

## Stochastic Interest Rates 第 8 回

2024 年 10 月 2 日

QD 部 朝倉響

### 概要

•

### 3.6 Hull-White モデルにおけるバミューダンスワップション

Hull-White モデルを使用して、非バニラ商品のバミューダンスワップションの価格評価を行う。

リスク中立確率の下、0 時点での期間構造にピッタリ合う Hull-White 短期金値モデルが得られた（式 (3.14)）が、ここではエキゾチック商品のためにフォワード測度を用いる。

#### フォワード測度のもとでの Hull-White モデル

仮定

$$dB(t, T) = B(t, T)r(t) dt + B(t, T)\Sigma(t, T) dW(t) \quad (2.8)$$

のとき、ギルサノフの定理から以下が成り立つ（ $W(t)$  と  $W^T(t)$  はそれぞれリスク中立測度  $Q$  とフォワード測度  $P_T$  に対するブラウン運動）

$$W^T(t) = W(t) - \int_0^t \Sigma(u, T) du \quad \text{for all } t \in [0, T]$$

Hull-White モデルにおける割引債の価格

$$B(t, T) = \exp \left( -r(t)D(t, T) - \int_t^T \theta(u)D(u, T)du + \frac{1}{2} \int_t^T \sigma(u)^2 D(u, T)^2 du \right) \quad (3.10)$$

より、伊藤の公式を用いて

$$\begin{aligned} dB(t, T) &= (-d(r(t)D(t, T)) - \theta(t)D(t, T) dt + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 D(t, T)^2 dt)B(t, T) \\ &= (\text{略}) dt - B(t, T)D(t, T) dr(t) \\ &= (\text{略}) dt - B(t, T)\sigma(t)D(t, T) dW(t) \end{aligned}$$

式 (2.8) と見比べて、 $\Sigma(t, T) = -\sigma(t)D(t, T)$  である。よって上記ギルサノフの定理も用いて

$$\begin{aligned} dr(t) &= (\theta(t) - \alpha r(t)) dt + \sigma(t) dW(t) \\ &= (\theta(t) - \alpha r(t) - \sigma(t)^2 D(t, T)) dt + \sigma(t) dW^T(t) \end{aligned} \quad (3.28)$$

(Exercise 3.9)

時刻 0 で期間構造がピッタリ合う Hull-White モデルでの短期金利は以下で求まっていた

$$r(s) = (r(t) - f(0, t))e^{-\alpha(s-t)} + f(0, s) + \int_0^s \sigma(u)^2 D(u, s) e^{-\alpha(s-u)} du - \int_0^t \sigma(u)^2 D(u, t) e^{-\alpha(s-u)} du + \int_t^s \sigma(u) e^{-\alpha(s-u)} dW(u) \quad (3.14)$$

再び同じ測度変換を適用して簡略化すると、 $P^T$  測度のもとで  $r(T)$  は以下のように表される

$$r(T) = (r(t) - f(0, t))e^{-\alpha(T-t)} + f(0, T) + \int_0^t \sigma(u)^2 \frac{e^{-\alpha(T+t-2u)} - e^{-2\alpha(T-u)}}{\alpha} du + \int_t^T \sigma(u) e^{-\alpha(T-u)} dW^T(u) \quad (3.29)$$

- $r(t)$  が与えられた下での  $r(T)$  は  $\sigma(u), u \in [0, t]$  のみに依存する ( $\sigma(u), u \in [t, s]$  には依存しない)
- リスク中立測度のもとでの式 (3.14) に比べてシンプル

## バミューダンスワップション

ペイヤーズバミューダンスワップション

- 元本 1
- ストライク  $K$
- $T_k (k = 0, \dots, l), l < n$  でペイヤーズスワップを始める権利.
  - リセット日:  $T_0, \dots, T_{n-1}$
  - 支払日:  $T_1, \dots, T_n$
  - スワップレート:  $K$

以下では  $l = n - 1$  とし、時刻 0 での価値を **Berm**(0) と書く。

$T_i$  時点で権利行使されていないとすると、オプション保持者は  $T_{i+1}$  までオプションを持ち続けるか、即座に行使するかを決定しなければならない。このときの行使価値は

$$E(T_i) = (\mathbf{PS}(T_i))^+$$

継続価値は

$$C(T_i) = B(T_i, T_{i+1}) \mathbb{E}_{P_{T_{i+1}}} (\mathbf{Berm}(T_{i+1}) | \mathcal{F}_{T_i})$$

スワップションの価値は

$$\mathbf{Berm}(T_i) = \max(E(T_i), C(T_i)) \quad (3.30)$$

### 3.6.1 満期が同じスワップションへのキャリブレーション：Calibrating to co-terminal swaptions

キャリブレーションはエキゾチック商品をヘッジするために使うバニラオプションを用いる。バミューダンスワップションに対しては、満期が同じ (co-terminal な) スワップションを用いる。Hull-White モデルから求める価格  $\mathbf{PSwpt}_{i,n}(0)^{*1}$  とマーケット価格  $\mathbf{PSwpt}_{i,n}^{\text{mkt}}(0) = \mathbf{PSwpt}_{i,n}^{\text{Black}}(0; \hat{\sigma}_{i,n}^{\text{swpt}})$  の差を最小化するようにパ

\*1 オプション行使の満期が  $T_i$  でスワップの満期が  $T_n$  のスワップション

ラメータ  $\sigma_i, i = 0, \dots, n$  を決定する<sup>\*2</sup>.

$$\min_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{PSwpt}_{i,n}(0) - \mathbf{PSwpt}_{i,n}^{\text{mkt}}(0) \right)^2$$

### 平均回帰パラメータと自己共分散

平均回帰パラメータ  $\alpha$  のキャリブレーションを考えたい。自己共分散は

$$\text{Corr}(r(t), r(s)) = \frac{\mathbb{E}(r(t)r(s))}{\sqrt{\text{Var}(r(t))\text{Var}(r(s))}} = \frac{\int_0^t \sigma^2(u) e^{-\alpha(t+s-2u)} du}{\sqrt{\int_0^t \sigma^2(u) e^{-2\alpha(t-u)} du \int_0^s \sigma^2(u) e^{-2\alpha(s-u)} du}}$$

となり、特に  $\sigma$  が一定の場合、

$$\text{Corr}(r(t), r(s)) = \sqrt{\frac{e^{2\alpha t} - 1}{e^{2\alpha s} - 1}}$$

自己共分散から  $\alpha$  のキャリブレーションができる<sup>\*3</sup>.

### 数値的方法

バミューダンスワップションの価格評価の再帰関係を利用して、 $\mathbf{Berm}(0)$  を計算する。

まず、短期金利領域を離散化する： $r(0)$  が中心のグリッド  $r_0 < \dots < r_N$  を構成

$\mathbf{Berm}(T_{i+1}; r(T_{i+1})), r(T_{i+1}) = r_j$  が各  $j = 0, \dots, N$  に対してわかっていると仮定して、継続価値

$$C(T_i; r(T_i) = r_j) = B(T_i, T_{i+1}) \mathbb{E}_{P_{T_{i+1}}} (\mathbf{Berm}(T_{i+1}; r(T_{i+1})) \mid \mathcal{F}_{T_i})$$

を計算する。式 (3.29) より

$$\begin{aligned} r(T_{i+1}) = & \underbrace{(r(T_i) - f(0, T_i))e^{-\alpha(T_{i+1}-T_i)} + f(0, T_{i+1}) + \int_0^{T_i} \sigma(u)^2 \frac{e^{-\alpha(T_{i+1}+T_i-2u)} - e^{-2\alpha(T_{i+1}-u)}}{\alpha} du}_{m_i} \\ & + \int_{T_i}^{T_{i+1}} \sigma(u) e^{-\alpha(T_{i+1}-u)} dW^{T_{i+1}}(u) \end{aligned}$$

であるが、これは  $\mathcal{F}_{T_i}$  と独立で、平均は  $m_i$ 、分散は

$$s_i^2 = \int_{T_i}^{T_{i+1}} \sigma(u)^2 e^{-2\alpha(T_{i+1}-u)} du$$

であるため、

$$\mathbb{E}_{P_{T_{i+1}}} (\mathbf{Berm}(T_{i+1}; r(T_{i+1})) \mid \mathcal{F}_{T_i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s_i^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Berm}(T_{i+1}; x) \exp\left(-\frac{(x - m_i)^2}{2s_i^2}\right) dx$$

によって、継続価値を計算する。積分部分は、グリッド  $r_0, \dots, r_N$  上での  $\mathbf{Berm}(T_{i+1}; r(T_{i+1}))$  の値を用いて数値的に計算する。以上により、各グリッド  $r(T_i) = r_j$  に対して  $\mathbf{Berm}(T_i; r(T_i))$  が (3.30) より求まる。

オプション評価の際には、最終権利行使日  $T_l$  から始めて、時間と逆向きに計算をおこなう。 $T_l$  でそれ以降までオプションを保持する価値はないので、 $C(T_l) = 0$  であり、順に遡って  $\mathbf{Berm}(0; r(0))$  を求める。

<sup>\*2</sup>  $\sigma(t)$  は単過程と仮定して、 $T_{i-1} < t \leq T_i$  で  $\sigma(t) = \sigma_i$

<sup>\*3</sup>  $t, s$  が  $(T_i, T_{i+1}]$  に含まれていれば、 $\sigma$  が一定であるという仮定は上で用いた  $\sigma(t)$  が単過程の仮定と整合性が取れる。

### 3.7 Two-factor Hull–White モデル

多くのエキゾチックオプションは異なる満期のレートの相関関係に特に敏感であり、マルチファクターのフレームワークでモデル化する必要がある。これには、2つのレートの差に非線形に依存するオプションや、ペイオフが2つの異なる金利曲線に依存するオプションが含まれる。

One-factor の自然な拡張を考えて、短期金利の SDE が

$$dr(t) = (\theta(t) + u(t) - \alpha r(t)) dt + \delta dW(t) \quad (3.31)$$

で与えられる場合を考える。ここで、 $\alpha, \delta$  は定数、 $\theta(t)$  は確定的な関数である ( $W(t)$  はリスク中立測度のもとでのブラウン運動)。  $u(t)$  は確率的な項で、以下の SDE を満たす

$$du(t) = -\beta u(t) dt + \eta dZ(t) \quad (3.32)$$

なお初期値  $u(0) = 0$  とし、 $\beta, \eta$  は定数、 $Z(t)$  は  $W(t)$  とは異なるリスク中立測度のもとでのブラウン運動で

$$dW(t)dZ(t) = \rho dt \quad (3.33)$$

を満たす、定数  $\rho$  2つのブラウン運動の相関係数である。また、 $\alpha \neq \beta$  とする。

これまでと同様にゼロクーポン債価格などを求めることができるが、複雑である。ここでは、two-factor Hull–White モデルの短期金利を以下のように表すことを考える。

$$r(t) = \phi(t) + x(t) + y(t) \quad (3.34)$$

ここで、 $\phi(t)$  は確定的な関数、 $x(t), y(t)$  はそれぞれ

$$dx(t) = -\alpha x(t) dt + \sigma dW(t) \quad (3.35)$$

$$dy(t) = -\beta y(t) dt + \eta dZ(t) \quad (3.36)$$

満たす ( $x(0) = y(0) = 0$ )。  $\alpha, \beta, \sigma, \eta$  は定数で (実は、 $\alpha$  と  $\beta$  は (3.31)(3.32) のそれと同一)、  $U(t), V(t)$  はリスク中立測度のもとでのブラウン運動で

$$dW(t)dU(t) = \rho dt \quad (3.37)$$

を満たす。

#### Exercise 3.10.

$$\phi(t) = r(0)e^{-\alpha t} + \int_0^t \theta(s)e^{-\alpha(t-s)} ds$$

$$y(t) = \frac{u(t)}{\alpha - \beta}$$

$$x(t) = r(t) - \phi(t) - y(t)$$

と置けば、(3.34)-(3.37) を満たせることを示せ。

*Proof.*

$$\begin{aligned}
d\phi(t) &= (-\alpha\phi(t) + \theta(t))dt \\
dy(t) &= \frac{du(t)}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta}(-\beta u dt + \varepsilon dZ(t)) \\
&= \beta y dt + \underbrace{\frac{\varepsilon}{\alpha - \beta}}_{\eta} \underbrace{dZ(t)}_{V(t)} \\
dx(t) &= dr(t) - d\phi(t) - dy(t) \\
&= (\theta(t) + u(t) - \alpha r(t)) dt + \delta dW(t) - (-\alpha\phi(t) + \theta(t))dt - (\beta y dt + \eta dV(t)) \\
&= -\alpha(r(t) - \phi(t) - y(t)) dt + \delta dW(t) - \eta dV(t) \\
&= -\alpha x(t) dt + \underbrace{\sqrt{\delta^2 + \eta^2 - 2\delta\eta\rho}}_{\sigma} d \underbrace{\left( \frac{\delta}{\sigma} W(t) - \frac{\eta}{\sigma} Z(t) \right)}_{U(t)}
\end{aligned}$$

□

#### Gaussian two-factor アプローチ

two-factor Hull–White モデル (3.31)(3.32) を Gaussian two-factor モデル (3.34)-(3.36) に変換した。これにより、ゼロクーポン債の価格が求まる。

式 (3.35)(3.36) を積分して

$$r(s) = \phi(s) + x(t)e^{-\alpha(s-t)} + y(t)e^{-\beta(s-t)} + \sigma \int_t^s e^{-\alpha(s-u)} dU(u) + \eta \int_t^s e^{-\beta(s-u)} dV(u) \quad (3.38)$$

$B(t, T)$  を求めたい

$$\begin{aligned}
\int_t^T t(s) ds &= \int_t^T \phi(s) ds + x(t) \underbrace{\int_t^T e^{-\alpha(s-t)} ds}_{-\frac{1}{\alpha}(e^{-\alpha(T-t)} - 1)} + y(t) \int_t^T e^{-\beta(s-t)} ds \\
&\quad + \sigma \int_t^T \int_t^s e^{-\alpha(s-u)} dU(u) ds + \eta \int_t^T \int_t^s e^{-\beta(s-u)} dV(u) ds
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
d \left( \int_t^s e^{-\alpha(s-u)} dU(u) \right) &= dU(s) - \alpha \left( \int_t^s e^{-\alpha(s-u)} dU(u) \right) ds \\
\int_t^T \int_t^s e^{-\alpha(s-u)} dU(u) ds &= \int_t^T d \left( \int_t^s \frac{1 - e^{-\alpha(s-u)}}{\alpha} dU(u) \right) \\
&= \int_t^T \frac{1 - e^{-\alpha(T-u)}}{\alpha} dU(u)
\end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned} \int_t^T t(s) ds &= \int_t^T \phi(s) ds + x(t) \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} + y(t) \frac{1 - e^{-\beta(T-t)}}{\beta} \\ &\quad + \frac{\sigma}{\alpha} \int_t^T 1 - e^{-\alpha(T-u)} dU(u) + \frac{\eta}{\beta} \int_t^T 1 - e^{-\beta(T-u)} dV(u) \end{aligned}$$

前三項は確定的，後ろ二項は  $\mathcal{F}_t$  独立であり，期待値  $m$  と分散  $V(t, T)$  はそれぞれリスク中立測度のもとで

$$\begin{aligned} m &= \int_t^T \phi(s) ds + x(t) \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} + y(t) \frac{1 - e^{-\beta(T-t)}}{\beta} \\ V(t, T) &= \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \int_t^T \left(1 - e^{-\alpha(T-u)}\right)^2 du + \frac{\eta^2}{\beta^2} \int_t^T \left(1 - e^{-\beta(T-u)}\right)^2 du \\ &\quad + 2\rho \frac{\sigma\eta}{\alpha\beta} \int_t^T \left(1 - e^{-\alpha(T-u)}\right) \left(1 - e^{-\beta(T-u)}\right) du \end{aligned} \quad (3.40)$$

以上より

$$B(t, T) = \exp\left(-m + \frac{1}{2}s^2\right) \quad (3.39)$$

$V(t, T)$  の積分の具体的な計算は省略.

#### 現在の期間構造へのフィッティング

$\phi(t)$  は現在の期間構造にフィットするようによばれる. つまり，任意の  $T$  に対し，以下が成り立つように  $\phi(t)$  を選ぶ.

$$B(0, T) = \exp\left(-\int_0^T \phi(s) ds + \frac{1}{2}V(0, T)\right)$$

ここで，(1.9)\*<sup>4</sup> より，

$$f(0, T) = \phi(T) - \frac{1}{2} \frac{\partial V(0, T)}{\partial T} \quad (3.41)$$

ゼロクーポン債の価格を求めるのに必要なのは関数  $\phi$  そのものよりも，その積分である

$$\begin{aligned} \int_t^T \phi(s) ds &= \int_t^T f(0, s) + \frac{1}{2} \frac{\partial V(0, s)}{\partial s} ds \\ &= \int_t^T -\frac{\partial \ln B(0, s)}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln B(0, s)}{\partial s} ds \\ &= \ln \frac{B(0, t)}{B(0, T)} + \frac{1}{2}(V(0, T) - V(0, t)) \end{aligned}$$

---

\*4

$$\begin{aligned} \frac{B(t, T)}{B(t, S)} &= e^{(T-S)R(t; S, T)} \\ R(t; S, T) &= -\frac{\ln B(t, T) - \ln B(t, S)}{T - S} \\ f(t, T) &= \lim_{\delta T \rightarrow 0} R(t; T, T + \delta T) = -\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T} \end{aligned} \quad (1.9)$$

**Proposition 3.11.** *two-factor Hull-White* モデルにおいて、現在時刻における金利の期間構造にちょうどフィットするゼロクーポン債の価格は

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left( -x(t) \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} - y(t) \frac{1 - e^{-\beta(T-t)}}{\beta} + \frac{1}{2} (V(0, t) - V(0, T) + V(t, T)) \right) \quad (3.42)$$

### 3.7.1 債権のオプション

2次元 Hull-White モデルでは、債券価格の対数の変動率 (3.42) は確定的であり、モデルは債券オプションの解析式を導く。満期  $T > S$  のゼロクーポン債の行使価格  $K$ 、行使日  $S$  のコールオプションの 0 時点価格は

$$\begin{aligned} \text{BC}(0; S, T, K) &= B(0, T)N(d_+) - KB(0, S)N(d_-) \\ d_+ &= \frac{\ln \frac{B(0, S)K}{B(0, T)} + \frac{1}{2}v(0, S)}{\sqrt{v(0, S)}}, \quad d_- = d_+ - v(0, S) \end{aligned}$$

ここで、 $v(0, S)$  は  $\ln B(S, T)$  の分散で

$$\begin{aligned} v(0, S) &= \text{Var} \left( x(S) \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)} - 1}{\alpha} + y(S) \frac{1 - e^{-\beta(T-t)} - 1}{\beta} \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2\alpha^3} \left( 1 - e^{-\alpha(T-S)} \right)^2 \left( 1 - e^{-2\alpha S} \right) + \frac{\eta^2}{2\beta^3} \left( 1 - e^{-\beta(T-S)} \right)^2 \left( 1 - e^{-2\beta S} \right) \\ &\quad + \frac{2\rho\sigma\eta}{\alpha\beta(\alpha + \beta)} \left( 1 - e^{-\alpha(T-S)} \right) \left( 1 - e^{-\beta(T-S)} \right) \left( 1 - e^{-(\alpha+\beta)S} \right) \end{aligned}$$