Questão 1. Calcule numericamente as seguintes integrais:

a) $\int_0^1 e^{-x}\, dx$

b) $\int_0^1 x^2\, dx$

c) $\int_0^1 x^3\, dx$

d) $\int_0^1 xe^{-x^2}\, dx$

e) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, dx$

f) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx$

usando os métodos simples do Trapézio e Simpson. Calcule, também, o valor analítico destas integrais e o erro nas aproximações dadas pelas quadraturas numéricas.

Questão 2. Dê a interpretação geométrica dos métodos trapézio e Simpson. A partir desta construção geométrica, deduza as fórmulas para aproximar

$$\int_a^b f(x)\, dx. \tag{1}$$

Verifique que o método de Simpson pode ser entendido como uma média aritmética ponderada entre os métodos de trapézio e ponto médio. Encontre os pesos envolvidos. Explique o que são os métodos compostos.

Questão 3. Calcule numericamente o valor de $\int_2^5 e^{4-x^2}\, dx$ usando os métodos compostos do trapézio e Simpson. Obtenha os resultados utilizando, em cada quadratura, o número de pontos indicado.

n	Trapézios	Simpson
3		
5		
7		
9		

Questão 4. Use as rotinas computacionais para calcular numericamente o valor das seguintes integrais usando o método composto dos trapézios para os seguintes números de pontos:

n	$\int_0^1 e^{-4x^2}\, dx$	$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$	$\int_0^1 x^4(1-x)^4\, dx$	$\int_0^1 e^{-\frac{1}{x^2+1}}\, dx$
17				
33				
65				
129				
257				
513				
1025				

Questão 5. O valor exato da integral imprópria $\int_0^1 x\ln(x)\, dx$ é dado por

$$\int_0^1 x\ln(x)\, dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^1 = -1/4. \tag{2}$$

Aproxime o valor desta integral usando a regra de Simpson para $n = 3$, $n = 5$ e $n = 7$. Como você avalia a qualidade do resultado obtido? Por que isso acontece.

Questão 6. O valor exato da integral imprópria $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ é dado por $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Escreva esta integral como

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_0^1 u^{-2}e^{-1/u^2}du = \int_0^1 \left(e^{-x^2} + x^{-2}e^{-1/x^2}\right)\,dx \tag{3}$$

e aproxime seu valor usando o esquema de trapézios e Simpson para $n = 5$, $n = 7$ e $n = 9$.

Questão 7. Estamos interessados em avaliar numericamente a seguinte integral:

$$\int_0^1 \ln(x)\sin(x)\,dx \tag{4}$$

cujo valor com 10 casas decimais corretas é $-.2398117420$.

a) Aproxime esta integral com $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$ e $n = 7$.

b) Use a identidade

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(x)\sin(x)\,dx &= \int_0^1 \ln(x)x\,dx + \int_0^1 \ln(x)\left[\sin(x) - x\right]\,dx && (5)\\
&= \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \ln(x)\left[\sin(x) - x\right]\,dx && (6)\\
&= -\frac{1}{4} + \int_0^1 \ln(x)\left[\sin(x) - x\right]\,dx && (7)
\end{aligned}$$

e aproxime a integral $\int_0^1 \ln(x)\left[\sin(x) - x\right]\,dx$ numericamente com $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$ e $n = 7$.

c) Compare os resultados e discuta levando em consideração as respostas às seguintes perguntas: 1)Qual função é mais bem-comportada na origem? 2)Na segunda formulação, qual porção da solução foi obtida analiticamente e, portanto, sem erro de truncamento?

Questão 8. Encontre aproximações para a integral

$$\int_{-1}^1 x^4 e^{x^5} dx \tag{8}$$

Então, compare com o seu valor exato.

Questão 9. Considere o problema de calcular numericamente a integral $I = \int_{-1}^1 f(x)dx$ quando

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{|x|}}$$

.

a) O que acontece quando se aplica diretamente a quadratura gaussiana com um número impar de abscissas?

b) Calcule o valor aproximado por quadratura gaussiana com $n = 2$, $n = 4$, $n = 6$ e $n = 8$.

c) Calcule o valor aproximado da integral removendo a singularidade

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{|x|}}dx = \int_{-1}^1 \frac{\cos(x) - 1}{\sqrt{|x|}}dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx && (9)\\
&= \int_{-1}^1 \frac{\cos(x) - 1}{\sqrt{|x|}}dx + 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_{-1}^1 \frac{\cos(x) - 1}{\sqrt{|x|}}dx + 4 && (10)
\end{aligned}$$

e aplicando quadratura gaussiana com $n = 2$, $n = 4$, $n = 6$ e $n = 8$.

d) Calcule o valor aproximado da integral removendo a singularidade, considerando a paridade da função

$$I = 4 + \int_{-1}^1 \frac{\cos(x) - 1}{\sqrt{|x|}}dx = 4 + 2\int_0^1 \frac{\cos(x) - 1}{\sqrt{x}}dx = 4 + \sqrt{2}\int_{-1}^1 \frac{\cos\left(\frac{1+u}{2}\right) - 1}{\sqrt{1+u}}du \tag{11}$$

e aplicando quadratura gaussiana com $n = 2$, $n = 4$, $n = 6$ e $n = 8$.

e) Expandindo a função $\cos(x)$ em série de Taylor, truncando a série depois do n-ésimo termos não nulo e integrando analiticamente.

f) Aproximando a função $\cos(x)$ pelo polinômio de Taylor de grau 4 dado por

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \tag{12}$$

e escrevendo

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} \frac{\cos(x)}{\sqrt{|x|}} dx = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(x) - P_4(x)}{\sqrt{|x|}} dx + \int_{-1}^{1} \frac{P_4(x)}{\sqrt{|x|}} dx && (13) \\ &= \underbrace{2\int_{0}^{1} \frac{\cos(x) - P_4(x)}{\sqrt{x}} dx}_{\text{Resolver numericamente}} + \underbrace{2\int_{0}^{1} \left(x^{-1/2} - \frac{x^{3/2}}{2} + \frac{x^{7/2}}{24} \right) dx}_{\text{Resolver analiticamente}} && (14) \end{aligned}$$

Questão 10. Resolva a equação

$$x + \int_{0}^{x} e^{-y^2} dy = 5 \tag{15}$$

com 5 dígitos significativos.

Gabarito

Questão 2. $I_{Simpson} = \frac{1}{3}I_{Trap} + \frac{2}{3}I_{PM}$

Questão 3.

n	Trapézios	Simpson
3	0.7503919	0.5005225
5	0.3964724	0.2784992
7	0.3062023	0.2393551
9	0.2721145	0.2306618

(16)

Questão 5. $-0.2310491, -0.2452073, -0.2478649.$

Questão 7.

a) -0.2472261, -0.2416451, -0.2404596, -0.2400968, -0.2399563, -0.2398928.

b) -0.2393727, -0.2397994, -0.2398104, -0.2398115, -0.2398117, -0.2398117.

Questão 8.

n		Exato	Erro Absoluto
2	0,2227	0,4701	$2,47e-01$
3	0,4157		$5,44e-02$
4	0,4437		$2,64e-02$
5	0,4616		$8,47e-03$

Questão 9.

n	b	c	d	e	f
2	2.205508	3.5733599	3.6191866	3.6185185	3.618146
4	2.5973554	3.6107456	3.6181465	3.6180970	3.6180970
6	2.7732372	3.6153069	3.6181044	3.6180970	3.6180970
8	2.880694	3.6166953	3.6180989	3.6180970	3.6180970

Solução do item e: Como

$$\cos(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{17}$$

temos

$$\frac{1-\cos(x)}{\sqrt{x}} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1/2}}{(2n)!}, \quad x \geq 0 \tag{18}$$

Logo, podemos integrar

$$\begin{aligned} I &= 4 + 2\int_0^1 \frac{\cos(x)-1}{\sqrt{|x|}}dx = 4 - 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n-1/2}}{(2n)!}dx & (19) \\ &= 4 - 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!(2n+1/2)} & (20) \end{aligned}$$

Solução do item f)

$$2\int_0^1 \left(x^{-1/2} - \frac{x^{3/2}}{2} + \frac{x^{7/2}}{24}\right)dx = 2\left(2 - \frac{1}{5} + \frac{1}{54}\right) = \frac{977}{270} \tag{21}$$

$$2\int_0^1 \frac{\cos(x) - P_4(x)}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{2}\int_{-1}^1 \frac{\cos\left(\frac{1+u}{2}\right) - P_4\left(\frac{1+u}{2}\right)}{\sqrt{1+u}}du \tag{22}$$

Questão 10. $4,1138$