

Filterung von
Frequenzen in
WAV-Audio Dateien
mithilfe der Fourier
Transformation

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT

Performance

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Filterung von Frequenzen in WAV-Audio Dateien mithilfe der Fourier Transformation

Len-Marvin Adler

Hochschule Bonn-Rhein-Sieg

8. August 2024

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT

Performance

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Inhaltsverzeichnis

1 Begriffe der Digitalen Signalverarbeitung

2 Aufbau einer WAV Datei

3 Fourier Transformation

- DFT, FFT
- Performance
- IDFT
- Konvergenzverhalten, Fehleranalyse
- Leck-Effekt, Fensterfunktionen

4 Frequenzen filtern

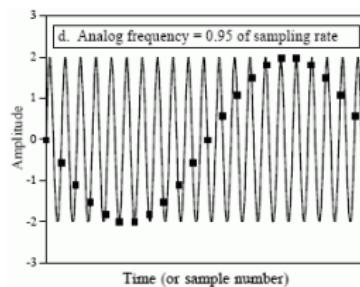
- Vorgehensweise
- Was kann schon schief gehen?

5 Demonstration des Programms

6 Fazit

Begriffe der Digitalen Signalverarbeitung

- ▶ Signale sind immer diskret
- ▶ Nyquist-Shannon-Abtasttheorem¹: $f_{abtast} > 2 \cdot \hat{f}_{signal}$
sonst tritt Alias-Effekt auf



- ▶ Nyquist-Frequenz $f_{Nyquist} := \frac{1}{2} f_{abtast}$
⇒ also $\hat{f}_{signal} < f_{Nyquist}$

¹ Steven W. Smith. *The Scientist and Engineer's guide to Digital Signal Processing*. Available at www.dspguide.com. California Technical Publishing, 1997.
Kap. 3. ISBN: 0966017633

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT
Performance

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern
Vorgehensweise
Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Aufbau einer WAV Datei

- ▶ basiert auf RIFF Dateiformat von Microsoft
- ▶ besteht aus den 3 Subchunks²
 - 'RIFF': enthält die Information, dass es sich um eine RIFF WAVE Datei handelt
 - 'fmt ': enthält Informationen über die Daten, wie z.B SampleRate, BitsPerSample
 - 'data': enthält Datenwerte

endian	File offset (bytes)	field name	Field Size (bytes)
big	0	ChunkID	4
little	4	ChunkSize	4
big	8	Format	4
big	12	Subchunk1ID	4
little	16	Subchunk1Size	4
little	20	AudioFormat	2
little	22	NumChannels	2
little	24	SampleRate	4
little	28	ByteRate	4
little	32	BlockAlign	2
little	34	BitsPerSample	2
big	36	Subchunk2ID	4
little	40	Subchunk2Size	4
little	44	data	Subchunk2Size

Abbildung: WAV-Header²

²Craig Stuart Sapp (craig@ccrma.stanford.edu). *Wave PCM soundfile format*. URL: <http://soundfile.sapp.org/doc/WaveFormat/>

Aufbau einer WAV Datei

52 49 46 46 CC BA 06 00 57 41 56 45	66 6D 74 20	RIFFI@..WAVEfmt
10 00 00 00 01 00 01 00 44 AC 00 00 88 58 01 00D~...X..	
02 00 10 00 64 61 74 61 A8 BA 06 00 00 00 9B 57data^@.....W	
7F 19 D0 AF 29 CF F9 41 0A 44 D3 D1 86 AE 76 16	..D`)ÍüA.DÖN.@v	
02 58 28 03 E8 A8 7F E3 CC 4E 6F 33 2B C0 FD B9	.X(.é".áINo3+Ay¹	
74 2B A9 52 9A EC B2 A7 B3 F9 77 56 78 1F B0 B2	t+CR.í²§³uwVx.ºº	
08 CA 9B 3D E7 47 52 D7 43 AC 4F 10 7B 58 72 09	.E.=çGRxC-C-0.{Xr.	
45 AA 9A DD B9 4B 6F 38 B3 C4 4F B6 DA 25 B6 54	Eº.Ý¹Ko8³Aº¹U%¶¶	

Abbildung: Ausschnitt einer WAV Datei mit markierten Subchunks,
dargestellt in einem Hex-Editor

- ▶ Abtastrate ist oft 44.1 kHz ³,
Menschen hören Töne im Bereich 20 Hz – 20 kHz ⁴
- ▶ Analoges Signal wird durch lineare Pulse Code
Modulation (PCM) in ein digitales Signal umgewandelt
(verlustfrei)
- ▶ PCM kodiert Daten oft als 16 bit signed integer,
jeder Datenwert liegt im Bereich [-32767, 32767]

³44,100 Hz. Juli 2024. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/44,100_Hz

⁴Hörbahn - so hören wir. URL: <https://www.hno-aerzte-im-netz.de/unser-sinne/hoeren/hoerbahn-hoerfrequenz.html>

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT

Performance

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Fourier Transformation

DFT, FFT

- DFT: Fourier-Koeffizienten

$$\beta_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{-2\pi i \frac{jk}{n}} ; j = 0, \dots, n-1$$

- FFT: Voraussetzung $n = 2^\psi; \psi \in \mathbb{N}_0$ (Radix-2-FFT)
⇒ Divide-and-Conquer, berechne Fourier-Koeffizienten
in 2 Hälften

Sei $m = \frac{n}{2}; \varepsilon_\psi = e^{-\frac{2\pi i}{2^\psi}}$

$$\beta_{2\kappa} = \sum_{k=0}^{m-1} (x_k + x_{k+m}) \varepsilon_{\psi-1}^{\kappa k}; \kappa = 0, \dots, m-1$$

$$\beta_{2\kappa+1} = \sum_{k=0}^{m-1} ((x_k - x_{k+m}) \varepsilon_{\psi-1}^{\kappa k}) \varepsilon_{\psi-1}^{\kappa k}$$

⇒ insgesamt halbiert sich der Rechenaufwand

Fourier Transformation

DFT, FFT

- DFT ist konjugiert symmetrisch⁵,
wenn Datenwerte $x_j \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\beta_{n-j} &= \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot e^{-2\pi i \frac{(N-j)k}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \overline{e^{-2\pi i \frac{jk}{n}}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \overline{x_k \cdot e^{-2\pi i \frac{jk}{n}}} = \overline{\beta_j}\end{aligned}$$

⇒ es reicht DFT von Datenwerten x_j
mit $j \in [0, n/2]$ zu berechnen

⁵Brian McFee. *Digital Signals theory*. URL: <https://brianmcfee.net/dstbook-site/content/ch06-dft-properties/Conjugate-Symmetry.html> ↗ ↘ ↙ ↖

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT
Performance

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

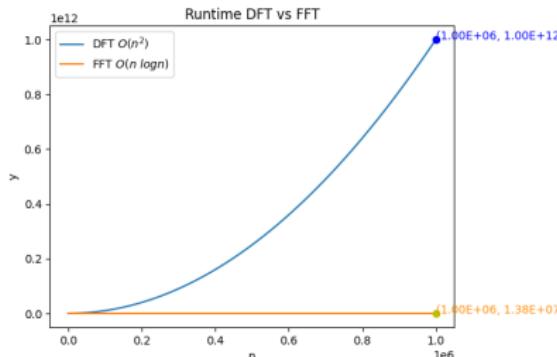
Frequenzen filtern
Vorgehensweise
Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Fourier Transformation

Performance



Für $n = 10^6$, also eine
WAV Datei mit 10^6
Datenwerten (2 MB)
gilt:

- ▶ DFT $\approx 10^{12}$ Iterationen
⇒ Berechnung dauert
ca. $10^{12} \cdot 5 \text{ ns} = 5000 \text{ s}$
 $\approx 83 \text{ min}$
- ▶ FFT $\approx 10^7$ Iterationen
⇒ Berechnung dauert
ca. $10^7 \cdot 5 \text{ ns} = 0.05 \text{ s}$

- ▶ Jede Iteration berechnet $e^{-2\pi i \frac{jk}{n}}$
→ Benchmark⁶: ca. 5 ns

⁶Daumantas Kavolis. *Terrible std::exp performance*. Okt. 2020. URL:
<https://developercommunity.visualstudio.com/t/terrible-stdexpproficiency/1231042>

Fourier Transformation

IDFT

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT
Performance

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern
Vorgehensweise
Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

- ▶ im Grunde ist IDFT nur eine DFT mit Normalisierungsfaktor

$$x_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k e^{2\pi i \frac{jk}{n}} ; j = 0, \dots, n-1$$

- ▶ Matrix-Schreibweise:
 $[\omega^{jk}] [\omega^{jk}]^\dagger = n \cdot E_n ; j, k = 0, \dots, n-1$

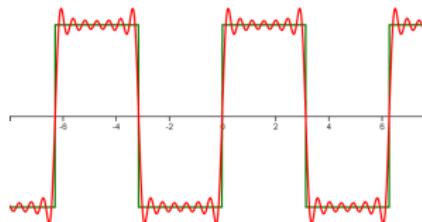
$$\text{mit } \omega = e^{-2\pi i \frac{1}{n}}$$

- ▶ auch IFFT existiert um IDFT zu berechnen

Fourier Transformation

Konvergenzverhalten, Fehleranalyse

- ▶ Fourier-Reihe konvergiert punktweise⁷, gleichmäßige Konvergenz in kompakten Intervallen in denen $f(t)$ stetig ist
- ▶ Gibbsches Phänomen: Überschwingung an Unstetigkeitsstellen um mind. 9% bei abgebrochener Fourier-Reihe



Gibbsches Phänomen,

<https://resources.altium.com/de/p/how-gibbs-phenomenon-produces-measurement-artifacts>

⁷Reiner Lauterbach. *Konvergenz der Fourierreihe*. URL: https://www.math.uni-hamburg.de/home/lauterbach/tuhh/komp_func/folien10.pdf.

Fourier Transformation

Konvergenzverhalten, Fehleranalyse

- DFT als Matrix ist eine Vandermonde-Matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & (\omega^2)^2 & \dots & (\omega^2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & (\omega^{n-1})^2 & \dots & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{bmatrix}$$

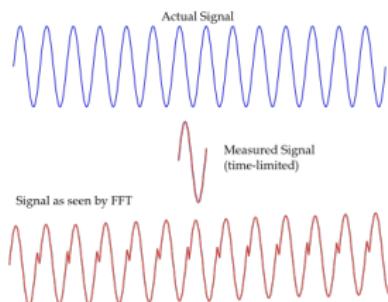
- Vandermonde-Matrizen sind grundsätzlich schlecht
konditioniert, Ausnahme: DFT ist gut konditioniert⁸

⁸Victor Y. Pan. „How bad are vandermonde matrices?“ In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 37.2 (Jan. 2016), S. 676–694. DOI: 10.1137/15m1030170. URL: <https://arxiv.org/abs/1504.021>

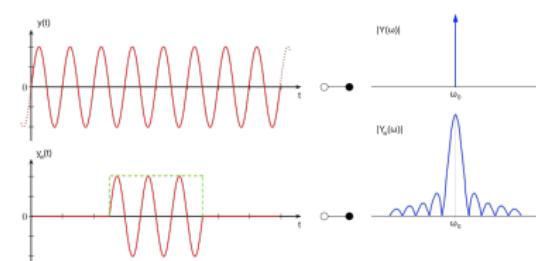
Fourier Transformation

Leck-Effekt, Fensterfunktionen

- Anzahl der Datenpunkte eines zeitdiskreten Signals ist kein ganzzahliges Vielfaches der Periodendauer
- DFT gibt Frequenzanteile an, die im unendlich langen Signal nicht vorkämen
- Leck-Effekt (spectral leakage) tritt auf, weil das Signal nur endlich lange beobachtet werden kann



Zustandekommen des Leck-Effekts,
<https://www.gaussianwaves.com/2011/01/fft-and-spectral-leakage-2/>

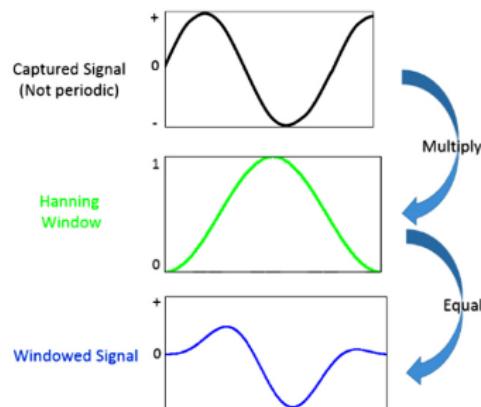


implizite Anwendung eines
Rechteck-Fensters,
<https://de.wikipedia.org/wiki/Leck-Effekt>

Fourier Transformation

Leck-Effekt, Fensterfunktionen

- ▶ Leck-Effekt lässt sich nicht komplett vermeiden
- ▶ Auswirkung aber reduzierbar durch Fensterfunktionen
- ▶ Fensterfunktion wird vor der DFT Operation auf das Signal angewendet, sodass das Signal künstlich periodisiert wird



Anwendung des Von-Hann-Fensters,

<https://www.modalshop.com/rental/learn/basics/how-to-choose-fft-window>

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

- ① Zeitdiskretes Signal durch DFT in Frequenzbereich überführen
- ② Amplitude der zu filternden Frequenzen auf 0 setzen
- ③ IDFT anwenden um das gefilterte zeitdiskrete Signal zu erhalten

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT
Performance

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

Was kann schon schief
gehen?

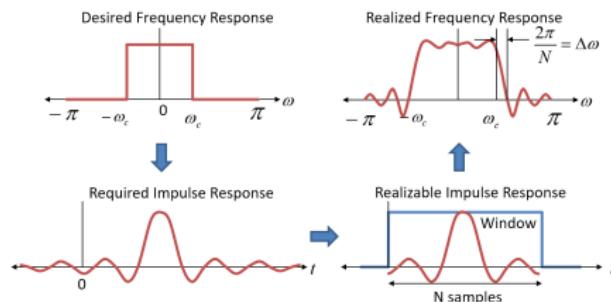
Demonstration
des Programms

Fazit

Frequenzen filtern

Was kann schon schief gehen?

- ▶ Multiplizieren der zu filternden Frequenzanteile mit 0 ist dasselbe wie Rechteck-Fenster anwenden
 - ⇒ Faltungssatz greift erneut
 - ⇒ Frequenzanteile die nicht gefiltert werden sollen, werden auch (leicht) beeinflusst



Idealer vs Realisierbarer Bandpass-Filter,
<https://dsp.stackexchange.com/a/37662>

Frequenzen filtern

Was kann schon schief gehen?

- ▶ Lösung: Fensterfunktion wird auf Rechteck-Fenster angewendet
- ▶ Frequenzen die nicht gefiltert werden sollen, werden nun kaum beeinflusst
- ▶ filtert Frequenzen nicht auf 0, ein kleiner Frequenzanteil bleibt

Filterung von
Frequenzen in
WAV-Audio Dateien
mithilfe der Fourier
Transformation

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT

Performance

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Demonstration des Programms

Demonstration des Programms

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der Digitalen Signal- verarbeitung

Aufbau einer WAV Datei

Fourier Transformation

DFT, FFT

Performance

IDFT

Konvergenzverhalten, Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

Was kann schon schief
gehen?

Demonstration des Programms

Fazit



Frequenzspektrum von WAV Datei

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT

Performance

IDFT

Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

Demonstration des Programms



Frequenzspektrum nach Filtern einer Frequenz von WAV Datei

Inhaltsverzeichnis

Begriffe der
Digitalen Signal-
verarbeitung

Aufbau einer
WAV Datei

Fourier
Transformation

DFT, FFT
Performance

IDFT
Konvergenzverhalten,
Fehleranalyse

Leck-Effekt,
Fensterfunktionen

Frequenzen filtern

Vorgehensweise

Was kann schon schief
gehen?

Demonstration
des Programms

Fazit

- ▶ Mithilfe der Fourier Transformation lassen sich Frequenzen, die in der Tonspur einer WAV Datei auftreten, herausfiltern
⇒ gelungen