Questão 1. Resolva o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2y + 2z & = 8 \\ x + 2y + z & = 9 \\ x + y + z & = 6 \end{cases} \tag{1}$$

Questão 2. Resolva o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ x + 10z & = -48 \\ 10y + z & = 25 \end{cases} \tag{2}$$

Questão 3. Resolva o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Questão 4. Calcule o valor de λ para o qual o problema

$$\begin{cases} 71x + 41y = 10 \\ \lambda x + 30y = 4 \end{cases} \tag{4}$$

é impossível, depois calcule os números de condicionamento com norma ∞ quando $\lambda = 51$ e $\lambda = 52$.

Questão 5. Calcule o número de condicionamento da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 1 & -2 & 4 \\ -8 & 1 & -7 \end{bmatrix} \tag{5}$$

na norma ∞.

Questão 6. Calcule o número de condicionamento das matrizes

$$\begin{bmatrix} 71 & 41 \\ 52 & 30 \end{bmatrix} \tag{6}$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix} \tag{7}$$

usando a norma ∞.

Questão 7. Considere os sistemas:

$$\begin{cases} 100000x & - & 9999.99y & = & -10 \\ -9999.99x & + & 1000.1y & = & 1 \end{cases} \tag{8}$$

e

$$\begin{cases} 100000x & - & 9999.99y & = & -9.999 \\ -9999.99x & + & 1000.1y & = & 1.01 \end{cases} \tag{9}$$

Encontre a solução de cada um e discuta.

Questão 8. Um circuito linear pode ser modelado pelo sistema dado a seguir.

$$\begin{aligned} V_1 &= V & (10)\\ \frac{V_1 - V_2}{R_1} + \frac{V_3 - V_2}{R_2} - \frac{V_2}{R_5} &= 0 & (11)\\ \frac{V_2 - V_3}{R_2} + \frac{V_4 - V_3}{R_3} - \frac{V_3}{R_6} &= 0 & (12)\\ \frac{V_3 - V_4}{R_3} + \frac{V_5 - V_4}{R_4} - \frac{V_4}{R_7} &= 0 & (13)\\ \frac{V_4 - V_5}{R_4} - \frac{V_5}{R_8} &= 0 & (14) \end{aligned}$$

Escreva esse sistema na forma matricial sendo as tensões V_1, V_2, V_3, V_4 e V_5 as cinco incógnitas. Resolva esse problema quando $V = 127$ e

a) $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2$ e $R_5 = R_6 = R_7 = 100$ e $R_8 = 50$

b) $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2$ e $R_5 = 50$ e $R_6 = R_7 = R_8 = 100$

Questão 9. Resolva o seguinte sistema pelo método de Jacobi e Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 &= 50\\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= 10\\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= -30 \end{cases} \qquad (15)$$

Use como critério de paragem tolerância inferior a 10^{-3} e inicialize com $x^0 = y^0 = z^0 = 0$.

Questão 10. Considere o problema de 5 incógnitas e cinco equações dado por

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 & (16)\\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 & (17)\\ -x_2 + (2+\varepsilon)x_3 - x_4 &= 1 & (18)\\ -x_3 + 2x_4 - x_5 &= 1 & (19)\\ x_4 - x_5 &= 1 & (20) \end{aligned}$$

a) Escreva na forma $Ax = b$ e resolva usando eliminação gaussiana para $\varepsilon = 10^{-3}$.

b) Obtenha o vetor incógnita x com $\varepsilon = 10^{-3}$ usando Jacobi com tolerância 10^{-2}.

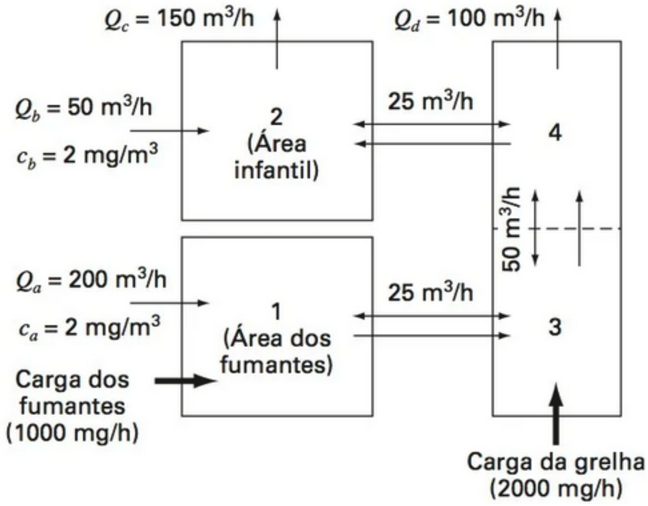
c) Obtenha o vetor incógnita x com $\varepsilon = 10^{-3}$ usando Gauss-Seidel com tolerância 10^{-2}.

d) Compare os três resultados.

Questão 11. Resolva o sistema abaixo pelos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 27\\ 4x_1 + x_3 = 6\\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases} \qquad (21)$$

Questão 12. Como o nome sugere, a poluição do ar de interiores refere-se à contaminação do ar em ambientes fechados, como casas, escritórios, áreas de serviço, etc. Suponha que você esteja projetando um sistema de ventilação para um restaurante como mostrado na figura abaixo:



As áreas de servir do restaurante consistem em duas salas quadradas e uma sala alongada. As salas 1 e 3 têm fontes de monóxindo de carbono da área dos fumantes e de uma grelha defeituosa, respectivamente. O balanço de massa no estado estacionário pode ser escrito para cada área. Por exemplo, para a área dos fumantes (sala 1), o balanço pode ser escrito como

$$W_{\text{fumantes}} + Q_a c_a - Q_a c_1 + E_{13}(c_3 - c_1) = 0 \quad (22)$$

$$(\text{carga}) + (\text{entrada}) - (\text{saída}) + (\text{mistura}) = 0 \quad (23)$$

ou, substituindo os parâmetros,

$$225c_1 - 25c_3 = 2400$$

Balanços semelhantes podem ser escritos para as outras áreas.

a) Monte o sistema de equações que modela o problema;

b) Determine a concentração no estado estaciánario do monóxido de carbono em cada sala, usando eliminação Gaussiana, decomposição LU e método iterativo de Gauss-Seidel;

c) Se a carga dos fumantes e da grelha for aumentada para 2000 e 5000 mg/h, respectivamente, use a matriz inversa para determinar o crescimento da concentração na área das crianças.

Gabarito

Questão 1. $x = 2$, $y = 3$ e $z = 1$.

Questão 2. $x = 2$, $y = 3$, $z = -5$

Questão 3. $x = [1, 2, -1, 0, 1]$.

Questão 4. $\lambda = \frac{71\times30}{41} \approx 51.95122$, para $\lambda = 51$: $k_\infty = 350.4$. Para $\lambda = 52$: $k_\infty = 6888$.

Questão 5. $K_\infty(A) = 20.8$

Questão 6. $k_\infty = 6888$ e $k_\infty = 210$

Questão 7. As soluções são $[-0.0000990 \quad 0.0000098]^T$ e $[0.0098029 \quad 0.0990294]^T$. A grande variação na solução em função de pequena variação nos dados é devido ao mau condicionamento da matriz ($k_1 \approx 1186274.3$).

Questão 8. a) $V_1 = 127$, $V_2 = 116.5171139$, $V_3 = 108.36457008$, $V_4 = 102.37931767$, $V_5 = 98.4416516$, b) $V_1 = 127$, $V_2 = 115.99140647$, $V_3 = 109.6224692$, $V_4 = 105.44598131$, $V_5 = 103.37841305$.

Questão 9. $x_1 = 10$, $x_2 = 5$, $x_3 = -5$.

Questão 10. $x_1 = 6.24756433$, $x_2 = 5.24756433$, $x_3 = 3.24756433$, $x_4 = 0.25081189$, $x_5 = -0.74918811$.

Questão 11. Permute as linhas 1 e 2. $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 2$.