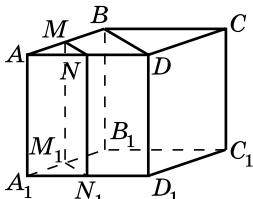


Мал. 9.8

- 9.6.** Площини α і β паралельні (мал. 9.7). З точки M , яка належить площині α , до площини β проведено перпендикуляр MK і похилу MN завдовжки 10 см. Знайдіть відстань між площинами α і β , якщо проекція похилої MN на площину β дорівнює 6 см.
- 2** **9.7.** Кінці відрізка MN , що не перетинає площину α , знаходяться на відстанях 6 см і 10 см відповідно від цієї площини. На якій відстані від площини знаходиться середина відрізка MN ?
- 9.8.** Кінці відрізка AB , що не перетинає площину β , знаходяться на відстанях 8 см і 4 см відповідно від цієї площини. На якій відстані від площини знаходиться середина відрізка AB ?
- 9.9.** З точки A до площини β проведено похилу завдовжки $8\sqrt{3}$ см та перпендикуляр, які утворюють між собою кут 30° . Знайдіть відстань від точки A до площини β .
- 9.10.** З точки B до площини α проведено перпендикуляр і похилу. Знайдіть відстань від точки B до площини α , якщо проекція похилої дорівнює $3\sqrt{2}$ см і утворює з похилою кут 45° .
- 9.11.** Один із кінців відрізка лежить у площині α , а його середина віддалена від площини на 3 см. На якій відстані від площини знаходиться другий кінець відрізка?
- 9.12.** Один із кінців відрізка належить площині α , а другий віддалений від неї на 10 см. На якій відстані від площини знаходиться середина цього відрізка?
- 9.13.** Через вершину A прямокутника $ABCD$ до його площини проведено перпендикуляр AK . Знайдіть відстань від точки K до прямої CD , якщо $AC = 20$ см, $CD = 16$ см, $AK = 9$ см.
- 9.14.** Через вершину B квадрата $ABCD$ до його площини проведено перпендикуляр BM . Знайдіть відстань від точки M до прямої AD , якщо $BD = 4\sqrt{2}$ см, $BM = 3$ см.
- 9.15.** У трикутнику ABC $AC = BC = 5$ см, $AB = 6$ см. CM – перпендикуляр до площини трикутника, $CM = 3$ см. Знайдіть відстань від точки M до прямої AB .
- 9.16.** BK – перпендикуляр до площини рівностороннього трикутника ABC , $AB = 6\sqrt{3}$ см, $BK = 12$ см. Знайдіть відстань від точки K до прямої AB .



- 9.17.** На малюнку 9.9 зображенено куб із ребром завдовжки b , MN – середня лінія трикутника ABD . Знайдіть відстань від прямої CC_1 до площини MNN_1 .



Мал. 9.9

- 9.18.** На малюнку 9.9 зображенено куб із ребром a . MN – середня лінія трикутника ABD . Знайдіть відстань між площинами BB_1D і MNN_1 .

- 9.19.** Через вершину A квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр AT . Знайдіть відстань від точки T до прямих, що містять діагоналі квадрата, якщо $AB = 8$ см, $AT = 7$ см.

- 9.20.** Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 9 см. Через середину гіпотенузи до площини трикутника проведено перпендикуляр завдовжки 6 см. Знайдіть відстань від кінця перпендикуляра, що не лежить у площині трикутника, до прямих, що містять катети трикутника.

- 9.21.** Точка M лежить на бісектрисі кута ABC . До площини кута проведено перпендикуляр MS . Доведіть, що точка S рівновіддалена від прямих, що містять сторони кута.

- 9.22.** Доведіть, що коли точка M рівновіддалена від усіх вершин многокутника й не лежить у його площині, то її проекцією на площину многокутника є центр кола, описаного навколо многокутника.

- 9.23.** Точка S рівновіддалена від усіх вершин прямокутника $ABCD$ і знаходиться на відстані 3 см від його площини. Знайдіть відстань від точки S до точки A , якщо $CD = 4$ см, $\angle CAD = 30^\circ$.

- 9.24.** Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 24 см. Точка Q , що не лежить у площині трикутника, віддалена від кожної з його вершин на 20 см. Знайдіть відстань від точки Q до площини трикутника.

- 9.25.** Точка віддалена відожної з прямих, що містять сторони рівностороннього трикутника, на 15 см, а від площини трикутника – на 12 см. Знайдіть площину трикутника.

- 9.26.** Площа правильного трикутника дорівнює $27\sqrt{3}$ см². Відстань від точки M , що лежить поза площею трикутника, до прямих, що містять сторони трикутника, дорівнює 5 см. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника.

- 9.27.** Точка K віддалена від двох даних паралельних прямих на 13 см і 15 см, а відстань між цими прямими – 14 см.

Знайдіть відстань від точки K до площини, у якій лежать ці паралельні прямі.

9.28. З вершини більшого кута трикутника, сторони якого дорівнюють 21 см, 13 см і 20 см, до площини трикутника проведено перпендикуляр завдовжки 35 см. Знайдіть відстані від кінців перпендикуляра до прямої, що містить протилежну до цього кута сторону трикутника.

9.29. З вершини середнього за величиною кута трикутника, сторони якого дорівнюють 9 см, 10 см і 11 см, до площини трикутника проведено перпендикуляр, довжина якого 7 см. Знайдіть відстані від кінців перпендикуляра до прямої, що містить протилежну до цього кута сторону трикутника.



9.30. Проекцією точки S на площину многокутника є точка O , що лежить усередині многокутника. Доведіть, що якщо точка S рівновіддалена від усіх прямих, що містять сторони многокутника, то точка O – центр кола, вписаного в многокутник.

9.31. Точка P рівновіддалена від усіх прямих, що містять сторони паралелограма. Доведіть, що цей паралелограм є ромбом.

9.32. Точка K рівновіддалена від усіх прямих, що містять сторони ромба, і віддалена на 1 см від його площини. Знайдіть відстань від точки K до сторін ромба, якщо його діагоналі дорівнюють 6 см і 8 см.

9.33. Точка F віддалена на 5 см від усіх прямих, що містять сторони прямокутного трикутника. Проекція цієї точки на площину трикутника лежить усередині трикутника. Знайдіть відстань від точки F до площини трикутника, якщо його катет дорівнює 12 см, а гіпотенуза – 15 см.

9.34. Кінці двох відрізків, довжини яких 40 см і 30 см, належать двом паралельним площинам, а проекції цих відрізків на одну з них відносяться як 16 : 9. Знайдіть відстань між площинами.

9.35. Кінці двох відрізків, довжини яких відносяться як 26 : 25, належать двом паралельним площинам, а проекції цих відрізків на одну з них дорівнюють 40 см і 28 см. Знайдіть відстань між площинами.

9.36. Вершини A і D паралелограма $ABCD$ лежать у площині α , а дві інші вершини – поза цією площеиною. Проекції діагоналей на цю площину дорівнюють 20 см і 22 см. Знайдіть відстань від прямої BC до площини α , якщо $AB = 15$ см, $BC = 19$ см.



Життєва математика

9.37. Коробка має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 20 см, 30 см і 50 см. Скільки таких коробок можна помістити в кузов вантажівки, розміри якого 2 м, 3 м і 1,5 м?



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

9.38. Побудуйте прямі a і b , що перетинаються під кутом:
1) 30° ; 2) 45° ; 3) 60° ; 4) 90° .

§ 10. ВИМІРЮВАННЯ КУТІВ У ПРОСТОРИ. ОРТОГОНАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ

1. Кут між прямими

Як і на площині, у просторі

кутом між прямими, що перетинаються, називають менший із кутів, що утворилися при перетині цих прямих.

Якщо прямі паралельні, то кут між ними вважають рівним нулю.

Розглянемо поняття кута між мимобіжними прямими.

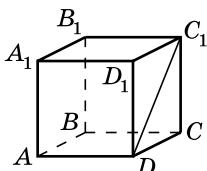
Кутом між мимобіжними прямими називають кут між прямими, що паралельні даним мимобіжними прямим і перетинаються.

Нехай a_1 і b_1 – прямі, що перетинаються в точці C і паралельні мимобіжним прямим a і b , а кут між прямими a_1 і b_1 дорівнює φ (мал. 10.1). Тоді кут між прямими a і b також дорівнює φ . Можна довести, що кут між мимобіжними прямими a і b не залежить від вибору точки C . У задачах точку C зручно вибирати на одній із прямих, наприклад на прямій a , і проводити через цю точку пряму, паралельну прямій b .

Мал. 10.1

Задача 1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайти кут між мимобіжними прямими BC і DC_1 .

- Розв’язання (мал. 10.2). 1) Пряма AD паралельна прямій BC , тому шуканий кут дорівнює куту між прямими AD і DC_1 .



Мал. 10.2

- 2) Оскільки DC – проекція похилої DC_1 на (ADC) і $DC \perp AD$, то, за теоремою про три перпендикуляри, $DC_1 \perp AD$.
- 3) Отже, кут між прямими BC і DC_1 дорівнює 90° .
- Відповідь. 90° .

Таким чином, можна говорити про кут φ між будь-якими двома прямими простору. Очевидно, що цей кут φ задовільняє умову $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Перпендикулярними можуть бути як прямі, що перетинаються, так і мимобіжні прямі.

Дві прямі називають перпендикулярними (взаємно перпендикулярними), якщо кут між ними дорівнює 90° .

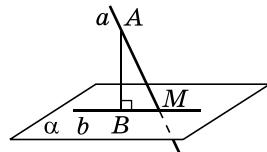
У задачі 1 прямі BC і DC_1 – взаємно перпендикулярні.

2. Кут між прямою і площиною

Якщо пряма паралельна площині або їй належить, то кут між ними вважають рівним нулю.

Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між ними вважають рівним 90° .

Нехай дано пряму a , що перетинає площину α в точці M і не є перпендикулярною до цієї площини (мал. 10.3). Основи перпендикулярів, проведених з точок прямої a на площину α , належать прямій b . Ця пряма b є проекцією прямої a на площину α .



Мал. 10.3

Якщо пряма перетинає площину і не є перпендикулярною до неї, то кутом між прямою і площину називають кут між прямою і її проекцією на цю площину.

Так само визначають і кут між похилою і площину.

Очевидно, що кут φ між прямою і площину задовільняє умову $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Задача 2. З точки до площини проведено похилу завдовжки 18 см. Знайти кут, який утворює похила з площину, якщо проекція похилої на площину дорівнює 9 см.

Розв'язання. 1) AM – похила, $AM = 18$ см, BM – її проекція, $BM = 9$ см (мал. 10.3). Тоді $\angle AMB$ – шуканий.

2) У $\triangle AMB$ ($\angle B = 90^\circ$) $\cos \angle M = \frac{BM}{AM} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$, тому $\angle M = 60^\circ$.

Відповідь. 60° .

3. Кут між площинами

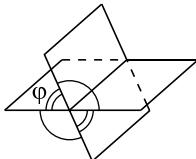
Якщо дві площини паралельні, то кут між ними вважають рівним нулю. Якщо дві площини перетинаються, то вони утворюють чотири двогранних кути зі спільним ребром (мал. 10.4).



Величину меншого з двогранних кутів, що утворилися при перетині двох площин, називають кутом між площинами.

Зрозуміло, що кут ϕ між площинами задовільняє умову $0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$. Якщо $\phi = 90^\circ$, то площини взаємно перпендикулярні.

Якщо пригадати означення лінійного кута двогранного кута, то означення кута між площинами можна сформулювати по-іншому.

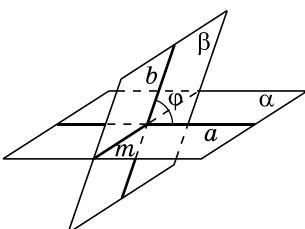


Мал. 10.4



Кутом між площинами, що перетинаються, називають кут між прямими, проведеними в цих площинах перпендикулярно до їх лінії перетину.

На малюнку 10.5 площини α і β перетинаються по прямій m . У площині α проведено пряму a таку, що $a \perp m$, а в площині β – пряму b таку, що $b \perp m$, прямі a і b перетинаються. Якщо кут між прямими a і b дорівнює ϕ , то кут між площинами α і β також дорівнює ϕ .

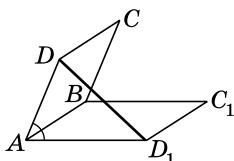


Мал. 10.5

Задача 3. Квадрат $ABCD$ і прямокутник ABC_1D_1 мають спільну сторону, а кут між їх площинами дорівнює 60° . Знайти відстань між точками D і D_1 , якщо $S_{ABCD} = 9 \text{ см}^2$, $S_{ABC_1D_1} = 24 \text{ см}^2$. Скільки розв'язків має задача?

- Розв'язання. 1) Оскільки $AD \perp AB$ і $AD_1 \perp AB$, то кутом між площинами можна вважати менший із кутів, що утворилися при перетині прямих AD і AD_1 (мал. 10.6). Менший з них за умовою дорівнює 60° . Тому кут DAD_1 може дорівнювати 60° або 120° . Отже, задача має два розв'язки.

2) $S_{ABCD} = 9 \text{ см}^2$, тому $AB = AD = 3 \text{ (см)}$.



Мал. 10.6

3) $S_{ABC_1D_1} = 24 \text{ см}^2$, тому $AD_1 = \frac{24}{3} = 8 \text{ (см)}$.

- 4) Якщо $\angle DAD_1 = 60^\circ$, то із $\triangle ADD_1$ за теоремою косинусів:
- $DD_1 = \sqrt{3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{49} = 7$ (см).
- Якщо $\angle DAD_1 = 120^\circ$, то
- $DD_1 = \sqrt{3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{97}$ (см).
- Відповідь. 7 см або $\sqrt{97}$ см.

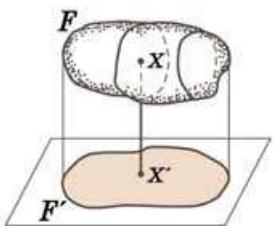
4. Ортогональне проектування

Окремим випадком паралельного проектування є ортогональне проектування.

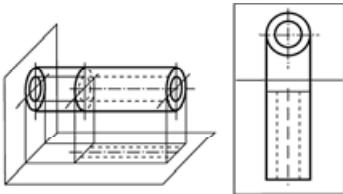


Паралельне проектування, напрям якого перпендикулярний до площини проекції, називають **ортогональним проектуванням**. Паралельну проекцію фігури, що утворюється при ортогональному проектуванні, називають **ортогональною проекцією** фігури.

На малюнку 10.7 фігура F' є ортогональною проекцією фігури (тіла) F .



Мал. 10.7



Мал. 10.8

Ортогональне проектування часто використовують у кресленні. Деталь проектують на дві (або три) площини, і потім дві (або три) проекції зображують на площині креслення. На малюнку 10.8 зображені дві ортогональні проекції деякої деталі циліндричної форми.

Розглянемо властивості ортогонального проектування многокутника.



Теорема (про площину ортогональної проекції многокутника). Площа ортогональної проекції многокутника на площину дорівнює добутку його площини на косинус кута між площинами многокутника і площинами проекції:

$$S_{\text{пр}} = S_{\phi} \cdot \cos \varphi,$$

де S_{ϕ} — площа многокутника, $S_{\text{пр}}$ — площа його проекції, φ — кут між площинами многокутника і площинами проекції.

Доведення. Доведемо спочатку теорему для трикутника у випадку, коли площа проекції проходить через одну з його сторін.

1) Проекцією трикутника ABC на площину α є трикутник ABC_1 (мал. 10.9).

2) Проведемо висоту CK трикутника ABC . За теоремою про три перпендикуляри $C_1K \perp AB$. Отже, C_1K – висота трикутника ABC_1 .

3) Оскільки $CK \perp AB$ і $C_1K \perp AB$, то $\varphi = \angle CKC_1$ – кут між площею трикутника ABC і площею проекції α .

4) $KC_1 = KC \cos \varphi$.

$$5) S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CK, \quad S_{ABC_1} = \frac{1}{2} AB \cdot C_1K = \frac{1}{2} AB \cdot CK \cdot \cos \varphi.$$

Тому $S_{ABC_1} = S_{ABC} \cdot \cos \varphi$.

Для випадку, який ми розглядаємо, теорему доведено.

Якщо замість площини α візьмемо будь-яку іншу паралельну їй площину, теорема також буде правильною, оскільки проекції трикутника на паралельні площини будуть між собою рівними.

У загальному випадку для доведення теореми многокутник розривають (наприклад, діагоналями) на скінченну кількість трикутників. Тоді ортогональна проекція многокутника складатиметься з ортогональних проекцій трикутників, що утворилися, і теорему також можна буде довести. Строго математичне доведення теореми в цьому випадку не наводимо. ■

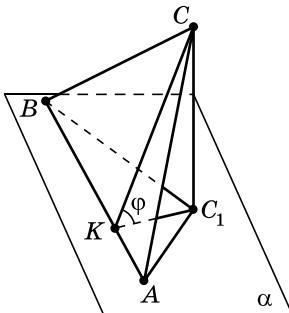
Задача 4. Ортогональною проекцією трикутника ABC на площину α є прямокутний трикутник $A_1B_1C_1$ з катетами 4 см і 6 см. Знайти площа трикутника ABC , якщо кут між площами ABC і $A_1B_1C_1$ дорівнює 30° .

Розв'язання. 1) $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12 \text{ (см}^2\text{)}$.

2) Нехай $\varphi = 30^\circ$ – кут між площами ABC і $A_1B_1C_1$. Оскільки $S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot \cos \varphi$, то

$$S_{ABC} = \frac{S_{A_1B_1C_1}}{\cos \varphi} = \frac{12}{\cos 30^\circ} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. $8\sqrt{3}$ см 2 .



Мал. 10.9



- Що називають кутом між прямими, які перетинаються? ● Яким є кут між паралельними прямими?
- Що називають кутом між мимобіжними прямими? ● Які прямі називають перпендикулярними?
- Яким є кут між паралельними прямою і площину; площину і прямою, що їй належить?
- Що називають кутом між прямою і площину?
- Яким є кут між паралельними площинами?
- Що називають кутом між площинами, які перетинаються?
- Що називають ортогональним проектуванням?
- Що називають ортогональною проекцією фігури?
- Сформулюйте теорему про площину ортогональної проекції.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



10.1. (Усно). Чи може кут між мимобіжними прямими дорівнювати:

- 1) 0° ; 2) 20° ; 3) 90° ; 4) 100° ?

10.2. (Усно). Чи може кут між прямою і площину дорівнювати:

- 1) 0° ; 2) 30° ; 3) 90° ; 4) 120° ?

10.3. Чи може кут між площинами, що перетинаються, дорівнювати:

- 1) 0° ; 2) 40° ; 3) 90° ; 4) 150° ?

10.4. Чому дорівнює кут між:

- 1) суміжними гранями куба;
2) протилежними гранями куба?

10.5. Похила AM утворює з площину α кут 45° (мал. 10.3). Знайдіть довжину похилої, якщо довжина її проекції дорівнює $4\sqrt{2}$ см.

10.6. Похила AM дорівнює 10 см і утворює з площину α кут 60° (мал. 10.3). Знайдіть проекцію похилої.

10.7. (Усно). Знайдіть серед предметів, що вас оточують, мимобіжні перпендикулярні прямі.

2 **10.8.** Із точки до площини проведено похилу завдовжки 12 см. Знайдіть кут, який утворює похила з площину, якщо проекція похилої дорівнює $6\sqrt{3}$ см.

10.9. Із точки до площини проведено похилу завдовжки 8 см. Знайдіть кут, який утворює похила з площину, якщо перпендикуляр, проведений із точки до площини, дорівнює $4\sqrt{2}$ см.

10.10. Дві площини перетинаються під кутом 60° . Точка P лежить в одній з них і віддалена від другої на $6\sqrt{3}$ см. Знайдіть відстань від точки P до лінії перетину площин.

10.11. Дві площини перетинаються під кутом 30° . Точка M лежить в одній з них і на 10 см віддалена від їх лінії перетину. Знайдіть відстань від точки M до другої площини.

10.12. (Усно). Чи може площа ортогональної проекції многокутника:

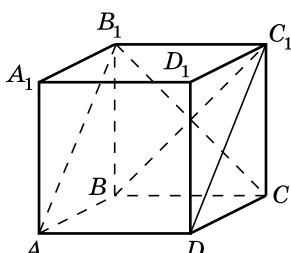
- 1) дорівнювати площі многокутника;
- 2) бути більшою за площу многокутника;
- 3) бути меншою за площу многокутника?

10.13. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її порожні комірки.

Площа многокутника	Кут між площинами многокутника і його ортогональною проекцією	Площа проекції
40 см^2	30°	
	45°	$10\sqrt{2} \text{ см}^2$
60 см^2		30 см^2

10.14. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її порожні комірки.

Площа многокутника	Кут між площинами многокутника і його ортогональною проекцією	Площа проекції
$4\sqrt{2} \text{ см}^2$	45°	
	60°	30 см^2
32 см^2		$16\sqrt{3} \text{ см}^2$



Мал. 10.10

10.15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 10.10). Знайдіть кути, які утворює:

- 1) пряма AA_1 з прямими BC , BC_1 , DC_1 ;
- 2) пряма CB_1 з прямими BC , BC_1 .

10.16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 10.10). Знайдіть кути, які утворює пряма A_1B_1 з прямими BC і DC_1 .

10.17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 10.10). Який кут пряма DC_1 утворює з площею ABC ?

10.18. Пряма a перпендикулярна до трьох прямих, що лежать у площині α . Чи можна стверджувати, що пряма a перпендикулярна до площини α ?

10.19. Пряма перпендикулярна до двох сторін паралелограма. Чи можна стверджувати, що пряма перпендикулярна і до площини паралелограма?

10.20. Пряма MA перпендикулярна до прямих AB і AD , що містять сторони паралелограма $ABCD$. Знайдіть кут між прямыми MA і CD .

10.21. Пряма CK перпендикулярна до прямих CA і CB , що містять сторони трикутника ABC . Знайдіть кут між прямыми CK і AB .

10.22. Ребро куба дорівнює 1 см (мал. 10.10). Знайдіть площину чотирикутника AB_1C_1D , використовуючи формулу площини ортогональної проекції.

10.23. З точки до площини проведено дві похилі. Одна з них, завдовжки 8 см, утворює з площиною кут 30° . Знайдіть довжину другої похилої, якщо вона утворює з площиною кут 60° .

10.24. З точки до площини проведено дві похилі. Одна з них утворює з площиною кут 45° , а друга – 30° . Проекція першої похилої на площину дорівнює $2\sqrt{2}$ см. Знайдіть довжину другої похилої.

10.25. Точка O – центр квадрата $ABCD$, OK – перпендикуляр до площини квадрата. Пряма AK нахилена до площини квадрата під кутом 60° . Знайдіть довжину відрізка AK , якщо $AB = 4$ см.

10.26. AS – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$. Пряма SC нахилена до площини квадрата під кутом 30° . Знайдіть довжину відрізка SC , якщо $AB = 6$ см.

 **10.27.** Дано прямокутник $ABCD$ зі сторонами $AB = 9$ см і $BC = 12$ см. AM – перпендикуляр до площини прямокутника. Пряма MC нахилена до площини прямокутника під кутом 30° . Знайдіть:

- 1) довжину перпендикуляра MA ;
- 2) тангенс кута нахилу прямої MB до площини прямокутника;
- 3) тангенс кута, який утворює площаина MDC з площеиною прямокутника.

10.28. У рівнобедреному трикутнику ABC $AB = AC = 10$ см, $BC = 12$ см. AM – перпендикуляр до площини трикутника. Площаина MBC утворює з площиною трикутника кут 45° . Знайдіть:

- 1) довжину перпендикуляра AM ;
- 2) тангенс кута нахилу правої MC до площини трикутника;
- 3) площаину трикутника MBC .

10.29. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 10.10). Знайдіть градусну міру кута між прямими CB_1 і DC_1 .

10.30. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 10.10). Знайдіть градусну міру кута між прямими AB_1 і BC_1 .

10.31. (Усно). До скількох ребер куба перпендикулярна пряма DC_1 (мал. 10.10)?

10.32. Через гіпотенузу AB прямокутного трикутника ABC проведено площину α . Відстань від точки C до площини α дорівнює 6 см. Який кут утворює пряма BC з площею α , якщо $AB = 14$ см, $AC = 5$ см?

10.33. Через гіпотенузу AB прямокутного трикутника ABC проведено площину β . Катет AC утворює з площею β кут 60° . Знайдіть відстань від точки C до площини β , якщо $AB = 10$ см, $BC = 8$ см.

10.34. Ортогональною проекцією ромба зі стороною 5 см і діагоналлю 8 см є паралелограм. Кут між площинами ромба і паралелограма дорівнює 45° . Знайдіть площа паралелограма.

10.35. Ортогональною проекцією паралелограма є ромб, сторона якого дорівнює 13 см, а одна з діагоналей – 10 см. Знайдіть площа паралелограма, якщо кут між площинами паралелограма і ромба дорівнює 30° .

10.36. Через сторону рівностороннього трикутника проведено площину, яка утворює з площею трикутника кут 60° . Знайдіть кути, які утворюють дві інші сторони трикутника з цією площею.

10.37. Через гіпотенузу рівнобедреного прямокутного трикутника проведено площину, яка утворює з площею трикутника кут 30° . Знайдіть кути, які утворюють катети трикутника з цією площею.

10.38. У ромбі $ABCD$ $AB = 8$ см, $\angle BAD = 45^\circ$. З вершини B до площини ромба проведено перпендикуляр BK . Площа AKD утворює з площею ромба кут 60° . Знайдіть:

- 1) відстань від точки K до площини ромба;
- 2) площа трикутника AKD .

10.39. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 6$ см, $AD = 8$ см, $\angle BAD = 30^\circ$. З вершини B до площини паралелограма проведено перпендикуляр BM . Площа MAD утворює з площею паралелограма кут 45° . Знайдіть:

- 1) відстань від точки M до площини паралелограма;
- 2) площа трикутника AMD .



10.40. Два рівнобедреніх трикутники мають спільну основу завдовжки 10 см. Кут між площинами трикутників дорівнює 60° , а їх площа – 25 см^2 і 40 см^2 . Знайдіть відстань між вершинами трикутників. Скільки розв'язків має задача?

10.41. Два рівнобедреніх трикутники, кут між площинами яких дорівнює 60° , мають спільну основу завдовжки 20 см. Площа одного з трикутників дорівнює 30 см^2 , а висота другого, яка проведена до основи, дорівнює 5 см. Знайдіть відстань між вершинами трикутників. Скільки розв'язків має задача?

10.42. Трикутник $A_1B_1C_1$ є ортогональною проекцією трикутника ABC зі сторонами 36 см, 34 см і 14 см. Знайдіть кут між площинами трикутників, якщо трикутник $A_1B_1C_1$ – прямокутний із катетами 12 см і 28 см.

10.43. Прямокутний трикутник $K_1L_1M_1$ з катетами 3 см і 8 см є ортогональною проекцією трикутника KLM зі сторонами 4 см, 13 см і 15 см. Знайдіть кут між площинами трикутників.

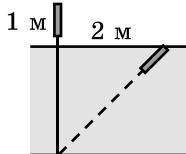
10.44. Через сторону AB рівностороннього трикутника ABC проведено площину α . Проекції сторін BC і AC на цю площину взаємно перпендикулярні. Які кути утворюють прямі BC і AC з площею α ?

10.45. Пряма утворює зі сторонами прямого кута кути по 60° . Знайдіть міру кута, який утворює ця пряма з площею прямого кута.



Життєва математика

10.46. Очеретина виступає на 1 м над поверхнею озера. Її верхівку зрівняли з поверхнею води, відхиливши від вертикального положення на 2 м у бік. Знайдіть глибину озера в місці, де росте очерет.



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

10.47. Серед точок $A(-2; 0)$, $B(1; -1)$, $C(0; 4)$, $D(14; 0)$, $M(-4; -4)$, $N(0; -7)$ виберіть ті, що належать:

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| 1) осі абсцис; | 2) осі ординат; |
| 3) додатній півосі x ; | 4) від'ємній півосі x ; |
| 5) додатній півосі y ; | 6) від'ємній півосі y . |

10.48. Знайдіть відстань відожної з точок $M(-2; 3)$, $N(-5; -1)$, $T(7; 11)$, $L(4; 0)$ до осей координат.

10.49. Знайдіть AB , якщо:

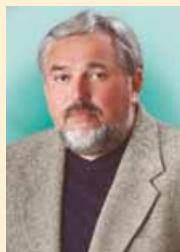
1) $A(-2; 7)$, $B(2; 4)$; 2) $A(-1; 1)$, $B(2; 3)$.

10.50. Знайдіть координати точки M – середини відрізка AB , якщо $A(-2; 4)$, $B(8; 16)$.

Українці у світі

Серед тих імен, які навіки закарбуються в історії математичного олімпіадного руху, буде й ім'я В'ячеслава Ясінського.

Народився В'ячеслав Андрійович у 1957 році в с. Чернівці Могилів-Подільського району Вінницької області. Навчаючись у Чернівецькій середній школі №1, неодноразово брав участь у математичних олімпіадах, а у 1974 році став переможцем Республіканської математичної олімпіади школярів (тодішній аналог 4-го етапу Всеукраїнської олімпіади юних математиків). Вищу освіту здобув у Вінницькому державному педагогічному інституті.

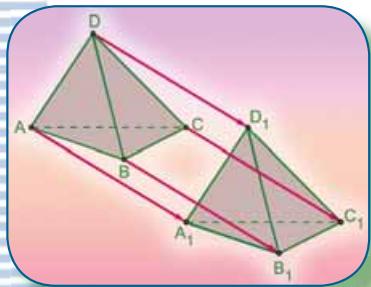
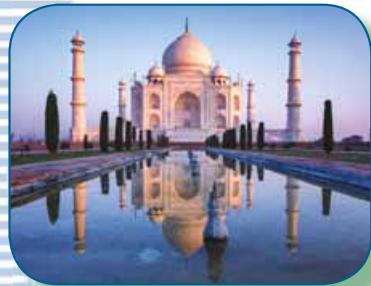
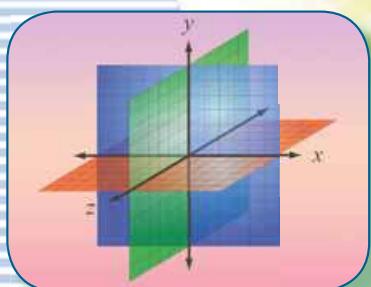


Саме завдяки В.А. Ясінському на сторінках журналу «Математика в школе», що виходив друком у Москві, прославилось м. Вінниця, адже журнал постійно проводив конкурси із розв'язування задач і В'ячеслав Андрійович майже завжди ставав їх переможцем. Працюючи на педагогічній ниві і як шкільний учител, і як викладач вишу, В.А. Ясінський став одним з учасників творення нового явища – олімпіадної математики. Його книга «Задачі міжнародних олімпіад із математики та методи їх розв'язування» здобула визнання не тільки в Україні, а й в Європі, зокрема, її було перевидано у Польщі, де польські колеги з величезною цікавістю сприйняли зміст цієї праці.

В.А. Ясінський багато зробив для підтримки і розвитку олімпіадного руху та інших математичних змагань в Україні та світі. У 1991 році він став членом журі Всеукраїнської олімпіади юних математиків. Також очолював журі та оргкомітет Математичного Турніру Міст, що проходив у Вінниці. Цей турнір, що по суті є математичною олімпіадою, проводився щорічно з 1980 року, а участь в ньому брали більше 100 міст з 25 держав Європи, Азії, Південної і Північної Америки, Австралії. Також В.А. Ясінський був членом методичної комісії Міжнародної олімпіади з геометрії, що створювала базу авторських олімпіадних задач з геометрії. Він і сам протягом багатьох років складав задачі для Міжнародної математичної олімпіади, за що у липні 2005 року на 46-й Міжнародній математичній олімпіаді його було нагороджено відповідним сертифікатом.

Саме на таких постатах тримається і розвивається рух математичних змагань в Україні та у світі. Пам'ятатимемо...

КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ



У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ МИ

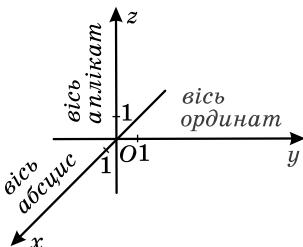
- **пригадаємо** поняття вектора, його модуля; дії над векторами;
- **ознайомимося** з прямокутною системою координат, координатами вектора, паралельним перенесенням і симетрією у просторі;
- **навчимося** знаходити відстань між точками у просторі, координати середини відрізка у просторі; додавати і віднімати вектори, множити вектор на число, знаходити скалярний добуток векторів; будувати симетричні зображення.

§ 11. ПРЯМОКУТНА СИСТЕМА КООРДИНАТ У ПРОСТОРІ

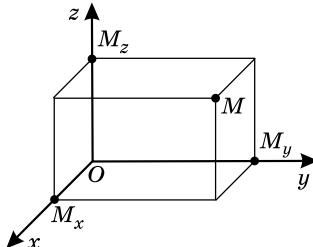
З прямокутною системою координат на площині ми вже ознайомилися в курсі геометрії 9 класу. У цьому параграфі розглянемо прямокутну систему координат у просторі та дізнаємося, що таке координатний метод розв'язування геометричних задач.

1. Прямокутна система координат у просторі

Через довільну точку O простору проведемо три попарно перпендикулярні прямі x , y , z (мал. 11.1). На кожній з них виберемо напрям, позначивши його стрілкою, та однічний відрізок. У такий спосіб задають *прямокутну систему координат у просторі*. Точку O називають *початком координат*, а прямі з вибраними напрямами – *осями координат* (або *координатними осями*). Вісь x називається *віссю абсцис*, вісь y – *віссю ординат*, вісь z – *віссю аплікат*. Початок координат розбиває кожну з осей на дві півосі – додатну (яка містить стрілку напряму) і від’ємну. Площини, які проходять відповідно через осі координат x і y , y і z та x і z називають *координатними площинами* xy , yz і xz .



Мал. 11.1



Мал. 11.2

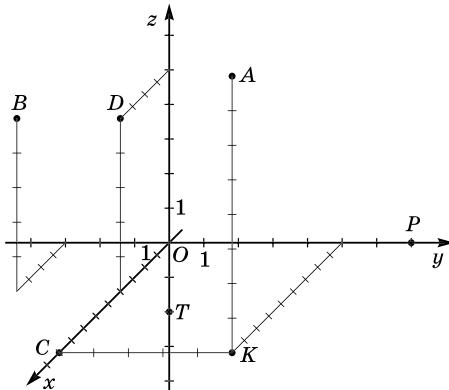
У прямокутній системі координат кожній точці M простору відповідає єдина впорядкована трійка чисел, а кожній впорядкованій трійці чисел – єдина точка простору. Цю трійку чисел називають *координатами точки* і визначають так само, як координати точки на площині.

Проведемо через точку M площину, перпендикулярну до осі x (мал. 11.2). Вона перетинає вісь x у точці M_x . *Координатою x (абсцисою) точки M* називають число, що відповідає точці M_x на осі x . Якщо точка M_x збігається з точкою O , то вважатимемо, що абсциса точки M дорівнює 0.

Проведемо площини, перпендикулярні до осей y і z , які перетинають ці осі в точках M_y і M_z відповідно. Координатою y

(ординатою) точки M називають число, що відповідає точці M_y на осі y , а координатою z (аплікатою) точки M називають число, що відповідає точці M_z на осі z . Точку M з її координатами записують, як і в прямокутній системі координат на площині, а саме: $M(x; y; z)$. Якщо точку не позначено літерою, її записують лише її координатами: $(x; y; z)$.

На малюнку 11.3, наприклад, позначено точки $A(9; 5; 8)$, $B(4; -3; 5)$, $C(9; 0; 0)$, $D(4; 0; 5)$, $P(0; 7; 0)$, $T(0; 0; -2)$, $K(9; 5; 0)$.



Мал. 11.3

Якщо точка лежить на осі координат або на координатній площині, то певні її координати дорівнюють нулю. На малюнку 11.3 точка C належить осі x , її координати y і z дорівнюють нулю; точка P належить осі y , її координати x і z дорівнюють нулю; точка T належить осі z , її координати x і y дорівнюють нулю. І навпаки: точка $(x; 0; 0)$ належить осі абсцис; точка $(0; y; 0)$ – осі ординат; точка $(0; 0; z)$ – осі аплікат.

На малюнку 11.3 точка K належить площині xy , її координата z дорівнює нулю; точка D , яка належить площині xz , координата y дорівнює нулю. У точки, яка належатиме площині yz , нуль дорівнюватиме координата x . І навпаки: точка $(x; y; 0)$ належить площині xy ; точка $(x; 0; z)$ – площині xz , точка $(0; y; z)$ – площині yz .

Для початку координат – точки O – маємо: $O(0; 0; 0)$.

Задача 1. Знайти: 1) координати точки K , яка є проекцією точки $A(9; 5; 8)$ на площину xy ;

2) відстань від точки $A(9; 5; 8)$ до площини xy .

- Розв'язання. 1) Проекцією точки $A(9; 5; 8)$ на площину xy є точка $K(9; 5; 0)$ (мал. 11.3).
- 2) Відстань від точки $A(9; 5; 8)$ до площини xy дорівнює 8.
- Відповідь. 1) $K(9; 5; 0)$; 2) 8.

Із задачі 1 можемо дійти висновків, що:

- 1) проекцією точки $(x; y; z)$ на площину xy є точка $(x; y; 0)$;
- на площину xz – точка $(x; 0; z)$; на площину yz – $(0; y; z)$.
- 2) відстань від точки $(x; y; z)$ до площини xy дорівнює $|z|$,
- до площини xz дорівнює $|y|$, а до площини yz дорівнює $|x|$.

2. Відстань між двома точками

Як відомо, відстань між двома точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ площини знаходять за формулою

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Аналогічно й у просторі:

- 1) відстань між двома точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ простору знаходить за формулою

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Задача 2. Точки $M(-1; 2; 4)$ і $N(1; 0; 3)$ – відповідно середини сторін AB і BC трикутника ABC . Знайти довжину сторони AC цього трикутника.

- Розв'язання. 1) Оскільки M – середина AB , N – середина BC , то MN – середня лінія $\triangle ABC$. Тому $MN = \frac{1}{2}AC$, отже,
- $AC = 2MN$.
- 2) $MN = \sqrt{(1+1)^2 + (0-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$.
- 3) Тоді $AC = 2 \cdot 3 = 6$.

Відповідь. 6.

Задача 3. Відстань між точками $A(x; 4; 5)$ і $B(2; 6; 2)$ дорівнює 7. Знайдіть x .

- Розв'язання. 1) $AB^2 = (2-x)^2 + (6-4)^2 + (2-5)^2 = (2-x)^2 + 13$.
- 2) Оскільки $AB = 7$, то $AB^2 = 49$. Маємо рівняння:
$$(2-x)^2 + 13 = 49$$
,
- коренями якого є числа -4 і 8 .

Відповідь. -4 або 8 .

3. Координати середини відрізка

Нагадаємо, як знайти координати середини відрізка на площині. Якщо точка $M(x_M; y_M)$ – середина відрізка AB , де $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$,

$$\text{то } x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}; y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Аналогічно й у просторі:



якщо $M(x_M; y_M; z_M)$ – середина відрізка з кінцями в точках $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$, то:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Задача 4. Довести, що середина відрізка з кінцями в точках $A(2; -4; 6)$ і $B(-6; 4; 12)$ лежить у площині xz .

• Розв'язання. Нехай $M(x_M; y_M; z_M)$ – середина відрізка AB .

1) Тоді $x_M = \frac{2 + (-6)}{2} = -2; \quad y_M = \frac{-4 + 4}{2} = 0; \quad z_M = \frac{6 + 12}{2} = 9$.

2) Отже, $M(-2; 0; 9)$.

3) Оскільки ордината точки M дорівнює нулю, то точка M належить площині xz . ■

Задача 5. $ABCD$ – паралелограм, $A(-2; 4; 5)$, $B(2; -1; 4)$, $C(0; 12; 7)$, O – точка перетину діагоналей.

1) Знайти координати точки O .

2) Знайти координати вершини D паралелограма.

3) З'ясувати, чи є паралелограм $ABCD$ ромбом.

• Розв'язання. 1) Точка O ділить навпіл кожну з діагоналей. Тому $O(x_O; y_O; z_O)$ – середина AC . Маємо:

$x_O = \frac{-2 + 0}{2} = -1; \quad y_O = \frac{4 + 12}{2} = 8; \quad z_O = \frac{5 + 7}{2} = 6$.

Отже, $O(-1; 8; 6)$.

2) Точка O є також серединою діагоналі BD . Тому

$$-1 = \frac{2 + x_D}{2}; \quad 8 = \frac{-1 + y_D}{2}; \quad 6 = \frac{4 + z_D}{2}.$$

Розв'язавши ці рівняння, матимемо:

$x_D = -4; \quad y_D = 17; \quad z_D = 8$. Отже, $D(-4; 17; 8)$.

3) Знайдемо довжини сусідніх сторін паралелограма:

$$AB = \sqrt{(2 + 2)^2 + (-1 - 4)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{42};$$

$$BC = \sqrt{(0 - 2)^2 + (12 + 1)^2 + (7 - 4)^2} = \sqrt{182}.$$

Оскільки $AB \neq BC$, то $ABCD$ не є ромбом.

Відповідь. 1) $O(-1; 8; 6)$; 2) $D(-4; 17; 8)$; 3) ні.

А ще раніше...

Нам вже відомо, що прямокутну систему координат на площині запропонували П'єр Ферма та Рене Декарт у XVII ст. Вони допускали можливість запровадження координат і у просторі, але далі припущењь цю ідею так і не розвинули.

У 1715 р. Йоганн Бернуллі в одному зі своїх листів до Лейбніца означив просторові координати x , y , z як перпендикуляри на три взаємно перпендикулярні площини. Приблизно у той самий час інші математики починають записувати рівняння деяких поверхонь через просторові координати. Першим, хто постійно і широко використовував координати у просторі, став французький математик Клеро. У своїй праці «Дослідження ліній двоякої кривизни» (1731 р.) Клеро додав у систему координат третю координату та проілюстрував цю ідею рівняннями деяких поверхонь.

Ідея координат у тривимірному просторі знайшла своє продовження у праці Ейлера «Уведення в аналіз» (1748 р.). Друга частина цієї праці, що називалася «Додатки про поверхні», стала першим системним викладом аналітичної геометрії тривимірного простору.

Подальшому розвитку просторової аналітичної геометрії сприяли праці математиків Г. Монжа, Ж. Лагранжа та С. Лакруа.



Аленік Клод Клеро
(1713–1765)



- Поясніть, як задають прямокутну систему координат у просторі.
- Що називають початком координат, осями координат, координатними площинами?
- Поясніть, як визначають координати точки в просторі.
- Що можна сказати про координати точки, яка належить осі x ; осі y ; осі z ?
- Що можна сказати про координати точки, яка належить площині xy ; площині xz ; площині yz ?
- За якою формулою знаходять відстань між точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$?
- За якими формулами знаходять координати точки M – середини відрізка з кінцями $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



- 11.1.** Які з точок $A(2; 0; -3)$, $B(0; 0; -5)$, $C(4; 0; 0)$, $D(0; 2; -1)$, $E(3; -1; 2)$, $F(0; -1; 0)$ належать координатним осям? Укажіть, яким саме.

- 11.2.** Які з точок $K(0; 0; 7)$, $L(2; 2; 2)$, $M(4; 9; 0)$, $N(0; 19; 0)$, $P(-1; 0; 14)$, $T(-9; 0; 0)$ лежать на координатних осіях? Укажіть, на яких саме.
- 11.3.** Які з точок $K(0; 2; -3)$, $P(1; 2; -3)$, $M(2; 0; -4)$, $N(7; -1; -1)$, $Q(1; -4; 0)$, $S(1; 1; 1)$ належать координатним площинам? Укажіть, яким саме.
- 11.4.** Які з точок $A(2; 0; -9)$, $B(-4; 1; -4)$, $C(0; 11; -11)$, $D(-1; 1; 0)$ належать координатним площинам? Укажіть, яким саме.
- 11.5.** Точка M лежить на від'ємній півосі аплікат на відстані 7 від початку координат. Які координати точки M ?
- 11.6.** Точка T лежить на додатній півосі абсцис на відстані 3 від початку координат. Які координати точки T ?
- 11.7.** Знайдіть координати середини відрізка AB , якщо:
1) $A(2; -11; 0)$, $B(4; -7; 6)$; 2) $A(-2; 5; 4)$, $B(2; 0; 7)$.
- 11.8.** Знайдіть координати середини відрізка CD , якщо:
1) $C(0; 2; -7)$, $D(6; -4; -9)$; 2) $C(2; -4; 9)$, $D(7; 4; 0)$.
- 11.9.** Знайдіть довжину відрізка CD , якщо:
1) $C(4; 0; -1)$, $D(2; 3; 5)$; 2) $C(0; -2; 1)$, $D(2; -2; 3)$.
- 11.10.** Знайдіть довжину відрізка AB , якщо:
1) $A(4; -1; 0)$, $B(6; 1; 1)$; 2) $A(4; -1; 2)$, $B(5; -1; 5)$.
-  **11.11.** У точок $M(2; -1; 4)$ і $N(2; -1; 7)$ дві перші координати попарно однакові. Чи паралельна пряма MN деякій осі координат? Якщо відповідь позитивна, то якій саме?
- 11.12.** Які з наведених точок лежать на одній прямій, паралельній осі абсцис: $A(2; -1; 3)$, $B(2; 1; -3)$, $C(-2; 1; -3)$, $D(-2; -1; -3)$?
- 11.13.** Які з наведених точок лежать на одній прямій, паралельній осі ординат: $M(3; -1; 5)$, $N(3; -1; -5)$, $K(3; 1; 5)$, $L(-3; -1; 5)$?
- 11.14.** Знайдіть координати проекції точки $A(-1; 2; -4)$ на координатні площини.
- 11.15.** Знайдіть координати проекції точки $P(2; -3; 7)$ на координатні площини.
- 11.16.** На яких відстанях від координатних площин лежить точка $M(4; -7; 11)$?
- 11.17.** На яких відстанях від координатних площин лежить точка $K(-2; 4; -9)$?

11.18. Чи належить деякій координатній осі середина відрізка AB , якщо $A(4; -2; 7)$, $B(-4; 2; -9)$? Якщо так, то якій саме?

11.19. Доведіть, що середина відрізка з кінцями в точках $M(9; -11; 7)$ і $N(-9; 5; -7)$ лежить на осі ординат.

11.20. Точка P – середина відрізка MN . Знайдіть координати точки N , якщо $P(-1; 2; 7)$, $M(2; 1; 3)$.

11.21. Точка C – середина відрізка AB . Знайдіть координати точки A , якщо $C(0; 2; -3)$, $B(1; 4; -8)$.

11.22. Яка з точок $A(1; 2; -3)$ або $B(4; 0; 1)$ лежить ближче до початку координат?

11.23. Порівняйте AC і BC , якщо $A(2; -1; -3)$, $B(6; 5; 9)$, $C(4; 2; 3)$.

 **11.24.** У трикутнику з вершинами в точках $A(4; -1; 2)$, $B(8; 1; 6)$ і $C(10; 3; 14)$ K – середина AC , L – середина BC . Знайдіть довжину відрізка KL .

11.25. Дано вершини $A(3; 0; 5)$, $B(4; 3; -5)$, $C(-4; 1; 3)$ трикутника ABC . Знайдіть довжину медіані трикутника, проведеної з вершини A .

11.26. На осі абсцис знайдіть точку, відстань від якої до точки $A(1; 4; 8)$ дорівнює 12.

11.27. На осі аплікат знайдіть точку, відстань від якої до точки $P(2; -3; 0)$ дорівнює 7.

11.28. На осі ординат знайдіть точку, рівновіддалену від точок $M(1; -3; 7)$ і $N(5; 7; -5)$.

11.29. На осі x знайдіть точку, рівновіддалену від точок $A(1; 3; 3)$ і $B(2; 1; 4)$.

11.30. Знайдіть координати вершини A паралелограма $ABCD$, якщо $B(2; -1; 1)$, $C(1; 2; 5)$, $D(-4; 5; 7)$.

11.31. Дано дві вершини $A(2; -1; 3)$ і $B(3; -4; 5)$ паралелограма $ABCD$ і точку перетину його діагоналей $O(4; -5; 0)$. Знайдіть координати точок C і D .

 **11.32.** 1) Доведіть, що трикутник з вершинами в точках $A(4; 0; 7)$, $B(0; 8; -1)$ і $C(2; -2; 3)$ – прямокутний.
2) Знайдіть площину трикутника ABC .

11.33. Доведіть, що трикутник з вершинами в точках $A(5; 0; 7)$, $B(0; 3; -1)$ і $C(7; 3; 1)$ – гострокутний.

11.34. Визначте координати кінців відрізка, який точками $M(3; 0; 3)$ і $N(6; -2; 1)$ поділено на три рівні частини.

11.35. Чи лежать точки $A(-1; -5; 6)$, $B(4; 5; 1)$ і $C(-2; -7; 7)$ на одній прямій? Якщо так, укажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

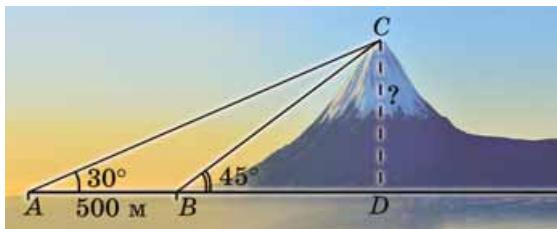
11.36. Доведіть, що три точки $M(6; 3; -5)$, $N(4; -3; 2)$ та $K(10; 15; -19)$ лежать на одній прямій. Яка з трьох точок лежить між двома іншими?

11.37. 1) Знайдіть координати проекції точки $M(-9; 12; 16)$ на кожну з осей координат.

2) Знайдіть відстань від точки M до осей координат.

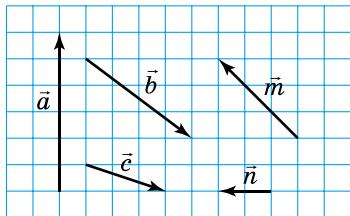
Життєва математика

11.38. З деякої точки вершину гори видно під кутом 30° . Коли спостерігач наблизився до гори на 500 м, вершину стало видно під кутом 45° . Знайдіть наближено висоту гори (з точністю до десятих метра).

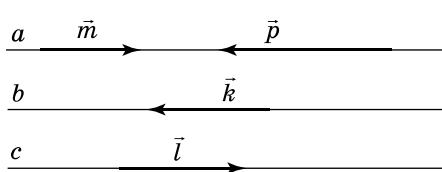


Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

11.39. Знайдіть модулі векторів, зображених на малюнку 11.4.



Мал. 11.4



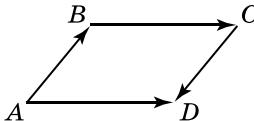
Мал. 11.5

11.40. Прямі a , b і c паралельні (мал. 11.5). Серед векторів, зображеніх на малюнку, укажіть всі пари:

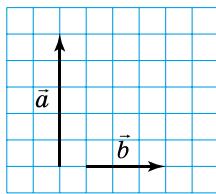
1) колінеарних векторів;

- 2) співнапрямлених векторів;
 3) протилежно напрямлених векторів.

11.41. $ABCD$ – паралелограм (мал. 11.6). Чи рівні між собою вектори: 1) \vec{AB} і \vec{CD} ; 2) \vec{AD} і \vec{BC} ?



Мал. 11.6



Мал. 11.7

11.42. Дано вектори \vec{a} і \vec{b} (мал. 11.7). Побудуйте:

- 1) вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$;
- 2) вектор $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

§ 12. ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ. ДІЇ З ВЕКТОРАМИ

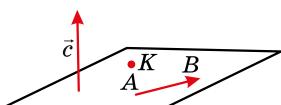
У курсі планіметрії ми вже ознайомилися з векторами на площині. Зауважимо, що основні поняття для векторів у просторі означають так само, як і для векторів на площині.

1. Поняття вектора у просторі

Як і в планіметрії,



відрізок, для якого визначено напрям, називають вектором.



Мал. 12.1

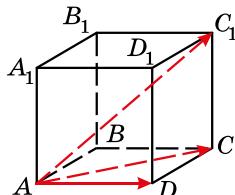
Вектор зображують відрізком зі стрілкою, яка вказує напрям вектора. На малюнку 12.1 зображене вектор \vec{AB} , точка A – його початок, точка B – кінець вектора. Вектор можна позначати однією малою латинською літерою. На малюнку 12.1 зображенено вектор \vec{c} . Нагадаємо, що вектор, у якого початок збігається з кінцем, називають нульовим вектором або нуль-вектором. Якщо, наприклад, точку, що зображує нульовий вектор, позначити літерою K , то нульовий вектор можна записати як \overline{KK} (мал. 12.1). Нуль-вектор також можна позначити і символом $\vec{0}$. Нульовий вектор, на відміну від ненульового, напряму не має.



Модулем (або довжиною чи абсолютною величиною) вектора \overrightarrow{AB} називають довжину відрізка AB .

Модуль вектора \overrightarrow{AB} позначають через $|\overrightarrow{AB}|$, а модуль вектора \vec{p} – через $|\vec{p}|$. Модуль нульового вектора дорівнює нулю: $|\vec{0}| = 0$; модуль вектора, відмінного від нульового, більший за нуль.

Задача 1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром довжини 1 (мал. 12.2). Знайти модулі векторів \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AC} і $\overrightarrow{AC_1}$.



Мал. 12.2

• Розв'язання. 1) $AD = 1$, тому $|\overrightarrow{AD}| = 1$.

• 2) Із $\triangle ADC$: $AC^2 = AD^2 + DC^2$. Тому $|\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

• 3) Із $\triangle ACC_1$: $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$. Отже,

• $|\overrightarrow{AC_1}| = AC_1 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

Відповідь. $|\overrightarrow{AD}| = 1$; $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$; $|\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{3}$.

Нагадаємо, що



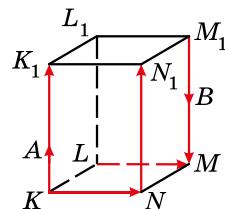
два ненульових вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називають колінеарними.

На малюнку 12.3 зображено прямокутний паралелепіпед. Колінеарними є пари векторів: \overrightarrow{KA} і $\overrightarrow{AK_1}$; \overrightarrow{KA} і $\overrightarrow{M_1B}$; $\overrightarrow{AK_1}$ і $\overrightarrow{M_1B}$; \overrightarrow{KA} і $\overrightarrow{NN_1}$ тощо.

Колінеарні вектори можуть бути *співнапрямленими*, тобто однаково напрямленими (такими є, наприклад, вектори \overrightarrow{KA} і $\overrightarrow{NN_1}$ на малюнку 12.3; записують це так: $\overrightarrow{KA} \uparrow\downarrow \overrightarrow{NN_1}$), або *протилежно напрямленими* (такими є, наприклад, вектори $\overrightarrow{NN_1}$ і $\overrightarrow{M_1B}$ на малюнку 12.3; записують це так: $\overrightarrow{NN_1} \uparrow\downarrow \overrightarrow{M_1B}$).

Парі векторів \overrightarrow{KN} і \overrightarrow{KA} ; \overrightarrow{LM} і $\overrightarrow{M_1B}$ (мал. 12.3) не є колінеарними, тому вони не є ні співнапрямленими, ні протилежно напрямленими.

Як і в планіметрії,



Мал. 12.3

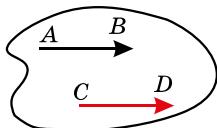


два вектори називають рівними, якщо вони співнапрямлені та їх модулі між собою рівні.

На малюнку 12.3 рівними є, наприклад, вектори \overrightarrow{KN} і \overrightarrow{LM} . Це записують так: $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{LM}$.

Вектори \overrightarrow{KA} і $\overrightarrow{NN_1}$ на малюнку 12.3 не є рівними, оскільки в них різні модулі. Також не будуть рівними між собою вектори $\overrightarrow{NN_1}$ і $\overrightarrow{M_1M}$, оскільки вони є протилежно напрямленими.

Як і в планіметрії, від будь-якої точки C можна відкласти вектор \overrightarrow{CD} , рівний вектору \overrightarrow{AB} , і до того ж тільки один (мал. 12.4).



Мал. 12.4

2. Додавання векторів

Як і в планіметрії, суму двох векторів можна знаходити за правилом трикутника або за правилом паралелограма. Нагадаємо ці правила.

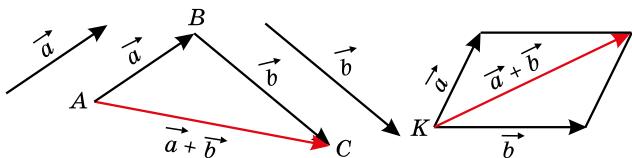
Щоб знайти суму векторів \vec{a} і \vec{b} за правилом трикутника, треба:

1) від кінця вектора \vec{a} відкласти вектор, що дорівнює вектору \vec{b} (мал. 12.5);

2) побудувати вектор, початок якого збігається з початком вектора \vec{a} , а кінець – з кінцем вектора \vec{b} , він і є сумаю векторів \vec{a} і \vec{b} .

З правила трикутника можна дійти висновку, що

для будь-яких трьох точок A , B і C справджується рівність: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (мал. 12.5).



Мал. 12.5

Мал. 12.6

Щоб знайти суму двох неколінеарних векторів \vec{a} і \vec{b} за правилом паралелограма, треба:

1) відкласти ці вектори від спільногого початку – точки K (мал. 12.6);

2) побудувати на цих векторах паралелограм;

3) побудувати вектор, що виходить з точки K і збігається з діагоналлю паралелограма, він і є сумаю векторів \vec{a} і \vec{b} .

Як і в планіметрії, для суми векторів справджується:

- переставна властивість додавання: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

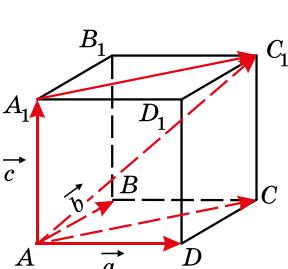
- сполучна властивість додавання: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Додати кілька векторів у просторі можна так: додати два з них, потім до їх суми додати третій вектор, до отриманої суми додати четвертий вектор, і так само далі.

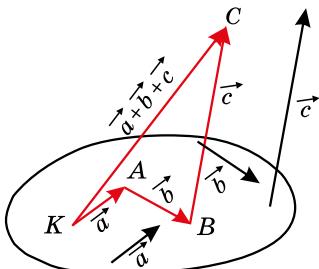
Задача 2. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 12.7). Побудувати вектор, що дорівнює сумі векторів \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AB} і $\overrightarrow{AA_1}$.

• Розв'язання.

- 1) Сумою векторів \overrightarrow{AD} і \overrightarrow{AB} , за правилом паралелограма, є вектор \overrightarrow{AC} .
- 2) Відкладемо від точки A_1 вектор $\overrightarrow{A_1 C_1}$, що дорівнює вектору \overrightarrow{AC} . Тоді $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1 C_1} = \overrightarrow{AC_1}$.
- 3) Отже, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC_1}$.



Мал. 12.7



Мал. 12.8

Для додавання кількох векторів у просторі можна використовувати і *правило многокутника*, яке подібне до правила трикутника: щоб знайти суму векторів $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \dots$, від кінця вектора \vec{a} відкладають вектор, що дорівнює вектору \vec{b} , потім від кінця вектора \vec{b} – вектор, що дорівнює вектору \vec{c} , і так само далі. Сумою векторів буде вектор, початком якого є початок першого доданка, а кінцем – кінець останнього доданка.

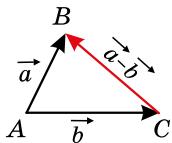
Нехай на малюнку 12.8 від точки K відкладено вектор $\overrightarrow{KA} = \vec{a}$, далі від точки A – вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, потім від точки B – вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Маємо, що $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{KC}$.

Отже,

для будь-яких точок A_1, A_2, \dots, A_n має місце рівність:

$$\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 A_3} + \overrightarrow{A_3 A_4} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1} A_n} = \overrightarrow{A_1 A_n}.$$

3. Віднімання векторів



Мал. 12.9

Нагадаємо відоме з планіметрії **правило побудови різниці двох векторів \vec{a} і \vec{b}** , яке спрощується і в стереометрії:

1) відкласти вектори \vec{a} і \vec{b} від однієї точки – точки A (мал. 12.9);

2) побудувати вектор, початок якого збігається з кінцем вектора \vec{b} , а кінець – з кінцем вектора \vec{a} . Він і буде різницею векторів \vec{a} і \vec{b} .

Справді, оскільки $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

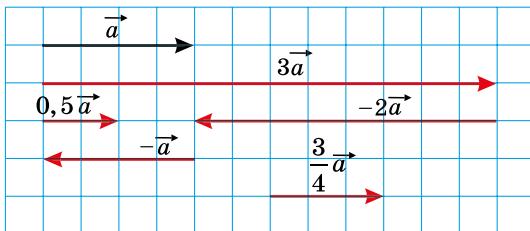
Наприклад, на малюнку 12.7 $\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A_1C_1}$.

4. Множення вектора на число

Нагадаємо, що **добутком ненульового вектора \vec{a} на число λ** називають такий вектор \vec{b} , що $|\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|$, причому вектори \vec{a} і \vec{b} співнапрямлені, якщо $\lambda > 0$, і протилежно напрямлені, якщо $\lambda < 0$.

Добутком нульового вектора на будь-яке число є нульовий вектор: $\vec{0} \cdot \lambda = \vec{0}$.

На малюнку 12.10 зображені вектори \vec{a} та побудовано вектори $3\vec{a}$, $0,5\vec{a}$, $-\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $\frac{3}{4}\vec{a}$.



Мал. 12.10

Властивості множення вектора на число в планіметрії спрощуються і в стереометрії. Нагадаємо ці властивості:



для будь-яких чисел α і β та векторів \vec{a} і \vec{b} :

$$\alpha\vec{a} = \vec{0}; \quad (\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a});$$

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}; \quad \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}.$$

Так само, як і в планіметрії, можна довести, що



вектор \vec{b} , колінеарний вектору \vec{a} , можна подати у вигляді $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, $\lambda \neq 0$; і навпаки, якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, де $\lambda \neq 0$, то вектори \vec{a} і \vec{b} – колінеарні.

Зазначені властивості векторів дають змогу спрощувати вирази з векторами подібно до того, як спрощують алгебраїчні вирази.

Задача 3. Спростити вираз: $4(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) - 2(\vec{a} - 2\vec{b}) + 3(5\vec{a} - 4\vec{c})$.

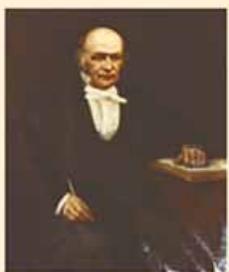
• Розв'язання. $4(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) - 2(\vec{a} - 2\vec{b}) + 3(5\vec{a} - 4\vec{c}) = 4\vec{a} - 4\vec{b} +$

• $+ 4\vec{c} - 2\vec{a} + 4\vec{b} + 15\vec{a} - 12\vec{c} = 17\vec{a} - 8\vec{c}$.

• Відповідь. $17\vec{a} - 8\vec{c}$.

А ще раніше...

Операцію векторами в просторі вперше почав ірландський математик Вільям Роуен Гамільтон. Основи векторної алгебри та векторного аналізу він виклав у своїй праці «Лекція про кватерніони», перша публікація якої датується 1843 роком. Саме у цій праці вперше було вжито терміни «скаляр» і «вектор».



Вільям Роуен Гамільтон
(1805–1865)



Герман Гюнтер Грассман
(1809–1877)

Приблизно у той самий час до поняття вектора прийшов і німецький фізик, математик і філолог Герман Гюнтер Грассман. Саме у своїй праці «Вчення про видовженість» (1840 р.) він першим серед математиків розглянув п-вимірний евклідів простір, частковими випадками якого і вважав вектори на площині та у тривимірному просторі.



- Що називають вектором? ● Що таке нульовий вектор?
- Що називають модулем вектора? ● Які вектори називають колінеарними?
- Які вектори називають співнапрямленими, а які – протилежно напрямленими?
- Які вектори називають рівними?
- Як додати вектори за правилом трикутника?

додати вектори за правилом паралелограма? • Які властивості спрощуються для додавання векторів? • Як додати вектори за правилом многокутника? • За яким правилом віднімають вектори? • Що називають добутком ненульового вектора \vec{a} на число λ ? • Які властивості спрощуються для множення вектора на число?

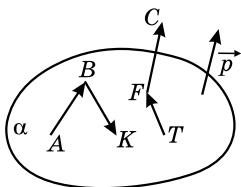


Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

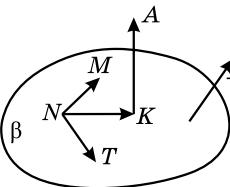


12.1. Запишіть усі вектори, які зображені на малюнку 12.11.

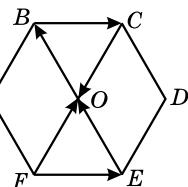
12.2. Запишіть усі вектори, які зображені на малюнку 12.12.



Мал. 12.11



Мал. 12.12



Мал. 12.13

12.3. Позначте точки A , B і C , що лежать на одній прямій. Проведіть вектори \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{CB} .

12.4. Позначте точки P , Q , R , що не лежать на одній прямій. Проведіть вектори \overline{PQ} , \overline{QR} і \overline{PR} .

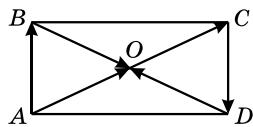
12.5. $ABCDEF$ – правильний шестикутник (мал. 12.13). Запишіть усі пари:

- 1) рівних векторів;
- 2) рівних за модулем, але протилежно напрямлених, векторів.

12.6. $ABCD$ – прямокутник (мал. 12.14).

Запишіть усі пари:

- 1) рівних векторів;
- 2) рівних за модулем, але протилежно напрямлених, векторів.



Мал. 12.14

12.7. Накресліть вектори \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{AC} . Побудуйте їх суму і різницю.

12.8. Накресліть вектори \overrightarrow{MK} і \overrightarrow{MP} . Побудуйте їх суму і різницю.

12.9. Накресліть вектор \vec{p} , довжина якого 6 см. Побудуйте вектори: $-\vec{p}$; $\frac{1}{3}\vec{p}$; $2\vec{p}$; $-1,5\vec{p}$.

12.10. Накресліть вектор \vec{a} , довжина якого дорівнює 4 см. Побудуйте вектори: $3\vec{a}$; $-\frac{1}{2}\vec{a}$; $-2\vec{a}$; $2,5\vec{a}$.

12.11. $ABCD$ – прямокутник. Укажіть усі пари рівних векторів і векторів, що мають рівні модулі, початком і кінцем яких є вершини прямокутника.

12.12. $KLMN$ – ромб. Укажіть усі пари рівних векторів і векторів, що мають рівні модулі, початком і кінцем яких є вершини ромба.

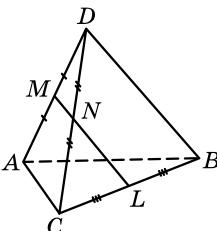
12.13. $ABCD$ – трикутна піраміда (мал. 12.15), M , N і L – середини ребер AD , DC і BC відповідно, $AC = 4$ см, $BC = 6$ см, $NL = 5$ см. Знайдіть довжину вектора:

- 1) \overrightarrow{CA} ;
- 2) \overrightarrow{MN} ;
- 3) \overrightarrow{BD} ;
- 4) \overrightarrow{CL} .

12.14. $ABCD$ – трикутна піраміда (мал. 12.15), M , N і L – середини AD , DC і BC відповідно, $AD = 6$ см, $MN = 2$ см, $BD = 8$ см. Знайдіть довжину вектора:

- 1) \overrightarrow{DA} ;
- 2) \overrightarrow{AM} ;
- 3) \overrightarrow{AC} ;
- 4) \overrightarrow{NL} .

12.15. Накресліть прямокутний $ABCDA_1B_1C_1D_1$ та відкладіть від точки:
 1) C вектор, що дорівнює вектору \overrightarrow{BC} ;
 2) A_1 вектор, що дорівнює вектору $\overrightarrow{BB_1}$;
 3) D вектор, що дорівнює вектору $3\overrightarrow{BC}$;
 4) C_1 вектор, що дорівнює вектору $0,5\overrightarrow{CC_1}$.



Мал. 12.15

12.16. Накресліть прямокутний $KLMNK_1L_1M_1N_1$ та відкладіть від точки:
 1) K_1 вектор, що дорівнює вектору $\overrightarrow{KK_1}$;
 2) N вектор, що дорівнює вектору \overrightarrow{LM} ;
 3) M_1 вектор, що дорівнює вектору $2\overrightarrow{LM}$;
 4) L вектор, що дорівнює вектору $\frac{1}{3}\overrightarrow{L_1L}$.

паралелепіпед

12.17. Доведіть, що $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

12.18. Не виконуючи побудови, знайдіть:

- 1) $\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB}$;
- 2) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK}$;
- 3) $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{MK}$;
- 4) $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{TM}$.

12.19. Не виконуючи побудови, знайдіть:

- 1) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DK}$;
- 2) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PF}$;
- 3) $\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{TL}$;
- 4) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{KD}$.



12.20. $KLMN$ – трикутна піраміда. Побудуйте вектор:

- 1) $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KM} + 2\overrightarrow{LN}$;
- 2) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NL} - \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$.

12.21. $ABCD$ – трикутна піраміда. Побудуйте вектор:

- 1) $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}$;
- 2) $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{AC}$.

12.22. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Укажіть вектор, початком і кінцем якого є вершини куба, якщо він дорівнює сумі:

- 1) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{A_1D_1}$;
- 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1}$.

12.23. $KLMNK_1L_1M_1N_1$ – куб. Укажіть вектор, початком і кінцем якого є вершини куба, якщо він дорівнює сумі:

- 1) $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{K_1N_1}$;
- 2) $\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{N_1N}$.

12.24. Дано трикутну піраміду $KLMN$. Доведіть, що:

- 1) $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{KM}$;
- 2) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{ML} - \overrightarrow{NK}$.

12.25. Дано трикутну піраміду $ABCD$. Доведіть, що:

- 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}$;
- 2) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AC}$.

12.26. Точка K не лежить у площині трикутника ABC , M – середина AB , N – середина BC , $\overrightarrow{KM} = \vec{m}$, $\overrightarrow{KN} = \vec{n}$. Виразіть вектор \overrightarrow{AC} через вектори \vec{m} і \vec{n} .

12.27. Точка M не лежить у площині квадрата $ABCD$, $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MC} = \vec{c}$, K – середина AD , L – середина CD . Виразіть вектор \overrightarrow{KL} через вектори \vec{a} і \vec{c} .



12.28. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед. Знайдіть вектор, що дорівнює сумі $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BC}$.

12.29. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед. Знайдіть вектор, що дорівнює сумі $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{C_1B_1}$.

12.30. Вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} попарно перпендикулярні, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 6$, $|\vec{c}| = 3$. Знайдіть модуль вектора $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



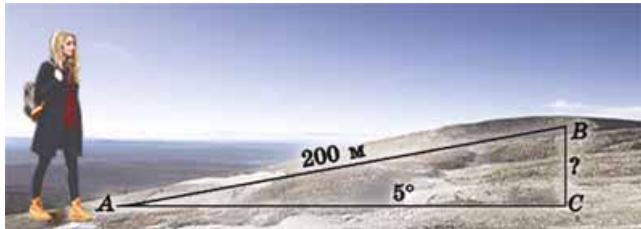
12.31. Вектори \vec{m} , \vec{n} і \vec{k} попарно перпендикулярні, $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 2$, $|\vec{k}| = 1$. Знайдіть модуль вектора $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n} + \vec{k}$.

12.32. Модулі векторів \vec{a} і \vec{b} відмінні від нуля, до того ж ці вектори неколінеарні. Знайдіть m і n , якщо $4\vec{a} + n\vec{b} = m\vec{a} + 3\vec{b}$.

12.33. Модулі векторів \vec{m} і \vec{n} відмінні від нуля, до того ж ці вектори неколінеарні. Знайдіть a і b , якщо $a\vec{m} + 5\vec{n} = 7\vec{m} + b\vec{n}$.

Життєва математика

12.34. Кут підйому дороги дорівнює 5° . Використовуючи калькулятор, знайдіть висоту, на яку підніметься пішохід, проїшовши 200 м.



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

12.35. Знайдіть координати вектора AB , якщо:

- 1) $A(-2; 3)$, $B(0; 8)$; 2) $A(4; 15)$, $B(-1; -2)$.

12.36. $\vec{a} = \vec{b}$, $\vec{a}(-2; y)$, $\vec{b}(x; 4)$. Знайдіть x і y .

12.37. Знайдіть модуль вектора \vec{a} , якщо:

- 1) $\vec{a}(-3; 4)$; 2) $\vec{a}(-2; -1)$; 3) $\vec{a}(0; 17)$; 4) $\vec{a}(\sqrt{2}; \sqrt{7})$.

12.38. Дано: $\vec{a}(-2; 5)$, $\vec{b}(4; 7)$. Знайдіть координати вектора:

- 1) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

12.39. Дано: $\vec{a}(4; -8)$, $\vec{b}(5; 1)$. Знайдіть координати вектора:

1) $\vec{m} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$; 2) $\vec{n} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$;

3) $\vec{k} = 5\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$; 4) $\vec{l} = 3\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a}$.

12.40. Чи колінеарні вектори \vec{a} і \vec{b} , якщо:

- 1) $\vec{a}(-2; 1)$, $\vec{b}(-8; 4)$; 2) $\vec{a}(1; 5)$, $\vec{b}(-2; 10)$?

§ 13. КООРДИНАТИ ВЕКТОРА. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ, ЯКІ ЗАДАНО КООРДИНАТАМИ

На площині вектор визначається двома своїми координатами, а в просторі – трьома. У просторі арифметичні дії з векторами виконують за тими самими правилами, що й на площині.

1. Координати і модуль вектора. Рівність векторів

У просторовій системі координат кожний вектор можна задати трійкою чисел – **координатами вектора**.

Координатами вектора $\overrightarrow{AB}(x; y; z)$ з початком $A(x_1; y_1; z_1)$ і кінцем $B(x_2; y_2; z_2)$ є числа:

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1 \quad \text{i} \quad z = z_2 - z_1.$$

Записують вектор \overrightarrow{AB} , який задано координатами, так: $\overrightarrow{AB}(x; y; z)$. Наприклад, $\overrightarrow{CD}(-2; 4; 0)$, $\overrightarrow{P}(-4; -2; 11)$.

Задача 1. Знайти координати вектора \overrightarrow{AB} , якщо:

- 1) $A(-7; 2; 1)$, $B(5; 0; 8)$;
- 2) $A(3; 4; 2)$, $B(3; 4; -2)$.

Розв'язання. Нехай $\overrightarrow{AB}(x; y; z)$.

- 1) Тоді $x = 5 - (-7)$; $y = 0 - 2$; $z = 8 - 1$. Отже, $\overrightarrow{AB}(12; -2; 7)$.
- 2) $x = 3 - 3$; $y = 4 - 4$; $z = -2 - 2$. Тому $\overrightarrow{AB}(0; 0; -4)$.

Відповідь. 1) $\overrightarrow{AB}(12; -2; 7)$; 2) $\overrightarrow{AB}(0; 0; -4)$.

Координатами вектора можуть бути будь-які дійсні числа. Усі координати нульового вектора дорівнюють нулю: $\vec{0}(0; 0; 0)$.

Як і на площині:

! рівні вектори мають відповідно рівні координати, і навпаки, якщо у векторів відповідно рівні координати, то вектори рівні.

Задача 2. Дано точки $A(2; -3; 4)$, $B(3; -3; 7)$, $C(-4; 1; 0)$, $D(x; y; z)$. Знайти x , y і z , якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Розв'язання. $\overrightarrow{AB}(3 - 2; -3 - (-3); 7 - 4)$, тобто $\overrightarrow{AB}(1; 0; 3)$;

$\overrightarrow{CD}(x - (-4); y - 1; z - 0)$, тобто $\overrightarrow{CD}(x + 4; y - 1; z)$.

Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $x + 4 = 1$; $y - 1 = 0$; $z = 3$.

Отже, $x = -3$; $y = 1$; $z = 3$.

Відповідь. $x = -3$; $y = 1$; $z = 3$.

Як відомо, відстань між точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ знаходять за формулою $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Оскільки $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$ – координати вектора \overrightarrow{AB} , то:

! модуль вектора $\overrightarrow{AB}(x; y; z)$ дорівнює $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Задача 3. Знайти модуль вектора:

1) $\overrightarrow{DK}(-1; 2; -2);$ 2) $\overrightarrow{MN}(4; 0; 5).$

• Розв'язання. 1) $|\overrightarrow{DK}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3;$

2) $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{41}.$

• Відповідь. 1) $|\overrightarrow{DK}| = 3;$ 2) $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{41}.$

Задача 4. Дано: $\overrightarrow{m}(4; \sqrt{5}; z)$, $|\overrightarrow{m}| = 5$. Знайти: z .

• Розв'язання. Оскільки $|\overrightarrow{m}| = \sqrt{4^2 + (\sqrt{5})^2 + z^2} = \sqrt{21 + z^2}$, то

$\sqrt{21 + z^2} = 5.$

• Маємо рівняння: $21 + z^2 = 25$, корені якого $z_1 = 2$; $z_2 = -2$.

• Відповідь. 2 або -2 .

2. Дії над векторами, що задані координатами

У просторі арифметичні дії з векторами (додавання, віднімання, множення на число) виконують так само, як і на площині.



Сумою векторів $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ називають вектор $\vec{c}(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$.

Так само як і на площині, з означення суми векторів випливає векторна рівність $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Тому означення суми векторів, які задано координатами, не суперечать правилам трикутника і паралелограма, які ми розглянули в попередньому параграфі.



Різницею векторів $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ називають вектор $\vec{d}(x_3; y_3; z_3)$, який у сумі з вектором \vec{b} дає вектор \vec{a} , тобто

$$\vec{d} + \vec{b} = \vec{a}.$$

Оскільки $x_3 + x_2 = x_1$; $y_3 + y_2 = y_1$; $z_3 + z_2 = z_1$, тобто $x_3 = x_1 - x_2$; $y_3 = y_1 - y_2$; $z_3 = z_1 - z_2$, то



різницю векторів $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ є вектор $\vec{d}(x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$.

Задача 5. Знайти координати векторів $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, якщо $\vec{a}(-2; -3; 8)$, $\vec{b}(2; 4; 11)$.

- Розв'язання. 1) $\vec{c}(-2 + 2; -3 + 4; 8 + 11)$, тобто $\vec{c}(0; 1; 19)$.
- 2) $\vec{d}(-2 - 2; -3 - 4; 8 - 11)$, тобто $\vec{d}(-4; -7; -3)$.
- Відповідь. $\vec{c}(0; 1; 19)$, $\vec{d}(-4; -7; -3)$.

Добутком вектора $\vec{a}(x; y; z)$ на число λ називають вектор $\vec{b}(\lambda x; \lambda y; \lambda z)$.

Це означення не суперечить означенню добутку вектора на число з попереднього параграфа.

Зазначені дії дозволяють знаходити координати будь-якого вектора, який записано у вигляді алгебраїчної суми векторів, координати яких відомі.

Задача 6. Дано вектори $\vec{m}(-2; 8; 12)$ і $\vec{n}(4; 0; 1)$. Знайти координати вектора $\vec{c} = 0,5\vec{m} - 3\vec{n}$.

- Розв'язання. За означенням добутку вектора на число: $0,5 \cdot \vec{m} = 0,5\vec{m}(-1; 4; 6)$; $3 \cdot \vec{n} = 3\vec{n}(12; 0; 3)$.
- Тоді $0,5\vec{m} - 3\vec{n} = \vec{c}(-13; 4; 3)$.
- Розв'язання задачі зручно записувати так:

$$0,5\vec{m}(-1; 4; 6)$$

$$\begin{array}{r} 3\vec{n}(12; 0; 3) \\ \hline \vec{c}(-13; 4; 3) \end{array}$$

Відповідь. $\vec{c}(-13; 4; 3)$.

3. Ознака колінеарності векторів

Нехай дано вектори $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$. Якщо вони колінеарні, то $\vec{b} = \lambda\vec{a}$; $x_2 = \lambda x_1$; $y_2 = \lambda y_1$; $z_2 = \lambda z_1$. Тоді (якщо $x_1 \neq 0$, $y_1 \neq 0$, $z_1 \neq 0$) маємо: $\lambda = \frac{x_2}{x_1}$; $\lambda = \frac{y_2}{y_1}$; $\lambda = \frac{z_2}{z_1}$,

тобто $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$, що означає, що координати колінеарних векторів пропорційні. Маємо ознаку колінеарності векторів.



Нехай задано вектори $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$.

1) Якщо координати обох векторів відмінні від нуля і $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \lambda$, то вектори \vec{a} і \vec{b} колінеарні, причому якщо $\lambda > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; а якщо $\lambda < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

2) Якщо ж у кожного з двох векторів одна й та сама координата дорівнює нулю, а інші утворюють пропорцію, то вектори колінеарні.

Задача 7. Визначте, чи колінеарні вектори \vec{a} і \vec{b} . Якщо так, то вкажіть, однаково чи протилежно вони напрямлені.

1) $\vec{a}(-1; 3; -4)$, $\vec{b}(2; -6; 8)$; 2) $\vec{a}(7; 1; -2)$, $\vec{b}(14; 2; -3)$;

3) $\vec{a}(2; 0; 3)$, $\vec{b}(4; 0; 6)$; 4) $\vec{a}(0; 2; 7)$, $\vec{b}(1; -4; -14)$.

• Розв'язання. 1) $\frac{2}{-1} = \frac{-6}{3} = \frac{8}{-4} = -2 < 0$, тому $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

2) $\frac{14}{7} = \frac{2}{1} \neq \frac{-3}{-2}$, тому \vec{a} і \vec{b} неколінеарні.

3) Ординати обох векторів дорівнюють нулю, перевіримо пропорційність двох інших координат: $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2 > 0$, тому $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

4) Абсциса вектора \vec{a} дорівнює нулю, а абсциса вектора \vec{b} не дорівнює нулю, отже, вектори неколінеарні.

Відповідь. 1) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$; 2) вектори неколінеарні;

3) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; 4) вектори неколінеарні.

Задача 8. При яких значеннях x і y вектори $\vec{a}(-3; y; 6)$ і $\vec{b}(x; 10; -3)$ колінеарні?

• Розв'язання. За ознакою колінеарності: $\frac{x}{-3} = \frac{10}{y} = \frac{-3}{6}$.

• Звідси маємо: $x = 1,5$; $y = -20$.

• Відповідь. $x = 1,5$; $y = -20$.



- Що таке координати вектора? ● Який зв'язок між рівністю векторів і їх координатами? ● Як знайти модуль вектора за його координатами? ● Який вектор називають сумою векторів $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$? ● Що називають різницею векторів? ● Як знайти різницю векторів $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$? ● Що називають добутком вектора $\vec{a}(x; y; z)$ на число λ ? ● Сформулюйте ознаку колінеарності векторів.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

13.1. Знайдіть координати вектора \overrightarrow{CD} , якщо:

1) $C(2; -3; 4)$, $D(0; 4; 4)$; 2) $C(5; -1; 2)$, $D(2; -3; -2)$.

13.2. Знайдіть координати вектора \overrightarrow{AB} , якщо:

1) $A(3; -5; 4)$, $B(3; 2; 0)$; 2) $A(-8; 2; 5)$, $B(-3; 4; -5)$.

13.3. Знайдіть модуль вектора:

1) $\vec{a}(0; -3; 4)$; 2) $\vec{b}(2; -3; 6)$.

13.4. Знайдіть модуль вектора:

1) $\vec{m}(6; 0; -8);$ 2) $\vec{n}(-1; -2; 2).$

13.5. Дано вектори $\vec{m}(x; y; -2)$ і $\vec{n}(0; -1; z), \vec{m} = \vec{n}$. Знайдіть x, y і z .

13.6. Дано вектори $\vec{a}(x; -3; z)$ і $\vec{b}(4; y; 0), \vec{a} = \vec{b}$. Знайдіть x, y і z .

13.7. Знайдіть суму $\vec{a} + \vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(5; -1; 2), \vec{b}(0; 1; 0);$ 2) $\vec{a}(-4; -2; 8), \vec{b}(4; -2; 4).$

13.8. Знайдіть суму $\vec{c} + \vec{d}$, якщо:

1) $\vec{c}(4; 2; -5), \vec{d}(0; 0; 5);$ 2) $\vec{c}(2; -3; 4), \vec{d}(-3; -3; 5).$

13.9. Знайдіть різницю $\vec{c} - \vec{d}$, якщо:

1) $\vec{c}(4; -3; -7), \vec{d}(0; 3; 2);$ 2) $\vec{c}(2; 0; -5), \vec{d}(2; -8; -1).$

13.10. Знайдіть різницю $\vec{m} - \vec{n}$, якщо:

1) $\vec{m}(2; -5; 4), \vec{n}(-1; 0; 4);$ 2) $\vec{m}(-3; 0; -7), \vec{n}(-3; -1; -2).$

13.11. Дано вектор $\vec{a}(-2; 0; 8)$. Знайдіть координати вектора:

1) $4\vec{a};$ 2) $-\frac{1}{2}\vec{a};$ 3) $10\vec{a};$ 4) $-3\vec{a}.$

13.12. Дано вектор $\vec{b}(3; -6; 0)$. Знайдіть координати вектора:

1) $2\vec{b};$ 2) $-\frac{1}{3}\vec{b};$ 3) $8\vec{b};$ 4) $-2\vec{b}.$

13.13. Співнапрямлені чи протилежно напрямлені вектори \vec{m} і \vec{n} , якщо:

1) $\vec{m} = -\frac{1}{2}\vec{n};$ 2) $\vec{n} = 4\vec{m}?$

13.14. Співнапрямлені чи протилежно напрямлені вектори \vec{c} і \vec{d} , якщо:

1) $\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{d};$ 2) $\vec{d} = -3\vec{c}?$

 **13.15.** Знайдіть модуль вектора \overline{MN} , якщо:

1) $M(-1; 2; 3), N(1; 8; 0);$ 2) $M(2; -1; 3), N(2; 4; 9).$

13.16. Знайдіть модуль вектора \overline{AB} , якщо:

1) $A(0; 2; 5), B(6; 5; 7);$ 2) $A(3; -2; 7), B(5; -2; 11).$

13.17. Чи рівні вектори \overline{AB} і \overline{CD} , якщо: $A(2; -1; 4), B(5; -3; 7), C(1; 1; 2), D(4; -1; 4)?$

13.18. Чи рівні вектори \overline{MN} і \overline{KL} , якщо: $M(0; -1; 2), N(4; -3; 5), K(-1; 1; 3), L(3; -1; 6)?$

13.19. Дано точки $K(-2; 3; 4)$, $M(0; y; -3)$, $N(x; 3; -5)$, $L(2; 2; z)$. Знайдіть x , y і z , якщо $\overline{KM} = \overline{NL}$.

13.20. Дано точки $A(0; 2; -3)$, $B(3; -2; 5)$, $C(x; y; 5)$, $D(-2; 3; z)$. Знайдіть x , y і z , якщо $\overline{AB} = \overline{CD}$.

13.21. Дано: $\vec{a}(3; -4; 5)$; $\vec{b}(x; y; z)$; $\vec{c}(-4; 0; 8)$; $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$. Знайдіть x , y і z .

13.22. Дано: $\vec{a}(4; -8; 9)$; $\vec{b}(x; y; z)$; $\vec{c}(0; 2; -10)$; $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Знайдіть x , y і z .

13.23. Задано вектори $\vec{m}(-2; 1; 0)$ і $\vec{n}(2; -1; 2)$. Знайдіть координати векторів:

1) $2\vec{m} + \vec{n}$; 2) $\vec{m} - 3\vec{n}$; 3) $3\vec{m} + 4\vec{n}$; 4) $5\vec{m} - 2\vec{n}$.

13.24. Задано вектори $\vec{a}(0; -1; 4)$ і $\vec{b}(1; -2; 3)$. Знайдіть координати векторів:

1) $3\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - 2\vec{b}$; 3) $2\vec{a} + 4\vec{b}$; 4) $5\vec{a} - 3\vec{b}$.

13.25. Чи колінеарні вектори:

1) $\vec{a}(2; -1; 3)$ і $\vec{b}(4; -2; 6)$; 2) $\vec{m}(0; 2; 6)$ і $\vec{n}(0; -4; 12)$?

13.26. Чи колінеарні вектори:

1) $\vec{c}(1; 2; -4)$ і $\vec{b}(2; 4; 8)$; 2) $\vec{a}(1; -2; 0)$ і $\vec{b}(2; -4; 0)$?

13.27. Дано вектор $\vec{a}(0; -5; 12)$. Знайдіть модуль вектора:

1) $-\vec{a}$; 2) $2\vec{a}$.

13.28. Дано вектор $\vec{b}(-6; 0; 8)$. Знайдіть модуль вектора:

1) $-\vec{b}$; 2) $3\vec{b}$.

13.29. Серед векторів $\vec{a}(1; -2; 3)$, $\vec{b}(-2; 4; -6)$, $\vec{c}(2; -4; -6)$, $\vec{d}(-0,1; 0,2; -0,3)$ знайдіть усі пари співнапрямлених і протилежно напрямлених векторів.

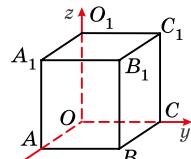
13.30. Серед векторів $\vec{m}(-1; 1; -2)$, $\vec{n}(3; -3; 6)$, $\vec{k}(-0,1; 0,1; -0,2)$, $\vec{j}(2; -2; -4)$ знайдіть усі пари співнапрямлених і протилежно напрямлених векторів.

 **13.31.** На малюнку 13.1 зображене прямокутний паралелепіпед $OABC O_1 A_1 B_1 C_1$; $OA = 3$; $OC = 4$; $OO_1 = 5$. Знайдіть координати векторів:

1) \overrightarrow{AO} ; 2) \overrightarrow{OA}_1 ; 3) \overrightarrow{BO} ;
4) $\overrightarrow{O_1B}$; 5) $\overrightarrow{C_1A}$; 6) $\overrightarrow{B_1C}$.

13.32. На малюнку 13.1 зображене прямокутний паралелепіпед $OABC O_1 A_1 B_1 C_1$; $OA = 2$; $OC = 4$; $OO_1 = 7$. Знайдіть координати векторів:

1) \overrightarrow{CO} ; 2) \overrightarrow{OB}_1 ; 3) $\overrightarrow{A_1O}$; 4) $\overrightarrow{O_1C_1}$; 5) $\overrightarrow{A_1C}$; 6) \overrightarrow{BC}_1 .



Мал. 13.1

13.33. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(3; 1; 4)$, $B(1; 4; 7)$, $C(3; -1; 5)$, $D(5; -4; 2)$ є паралелограмом.

13.34. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $KLMN$ з вершинами в точках $K(1; -1; 0)$, $L(4; 1; 4)$, $M(8; 3; -1)$, $N(5; 1; -5)$ є паралелограмом.

13.35. Модуль вектора $\vec{p}(-1; 2; z)$ дорівнює 3. Знайдіть z .

13.36. Модуль вектора $\vec{t}(-2; y; 6)$ дорівнює 7. Знайдіть y .

13.37. Дано точки $A(0; 2; -6)$ і $B(4; 10; -12)$. Знайдіть координати точки D такої, що $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB} = \vec{0}$.

13.38. Дано точки $C(-2; 0; 4)$ і $D(6; 8; -2)$. Знайдіть координати точки K такої, що $\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{DK} = \vec{0}$.

13.39. Дано: $\vec{a}(-2; 3; -1)$; $\vec{b}(4; 0; 8)$. Знайдіть модуль вектора

$$\vec{c} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

13.40. Дано: $\vec{c}(-1; 0; 6)$; $\vec{d}(-2; 4; -28)$. Знайдіть модуль вектора $\vec{a} = 3\vec{c} + 0,5\vec{d}$.

13.41. При яких значеннях m і n колінеарні вектори:

1) $\vec{p}(4; m; -2)$ і $\vec{t}(6; 9; n)$; 2) $\vec{c}(0; 2; -4)$ і $\vec{d}(m; -1; n)$?

Співнапрямлені чи протилежно напрямлені ці вектори?

13.42. При яких значеннях m і n колінеарні вектори:

1) $\vec{a}(2; 4; m)$ і $\vec{b}(-1; n; 2)$; 2) $\vec{k}(6; 0; m)$ і $\vec{e}(2; n; 1)$?

Співнапрямлені чи протилежно напрямлені ці вектори?

 **13.43.** Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(3; -2; 2)$, $B(0; 1; 5)$, $C(5; 2; 6)$, $D(8; -1; 3)$ є ромбом.

13.44. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(0; 5; 3)$, $B(0; 1; 3)$, $C(5; 1; 7)$, $D(5; 5; 7)$ є прямокутником.

13.45. Модуль вектора $\vec{a}(x; y; z)$ дорівнює $\sqrt{14}$. Знайдіть координати вектора \vec{a} , якщо координата y цього вектора в 3 рази більша за координату z , а координата z у 2 рази менша за координату x цього вектора.

13.46. Модуль вектора $\vec{b}(x; y; z)$ дорівнює $\sqrt{33}$. Знайдіть координати цього вектора, якщо його координати x і y рівні між собою, а координата z на 3 більша за кожну з них.

13.47. Дано вектори $\vec{a}(1; y; -2)$, $\vec{b}(x; 4; 3)$ і $\vec{c}(3; -2; 4)$. При яких значеннях x і y модуль вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ буде найменшим?

13.48. Дано вектори $\vec{p}(x; -3; 4)$, $\vec{m}(1; 0; -2)$ і $\vec{n}(-3; 5; z)$. При яких значеннях x і z модуль вектора $\vec{p} + \vec{m} + \vec{n}$ буде найменшим?

13.49. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $ABCD$ є трапецією, якщо $A(0; 5; -4)$, $B(6; 8; -1)$, $C(6; 3; 4)$, $D(-2; -1; 0)$.

13.50. Доведіть за допомогою векторів, що точки $M(3; 4; 5)$, $N(-3; -3; -6)$ і $P(9; 11; 16)$ лежать на одній прямій.

Життєва математика

13.51. Ширина хокейних воріт дорівнює 6 футів, висота – 4 фута. Знайдіть наближену площину воріт у квадратних метрах з точністю до двох знаків після коми.

Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

13.52. Знайдіть скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо:
1) $\vec{a}(-2; 3)$, $\vec{b}(0; 5)$; 2) $\vec{a}(12; 5)$, $\vec{b}(-1; 1)$.

13.53. Знайдіть квадрат вектора \vec{a} , якщо:
1) $\vec{a}(-2; 1)$; 2) $\vec{a}(4; 3)$.

13.54. Дано: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi$. Знайдіть $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо:

- 1) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = 0^\circ$; 2) $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 4$, $\varphi = 30^\circ$;
3) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 7$, $\varphi = 90^\circ$; 4) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 10$, $\varphi = 120^\circ$.

13.55. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}(1; 1)$ і $\vec{b}(3; 0)$.

13.56. Чи перпендикулярні вектори \vec{a} і \vec{b} , якщо:
1) $\vec{a}(-2; 6)$, $\vec{b}(12; 4)$; 2) $\vec{a}(4; 1)$, $\vec{b}(-2; 7)$?

§ 14. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Під час вивчення планіметрії ми вже розглядали скалярний добуток векторів. Так само розглядають скалярний добуток векторів і у стереометрії.

1. Скалярний добуток векторів



Скалярним добутком векторів $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ називають число

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Як і в планіметрії, скалярний добуток векторів записують, використовуючи знак множення, так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ або $\vec{a}\vec{b}$.

Задача 1. Знайти скалярний добуток векторів:

1) $\vec{a}(-2; 1; 4)$ і $\vec{b}(1; 8; -3)$; 2) $\vec{c}(2; 0; -1)$ і $\vec{d}(4; -3; -2)$.

• Розв'язання. 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 8 + 4 \cdot (-3) = -6$;

• 2) $\vec{c} \cdot \vec{d} = 2 \cdot 4 + 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-2) = 10$.

Відповідь. 1) -6; 2) 10.

Знайдемо скалярний добуток рівних векторів.

Нехай дано вектор $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$. Тоді:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = x_1x_1 + y_1y_1 + z_1z_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = (\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2})^2 = |\vec{a}|^2.$$

Скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ позначають \vec{a}^2 і називають *скалярним квадратом вектора*.

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Оскільки $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, то $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

З означення скілярного добутку маємо його *властивості*.



Для будь-яких векторів \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} і будь-якого числа λ :

1) $\vec{a}^2 \geq 0$, до того ж $\vec{a}^2 > 0$, якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$.

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ – переставна властивість.

3) $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ – сполучна властивість.

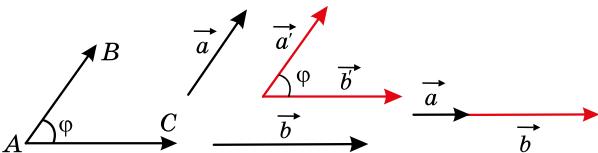
4) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ – розподільна властивість.

2. Кут між векторами.
Теорема про скілярний добуток векторів



Як і в планіметрії:

кутом між векторами \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{AC} називають кут BAC (мал. 14.1). Кутом між двома ненульовими векторами, що не мають спільного початку, називають кут між векторами, що дорівнюють даним і мають спільний початок (мал. 14.2).

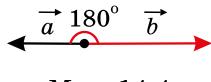


Мал. 14.1

Мал. 14.2

Мал. 14.3

Кут між співнапрямленими векторами дорівнює нулю (мал. 14.3), кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180° (мал. 14.4).



Мал. 14.4

Як і в планіметрії, справджується така теорема.



Теорема (про скалярний добуток векторів). Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх модулів на косинус кута між ними, тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi, \text{ де } \varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Теорему можна довести так само, як і в курсі планіметрії. Вона має ті самі наслідки, що й у планіметрії.



Наслідок 1. Якщо вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю.



Наслідок 2. Якщо скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вони перпендикулярні.

Задача 2. Чи перпендикулярні вектори \vec{a} і \vec{b} , якщо:

1) $\vec{a}(-1; 2; 0); \vec{b}(8; 4; 7)$; 2) $\vec{a}(1; 4; -3); \vec{b}(2; 1; 3)$?

• Розв'язання. 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 7 = 0$, тому $\vec{a} \perp \vec{b}$.

• 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 = -3$, тому \vec{a} і \vec{b} – не перпендикулярні.

• Відповідь. 1) Так; 2) ні.

Задача 3. При якому значенні z вектори $\vec{c}(4; -1; 5)$ і $\vec{d}(5; 0; z)$ перпендикулярні?

• Розв'язання. Щоб вектори були перпендикулярними, їх скалярний добуток має дорівнювати нулю.

• $\vec{c} \cdot \vec{d} = 4 \cdot 5 + (-1) \cdot 0 + 5z = 0$, тоді $5z = -20$, отже, $z = -4$.

• Відповідь. $z = -4$.

За скалярним добутком векторів $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ можна знайти косинус кута між ними.

Оскільки $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} |\vec{b}| \cos \varphi$, де φ – кут між векторами \vec{a} і \vec{b} , то

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

Ураховуючи, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$; $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$;
 $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$, матимемо:

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

За значенням косинуса кута можна знайти міру цього кута (за допомогою таблиць чи калькулятора).

Задача 4. Знайти градусну міру кута C трикутника з вершинами в точках $A(2; 4; 1)$, $B(3; 4; 0)$, $C(2; 3; 0)$.

- Розв'язання. Кут C трикутника ABC (мал. 14.5) збігається з кутом між векторами \overrightarrow{CA} і \overrightarrow{CB} . Маємо:

- $\overrightarrow{CA}(2 - 2; 4 - 3; 1 - 0)$, тобто $\overrightarrow{CA}(0; 1; 1)$;

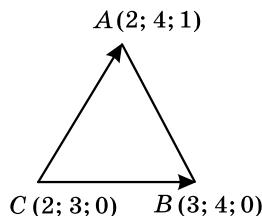
- $\overrightarrow{CB}(3 - 2; 4 - 3; 0 - 0)$, тобто $\overrightarrow{CB}(1; 1; 0)$.

- Тоді

$$\cos C = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

звідки $\angle C = 60^\circ$.

Відповідь. 60° .



Мал. 14.5

Задача 5. Дано вектори \vec{c} і \vec{d} , $|\vec{c}| = 1$, $|\vec{d}| = 2$, $(\widehat{\vec{c}; \vec{d}}) = 120^\circ$.

Знайти $|3\vec{c} + 4\vec{d}|$.

- Розв'язання. Оскільки $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$, то

$$|3\vec{c} + 4\vec{d}| = \sqrt{(3\vec{c} + 4\vec{d})^2} = \sqrt{9\vec{c}^2 + 2 \cdot 3\vec{c} \cdot 4\vec{d} + 16\vec{d}^2} =$$

$$= \sqrt{9|\vec{c}|^2 + 24|\vec{c}||\vec{d}|\cos 120^\circ + 16|\vec{d}|^2} =$$

$$= \sqrt{9 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 16 \cdot 2^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Відповідь. 7.



• Сформулюйте означення скалярного добутку векторів. • Що називають скалярним квадратом вектора? • Що називають кутом між векторами? • Сформулюйте теорему про скалярний добуток векторів і наслідки з неї. • Як знайти косинус кута між векторами?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



14.1. Знайдіть скалярний добуток векторів:

$$1) \vec{a}(-4; 3; 2) \text{ i } \vec{b}(0; 1; -8); \quad 2) \vec{c}(1; -2; -3) \text{ i } \vec{d}(2; 1; -1).$$

14.2. Знайдіть скалярний добуток векторів:

$$1) \vec{c}(0; 1; -2) \text{ i } \vec{d}(5; 6; -1); \quad 2) \vec{m}(1; -1; 2) \text{ i } \vec{n}(5; 4; 1).$$

14.3. Знайдіть \vec{p}^2 , якщо: 1) $\vec{p}(0; -3; 2)$; 2) $\vec{p}(-1; 1; 2)$.

14.4. Знайдіть \vec{m}^2 , якщо: 1) $\vec{m}(1; 0; -2)$; 2) $\vec{m}(-1; 2; -3)$.

2 **14.5.** Дано вектори $\vec{m}(-1; 2; z)$ і $\vec{n}(3; 4; -2)$. При якому значенні z справджується рівність $\vec{m} \cdot \vec{n} = 7$?

14.6. Дано вектори $\vec{a}(x; -1; 3)$ і $\vec{b}(3; 2; -2)$. При якому значенні x справджується рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$?

14.7. $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = \varphi$. Знайдіть $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо:

$$\begin{array}{ll} 1) \vec{a} = 6; \vec{b} = 3; \varphi = 30^\circ; & 2) \vec{a} = 3; \vec{b} = 10; \varphi = 60^\circ; \\ 3) \vec{a} = 8; \vec{b} = 2; \varphi = 135^\circ; & 4) \vec{a} = 4; \vec{b} = 6; \varphi = 180^\circ. \end{array}$$

14.8. $(\widehat{\vec{c}; \vec{d}}) = \varphi$. Знайдіть $\vec{c} \cdot \vec{d}$, якщо:

$$\begin{array}{ll} 1) \vec{c} = 5; \vec{d} = 1; \varphi = 0^\circ; & 2) \vec{c} = 4; \vec{d} = 7; \varphi = 45^\circ; \\ 3) \vec{c} = 2; \vec{d} = 1; \varphi = 120^\circ; & 4) \vec{c} = 7; \vec{d} = 6; \varphi = 150^\circ. \end{array}$$

14.9. Доведіть, що вектори $\vec{m}(-1; 4; 8)$ і $\vec{n}(8; 10; -4)$ перпендикулярні.

14.10. Доведіть, що вектори $\vec{p}(-1; 2; 5)$ і $\vec{q}(4; -3; 2)$ перпендикулярні.

14.11. Чи перпендикулярні вектори \vec{c} і \vec{d} , якщо:

$$1) \vec{c}(2; -1; 3), \vec{d}(2; -4; -2); \quad 2) \vec{c}(3; -2; 1), \vec{d}(4; 6; 0)?$$

14.12. Чи перпендикулярні вектори \vec{a} і \vec{b} , якщо:

$$1) \vec{a}(-1; 2; 3), \vec{b}(4; -1; 2); \quad 2) \vec{a}(2; -3; 0), \vec{b}(6; -4; 5)?$$

3 **14.13.** При якому значенні m вектори $\vec{a}(-1; m; 2)$ і $\vec{b}(m; 3; 7)$ перпендикулярні?

14.14. При якому значенні n вектори $\vec{c}(n; 4; -1)$ і $\vec{d}(3; -2; n)$ перпендикулярні?

14.15. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}(0; 2; -2)$ і $\vec{b}(1; 0; -1)$.

14.16. Знайдіть кут між векторами $\vec{p}(3; 0; -3)$ і $\vec{q}(0; 2; 2)$.

14.17. Знайдіть косинуси внутрішніх кутів трикутника з вершинами в точках $A(2; 3; 2)$, $B(4; 0; 8)$, $C(8; 5; -1)$, та впевніться в тому, що він рівнобедрений.

14.18. Знайдіть внутрішній кут при вершині B трикутника ABC , якщо $A(0; -1; 5)$, $B(-3; -1; 1)$, $C(4; -1; 2)$.

14.19. \vec{c} і \vec{d} – ненульові вектори. Знайдіть кут між векторами \vec{c}

$$1) \vec{c} \cdot \vec{d}, \text{ якщо: } 1) \vec{c} \cdot \vec{d} = |\vec{c}| |\vec{d}|; \quad 2) \vec{c} \cdot \vec{d} = \frac{\sqrt{2}}{2} |\vec{c}| |\vec{d}|;$$

$$3) \vec{c} \cdot \vec{d} = -|\vec{c}| |\vec{d}|; \quad 4) \vec{c} \cdot \vec{d} = -\frac{|\vec{c}| |\vec{d}|}{2}?$$

14.20. $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 120^\circ$; $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = 3$. Знайдіть:

$$1) \vec{a}\vec{b}; \quad 2) (\vec{a} + \vec{b})\vec{a}; \quad 3) \vec{b}(\vec{a} - \vec{b}); \quad 4) \vec{a}(2\vec{a} - 3\vec{b}).$$

14.21. $(\widehat{\vec{c}; \vec{d}}) = 60^\circ$; $|\vec{c}| = 1$; $|\vec{d}| = 2$. Знайдіть:

$$1) \vec{c}\vec{d}; \quad 2) \vec{c}(\vec{c} - \vec{d}); \quad 3) \vec{d}(\vec{c} + \vec{d}); \quad 4) \vec{d}(2\vec{c} - 3\vec{d}).$$

14.22. Дано: $|\vec{a}| = 4$; $|\vec{b}| = 1$. Чи може скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$ дорівнювати:

$$1) -4; \quad 2) -4,2; \quad 3) -0,01; \quad 4) 0; \quad 5) 4\frac{1}{3}; \quad 6) 3,9?$$

 **14.23.** Дано вектори \vec{c} і \vec{d} , $|\vec{c}| = 1$, $|\vec{d}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\vec{c}; \vec{d}}) = 150^\circ$.

Знайдіть: 1) $|\vec{c} + \vec{d}|$; 2) $|2\vec{c} - 3\vec{d}|$.

14.24. Дано вектори \vec{a} і \vec{b} , $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 30^\circ$. Знайдіть:

$$1) |\vec{a} - \vec{b}|; \quad 2) |3\vec{a} + 2\vec{b}|.$$

14.25. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(6; -2; 3)$, $B(10; 0; 4)$, $C(13; -4; 0)$, $D(9; -6; -1)$ є прямокутником.

14.26. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $K(7; -3; 3)$, $L(4; 3; 4)$, $M(1; 2; 1)$, $N(4; -4; 0)$ є прямокутником.

14.27. Дано точки $K(1; 1; 0)$, $L(2; 4; 3)$, $M(-2; -11; -15)$, $N(-5; 5; -2)$. Доведіть, що пряма KN перпендикулярна до площини KLM .

14.28. Знайдіть $\vec{a}\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 3$.

14.29. Знайдіть $\vec{c}\vec{d}$, якщо $|\vec{c}| = 2$, $|\vec{d}| = 5$, $|\vec{c} + \vec{d}| = 4$.



Життєва математика

14.30. Обчисліть, скільки кубічних метрів повітря очистять від автомобільних вихлопних газів 100 каштанів, що ростуть уздовж дороги, якщо одне дерево очищає зону довжиною 100 м, ширину 12 м, висотою 10 м.

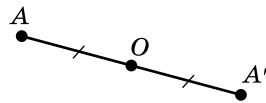


Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

- 14.31.** Серед точок $A(-2; 5)$, $B(2; 5)$, $C(-2; -5)$, $D(2; -5)$ укажіть пари точок, симетричних відносно початку координат.
- 14.32.** Які координати має точка O , відносно якої симетричні точки $M(-2; 3)$ і $M'(4; 11)$?
- 14.33.** Точки $A(-4; y)$ і $A'(x; 7)$ симетричні відносно точки $O(2; -1)$. Знайдіть x і y .
- 14.34.** Знайдіть координати точки, симетричної точці $K(-2; 3)$ відносно:
- 1) осі абсцис;
 - 2) осі ординат.

§ 15. СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ТОЧКИ ТА СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ПЛОЩИНІ

Як і на площині, у просторі також розглядають різні види руху (переміщення). У цьому параграфі розглянемо симетрію відносно точки у просторі та ознайомимося з новим видом симетрії – симетрією відносно площини.



Мал. 15.1

1. Симетрія відносно точки

Як і на площині, у просторі:

! діві точки A і A' називають симетричними відносно точки O , якщо O – середина відрізка AA' (мал. 15.1).

Симетрію відносно точки називають ще *центральною симетрією*, а точку O – центром симетрії.



Задача 1. Довести, що точкою, яка симетрична точці $A(x; y; z)$ відносно початку координат, є точка $A'(-x; -y; -z)$.

• **Доведення.** Оскільки $\frac{x + (-x)}{2} = 0$, $\frac{y + (-y)}{2} = 0$ і $\frac{z + (-z)}{2} = 0$,

- то точки $A(x; y; z)$ і $A'(-x; -y; -z)$ симетричні відносно точки $(0; 0; 0)$, тобто відносно початку координат.

Задача 2. Точки $B(-5; 7; z)$ і $B'(x; y; 0)$ симетричні відносно точки $O(1; -2; 3)$. Знайти x , y і z .

Розв'язання. Точка O – середина відрізка BB' . Тому за формулами середини відрізка маємо:

$$1 = \frac{-5 + x}{2}, \quad -2 = \frac{7 + y}{2} \quad \text{i} \quad 3 = \frac{z + 0}{2}.$$

Отже, $x = 7$, $y = -11$, $z = 6$.

Відповідь. $x = 7$, $y = -11$, $z = 6$.

2. Симетрія відносно площини



Дві точки A і A' називають **симетричними відносно площини** α , якщо площа α проходить через середину відрізка AB перпендикулярно до нього (мал. 15.2).

Симетрію відносно площини називають ще **дзеркальною симетрією**, а площину α називають площину симетрії.

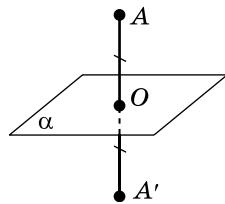


Задача 3. Довести, що точкою, яка симетрична точці $A(x; y; z)$ відносно площини xy , є точка $A'(x; y; -z)$.

Доведення. 1) Якщо точка A належить площині xy , то її ортогональний проекцій на площину xy – точка $A(x; y; 0)$ – симетрична сама собі відносно площини xy . Оскільки при $z = 0$ маємо $A'(x; y; 0)$, то у випадку, коли точка A належить площині xy , твердження задачі доведено.

2) Якщо точка A не належить площині xy , то точка M – середина відрізка AA' – має координати $\frac{x+x}{2} = x$, $\frac{y+y}{2} = y$, $\frac{z+(-z)}{2} = 0$. Точка $M(x; y; 0)$ належить площині xy . Оскільки відповідні абсциси її ординати точок A і A' рівні між собою, то відрізок AA' перпендикулярний до площини xy . Таким чином, площа xy проходить через середину відрізка AA' перпендикулярно до нього, а отже, точки A і A' – симетричні відносно площини xy .

Мал. 15.2



Міркуючи аналогічно, можна довести, що точкою, симетричною точці $A(x; y; z)$ відносно площини xz , є точка $A''(x; -y; z)$, а відносно площини yz – точка $A'''(-x; y; z)$.



- Які дві точки A і A' називають симетричними відносно точки O ? • Яка точка є симетричною точці $A(x; y; z)$ відносно початку координат? • Які дві точки A і A' називають симетричними відносно площини α ? • Яка точка є симетричною точці $A(x; y; z)$ відносно площини xy , яка – відносно площини xz і яка – відносно площини yz ?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



15.1. Чи симетричні точки A і A' відносно початку координат, якщо:
1) $A(-2; 3; 7)$, $A'(2; -3; 7)$; 2) $A(4; 0; -1)$, $A'(-4; 0; 1)$?



15.2. Чи симетричні точки B і B' відносно початку координат, якщо:
1) $B(-2; 1; -8)$, $B'(2; -1; 8)$; 2) $B(0; -1; 4)$, $B'(0; -1; -4)$?



15.3. Запишіть координати точок, що симетричні відносно початку координат точкам: 1) $C(-3; 2; 0)$; 2) $D(-4; 2; -3)$.



15.4. Запишіть координати точок, що симетричні відносно початку координат точкам: 1) $M(4; 0; -2)$; 2) $N(1; -3; -5)$.



15.5. Які координати має точка O , відносно якої симетричні точки $B(2; -7; 8)$ і $B'(0; 1; -10)$?



15.6. Чи симетричні точки $A(-1; 2; 9)$ і $A'(3; 0; -1)$ відносно точки $O(1; 1; 5)$?



15.7. Точки $M(x; 2; -7)$ і $M'(2; y; z)$ симетричні відносно точки $O(1; 0; -1)$. Знайдіть x , y , z .



15.8. Точки $C(-1; y; 2)$ і $C'(x; 4; z)$ симетричні відносно точки $O(-2; 1; 0)$. Знайдіть x , y , z .



15.9. Чи симетричні точки $A(2; -3; 7)$ і $A'(-2; 3; 7)$ відносно площини xz ?



15.10. Чи симетричні точки $B(2; -1; 1)$ і $B'(2; -1; -1)$ відносно площини xy ?



15.11. Запишіть координати точок, симетричних точці $B(4; -2; 1)$ відносно площини: 1) xy ; 2) yz .



15.12. Запишіть координати точок, симетричних точці $C(-1; 3; -5)$ відносно площини: 1) yz ; 2) xz .



15.13. Дано точки $C(2; -7; 4)$ і $D(0; 1; -8)$. Запишіть координати точки, симетричної середині відрізка CD відносно:
1) початку координат; 2) площини xz .

- 15.14.** Дано точки $A(4; 0; -5)$ і $B(2; -6; 1)$. Запишіть координати точки, симетричної середині відрізка AB відносно:
- 1) початку координат;
 - 2) площині xy .
- 15.15.** Точки $B(2; y; z)$ і $B'(x; -3; 8)$ симетричні відносно площини yz . Знайдіть x, y, z .
- 15.16.** Точки $C(x; y; -2)$ і $C'(2; 4; z)$ симетричні відносно площини xz . Знайдіть x, y, z .
- 4** **15.17.** Точки $A(2; -1; 7)$ і $A'(2; 3; 7)$ симетричні відносно площини α . Яким є взаємне розміщення площини α і осі:
- 1) абсцис;
 - 2) ординат;
 - 3) аплікат?
- 15.18.** Точки $K(-3; 2; 4)$ і $K'(-3; 2; 8)$ симетричні відносно площини β . Яким є взаємне розміщення площини β і осі:
- 1) абсцис;
 - 2) ординат;
 - 3) аплікат?



Життєва математика

- 15.19.** Товарний потяг рухається зі швидкістю 54 км/год. Діаметр його колеса дорівнює 1,2 м. Скільки обертів за хвилину робить колесо потяга? (Для спрощення обчислень вважайте, що $\pi \approx 3$).



Завдання для перевірки знань за курс геометрії 10 класу

1. Пряма a належить площині γ , а пряма b перетинає площину γ у точці, що не лежить на прямій a . Яке взаємне розміщення прямих a і b ?

2. Точка B не належить площині α . Скільки можна провести площини, перпендикулярних до площини α , що проходять через точку B ?

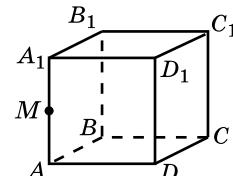
3. Знайдіть координати точки, що є серединою відрізка CD , якщо $C(-2; 0; -7)$, $D(4; 8; -1)$.



4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 15.4). Укажіть:

1) пряму перетину площин ABC і D_1CC_1 ;

2) площину, яка проходить через прямі BM і AA_1 .



Мал. 15.4

5. Двогранний кут дорівнює 60° . На одній із його граней взято точку на відстані $4\sqrt{3}$ від другої грані. Знайдіть відстань від цієї точки до ребра двогранного кута.

6. Дано вектори $\vec{m}(-2; 3; 0)$ і $\vec{n}(4; 2; -4)$. Знайдіть:

1) координати вектора $\vec{c} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$; 2) $|\vec{c}|$.



7. Трикутник KAB і паралелограм $ABCD$ мають спільну сторону AB і лежать у різних площинках. Через сторону CD і точку M – середину відрізка AK – проведено площину, яка перетинає KB у точці N .

1) Доведіть, що $MN \parallel AB$.

2) Знайдіть AB , якщо $MN = 7$ см.

3) Визначте вид чотирикутника $MNCD$.



8. Через вершину A прямокутника $ABCD$ проведено пряму AL , перпендикулярну до його площини. Відомо, що $LD = 10$ см, $LC = 14$ см, $LB = 12$ см. Знайдіть: 1) AL ; 2) площину прямокутника $ABCD$.

Українці у світі

Йому завдячує покоління вчителів і науковців...

Микола Іванович

Шкіль народився 1932 року в с. Бурбіне (Полтавська обл.). Закінчив з відзнакою за фахом «Учитель математики» фізико-математичний факультет Київського педагогічного інституту ім. О.М. Горького (КПДІ). Після закінчення 1958 року аспірантури Микола Іванович усе своє життя пов'язує з КПДІ (нині це Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова), пройшовши шлях від аспіранта до ректора. У 1973 році М.І. Шкіль став ректором КПДІ й пропрацював на цій посаді загалом 30 років.

Дослідження М.І. Шкіля були присвячені розробці асимптотичних методів інтегрування диференціальних рівнянь та їх систем. Учений досліджував складні випадки внутрішніх і зовнішніх резонансів. Працював над розв'язанням математичної проблеми, пов'язаної з наявністю точок повороту в системах диференціальних рівнянь. М.І. Шкіль – керівник наукової школи «Проблеми наближених методів розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь».

Результати наукової діяльності вченого викладено у понад 350 наукових працях, серед яких 20 підручників з різних розділів вищої математики для студентів педагогічних спеціальностей, а також підручники для 10 і 11 класів середньої школи з алгебри і початків аналізу, які неодноразово перевидавалися.

Упродовж багатьох років Микола Іванович успішно поєднував наукову роботу з педагогічною. Читав курси для студентів фізико-математичного факультету, здійснював наукове керівництво дисертаційних досліджень аспірантів і докторантів, підготував більше ніж 30 кандидатів та 5 докторів наук.

М.І. Шкіль – лауреат численних державних премій за низку підручників та цикли наукових праць, кавалер орденів “За заслуги” I, II, III ступенів та “Ярослава Мудрого” IV і V ступенів. Йому присвоєно почесне звання “Заслужений діяч науки і техніки”.

Був членом редколегій журналів “Нелінійні коливання”, “Вища школа”, “Рідна школа”. За комплект підручників “Вища математика” та “Математичний аналіз” М.І. Шкілю (в складі авторського колективу) 1996 року присуджено Державну премію України в галузі науки і техніки. Премією НАПН України відзначено у співавторстві також підручник “Алгебра і початки аналізу” для 10 класу шкіл і класів з поглибленим вивченням математики.

Автору цього підручника пощастило бути студентом Миколи Івановича Шкіля.



(1932–2015)

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ЗАДАЧ І ВПРАВ

Частина I. АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Розділ 1

1.21. 1) $(-\infty; -5) \cup (-5; 5) \cup (5; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; 4) $(-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$; 5) $[-1; 1] \cup (1; +\infty)$; 6) $[0; 1] \cup (1; +\infty)$; 7) $(0; 5) \cup (5; +\infty)$; 8) $[-1; 0]$.

1.22. 1) $(-\infty; -7) \cup (-7; 7) \cup (7; +\infty)$; 2) $(-3; 3)$; 3) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$; 4) $[-3; 2) \cup (2; +\infty)$; 5) $[0; 2) \cup (2; +\infty)$; 6) $[2; 4]$.

1.25. 1) $f(x) = x + 2$; 2) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

3) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3}$; 4) $f(x) = \sqrt{x-4}$. **1.26.** 1) $[0; +\infty)$;

2) $[-3; +\infty)$; 3) $[4; +\infty)$; 4) $[0; +\infty)$; 5) $[-2; +\infty)$; 6) $[3; +\infty)$.

1.27. 1) $[0; +\infty)$; 2) $[5; +\infty)$; 3) $[-3; +\infty)$. **1.28.** $E(y) = [2; +\infty)$.

1.31. 1) $\{0\}$; 2) $\{0\}$; 3) $[0; 2]$; 4) $(0; 2]$; 5) $[1; +\infty)$; 6) $\left(0; \frac{1}{2}\right]$.

1.32. 1) $\{0\}$; 2) $(0; 6]$; 3) $[3; +\infty)$. **1.35.** 5 фляконів.

2.20. 1) Спадає на $(-\infty; 1]$, зростає на $[1; +\infty)$; 2) зростає на $(-\infty; 2]$, спадає на $[2; +\infty)$. **2.21.** 1) Зростає на $(-\infty; 3]$, спадає на $[3; +\infty)$; 2) спадає на $(-\infty; -4]$, зростає на $[-4; +\infty)$.

2.22. 2) $t = 2$; 3) зростає на $[0; 1]$, спадає на $[1; 2]$; 4) 4 м.

2.23. 1) Ні парна, ні непарна; 2) парна; 3) непарна; 4) ні парна, ні непарна; 5) парна; 6) непарна; 7) ні парна, ні непарна; 8) парна; 9) парна; 10) ні парна, ні непарна; 11) парна; 12) непарна.

2.24. 1) Непарна; 2) ні парна, ні непарна; 3) парна; 4) ні парна, ні непарна; 5) непарна; 6) ні парна, ні непарна; 7) парна; 8) ні парна, ні непарна; 9) парна. **2.25.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так.

2.26. 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) так. **2.28.** 1) Неперервна на проміжках $(-\infty; 1)$ і $(1; +\infty)$; $x = 1$ – точка розриву; 2) неперервна на $(-\infty; +\infty)$. **2.29.** 1) Неперервна на проміжках $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$; $x = 0$ – точка розриву; 2) неперервна на $(-\infty; +\infty)$. **2.30.** Спадає на $(-\infty; -4]$, зростає на $[-4; +\infty)$.

2.31. Спадає на проміжках $(-\infty; 0]$ і $[2; +\infty)$, зростає на проміжку $[0; 2]$. **2.32.** 1) Непарна; 2) ні парна, ні непарна; 3) парна; 4) непарна. **2.33.** 1) Парна; 2) ні парна, ні непарна; 3) непарна; 4) парна. **2.34.** 1) Непарна; 2) парна; 3) непарна; 4) непарна. **2.35.** 1) $a = 5$; 2) $a = 3$. **2.36.** 1) $a = 1$; 2) $a = -3$.

2.37. 11 880 грн.

3.22. 1) 1; 2) -5. **3.23.** 1) 0,05; 2) 4. **3.24.** 1) 40; 2) 162; 3) -352; 4) -12,5. **3.25.** 1) 54; 2) 80; 3) -486; 4) -200.

- 3.26.** 1) $0 \leq x \leq 2$; 2) x – будь-яке число; 3) $x \leq -4$, $x \geq 2$; 4) $x \leq -2$, $x \geq 2$. **3.27.** 1) $x \leq -3$, $x \geq 0$; 2) x – будь-яке число; 3) $-1 \leq x \leq 3$; 4) $-1 \leq x \leq 1$. **3.28.** 1) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$; 2) $x = -2$; 3) $x = \frac{1}{3}$; 4) $x_1 = 3$, $x_2 = 1$; 5) $x = -3$; 6) $x = \sqrt[7]{5} + 3$.

- 3.29.** 1) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$; 2) $x = -3$; 3) \emptyset ; 4) $x = -7$; 5) $x_1 = 6$, $x_2 = 0$; 6) $x = \sqrt[5]{2} - 1$. **3.30.** 1) 1 і 2; 2) -1 і 0; 3) 2 і 3; 4) -2 і -1 . **3.31.** 1,4 м; 1,96 м². **3.32.** 20%. **3.33.** 10%. **3.34.** 1) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$; 2) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$; 3) немає розв'язків; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \sqrt[8]{3}$, $x_4 = -\sqrt[8]{3}$. **3.35.** 1) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$; 2) $x_1 = 1$, $x_2 = -3$; 3) немає розв'язків; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \sqrt[6]{5}$, $x_4 = -\sqrt[6]{5}$. **3.36.** 1) $D(y) = (-3; -1] \cup [5; +\infty)$. **3.37.** $D(y) = [-3; 2)$. **3.38.** 1) Якщо $a \geq -1$, то $x_1 = \sqrt[6]{a+1}$, $x_2 = -\sqrt[6]{a+1}$; якщо $a < -1$, то розв'язків немає; 2) $x = \sqrt[3]{a-2}$ для будь-якого значення a ; 3) якщо $a = 0$, то x – будь-яке число; якщо $a \neq 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = -1$; 4) якщо $a \leq 0$, то розв'язків немає; якщо $a > 0$, то

$$x_1 = \sqrt[10]{\frac{2}{a}}, \quad x_2 = -\sqrt[10]{\frac{2}{a}}.$$

- 3.39.** 10 °C.
4.21. 1) 45; 2) 108; 3) $\frac{5}{9}$; 4) $\frac{2}{27}$. **4.22.** 1) 98; 2) 72; 3) $\frac{5}{16}$; 4) $\frac{48}{125}$. **4.23.** 1) 6; 2) 6; 3) 245; 4) 28. **4.24.** 1) 15; 2) 6; 3) 36; 4) 18. **4.25.** 1) 5; 2) 2; 3) 2; 4) 2. **4.26.** 1) 3; 2) 3. **4.27.** 1) $8a$; 2) $4p^2$; 3) $5a^2b^3$; 4) $\frac{2}{3}p^4x^3$. **4.28.** 1) $5m^2$; 2) $2b$; 3) $4t^2m^5$; 4) $\frac{2}{3}xm^6$.

- 4.29.** 1) $|t+2|$; 2) $(a+1)^2$; 3) $x-1$; 4) $5-b$. **4.30.** 1) $5-\sqrt{2}$; 2) $3-\sqrt{7}$; 3) $3-\sqrt{11}$; 4) 2. **4.31.** 1) $x+2$; 2) $7-c$; 3) $5-\sqrt{2}$; 4) 2. **4.32.** 1) $4a^2\sqrt{2}$; 2) $3p\sqrt[4]{2p^2}$; 3) $-5x\sqrt{2}$; 4) $3c^2\sqrt[3]{2c^2}$; 5) $a^2b\sqrt[6]{ab^2}$; 6) $-2xy\sqrt[4]{2x^2}$. **4.33.** 1) $5a^3\sqrt{3}$; 2) $2p^4\sqrt[4]{3}$; 3) $-2m^3\sqrt[6]{2}$; 4) $5x^3\sqrt{2x}$. **4.34.** 1) $\sqrt[3]{2a^3}$; 2) $\sqrt{3x^2}$; 3) $-\sqrt[4]{7y^4}$; 4) $\sqrt[6]{a^7}$; 5) $-\sqrt[8]{-p^9}$; 6) $-\sqrt[4]{2x^4y^4}$. **4.35.** 1) $\sqrt[5]{3b^5}$; 2) $\sqrt[4]{2m^4}$; 3) $-\sqrt{at^2}$; 4) $\sqrt[6]{c^9}$. **4.36.** 1) $\sqrt{13}+1$; 2) $\frac{2(\sqrt{17}-\sqrt{2})}{3}$; 3) $\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1$; 4) $3(\sqrt[3]{4}-1)$. **4.37.** 1) $\sqrt{11}-2$; 2) $\frac{3(\sqrt{15}+\sqrt{3})}{2}$; 3) $\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}+1$; 4) $2(\sqrt[3]{2}+1)$. **4.38.** 1) $\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}$; 2) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[3]{b}}$. **4.39.** 1) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 2) $\sqrt[5]{m}-\sqrt[4]{n}$. **4.40.** 1) $\sqrt[12]{7}$; 2) $\sqrt[10]{3}$.

3) $\sqrt[3]{2}$; 4) $\sqrt[14]{x^3}$; 5) $\sqrt[12]{x^5}$; 6) $\sqrt[5]{x}$. **4.41.** 1) $\sqrt[15]{2}$; 2) $\sqrt[6]{7}$; 3) $\sqrt[4]{5}$; 4) $\sqrt[15]{m^4}$; 5) $\sqrt[20]{x^7}$; 6) $\sqrt[3]{x}$. **4.42.** 1) $\sqrt[4]{5} < \sqrt[8]{26}$; 2) $\sqrt[6]{3} > \sqrt[18]{26}$. **4.43.** 1) $\sqrt[3]{7} > \sqrt[6]{48}$;

2) $\sqrt[5]{4} < \sqrt[15]{65}$. **4.44.** 1) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y}}$; 3) $\sqrt[3]{a} + 2$;

4) $-(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$. **4.45.** 1) $\sqrt[4]{\frac{m}{n}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt[3]{a} - 3}$. **4.46.** 1) $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$;

2) $\sqrt[8]{10} > \sqrt[5]{3\sqrt[4]{3}}$. **4.47.** 1) $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$; 2) $\sqrt[9]{7} < \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$. **4.48.** 1. **4.49.** 1.

4.50. 1) $18\sqrt[5]{3a}$; 2) $\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}$. **4.51.** 1) $3\sqrt[4]{2p}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt[6]{ab}}$. **4.52.** 2320 грн.

5.20. 1) 16; 2) $\sqrt[4]{0,5}$; 3) -3; 4) -1475. **5.21.** 1) 32; 2) 216;

3) 63,5; 4) 36. **5.22.** 1) $D(y) = [0; +\infty)$; 2) $D(y) = (0; +\infty)$;

3) $D(y) = (2; +\infty)$; 4) $D(y) = (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$. **5.23.** 1) $m \geq 0$;

2) $p > 0$; 3) $a \geq -2$; 4) $0 < x < 4$. **5.24.** 1) x^{-8} ; 2) x^7 . **5.25.** 1) a^{-3} ;

2) a^{-11} . **5.26.** 1) 1; 2) 27; 3) 2; 4) 1; 5) 0,5; 6) 1,2. **5.27.** 1) 1;

2) 4; 3) 9; 4) 1; 5) $\frac{1}{4}$; 6) 1,5. **5.28.** 1) $27b^{-1}$; 2) $\frac{1}{27}x^{-6}$; 3) $\frac{1}{4}t^3$;

4) $0,5a^{-0,3}$. **5.29.** 1) $4m^{-\frac{2}{3}}$; 2) $\frac{1}{2}a$; 3) $0,008b^{-3}$; 4) $1,5c^3$.

5.30. 1) $16 + x$; 2) $4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}$; 3) $4x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}}$; 4) $a - 1$. **5.31.** 1) $4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$;

2) $9a^5 + a$. **5.32.** $2a^{\frac{3}{2}}$; 16. **5.37.** 1) $x^{\frac{1}{2}}$; 2) $\frac{3}{a^{\frac{1}{4}} - 7}$; 3) $a^{0,5} + b^{0,5}$;

4) $\frac{1}{a^{0,5}b^{0,5}}$; 5) $-\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}$; 6) $\frac{x^{0,5}}{2x - y^{0,5}}$. **5.38.** 1) $m^{\frac{1}{3}}$; 2) $\frac{1}{x^{0,5} - y^{0,5}}$; 3) $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$;

4) $\frac{3a^{0,5} - b^{0,5}}{a^{0,5}}$. **5.39.** 1) $3^{\frac{1}{2}} > 5^{\frac{1}{3}}$; 2) $2^{-\frac{1}{6}} > 3^{-\frac{1}{8}}$. **5.40.** 1) $2^{\frac{1}{4}} < 3^{\frac{1}{5}}$;

2) $3^{-\frac{1}{2}} < 4^{-\frac{1}{3}}$. **5.41.** 1) $a + 1$; 2) $\frac{9}{x - 9}$. **5.42.** 1) $x + y$; 2) $\frac{1}{m - 1}$.

5.43. Вказівка. Значення виразу дорівнює $\frac{1}{2}$. **5.44.** Вказівка. Значення виразу дорівнює $\frac{1}{10}$.

5.45. $\frac{ab}{a + b}$; 2,1. **5.46.** На 20 %.

6.12. 1) 28; 2) -1; 3) \emptyset ; 4) 3; -3; 5) 9; -3; 6) 1; -2. **6.13.** 1) 62; 2) 4; 3) 2; -2; 4) -1; 3. **6.14.** 1) $7^{1,2} < 7,2^{1,2}$;

2) $1,8^{-0,4} > 2^{-0,4}$. **6.15.** 1) $3^{\frac{1}{8}} > 2^{\frac{1}{8}}$; 2) $5^{-6} < 4,8^{-6}$. **6.18.** 1) -1; 7;
2) 5; -5. **6.19.** 1) 2; -8; 2) 11; -11. **6.20.** 16. **6.21.** 1.
6.23. 8 шоколадок.

Розділ 2

7.19. 1) -310° ; 770° ; 2) 520° ; -560° . **7.20.** 1) $\beta = 120^\circ$;
2) $\beta = 290^\circ$; 3) $\beta = 70^\circ$; 4) $\beta = 50^\circ$. **7.23.** 1) $\alpha = 450^\circ$;
2) $\alpha = 450^\circ$ і $\alpha = 630^\circ$; 3) $\alpha = 360^\circ$; $\alpha = 540^\circ$ і $\alpha = 720^\circ$;
4) $\alpha = 540^\circ$. **7.24.** 1) $\beta = -90^\circ$; 2) $\beta = 0^\circ$ і $\beta = 360^\circ$. **7.27.** 1) 0,75;

2) -0,5; 3) 0,25; 4) -4. **7.28.** 1) -0,25; 2) 0,5; 3) $\frac{7}{12}$; 4) 2.

7.29. 1) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$; 2) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) -1. **7.30.** 1) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; 2) 1.

7.31. 1) -2; 2) 1. **7.32.** 1) -2; 2) 1. **7.33.** $P_{-\alpha}(a;-b)$; $P_{\alpha+180^\circ}(-a;-b)$.
7.34. 28 упаковок.

8.18. 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{4\pi}{5}$; 5) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $\frac{9\pi}{10}$. **8.19.** $\frac{\pi}{10}$; $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{\pi}{2}$.

8.20. 1) $\frac{\pi}{2} < 1,6$; 2) $\pi > 3\frac{1}{8}$; 3) $-\frac{3\pi}{2} > -5$; 4) $-2\pi < -6$.

8.21. 1) $-\frac{\pi}{2} < -1,5$; 2) $2\pi < 6,3$; 3) $-\pi > -3,2$; 4) $\frac{3\pi}{2} > 4,5$.

8.22. 1) $\frac{3}{4}$; 2) 12,25; 3) 4; 4) 0. **8.23.** 1) 9; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 0; 4) 2.

8.24. 1) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 0; 4; 2) 2; $2\sqrt{3} - 2$. **8.25.** 1) 2; 1,5; 2) $\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1$;

1,5; 1. **8.26.** 1) 8; 2) 16. **8.27.** 1) $\frac{2}{5}$; 2) $-\frac{1}{4}$. **8.28.** 1) $\frac{1}{2}$;

2) 1. **8.29.** 1) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} + \operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} < -2$; 2) $\sin\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{5\pi}{6} > \sqrt[3]{4}$.

8.30. 1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} > 2$; 2) $\cos\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} < -\sqrt[5]{5}$. **8.33.** 2) 31 лип-

ня 1965 р.

9.20. 1) 0; 2; 2) 1; 3; 3) 4; 5; 4) -3; -2. **9.21.** 1) -4; -2;
2) -2; 0; 3) 1; 2; 4) 1; 2. **9.22.** 1) Hi; 2) так. **9.23.** 1) IV; 2) II;

3) III; 4) IV. **9.24.** 1) II; 2) I; 3) III; 4) IV. **9.25.** 1) $-\frac{2}{3}$; 2) 21.

9.26. 1) 4,5; 2) 7. **9.27.** 1) $x \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $x \neq \pi + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

9.28. 1) $x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. **9.29.** 1) $[-7; 1]$;

2) $[-1; 5]$. **9.30.** 1) $[5; 9]$; 2) $[-1; 9]$. **9.31.** 1) Ні парна, ні непарна; 2) непарна. **9.32.** 1) Парна; 2) ні парна, ні непарна.

9.33. 1) 0; 2) $2\cos\beta$; 3) 0; 4) $-3\operatorname{ctg}\beta$. **9.34.** 1) I або III; 2) III або IV; 3) I або IV; 4) II або IV. **9.35.** 1) II або IV; 2) I або IV; 3) III або IV; 4) I або III. **9.36.** 1) $0 \leq b \leq 1$; 2) $b \leq -1$ або $b \geq 1$. **9.37.** 1) $-1 \leq a \leq 1$; 2) $1 \leq a \leq 2$. **9.38.** 14 пачок.

10.22. 1) $\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\frac{2}{\cos x}$; 3) $-2\operatorname{ctg}\beta$; 4) $\frac{1}{\cos\alpha}$; 5) $-\frac{1}{\sin 2x}$;

6) $\cos^2 \frac{x}{4}$. **10.23.** 1) $\operatorname{ctg}\beta$; 2) $\frac{2}{\sin x}$; 3) $-2\operatorname{tg}\alpha$; 4) $-\frac{1}{\sin x}$;

5) $\frac{1}{\cos 2\alpha}$; 6) $\sin^2 \frac{x}{3}$. **10.26.** 1) $\sin^2 2x$; 2) 0. **10.27.** 1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$;

$\cos\alpha = -\frac{4}{5}$; 2) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. **10.28.** 1) $\sin\beta = \frac{5}{13}$;

$\cos\beta = \frac{12}{13}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **10.29.** 1) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$;

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha = -0,2$;

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{26}$; $\sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}} = -\frac{5\sqrt{26}}{26}$. **10.30.** 1) $\sin\beta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$;

$\operatorname{tg}\beta = -2\sqrt{6}$; $\operatorname{ctg}\beta = -\frac{1}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}$; 2) $\operatorname{tg}\beta = 2$; $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$;

$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **10.31.** 1) $\cos 3\alpha - \sin 3\alpha$; 2) $\operatorname{tg}^2 \alpha$.

10.32. 1) $\sin 2\beta + \cos 2\beta$; 2) $\operatorname{ctg}^2 x$. **10.35.** $-0,18$. **10.36.** 24.

10.37. 1) 2; 2) 1,5. **10.38.** -19. **10.39.** Вказівка. 1) Значення виразу дорівнює $\frac{1}{2}$; 2) значення виразу дорівнює 0.

10.40. 1) -3; 4; 2) найбільшого і найменшого значення не існує. **10.41.** [3; 7]. **10.42.** 1) 3780 Вт; 2) $\approx 2,7$ грн.

11.11. 1) $-\sin\alpha$; 2) $\sin\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$; 4) $-\operatorname{tg}\alpha$. **11.12.** 1) $-\sin\alpha$;

2) $\sin\alpha$; 3) $-\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\operatorname{tg}\alpha$. **11.13.** 1) $\sin \frac{\pi}{4}$; 2) $-\cos \frac{\pi}{5}$; 3) $-\operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}$;

4) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}$. **11.14.** 1) $-\sin \frac{\pi}{5}$; 2) $-\cos \frac{\pi}{8}$; 3) $-\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{7}$.

11.15. 1) -2; 2) $-\sqrt{3}$. **11.16.** 1) -1; 2) -1,25. **11.17.** 1) 1; 2) 0; 3) -1; 4) 1. **11.18.** 1) 1; 2) 0; 3) -1; 4) 1. **11.19.** 1) $\sin^2 \alpha$; 2) 1; 3) -1; 4) $\cos^2 \alpha$. **11.20.** 1) $\cos^2 \alpha$; 2) 0. **11.23.** 1) 0,8; 2) 0,8; 3) 0,6 або -0,6; 4) 0,6 або -0,6. **11.24.** 1) -0,6; 2) -0,8.

11.25. $\cos \beta = \frac{5}{13}$; $\sin \beta = \frac{12}{13}$. **11.26.** $\sin \alpha = \frac{8}{17}$; $\cos \alpha = -\frac{15}{17}$.

11.29. 6000 грн.

12.12. 1) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) $y > 0$, якщо $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; $y < 0$, якщо $-\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 3) зростає на проміжках $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{3\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; проміжків спадання немає. **12.13.** 1) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) $y > 0$, якщо $-\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; $y < 0$, якщо $-\frac{3\pi}{4} + \pi k < x < -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 3) проміжків зростання немає; спадає на проміжках $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{3\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. **12.14.** 1) Hi; 2) ні; 3) так; 4) ні.

12.15. 1) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2} + 3\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. **12.16.** 1) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$,

$k \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. **12.17.** 1) $\sin 0,7\pi > \sin 0,8\pi$;

2) $\cos 2 > \cos 3$; 3) $\operatorname{tg}(-2) > \operatorname{tg}(-1)$; 4) $\operatorname{ctg} 1,6 < \operatorname{ctg} 3,5$.

12.18. 1) $\sin 1 > \sin 4$; 2) $\cos(-0,2\pi) < \cos(-0,1\pi)$; 3) $\operatorname{tg} 0,2\pi < \operatorname{tg} 0,3\pi$; 4) $\operatorname{ctg}(-3) > \operatorname{ctg}(-2)$.

12.19. 1) $\left(-\frac{4\pi}{3} + 2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{5\pi}{32} + \frac{\pi k}{2} < x < \frac{13\pi}{32} + \frac{\pi k}{2}$,

$k \in \mathbf{Z}$. **12.20.** 1) $\left(-\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{2}, \frac{4\pi}{9} + \frac{\pi k}{2}\right)$, $k \in \mathbf{Z}$;

2) $\frac{3\pi}{4} + 6\pi k < x < \frac{15\pi}{4} + 6\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. **12.23.** $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

12.24. $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. **12.25.** 1) 0, якщо $x = \frac{3\pi}{4}$ або $x = \frac{7\pi}{4}$; 2,

якщо $x = \frac{\pi}{4}$ або $x = \frac{5\pi}{4}$; 2) 2, якщо $x = 0$ або $x = 2\pi$; 4, якщо

$x = \pi$. **12.27.** 845 грн.

13.23. 1) $\sqrt{2} \sin \alpha$; 2) $\sin \alpha$; 3) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$; 4) $-\operatorname{tg} y$.
13.24. 1) $-\sqrt{3} \cos \alpha$; 2) $\sqrt{3} \cos \alpha$; 3) $-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$; 4) $\operatorname{ctg} y$.

13.27. 1) 1; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **13.28.** 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$. **13.29.** 1) $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$; 2) $-\frac{7\sqrt{2}}{26}$.

13.30. 1) $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$; 2) $\frac{8-15\sqrt{3}}{34}$. **13.31.** 1) 0,6; 2) 0,352.

13.32. 1) 0,6; 2) -0,352. **13.36.** $\frac{21}{220}$. **13.37.** $1\frac{23}{33}$. **13.40.** 1) -1; 1;

2) -2; 2. **13.41.** 1) [-1; 1]; 2) [-2; 2]. **13.42.** 400 K.

14.21. 1) $\frac{1+\cos\left(\frac{\alpha}{2}-60^\circ\right)}{2}$; 2) $\frac{1-\cos(5\alpha+20^\circ)}{2}$; 3) $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$;
4) $\frac{1-\sin\alpha}{2}$. **14.22.** 1) $\frac{1-\cos(\alpha-32^\circ)}{2}$; 2) $\frac{1+\cos\left(\frac{\alpha}{4}-30^\circ\right)}{2}$;
3) $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$; 4) $\frac{1+\sin\alpha}{2}$. **14.23.** 1) $2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 2) $2\sin^2\alpha$; 3) $2\cos^2 5^\circ$;
4) $2\sin^2 7^\circ 30'$; 5) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$; 6) $2\sin^2 35^\circ$. **14.24.** 1) $2\sin^2\frac{x}{2}$;
2) $2\cos^2\frac{\alpha}{4}$; 3) $2\sin^2 10^\circ$; 4) $2\cos^2 12^\circ 30'$; 5) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;
6) $2\cos^2 25^\circ$. **14.25.** 1) 2; 2) $\sin 2x$. **14.26.** 1) $\cos 3\alpha$; 2) $\sin 2x$.
14.27. $-\frac{24}{25}$. **14.28.** 0,96. **14.29.** 1) $\frac{3}{5}$; 2) $-\frac{4}{5}$; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) $-1\frac{1}{3}$.
14.30. 1) $\frac{4}{5}$; 2) $\frac{3}{5}$; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) $\frac{3}{4}$. **14.31.** 1) Так; 2) ні. **14.32.** 1) Hi;
2) так. **14.33.** 1) $\sin 2\alpha$; 2) 4; 3) 2; 4) $\operatorname{tg} \alpha$. **14.34.** 1) 2; 2) $\operatorname{tg} 2x$.
14.37. 0,84. **14.38.** -0,96. **14.40.** 1) $\left|\sin\frac{\alpha}{8}\right|$; 2) $-\operatorname{tg} 2\alpha$.
14.41. 1) $-\cos 2\alpha$; 2) $\left|\operatorname{ctg}\frac{3\alpha}{2}\right|$. **14.42.** $\cos \beta = -0,28$; $\sin \beta = 0,96$.

14.43. 28 грн.

15.15. 1) $\operatorname{tg} 5\alpha$; 2) $-\operatorname{ctg} 5\alpha$. **15.16.** 1) $-\operatorname{tg} \alpha$; 2) $\operatorname{tg} 6\alpha$.
15.18. Вказівка. Використати одну з формул зведення, наприклад, $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ або $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$, та виконати дію із однотипними функціями. **15.22.** 1) $-\frac{1}{\sin 2x}$;

2) $\frac{1}{2 \sin 18^\circ \sin 12^\circ}$. **15.23.** 1) $\frac{\sin 4\alpha}{\sin 3\alpha \sin \alpha}$ або $\frac{4 \cos \alpha \cos 2\alpha}{\sin 3\alpha}$;

2) $\frac{\sqrt{2}}{2 \sin 50^\circ \sin 5^\circ}$. **15.24.** Вказівка. Спочатку понизити степінь. **15.28.** Вказівка. 2), 3) Винести за дужки 2. 4) Винести за дужки 4. **15.35.** 1) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 2) $-\operatorname{ctg} \frac{11\alpha}{2}$. **15.36.** 1) $-\operatorname{ctg} 3\alpha$;

2) $\operatorname{tg} \frac{9\alpha}{2}$. **15.37.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 2. **15.38.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 2. **15.39.** 1) 1;

2) $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\alpha$; 3) $4 \operatorname{ctg} \alpha$; 4) $\sin 2\alpha$. **15.40.** 1) 1; 2) $4 \operatorname{tg} \alpha$.

15.43. 21 480 грн.

16.17. 1) $x \neq -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) $x \neq \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

3) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 4) $x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. **16.18.** 1) $x \neq -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$,

$k \in \mathbf{Z}$; 2) $x \neq \pi + 6\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. **16.19.** 1) $x = 75^\circ + 180^\circ k$, $k \in \mathbf{Z}$;

2) $x = 180^\circ + 720^\circ k$, $k \in \mathbf{Z}$. **16.20.** 1) $x = 50^\circ + 180^\circ k$, $k \in \mathbf{Z}$;

2) $x = 200^\circ + 360^\circ k$, $k \in \mathbf{Z}$. **16.21.** 1) $x = -\frac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

2) $x_1 = 4\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ або $x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. **16.22.** 1) $x = \frac{\pi k}{4}$,

$k \in \mathbf{Z}$; 2) $x = 4\pi + 4\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. **16.23.** 1) $x = \frac{\pi}{2} + 6\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

2) $x = -\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. **16.24.** 1) $\sin x = 0$; 2) $\sin x = -1$;

3) $\cos x = 1$; 4) $\cos x = -1$; 5) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\sin x = \frac{1}{2}$.

16.25. 1) $x = (-1)^k \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{8}$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

3) $x = (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$; 4) $x = \pm \pi + 3\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

16.26. 1) $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

3) $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{32} + \frac{\pi k}{8}$, $k \in \mathbf{Z}$; 4) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

16.27. 1) $x = \pm \sqrt{2\pi k}$, $k = 0; 1; 2; \dots$; 2) $x = \frac{6}{3\pi k - \pi}$, $k \in \mathbf{Z}$.

16.28. 1) $x = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)^2$, $k = 0; 1; 2; \dots$; 2) $x = \frac{12}{\pi + 3\pi k}$, $k \in \mathbf{Z}$.

16.29. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{4\pi}{3}$. **16.30.** 1) -2π ; 2) $-\frac{\pi}{6}$. **16.31.** $x = \frac{11\pi}{16}$; $x = -\frac{5\pi}{16}$.

16.32. 1) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$; $x_1 = -\frac{5\pi}{12}$; $x_2 = \frac{\pi}{12}$; $x_3 = \frac{7\pi}{12}$.

16.33. 1) $-5 \leq a \leq -4$; 2) $a = 1$ і $-2 \leq a \leq 0$. **16.34.** 1060 грн.

Розділ 3

17.13. 1) 12; 2) -20 ; 3) 44; 4) 1. **17.14.** 1) 5; 2) 48; 3) 85;

4) 5. **17.15.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 2; 3) 3; 4) $\frac{1}{6}$. **17.16.** 1) -5 ; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) 12; 4) 2.

17.19. 1) $-4,5$; 2) 0,5. **17.20.** 1) 1,6; 2) 1,5. **17.21.** $\frac{1}{4}$. Вказівка. Домножити чисельник і знаменник дробу на $\sqrt{x+3} + 2$.

17.22. $\frac{1}{6}$. Вказівка. Домножити чисельник і знаменник дробу на $\sqrt{x+9} + 3$. **17.23.** 30 грн.

18.13. 1) $g'(1) = 5$; 2) $g'(-2) = -4$. **18.14.** 1) $f'(-1) = -9$;

$f'(2) = 5$. **18.15.** $\Delta f(x_0) < \Delta g(x_0)$. **18.16.** 1) $3x^2 = x^3$; $x_1 = 0$; $x_2 = 3$;

2) $-\frac{1}{x^2} = -4$; $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2}$. **18.17.** 1) $x^2 = 2x$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$;

2) $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{8}$; $x = 16$. **18.18.** $8x \geq 3x^2$; $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$. **18.19.** $f'(3) = f'(-3)$.

18.20. $g'\left(\frac{1}{4}\right) < g'\left(\frac{1}{9}\right)$. **18.21.** 1) $t'(2) = -2$; **18.22.** 1) $f'(3) = 0$;

2) $f'(6) = \frac{1}{4}$. **18.23.** 1) $f'(x) = -7$; $g'(x) = 3 + 2x$. **18.24.** 1) $f'(x) = 2$;

2) $f'(x) = 2x - 5$. **18.25.** $2x + 3x^2 - 5 > 0$; $x < -1\frac{2}{3}$ або $x > 1$.

18.26. $|2x| = x^2$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$. **18.27.** 300 грн.

19.13. $x_0 = -\frac{1}{2}$. **19.14.** $x_0 = \frac{1}{4}$. **19.15.** $t = 3$ с. **19.16.** $t = 4$ с.

19.17. $x_0 = 2$; $x_0 = -2$. **19.18.** $x_0 = 3$; $x_0 = -3$. **19.19.** $t = \frac{2}{3}$ с.

- 19.20.** $y = \frac{1}{6}x + 1,5$. **19.21.** $y = -2x - 1$. **19.22.** 1) $y = -x - 2$; 3) 2 од². **19.23.** 1) $y = 3x + 2$; 3) $\frac{2}{3}$ од². **19.24.** $(-0,5; -2)$.

19.25. Податок, що сплачує директор, збільшився на 709 грн, а податок, що сплачує менеджер, збільшився на 450 грн.

- 20.25.** 1) $x = \pi k$, $k \in Z$; 2) $x = 3$. **20.26.** 1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; 2) $x = -4$. **20.27.** $x > -2$. **20.28.** $x \leqslant 5$. **20.31.** 18. **20.32.** 10. **20.35.** $g'(2) = -4$; $g'(0) = -4$. **20.36.** $f'(0) = -1$; $f'(-2) = -1$. **20.39.** 1) $-3; -1; 2$ $\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$. **20.40.** 1) $-1; 5; 2$ $\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}$. **20.41.** 1) $t = 5$; 2) $t = 2$. **20.42.** 1) $t = 7$; 2) $t = 4$. **20.43.** $(2; 5)$. **20.44.** $(-3; -15)$. **20.45.** $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$. **20.46.** $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. **20.48.** $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{7}{3}$. **20.49.** $x_1 = 1$; $x_2 = -2$. **20.50.** $y = -2x + 4$. **20.51.** $y = 2x - 3$. **20.52.** $\frac{x^2 - 8x + 12}{(4-x)^2} = 0$; $x_1 = 6$; $x_2 = 2$. **20.53.** $(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$. **20.54.** $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. **20.55.** $\frac{4}{25}$. **20.56.** $-\frac{8}{25}$. **20.57.** $y = 31 - 5x$. **20.58.** $y = 6x - 7$. **20.59.** Розв'язки рівняння $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. **20.60.** Розв'язки рівняння $x_1 = 0$; $x_2 = 3$. **20.61.** $x_0 = \arccos \frac{2}{\pi}$. **20.62.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **20.63.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **20.64.** $y = -\sqrt{3}x$. **20.65.** За 8 годин.

- 21.13.** 1) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; 2) $x_1 = 1$; $x_2 = 3$. **21.14.** 1) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; 2) $x_1 = 1$; $x_2 = -3$. **21.15.** Зростає на $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ і на $[2; +\infty)$, спадає на $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$; 2) зростає на R ; 3) спадає на R ; 4) зростає на $(-\infty; -5]$ і на $[5; +\infty)$, спадає на $[-5; 0]$ і на $(0; 5]$. **21.16.** Зростає на $(-\infty; -1]$ і на $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; спадає на R .

дає на $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$; 2) зростає на R ; 3) спадає на R ; 4) зростає на

$(-\infty; -1]$ і на $[1; +\infty)$, спадає на $[-1; 0)$ і на $(0; 1]$. **21.19.** Зростає на проміжках $(-\infty; -3,5)$ і $(-3,5; +\infty)$; 2) зростає на проміжках $(-\infty; -6]$ і $[2; +\infty)$, спадає на проміжках $[-6; -4)$ і $(-4; 2]$; 3) зростає на $[0; 1]$, спадає на $[1; +\infty)$; 4) зростає на $\left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{13\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$; спадає на $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.

21.20. 1) Спадає на $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ і $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 2) спадає на $(-\infty; 2]$ і $[6; +\infty)$, зростає на $[2; 4)$ і $(4; 6]$; 3) спадає на $[0; 1]$, зростає на $[1; +\infty)$; 4) зростає на $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$; спадає на $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{11\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$. **21.21.** 1) $a = 0$; 2) $a \in [-2; 2]$.

21.22. $a \in [-4; 4]$. **21.25.** 1) Hi; 2) так. **21.26.** 1) Hi; 2) так.

21.27. Наприклад, $x_1 \in [-2; -1]$; $x_2 \in [0; 1]$. **21.28.** 180 годин.

22.11. 1) Немає точок екстремуму; 2) $x_{\max} = -3$; $x_{\min} = 3$; 3) $x_{\min} = -1$; $x_{\max} = 1$; 4) $x_{\max} = 4$. **22.12.** 1) Немає точок екстремуму; 2) $x_{\max} = -6$; $x_{\min} = 6$; 3) $x_{\min} = -2$; $x_{\max} = 2$; 4) $x_{\min} = 1$. **22.13.** 1) $x_{\min} = 0$; $y_{\min} = y(0) = 0$; $x_{\max} = 2$; $y_{\max} = y(2) = 16$; $x_{\min} = 4$; $y_{\min} = y(4) = 0$; 2) $x_{\min} = 2$; $y_{\min} = y(2) = -1$; 3) $x_{\max} = 0$; $y_{\max} = y(0) = \frac{1}{4}$; 4) немає точок екстремуму.

22.14. 1) $x_{\min} = -2$; $y_{\min} = y(-2) = 0$; $x_{\max} = -1$; $y_{\max} = y(-1) = 1$; $x_{\min} = 0$; $y_{\min} = y(0) = 0$; 2) $x_{\max} = -3$; $y_{\max} = y(-3) = -1$; 3) $x_{\max} = 0$; $y_{\max} = y(0) = 0$; 4) немає точок екстремуму. **22.15.** $x_{\max} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; $x_{\min} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$,

$k \in Z$. **22.16.** $x_{\max} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$; $x_{\min} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

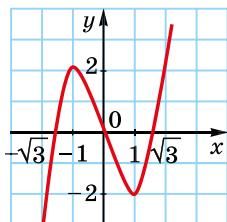
22.17. $x_{\min} = -3$; $y_{\min} = y(-3) = -162$; $x_{\max} = 3$; $y_{\max} = y(3) = 162$.

22.18. $x_{\min} = -1$; $y_{\min} = y(-1) = -2$; $x_{\max} = 1$; $y_{\max} = y(1) = 2$.

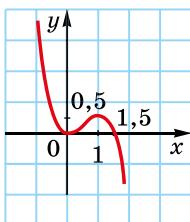
22.19. $a \in [-2; 2]$. **22.20.** 1,25 м.

23.5. 1) Мал. 1; 2) мал. 2; 3) мал. 3; 4) мал. 4. **23.6.** 1) Мал. 5; 2) мал. 6; 3) мал. 7; 4) мал. 8. **23.7.** 2) Один. **23.8.** 2) Три. **23.9.** 1) Мал. 9; 2) $[-5; 3]$. **23.10.** 2) $[-6; 3]$. **23.11.** 1) Мал. 10;

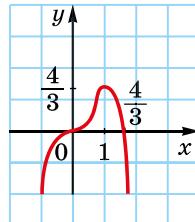
2) мал. 11. 23.12. 1) Мал. 12; 2) мал. 13. 23.13. 2) $(-\infty; 1]$.
23.14. 2) $[-4; +\infty)$. 23.15. 2) Якщо $a < -1$ або $a > 7$, то немає розв'язків; якщо $a = -1$, $a = 0$ або $a = 7$, то один розв'язок; якщо $-1 < a < 0$ або $0 < a < 7$ – два розв'язки.



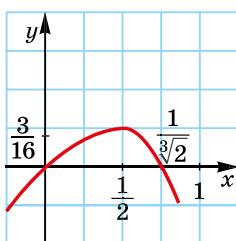
Мал. 1



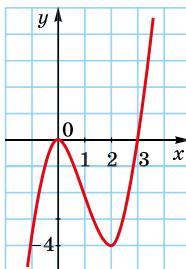
Мал. 2



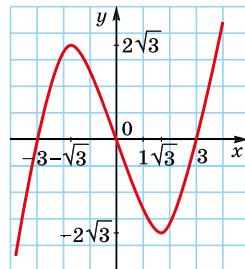
Мал. 3



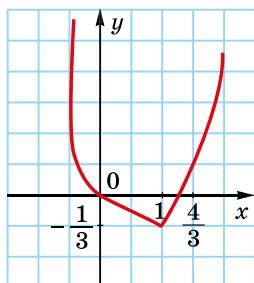
Мал. 4



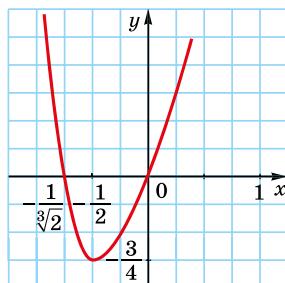
Мал. 5



Мал. 6



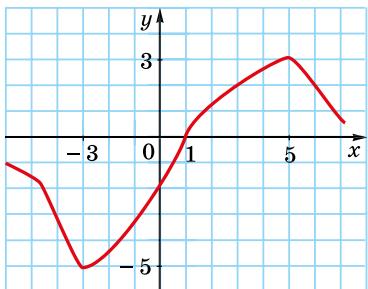
Мал. 7



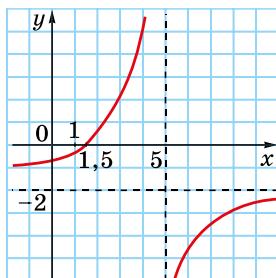
Мал. 8

23.16. 1) $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{9}; +\infty \right)$; 2) ні.

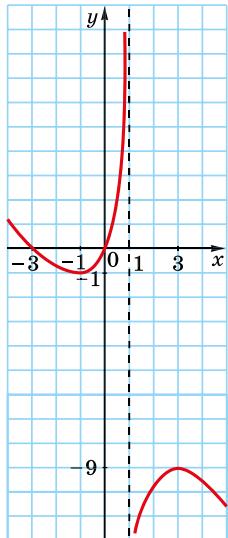
23.17. 2) $[-32; +\infty)$; 3) $a \geq -12$.



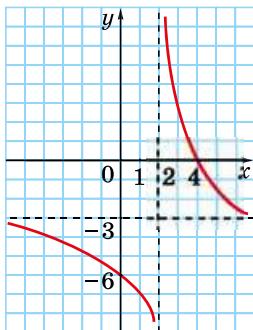
Мал. 9



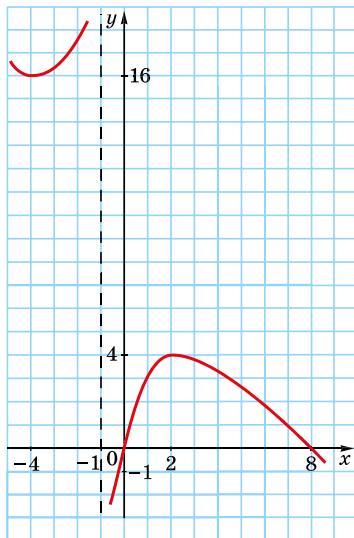
Мал. 10



Мал. 11



Мал. 12



Мал. 13

24.7. $8 + 8$. **24.8.** $5 + 5$.

24.9. 1) $\min_{[-2; 1]} g(x) = g(-2) = -4$; $\max_{[-2; 1]} g(x) = g(0) = 0$;

2) $\min_{[-3; 0]} g(x) = g(-3) = -58$; $\max_{[-3; 0]} g(x) = g(-1) = 18$;

3) $\min_{[-1; 3]} g(x) = g(-1) = g(1) = 4$; $\max_{[-1; 3]} g(x) = g(3) = 68$;

4) $\min_{[-3; 1]} g(x) = g(0) = g(-3) = 1$; $\max_{[-3; 1]} g(x) = g(-2) = g(1) = 5$.

24.10. 1) $\min_{[-1; 2]} f(x) = f(0) = 0$; $\max_{[-1; 2]} f(x) = f(2) = 16$;

2) $\min_{[0; 4]} f(x) = f(0) = 5$; $\max_{[0; 4]} f(x) = f(3) = 59$;

3) $\min_{[-3; 1]} f(x) = f(-3) = -60$; $\max_{[-3; 1]} f(x) = f(1) = f(-1) = 4$;

4) $\min_{[-1; 3]} f(x) = f(2) = f(-1) = 0$; $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(0) = f(3) = 4$.

24.11. $\min_{[0; 4]} x(t) = x(2) = \frac{2}{3}$ (м); $\max_{[0; 4]} x(t) = x(4) = 9\frac{1}{3}$ (м).

24.12. $\min_{[0; 3]} s(t) = s(1) = \frac{1}{3}$ (м); $\max_{[0; 3]} s(t) = s(3) = 11$ (м).

24.13. 18 + 6. **24.14.** 12 + 6. **24.15.** Квадрат зі стороною 4 см.

24.16. Обидва катети по 6 см.

24.17. 1) $\min_{[0; 2]} g(x) = g(1) = -1$; $\max_{[0; 2]} g(x) = g(0) = 0$;

2) $\min_{[0; 4]} g(x) = g(1) = -2$; $\max_{[0; 4]} g(x) = g(4) = 2$.

24.18. $\min_{[2; 4]} f(x) = f(3) = 10$; $\max_{[2; 4]} f(x) = f(2) = 11$.

24.19. $\min_{[3; 8]} v(t) = v(3) = 27$ (м/с), $\max_{[3; 8]} v(t) = v(6) = 36$ (м/с).

Вказівка. Спочатку знайдіть швидкість $v(t) = s'(t)$.

24.20. $\min_{[0; 3]} v(t) = v(3) = -9$ (м/с), $\max_{[0; 3]} v(t) = v(1) = 3$ (м/с).

24.21. 1) $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f(0) = -1$; $\max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$;

2) $\min_{[-\pi; 0]} f(x) = f(-\pi) = 1 - \pi$; $\max_{[-\pi; 0]} f(x) = f(0) = -1$.

24.22. 1) $\min_{[-\pi; 0]} f(x) = f(0) = 0$; $\max_{[-\pi; 0]} f(x) = f(-\pi) = \pi$;

2) $\min_{[0; \pi]} f(x) = f(\pi) = -\pi$; $\max_{[0; \pi]} f(x) = f(0) = 0$.

24.23. Сторона основи 2 м, висота 1 м. **24.24.** 10 см.

24.25. 1200 грн, треба замовити у фірмі В 30 скляних прямокутників на суму 1200 грн, тоді різка буде безкоштовною, та ще й 2 скла залишиться про запас.

Частина II. ГЕОМЕТРІЯ

Розділ 1

1.28. Hi. **1.29.** Hi. **1.31.** 1) $TE \subset ABD$; $TE \subset EDC$; $MN \subset BDC$; $DB \subset ABD$; $DB \subset DBC$; $AB \subset ABC$; $AB \subset ABD$; $EC \subset DEC$; $EC \subset ABC$; 2) $DN \cap ABC = C$; $EC \cap ABD = E$; 3) A , B і E ; 4) EC . **1.32.** 1) C_1 , M і C ; 2) ADC і DCC_1 ; 3) $KM \cap ABC = L$; $BN \cap A_1B_1C_1 = T$; 4) BC . **1.37.** Hi. **1.38.** 1) Вказівка. $KL \cap ABC = P$, де P – точка перетину прямих AD і KL ; 2) якщо $KL \parallel AD$. **1.43.** Вказівка. Нехай P – точка перетину прямих BC і MN ; AP – шукана пряма. **1.44.** Вказівка. Нехай F – точка перетину прямих AD і KL ; CF – шукана пряма.

1.45. 2) Одну. **1.46.** Безліч. **1.47.** Одну або три. **1.48.** Так. **1.49.** Так. **1.50.** Ні. **1.51.** $\approx 88,6$ см.

2.13. $MM_1 = 6$ см. **2.14.** $BB_1 = 14$ см. **2.20.** 2) $KL = 4$ см. **2.21.** 2) $MN = 7$ см. **2.27.** Ні. **2.28.** Так. **2.29.** 9 см. **2.30.** 25 см. **2.33.** 20 см. **2.34.** 6 см. **2.35.** 1) Безліч; 2) жодної; 3) безліч. **2.36.** 7 см. **2.37.** 4 см. **2.38.** 5 см. **2.39.** 6 см. **2.40.** 1) Паралелограм; 2) $(a + b)$ см. **2.41.** 24 м і 42 м.

3.9. 1) Площина або пряма; 2) відрізок або точка; 3) дві паралельні прямі, або одна пряма, або дві точки. **3.10.** 1) Пряма або точка; 2) промінь або точка; 3) два паралельних відрізки, або два відрізки однієї прямої, або один відрізок, або дві точки. **3.11.** 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) ні. **3.12.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) так. **3.22.** Ні. **3.23.** Так; 89° і 91° . **3.37.** 6 м.

4.8. Ні. **4.25.** $a \parallel \alpha$. **4.26.** $a \parallel c$. **4.27.** 14 см. **4.28.** 18 см. **4.30.** 2) $AB = 10$ см; 3) $DMNC$ – трапеція. **4.31.** 2) $TP = 6$ см; 3) $BTPC$ – трапеція. **4.32.** Пряма m перетинає площину α . **4.33.** Пряма d може належати площині β , а може її перетинати. **4.34.** 2) Паралельні; 3) $N \in AB$, $BN : NA = 1 : 3$; 4) 22 см. **4.35.** 2) Паралельні; 3) $H \in AL$, $LH : HA = 1 : 2$; 4) 26 см. **4.38.** Паралельні. **4.39.** 1) Пряма, що проходить через точку L паралельно до прямої AB ; 2) паралельні. **4.40.** 1) Пряма, що проходить через точку M паралельно до прямої AB ; 2) паралельні. **4.41.** 3,375 км.

5.38. $A_2B_2 = 5$ см. **5.39.** 16 см. **5.40.** 12 см. **5.43.** 2) Прямоокутник; 3) 60 см^2 . **5.44.** 2) Паралелограм; 3) $\angle ADC = 50^\circ$. **5.45.** 1) Вказівка. $ML \parallel CB_1$; 2) $5\sqrt{2}$ см. **5.46.** Вказівка. Доведіть, що $AB : AC : BC = A_1B_1 : A_1C_1 : B_1C_1$. **5.47.** 1) 15 см, 15 см, 24 см; 2) 108 см^2 ; 3) Так. $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta A_1B_1C_1} = 1 : 9$. **5.48.** 1) 8 см, 10 см, 6 см; 2) 24 см^2 . **5.49.** 11 рулонів.

Розділ 2

6.20. $\sqrt{34}$ см. **6.21.** $4\sqrt{2}$ см. **6.24.** 1) 13 см; 2) $\sqrt{a^2 + b^2 - 2c^2}$. **6.25.** 1) 15 см; 2) $\sqrt{b^2 - a^2 + c^2}$. **6.26.** $6\sqrt{2}$ см. **6.27.** 16 см. **6.28.** $4a$ см. **6.29.** b см. **6.30.** 2 см; 4 см; 4 см. **6.31.** Всі відстані по 2 см. **6.34.** $AB \perp SAD$. **6.35.** $BC \perp ABD$. **6.37.** 1) Точка O – середина гіпотенузи AB ; 2) 12 см. **6.38.** 1) Точка O – центр трикутника; 2) 2 см. **6.39.** 1) 3 см; 2) 27 см. **6.40.** 9 см. **6.41.** 1) $SA = 2$ см; 2) $12\sqrt{10}$ см 2 . **6.42.** 7 см. **6.43.** 65 см. **6.44.** $\frac{5\sqrt{11}}{6}$ см. **6.45.** 40 см або 26 см. **6.48.** 30 м.

7.12. 15 см. **7.13.** 10 см. **7.14.** 1) 6 см, $2\sqrt{34}$ см, $2\sqrt{34}$ см; 3) 10 см. **7.15.** 1) $2\sqrt{3}$ см, 4 см, 4 см; 3) $\sqrt{15}$ см. **7.16.** $KA = 12$ см;

7.17. $MB = MD = 15$ см. **7.18.** 5 см. **7.19.** $3\sqrt{3}$ см. **7.24.** 10 см. **7.25.** 10 см. **7.26.** 1 см, 5 см, $2\sqrt{6}$ см. **7.27.** 10 см, 14 см, $4\sqrt{6}$ см. **7.28.** $AC = 3\sqrt{3}$ см, $MC = 2\sqrt{7}$ см. **7.29.** Прямоутній; $\angle B = 90^\circ$. **7.31.** Похилі по $2\sqrt{2}$ см, відстань від точки до площини – 2 см. **7.32.** Проекції похилих – по 2 см, відстань від точки до площини – $\sqrt{2}$ см. **7.33.** 6,5 см.

7.34. 12 см. **7.41.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **7.42.** 45° . **7.43.** $\sqrt{5}$ см або $\sqrt{21}$ см.

7.44. $\sqrt{13}$ см або $2\sqrt{17}$ см. **7.45.** 5 см. **7.46.** 6,6 см. **7.47.** 32,5 см. **7.48.** 60 см. **7.49.** По 5 см. **7.50.** 5 см. **7.51.** 4 банки.

8.9. $LD = 4\sqrt{2}$ см, $LC = 4\sqrt{3}$ см. **8.10.** $KC = 5$ см, $KD = \sqrt{34}$ см. **8.11.** 4 см. **8.12.** 6 см. **8.13.** 6 см. **8.14.** 5 см.

8.16. 45° . **8.17.** 30° . **8.20.** 7 см. **8.21.** 7 см. **8.22.** 45° .

8.24. 70° . Вказівка. Кут між прямими не більший за 90° .

8.25. 90° . **8.26.** 6 см. **8.27.** 17 см. **8.30.** 6 см. **8.31.** 16 см.

8.32. $\sqrt{57}$ см. **8.33.** 13 см. **8.34.** 1) По $2a\sqrt{2}$ см; 2) $\frac{3}{4}$.

8.35. 1) $b\sqrt{6}$ см; 2) $\frac{1}{4}$. **8.36.** 45° . **8.37.** 30° . **8.38.** 25 см. **8.39.** \sqrt{S} .

8.40. $\sqrt{m^2 - a^2 - b^2}$, якщо $m^2 > a^2 + b^2$. **8.41.** 42 га.

9.13. 15 см. **9.14.** 5 см. **9.15.** 5 см. **9.16.** 15 см. **9.17.** $\frac{3b\sqrt{2}}{4}$.

9.18. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **9.19.** 7 см і 9 см. **9.20.** 6,5 см і 7,5 см. **9.23.** 5 см.

9.24. 16 см. **9.25.** $243\sqrt{3}$ см². **9.26.** 4 см. **9.27.** 12 см.

9.28. 12 см і 37 см. **9.29.** $10\sqrt{2}$ см; 11 см. **9.32.** 2,6 см.

9.33. 4 см. **9.34.** 24 см. **9.35.** 96 см. **9.36.** Вказівка. Нехай d_1 і d_2 – діагоналі паралелограма, тоді $d_1^2 + d_2^2 = 2(15^2 + 19^2)$; $d_1^2 - 20^2 = d_2^2 - 22^2$. **9.37.** 300.

10.25. $4\sqrt{2}$ см. **10.26.** $4\sqrt{6}$ см. **10.27.** 1) $5\sqrt{3}$ см; 2) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$;

3) $\frac{5\sqrt{3}}{12}$. **10.28.** 1) 8 см; 2) 0,8; 3) $48\sqrt{2}$ см². **10.29.** 60° . **10.30.** 60° .

10.31. До 4-х. **10.32.** 30° . **10.33.** $3\sqrt{3}$ см. **10.34.** $12\sqrt{2}$ см².

10.35. $80\sqrt{3}$ см². **10.36.** $\arcsin \frac{3}{4}$. **10.37.** $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}$. **10.38.** 1) $4\sqrt{6}$ см;

2) $32\sqrt{2}$ см². **10.39.** 1) 3 см; 2) $12\sqrt{2}$ см². **10.40.** 7 см або $\sqrt{129}$ см.

- 10.41.** $\sqrt{19}$ см або 7 см. **10.42.** 45° . **10.43.** 60° . **10.44.** По 45° .
10.45. 45° . **10.46.** 1,5 м.

Розділ 3

- 11.11.** Оси z . **11.12.** B і C . **11.13.** M і K . **11.22.** A .
11.23. $AC = BC$. **11.24.** 3. **11.25.** 7. **11.26.** $(9; 0; 0)$ або $(-7; 0; 0)$.
11.27. $(0; 0; 6)$ або $(0; 0; -6)$. **11.28.** $(0; 2; 0)$. **11.29.** $(1; 0; 0)$.
11.30. $A(-3; 2; 3)$. **11.31.** $C(6; -9; -3)$, $D(5; -6; -5)$. **11.32.** 2) $12\sqrt{5}$.
11.34. $(0; 2; 5)$; $(9; -4; -1)$. **11.35.** Так, A лежить між B і C .
11.36. M між N і K . **11.37.** 1) $(-9; 0; 0)$; $(0; 12; 0)$; $(0; 0; 16)$;
2) 20 ; $\sqrt{337}$; 15. **11.38.** 690,5 м.

12.22. 1) $\overrightarrow{A_1C_1}$; 2) $\overrightarrow{AC_1}$. **12.23.** 1) $\overrightarrow{K_1N_{k_1m_1}}$; 2) $\overrightarrow{M_1N}$.

12.26. $2\bar{n} - 2\bar{m}$. **12.27.** $\frac{1}{2}\bar{c} - \frac{1}{2}\bar{a}$. **12.28.** $\overrightarrow{AC_1}$. **12.29.** \overrightarrow{DC} .

12.30. $|\vec{m}| = 7$. **12.31.** $|\vec{a}| = 3$. **12.32.** $m = 4$; $n = 3$. **12.33.** $a = 7$; $b = 5$.

12.34. $\approx 17,4$ м.

13.33. Вказівка. Доведіть, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. **13.34.** Вказівка.
Доведіть, що $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$. **13.35.** $z = 2$ або $z = -2$. **13.36.** $y = 3$
або $y = -3$. **13.37.** $D(2; 6; -9)$. **13.38.** $K(2; 4; 1)$. **13.39.** $|\vec{c}| = 6\sqrt{3}$.
13.40. $|\vec{a}| = 6$. **13.41.** 1) $m = 6$; $n = -3$; $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{t}$; 2) $m = 0$; $n = 2$;
 $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{d}$. **13.42.** 1) $m = -4$; $n = -2$; $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$; 2) $m = 3$; $n = 0$; $\vec{k} \uparrow\downarrow \vec{e}$.
13.45. $\vec{a}(2; 3; 1)$. **13.46.** $\vec{b}(2; 2; 5)$ або $\vec{b}(-4; -4; -1)$. **13.47.** $x = 4$;
 $y = 6$. **13.48.** $x = 2$; $z = -2$. **13.49.** Вказівка. Розгляньте вектори \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{DC} . **13.50.** Вказівка. Розгляньте, наприклад, вектори \overrightarrow{MN} і \overrightarrow{NP} . **13.51.** $2,23 \text{ м}^2$.

14.13. $m = -7$. **14.14.** $n = 4$. **14.15.** 60° . **14.16.** 120° .
14.17. $\cos A = -\frac{12}{49}$; $\cos B = \cos C = \frac{1}{14}$. **14.18.** 45° . **14.19.** 1) 0° ;
2) 45° ; 3) 180° ; 4) 120° . **14.20.** 1) -3 ; 2) 1 ; 3) -12 ; 4) 17 . **14.21.**
1) 1 ; 2) 0 ; 3) 5 ; 4) -10 . **14.22.** 1), 3), 4), 6) Так; 2), 5) ні.
14.23. 1) 1 ; 2) 7 . **14.24.** 1) 1 ; 2) $\sqrt{79}$. **14.28.** $-0,5$. **14.29.** $-6,5$.
14.30. 1 $200\ 000 \text{ м}^3$.

15.13. 1) $(-1; 3; 2)$; 2) $(1; 3; -2)$. **15.14.** 1) $(-3; 3; 2)$;
2) $(3; -3; 2)$. **15.15.** $x = -2$; $y = -3$; $z = 8$. **15.16.** $x = 2$; $y = -4$;
 $z = -2$. **15.17.** 1) Паралельні; 2) паралельні; 3) перетинаються.
15.18. 1) Паралельні; 2) паралельні; 3) перетинаються.
15.19. 250 обертів.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Частина І. АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

- Алгоритм дослідження функції на екстремум** 202
 - — зростання, спадання 193
 - — та побудови її графіка 207
 - знаходження найбільшого і найменшого значення функції на проміжку 215
 - розв'язування прикладних задач на знаходження найбільшого і найменшого значення величини 217
- Аргумент функції** 6
- Арифметичний корінь n -го степеня** 28
- Арифметичний кубічний корінь** 29
- Арккосинус** 146
- Арккотангенс** 147
- Арксинус** 146
- Арктангенс** 146
- Асимптона** 209
- Від'ємний кут повороту** 68
- Винесення множника з-під знака кореня** 40
- Властивості кореня n -го степеня** 36–39
 - степеневої функції 61
 - степеня з раціональним показником 48
 - тригонометричних функцій 114, 115
- Внесення множника під знак кореня** 40
- Геометричний зміст похідної** 176
- Границя функції в точці** 162
- Графік функції** 10
 - $y = \cos x$ 111
 - $y = \operatorname{ctg} x$ 112
 - $y = \sin x$ 110
 - $y = \operatorname{tg} x$ 111
 - $y = x^n$ 27
 - $y = x^\alpha$ 57–60
- Графічний спосіб задання функції** 9
- Диференціювання функції** 169
- Додатний кут повороту** 68
- Достатня умова існування екстремуму** 201
- Дотична до графіка функції** 176
- Екстремуми функції** 200
- Знаки тригонометричних функцій по четвертях** 87
- Зростання функції** 16
- Корінь n -го степеня** 28
 - непарного степеня 30
- Косинус кута** 70, 71
- Косинусоїда** 111
- Котангенс кута** 70, 71
- Котангенсоїда** 113
- Критичні точки функції** 192
- Кут повороту** 68
- Кутовий коефіцієнт дотичної** 176
- Локальний екстремум** 200
- Максимум функції** 199
- Миттєва швидкість руху** 175
- Мінімум функції** 200
- Множина значень функції** 7
 - тригонометричної функції 85, 87
- Монотонність функції** 17
- Найбільше значення функції** 214
- Найменше значення функції** 214
- Найменший додатний період** 109
 - тригонометричної функції 109, 110, 115
- Найпростіші тригонометричні рівняння** 148–153

- Неперервна функція** 19, 160
- Обернені тригонометричні функції** 145–147
- Область визначення функції** 6
- – тригонометричної функції 84
- Однічне коло** 71
- Ознака зростання, спадання функції** 191
- – сталої функції 191
- Окіл точки** 199
- Основна тригонометрична тоджність** 94
- Основні спiввiдношення мiж тригонометричними функцiями одного аргументу** 94–96
- Перiодичнiсть тригонометричних функцiй** 89
- функцiї 109
- Пiдкореневий вираз** 29
- Побудова графiкiв тригонометричних функцiй за допомогою перетворень** 116
- Показник кореня** 29
- Похiдна функцiї в точцi** 168
- Початковий радiус** 68
- Правила диференцiювання** 181
- обчислення границi функцiї в точцi 162
- Правило для запам'ятовування формул зведення** 103
- Прирiст аргументу** 167
- функцiї 168
- Промiжок зростання функцiї** 16, 190
- монотонностi функцiї 16, 190
 - спадання функцiї 16, 190
- Радiанна мiра кутa** 77
- Радикал** 29
- Рiвняння дотичної до графiка функцiї** 177
- $\cos t = a$ 148
 - $\operatorname{ctg} t = a$ 153
 - $\sin t = a$ 150
 - $\operatorname{tg} t = a$ 152
 - $x^n = a$ 30
 - $x^\alpha = a$ 60

- Середня швидкiсть руху** 174
- Симетрiя областi визначення вiдносно нуля** 18
- Синус кутa** 70, 71
- Синусоїда** 111
- Сiчна до графiка функцiї** 175
- Словесне задання функцiї** 10
- Спадання функцiї** 16
- Способи задання функцiї** 8
- Степенева функцiя** 57
- – з натуральним показником 26
- Степiнь iз рацiональним показником** 46
- Табличний спосiб задання функцiї** 9
- Таблиця похiдних** 185
- Тангенс кутa** 70, 71
- Тангенсоїда** 112
- Теорема про корiнь n -го степеня з добутку** 36
- – – – з дробу 37
 - – – – iз степеня 38
 - Ферма 200
- Тоджнi перетворення виразiв, що мiстять арифметичний корiнь n -го степеня** 40
- Точка екстремуму** 200
- максимуму 199
 - мiнimumu 200
 - розриву 20
- Тригонометричнi формули додавання** 121–123
- функцiї кутa 70, 71
 - – числового аргументу 79
- Фiзичний змiст похiдної** 175
- Формула косинуса подвiйного кутa** 129
- – рiзницi 121
 - – суми 121
 - рiзницi косинусiв 138
 - – синусiв 138
 - – тангенсiв 138
 - синуса подвiйного кутa 129
 - – рiзницi 122
 - – суми 122
 - суми косинусiв 138
 - – синусiв 138

- тангенсів 138
- тангенса подвійного кута 129
- різниці 123
- суми 123
- Формули зведення 102**
- перетворення добутку тригонометричних функцій в суму 140

- половинного кута 131, 132
- пониження степеня 130, 131
- Функція непарна 18**
- ні парна, ні непарна 19
- парна 18
- , що задана формулою 8

Числова функція 6

Частина II. ГЕОМЕТРІЯ

Абсолютна величина вектора 333

Абсциса точки 324

Аксіома 225

- паралельності прямих 226

Аксіоми планіметрії 225

- стереометрії 226, 227

Апліката точки 325

Вектор 332

Взаємне розміщення двох площин 268

- — — прямих у просторі 237

- — прямої і площини 259

Відстань від прямої до площини 306

- — точки до площини 288, 306

- — — прямої 305

- між двома точками 326

- між площинами 307

Вісь абсцис 324

- аплікат 324

- ординат 324

Властивості паралельного проектування 249, 250

- паралельних площин 270

- перпендикуляра і похилої 288, 289

- прямої і площини, перпендикулярних між собою 281

Геометричні тіла 224

Градусна міра двогранного кута 298

Грані двогранного кута 298

Двограний кут 298

Добуток вектора на число 336, 344

Зображення плоских фігур 250

Колінеарні вектори 333

Координати вектора 342

- середина відрізка 326

- точки 324

Координатні осі 324

- площини 324

Кут між векторами 350

- мимобіжними прямими 312

- площинами 314

- прямими,
що перетинаються 312

- прямою і площею 313

Лінійний кут двогранного кута 298

Мимобіжні прямі 237

Модуль вектора 333, 342

Неозначувані поняття 224

Нульовий вектор 332

Ознака колінеарності векторів 344

- мимобіжності прямих 241

- паралельності площин 268

- прямих 239

- прямої і площини 260

- перпендикулярності площин 299

- прямої і площини 279

Ордината точки 325

Ортогональна проекція фігури 315

Ортогональне проектування 315

Оси координат 324

- Основа перпендикуляра 288
 – похилої 288
- П**аралельна проекція точки 248
 Паралельне проектування 248
 Паралельні відрізки 241
 – промені 241
 – пряма і площа 259
 – прямі 237
 Паралельність площин 268
 Переставна властивість додавання векторів 334
 – – скалярного добутку векторів 350
 Перпендикуляр 288
 Перпендикулярні площини 299
 – прямі 278, 313
 Півплоща 298
 Плоскі фігури 224
 Площа 221
 – проекції 248
 Побудова перпендикулярних прямих і площин 280
 Похила 288
 Початок координат 324
 Правило многокутника 335
 – паралелограма 334
 – трикутника 334
 Проектуюча пряма 248
 Проекція похилої 288
 – прямої на площину 313
 Протилежно напрямлені вектори 333
 Просторові фігури 224
 Пряма 224
 – перпендикулярна до площини 279
 Прямокутна система координат у просторі 324
- Р**ебро двогранного кута 298
 Рівні вектори 333
 Різниця векторів 336, 343
 Розподільна властивість скалярного добутку 350
- С**иметрія відносно площини 356
 – – точки 355
 Скалярний добуток векторів 350
 – – квадрат вектора 350
 Співнапрямлені вектори 333
 Сполучна властивість додавання векторів 334
 – – скалярного добутку векторів 350
 Стереометрія 224
 Сума векторів 334, 343
- Т**еорема, обернена до ознаки паралельності прямої і площини 260
 – про існування і єдиність площини, що проходить через дві прямі, які перетинаються 228
 – – – – – , – – – пряму і точку, що не лежать на ній 227
 – – – площини, паралельної даній 269
 – – – прямої, паралельної даний 238
 – – перетин площини паралельними прямими 239
 – – площа ортогональної проекції 315
 – – три перпендикуляри 290
 – – скалярний добуток векторів 351

ЗМІСТ

<i>Шановні десятикласниці та десятикласники!</i>	3
<i>Шановні вчительки та вчителі!</i>	4

Частина I. АЛГЕБРА

Розділ 1. ФУНКЦІЇ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ

§ 1. Числова функція. Графік функції	6
§ 2. Монотонність і неперервність функції.	
Парні та непарні функції	16
§ 3. Корінь n -го степеня. Арифметичний корінь n -го степеня	26
§ 4. Властивості арифметичного кореня n -го степеня	36
§ 5. Степінь з раціональним показником і його властивості	46
§ 6. Степеневі функції, їх властивості та графіки	57

Розділ 2. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

§ 7. Синус, косинус, тангенс і котангенс кута	68
§ 8. Радіанне вимірювання кутів.	
Тригонометричні функції числового аргументу	77
§ 9. Властивості тригонометричних функцій	84
§ 10. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу	94
§ 11. Формули зведення	102
§ 12. Періодичність функцій. Властивості та графіки тригонометричних функцій	109
§ 13. Тригонометричні формули додавання	121
§ 14. Формули подвійного і половинного кута. Формули пониження степеня	129
§ 15. Формули суми й різниці однайменних тригонометричних функцій. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму	137
§ 16. Найпростіші тригонометричні рівняння	145

Розділ 3. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

§ 17. Границя функції в точці	160
§ 18. Похідна функції. Похідні найпростіших функцій	167
§ 19. Фізичний і геометричний зміст похідної	174
§ 20. Правила диференціювання. Таблиця похідних	180
§ 21. Ознаки сталості, зростання та спадання функції	190
§ 22. Екстремуми функції	199

§ 23. Застосування похідної до дослідження функцій	
і побудови їхніх графіків	207
§ 24. Найбільше і найменше значення функції	
на проміжку	214
Завдання для перевірки знань за курс алгебри	
10 класу	222

Частина II. ГЕОМЕТРІЯ

Розділ 1. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРИ

§ 1. Основні поняття, аксіоми стереометрії	
та найпростіші наслідки з них	224
§ 2. Взаємне розміщення прямих у просторі	
.....	237
§ 3. Паралельне проектування, його властивості.	
Зображення фігур у стереометрії	248
§ 4. Паралельність прямої і площини	
.....	259
§ 5. Паралельність площин	
.....	268

Розділ 2. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРИ

§ 6. Перпендикулярність прямих у просторі.	
Перпендикулярність прямої і площини	278
§ 7. Перпендикуляр і похила.	
Теорема про три перпендикуляри	288
§ 8. Двогранний кут. Перпендикулярність площин	
.....	298
§ 9. Відстані у просторі	
.....	305
§ 10. Вимірювання кутів у просторі. Ортогональне	
проектування	312

Розділ 3. КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ У ПРОСТОРИ

§ 11. Прямокутна система координат у просторі	
.....	324
§ 12. Вектори у просторі. Дії з векторами	
.....	332
§ 13. Координати вектора. Дії над векторами,	
які задано координатами	341
§ 14. Скалярний добуток векторів	
.....	349
§ 15. Симетрія відносно точки та симетрія	
відносно площини	355
Завдання для перевірки знань за курс геометрії	
10 класу	359

Відповіді та вказівки до задач і вправ 361

Предметний покажчик 378

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

МАТЕМАТИКА

(алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту)

Підручник для 10 класу
закладів загальної середньої освіти

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Головний редактор *Наталія Заблоцька*

Редактор *Оксана Єргіна*

Обкладинка і художнє оформлення *Тетяни Кущ*
Комп'ютерна верстка і технічні малюнки *Юрія Лебедєва*
Коректор *Лариса Леуська*

Формат 60×90/₁₆.
Ум. друк. арк. 24,0. Обл.-вид. арк. 23,80.
Тираж 97543 пр. Вид. № 1155.
Зам. №

Видавництво «Генеза»,
вул. Тимошенка, 2-л, м. Київ, 04212.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 5088 від 27.04.2016.

Віддруковано у ТОВ «ПЕТ»,
вул. Ольмінського, 17, м. Харків, 61024.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 4526 від 18.04.2013.