金融工学勉強会第 5 回

朝倉響

2024 年 7 月 26 日

前回の復習と今回の概要

- 前回（2024 年 8 月 16 日）
  -
- 今回（2024 年 8 月 23 日）
  -

5.4 資産価格評価の基本定理

表記

- $\mathbb{P}$：実確率測度
- $\mathcal{F}(t)$：ブラウン運動に関連するフィルトレーション
  - 必ずしも「ブラウン運動から生成するフィルトレーション」とは限らない
- $\mathcal{F} = \mathcal{F}(T)$
- $W(t)$：$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上 d 次元ブラウン運動

5.4.1 ギルサノフの定理とマルチンゲールの表現定理

定理 5.4.1 (多次元ギルサノフの定理)**.** $\Theta(t)$：d 次元適合過程

$$Z(t) \coloneqq \exp\left\{-\int_0^t \Theta(u)\cdot \mathrm{d}W(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\Theta(u)\|^2 \,\mathrm{d}u\right\} \tag{5.4.1}$$

$$Z \coloneqq Z(T)$$

$$\widetilde{W}(t) \coloneqq W(t) + \int_0^t \Theta(u)\,\mathrm{d}u \tag{5.4.2}$$

$$\text{ただし}\mathbb{E}\int_0^T \|\Theta(u)\|^2 Z^2(u)\,\mathrm{d}u < \infty \tag{5.4.3}$$

とすると，$\mathbb{E}Z = 1$ でかつ，確率測度 $\widetilde{\mathbb{P}}$

$$\widetilde{\mathbb{P}}(A) \coloneqq \int_A Z(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega), \quad A \in \mathcal{F}$$

に対し，$\widetilde{W}(t)$ は $\widetilde{\mathbb{P}}$ の下で d 次元ブラウン運動．

証明．$\widetilde{W}(t)$ は時刻 0 で値 0 を取り，連続な経路を持つマルチンゲール（マルチンゲールである証明の流れは 1 次元の場合と同様である[*1]．ただし，多次元の計算が含まれることに注意）．2 次変分を考える．

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\widetilde{W}_i(t)\mathrm{d}\widetilde{W}_j(t) &= (\mathrm{d}W_i(t)+\Theta_i(t)\mathrm{d}t)(\mathrm{d}W_j(t)+\Theta_j(t)\mathrm{d}t)\\
&= \mathrm{d}W_i(t)\mathrm{d}W_j(t) = \begin{cases}\mathrm{d}t & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \quad \text{（$W(t)$ は d 次元ブラウン運動）}
\end{aligned}$$

結果，レヴィの定理より $\widetilde{W}(t)$ は $\widetilde{\mathbb{P}}$ 上 d 次元ブラウン運動． □

- $\mathbb{P}$ と $\widetilde{\mathbb{P}}$ は同値[*2]：実確率測度 $\mathbb{P}$ とリスク中立確率測度 $\widetilde{\mathbb{P}}$ で何が起こり得るかは一致．
- $\widetilde{W}(t)$ の各成分は $\mathbb{P}$ のもとで独立でないこともあるが，$\widetilde{\mathbb{P}}$ のもとでは独立．

定理 5.4.2 (多次元のマルチンゲール表現定理)**．** 仮定

- $\mathcal{F}(t)$：d 次元ブラウン運動 $W(t)$ から生成されるフィルトレーション（より強い仮定）
- $M(t)$：$\mathcal{F}(t)$ に関するマルチンゲール

このとき，d 次元適合仮定 $\Gamma(t)$ が存在して

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \Gamma(u)\cdot \mathrm{d}W(u). \tag{5.4.4}$$

さらに，定理 5.4.1 の仮定が成り立ち，$\widetilde{M}(t)$ が $\widetilde{\mathbb{P}}$– マルチンゲールとすると，$\widetilde{\Gamma}(t)$ が存在して

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \widetilde{\Gamma}(u)\cdot \mathrm{d}\widetilde{W}(u). \tag{5.4.5}$$

証明．（証明は省略） □

5.4.2　多次元市場モデル

m 種類株式

$$\mathrm{d}S_i(t) = \alpha_i(t)S_i(t)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)S_j(t)\,\mathrm{d}W_j(t), \quad i=1,\dots,m \tag{5.4.6}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{期待収益率ベクトル：}(\alpha_i(t))_{i=1,\dots,m}\\ \text{ボラティリティ行列：}(\sigma_{ij}(t))_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,d}\end{array}\right\}\text{適合過程}$$

ここから調べたいこと

[*1] $Z(t)$ がラドン－ニコディム過程であること，$\widetilde{W}(t)Z(t)$ がマルチンゲールなことを示し，補題 5.2.2 を使う

[*2] 一般の測度変換は $\widetilde{\mathbb{P}} \ll \mathbb{P}$ だが，いま Z はほとんど確実に正であり，$\widetilde{\mathbb{P}}(B)=0$ なる B に対し

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{E}\mathbb{I}_B = \widetilde{E}\left[\frac{\mathbb{I}_B}{Z}\right] = 0$$

より $\widetilde{\mathbb{P}} \gg \mathbb{P}$.

- $S_i(t)$ のボラティリティ
- S_i と S_k の相関
- 多次元市場モデルでのリスク中立測度が存在する必要十分条件
  - リスク中立測度が存在すると何が嬉しいか
  - このリスク中立測度は一意か

S_i のボラティリティ
以下を定義する

$$\sigma_i(t) = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2(t)}$$

$$B_i(t) = \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \frac{\sigma_{ij}(t)}{\sigma_i(t)} \mathrm{d}W_j(t) \tag{5.4.7}$$

連続なマルチンゲール

$$\mathrm{d}B_i(t)\mathrm{d}B_i(t) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\sigma_{ij}^2(t)}{\sigma_i^2(t)} \mathrm{d}W_j(t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}t$$

このとき，$B_i(t)$ は（1 次元）レヴィの定理よりブラウン運動.

$$\mathrm{d}S_i(t) = \alpha_i(t)S_i(t)\,\mathrm{d}t + \sigma_i(t)S_i(t)\,\mathrm{d}B_i(t) \tag{5.4.8}$$

$S_i(t)$ のボラティリティは $\sigma_i(t)$.

S_i と S_k の相関

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S_i(t)\mathrm{d}S_k(t) &= \sigma_i(t)\sigma_k(t)S_i(t)S_k(t)\,\mathrm{d}B_i(t)\mathrm{d}B_k(t) \\
&= \sigma_i(t)\sigma_k(t)S_i(t)S_k(t)\underbrace{\sum_{j=1}^{d} \frac{\sigma_{ij}(t)\sigma_{kj}(t)}{\sigma_i(t)\sigma_k(t)}}_{=:\rho_{ij}(t)}\mathrm{d}t \\
&= \rho_{ik}(t)\sigma_i(t)\sigma_k(t)S_i(t)S_k(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{5.4.13}$$

- $\sigma_i(t)$：S_i の時刻 t での相対変化の瞬間的標準偏差
- $\rho_{ik}(t)$：S_i と S_k の相対変化の瞬間的な相関

5.4.3 リスク中立測度の存在

定義 5.4.3 (リスク中立)**.** 条件

(i) $\widetilde{\mathbb{P}}$ と $\mathbb{P}$ が同値
(ii) 割り引かれた株価 $D(t)S_i(t)$ が $\widetilde{\mathbb{P}}$ の下でマルチンゲール（$\forall i = 1, \ldots, m$）

を満たす確率測度 $\widetilde{\mathbb{P}}$：リスク中立確率測度.

割り引かれた株価過程

- $R(t)$：金利過程（適合過程）
- $D(t) = e^{-\int_0^t R(u)\,\mathrm{d}u}$：割引過程
- $D(t)S_i(t)$：割り引かれた株価

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(D(t)S_i(t)) &= D(t)\mathrm{d}S_i(t) + S_i(t)\mathrm{d}D(t) + \mathrm{d}S_i(t)\mathrm{d}D(t) \\ &= D(t)\left(\alpha_i(t)S_i(t)\,\mathrm{d}t + \sigma_i(t)S_i(t)\,\mathrm{d}B_i(t)\right) - S_i(t)R(t)D(t)\,\mathrm{d}t \\ &= D(t)S_i(t)\left[(\alpha_i(t) - R(t))\,\mathrm{d}t + \sigma_i(t)\,\mathrm{d}B_i(t)\right] \end{aligned} \tag{5.4.15}$$

【リスク中立確率測度を探したい】

- 以下を満たす市場価格過程 $\Theta_j(t)$ があれば

$$\mathrm{d}(D(t)S_i(t)) = D(t)S_i(t)\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)[\Theta_j(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_j(t)] \tag{5.4.16}$$

- 多次元ギルサノフの定理から，同値な確率測度 $\widetilde{\mathbb{P}}$ を構築でき，$\widetilde{\mathbb{P}}$ のもとでのブラウン運動 $\widetilde{W}(t)$ で

$$\mathrm{d}(D(t)S_i(t)) = D(t)S_i(t)\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_j(t) \tag{5.4.17}$$

  を満たすものが存在する.
- $\widetilde{\mathbb{P}}$ のもとで $D(t)S_i(t)$ がマルチンゲールになったので，$\widetilde{\mathbb{P}}$ がリスク中立測度

結局，(**??**) を満たす $\Theta_j(t)$ が存在すればリスク中立確率測度が存在する．(**??**) と見比べれば，解くべき方程式は

$$\alpha_i(t) - R(t) = \sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)\Theta_j(t), \quad i = 1, \ldots, m \tag{5.4.18}$$

という d 変数（過程），m 次元方程式