

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математико-механический факультет

Рябов В.М., Лебедева А.В., Пакулина А.Н.

# Обратные и некорректно поставленные задачи

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2022

Рецензенты:

докт. физ.-мат. наук, проф. Ю.К. Демьянович (С.-Петербургский гос. ун-т),

докт. физ.-мат. наук, проф. В.Б. Хазанов (С.-Петербургский гос. морской техн. ун-т).

*Рекомендовано к печати*

*Учебно-методической комиссией математико-механического факультета по УГСН*

*01.00.00 Математика и механика.*

*Протокол ?????????????*

Рябов В.М., Лебедева А.В., Пакулина А.Н.

Обратные и некорректно поставленные задачи. СПб., СПбГУ, 2022. – 34 с.

В учебно-методическом пособии рассматривается такая важная сторона численных методов, как устойчивость различных стандартных алгоритмов, изучаемых в курсах методов вычислений. Эти алгоритмы связаны с решением систем линейных алгебраических уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений и интегральных уравнений первого рода, в том числе задачей обращения интегрального преобразования Лапласа. Наличие ссылок делает удобной навигацию по всем рассматриваемым разделам. Пособие предназначено для обучающихся по специальности «Прикладная математика» и может представлять интерес для специалистов в области естественных наук, где требуется применение численных методов.

©Санкт-Петербургский государственный университет, 2022

# Содержание

|   |    |
|---|----|
| Предисловие   | 4  |
| 1. Примеры неустойчивых задач   | 4  |
| 2. Устойчивость решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка | 11 |
| 2.1. Постановка задачи  | 11 |
| 2.2. Явный метод Эйлера   | 12 |
| 2.3. Неявный метод Эйлера   | 12 |
| 2.4. Метод Рунге-Кутты второго порядка  | 12 |
| 2.5. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка   | 12 |
| 3. Некоторые сведения из линейной алгебры   | 13 |
| 3.1. Векторные нормы  | 14 |
| 3.2. Матричные нормы  | 14 |
| 4. Обусловленность задачи решения линейных систем. Примеры                          | 15 |
| 5. Метод регуляризации вырожденных и плохо обусловленных СЛАУ                       | 17 |
| 6. Специальные матрицы. Квадратный корень из матрицы                                | 20 |
| 6.1. Регуляризация СЛАУ с симметрической положительно определенной матрицей         | 21 |
| 6.2. Регуляризация СЛАУ в случае осцилляционных матриц                              | 22 |
| 6.3. Классификация линейно независимых координатных систем                          | 23 |
| 7. Решение интегрального уравнения первого рода                                     | 23 |
| 7.1. Решение интегрального уравнения первого рода с помощью квадратурных формул     | 23 |
| 7.2. Решение интегрального уравнения первого рода с помощью метода Галеркина        | 24 |
| 7.3. Метод регуляризации для решения интегрального уравнения первого рода           | 25 |
| 8. Решение интегро-дифференциального уравнения                                      | 28 |
| 9. Примеры и метод регуляризации  | 29 |
| 9.1. Случай 1. $p = 1, \quad r = 0$   | 29 |
| 9.1.1. II краевая задача  | 29 |
| 9.1.2. I краевая задача   | 30 |
| 9.2. Случай 2. $p = 1, \quad r = 1$   | 30 |
| 9.2.1. I краевая задача $z_\alpha(0) = z_\alpha(1) = 0$                             | 30 |
| 9.2.2. III краевая задача $z_\alpha(0) = z'_\alpha(1) = 0$                          | 31 |
| 10. Обращение преобразования Лапласа  | 31 |
| 10.1. Первая схема  | 32 |
| 10.2. Вторая схема  | 32 |
| 10.3. Третья схема  | 33 |
| Список литературы   | 35 |

# Предисловие

Как правило, решение любой задачи содержит следующие этапы:

1. Математическая постановка задачи.
2. Исследование существования и единственности решения.
3. Выбор метода решения.
4. Изучение сходимости метода и скорости сходимости. Вопрос ускорения сходимости.
5. Оценки погрешности.
6. Реализация метода (вычисления) и его эффективность.
7. Устойчивость (непрерывная зависимость решения от исходных данных).

## 1. Примеры неустойчивых задач

В этом пункте мы рассмотрим примеры, в которых имеет место неустойчивость процедуры нахождения искомого решения.

*Пример 1*

Необходимо вычислить значение величины

$$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3 = (\sqrt{2}-1)^6 = (3-2\sqrt{2})^3 = 99-70\sqrt{2} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6} = \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3} = \frac{1}{99+70\sqrt{2}}.$$

Это число положительное и меньше единицы. Число  $\sqrt{2} = 1.4142\dots$  иррациональное; если положить  $\sqrt{2} \approx 7/5 = 1.4$ , то четвертое представление  $99 - 70\sqrt{2}$  дает значение 1, а в случае  $\sqrt{2} \approx 17/12 = 1.41666\dots$  получаем значение  $-1/6$ . Очевидно, оба результата неудовлетворительны. Такие вычисления можно провести для всех форм представления этого числа, но по полученным результатам вряд ли можно сказать, по какому представлению следует проводить вычисления.

Рассмотрим все семь представлений из примера как функции от  $\sqrt{2}$ . То есть положим в выражениях  $\sqrt{2} = x$ .

Тогда производные функций  $f_4(x)$  (четвертое представление) и  $f_7(x)$  (седьмое представление):  $f_4'(x) = -70$ ,  $f_7'(x) = -70/(99+70x)^2$  и  $f_7'(\sqrt{2}) \approx -70/200^2 = -1.75 \cdot 10^{-3}$ . Следовательно, в случае  $f_4$  погрешность возрастает в 70 раз, а в случае  $f_7$  убывает примерно в 570 раз. Аналогично исследуя производные остальных представлений, убеждаемся, что  $f_4$ ,  $f_7$  — наихудший и наилучший варианты вычислений.

В подтверждение приведем в таблице 1 результаты, вычисленные по представленным выше формулам с приближенным значением  $\sqrt{2}_{\text{прибл}}$ , указанным в первом столбце.

Заметим, что 6-ое представление является также приемлемым, но вычисления требуют дополнительно выполнения операции возведения в степень.

Таблица 1

| $\sqrt{2}_{\text{прибл}}$ | 1        | 2        | 3        | 4         | 5        | 6        | 7        |
|---------------------------|----------|----------|----------|-----------|----------|----------|----------|
| 7/5                       | 0.004629 | 0.004096 | 0.008000 | 1.000000  | 0.005233 | 0.005125 | 0.005076 |
| 17/12                     | 0.005125 | 0.005233 | 0.004630 | -0.166667 | 0.005020 | 0.005038 | 0.005046 |

"Точный" результат, полученный с 10 верными знаками равен 0.0050506339.

*Пример 2*

Дана последовательность

$$y_n = \int_0^1 e^{x-1} x^n dx, \quad n = 0, 1, \dots, \quad y_0 = \int_0^1 e^{x-1} dx = 1 - 1/e \approx 0.632.$$

Интегрирование по частям приводит к рекуррентному соотношению

$$y_n = \int_0^1 x^n de^{x-1} = x^n e^{x-1} \Big|_0^1 - n \underbrace{\int_0^1 e^{x-1} x^{n-1} dx}_{y_{n-1}} = 1 - ny_{n-1}. \quad (1)$$

Очевидно, что с ростом  $n$  подынтегральная функция убывает и стремится к нулю, так что  $y_n$  монотонно стремится к нулю, и к тому же справедливо неравенство

$$\frac{1}{(n+1)e} \leq y_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Вычисления по рекуррентной формуле (1) с тремя значащими цифрами приводят к следующим результатам (Таблица 2):

Таблица 2

| $n$   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9    | 10   |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|
| $y_n$ | 0.632 | 0.368 | 0.264 | 0.208 | 0.168 | 0.160 | 0.040 | 0.720 | -4.76 | 43.8 | -437 |

Причина неустойчивости кроется в умножении на  $n$  на каждом шаге, и в итоге за  $n$  шагов ошибка задания значения  $y_0$  возрастает в  $n!$  раз.

Для устойчивости построения последовательности перепишем (1) в виде

$$y_{n-1} = \frac{1 - y_n}{n}, \quad n = N, N-1, \dots, M,$$

полагая  $y_N = 0$ . Так, при  $N = 10$ ,  $M = 1$  получаем следующие результаты (Таблица 3):

Таблица 3

| $n$   | 10 | 9     | 8     | 7     | 6     | 5     | 4     | 3     | 2     | 1     | 0     |
|-------|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $y_n$ | 0  | 0.100 | 0.100 | 0.112 | 0.127 | 0.146 | 0.171 | 0.207 | 0.264 | 0.368 | 0.632 |

Теперь на каждом шаге допущенная в  $y_{10}$  ошибка делится на  $n$ , и в итоге она делится на  $10!$ , что приводит к правильному значению  $y_0$ .

*Пример 3*

Рассмотрим числовую последовательность  $x_{n+1} = nx_n + 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $x_1$  задано.

Спрашивается, существует ли  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ?

Если  $x_1 \geq 0$ , то последовательность расходится. Поясним это. При вычислениях на компьютере все числа имеют ограниченное количество значащих цифр, так что все они рациональны. Пусть  $x_1 = -\frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ .

При  $n = q$   $x_q$  становится целым и, значит, все последующие  $x_n$  (для  $n \geq q$ ) также целые и последовательность расходится.

Итак, при вычислениях с конечным числом значащих цифр при любом начальном неотрицательном значении  $x_1$  последовательность расходится.

Предположим, что последовательность сходится при некотором отрицательном иррациональном  $x_1$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Тогда из равенства  $x_{n+1}/n = x_n + 1/n$  при  $n \rightarrow \infty$  получаем  $0 = 0 + a$ , следовательно,  $a = 0$ , т. е. если последовательность сходится, то только к нулю. Исходя из определения, имеем представление

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= nx_n + 1 = n((n-1)x_{n-1} + 1) + 1 = n(n-1)x_{n-1} + n + 1 = \\ &= n(n-1)((n-2)x_{n-2} + 1) + n + 1 = \dots = \\ &= n!x_1 + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{(n-1)!} + 1 = n! \left( x_1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right) = \\ &= n! \left( x_1 + e - 1 - \frac{e^c}{(n+1)!} \right), \quad 0 < c < 1. \end{aligned}$$

Очевидно, что при  $x_1 = 1 - e$  последовательность сходится к нулю.

Возможен и другой, устойчивый способ нахождения  $x_1$  и всех членов последовательности, указанный в предыдущем примере и основанный на обратной прогонке, т. е. использовании равенства  $x_n = (x_{n+1} - 1)/n$ . Из него вытекает, что

$$x_1 = \frac{x_2 - 1}{1} = \frac{(x_3 - 1)/2 - 1}{1} = -1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{x_3}{1 \cdot 2} = \dots = -\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{n!} + \frac{x_{n+1}}{n!}.$$

Если последовательность сходится, то только к нулю, и тогда при  $n \rightarrow \infty$  получаем  $x_1 = 1 - e$ .

#### Пример 4

Вычисление функций  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$

Как известно, ряды для этих функций сходятся при всех значениях  $x$ , однако при больших по модулю аргументах члены рядов сперва возрастают по модулю и имеют чередующиеся знаки, что при суммировании приведет к большой вычислительной погрешности. Поэтому сначала следует, пользуясь периодичностью функций, вычислить новый аргумент

$$x_1 = x - \left[ \frac{x}{2\pi} \right] 2\pi.$$

Здесь  $[\cdot]$  — целая часть числа.

Теоретически,  $\sin(x_1) = \sin(x)$  и  $\cos(x_1) = \cos(x)$ , однако следует иметь в виду, что при больших значениях  $x$  и невысокой точности задания в компьютере числа  $\pi$  аргумент  $x_1$  будет содержать недопустимую погрешность, что приведет к неверным результатам вычислений.

*Пример 5*

Вычисление функции  $\ln(x)$

Запишем два разложения в ряд, сходящиеся при  $|x| < 1$ :

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \\ \ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 + \dots$$

Если  $x \in (-1, 1)$ , то аргумент  $y = (1+x)/(1-x) \in (0, \infty)$ , и тем самым мы можем вычислить  $\ln(y)$  для любого положительного числа  $y$ .

*Пример 6*

Вычисление функции  $e^x$

Эта функция существует для любых  $x$  и теоретически она может быть вычислена с помощью всюду сходящегося ряда

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x). \quad (2)$$

Трудности вычисления возникают при больших значениях величины  $|x|$ . Действительно, из отношения  $a_{k+1}(x)/a_k(x) = x/(k+1)$  следует, что сначала, при  $|x| \geq 1+k$ , члены ряда по модулю возрастают, а затем убывают и стремятся к нулю, и достигают максимума модуля при  $k_0 \approx |x| - 1$ , приблизительно равного  $|a_{k_0}| = k_0^{k_0}/k_0!$ . При этом при  $x > 0$  возникает вопрос, когда прекратить суммирование членов ряда, а при  $x < 0$  возможна большая потеря точности из-за суммирования больших по модулю знакопеременяющихся слагаемых. Укажем один из путей преодоления этих затруднений.

Если в вычислительном устройстве числа представляются в двоичной системе, то воспользуемся представлением  $e^x = 2^{x \log_2 e} = 2^y = 2^{[y]} \cdot 2^{\{y\}}$ , где  $[y]$  — целая часть числа,  $\{y\}$  — дробная часть числа  $y$ . Второй сомножитель запишем в форме  $2^{\{y\}} = e^{\{y\} \ln 2} = e^z$ ,  $|z| < 1$ , и для его вычисления используем отрезок быстро сходящегося ряда

$$e^z \approx P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad -1 \leq z \leq 1,$$

с погрешностью

$$e^z - P_n(z) = \frac{(e^\xi)^{k+1}}{(n+1)!} z^{n+1}, \quad -1 < \xi < 1.$$

Для оценки погрешности справедливо неравенство

$$\frac{e^{-1}}{(n+1)!} \leq |e^z - P_n(z)| \leq \frac{e}{(n+1)!}. \quad (3)$$

Для учета сомножителя  $2^{[y]}$  достаточно увеличить двоичный порядок результата на  $[y]$  единиц.

Укажем ещё один способ вычисления  $e^x$  на отрезке  $[-1, 1]$  : построим интерполяционный многочлен  $L_n(x)$ , выбрав в качестве узлов интерполирования корни многочлена Чебышева первого рода  $T_{n+1}(x)$ :  $x_k^{(n)} = \cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right)$ ,  $k = \overline{0, n}$ .

Погрешность интерполирования представима в виде

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \quad \xi \in (-1, 1), \quad (4)$$

где

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k^{(n)}) = T_{n+1}(x) \cdot \frac{1}{2^n} = \tilde{T}_{n+1}(x).$$

Отсюда следует оценка  $|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{e}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n}$ , которая лучше оценки (3) в  $2^n$  раз.

**Замечание 1.** Для вычисления значений произвольного многочлена  $P_n(x)$  целесообразно сначала разложить его по приведенным многочленам Чебышева:  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \tilde{T}_k(x)$ ; в силу экстремальных свойств многочленов Чебышева можно отбросить несколько слагаемых без потери точности вычислений, положив

$$P_n(x) \approx \sum_{k=0}^{n-m} \alpha_k \tilde{T}_k(x).$$

*Пример 7*

Дана функция  $f \in \mathbf{C}([0, 1])$  и ставится задача её приближения многочленом

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Будем измерять погрешность приближения в норме пространства  $L_2(0, 1)$  :

$$\|\varphi\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^1 \varphi^2(x) dx},$$

т. е. рассматриваем задачу минимизации величины

$$\|f - P_n\|_{L_2}^2 = \int_0^1 \left( f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^2 dx = \Phi(a_0, \dots, a_n) \geq 0.$$

Необходимые условия минимума  $\frac{\partial \Phi}{\partial a_j} = 0$ ,  $j = \overline{0, n}$  приводят к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{k=0}^n \left( \int_0^1 x^k x^j dx \right) a_k = \int_0^1 f(x) x^j dx, \quad j = \overline{0, n}. \quad (5)$$



Матрица Гильберта этой системы  $H_{n+1} = \left( \frac{1}{k+j+1} \right)_{k,j=0}^n$  симметрическая и положительно определенная, так что решение СЛАУ

$$H_{n+1}A_{n+1} = F_{n+1}$$

существует и представимо в виде

$$A_{n+1} = H_{n+1}^{-1}F_{n+1}.$$

Однако этот путь решения СЛАУ неустойчив из-за быстрого роста чисел обусловленности  $cond(H_n) = \|H_n\| \cdot \|H_n^{-1}\|$  матриц Гильберта, например,  $cond(H_{10}) \approx 10^{13}$ .

Неустойчивость есть следствие несогласованности метрики, в которой измеряется погрешность, и "плохими" свойствами координатной системы  $\{x^k\}$  в пространстве  $L_2[0, 1]$ .

Перейдем для удобства к пространству  $L_2[-1, 1]$ , в котором ортогональны многочлены Лежандра  $L_k(x)$  :

$$\int_{-1}^1 L_k(x)L_j(x)dx = \frac{2}{2k+1} \delta_{kj}, \quad k, j = 0, 1, \dots$$

Искомый многочлен наилучшего приближения будем строить в виде  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k L_k(x)$  из условия минимума величины

$$\|f - P_n\|_{L_2}^2 = \int_{-1}^1 \left( f(x) - \sum_{k=0}^n c_k L_k(x) \right)^2 dx,$$

что приводит к уравнениям

$$\frac{2}{2j+1}c_j = \int_{-1}^1 f(x)x^j dx, \quad j = \overline{0, n}, \quad (6)$$

откуда легко и устойчиво определяются коэффициенты разложения  $c_j$ .

#### Пример 8

Влияние малого возмущения элементов матрицы на её собственные числа

Пусть дана квадратная матрица порядка  $n$

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \varepsilon & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

При  $\varepsilon = 0$  все собственные числа  $\lambda_k(A_0) = 0$ ,  $k = \overline{1, n}$ . При  $\varepsilon \neq 0$  собственные числа  $\lambda_k(A_\varepsilon)$  находятся из уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \varepsilon & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^n + \varepsilon(-1)^{n+1} = 0, \quad \text{следовательно, } |\lambda_k(A_\varepsilon)| = \sqrt[n]{|\varepsilon|}, \quad k = \overline{1, n}.$$

При  $\varepsilon = 10^{-15}$ ,  $n = 30$  получаем  $|\lambda_k| = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx \frac{1}{3}$ . Как видим, малым возмущениям всего одного элемента матрицы отвечают большие изменения собственных чисел, т. е. задача их определения в общем случае неустойчива. Спрашивается, а как преодолеть эту неустойчивость? Ответ прост: надо увеличить точность вычисления, что равносильно уменьшению числа  $\varepsilon$  и уменьшению радиуса окружности, на которой расположены собственные числа.

#### Пример 9

Задача суммирования ряда

Даны два набора коэффициентов  $a = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$  и  $\tilde{a} = (\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n, \dots)$ .

Предположим, что  $a \in l_2$ , т. е.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$ .

Положим  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt$ ,  $\tilde{f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \cos nt$ , или в операторном виде  $Ba = f$ ,  $B\tilde{a} = \tilde{f}$ .

Здесь оператор  $B$  означает суммирование тригонометрического ряда с заданными коэффициентами из пространства  $l_2$ .

Рассмотрим случай  $\tilde{a}_n = a_n + \frac{\varepsilon}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\tilde{a}_0 = a_0$ .

Очевидно,

$$\|a - \tilde{a}\|_{l_2}^2 = \left| \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - \tilde{a}_n)^2 \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{n^2} \right| = \varepsilon^2 \frac{\pi^2}{6}.$$

Далее,

$$f(t) - \tilde{f}(t) = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n}.$$

1) Пусть  $B : l_2 \rightarrow \mathbf{C}([0, \pi])$ . В этом случае разность  $f(t) - \tilde{f}(t)$  при  $t \rightarrow 0$  неограниченно возрастает, а при  $t = 0$  равна бесконечности, т. е. на этой паре пространств задача суммирования неустойчива.

2) Пусть  $B : l_2 \rightarrow L_2([0, \pi])$ . В этом случае

$$\begin{aligned} \|f - \tilde{f}\|_{L_2}^2 &= \int_0^{\pi} (f(t) - \tilde{f}(t))^2 dt = \int_0^{\pi} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{n} \cos nt \right)^2 dt \leq \\ &\leq \varepsilon^2 \int_0^{\pi} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nt}{n^2} + 2 \sum_{k < j} \frac{\cos kt}{k} \cdot \frac{\cos jt}{j} \right) dt \leq \varepsilon^2 \frac{\pi^3}{6}, \end{aligned}$$

поскольку первая сумма под знаком интеграла не превосходит  $\pi^2/6$ , а интеграл от второй суммы равен нулю. В этом случае задача суммирования устойчива.

*Задача.* Дана функция  $f \in \mathbf{C}([a, b])$ . По теореме Вейерштрасса для любого  $\varepsilon > 0$  существует многочлен  $P_n(x)$  такой, что  $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$  для любого  $x \in [a, b]$ .

Возьмём  $f(x) = e^x$  и найдем корни уравнения  $P_n(x) = 0$ , их всего  $n$  штук. Это приближенные значения корней уравнения  $e^x = 0$ . Но это уравнение не имеет решений. Укажите ошибку в рассуждениях.

## 2. Устойчивость решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Рассмотрим следующую задачу Коши:  $y' = 1 + y^2$ ,  $y(0) = 0$ . Её решение – функция  $y = \operatorname{tg}(x)$ , определённая на интервале  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Рассмотрим простейшую разностную аппроксимацию данного уравнения с шагом  $h$ :

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = 1 + y_k^2, \quad y_0 = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Её решение  $y_{k+1} = y_k + h(1 + y_k^2)$  существует при всех  $k \geq 0$  и неограниченно возрастает, и при  $kh \geq \pi/2$  не отражает поведения точного решения исходной задачи.

Понятно, что приближенное решение надо строить там, где существует точное решение задачи. Ответ на вопрос об области существования решения содержится в курсах дифференциальных уравнений, например, может быть полезна

**Теорема 1** (Пеано, Пикар). *Дано уравнение  $y' = f(x, y)$  и в прямоугольнике  $R = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$  функция  $f(x, y)$  непрерывна и ограничена:  $\max_R |f(x, y)| = M$ . Тогда существует хотя бы одно решение уравнения на отрезке  $|x - x_0| \leq h$ ,  $h = \min\{a, b/M\}$ , проходящее через точку  $(x_0, y_0)$ , график которого принадлежит  $R$ . Если функция  $f(x, y)$  для любых  $y_1, y_2$  удовлетворяет условию Липшица  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ , то решение единственно.*

В стандартных курсах методов вычислений рассматриваются способы построения разностных методов решения задачи Коши и краевых задач и выясняется порядок их точности как функции шага численного интегрирования. Здесь мы изучим устойчивость разностных методов. Смысл понятия "устойчивость" будет ясен из дальнейшего изложения.

### 2.1. Постановка задачи

Рассматривается задача Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Разлагаем  $f(x, y)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ , ограничиваясь линейными членами:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = f_1(x) + ay, \quad \text{где } a = f'_y(x_0, y_0).$$

Считаем, что мы нашли функцию  $y_1$  такую, что  $y'_1 = f_1(x)$ , так что остаётся рассмотреть задачу

$$y' = ay, \quad y(x_0) = y_0 \tag{7}$$

и устойчивость процесса построения разностного (сеточного) решения этого уравнения.

Решение задачи (7) имеет вид

$$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}. \tag{8}$$

При  $a < 0$  точное решение с ростом  $x$  убывает по модулю, поэтому естественно потребовать, чтобы и сеточное решение обладало этим свойством. Далее получим условия устойчивости некоторых разностных методов решения задачи Коши (7) в предположении, что  $a < 0$ .

## 2.2. Явный метод Эйлера

Применяя формулу численного дифференцирования, получаем разностное уравнение

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = ay_k, \text{ отсюда } y_{k+1} = y_k(1 + ah), \quad k = 0, 1, \dots$$

Известно, что погрешность метода на каждом шаге есть величина  $O(h^2)$ .

Обозначим множитель перехода от  $y_k$  к  $y_{k+1}$  через  $R(ah) = 1 + ah$ .

Для устойчивости метода требуется выполнение условия  $|R(ah)| < 1$ , т.е.  $|1 + ah| < 1$ , следовательно, явный метод Эйлера устойчив при условии, что шаг удовлетворяет неравенству  $0 < h < -\frac{2}{a}$ , ( $a < 0$ ).

## 2.3. Неявный метод Эйлера

Расчетная формула одного шага имеет вид

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = ay_{k+1}, \text{ откуда } y_{k+1} = \frac{y_k}{1 - ah}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Здесь  $R(ah) = \frac{1}{1 - ah}$  и  $0 < R(ah) < 1$  при  $a < 0$ ,  $h > 0$ , т.е. неявный метод Эйлера устойчив при любом  $h$ .

## 2.4. Метод Рунге-Кутты второго порядка

Расчетная формула в этом методе имеет вид

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \text{ где } k_1 = hf(x_n, y_n), \quad k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1), \quad n = 0, 1, \dots$$

Погрешность метода на шаге равна  $O(h^3)$ .

Для уравнения вида  $y' = ay$ ,  $k_1 = hay_n$ ,  $k_2 = ha(y_n + hay_n)$ . Если положим  $ah = z$ , то очевидно,  $k_1 = zy_n$ ,  $k_2 = z(y_n + zy_n)$  и, следовательно,  $y_{n+1} = y_n + 1/2 y_n(2z + z^2) = y_n(1 + z + z^2/2) = R(z)y_n$ .

В данном случае получаем  $R(z) = 1 + z + z^2/2$  и условие устойчивости  $|R(z)| < 1$  выполняется при  $-2 < z < 0$ , т.е. при  $0 < h < -\frac{2}{a}$ , ( $a < 0$ ).

## 2.5. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка

Расчетная формула в этом методе имеет вид

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \text{ где}$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n), \quad k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3), \quad n = 0, 1, \dots$$

Погрешность метода на шаге равна  $O(h^5)$ .

Снова положим  $z = ah$ , тогда для уравнения вида  $y' = ay$  получим  $y_{n+1} = R(z)y_n$ , где

$$\text{функция перехода } R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}.$$

**Замечание 2.** Обращаем ваше внимание на то, что функции  $R(z)$  для методов Рунге-Кутты второго и четвертого порядка суть отрезки ряда для функции  $e^z$ , как и должно быть.

Вновь из условия устойчивости  $|R(z)| < 1$  получим ограничения на шаг  $h$ . Очевидно, что для метода Рунге-Кутты четвертого порядка  $R(z) > 0$ , значит условие устойчивости переписывается в виде  $R(z) < 1$ .

Решая уравнение  $R(z) = 1$ , получаем  $\bar{z} = -2.785294\dots$

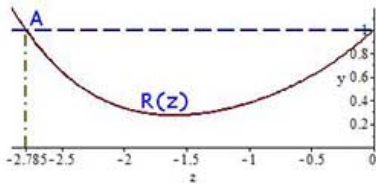


Рис. 1

Из приведенных на рисунке 1 графиков функций  $y = R(z)$ ,  $y = 1$ ,  $z = -2.785$  заключаем, что  $R(z) < 1$  при  $\bar{z} < z < 0$ , т. е. что устойчивость имеет место при  $0 < h < -\frac{\bar{z}}{a}$ , ( $a < 0$ ).

Точка **A** на графике — точка пересечения двух графиков  $y = R(z)$ ,  $y = 1$ . Расположение этой точки демонстрирует, что  $R(-2.785) \approx 1$  и  $R(z) > 1$  для  $z < \bar{z}$ .

**Замечание 3.** Приведенные примеры показывают, что явные методы решения задачи Коши обладают небольшими областями устойчивости их применения, и они практически непригодны для решения так называемых жестких систем.

### 3. Некоторые сведения из линейной алгебры

Рассмотрим функциональное уравнение

$$Az = u. \quad (9)$$

Задача решения уравнения (9) называется корректно поставленной, если выполняются три условия:

- 1) Для любого  $u$  существует решение.
- 2) Существует единственное решение.
- 3) Решение  $z$  непрерывно зависит от  $u$ .

Если не выполнено только третье условие, то говорят о неустойчивости задачи.

Пусть уравнение (9) является системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), где  $A$  — вещественная квадратная матрица,  $u$  — заданный вещественный вектор,  $z$  — искомый вектор размерности  $n$ . Рассмотрим два возможных случая.

- 1) Матрица системы невырожденная, тогда задача является корректной, так как существует обратная матрица. Решение  $z = A^{-1}u$  единственно и непрерывно зависит от  $u$ .
- 2) Матрица системы вырожденная. Тогда, если  $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|u)$ , то решений бесконечно много, в противном случае решений нет.

Обозначим

$Im A = \{u | u = Az, z \in \mathbb{Z}\}$  — образ  $A$ . Здесь  $\mathbb{Z}$  — множество векторов, а не множество целых чисел.

$ker A = \{z | Az = \mathbb{O}\}$  — ядро  $A$ .

Очевидно, что для любого  $v \in ker A$  справедливо равенство  $A(z + v) = u$ .

Рассмотрим произвольный  $z^* \in ker A^*$ , т. е.  $A^* z^* = \mathbb{O}$ , где  $A^*$  — сопряженная матрица.

Тогда для любого  $z$  имеем  $0 = (z, A^* z^*) = (Az, z^*) = 0$ , т. е.  $z^* \perp Im A$ .

Здесь скалярное произведение определяется следующим образом:  $(a, b) = \sum_{k=1}^n a_k \overline{b_k}$ .

Следовательно,  $Az$  ортогонально  $z^*$ ,  $Im A$  ортогонально  $ker A^*$  и  $Im A \oplus ker A^* = \mathbb{Z}$ .

Если матрица  $A$  — вырожденная, то система  $Az = u$  — разрешима, при условии, что  $u$  ортогонально ядру  $ker A^*$ .

Приведем сведения о векторных и матричных нормах.

### 3.1. Векторные нормы

Векторной нормой  $\|\cdot\|$  называется функционал, удовлетворяющий условиям

- 1)  $\|z\| = 0 \Leftrightarrow z = \mathbb{O}$ .
- 2)  $\|\alpha z\| = |\alpha| \cdot \|z\|$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  (однородность).
- 3)  $\|x + z\| \leq \|x\| + \|z\|$  (аналог геометрического неравенства треугольника).

Очевидно, что для любого  $z$   $z - z = \mathbb{O}$ , далее,  $0 = \|\mathbb{O}\| = \|z - z\| \leq \|z\| + \|-z\| = \|z\| + \|z\| = 2\|z\|$ .

Следовательно,  $\|z\| \geq 0$  для любого  $z$ .

Известная векторная норма Гёльдера (Hölder):  $\|z\|_p = \left( \sum_{k=1}^n |z_k|^p \right)^{1/p}$ ,  $p \geq 1$ .

При  $p = \infty$ :  $\|z\|_\infty = \max_k \{|z_k|\}$ .

В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.

### 3.2. Матричные нормы

Условия 1), 2), 3) для матричной нормы такие же, как и для векторной. Часто используется матричная норма, удовлетворяющая условию мультипликативности:

4)  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .

Говорят, что нормы  $\|z\|$  и  $\|A\|$  согласованы, если для любых  $A$  и  $z$  справедливо неравенство  $\|Az\| \leq \|A\| \cdot \|z\|$ .

Заметим, что для любого  $z \neq \mathbb{O}$   $\left\| A \frac{z}{\|z\|} \right\| \leq \|A\|$ , следовательно,  $\sup_{\|z\| \leq 1} \|Az\| \leq \|A\|$ .

Величина  $\|A\|_{\text{подч}} = \sup_{\|z\| \leq 1} \|Az\|$  является мультипликативной матричной нормой и наименьшей из согласованных с векторной нормой.

Приведем выражения для подчиненных векторным нормам соответствующих матричных норм:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^*)} = \sqrt{\rho(A^*A)}.$$

Здесь  $\rho$  – спектральный радиус матрицы (наибольший из модулей собственных чисел). Пусть  $A = A^*$  ( $A$  – симметрическая), тогда

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^2)} = \sqrt{\rho^2(A)} = \rho(A) = \max_k |\lambda_k(A)|.$$

**Замечание 4.** Для несимметрических матриц  $A$  величина  $\rho(A)$  не является матричной нормой. Действительно, у матрицы  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  собственные числа равны нулю, но матрица ненулевая, и её норма нулю не равна.

**Замечание 5.** Собственные числа и собственные векторы произвольной квадратной матрицы, в том числе и вещественной, не обязательно вещественны. Очевидно, понятия векторных и матричных норм, данные выше, без всяких изменений справедливы и в комплексном случае.

## 4. Обусловленность задачи решения линейных систем. Примеры

Если определитель матрицы  $\det(A) \neq 0$ , то существует  $A^{-1}$  и, значит, может быть вычислено число обусловленности матрицы

$$\mu(A) = \text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1.$$

Матрица и правая часть в уравнении (9) могут быть заданы приближениями к ним  $A_\delta$  и  $u_\delta$  такими, что

$$\|\Delta A\| = \|A - A_\delta\| \leq \delta, \quad \|\Delta u\| = \|u - u_\delta\| \leq \delta.$$

Эти погрешности в исходных данных повлекут ошибку  $\Delta z$  определения вектора  $z$ .

Введем относительные погрешности

$$\delta_A = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \quad \delta_u = \frac{\|\Delta u\|}{\|u\|}, \quad \delta_z = \frac{\|\Delta z\|}{\|z\|}.$$

Заметим, что эти погрешности присутствуют практически всегда, поскольку вычисления, как правило, проводятся с конечным числом значащих цифр.

Здесь мы приведем без доказательства теорему об относительной погрешности возмущенной системы, которая, как правило, доказывается в традиционных курсах методов вычислений.

**Теорема 2.** Для произвольных  $\delta_u$  и достаточно малых  $\delta_A$  справедлива оценка относительной погрешности

$$\delta_z \leq \frac{\mu(A)}{1 - \mu(A)\delta_A}(\delta_A + \delta_u). \quad (10)$$

Следовательно, согласно оценке (10), независимо от метода решения СЛАУ погрешность результата может оказаться примерно в  $\mu(A)$  раз больше погрешности исходной информации. Из этого следует, что для получения решения с требуемой точностью необходимо иметь достаточно точные исходные данные.

Рассматриваем систему

$$A_\delta z = u_\delta. \quad (11)$$

Величина  $\|A_\delta z - u_\delta\|$  называется невязкой системы на элементе  $z$ .

В общем случае СЛАУ (9) может не иметь решения. Тогда целесообразно ввести в рассмотрение псевдорешения и нормальные решения матричного уравнения (9).

**Определение 1.** Элемент  $\tilde{z}$  называется псевдорешением уравнения  $Az = u$ , если  $\|A\tilde{z} - u\| = \min_z \|Az - u\|$ .

**Определение 2.** Псевдорешение  $\tilde{z}$  с наименьшей нормой называется нормальным решением.

Нормальное решение существует и единственно. Если уравнение (9) имеет единственное решение, то нормальное решение совпадает с ним.

Для нахождения нормального решения необходимы процедуры регуляризации, в которых параметры регуляризации выбираются в зависимости от точности исходной информации и обусловленности исходной задачи.

Далее в примерах в качестве векторной нормы используем евклидову норму, а в качестве матричной — подчиненную ей норму

$$\|A\| = \sqrt{\rho(A^*A)}.$$

*Пример 1*

Рассмотрим СЛАУ вида  $Az = u$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Найдем псевдорешения, нормальное решение и множества  $Im A$ ,  $ker A$ ,  $Im A^*$ ,  $ker A^*$ .

$$Az - u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 - 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Этот вектор не равен нулю, так что точного решения исходной системы не существует.

Далее,  $\|Az - u\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} z_2 - 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = (z_2 - 1)^2 + 1$ , и эта величина достигает минимума при

$z_2 = 1$ , так что псевдорешения имеют вид  $\begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , а нормальное решение равно  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Очевидно,  $Im A = ker A = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ . Для матрицы  $A^* = A^T$  аналогично находим  $Im A^* = ker A^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\}$ .

*Пример 2*

Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Найдем псевдорешения и нормальное решение:

$$Az = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + 2z_2 \\ 2z_1 + 4z_2 \end{pmatrix}.$$



$\|Az - u\|_2^2 = (z_1 + 2z_2 - 1)^2 + (2z_1 + 4z_2)^2 = (z_1 + 2z_2)^2 - 2(z_1 + 2z_2) + 1 + 4(z_1 + 2z_2)^2 = 5y^2 - 2y + 1$ , где  $y = z_1 + 2z_2$ .

Минимум этой функции достигается при  $y = 1/5$ , следовательно,  $z_1 + 2z_2 = 1/5$ ,  $z_1 = 1/5 - 2z_2$  и псевдорешение имеет вид  $\begin{pmatrix} 1/5 - 2z_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ . Квадрат его нормы равен  $(1/5 - 2z_2)^2 + z_2^2 = 1/25 - 4z_2/5 + 5z_2^2$ . Минимум этой функции достигается при  $z_2 = 2/25$ , так что нормальное решение равно  $z_{\text{норм}} = \begin{pmatrix} 1/25 \\ 2/25 \end{pmatrix}$ .

Предлагается самостоятельно построить множества  $Im A$ ,  $ker A$ ,  $Im A^*$ ,  $ker A^*$ .

*Пример 3*

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} m & n \\ n & p \end{pmatrix},$$

где числа  $m, n, p$  — натуральные и удовлетворяют неравенству  $1 \leq m, n, p \leq 100$ , а матрица  $A$  — невырожденная. Найти матрицу с самым большим числом обусловленности.

*Решение*

Известно, что любая симметрическая матрица приводится к диагональному виду

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

преобразованием подобия с помощью ортогонального преобразования. При таком преобразовании определитель матрицы, её собственные значения и сумма квадратов всех элементов матрицы являются инвариантами. Запишем равенство двух инвариантных величин для матриц  $A$  и  $A_1$ :

$$\sigma = \frac{m^2 + n^2 + n^2 + p^2}{2|mp - n^2|} = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2|\lambda_1 \cdot \lambda_2|} = \frac{1}{2} \left( \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| + \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| \right).$$

Числа обусловленности матриц  $A$  и  $A_1$  также равны друг другу и равны значению  $cond(A_1) = \|A_1\| \cdot \|A_1^{-1}\|$ , которое, в свою очередь, равно  $|\lambda_1/\lambda_2|$  или  $|\lambda_2/\lambda_1|$ . Следова-

тельно,  $2\sigma = cond(A) + \frac{1}{cond(A)}$ , откуда  $cond(A) = \sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}$ . Для максимизации числа обусловленности надо сделать максимальным значение  $\sigma$ , что равносильно минимизации модуля определителя и максимизации суммы квадратов всех элементов исходной матрицы. В итоге заключаем, что число обусловленности  $cond(A)$  максимально при  $A = \begin{pmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{pmatrix}$ .

## 5. Метод регуляризации вырожденных и плохо обусловленных СЛАУ

Поставим задачу, как в математическом анализе: найти элемент  $z$  с наименьшей нормой среди множества векторов  $\{z : \|Az - u\| \leq \delta\}$ . С этой целью введём в рассмотрение функционал (функция Лагранжа)

$$M_\alpha(z, A, u) = \|Az - u\|^2 + \alpha \|z\|^2, \quad \alpha > 0. \quad (12)$$

Поставим себе задачу нахождения элемента  $z$ , который при фиксированном  $\alpha > 0$  минимизирует  $M_\alpha$ .

Возьмём произвольный элемент  $v \neq \mathbb{O}$ , построим элемент  $z + tv$ , где  $t \geq 0$  и рассмотрим функцию

$$\Phi(t) = M_\alpha(z + tv, A, u) = (A(z + tv) - u, A(z + tv) - u) + \alpha(z + tv, z + tv).$$

Для того, чтобы эта функция принимала наименьшее значение для всех  $v$  и  $t$ , необходимо выполнение равенства  $\Phi'_t(0) = 0$ :

$$\Phi'_t(0) = 2(Av, Az - u) + 2\alpha(v, z) = 0, \text{ откуда получаем } (v, A^*Az - A^*u) + (v, \alpha z) = 0 \text{ или}$$

$$(v, A^*Az - A^*u + \alpha z) = 0.$$

В силу произвольности  $v$  получаем уравнение Эйлера

$$(A^*A + \alpha E)z = A^*u. \quad (13)$$

Здесь матрица  $A^*A$  — симметрическая и неотрицательно определённая, поэтому уравнение Эйлера имеет единственное решение  $z_\alpha$ . Ранее рассматривалось уравнение (9)  $Az = u$ . Рассмотрим уравнение

$$A^*Az = A^*u. \quad (14)$$

Оно всегда разрешимо. Если  $A$  невырожденная, то (9) эквивалентно (14).

Если  $A$  вырожденная ( $\det(A)=0$ ), то система (9) может быть неразрешима, но можно найти псевдорешения и нормальное решение, которое будет содержаться в наборе решений для системы  $A^*Az = A^*u$ , которая разрешима всегда.

Поясним это на Примере:

*Пример*

Пусть  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , тогда  $Az - u = \begin{pmatrix} z_2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , следовательно, система не имеет решений, её псевдорешения имеют вид  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , нормальное решение равно  $z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Система  $A^*Az = A^*u$  такова:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , откуда  $z_2 = 0$ , а  $z_1$  — любое. Среди этих решений содержится и нулевое, являющееся нормальным решением исходной задачи (9).

Перейдем к решению задачи (9).

Предположим, что система  $Az = u$  разрешима,  $z^0$  — её нормальное решение.

Рассмотрим систему  $A_\delta z = u_\delta$ , здесь  $A_\delta, u_\delta$  такие, что  $\|A - A_\delta\| \leq \delta$ ,  $\|u - u_\delta\| \leq \delta$ , минимизируемый функционал имеет вид  $M_\alpha(z, A_\delta, u_\delta) = \|A_\delta z - u_\delta\|^2 + \alpha\|z\|^2$ ,  $\alpha > 0$ , и  $z_\alpha$  — решение уравнения Эйлера (13).

**Теорема 3.** Пусть исходная задача разрешима и  $z^0$  — её нормальное решение,  $z_\alpha$  — решение уравнения Эйлера. Пусть даны две неотрицательные убывающие при убывающем  $\delta$  функции  $\beta_1(\delta), \beta_2(\delta)$ ,  $\beta_2(0) = 0$ , такие, что  $\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \leq \beta_2(\delta)$  и пусть  $\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \leq \alpha(\delta) \leq \beta_2(\delta)$ ,  $z_{\alpha(\delta)}$  — решение уравнения Эйлера. Тогда при  $\delta \rightarrow 0$   $z_{\alpha(\delta)} \rightarrow z^0$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
\alpha(\delta)\|z_{\alpha(\delta)}\|^2 &\leq M_{\alpha}(z_{\alpha(\delta)}, A_{\delta}, u_{\delta}) = \|A_{\delta}z_{\alpha(\delta)} - u_{\delta}\|^2 + \alpha(\delta)\|z_{\alpha(\delta)}\|^2 \leq \\
&\leq M_{\alpha(\delta)}(z^0, A_{\delta}, u_{\delta}) = \|A_{\delta}z^0 - u_{\delta}\|^2 + \alpha(\delta)\|z^0\|^2 = \\
&= \|(A_{\delta}z^0 - Az^0) + (Az^0 - u) + (u - u_{\delta})\|^2 + \alpha(\delta)\|z^0\|^2 \leq \\
&\leq (\delta\|z^0\| + \delta)^2 + \alpha(\delta)\|z^0\|^2 = \delta^2(1 + \|z^0\|)^2 + \alpha(\delta)\|z^0\|^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

Из первой строки вытекает неравенство  $\|A_{\delta}z_{\alpha(\delta)} - u_{\delta}\|^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ , что означает сходимость последовательности  $\{z_{\alpha(\delta)}\}$  к некоторому решению  $z_0$  исходного уравнения.

Деление на  $\alpha(\delta)$  цепочки неравенств приводит к неравенству

$$\begin{aligned}
\|z_{\alpha(\delta)}\|^2 &\leq \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)}(1 + \|z^0\|)^2 + \|z^0\|^2 \leq \beta_1(\delta)(1 + \|z^0\|)^2 + \|z^0\|^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \|z^0\|^2, \text{ откуда следует} \\
\|z_{\alpha(\delta)}\| &\leq \|z^0\| + O(\sqrt{\beta_1(\delta)}). \text{ В пределе при } \delta \rightarrow 0 \text{ получаем неравенство } \|z_0\| \leq \|z^0\|, \\
&\text{что возможно только при } z^0 = z_0, \text{ поскольку } z^0 \text{ — нормальное решение с наименьшей} \\
&\text{нормой.} \quad \square
\end{aligned}$$

В случае неразрешимости исходной задачи справедлива

**Теорема 4.** (доказательство см. [1]) Пусть  $z^0$  есть нормальное решение системы  $Az = u$  и вместо вектора  $u$  мы имеем вектор  $u_{\delta}$  такой, что  $\|u - u_{\delta}\| \leq \delta$ . Пусть, далее,  $\beta_1(\delta)$  и  $\beta_2(\delta)$  — какие-либо непрерывные и положительные на  $[0, \delta_2]$  функции, монотонно стремящиеся к нулю при  $\delta \rightarrow 0$  и такие, что

$$\frac{\delta}{\beta_1(\delta)} \leq \beta_2(\delta), \quad \beta_2(0) = 0.$$

Тогда для любой положительной на  $[0, \delta_2]$  функции  $\alpha = \alpha(\delta)$ , удовлетворяющей условию

$$\frac{\delta}{\beta_1(\delta)} \leq \alpha(\delta) \leq \beta_2(\delta), \quad (15)$$

векторы  $z_{\alpha(\delta)}$ , являющиеся решением уравнения Эйлера

$$(A^*A + \alpha(\delta)E)z_{\alpha(\delta)} = A^*u \quad (16)$$

сходятся к нормальному решению системы  $Az = u$  при  $\delta \rightarrow 0$ , т. е.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|z_{\alpha(\delta)} - z^0\| = 0. \quad (17)$$

**Замечание 6.** В случае теоремы 3 из неравенства  $\delta^2/\beta_1(\delta) \leq \alpha(\delta) \leq \beta_2(\delta)$  при  $\beta_1(\delta) = \beta_2(\delta) = \delta$  находим  $\alpha(\delta) = \delta$ . Аналогично в случае теоремы 4 при  $\beta_1(\delta) = \beta_2(\delta) = \sqrt{\delta}$  находим  $\alpha(\delta) = \sqrt{\delta}$ .

**Замечание 7.** В уравнении Эйлера  $(A^*A + \alpha E)z = A^*u$  матрица  $B = (A^*A + \alpha E)$  — симметрическая и положительно определенная. Её собственные числа  $\lambda_k(B)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , вещественны и положительны, а собственные векторы  $X_k(B)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , совпадающие с собственными векторами матрицы  $A^*A$ , считаем ортонормированными. Следовательно, решение уравнения Эйлера  $z_{\alpha} = B^{-1}A^*u$  представимо в виде

$$z_{\alpha} = \sum_{k=1}^n \frac{(A^*u, X_k(B))}{\lambda_k(A^*A) + \alpha} X_k(B). \quad (18)$$

Таким образом, регуляризация процесса решения состоит в ослаблении влияния слагаемых в разложении (18), соответствующих малым собственным значениям, их увеличением на  $\alpha$ , величина которого выбирается на основе неравенств в теоремах 3, 4.

## 6. Специальные матрицы. Квадратный корень из матрицы

**Определение 3.** Матрица  $A$  называется положительно определенной, если для любого  $x \neq 0$  справедливо неравенство  $(Ax, x) > 0$ .

*Пример*

Рассмотрим  $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & m \\ -m & \varepsilon \end{pmatrix}$ ,  $\varepsilon > 0$ , тогда  $Ax = \begin{pmatrix} \varepsilon & m \\ -m & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon x_1 + mx_2 \\ -mx_1 + \varepsilon x_2 \end{pmatrix}$ .

Очевидно,  $(Ax, x) = \varepsilon x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + mx_1x_2 - mx_1x_2 = \varepsilon(x_1^2 + x_2^2) > 0$ .

В смысле определения  $A$  положительно определена и её собственные числа суть корни характеристического уравнения  $\lambda^2 - 2\varepsilon\lambda + (\varepsilon^2 + m^2) = 0$ :  $\lambda_{1,2} = \varepsilon \pm \sqrt{-m^2}$  — собственные числа комплексные.

Справедливы следующие утверждения.

**Утверждение 1.** Все собственные числа положительно определенной матрицы имеют положительные вещественные части.

**Утверждение 2.** Все собственные числа симметрической положительно определенной матрицы положительны, а соответствующие им собственные векторы можно выбрать ортонормированными.

Существуют так называемые матрицы осцилляционного типа (см. [2]). Примером таких матриц являются обобщенные матрицы Вандермонда

$$A = \left( a_k^{b_j} \right)_{k,j=1}^n, \quad 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n, \quad b_1 < b_2 < \dots < b_n.$$

**Теорема 5.** (см. [2], с. 400) 1. Осцилляционная матрица всегда имеет  $n$  различных положительных собственных чисел  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$ .

2. У первого собственного вектора матрицы, отвечающего наибольшему собственному числу, все координаты отличны от нуля и одного знака. У собственного вектора, отвечающего второму по величине собственному числу, в ряду координат имеется точно одна перемена знака, и вообще в ряду координат  $k$ -ого собственного вектора, соответствующего  $k$ -ому собственному числу, имеется точно  $k-1$  перемена знака ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

**Замечание 8.** Утверждение этой теоремы аналогично поведению ортогональных в метрике пространства  $L_2$  многочленов Лежандра — первый многочлен постоянен и знака не меняет, у второго есть одна точка перемены знака — это корень многочлена первой степени, и так далее, и эти точки перемены знака чередуются (см. [3]).

**Замечание 9.** У диагональной матрицы  $A = \text{diag}[1, 2, \dots, n]$  все собственные числа положительны и различны, а в качестве собственных векторов можно взять орты осей, но они не обладают свойством осцилляции.

**Определение 4.** Квадратным корнем из матрицы  $A$  назовем матрицу  $B$  такую, что  $B^2 = A$ .

Квадратный корень из матрицы не обязательно существует и не обязательно единственен.

*Пример 1*

Рассмотрим  $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ .

Вычисления дают  $B_1^2 = B_2^2 = \begin{pmatrix} 33 & 24 \\ 48 & 57 \end{pmatrix}$ .

Следовательно, сразу четыре матрицы  $\pm B_1$ ,  $\pm B_2$  являются корнями из матрицы  $A = \begin{pmatrix} 33 & 24 \\ 48 & 57 \end{pmatrix}$ .

*Пример 2*

Пусть  $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Для любого  $a$  имеем  $B^2 = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , т. е. существует бесконечное число корней из нулевой матрицы.

*Пример 3*

Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Запишем искомый квадратный корень  $B = \sqrt{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

Тогда неопределенные коэффициенты можно найти из условий:

$$B^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $c = 0$ , тогда  $a^2 = d^2 = 1$ , т. е.  $a = d = 1$ .  $b(a + d) = 1$ , следовательно,  $b = \frac{1}{2}$ , так

что получаем  $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

*Пример 4*

Рассмотрим  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Задача: убедиться, что у этой матрицы нет квадратных корней.

Также приведем здесь утверждение, которое понадобится нам в дальнейших рассуждениях.

**Утверждение 3.** Для симметрической положительно определенной матрицы существует единственный симметрический положительно определенный корень из неё.

Пример использования этого утверждения и построение квадратного корня из обобщённых матриц Вандермонда приводятся далее.

## 6.1. Регуляризация СЛАУ с симметрической положительно определенной матрицей

Согласно утверждению 3 для симметрической положительно определенной матрицы  $A$  существует единственный положительно определенный корень из неё, т. е. симметрическая определенная матрица  $B$  такая, что  $B^2 = A$ .

Пусть  $\mu$  и  $x$  – собственное число и отвечающий ему собственный вектор матрицы  $B$ , т. е.

$$Bx = \mu x. \quad (19)$$

После умножения этого равенства слева на  $B$  получим  $Ax = \mu Bx$ . Используя (19), получим  $Ax = \mu^2 x$ . Это равенство означает, что собственные векторы матриц  $A$  и  $B$  совпадают, а собственные числа матрицы  $B$  суть квадратные корни из собственных чисел матрицы  $A$ . Умножая исходное уравнение  $Az = u$  слева на матрицу  $B^{-1}$ , получим

$$Bz = B^{-1}u.$$

Запишем функционал (12) для этого уравнения:

$$M_\alpha(z, B, B^{-1}u) = \|Bz - B^{-1}u\|^2 + \alpha \|z\|^2, \quad \alpha > 0,$$

уравнение Эйлера (13) для него примет вид

$$(B^*B + \alpha E)z_\alpha = B^*(B^{-1}u), \quad (20)$$

или в силу самосопряженности  $B$

$$(A + \alpha E)z_\alpha = u. \quad (21)$$

Итак, метод регуляризации А.Н. Тихонова для уравнения (9) с симметрической положительно определенной матрицей вместо общего уравнения (13) может быть сведен к более простой системе (21) (фактически это метод регуляризации М.М. Лаврентьева). Основное преимущество такого подхода состоит в том, что число обусловленности при этом не возрастает.

## 6.2. Регуляризация СЛАУ в случае осцилляционных матриц

Существуют классы несимметрических матриц, все собственные значения которых положительны. Покажем, как в этом случае можно осуществить процесс регуляризации в форме (20), а не в традиционной форме что, как уже упоминалось выше, существенно уменьшает число обусловленности решаемой системы. Рассмотрим класс осцилляционных матриц, появляющихся при исследовании малых колебаний механических систем, все собственные значения которых положительны и попарно различны, а соответствующие собственные векторы обладают особыми свойствами колебаний (см. [2]). Справедливо следующее

**Утверждение 4.** Пусть  $A_n$  – осцилляционная матрица, а  $V$  есть матрица её собственных векторов,  $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$  – диагональная матрица собственных чисел матрицы  $A_n$ . Тогда  $A_n V = V \Lambda$  или  $A_n = V \Lambda V^{-1}$ . Пусть  $\Lambda_1 = [\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}]$ . Положим  $B = V \Lambda_1 V^{-1}$ . Понятно, что  $B^2 = V \Lambda_1 V^{-1} V \Lambda_1 V^{-1} = V \Lambda_1^2 V^{-1} = A_n$ . Следовательно,  $B$  есть корень из  $A_n$ , и собственные векторы этих матриц совпадают.

Таким образом, процесс регуляризации решения исходной системы с матрицей осцилляционного типа может быть осуществлен в форме (20). Число обусловленности задачи (20) существенно меньше, чем у стандартной формы метода регуляризации (13).

Отметим, что матрица  $B^*B^{-1}$  в правой части уравнения (20) невелика по норме (в случае симметрии  $A$  она равна единичной матрице) и не сильно увеличивает погрешность вектора  $u$ . Методы вычисления необходимого нам квадратного корня матрицы описаны в работе [4]. Заметим, что для осцилляционных матриц можно использовать метод Ньютона в форме

$$B_{k+1} = \frac{1}{2} (B_k + B_k^{-1} A), \quad k = 0, 1, \dots$$

при удачном выборе начального приближения  $B_0$ .

### 6.3. Классификация линейно независимых координатных систем

Как правило, матрица СЛАУ порождается координатной системой  $\{\omega_k\}$  в гильбертовом пространстве и является её матрицей Грама  $\Gamma_n = (\omega_k, \omega_j)_{k,j=1}^n$ . Эта матрица симметрическая и положительно определена для линейно независимой системы  $\{\omega_k\}$ .

Координатная система может быть (см. [5])

- 1) не минимальной;
- 2) минимальной;
- 3) сильно минимальной;
- 4) почти ортонормированной.

Система элементов  $\{\omega_k\}$  — минимальная, если удаление из неё любого элемента сокращает натянутое на неё подпространство.

Пусть  $0 < \lambda_1^{(n)} \leq \dots \leq \lambda_n^{(n)}$  — собственные числа матрицы Грама.

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^{(n)} > 0$ , то система сильно минимальна.

Если система сильно минимальна и к тому же  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{(n)} < \infty$ , то система почти ортонормированная.

Эта информация о матрице СЛАУ будет полезна при выборе метода регуляризации.

В общем случае матрица  $A$  и правая часть  $u$  известны приближенно с погрешностью  $\delta$ , и выбор параметра регуляризации  $\alpha$  зависит от этой погрешности (см. [6]). В приводимых далее примерах матрица  $A$  и правая часть  $u$  известны практически точно, т.е.  $\delta$  — это погрешность представления чисел в компьютере, и параметр  $\alpha$  имеет тот же порядок.

Для интегрального оператора  $Az = \int_0^1 K(s, t)z(t) dt$  норма  $A$  вычисляется и оценивается следующими формулами:

$$1) \|A\|_{C \rightarrow C} = \max_s \int_0^1 |K(s, t)| dt,$$

$$2) \|A\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 |K(s, t)|^2 ds dt},$$

$$3) \|A\|_{L_2 \rightarrow L_2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}},$$

где  $\lambda_1$  — наименьшее из характеристических чисел интегрального оператора  $A^*A$ , т.е. таких, что  $\lambda A^*Au = u$ ,  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$ .

Аналогичным образом можно оценить, например,  $\|A\|_{C \rightarrow L_2}$ .

## 7. Решение интегрального уравнения первого рода

### 7.1. Решение интегрального уравнения первого рода с помощью квадратурных формул

Дано уравнение

$$Az \equiv \int_0^1 K(x, s)z(s) ds = u(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (22)$$

Выбираем квадратурную формулу (например, средних прямоугольников) вида

$$\int_0^1 g(s) ds \approx \sum_{k=1}^n A_k g(s_k)$$

и применяем её для интеграла в исходном уравнении:

$$\sum_{k=1}^n A_k K(x, s_k) z(s_k) = u(x).$$

Полагая здесь  $x = s_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , приходим к СЛАУ

$$\sum_{k=1}^n A_k K(s_j, s_k) z(s_k) = u(s_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad (23)$$

с неизвестными числами  $z(s_k)$ . Запишем эту систему в матричном виде

$$CZ = U$$

и будем её решать методами регуляризации, описанными выше, т.е. находя решение системы

$$(C^*C + \alpha E)Z = C^*U \quad (24)$$

с положительным параметром  $\alpha$ . Так как матрица  $C$  и правая часть  $U$  вычисляются практически точно, то значения параметра регуляризации  $\alpha$  следует выбирать в пределах точности вычислений.

Сравнить получаемые приближения с решением системы  $CZ = U$  и объяснить механизм регуляризации.

Для отладки рекомендуется взять какую-либо функцию  $z(s)$  и вычислить соответствующую правую часть  $u(x)$  по заданному ядру  $K(x, s)$ , а затем применить метод квадратур для восстановления уже известного решения.

Для решения этой задачи можно применить метод регуляризации непосредственно для исходного интегрального уравнения, описанный в книге Тихонова и Арсенина [1].

## 7.2. Решение интегрального уравнения первого рода с помощью метода Галеркина

Дано уравнение

$$Az \equiv \int_0^1 K(x, s) z(s) ds = u(x), \quad x \in [0, 1].$$

Выбираем координатную систему  $\{\omega_k(x)\}_{k=1}^\infty$  из области определения оператора  $A$  и приближённое решение уравнения ищем в виде

$$z_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \omega_k(x).$$

Неизвестные коэффициенты  $c_k$  находим из условия равенства моментов величин  $Az_n$  и  $u$ , т.е. равенств

$$(Az_n, \omega_j) = (u, \omega_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad (25)$$



что приводит к СЛАУ

$$\sum_{k=1}^n c_k(A\omega_k, \omega_j) = (u, \omega_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (26)$$

Запишем СЛАУ (26) в матричном виде  $BC = U$ . Эта система заведомо плохо обусловлена, в чём следует убедиться, вычислив её число обусловленности. Будем её решать методом регуляризации, т. е. находя решение системы  $(B^*B + \alpha E)C = B^*U$  с положительным параметром  $\alpha$ .

Рекомендуется использовать разные способы сведения интегрального уравнения к СЛАУ, сопоставить получающиеся приближенные решения и оценить их трудоёмкость и точность.

В качестве координатной и моментной системы  $\{\omega_k(x)\}_{k=1}^\infty$  рекомендуется выбирать ортогональную в  $L_2(0, 1)$  систему многочленов Лежандра  $\{P_{k-1}(2x - 1)\}_{k=1}^\infty$ . Для вычисления всех скалярных произведений, т. е. интегралов, входящих в СЛАУ, можно применять квадратурные формулы или имеющиеся средства в используемых пакетах.

### 7.3. Метод регуляризации для решения интегрального уравнения первого рода

Рассматриваем уравнение

$$Az \equiv \int_0^1 K(s, t)z(t) dt = u(s), \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (27)$$

Считаем, что известно  $u_\delta$  такое, что  $\|u - u_\delta\|_{L_2} \leq \delta$ , т. е.  $\int_0^1 (u(t) - u_\delta(t))^2 dt \leq \delta^2$  и оператор  $A$ , действующий из пространства  $\mathbf{C}$  в пространство  $L_2$  ( $A : \mathbf{C} \rightarrow L_2$ ). Предположим, что искомое решение принадлежит некоторому компактному подмножеству пространства  $\mathbf{C}$ . Для его задания воспользуемся следующим фактом (см. [11]): множество элементов  $Z_d = \{z : \Omega(z) < d, d > 0\}$ , где

$$\Omega(z) = \int_0^1 (p(t)z'(t) + r(t)z^2(t)) dt, \quad p(t), r(t) \geq 0,$$

удовлетворяет теореме Арцела–Асколи и потому компактно в пространстве  $\mathbf{C}$ .

По аналогии с конечномерным случаем (СЛАУ) введём функционал

$$M_\alpha(z, A, u_\delta) = \|Az - u_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha\Omega(z), \quad \alpha > 0, \quad (28)$$

и поставим задачу нахождения элемента  $z$ , минимизирующего функционал  $M_\alpha$ . Пусть  $z$  реализует минимум  $M_\alpha$ . Положим  $z + \gamma v$ , где  $v$  — произвольный элемент, а  $\gamma \geq 0$ . Условие

минимума таково:  $\frac{\partial}{\partial \gamma} M_\alpha(z + \gamma v, A, u_\delta) \Big|_{\gamma=0} = 0$ . Используя представление

$$\begin{aligned} M_\alpha(z + \gamma v, A, u_\delta) &= \\ &= (A(z + \gamma v) - u_\delta, A(z + \gamma v) - u_\delta) + \alpha \int_0^1 (p(t)(z'(t) + \gamma v'(t))^2 + r(t)(z(t) + \gamma v(t))^2) dt, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial M_\alpha}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=0} &= 2(Av, Az - u_\delta) + \alpha \Omega'_\gamma \Big|_{\gamma=0} = 2(v, A^*Az - A^*u_\delta) + \alpha \Omega'_\gamma \Big|_{\gamma=0} = \\
&= 2(v, A^*Az - A^*u_\delta) + 2\alpha \int_0^1 (pz'v' + rzv) dt = \\
&= 2 \left( (v, A^*Az - A^*u_\delta) + \alpha \left( \int_0^1 rzv dt + \int_0^1 pz' dv \right) \right).
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
\int_0^1 rzv dt + \int_0^1 pz' dv &= (v, rz) + pz'v \Big|_0^1 - \int_0^1 v(pz')' dt = \\
&= (v, rz - (pz')') + p(1)z'(1)v(1) - p(0)z'(0)v(0),
\end{aligned}$$

имеем

$$\frac{M'_\alpha|_{\gamma=0}}{2} = (v, A^*Az - A^*u_\delta) + \alpha(v, rz - (pz')') + p(1)z'(1)v(1) - p(0)z'(0)v(0).$$

Следовательно, при выполнении граничного условия

$$p(1)z'(1)v(1) - p(0)z'(0)v(0) = 0 \tag{29}$$

для любого элемента  $v$  должно выполняться равенство

$$\alpha(-(pz')' + rz) + A^*Az - A^*u_\delta = 0. \tag{30}$$

Введем оператор  $Lz = -(pz')' + rz$ , тогда уравнение Эйлера можно записать в виде

$$(A^*A + \alpha L)z = A^*u_\delta. \tag{31}$$

Рассмотрим следующие варианты граничных условий:

- I.  $z(0) = z(1) = 0$ ;
- II.  $z'(0) = z'(1) = 0$ ;
- III.  $z(0) = z'(1) = 0$ ;
- IV.  $z'(0) = z(1) = 0$ .

В случае краевой задачи I допустимая вариация  $v$  должна удовлетворять условию  $v(0) = v(1) = 0$ , и условия (29) выполняются. В случае задачи II условия (29) также выполняются. В случае задачи III необходимо  $v(0) = 0$ , и вновь условия (29) выполнены. В случае задачи IV необходимо  $v(1) = 0$ , и вновь условия (29) выполнены.

Неоднородные граничные условия простой заменой переменной сводятся к однородным: так, неоднородная I краевая задача:  $z(0) = a$ ,  $z(1) = b$ , заменой переменной  $\tilde{z}(t) = z(t) - (a(1-t) + bt)$  сводится к однородной.

Оператор  $A^*A$  есть интегральный оператор с ядром  $K_1(s, t) = \int_0^1 K(x, s)K(x, t) dx$  и в итоге уравнение Эйлера записывается в виде интегро-дифференциального уравнения

$$\alpha((-p(t)z'(t))' + r(t)z(t)) + \int_0^1 K_1(s, t)z(t) dt = \int_0^1 K(t, s)u_\delta(s) ds. \tag{32}$$

Вопрос разрешимости этого уравнения.

Существование и единственность точки минимума функционала: понятия выпуклого и строго (сильно) выпуклого функционала. Лучше всего привести результаты из книги Бакушинского и Гончарского, 1989, МГУ, с. 32... и 42-43.

Можно рекомендовать книгу Иванов, Васин, Танана стр. 69-71 о строгой выпуклости минимизируемого функционала и единственности его точки минимума.

Множество  $V$ -пространства строго выпукло, если в нем равенство

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

возможно лишь при  $x = cy$ .

Любое гильбертово пространство строго выпукло.  $V$ -пространства  $l_p, L_p$  при  $p > 1$  строго выпуклы, а  $l_1, L_1, C$  не таковы.

Функционал  $g$  называется выпуклым на выпуклом множестве, если для любых  $x, y, 0 \leq \lambda \leq 1$

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)$$

и строго выпуклым, если

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y).$$

Пусть  $x_1, x_2$  – различные точки минимума строго выпуклого функционала и  $g(x_1) = g(x_2)$ , тогда

$$g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2) = g(x_1),$$

т. е. в точке  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$  значение ещё меньше, что противоречит предположению.

Наш функционал (28) строго выпуклый, у него существует единственная точка минимума на хорошем (замкнутом компактном) множестве (теорема Арцела-Асколи), где по априорному предположению и лежит искомое решение. Так что решение уравнений (31, 32) существует и осталось его найти.

Ситуация упрощается, если исходное уравнение разрешимо:

**Теорема 6.** Пусть уравнение  $Az = u_T$  имеет единственное решение  $z_T$ . Тогда по любому  $\varepsilon > 0$  и для  $\beta_1(\delta), \beta_2(\delta)$  таких, что  $\beta_1(0) = \beta_2(0) = 0$ , убывающих при  $\delta \rightarrow 0$  и связанных неравенством  $\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \leq \beta_2(\delta)$ , существует  $\delta_0 = \delta_0(\beta_1, \beta_2, \varepsilon)$ , для любого  $u_\delta \in L_2(0, 1)$ , для которого  $\|u_T - u_\delta\| \leq \delta$ ,  $\delta \leq \delta_0$  и если  $\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \leq \alpha \leq \beta_2(\delta)$  и  $z_\alpha$  – решение уравнения Эйлера, то  $\|z_T - z_\alpha\|_C \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $z_\alpha$  – решение уравнения Эйлера. Справедлива очевидная цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \alpha \Omega(z_\alpha) &\leq M_\alpha(z_\alpha, A, u_\delta) \leq M_\alpha(z_T, A, u_\delta) = \\ &= \rho_{L_2}^2(Az_T, u_\delta) + \alpha \Omega(z_T) = \underbrace{\rho_{L_2}^2(u_T, u_\delta)}_{\leq \delta^2} + \alpha \Omega(z_T), \end{aligned}$$

откуда

$$\Omega(z_\alpha) \leq \frac{\delta^2}{\alpha} + \Omega(z_T) \leq \beta_1(\delta) + \Omega(z_T) \quad (33)$$

при  $\delta \leq \delta_0$  для любого  $\alpha$ .

Следовательно,  $\{z_\alpha\}$  — множество всевозможных решений уравнений Эйлера компактно в  $\mathbf{C}$ .

$M_\alpha(z_\alpha, A, u_\delta) \leq \delta^2 + \alpha\Omega(z_T) \rightarrow 0$ , откуда  $\|Az_\alpha - u_\delta\|^2 + \alpha\Omega(z_T) \rightarrow 0$ , значит, существует такая подпоследовательность  $\alpha_n(\delta)$ , что  $z_{\alpha_n(\delta)} \rightarrow \bar{z}$ , и элемент  $\bar{z}$  — решение исходного уравнения  $Az = u_T$ . В силу единственности точного решения  $\bar{z} = z_T$ .  $\square$

## 8. Решение интегро-дифференциального уравнения

Необходимо решить уравнение (32):

$$\alpha((-p(s)z'(s))' + r(s)z(s)) + \int_0^1 K_1(s, t)z(t) dt = \int_0^1 K(t, s)u_\delta(t) dt.$$

Укажем два возможных пути решения:

- 1) Используем квадратурные формулы и формулы численного дифференцирования.

Предполагаем, что ядро  $K$  и функция  $r$  непрерывны,  $z \in \mathbf{C}^4([0, 1])$ ,  $p \in \mathbf{C}^3([0, 1])$ .

Учитывая, что

$$(pz')'|_{s=s_k} \approx \frac{p_{k-1/2}z_{k-1} - (p_{k-1/2} + p_{k+1/2})z_k + p_{k+1/2}z_{k+1}}{h^2}, \quad \text{имеем}$$

$$\begin{aligned} \alpha \left( -\frac{p_{k-1/2}z_{k-1} - (p_{k-1/2} + p_{k+1/2})z_k + p_{k+1/2}z_{k+1}}{h^2} + r_k z_k \right) + \sum_{j=0}^n A_j K_1(s_k, t_j) z_j = \\ = \underbrace{\int_0^1 K(t, s_k) u_\delta(t) dt}_{u_k}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad z_0, z_n \text{ известны.} \end{aligned}$$

Получили СЛАУ относительно неизвестных  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

- 2) Рассмотрим метод Галеркина для уравнения  $(\alpha L + A^* A)z = A^* u_\delta$ .

Выбираем координатную систему  $\{\omega_k\}$ .

Решение ищем в виде  $\tilde{z}_n = \sum_{k=1}^n c_k \omega_k$ .

Получаем систему линейных уравнений метода Галеркина.

$$\alpha \sum_{k=1}^n c_k (L\omega_k, \omega_j) + \sum_k c_k (A^* A \omega_k, \omega_j) = (A^* u_\delta, \omega_j), \quad j = \overline{1, n}.$$

Граничные условия могут иметь один из выше указанных видов.

Далее применяются описанные методы регуляризации решения СЛАУ.

## 9. Примеры и метод регуляризации

Рассмотрим интегральное уравнение  $\int_0^1 z(t) dt = 5$ , в котором  $K(s, t) \equiv 1$ ,  $K_1(s, t) \equiv 1$ . Очевидно, задача некорректна, и у неё существует бесконечно много решений.

Сначала попробуем без всякой регуляризации применить квадратурные формулы (например, прямоугольников):

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k = 5.$$

И ничего сказать нельзя.

Очевидно,  $(Kz, z) \geq 0$  для любого  $z$ , и потому запишем регуляризованное уравнение в виде

$$\alpha z(s) + \int_0^1 z(t) dt = 5, \quad \alpha > 0.$$

Отсюда, применяя КФ прямоугольников, получаем СЛАУ

$$\alpha z_i + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k = 5, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Значит,

$$z_1 = z_2 = \dots, z_n = \frac{5}{1 + \alpha}.$$

Заметим, что никаких граничных условий не требовалось.

Теперь применим метод регуляризации и запишем уравнение Эйлера для неё для различных граничных условий:

$$\alpha \left( -(pz'_\alpha(s))' + rz_\alpha(s) \right) + \int_0^1 z_\alpha(t) dt = 5.$$

### 9.1. Случай 1. $p = 1$ , $r = 0$

Решаем уравнение

$$-\alpha z''_\alpha(s) + \underbrace{\int_0^1 z_\alpha(t) dt}_{c_\alpha} = 5. \tag{34}$$

#### 9.1.1. II краевая задача

Граничные условия имеют вид  $z'_\alpha(0) = z'_\alpha(1) = 0$ .

$$-\alpha z''_\alpha(s) = 5 - c_\alpha, \quad z''_\alpha(s) = \frac{c_\alpha - 5}{\alpha}, \quad z'_\alpha(s) = \frac{c_\alpha - 5}{\alpha} s + C.$$

Так как  $z'_\alpha(0) = 0$ , то  $z'_\alpha(s) = \frac{c_\alpha - 5}{\alpha} s$ .

$$z'_\alpha(1) = \frac{c_\alpha - 5}{\alpha} = 0, \text{ следовательно, } c_\alpha = 5.$$

$$z'_\alpha(s) = 0, \text{ значит } z_\alpha(s) = C_1.$$

$$\text{Из (34) } \int_0^1 z_\alpha(t) dt = 5, \quad \int_0^1 C_1 dt = 5, \quad C_1 = 5 \text{ для любого } t.$$

Ответ:  $z_\alpha(s) = 5$  для любого  $\alpha$ .

### 9.1.2. I краевая задача

Рассмотрим краевую задачу I:  $z_\alpha(0) = z_\alpha(1) = 0$ .

$$\text{Так как уравнение имеет вид } -\alpha z''_\alpha(s) + \underbrace{\int_0^1 z_\alpha(t) dt}_{c_\alpha} = 5,$$

$$\text{то } z''_\alpha(s) = \frac{c_\alpha - 5}{\alpha}. \quad \text{Далее } z'_\alpha(s) = \frac{c_\alpha - 5}{\alpha}s + C.$$

$$\text{Следовательно, } z_\alpha(s) = \frac{c_\alpha - 5}{2\alpha}s^2 + C_1s + C_2.$$

$$\text{Отсюда } 0 = C_2, \quad 0 = \frac{c_\alpha - 5}{\alpha} + C_1 \text{ и } z_\alpha(s) = \frac{c_\alpha - 5}{2\alpha}(s^2 - s).$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 z_\alpha(t) dt &= \int_0^1 \frac{c_\alpha - 5}{2\alpha}(t^2 - t) dt = \\ &= \frac{c_\alpha - 5}{2\alpha} \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{c_\alpha - 5}{2\alpha} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{c_\alpha - 5}{2\alpha} \cdot \frac{1}{6} = \frac{c_\alpha - 5}{12\alpha}. \end{aligned}$$

$$\text{Имеем, } c_\alpha - 5 = -12\alpha c_\alpha, \text{ следовательно, } c_\alpha = \frac{5}{1 + 12\alpha}.$$

$$\text{Далее, } \frac{c_\alpha - 5}{2\alpha} = \frac{\frac{5}{1 + 12\alpha} - 5}{2\alpha}, \quad z_\alpha(s) = \frac{-30}{1 + 12\alpha}s(s - 1).$$

## 9.2. Случай 2. $p = 1, \quad r = 1$

### 9.2.1. I краевая задача $z_\alpha(0) = z_\alpha(1) = 0$

$$-\alpha z''_\alpha(s) + \alpha z_\alpha(s) + \underbrace{\int_0^1 z_\alpha(t) dt}_{c_\alpha} = 5,$$

$$-\alpha z''_\alpha(s) + \alpha z_\alpha(s) = 5 - c_\alpha, \quad -z''_\alpha(s) + z_\alpha(s) = \frac{5 - c_\alpha}{\alpha},$$

$$z_\alpha = z_{\text{общ.}} + z_{\text{част.}} = C_1 e^s + C_2 e^{-s} + z_{\text{част.}}, \quad z_\alpha = z_{\text{общ.}} + z_{\text{част.}} = C_1 e^s + C_2 e^{-s} + \underbrace{\frac{5 - c_\alpha}{\alpha}}_{z_{\text{част.}}}.$$

Учитывая граничные условия  $z_\alpha(0) = z_\alpha(1) = 0$ , получаем систему линейных уравнений

$$\text{относительно } C_1, \quad C_2 : \begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{5 - c_\alpha}{\alpha} = 0, \\ C_1 e + C_2 e^{-1} + \frac{5 - c_\alpha}{\alpha} = 0. \end{cases}$$

После нахождения  $C_1, C_2$  как функций  $c_\alpha$ , их подстановки в выражение для  $z_\alpha$  и интегрирования по  $s$  от нуля до единицы получим уравнение относительно  $c_\alpha$ . После нахождения  $c_\alpha$  и подстановки его в выражение для  $z_\alpha$  можно построить график приближенного решения. Качественно картина близка к случаю 9.1.2.

### 9.2.2. III краевая задача $z_\alpha(0) = z'_\alpha(1) = 0$

$$-\alpha z''_\alpha(s) + \alpha z_\alpha(s) = 5 - c_\alpha, \quad -z''_\alpha(s) + z_\alpha(s) = \frac{5 - c_\alpha}{\alpha}, \quad z_\alpha(s) = C_1 e^s + C_2 e^{-s} + \frac{5 - c_\alpha}{\alpha}.$$

Учитывая граничные условия  $z_\alpha(0) = z'_\alpha(1) = 0$ , получаем систему линейных уравнений

$$\text{относительно } C_1, \quad C_2 : \begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{5 - c_\alpha}{\alpha} = 0, \\ C_1 e - C_2 e^{-1} + \frac{5 - c_\alpha}{\alpha} = 0. \end{cases}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущему случаю.

**Замечание 10.** Учет априорной информации об искомом решении осуществляется разумным выбором функций  $p(t), r(t)$  в стабилизирующем функционале

$$\Omega(z) = \int_0^1 (p(t) z'^2_\alpha(t) + r(t) z^2(t)) dt.$$

Значения функций  $p(t), r(t)$  следует увеличивать в тех точках, где желательно усилить требования к поведению оригинала и его производных.

## 10. Обращение преобразования Лапласа

Рассмотрим задачу обращения преобразования Лапласа, т. е. нахождение оригинала  $f(t)$  по его изображению  $F(p)$  из уравнения

$$\int_0^\infty \exp(-pt) f(t) dt = F(p). \quad (35)$$

Методам обращения посвящены книги [7], [8]. Заметим, что в них не идет речи о некорректности задачи обращения.

Основы техники обращения. Приближенные методы.

Порядок действий: выделение точек разрыва после их определения.

Выбор метода обращения.

Уравнения с дробными производными.

## 10.1. Первая схема

Делаем замену переменной

$$e^{-t} = x \in [0, 1], \quad (p > 0), \quad dt = -\frac{dx}{x}, \quad \text{отсюда} \quad \int_0^1 x^{p-1} \underbrace{f(-\ln x)}_{\varphi(x)} dx = F(p).$$

Для вычисления интеграла применяем квадратурную формулу

$$\sum_{k=1}^n x_k^{p-1} \underbrace{A_k \varphi_k}_{\psi_k} = F(p). \quad \Psi_k \text{ — неизвестные, так что } \sum_{k=1}^n x_k^{p-1} \psi_k = F(p).$$

Полагаем  $p = p_j, \quad j = \overline{1, n}$ .

$$\sum_{k=1}^n x_k^{p_j-1} \psi_k = F(p_j), \quad j = \overline{1, n}.$$

$\left(x_k^{p_j-1}\right)_{k,j=1}^n$  — обобщенная матрица Вандермонда.

Если  $p_j = 1, 2, \dots, n$ , то это матрица Вандермонда.

В итоге мы пришли к СЛАУ с матрицей осцилляционного типа, при решении которой следует использовать описанные схемы регуляризации.

## 10.2. Вторая схема

Полагаем

$$p_k = a + rk, \quad b_k = F(p_k), \quad k = 1, \dots, m. \quad (36)$$

Сделаем замену  $x = \exp(-rt)$  и введём функцию

$$h(x) = \frac{x^{a/r}}{r} f\left(-\frac{\ln(x)}{r}\right), \quad (37)$$

в результате вместо уравнения (35) получаем уравнения

$$\int_0^1 x^{k-1} h(x) dx = b_k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (38)$$

Нахождение функции  $h(x)$ , удовлетворяющей условиям (38), можно рассматривать как частный случай полной проблемы моментов (см. [9]). Такой подход рассмотрен в третьей схеме.

Мы предлагаем другой путь решения этой проблемы: выберем некоторую квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 v(x) dx \approx \sum_{j=1}^m A_j v(x_j)$$

и применим её для вычисления интегралов, входящих в уравнения (38), в результате чего придём к СЛАУ

$$\sum_{j=1}^m A_j x_j^{k-1} h(x_j) = b_k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (39)$$

Это СЛАУ относительно неизвестных  $A_j h(x_j)$  с матрицей Вандермонда  $(x_j^{k-1})_{j,k=1}^m$ , относящейся к классу осцилляционных матриц (см. [2]). Следовательно, для решения этой системы можно применять описанные выше методы регуляризации. Разумный выбор значений параметров  $a, r$  описан в работе [10].



### 10.3. Третья схема

Напомним, что значения оригинала  $f(+0)$ ,  $f(+\infty)$ , если они существуют, можно вычислить по формулам

$$f(+0) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p), \quad f(+\infty) = \lim_{p \rightarrow +0} pF(p).$$

Нахождение функции  $h(x)$ , удовлетворяющей условиям (38), можно рассматривать как частный случай полной проблемы моментов (см. [9]).

Приближение к функции (37) будем разыскивать в виде разложения по смещённым многочленам Лежандра

$$h(x) \approx \sum_{j=1}^m c_j P_{j-1}(2x-1). \quad (40)$$

Из формул (37) и (40) при  $x \rightarrow 1$  получаем равенство

$$\frac{f(+0)}{r} \approx \sum_{j=1}^m c_j.$$

Подстановка представления (40) в уравнения (38) приводит к СЛАУ вида (9) с матрицей

$$A = (a_{kj})_{k,j=1}^m, \quad a_{kj} = \int_0^1 x^{k-1} P_{j-1}(2x-1) dx,$$

правой частью  $u = (b_1, b_2, \dots, b_m)'$  и неизвестным вектором  $z = (c_1, c_2, \dots, c_m)'$ .

Требовать от функции  $h(x)$  априорно какой-либо степени гладкости, накладывая некоторые условия на коэффициенты представления (40), не стоит, учитывая связь (37) функции  $h(x)$  с искомым оригиналом, необязательно гладким. В таком случае уравнение Эйлера (13) принимает вид

$$(A^*A + \alpha E)z = A^*u, \quad \alpha > 0. \quad (41)$$

Для решения этой системы можно применять описанные в работе [6] методы регуляризации. Разумный выбор значений входящих в (37) параметров  $a, r$  описан в работе [10].

В общем случае матрица  $A$  и правая часть  $u$  известны приближенно с погрешностью  $\delta$ , и выбор параметра регуляризации  $\alpha$  зависит от этой погрешности. В приводимых далее примерах матрица  $A$  и правая часть  $u$  известны практически точно, т. е.  $\delta$  – это погрешность представления чисел в компьютере, и параметр  $\alpha$  имеет тот же порядок.

На рисунках 2, 3 представлены решения системы (41) с регуляризацией и без неё и значения всех использованных параметров. Параметр Digits задает число значащих цифр, с которым проводятся вычисления.

*Пример 1*

Дано изображение

$$F(p) = \frac{168}{(p+2)^5} - \frac{8640}{(p+3)^7}.$$

Результаты вычислений представлены на рис. 2.

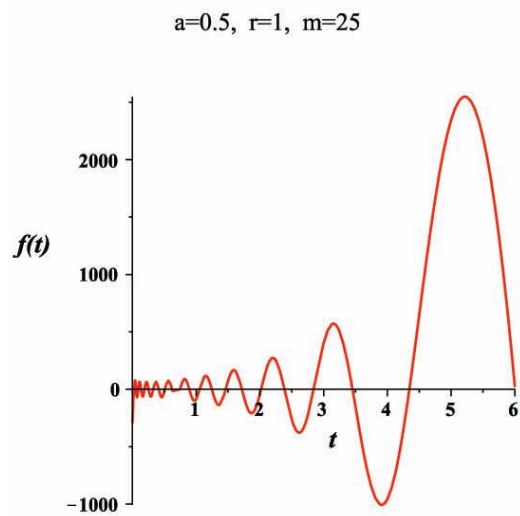
*Пример 2*

Дано изображение

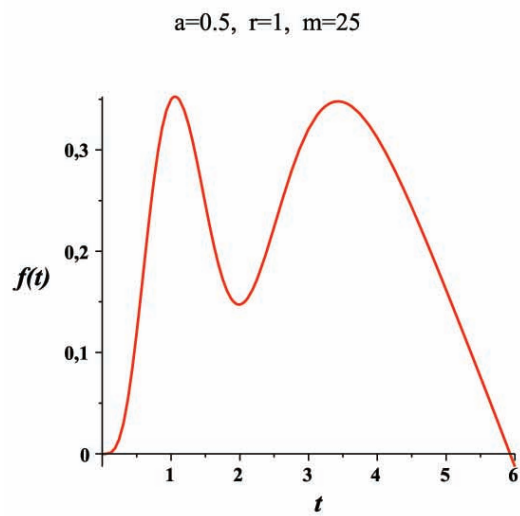
$$F(p) = \frac{\exp(-p) - \exp(-3p)}{p^2}.$$

Результаты вычислений представлены на рис. 3.

Заметим, что при отсутствии регуляризации ( $\alpha = 0$ ) получаемые приближения совершенно не похожи на искомые оригиналы, в то время как регуляризация приводит к вполне удовлетворительным результатам.



(a) Digits=20,  $\alpha = 0$



(b) Digits=20,  $\alpha = 10^{-20}$

Рис. 2

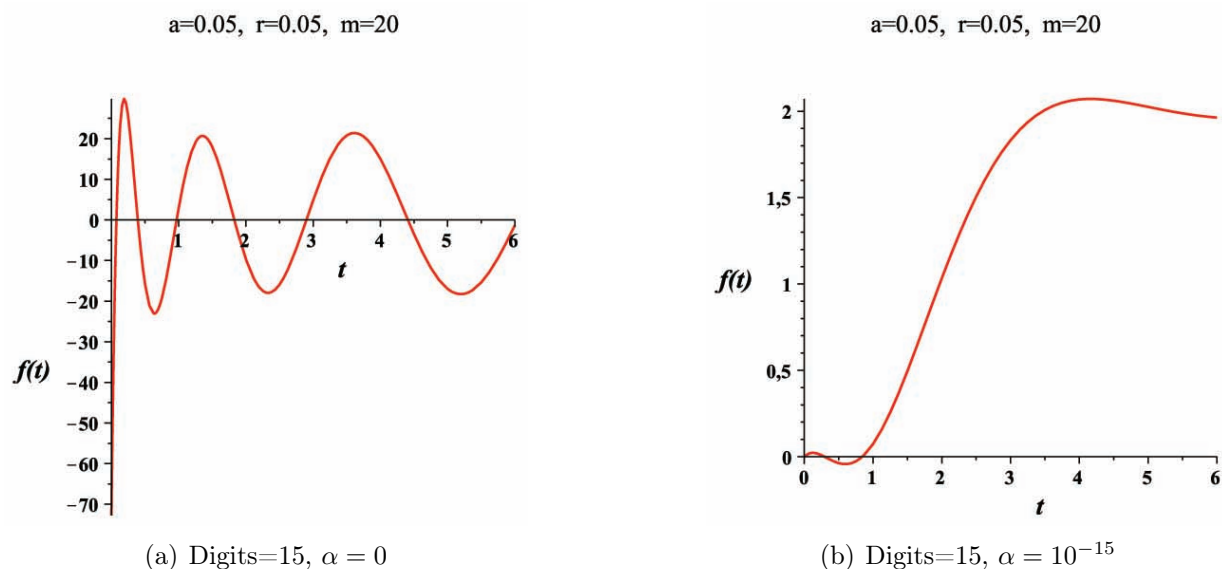


Рис. 3

## Список литературы

- [1] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 284 с.
- [2] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 567 с.
- [3] Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 328 с.
- [4] Higham N. J. Functions of matrices: Theory and computation. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008. 425 p.
- [5] Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с.
- [6] Лебедева А. В., Рябов В. М. О численном решении систем линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленными матрицами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 619–626.
- [7] Cohen A. M. Numerical methods for Laplace transform inversion. NY.: Springer, 2007. 251 p.
- [8] Рябов В. М. Численное обращение преобразования Лапласа. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2013. 187 с.
- [9] Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука. 1973. 552 с.
- [10] Brianzi P. and Frontini M. On the regularized inversion of Laplace transform // Inverse problems. 1991. Vol 7. P. 355–368.

- [11] Даугавет И. К. Теория приближенных методов. Линейные уравнения. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 288 с.