

Filterung von
Frequenzen in
WAV-Audio Dateien
mithilfe der Fourier
Transformation

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT

Performance

Frequency bins

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Filterung von Frequenzen in WAV-Audio Dateien mithilfe der Fourier Transformation

Len-Marvin Adler

Hochschule Bonn-Rhein-Sieg

11. August 2024

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT
Performance

Frequency bins
IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern
Vorgehensweise

Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Inhaltsverzeichnis

1 Begriffe der Digitalen Signalverarbeitung

2 Aufbau einer WAV Datei

3 Fourier Transformation

- DFT, FFT
- Performance
- Frequency bins
- IDFT
- Konvergenzverhalten, Fehleranalyse
- Leck-Effekt, Fensterfunktionen

4 Frequenzen filtern

- Vorgehensweise
- Was kann schon schief gehen?

5 Demonstration des Programms

6 Fazit

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT

Performance

Frequency bins

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

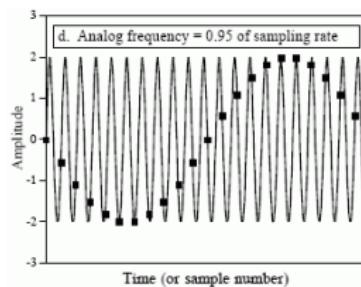
Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Begriffe der Digitalen Signalverarbeitung

- ▶ Digitale Signale sind immer diskret
- ▶ Nyquist-Shannon-Abtasttheorem¹: $f_{abtast} > 2 \cdot \hat{f}_{signal}$
sonst tritt Alias-Effekt auf



- ▶ Nyquist-Frequenz $f_{Nyquist} := \frac{1}{2} f_{abtast}$
⇒ also $\hat{f}_{signal} < f_{Nyquist}$

¹ Steven W. Smith. *The Scientist and Engineer's guide to Digital Signal Processing*. Available at www.dspguide.com. California Technical Publishing, 1997.
Kap. 3. ISBN: 0966017633

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT
Performance

Frequency bins

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Aufbau einer WAV Datei

- ▶ basiert auf RIFF Dateiformat von Microsoft
- ▶ besteht aus den 3 Subchunks²
 - 'RIFF': enthält die Information, dass es sich um eine RIFF WAVE Datei handelt
 - 'fmt ': enthält Informationen über die Daten, wie z.B SampleRate, BitsPerSample
 - 'data': enthält Datenwerte

endian	File offset (bytes)	field name	Field Size (bytes)
big	0	ChunkID	4
little	4	ChunkSize	4
big	8	Format	4
big	12	Subchunk1ID	4
little	16	Subchunk1Size	4
little	20	AudioFormat	2
little	22	NumChannels	2
little	24	SampleRate	4
little	28	ByteRate	4
little	32	BlockAlign	2
little	34	BitsPerSample	2
big	36	Subchunk2ID	4
little	40	Subchunk2Size	4
little	44	data	Subchunk2Size

Abbildung: WAV-Header²

²Craig Stuart Sapp (craig@ccrma.stanford.edu). *Wave PCM soundfile format*. URL: <http://soundfile.sapp.org/doc/WaveFormat/>

Aufbau einer WAV Datei

52 49 46 46 CC BA 06 00 57 41 56 45	66 6D 74 20	RIFFI@..WAVEfmt
10 00 00 00 01 00 01 00 44 AC 00 00 88 58 01 00D~...X..	
02 00 10 00 64 61 74 61 A8 BA 06 00 00 00 9B 57data^@.....W	
7F 19 D0 AF 29 CF F9 41 0A 44 D3 D1 86 AE 76 16	..D`)ÍüA.DÖN.@v	
02 58 28 03 E8 A8 7F E3 CC 4E 6F 33 2B C0 FD B9	.X(.é".áINo3+Ay¹	
74 2B A9 52 9A EC B2 A7 B3 F9 77 56 78 1F B0 B2	t+CR.í²§³uwVx.ºº	
08 CA 9B 3D E7 47 52 D7 43 AC 4F 10 7B 58 72 09	.E.=çGRxC-C-0.{Xr.	
45 AA 9A DD B9 4B 6F 38 B3 C4 4FB6 DA 25 B6 54	Eº.Ý¹Ko8³Aº¹U%¶T	

Abbildung: Ausschnitt einer WAV Datei mit markierten Subchunks,
dargestellt in einem Hex-Editor

- ▶ Abtastrate ist oft 44.1 kHz ³,
Menschen hören Töne im Bereich 20 Hz – 20 kHz ⁴
- ▶ Analoges Signal wird durch lineare Pulse Code
Modulation (PCM) in ein digitales Signal umgewandelt
(verlustfrei)
- ▶ PCM kodiert Daten oft als 16 bit signed integer,
jeder Datenwert liegt im Bereich [-32767, 32767]

³44,100 Hz. Juli 2024. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/44,100_Hz

⁴Hörbahn - so hören wir. URL: <https://www.hno-aerzte-im-netz.de/unser-sinne/hoeren/hoerbahn-hoerfrequenz.html>

Fourier Transformation

DFT, FFT

► DFT: Fourier-Koeffizienten

$$\beta_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{-2\pi i \frac{jk}{n}} ; j = 0, \dots, n-1$$

► FFT: Voraussetzung $n = 2^\psi; \psi \in \mathbb{N}_0$ (Radix-2-FFT) ⇒ Divide-and-Conquer, berechne Fourier-Koeffizienten in 2 Hälften

Sei $m = \frac{n}{2}; \varepsilon_\psi = e^{-\frac{2\pi i}{2^\psi}}$

$$\beta_{2\kappa} = \sum_{k=0}^{m-1} (x_k + x_{k+m}) \varepsilon_{\psi-1}^{\kappa k}; \kappa = 0, \dots, m-1$$

$$\beta_{2\kappa+1} = \sum_{k=0}^{m-1} ((x_k - x_{k+m}) \varepsilon_{\psi}^{\kappa k}) \varepsilon_{\psi-1}^{\kappa k}$$

⇒ insgesamt halbiert sich der Rechenaufwand pro β_j

R.W. Freund und R.W. Hoppe. Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik

1. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2007. ISBN: 9783540453901.

URL: <https://books.google.de/books?id=2aYfBAAAQBAJ>

Fourier Transformation

DFT, FFT

- DFT ist konjugiert symmetrisch⁵,
wenn Datenwerte $x_j \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\beta_{n-j} &= \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot e^{-2\pi i \frac{(N-j)k}{n}} = \overline{\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot e^{-2\pi i \frac{jk}{n}}} \\ &= \overline{\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot e^{-2\pi i \frac{jk}{n}}} = \overline{\beta_j}\end{aligned}$$

⇒ es reicht DFT von Datenwerten x_j
mit $j \in [0, n/2]$ zu berechnen

⁵Brian McFee. *Digital Signals theory*. URL: <https://brianmcfee.net/dstbook-site/content/ch06-dft-properties/Conjugate-Symmetry.html> ↗ ↘ ↙

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT
Performance

Frequency bins

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

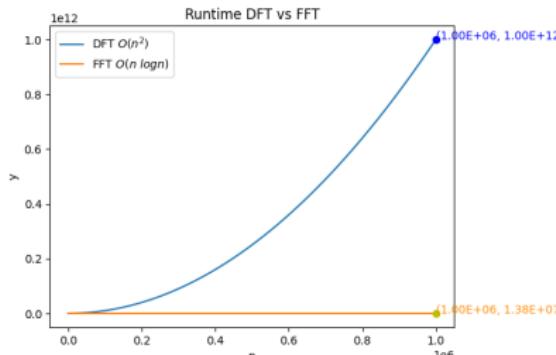
Frequenzen filtern
Vorgehensweise
Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Fourier Transformation

Performance



Für $n = 10^6$, also eine
WAV Datei mit 10^6
Datenwerten (2 MB)
gilt:

- ▶ DFT $\approx 10^{12}$ Iterationen
⇒ Berechnung dauert
ca. $10^{12} \cdot 5 \text{ ns} = 5000 \text{ s}$
 $\approx 83 \text{ min}$
- ▶ FFT $\approx 10^7$ Iterationen
⇒ Berechnung dauert
ca. $10^7 \cdot 5 \text{ ns} = 0.05 \text{ s}$

- ▶ Jede Iteration berechnet $e^{-2\pi i \frac{jk}{n}}$
→ Benchmark⁶: ca. 5 ns

⁶Daumantas Kavolis. *Terrible std::exp performance*. Okt. 2020. URL:
<https://developercommunity.visualstudio.com/t/terrible-stdexpproficiency/1231042>

Fourier Transformation

Frequency bins

- ▶ Frequenzen werden in bins zusammengefasst durch

$$f_i = i \cdot \frac{f_{\text{abtast}}}{n}$$

z.B. für $f_{\text{abtast}} = 44.1 \text{ kHz}$, $n = 1024$

$$0 : 0 \cdot 44100 \text{ Hz} / 1024 = 0.0 \text{ Hz}$$

$$1 : 1 \cdot 44100 \text{ Hz} / 1024 = 43.1 \text{ Hz}$$

$$2 : 2 \cdot 44100 \text{ Hz} / 1024 = 86.1 \text{ Hz}$$

...

$$512 : 512 \cdot 44100 \text{ Hz} / 1024 = 22050 \text{ Hz}$$

...

⇒ Je mehr Datenpunkte, desto schmäler
werden die frequency bins

- ▶ Nyquist-Frequenz gehört zu Bin $n/2$
- ▶ Frequenzspektrum: Frequenz f_i hat Amplitude $|\beta_i|$

Paul R. How do I obtain the frequencies of each value in an FFT? Dez.

2010. URL: <https://stackoverflow.com/a/4371627>

Fourier Transformation

IDFT

- im Grunde ist IDFT nur eine DFT mit Normalisierungsfaktor

$$x_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k e^{2\pi i \frac{jk}{n}} ; j = 0, \dots, n-1$$

- Matrix-Schreibweise:
 $[\omega^{jk}] [\omega^{jk}]^\dagger = n \cdot E_n ; j, k = 0, \dots, n-1$

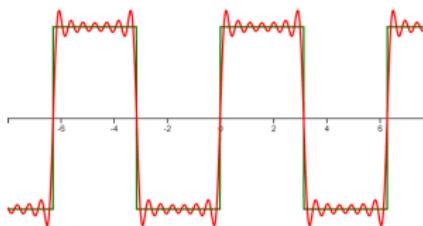
$$\text{mit } \omega = e^{-2\pi i \frac{1}{n}}$$

- auch IFFT existiert um IDFT zu berechnen

Fourier Transformation

Konvergenzverhalten, Fehleranalyse

- ▶ Fourier-Reihe konvergiert punktweise⁷, gleichmäßige Konvergenz in kompakten Intervallen in denen $f(t)$ stetig ist
- ▶ Gibbsches Phänomen: Überschwingung an Unstetigkeitsstellen um mind. 9% bei abgebrochener Fourier-Reihe



Gibbsches Phänomen,

<https://resources.altium.com/de/p/how-gibbs-phenomenon-produces-measurement-artifacts>

⁷Reiner Lauterbach. *Konvergenz der Fourierreihe*. URL: https://www.math.uni-hamburg.de/home/lauterbach/tuhh/komp_func/folien10.pdf.

Fourier Transformation

Konvergenzverhalten, Fehleranalyse

- DFT als Matrix ist eine Vandermonde-Matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & (\omega^2)^2 & \dots & (\omega^2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & (\omega^{n-1})^2 & \dots & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{bmatrix}$$

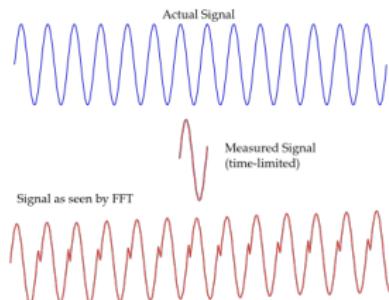
- Vandermonde-Matrizen sind grundsätzlich schlecht
konditioniert, Ausnahme: DFT ist gut konditioniert⁸

⁸Victor Y. Pan. „How bad are vandermonde matrices?“ In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 37.2 (Jan. 2016), S. 676–694. DOI: 10.1137/15m1030170. URL: <https://arxiv.org/abs/1504.021>

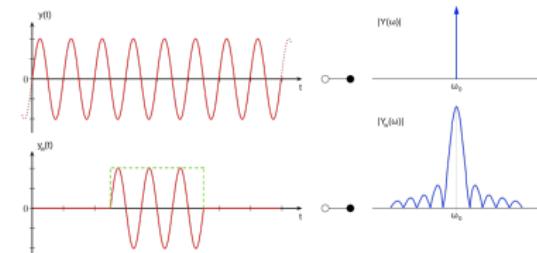
Fourier Transformation

Leck-Effekt, Fensterfunktionen

- ▶ Anzahl der Datenpunkte eines zeitdiskreten Signals ist kein ganzzahliges Vielfaches der Periodendauer
- ▶ DFT gibt Frequenzanteile an, die im unendlich langen Signal nicht vorkämen
- ▶ Leck-Effekt (spectral leakage) tritt auf, weil das Signal nur endlich lange beobachtet werden kann



Zustandekommen des Leck-Effekts,
<https://www.gaussianwaves.com/2011/01/fft-and-spectral-leakage-2/>

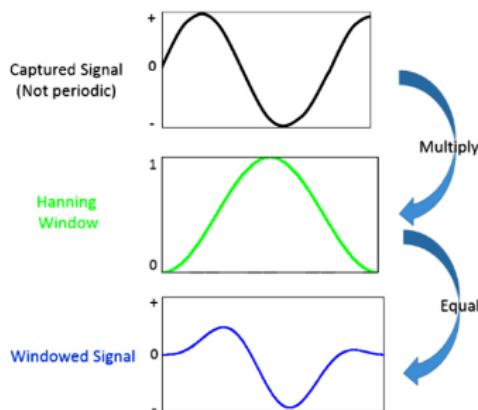


implizite Anwendung eines
Rechteck-Fensters,
<https://de.wikipedia.org/wiki/Leck-Effekt>

Fourier Transformation

Leck-Effekt, Fensterfunktionen

- ▶ Leck-Effekt lässt sich nicht komplett vermeiden
- ▶ Auswirkung aber reduzierbar durch Fensterfunktionen
- ▶ Fensterfunktion wird vor der DFT Operation auf das Signal angewendet, sodass das Signal künstlich periodisiert wird



Anwendung des Von-Hann-Fensters,

<https://www.modalshop.com/rental/learn/basics/how-to-choose-fft-window>

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

- ① Zeitdiskretes Signal durch DFT in Frequenzbereich überführen
- ② Amplitude der zu filternden Frequenzen auf 0 setzen
- ③ IDFT anwenden um das gefilterte zeitdiskrete Signal zu erhalten

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT
Performance

Frequency bins

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

Was kann schon schief
gehen?

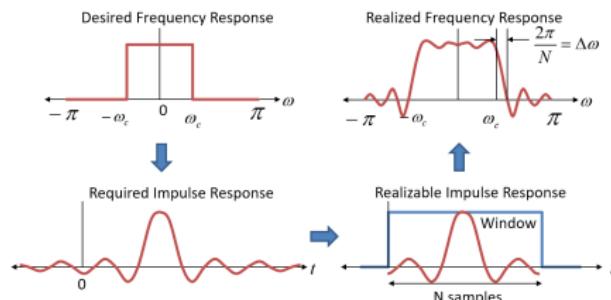
Demonstration
des Programms

Fazit

Frequenzen filtern

Was kann schon schief gehen?

- ▶ Multiplizieren der zu filternden Frequenzanteile mit 0 ist dasselbe wie Rechteck-Fenster anwenden
 - ⇒ Faltungssatz greift erneut
 - ⇒ Frequenzanteile die nicht gefiltert werden sollen, werden auch (leicht) beeinflusst



Idealer vs Realisierbarer Bandpass-Filter,
<https://dsp.stackexchange.com/a/37662>

Frequenzen filtern

Was kann schon schief gehen?

- ▶ Lösung: Fensterfunktion wird auf Rechteck-Fenster angewendet
- ▶ Frequenzen die nicht gefiltert werden sollen, werden nun kaum beeinflusst
- ▶ filtert Frequenzen nicht auf 0, ein kleiner Frequenzanteil bleibt

Filterung von
Frequenzen in
WAV-Audio Dateien
mithilfe der Fourier
Transformation

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT

Performance

Frequency bins

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Demonstration des Programms

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT

Performance

Frequency bins

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Demonstration des Programms



Frequenzspektrum von WAV Datei

Play audio

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT

Performance

Frequency bins

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

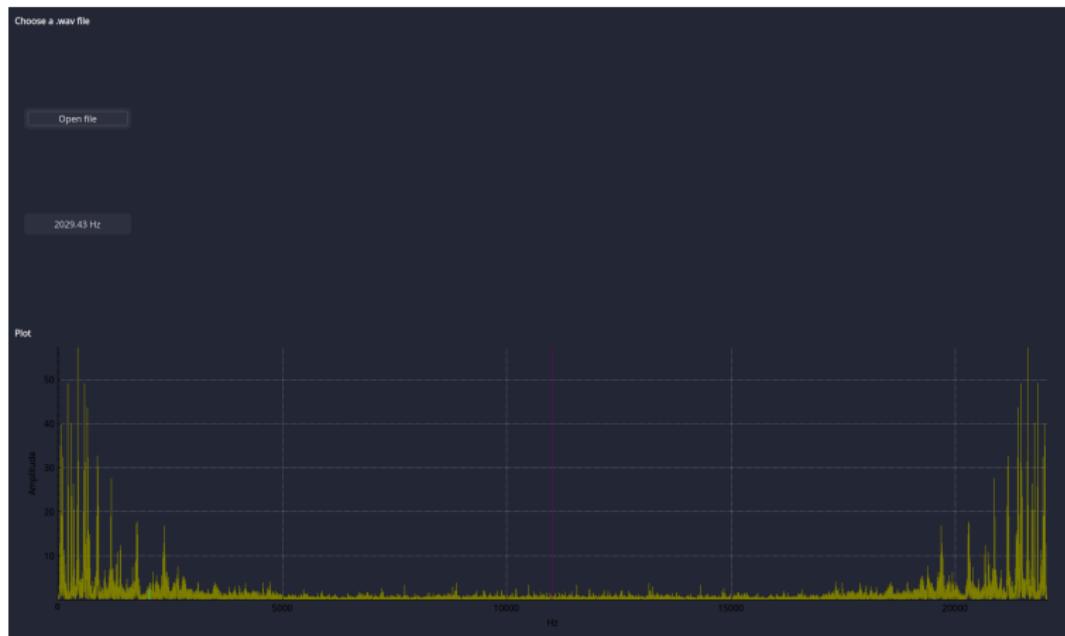
Vorgehensweise

Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Demonstration des Programms



Frequenzspektrum nach Filtern einer Frequenz von WAV Datei

Play audio

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT
Performance

Frequency bins
IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Fazit

- ▶ Mithilfe der DFT lassen sich Frequenzen, die in der Tonspur einer WAV Datei auftreten, fast komplett herausfiltern
- ▶ Die Lautstärke der Audio wird dabei aber leicht gedämpft
 - ⇒ Dennoch ist die Fourier Transformation ein effektives Werkzeug um Frequenzen zu filtern

Temporary page!

\LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because \LaTeX now knows how many pages to expect for this document.