Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу

Лабораторна робота No 1

з дисципліни «Основи системного аналізу»

Варіант N. 5

Виконав: студент 4 курсу групи КА-13

Грабовецький Нікіта

Перевірила

Панкратова Н. Д.

Київ – 2024

Цільові функції			**Обмеження $f1(x) \leq f1^*$, $f2(x) \geq f2^*$**		**Граничні значення для x1,x2**	
N	f1(x)	f2(x)	f1*	f2*		
19	$30 + 7x - 6x^2$	74 - 3x	21	11	0	4

Завдання 1.

1. Знаходження множини Парето аналітично

Знаходимо аналітичний розв'язок системи нерівностей:

$$\begin{cases} 30 + 7x - 6x^2 \geq 21 \\ 10 + 3x \geq 11 \\ x \in [0, 4] \end{cases}$$

Розв'яжемо другу нерівність:

$$10 + 3x \geq 11$$

Віднімаємо 10 з обох сторін:

$$3x \geq 1$$

$$x \geq \frac{1}{3}$$

Тепер розв'яжемо першу нерівність:

$$30 + 7x - 6x^2 \geq 21$$

$$30 + 7x - 6x^2 - 21 \geq 0$$

Спрощуємо:

$$-6x^2 + 7x + 9 \geq 0$$

$$D = 7^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 9 = 49 + 216 = 265$$

Знаходимо корені рівняння:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{265}}{2 \cdot (-6)} = \frac{7 \pm \sqrt{265}}{12}$$

Таким чином, корені рівняння:

$$x_1 = \frac{7 - \sqrt{265}}{12}, \quad x_2 = \frac{7 + \sqrt{265}}{12}$$

Оскільки це нерівність, знак ≥ означає, що значення x лежить між цими двома коренями:

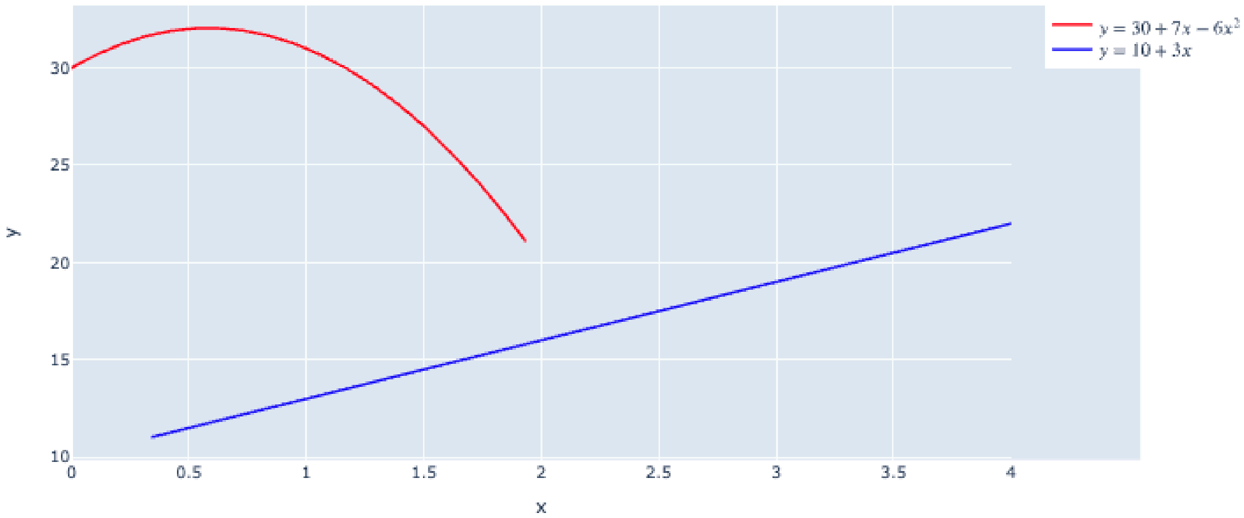
$$x \in \left[\frac{7 - \sqrt{265}}{12}, \frac{7 + \sqrt{265}}{12}\right]$$

Остаточно, об'єднаємо з попередньою умовою

Отже, шуканий розв'язок отримана множина Парето:

$$x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7 + \sqrt{265}}{12}\right]$$

Графічне зображення наших функцій



Ми використовуємо метод технічних обмежень для того, щоб звузити множину Парето, визначену раніше, до меншої множини [x1*,x2*].

$$x_1^* = \arg\max_{x \in \Pi} \min_i \left(\frac{f_i(x)}{f_i^*} \right)$$

$$x_2^* = \arg\min_{x \in \Pi} \max_i \left(\frac{f_i(x)}{f_i^*} \right)$$

Для отримання точних значень, у програмі Python було використано метод перебору з дуже малим кроком — 0.001. Це дозволяє досліджувати множину Парето з високою точністю і знайти оптимальні точки.

За результатами перебору отримано:

$$\max_{x \in \Pi} \min_i \left(\frac{f_i(x)}{f_i^*} \right) = 1.30$$

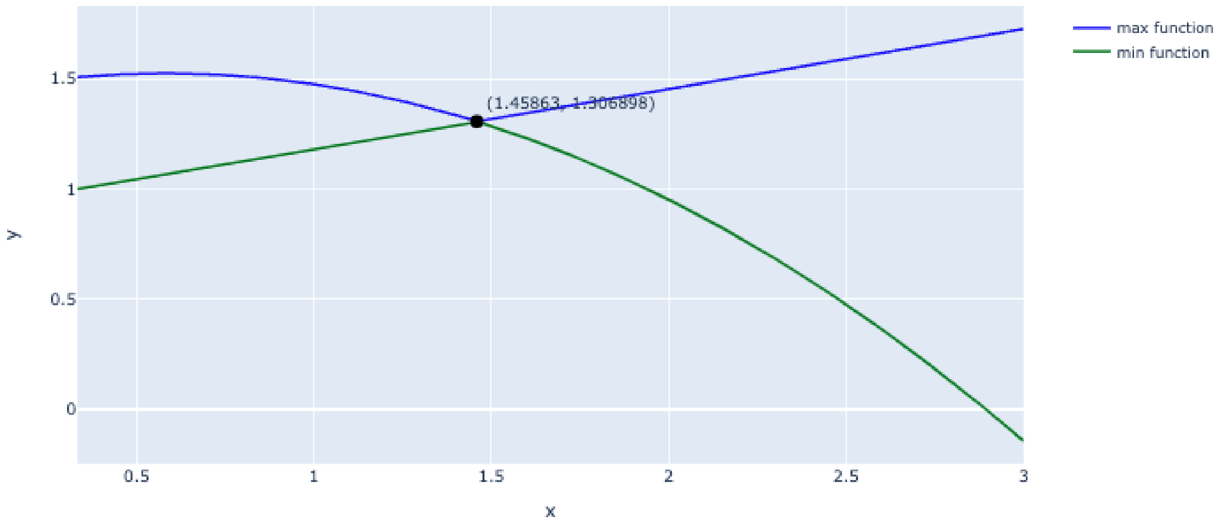
$$\min_{x \in \Pi} \max_i \left(\frac{f_i(x)}{f_i^*} \right) = 1.307$$

Після проведення всіх розрахунків, було виявлено, що значення, при якому обидві функції досягають своїх оптимальних значень, дорівнює

$x_1^* = x_2^* = 1.458$

Таким чином, значення x = 1.458 є точкою, яка одночасно задовольняє обидва критерії — максимізацію мінімуму та мінімізацію максимуму.

Графічне зображення



Отже, після проведення всіх розрахунків, ми отримали множину Парето

$\Pi = \{1.458\}$

Завдання 2

N	Цільові функції гравців	Крок сітки	Діапазони зміни змінних		
5	$f_{12}(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 6x_1x_2 - 12x_2 + 72$	0,01	x_1	0	3
	$f_{21}(x_1, x_2) = 4x_2^2 - 8x_2 + 10x_1^2x_2 - 32x_1 +$	0,01	x_2	0	2

Розглядається задача розкриття невизначеності протидій двох суб'єктів. Кожна сторона має свою цільову функцію: суб'єкт 1 - $f_1(x_1, x_2)$), суб'єкт 2 - $$$ f_2(x_1, x_2) $).$' езалежно – кожен не знає ні цільової функції, ні параметрів протилежного боку.

Потрібно:

1. Визначити гарантований результат f_{12}^*, f_{21}^* кожного суб'єкта табличним, графічним і класичним методами.
2. Знайти область Парето з умов: $f_{12}(x_1, x_2) \geq f_{12}^*$, $f_{21}(x_1, x_2) \geq f_{21}^*$.
3. Визначити оптимальні значення $\Delta_i = \left| f_i(x_1^i, x_2^i) - f_i^*\right.$, приймає мінімальне значення $\Delta \to 0$

2.1 Визначення гарантованого результату табличним методом

Спочатку знайдемо f_{12}^*, f_{21}^*, використовуючи табличний метод (крок сітки задаємо 0.01) пошуку гарантованих результатів на графіках відповідно

На мові Python було написано програму, яка для заданих функцій із обраним кроком в точності 0.0001 визначає гарантовані результати. Результати гарантованих значень отримані автоматично.
Додаток 2.

$$f_{12}^* = \max_{x_1} \min_{x_2} f_{12}(x_1, x_2)$$
$$f_{21}^* = \max_{x_2} \min_{x_1} f_{21}(x_1, x_2)$$

Гарантований результат f^*_{12} табличним методом

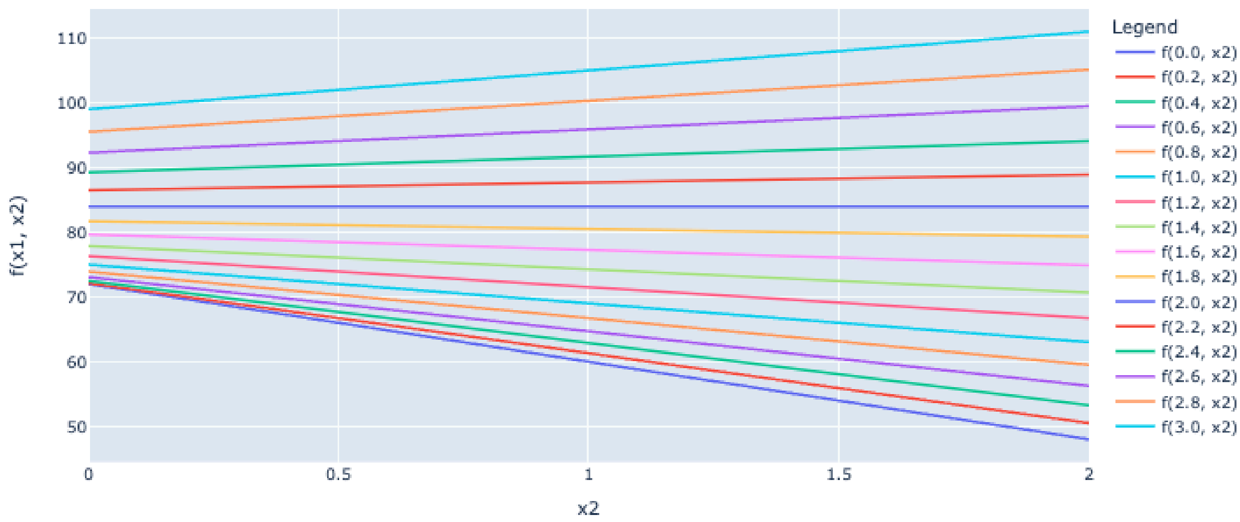
```
f*_12 = 99.0
for:
+------+------+
|   x1 |   x2 |
+======+======+
|    3 |    0 |
+------+------+
```

Гарантований результат f^*_{21} табличним методом

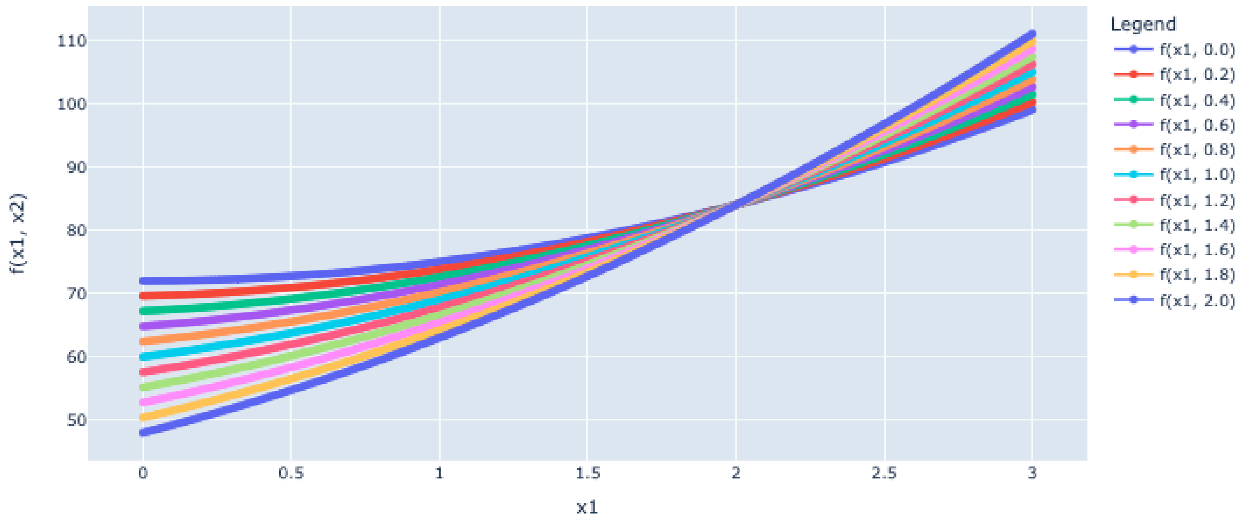
```
f*_21 = 51.2
for:
+------+------+
|   x1 |   x2 |
+======+======+
|  0.8 |    2 |
+------+------+
```

2.2. Визначення гарантованого результату f^*_{12}, f^*_{21} графічним методом

Гарантований результат f^*_{12} графічним методом



З рисунку бачимо, що максимальний мінімум досягається при $f_{12}(3,0) = 99$



З графіку маємо максимальний мінімум - $f_2 1(0.8, 2) = 51.2$

2.3. Визначення гарантованого результату класичним методом

$f_{12}(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 6x_1x_2 - 12x_2 + 72$

З умови, x1 $\in$ [0,3]та x2 $\in$ [0,2]

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} = 6x_1 - 12$$

Розглянемо випадки для різних значень x1:
Випадок 1: x1 $\in$ [0,2

$$6x_1 - 12 < 0$$

Це означає, що f12 спадає відносно x2, тому:
$\min_{x_2} f_{12}(x_1) = f_{12}(x_1, 2) = 3x_1^2 + 12x_1 + 48$

Випадок 2: x1$\in$(2,3]

$$6x_1 - 12 > 0$$

Тобто f12 зростає відносно x2, тому:
$\min_{x_2} f_{12}(x_1) = f_{12}(x_1, 0) = 3x_1^2 + 72$

Випадок 3: x1=2

$$6x_1 - 12 = 0$$

Тут функція стала відносно x2, отже, можна обрати будь-яке значення x2. Нехай x2=2.

$$\min_{x_2} f_{12}(x_1) = \begin{cases} 3x_1^2 + 12x_1 + 48, & x_1 \in [0, 2) \\ 3x_1^2 + 72, & x_1 \in (2, 3] \end{cases}$$

Крок 2: Знайдемо f12

Для цього обчислимо максимальне значення:
$$f_{12}^* = \max_{x_1 \in [0,3]} \min_{x_2 \in [0,2]} f_{12}(x_1, x_2)$$

Спочатку розглянемо похідну функції по x1 для різних інтервалів x1:

$$\frac{\partial \min_{x_2} f_{12}(x_1)}{\partial x_1} = \begin{cases} 6x_1 + 12, & x_1 \in [0, 2) \\ 6x_1, & x_1 \in (2, 3] \end{cases}$$

Знаємо, що ця похідна завжди додатна для всіх x1∈[0,3], отже функція зростає відносно x1.

Тепер підставимо отримані значення мінімумів функції, обчислені в попередньому кроці. Маємо:

$$f_{12}^* = \max \left(\min_{x_2} f_{12}(x_1) \right)$$

Це означає, що нам потрібно знайти максимум із двох виразів:

$$f_{12}^* = \max \left(3x_1^2 + 12x_1 + 48 \,\middle|\, x_1 = 2,\ 3x_1^2 + 72 \,\middle|\, x_1 = 3 \right)$$

Обчислимо значення цих виразів при x1=2 і x1=3:

Для x1=2
$$3(2)^2 + 12(2) + 48 = 84$$

Для x1=3
$$3(3)^2 + 72 = 89$$

Отже, максимальне значення f12*=89.

Ми отримали: $f_{12}^* = 89$

Це значення досягається в точці:
$$x_1 = 3, \quad x_2 = 0$$

Для другої функції:

$$f_{21}(x_1, x_2) = 4x_2^2 - 8x_2 + 10x_1^2 x_2 - 32x_1 + 64$$

З умови, x1∈[0,3] та x2∈[0,2].

$$\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} = 20x_1x_2 - 32$$

Розглянемо різні випадки для значень x2.

Випадок 1: x2∈(0,2]

$$20x_1x_2 - 32 = 0$$

$$x_1 = \frac{32}{20x_2}$$

$$\frac{\partial^2 f_{21}}{\partial x_1^2} = 20x_2 > 0$$

Це означає, що для всіх x2∈(0,2] функція має мінімум у точці:

$$x_1 = \frac{32}{20x_2}$$

Випадок 2: x2=0

$$\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} = 20x_1(0) - 32 = -32 < 0$$

$$\min_{x_1} f_{21}(x_2 = 0) = f_{21}(3, 0) = -32$$

Отримуємо

$$\min_{x_1} f_{21}(x_2) = \begin{cases} 4x_2^2 - 8x_2 + 10\left(\frac{32}{20x_2}\right)^2 x_2 - 32 \cdot \frac{32}{20x_2} + 64, & x_2 \in (0, 2] \\ -32, & x_2 = 0 \end{cases}$$

Після спрощення ми отримуємо:

$$\min_{x_1} f_{21}(x_2) = \begin{cases} 4x_2^2 - 8x_2 - \frac{128}{5x_2} + 64, & x_2 \in (0,2] \\ -32, & x_2 = 0 \end{cases}$$

Щоб знайти f21*, обчислюємо максимальне значення функції:

$$f_{21}^* = \max_{x_2 \in [0,2]} \min_{x_1 \in [0,3]} f_{21}(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial \min_{x_1} f_{21}(x_2)}{\partial x_2} = \begin{cases} 8x_2 - 8 - \frac{128}{5x_2^2}, & x_2 \in (0,2] \\ 0, & x_2 = 0 \end{cases}$$

Доведемо, що ця похідна завжди додатна для всіх x2∈(0,2:

$$8x_2 - 8 + \frac{128}{5x_2^2} > 0$$

$$8(x_2 - 1) + \frac{128}{5x_2^2} > 0$$

x2∈(0,1]

$$(x_2 - 1) + \frac{16}{5x_2^2} > -1 + \frac{16}{5} > 0$$

Отже, для всіх значень x2∈(0,1] нерівність виконується.

x2∈(1,2]

$$x_2 - 1 > 0$$

Отже, функція f21(x1,x2)досягає свого максимуму при x2=2.

Тепер значення f21*:

$$f_{21}^* = \max\left(\min_{x_1} f_{21}(x_2)\right) = \max(51.2, -32) = 51.2$$

$$x_1 = \frac{32}{40} = 0.8, \quad x_2 = 2$$

Отже, отримали

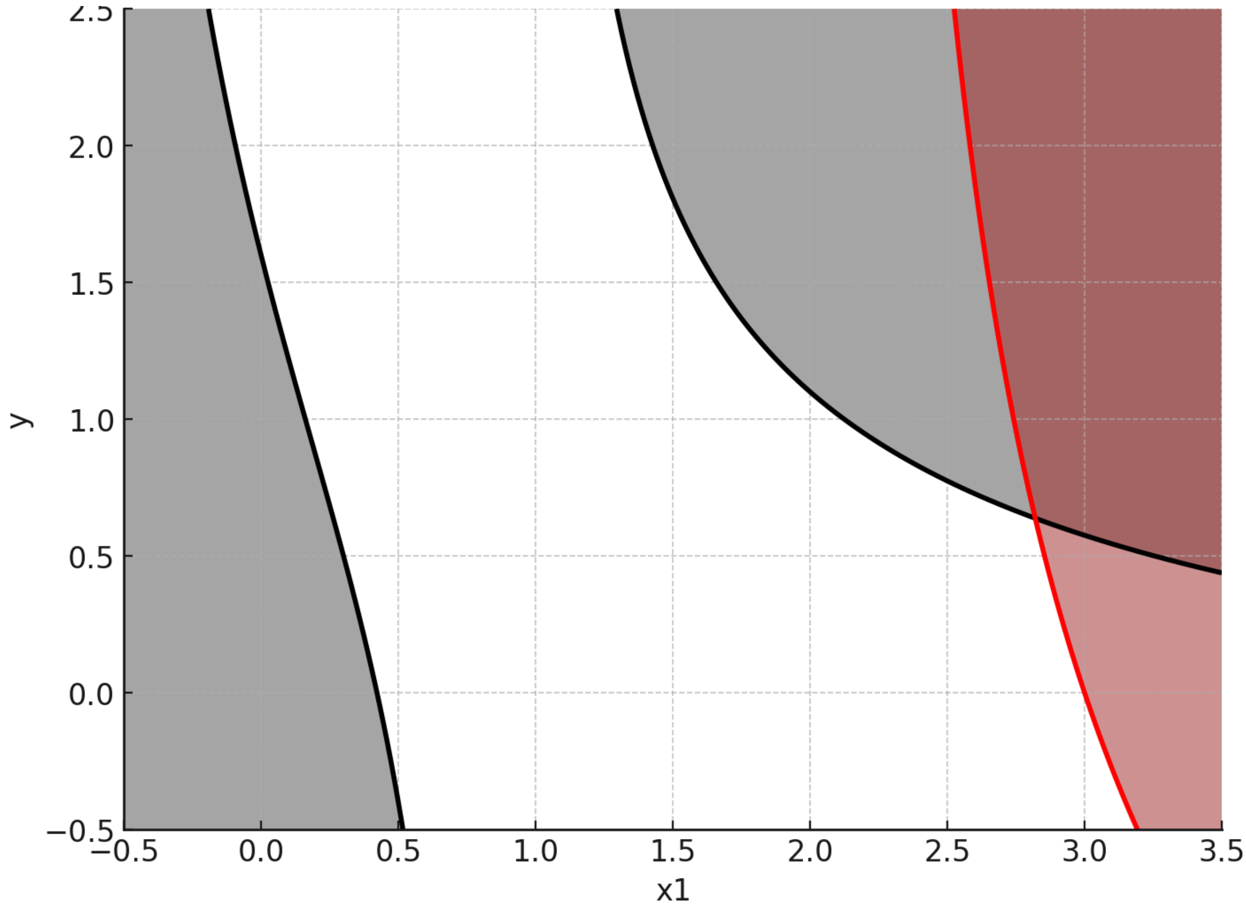
$$f_{21}^* = 51.2$$

2.4. Знаходження області Парето та оптимальних значень x_1, x_2

Множину Парето знаходимо, виходячи з умови:

$$\begin{cases} f_{12}(x_1, x_2) \geq f_{12}^* \\ f_{21}(x_1, x_2) \geq f_{21}^* \\ x_1 \in [0,3], x_2 \in [0,2] \end{cases} \iff \begin{cases} 3x_1^2 + 6x_1x_2 - 12x_2 + 72 \geq 99 \\ 4x_2^2 - 8x_2 + 10x_1^2x_2 - 32x_1 + 64 \geq 51.2 \\ x_1 \in [0,3], x_2 \in [0,2] \end{cases}$$

Тоді область Парето — графічно



Звуження області Парето

Оптимальні значення x_1^*, x_2^* – значення, за яких $\Delta = \min\limits_{x_1,x_2} \max\limits_i \Delta_i = 0,$

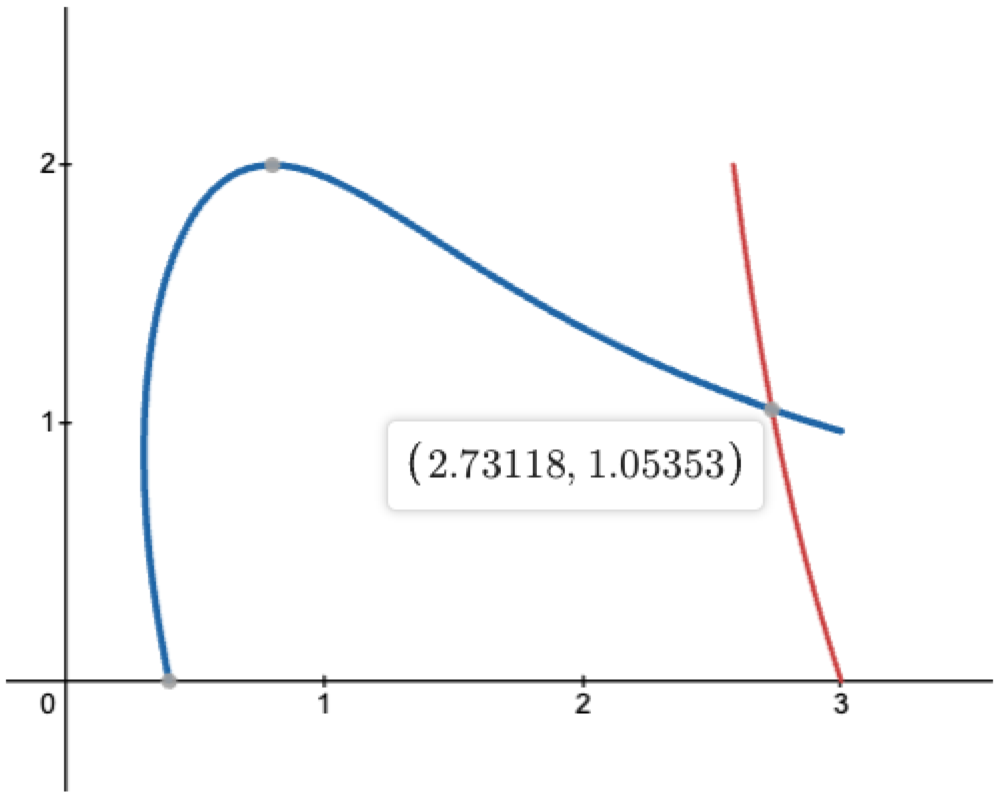
де

$$\Delta_i = |f_i(x_1, x_2) - f_i^*|\,, \quad i \in \{12, 21\}$$

З графіку видно, що кожне $\Delta_i = 0 \Rightarrow \Delta = 0,$ для x_1^*, x_2^*, що задовольняють умовам:

$$\begin{cases} f_{12}(x_1, x_2) = f_{12}^* \\ f_{21}(x_1, x_2) = f_{21}^* \\ x_1 \in [0, 3], x_2 \in [0, 2] \end{cases} \iff \begin{cases} 3x_1^2 + 6x_1x_2 - 12x_2 + 72 = 99 \\ 4x_2^2 - 8x_2 + 10x_1^2x_2 - 32x_1 + 64 = 51.2 \\ x_1 \in [0, 3], x_2 \in [0, 2] \end{cases}$$

Для кращої візуалізації скористаємось програмою Десмос, знаходимо значення



1 $3x^2 + 6xy - 12y + 72 = 99 \{3 \ge x \ge 0\} \{2 \ge y \ge 0\}$

2 $4y^2 - 8y + 10x^2y - 32x + 64 = 51.2 \{3 \ge x \ge 0\} \{2 \ge y \ge 0\}$

3

Оптимальні значення (*x1*∗, *x2*∗) = (2.73118, 1.05353)

Додаток А:

```
import numpy as np

def f1(x):
   return 30 + 7*x - 6*x**2

def f2(x):
   return 10 + 3*x

threshold_f1 = 21
threshold_f2 = 11

start = 0
end = 4
step = 0.001

pareto = []

x_vals = np.arange(start, end + step, step)

for x in x_vals:
   if f1(x) >= threshold_f1 and f2(x) >= threshold_f2:
      pareto.append((x, f1(x), f2(x)))

x_pareto = np.array([point[0] for point in pareto])
f1_pareto = np.array([point[1] for point in pareto])
f2_pareto = np.array([point[2] for point in pareto])

minmax_value = np.maximum(f1_pareto / threshold_f1, f2_pareto / threshold_f2).min()
maxmin_value = np.minimum(f1_pareto / threshold_f1, f2_pareto / threshold_f2).max()

x_minmax = x_pareto[np.maximum(f1_pareto / threshold_f1, f2_pareto / threshold_f2).argmin()]
x_maxmin = x_pareto[np.minimum(f1_pareto / threshold_f1, f2_pareto / threshold_f2).argmax()]

print(f"minmax = {round(minmax_value, 10)}")
print(f"x = {round(x_minmax, 3)}\n")
print(f"maxmin = {round(maxmin_value, 10)}")
print(f"x = {round(x_maxmin, 3)}")
```

Додаток Б:

```
import numpy as np
import pandas as pd
from tabulate import tabulate


def f12(x1, x2):
    return 3 * x1**2 + 6 * x1 * x2 - 12 * x2 + 72

def f21(x1, x2):
    return 4 * x2**2 - 8 * x2 + 10 * x1**2 * x2 - 32 * x1 + 64


x1_values = np.arange(0, 3.01, 0.01)
x2_values = np.arange(0, 2.01, 0.01)
x1, x2 = np.meshgrid(x1_values, x2_values)
x1, x2 = x1.ravel(), x2.ravel()


df = pd.DataFrame({
    'x1': x1,
    'x2': x2,
    'f12': f12(x1, x2),
    'f21': f21(x1, x2),
})


max_x1__min_x2__f12 = df.groupby('x1')['f12'].min().max()
idx1_f12 = df.groupby('x1')['f12'].min().idxmax()

max_x2__min_x1__f21 = df.groupby('x2')['f21'].min().max()
idx2_f21 = df.groupby('x2')['f21'].min().idxmax()


print(f"f*_12 = {max_x1__min_x2__f12}")
print("for:")
max_x1__min_x2__f12_mask = (df['x1'] == idx1_f12) & (df['f12'] == max_x1__min_x2__f12)
result_f12 = df.loc[max_x1__min_x2__f12_mask, ['x1', 'x2']].to_numpy()


print(tabulate(result_f12, headers=['x1', 'x2'], tablefmt='grid'))

print("\n" * 2)

print(f"f*_21 = {max_x2__min_x1__f21}")
print("for:")
max_x2__min_x1__f21_mask = (df['x2'] == idx2_f21) & (df['f21'] == max_x2__min_x1__f21)
```

```
result_f21 = df.loc[max_x2__min_x1__f21_mask, ['x1', 'x2']].to_numpy()

print(tabulate(result_f21, headers=['x1', 'x2'], tablefmt='grid'))
```