

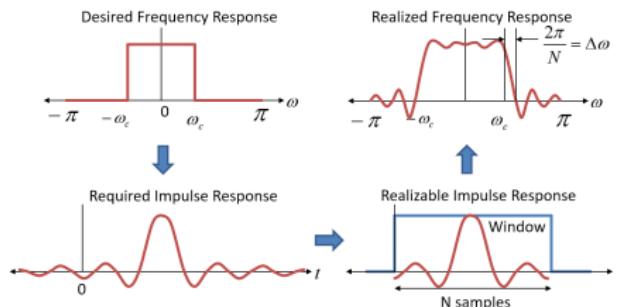
Fourier Transformation anhand WAV-Audio Dateien

Len-Marvin Adler

Hochschule Bonn-Rhein-Sieg

7. August 2024

Rectangular Window



Inhaltsverzeichnis

1 Begriffe der Digitalen Signalverarbeitung

2 Aufbau einer WAV Datei

3 Fourier Transformation

- DFT, FFT
- Performance
- IDFT
- Konvergenzverhalten, Fehleranalyse
- Leck-Effekt, Fensterfunktionen

4 Frequenzen filtern

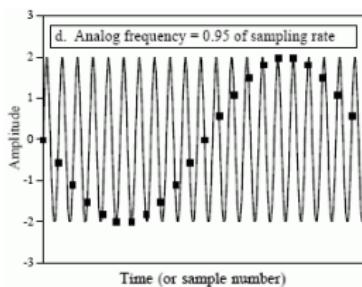
- Vorgehensweise
- Was kann schon schief gehen?

5 Demonstration des Programms

6 Fazit

Begriffe der Digitalen Signalverarbeitung

- ▶ Signale sind immer diskret
- ▶ Nyquist-Shannon-Abtasttheorem¹: $f_{abtast} > 2 \cdot \hat{f}_{signal}$
sonst tritt Alias-Effekt auf



- ▶ Nyquist-Frequenz $f_{Nyquist} := \frac{1}{2} f_{abtast}$
 \Rightarrow also $\hat{f}_{signal} < f_{Nyquist}$

¹ Steven W. Smith. *The Scientist and Engineer's guide to Digital Signal Processing*. Available at www.dspguide.com. California Technical Publishing, 1997.
Kap. 3. ISBN: 0966017633

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT

Performance

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Aufbau einer WAV Datei

- ▶ basiert auf RIFF Dateiformat von Microsoft
- ▶ besteht aus den 3 Subchunks²
 - 'RIFF': enthält die Information, dass es sich um eine RIFF WAVE Datei handelt
 - 'fmt ': enthält Informationen über die Daten, wie z.B SampleRate, BitsPerSample
 - 'data': enthält Datenwerte

Field Size (bytes)	field name	File offset (bytes)	Endian
4	ChunkID	0	big
4	ChunkSize	4	little
4	Format	8	big
4	Subchunk1ID	12	big
4	Subchunk1Size	16	little
2	AudioFormat	20	little
2	NumChannels	22	little
4	SampleRate	24	little
4	ByteRate	28	little
2	BlockAlign	32	little
2	BitsPerSample	34	little
4	Subchunk2ID	36	big
4	Subchunk2Size	40	little
4	data	44	little
4	Subchunk2Size		

Abbildung: WAV-Header²

²Craig Stuart Sapp (craig@ccrma.stanford.edu). *Wave PCM soundfile format*. URL: <http://soundfile.sapp.org/doc/WaveFormat/>

Aufbau einer WAV Datei

52 49 46 46 CC BA 06 00 57 41 56 45	66 6D 74 20	RIFFI@..WAVEfmt
10 00 00 00 01 00 01 00 44 AC 00 00 88 58 01 00D~...X..	
02 00 10 00 64 61 74 61 A8 BA 06 00 00 00 9B 57data"....W	
7F 19 D0 AF 29 CF F9 41 0A 44 D3 D1 86 AE 76 16	..D")IüA.DÖN.@v	
02 58 28 03 E8 A8 7F E3 CC 4E 6F 33 2B C0 FD B9	.X(.é".äINo3+Ay"	
74 2B A9 52 9A EC B2 A7 B3 F9 77 56 78 1F B0 B2	t+CR.i^§^uwVx.^"	
08 CA 9B 3D E7 47 52 D7 43 AC 4F 10 7B 58 72 09	.E.=çGRxC-0.{Xr..	
45 AA 9A DD B9 4B 6F 38 B3 C4 4FB6 DA 25 B6 54	E@.Y^Ko8^A0^U%	

Abbildung: Ausschnitt einer WAV Datei mit markierten Subchunks,
dargestellt in einem Hex-Editor

- ▶ Abtastrate ist oft 44.1 kHz ³,
Menschen hören Töne im Bereich 20 Hz – 20 kHz ⁴
- ▶ Analoges Signal wird durch lineare Pulse Code
Modulation (PCM) in ein digitales Signal umgewandelt
(verlustfrei)
- ▶ PCM kodiert Daten oft als 16 bit signed integer,
jeder Datenwert liegt im Bereich [-32767, 32767]

³44,100 Hz. Juli 2024. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/44,100_Hz

⁴Hörbahn - so hören wir. URL: <https://www.hno-aerzte-im-netz.de/unser-sinne/hoeren/hoerbahn-hoerfrequenz.html>

Fourier Transformation

DFT, FFT

- DFT: Fourier-Koeffizienten

$$\beta_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{-2\pi i \frac{jk}{n}} ; j = 0, \dots, n-1$$

- FFT: Voraussetzung $n = 2^\psi; \psi \in \mathbb{N}_0$ (Radix-2-FFT)
⇒ Divide-and-Conquer, berechne Fourier-Koeffizienten
in 2 Hälften

Sei $m = \frac{n}{2}; \varepsilon_\psi = e^{-\frac{2\pi i}{2^\psi}}$

$$\beta_{2\kappa} = \sum_{k=0}^{m-1} (x_k + x_{k+m}) \varepsilon_{\psi-1}^{\kappa k}; \kappa = 0, \dots, m-1$$

$$\beta_{2\kappa+1} = \sum_{k=0}^{m-1} ((x_k - x_{k+m}) \varepsilon_{\psi-1}^{\kappa k}) \varepsilon_\psi^{\kappa k}$$

⇒ insgesamt halbiert sich der Rechenaufwand

Fourier Transformation

DFT, FFT

- DFT ist konjugiert symmetrisch,
wenn Datenwerte $x_j \in \mathbb{R}$ sind

$$\begin{aligned}\beta_{n-k} &= \sum_{j=0}^{n-1} x_j \cdot e^{-2\pi i \frac{j(N-k)}{n}} = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \cdot \overline{e^{-2\pi i \frac{jk}{n}}} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \overline{x_j \cdot e^{-2\pi i \frac{jk}{n}}} = \overline{\beta_k}\end{aligned}$$

⇒ es reicht DFT von Datenwerten x_j
mit $j \in [0, n/2]$ zu berechnen

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT

Performance

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

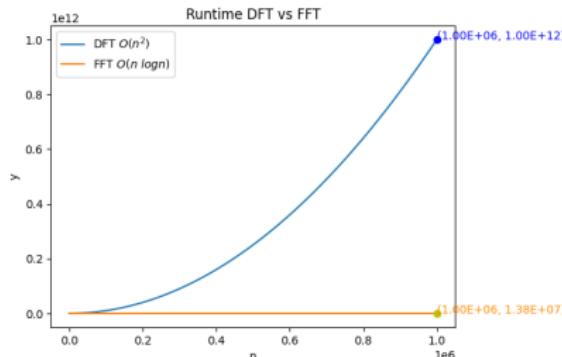
Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Fourier Transformation

Performance



Für $n = 10^6$, also eine
WAV Datei mit 10^6
Datenwerten (2 MB)
gilt:

- ▶ DFT $\approx 10^{12}$ Iterationen
 \Rightarrow Berechnung dauert
ca. $10^{12} \cdot 5 \text{ ns} = 5000 \text{ s}$
 $\approx 83 \text{ min}$
- ▶ FFT $\approx 10^7$ Iterationen
 \Rightarrow Berechnung dauert
ca. $10^7 \cdot 5 \text{ ns} = 0.05 \text{ s}$

- ▶ Jede Iteration berechnet $e^{-2\pi i \frac{jk}{n}}$
 \rightarrow Benchmark⁵: ca. 5 ns

⁵Daumantas Kavolis. *Terrible std::exp performance*. Okt. 2020. URL:
<https://developercommunity.visualstudio.com/t/terrible-stdexpproficiency/1231042>

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT
Performance

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Fourier Transformation

IDFT

- ▶ DFT als Matrix, IDFT als Matrix unitäre Matrix,
Normalisierungsfaktor

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT

Performance

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Fourier Transformation

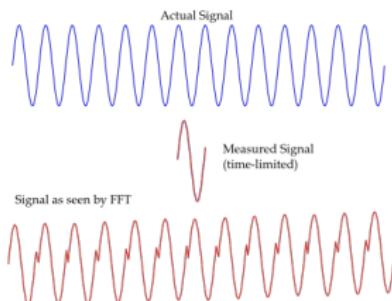
Konvergenzverhalten, Fehleranalyse

► Vandermonde-Matrix

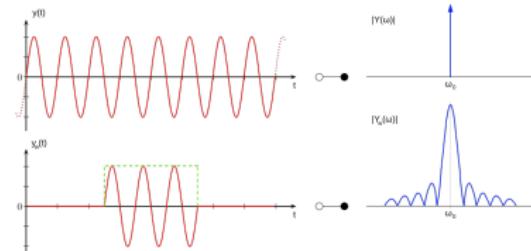
Fourier Transformation

Leck-Effekt, Fensterfunktionen

- Anzahl der Datenpunkte eines zeitdiskreten Signals ist kein ganzzahliges Vielfaches der Periodendauer
- DFT gibt Frequenzanteile an, die im unendlich langen Signal nicht vorkämen
- Leck-Effekt (spectral leakage) tritt auf, weil das Signal nur endlich lange beobachtet werden kann



Zustandekommen des Leck-Effekts,
<https://www.gaussianwaves.com/2011/01/fft-and-spectral-leakage-2/>

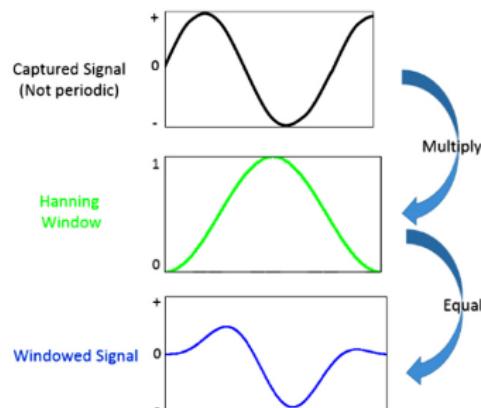


implizite Anwendung eines
Rechteck-Fensters,
<https://de.wikipedia.org/wiki/Leck-Effekt>

Fourier Transformation

Leck-Effekt, Fensterfunktionen

- ▶ Leck-Effekt lässt sich nicht komplett vermeiden
- ▶ Auswirkung aber reduzierbar durch Fensterfunktionen
- ▶ Fensterfunktion wird vor der DFT Operation auf das Signal angewendet, sodass das Signal künstlich periodisiert wird



Anwendung des Von-Hann-Fensters,

<https://www.modalshop.com/rental/learn/basics/how-to-choose-fft-window>

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

- ① Zeitdiskretes Signal durch DFT in Frequenzbereich überführen
 - ② Amplitude der zu filternden Frequenzen auf 0 setzen
 - ③ IDFT anwenden um das gefilterte zeitdiskrete Signal zu erhalten
- Pitfalls:

Frequenzen filtern

Was kann schon schief gehen?

- ▶ Multiplizieren der zu filternden Frequenzanteile mit 0 ist dasselbe wie ein Rechteck-Fenster anzuwenden
 - ⇒ Faltungssatz greift erneut
 - (IDFT von Rechteck-Fenster ist wieder Sinc-Funktion)
 - ⇒ Frequenzanteile die nicht gefiltert werden sollen, werden auch (leicht) beeinflusst
- ▶ Lösung: Eine andere Fenster-Funktion als das Rechteck-Fenster zum Filtern verwenden

Demonstration des Programms

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT

Performance

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Applikation Wavedit, [Github Link](#)

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT

Performance

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Fazit

- ▶ Oszilloskop erfüllt die Anforderungen
- ▶ misst akkurat
- ▶ Anpassungsmöglichkeiten sind eingeschränkt
- ⇒ für Hobbyprojekte ausreichend