Ludwig Wittgenstein

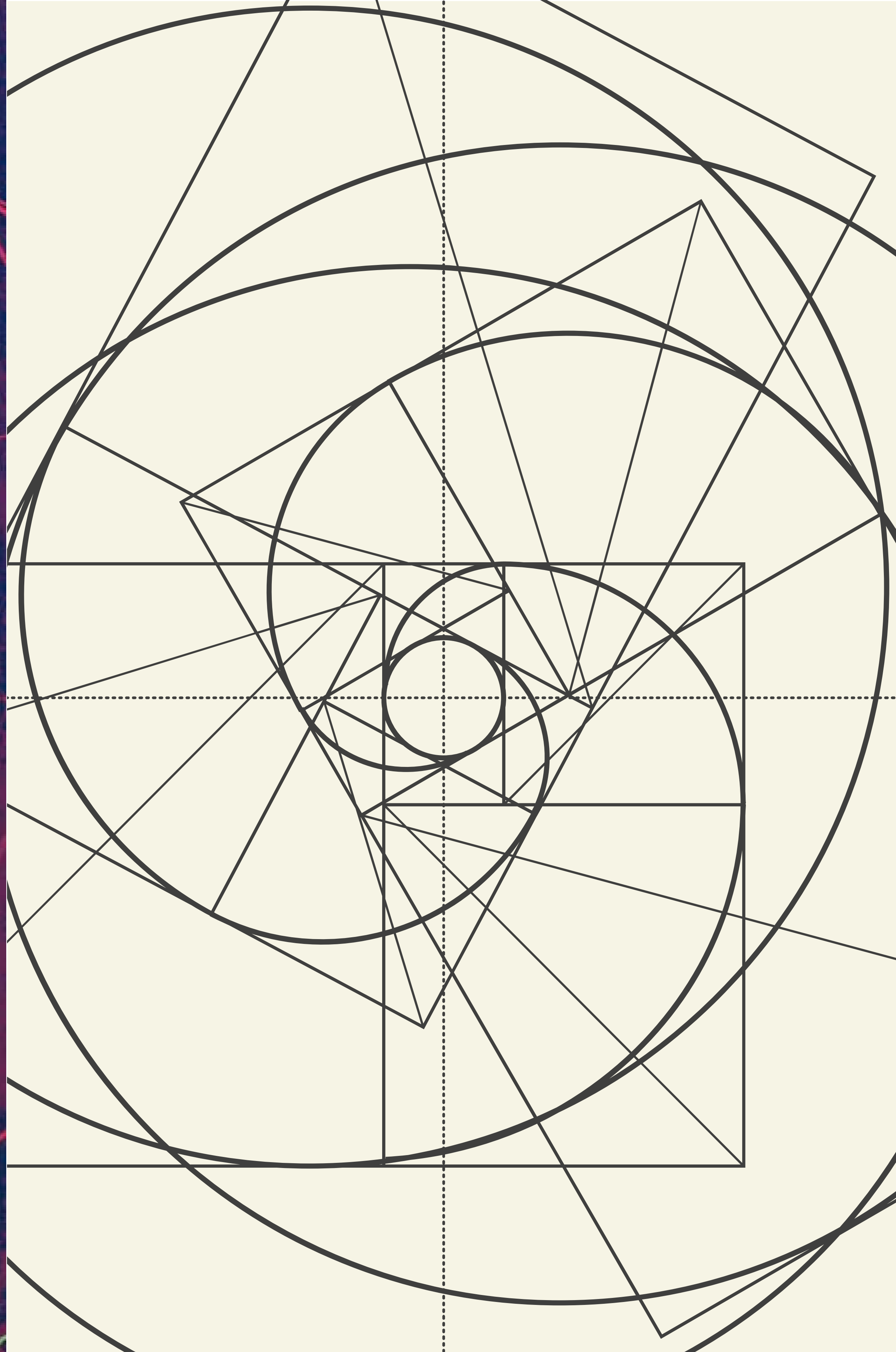
OBSERVAÇÕES SOBRE OS FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA

Edição bilíngue alemão/português

Apresentação, tradução e notas

João José R. L. de Almeida

EDITORA hörle



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Wittgenstein, Ludwig, 1889-1951
Observações sobre os fundamentos da matemática [livro eletrônico] = Bemerkungen über die grundlagen der mathematik / Ludwig Wittgenstein ; apresentação, tradução e notas João José Rodrigues Lima de Almeida. -- 1. ed. -- Curitiba, PR : Horle Books, 2022.
PDF.

Edição bilíngue: alemão/português.
ISBN 978-65-996742-2-8

1. Filosofia 2. Matemática I. Título. II. Título: Bemerkungen über die grundlagen der mathematik.

22-99376 CDD-100

Índices para catálogo sistemático:

1. Filosofia 100

Aline Graziele Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

https://doi.org/10.55872/MAMZ4320

Abreviaturas de Obras de Wittgenstein:*

AC	Anotações Sobre as Cores (2009b)
AWL	Wittgenstein's Lectures. Cambridge, 1932-1935 (1979)
BB	The Blue and Brown Books (1969a)
BLF	Briefe an Ludwig Von Ficker (1969d)
BM I	Bemerkungen I – TS 228 (2000)
BM II	Bemerkungen II – TS 230 (2000)
BT	The Big Typescript (2005)
CLD	Wittgenstein in Cambridge. Letters and Documents (2008)
CV	Culture and Value (1998)
D	Ditados do Nachlass (2000)
DB	Denkbewegungen. Tagebücher 1930-1932, 1936-1937 (1997)
IF	Philosophical Investigations (2009a)
LC	Lectures and Conversations on Aesthetics, Psychology and Religious Belief (1966)
LE	A Lecture on Ethics (1993a)
LFM	Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics (1976)
LO	Letters To C. K. Ogden (1973)
LPP	Wittgenstein's Lectures on Philosophical Psychology (1988)
LWL	Wittgenstein's Lectures, 1930-1932 (1980a)
LWPP I	Last Writings on the Philosophy of Psychology I (1982)
LWPP II	Last Writings on the Philosophy of Psychology II (1992)
M	Wittgenstein's Lectures in 1930-1933 (Moore, 2004a)
MS	Manuscritos do Nachlass (2000)
NB	Notebooks 1914-1916 (1969a)
NLPD	Notes For Lectures on Private Experience and Sense Data (1993b)
OC	On Certainty (1969c)
OFM	Observações Sobre os Fundamentos da Matemática (1978)
ORD	Observações Sobre "O Ramo Dourado" De Frazer (2011)
PG	Philosophical Grammar (1974)
PPF	Philosophy of Psychology: A Fragment (2009a)
PPO	Public and Private Occasions (2003b)
PR	Philosophical Remarks (1975)
RPP I	Remarks on The Philosophy Of Psychology I (1980b)
RPP II	Remarks on The Philosophy Of Psychology II (1980c)
TLP	Tractatus Logico-Philosophicus (2001a)
TS	Datiloscritos do Nachlass (2000)
VW	The Voices of Wittgenstein. The Vienna Circle (2003a)
WLC	Wittgenstein Lectures, Cambridge 1930-1933 (2016)
WWC	Wittgenstein's Whewell's Court Lectures. Cambridge, 1938-1941 (2017)
WWK	Wittgenstein und der Wiener Kreis (1967b)
Z	Zettel (1967a)

Abreviaturas de partes (P), anexos (A) e seções (§) das OFM se dão da seguinte forma: PI§18 (Parte I, seção 18), PIII§25 (Parte III, seção 25), AIII§8 (Anexo III, seção 8), por exemplo.

* As abreviaturas das obras de Wittgenstein seguem as letras iniciais dos títulos dos livros publicados tal como constam na bibliografia. Os textos não publicados na forma de livro que fazem parte do espólio literário (*Nachlass*) aparecem abreviados aqui pelos nomes como são tradicionalmente conhecidos: BM para *Bemerkungen*; MS para *Manuscripts*; TS para *Typescripts*; e D para *Dictates*. O espólio literário foi publicado numa coleção de seis CDs (Wittgenstein, 2000) pela Oxford University Press e pelos Wittgenstein Archives da Universidade de Bergen, conhecida como a Bergen Electronic Edition (BEE). Atualmente a coleção está publicada pelo *Wittgenstein Source*, da Universidade de Bergen: www.wittgensteinsource.org/

ÍNDICE

AS OFM, AS IF E A FILOSOFIA DA MATEMÁTICA DE WITTGENSTEIN

O conjunto de textos que compõe atualmente as sete partes e três anexos das *Observações Sobre os Fundamentos da Matemática* (OFM) foi publicado em sua primeira edição, em 1956, com apenas cinco partes e dois anexos. Os editores do texto, selecionado no *Nachlass*, foram os herdeiros do espólio literário de Wittgenstein, três dos seus antigos alunos, Elizabeth Anscombe, Rush Rhees, e Georg von Wright. O livro somente foi revisado depois de decorridos 22 anos da sua publicação original, já em 1978, quando eles incorporaram um vasto material que havia sido apenas alinhavado nos manuscritos redigidos pelo autor durante o período da Segunda Guerra. Considerando a seleção atual, todos os escritos do conjunto foram compostos por Wittgenstein em quatro datiloscritos (TS 221, depois recortado e rearranjado no TS 222, adicionando-se ainda os TSS 223 e 224), e oito manuscritos (MSS 117, 121, 122, 124, 125, 126, 127, e 164). O período total de redação se estendeu, portanto, por sete anos e meio, de setembro de 1937 até abril de 1944.

Dada a quantidade de manuscritos e datiloscritos produzidos em torno dos fundamentos da matemática, logo vemos que o autor fez neste período um esforço contínuo e bastante considerável.[1] Entretanto, desde 1944 até a sua morte, em abril de 1951, Wittgenstein não mais retomou o trabalho exclusivo com a matéria. Esta, por sinal, foi ocupação tão presente em todos os seus manuscritos, datiloscritos e ditados pregressos, que ele mesmo mandou anotar em 1944 uma frase ao final de um pequeno excerto que John Wisdom estava preparando para um dicionário biográfico, asseverando que "a principal contribuição de Wittgenstein tem sido na filosofia da matemática" (Monk, 1991, p. 466). Lógica e matemática, de fato, só aparecerão desde então em seus textos apenas como observações esparsas. Entremeadas, é claro, aos tópicos de filosofia da psicologia, que se tornou, em contraposição, a atividade principal das suas labutas filosóficas. À exceção, é claro, de um pequeno excurso nos dois últimos anos da sua vida com a discussão sobre cores e certeza.

O que explicaria esta mudança e este afastamento? Bem, aqui é importante fazer uma consideração mais demorada, em pelo menos quatro passos, para esclarecer a natureza da escrita de Wittgenstein e compreender melhor estas transposições inesperadas de um lugar para o outro. São deslocamentos tão constantes que acabam por transformar as suas caminhadas numa espécie de emaranhado cartográfico de rotas de pensamento. Mas um mapa das estradas, vielas e caminhos descreve, como se pode notar, conexões, ou seja, uma visão panorâmica das suas próprias caminhadas. Temos então o texto que, tomado como um todo, é um mapa, e as vicissitudes dos itinerários, em particular.

Por isto, em primeiro lugar, não deveríamos considerar que houve alguma *mudança* nem qualquer *afastamento*, no sentido de uma modificação do modo como ele administrava suas investigações. A filosofia da psicologia, a questão da visão de aspecto, a morfologia dos conceitos no contexto do seu uso, a questão da linguagem privada, as discussões éticas e culturais,

1. No total foram 25 manuscritos (MSS 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 157a, 157b, 158, 159, 160, 161, 162a, 162b, 163, 164, 165) e 7 datiloscritos (TSS 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226).

perguntas sobre certeza e cores, sempre estiveram presentes nos seus textos, bem como nas classes, nas correspondências e nas conversas que entretia com seus amigos e estudantes mais próximos. A partir de 1944, no entanto, em Swansea, amuado pela pressão por publicar um livro e já cogitando em desistir da sua vinculação formal à Universidade de Cambridge, Wittgenstein se desviou de repente do percurso que conservava até ali. Passou da discussão sobre seguimento de regras na matemática para o tratamento de conceitos psicológicos aparentados àquele tema. O desvio de rota, porém, foi tão notório que Rhees chegou a perguntar o que havia acontecido com o trabalho sobre a matemática. Ao que Wittgenstein respondeu: – "Oh, outra pessoa pode fazer isso" (Monk, 1991, p. 466; cf. pp. 466ss.). O que se pode constatar, no entanto, é que o foco, a ênfase sobre a qual convergia a sua escrita e o seu trabalho cotidiano de 1937 até 1944, passou a se dirigir, em movimento retroativo, para escavações e aprofundamentos ainda maiores em áreas que o autor já havia visitado anteriormente, ao longo de toda a década de 1930.

Isto porque pode-se dizer também, em segundo lugar, que este arqueamento da linha de investigação pretendia ser apenas temporário. Deveria haver um retorno à discussão sobre a matemática depois do aprofundamento na filosofia da psicologia. Isto se comprova facilmente pela anotação do nosso autor no MS 138, p. 12a, no dia 30/01/1949. Um trecho que acabou se transferindo para o MS 144, p. 40r, e dali para o datiloscrito 234, hoje perdido, que conformam as atuais PPF § 371:

> É possível para a matemática uma investigação completamente análoga à investigação filosófica da psicologia. Ela é tão pouco *matemática* quanto a outra é psicológica. Nela *não* se calcula, pois ela não é, por exemplo, lógica matemática. Ela poderia merecer o nome de investigação dos "fundamentos da matemática".

Ao percorrer toda uma longa vereda pelos horizontes da psicologia, e examinar muito mais minuciosamente a geografia do uso destes conceitos, Wittgenstein tencionava, ao que tudo indica, retornar à matemática e dar acabamento ao livro.

Em terceiro lugar, e para situar mais adequadamente o trabalho sobre a matemática em consonância com suas perquirições em distintas áreas da filosofia, pode-se retraçar o seu plano de trabalho desde 1937 e constatar que a discussão sobre fundamentos desta disciplina foi sempre concebida em conjunção com a ideia da publicação das IF. O texto capital de Wittgenstein começou a ser redigido no outono de 1936 no seu costumeiro retiro em Skjolden, na Noruega. Trata-se do MS 142, que é de certo modo equivalente às atuais seções §§ 1-189a das IF, e que foi posteriormente datilografado, entre 1937 e 1938, no TS 220 que, por sua vez, junto com o TS 221, passou a constituir o que hoje chamamos de "versão pré-guerra" deste texto. Nosso autor claramente concebia esta primeira parte, que em geral pertence à filosofia da linguagem, como uma digressão geral que deveria acompanhar, mais especificamente, a filosofia da matemática (TS 221). Ambos os datiloscritos são o tomo que de fato se denominou naquele período como *Observações Filosóficas*. Esta versão pré-guerra das IF deveria ser publicada junto com o TLP para que os leitores tivessem uma ideia mais detalhada das mudanças – estas, sim, realmente *modificações* de natureza filosófica – que o autor empreendera no seu pensamento desde o seu primeiro livro.[2] Por conseguinte, os cruzamentos recíprocos de temas parecem ser perfeitamente triviais para um autor que considera a matemática como parte da

2. Os detalhes da evolução da composição das IF, de 1936 até 1947, podem ser acompanhados na edição crítico-genética de Schulte, Nyman, von Savigny, e von Wright (Wittgenstein, 2001b).

própria vida, como "história natural da humanidade", tal como deixa explícito várias vezes nas OFM (PI§63; PI§142; PII§40;PIV§§11,13; PVI§49; PVII§17) e também nas IF (§§ 25, 415). Do mesmo modo como estão também normalmente situadas como atividades práticas, como atos propositivos da práxis cotidiana de todos os povos, as suas observações sobre ética, estética, cultura em geral, e a sua visão particular de linguagem. De tal forma que, ainda em 1937, Wittgenstein se espanta com a semelhança entre as investigações filosóficas, matemáticas e estéticas, e mostra como o seu método realmente consiste não somente na descrição de uma variedade de jogos de linguagem para serem utilizadas como termo de comparação dos usos filosóficos de palavras, mas sobretudo porque os arranjos textuais escolhidos para esta finalidade sejam os mais ajustados do ponto de vista da apresentação estética e da finalidade de clarificação filosófica:

> A estranha semelhança de uma investigação filosófica (talvez especialmente em matemática) com uma estética. (Por exemplo, o que há de ruim neste vestido, como ele se ajusta etc.) (MS 116, p. 56).[3]

Por isto é que finalmente, em quarto lugar, pode-se fazer uma aproximação entre o seu estilo de redação e o que tinha em mente quando expressava o desejo de publicar um "livro". Mesmo que o autor estivesse usando esta palavra no sentido corriqueiro de um texto sistemático, subdividido em tópicos organizados e sequentes, com começo, meio e fim, ou, por outra, mesmo que o autor estivesse usando esta palavra na intenção de correlacionar as investigações sobre os fundamentos da matemática com a filosofia da linguagem em geral, esta ideia nunca se coadunou, na prática, com a natureza da sua investigação, nem com a maneira como escrevia os seus textos. Portanto, esta falta de clareza a respeito do que seria propriamente o "livro", a própria impossibilidade de resumir todo o emaranhado cartográfico de rotas de pensamento em caminhos ortogonais e inequívocos, e a consequente e natural indecisão, a todo tempo presente, a respeito da publicação destes textos, nos leva a concluir que "livro" deveria ser realmente o "álbum". Repare-se até numa conversa com Bouwsma, entabulada já em 5 de agosto de 1949, em Ithaca, quando o nosso autor falou sobre o livro que havia começado a escrever "18 anos atrás" (Bouwsma, 1986, p. 9). 18 anos antes de 1949 localiza-nos precisamente em 1931. Isto quer dizer que Wittgenstein neste momento concebia como "livro" todo o escopo de trabalho produzido desde o seu retorno a Cambridge, praticamente. Na verdade, pode-se resumir melhor tudo isto pela compreensão de que ele só tinha consciência clara de que tudo o que havia escrito até ali era não mais do que a totalidade dos seus diários:

> Eu não tenho nenhum direito de publicar um livro no qual simplesmente as dificuldades que senti estão expressas e mastigadas. Pois estas dificuldades são, na realidade, interessantes para mim, que nelas me meti, e não necessariamente para a humanidade <<os outros>>. Elas são particularidades do meu pensamento, são parte da minha formação. Elas pertencem, digamos, a um diário, não a um livro. E mesmo que este diário pudesse alguma vez ser interessante para alguém, ainda assim não o publicaria. Não são as minhas dores de estômago que são interessantes, mas os meios – if any – que encontrei contra elas. (MS 136, p. 144a)

3 Esta anotação do MS 116 é proveniente do MS 119, pp. 88v-89r, onde a sua discussão é mais detalhada a respeito do que pretende dizer com a comparação.

Pois bem, se (1) a natureza da investigação conduzida por Wittgenstein o obrigou a percorrer um vasto campo de pensamento numa grande variedade de direções e sentidos; se (2) as veredas pelas quais transitou o levaram por rotas que se reencontravam no futuro; se (3) a matemática como atividade orientada por regras era aparentada a outras atividades humanas e entretia com elas laços indissolúveis do ponto de vista prático; e se (4) a escrita sobre os seus fundamentos obriga a traçar uma geografia conceitual multicolorida, não é difícil vislumbrar a hipótese de que as IF não podem ser senão a estampa de um esquadrinhamento muito mais complicado do que parece à primeira vista, do qual a matemática é um dos temas mais importantes. Em outras palavras, as IF não teriam realmente uma assim chamada "Parte II", tal como foi proposta e batizada pelos seus herdeiros literários, sem antes estarem acompanhadas pelas observações sobre os fundamentos da matemática. O ideal, portanto, seria a publicação das IF acompanhas das OFM como um segundo volume. Contudo, o decurso da própria história tornou este projeto inexequível.

Tomando como ponto de partida, portanto, projetos de publicação impossíveis para o que comumente concebemos como um "livro", a hipótese de tradução em jogo neste trabalho é a de que publiquemos os atuais livros de Wittgenstein como partes de um grande "álbum" ou como partes vitais do grande organismo que nosso autor compreendia pelo nome de "filosofia":

> Existe uma verdade na visão de Schopenhauer de que a filosofia é um organismo, e de que um livro de filosofia, com um começo e um fim, é uma espécie de contradição. Uma das dificuldades com a filosofia é a de que nos falta uma visão sinóptica. Encontramos aqui o tipo de dificuldade que teríamos com a geografia de um país do qual não tivéssemos um mapa, ou então um mapa das partes em separado. O país do qual falamos é a linguagem e a geografia, a sua gramática. Podemos andar muito bem pelo país, mas quando somos obrigados a fazer um mapa, cometemos erros. Um mapa irá mostrar estradas diferentes dentro do mesmo país, podemos tomar qualquer uma, mas não duas ao mesmo tempo, do mesmo modo que na filosofia temos que tomar os problemas um a um, mesmo que, de fato, cada problema leve a uma multiplicidade de outros problemas. Temos que esperar até que voltemos ao ponto de partida, antes que possamos ou tratar do problema que atacamos em primeiro lugar, ou proceder a um outro. Em filosofia as questões não são tão simples, de modo que podemos dizer "Vamos ter uma ideia aproximada", pois não conhecemos o país de fato senão quando conhecemos as conexões entre as estradas. (AWL, p. 43).

Livros, como se vê, não dão conta do que foi denominado como "natureza da investigação" no presente prefácio das IF. Precisamente neste trecho é que se acha a declaração de que a inclinação natural do seu pensamento era sempre a de produzir observações na forma de parágrafos curtos que não se consolidavam, no conjunto, como unidades temáticas sólidas e fulgentes. Antes, atravessavam-se reciprocamente nas mais variadas direções, de modo que os mesmos pontos podiam se aproximar várias vezes a partir de diferentes caminhos. Formam-se assim, ao longo dos seus escritos, vários esboços de paisagem mal desenhados. Desenhos que podemos até contemplar e discutir, mas cujo objetivo principal era o de estimular nosso próprio pensamento a conceber estas mesmas pairagens de forma particular e consentânea com as nossas preocupações práticas nos contextos em que vivemos.

Por mais que os editores testamentários de Wittgenstein (Anscombe, Rhees, e von Wright) tenham se esforçado por publicar vários livros redigidos pelo autor, nunca puderam senão fazer seleções arbitrárias do que eles mesmos concebiam como tal. Por fim, eles tampouco puderam senão deixar de fora muita coisa dessas viagens filosóficas empreendidas pelo autor e seus inumeráveis delineamentos.

Pode-se dizer, evidentemente, que os editores estavam autorizados por Wittgenstein a fazer suas seleções e montagens da maneira como melhor lhes aprouvesse. O seu testamento, datado de 29 de janeiro de 1951, lhes outorgava precisamente esta faculdade (cf. Kenny, 2006, p. 382). Mas o fato de que hoje tenhamos à disposição de um clique de mouse a integralidade do *Nachlass*,[4] nos permite flagrar nitidamente a forma e o método dessas seleções e composições editorais, e verificar, com toda a tranquilidade e conforto, tudo o que ficou na penumbra. O *Nachlass*, como preconiza Paul, é o que, de fato, viria a ser "a obra de arte" do escritor (2007, p. 23). Este é o próprio "álbum" na sua inteireza. Nesta perspectiva é que se pode utilizá-lo como critério de comparação e avaliação dos textos publicados do autor.

Esta nova tradução das OFM leva em conta justamente todas estas hipóteses, e, por isto, enquanto respeita as seleções editoriais de Anscombe, Rhees, e von Wright, mostra no corpo do texto de que parte do *Nachlass* os excertos foram retirados. Para isto estão afixadas as etiquetas com a indicação da fonte textual que pode ser consultada nos *Wittgenstein Source* (www.wittgensteinsource.org). O leitor deve considerar como referência a etiqueta colada ao final da porção textual (não ao começo). Nossa edição também revela, nas notas de tradução, as mais interessantes porções que não chegaram a ser integradas como partes pertencentes ao livro. Em outras palavras, nosso objetivo é mostrar o álbum, a obra de arte e a aventura do pensamento de Wittgenstein através do que tradicionalmente tomamos como "livros".

Admitindo-se, portanto, que as edições de Anscombe, Rhees, e von Wright não entram em detalhes sobre: (1) a distribuição dos variados datiloscritos e manuscritos utilizados entre as sete partes e três anexos em que eles subdividiram as OFM; (2) nem tornam explícito exatamente por que selecionaram algumas partes destes manuscritos e não outras; ademais de (3) não dizerem por que às vezes intercalaram partes de um manuscrito com partes de outro; e nem (4) esclarecem por que às vezes depois retornam ao manuscrito anterior; vamos dispor, então, em visão panorâmica, a correlação entre o texto publicado e o material de onde se originou, para que depois, nas notas comentadas, seja facilitada uma compreensão mais clara das observações publicadas à luz das omissões, adicionando-se também uma tradução daquelas mais interessantes, pelo menos segundo o critério deste tradutor. Quanto, por sua vez, às nossas próprias possíveis omissões, a leitora ou o leitor já podem se referir à integralidade dos manuscritos e datiloscritos nos *Wittgenstein Source*.

A tabela a seguir apresenta a correlação entre as sete partes e os três anexos do texto com os manuscritos e datiloscritos utilizados na sua edição oficial:

Edição das OFM	Texto-fonte/Data	Seções Correspondentes
Parte I	TS 222 (1937-1938)	Todas as seções
Anexo I	TS 222 (1938)	Todas as seções
Anexo II	TS 224 (1938)	Todas as seções
Anexo III	TS 223 (1938)	Todas as seções
Parte II	MS 117 (1938) MS 121 (1938)	§§ 1-22 §§ 23-62
Parte III	MS 122 (1939-1940) MS 117 (1940)	§§ 1-58 §§ 59-90
Parte IV	MS 121 (1939) MS 125 (1942) MS 126 (1943) MS 127 (1944)	§ 60 §§ 1-50; 51-54; 59 § 50 (menos o 1º parágrafo) §§ 55-58
Parte V	MS 126 (1942) MS 127 (1944)	§§ 1-26; 28-34 §§ 27; 35-53
Parte VI	MS 164 (1943-1944)	Todas as seções
Parte VII	MS 124 (1941 e 1944)	Todas as seções

4. Em http://www.wittgensteinsource.org/

Os TSS 220 (§§ 1-189a originais das atuais IF) , 221 (fonte do TS 222, que dá forma à atual Parte I das OFM) e 225 (prefácio da versão inicial das IF), deveriam ter ser sido entregues por Wittgenstein, em 1938, para a Cambridge University Press, com o propósito de divulgar ao público a sua nova visão da filosofia. O autor pretendia que o livro fosse publicado em versão bilíngue com o o título de "Observações Filosóficas". Logo, porém, desistiu da intenção. Não se sabe exatamente o motivo, mas é possível que estivesse insatisfeito com a segunda parte do seu trabalho, a filosofia da matemática, já que nos seis anos seguintes continuou dando um pouco mais de discussão e aprofundamento à matéria, ou também é possível que estivesse preocupado com os resultados da tradução do TS 220 para o inglês, realizada justamente por Rhees (cf. Monk, 1991, p. 414). Não obstante as hesitações, o fato é que o consórcio entre as IF e as OFM, como já sugerimos, é bem mais profundo do que a ligação mais tarde proposta por esses mesmos editores, em 1953, entre uma suposta "Parte I" e uma "Parte II" daquele primeiro livro.

Paralelamente a essas razões, pode-se indicar evidências da relação orgânica entre as OFM e as IF na própria menção corriqueira e despreocupada, por cinco vezes, aos "jogos de linguagem (2)": em PIII§80; PVI§38; PVI§40; PVII§71, e ainda no MS 124, p. 170 (passagem omitida pelos editores na edição da PVII§61). Estas referências pressupõem, naturalmente, que ambos os textos sejam partes intrínsecas do mesmo *corpus*. Vale dizer que a relação orgânica entre as IF e os escritos posteriores a 1945 evidencia-se também pelas referências ao "jogo de linguagem (2)" e ao "jogo de linguagem (8)". Isto ocorre nos MS 132, p. 203; 136, p. 53a; MS 137, p. 112a (LWPP I § 340); MS 175, p. 67v (OC § 396); e MS 176, p. 62v (OC § 566). O que, como sustenta Venturinha (2010, pp. 149-150), serve ao fim como corroboração de que até mesmo os derradeiros escritos, de 1951, ainda estão no mesmo *corpus* do pretendido livro. De fato, isto é o que nos faz abraçar a hipótese de que as IF são, na prática, inseparáveis do *Nachlass*. Por tais motivos é que as OFM devem ser vistas como um pedaço importante deste inacabado e bem mais amplo projeto de publicação de um novo livro que pudesse divulgar, em forma bilíngue, a sua nova visão da filosofia.

Essas balizas do trabalho de pesquisa fizeram com que o texto-fonte que serve de base para esta tradução se tornasse parte integral e constituinte de uma atividade de prospecção e análise realizada em conjunto com a transposição do texto-fonte para o texto-alvo. Não se trata simplesmente do mais normal no trabalho de uma tradução, em que aquele material já está pronto e disponível para ser vertido no texto-alvo. Ao contrário, o trabalho de cotejamento para disponibilizá-lo adequadamente foi árduo. O resultado, no entanto, manifesta-se, por exemplo, nas diferenças mais cruciais com relação a outras edições das OFM. Tais como a restauração do tradicional espaçamento que o autor reservava para cada uma das suas observações, a localização da fonte específica do trecho no *Nachlass* e a recuperação das ilustrações que muitas vezes acompanham as discussões ali entabuladas. Isto é importante porque a unidade narrativa de um texto de Wittgenstein é certamente a *observação*. Não é o livro como um todo, nem um certo conjunto de observações dedicadas ao mesmo assunto. O núcleo filosófico da discussão dialógica do autor se restringe nitidamente ao escopo do que investiga dentro de um fragmento textual em particular, mesmo que esta investigação se recupere em outro segmento mais afastado ou até, muitas vezes, contíguo. Assim, quando este redigia uma observação com mais de um parágrafo, o espaçamento entre estes era simples. Quando, por outra parte, a observação continha apenas um parágrafo, ou então se reduzia apenas a uma frase, o espaçamento em relação à próxima observação era duplo.

Assim como há necessidade de restaurar a diagramação pelo critério da unidade narrativa em Wittgenstein, há também, por razões similares, inevitabilidade de excluir o índice regularmente apresentado nas edições pregressas das OFM. São índices acometidos de extremo detalhismo, com preocupação exagerada em especificar os pormenores de cada uma das seções do livro. Índices, geralmente, de mais de dez páginas. Normalmente, o índice de um livro propõe-se a ser apenas um localizador acompanhado de uma lista de assuntos relacionada aos capítulos e subtópicos. Isto serve para que uma leitora ou um leitor possam rapidamente orientar-se em relação ao referencial. Obviamente, uma autora poderia, por exemplo, inventar uma ficção em que o índice fosse o livro, e o livro, o índice. Quando este, entretanto, não é o caso, um índice que não funciona bem como um localizador pode trazer, a meu ver, mais confusão que orientação. Esta espécie de índice produzido pelos primeiros editores, que aparece também nos casos das edições das PR e da PG, afigura-se como um verdadeiro "mapa de Borges". Todavia, a sua inclusão, mais do que causar embaraços, sugere até mesmo um certo desentendimento da natureza da escrita de Wittgenstein.

Veja-se como se conforma, até mesmo imperceptivelmente, um desentendimento desta índole. Por certo o índice é mais apropriado ao livro do que ao álbum. Mas elaborar um índice para pensamentos que não foram subdivididos em capítulos, que não se materializaram em grandes porções narrativas sistematizadas, e que são uma miríade de observações que, na realidade, se atravessam em todas as direções, é, sem dúvida, contribuir para a desconsideração acerca do estilo literário em causa, em vez de, ao contrário, organizar uma compreensão clara da natureza do texto. O próprio texto é um mapa que descreve caminhos assistemáticos e não-lineares. Portanto, ele mesmo é um índice. Obviamente o estilo das OFM corresponde ao das IF, e difere-se marcadamente do estilo do BT (TS 213), para o qual Wittgenstein propôs, com boa razão, um índice regular. Porém, levar seriamente em consideração o estilo literário da obra é também uma das ações propositivas desta tradução. Por estas razões, o índice analítico bem detalhado em alemão e português, providenciado nesta edição, é o meio mais conveniente para localizar qualquer assunto no interior do *corpus* textual wittgensteiniano.

Outra espécie de intervenção, já mencionada mas não menos importante em se tratando de um texto de Wittgenstein, foi o de recriar suas ilustrações e diagramas da maneira a mais próxima possível do original. Ao longo do *Nachlass* é recorrente o uso de desenhos e diagramas que, por isto mesmo, devem ser considerados como parte relevante do *corpus*. Para Wittgenstein, a imagem é relevante não só porque o TLP já preconizava uma concepção pictórica da linguagem, mas também porque se pode retraçar uma verdadeira filosofia da imagem em Wittgenstein.[5]

5. O leitor pode investigar no índice analítico deste livro todas as vezes em que Wittgenstein discutiu o conceito de "imagem". Cf. também Kristóf Nyíri (2006, pp. 322-353).

Quanto à estratégia de tradução, propriamente, procurei orientar-me por uma maior proximidade ao original, tanto quanto possível, e apenas permitindo-me um maior descolamento nas ocasiões em que a versão em português daquelas sentenças ou palavras da língua original não tivessem uma correspondência muito tranquila em nosso idioma. Obviamente esta é uma diretriz divergente da tão acalentada "transcriação", geralmente proposta por tradutores literários. O ponto aqui, no entanto, não é somente o de se evitar a armadilha do ideal de uma tradução "palavra por palavra", ou do assim chamado ideal de uma "equivalência perfeita", fazendo recriações do texto na língua de chegada. Mas trata-se sobretudo de cuidar do aspecto filosófico, até mesmo no caso de um autor que preferiu escrever filosofia com tintas literárias. Neste caso, a nossa conduta ficou mais aparentada à introdução em nossa língua de modos de falar que não são tão naturais entre nós. Talvez nos aproximando um pouco da forma de resistência interpretativa do tradutor discutida por Venuti como "domesticação", ou como "um processo para tornar um texto inteligível e interessante para leitores domésticos" (1998, p. 114). O que está aqui proposto, presumo, é uma domesticação filosófica, isto é, a inclusão em nossa língua de certas formas estranhas e desconfortáveis ao padrão mais comum no vernáculo, acentuando que a origem do texto é estrangeira e filosófica, ao mesmo tempo que também se assimila jargões filosóficos ao nosso patrimônio linguístico. Entendo, também por isto, que minha opção tenha sido a de propor a tradução como um "jogo de linguagem" (IF § 23). Isto é, como uma prática concreta e localizada que pode ser descrita pelo seu propósito específico, dentro do seu contexto particular, segundo regras que se dispôs para resolver efetivamente um problema. Não, em absoluto, como uma prática guiada por algum ideal abstrato, seja ele a equivalência, o valor cognitivo dos conceitos, a própria domesticação ou então o estrangeirismo, a transcriação etc.). Esta tradução reflete, no fundo, o seu tradutor, no sentido de que outros tradutores produziriam traduções diferentes desta, mas também porque assim, deve-se reconhecer, se exerce uma força que tenta influir no destino das discussões acadêmicas deste texto em âmbito doméstico.

Por conseguinte, nos casos em que me pareceram necessários, coloquei nota de tradução para esclarecer e me responsabilizar pela opção tomada. Veja-se, por exemplo, a nota 2 à seção PI§2, com relação ao verbo *meinen*, que propõe um critério semântico para verbos psicológicos como parâmetro para algumas escolhas de tradução; ou a nota 350 à seção PVII§19, em que o critério utilizado foi a análise de outras ocorrências de *vorbeireden* (falar sem se entender, falar ao redor de alguma coisa) no *Nachlass*. Ao todo, consumaram-se 413 notas de tradução nesta edição.

Ainda no tema das estratégias de tradução, vale a pena, neste ponto, prestar também um esclarecimento adicional sobre a compreensão aqui suposta do estilo literário assistemático e da natureza da filosofia de Wittgenstein. Particularmente, sou favorável à hipótese de que o seu pensamento passou por modificações importantes, por exemplo, da sua fase de juventude, no TLP, para o período de maturidade, à qual a presente expressão filosófica pertence, e que, mesmo na etapa tardia, houve oscilações significativas entre inclinações sistematizantes e assistematizantes, digamos assim, nos seus escritos. Todavia, essas modificações e oscilações se sustentaram sobre um fundamento constante, consignado em um só propósito filosófico. E a continuidade de fundo parece-me ser mais significativa que as descontinuidades. Do mesmo modo como na música barroca pode-se perceber variações sobre um fragmento melódico que unifica uma composição, pode-se também enxergar nas decisões de uma pessoa, por esta perspectiva, as diferentes, e às vezes incongruentes, tendências que se assume na busca daquilo que melhor expressaria um tipo constante de caráter. O tema constante de Wittgenstein, aquilo que poderíamos chamar de seu "baixo contínuo",[6] é o de sempre excluir a explicação e o ideal cognitivo do domínio da filosofia e transformá-la em intervenções fisiognômicas gramaticalmente orientadas, isto é, guiadas pela crítica do uso da linguagem.

Deste ponto de vista, o seu pensamento não se assemelha ao do filósofo tradicional, mas sim ao daqueles para os quais a chegada do caminho não é o fato mais importante da jornada. Valem muito mais as escolhas dos percursos incertos pelos quais trafegou. Importaria, por conseguinte, para melhor reconhecê-lo, mais a continuidade do labirinto e dos seus motivos antifilosóficos ao longo de toda a trajetória, do que as próprias soluções e saídas, mais ocasionais e adequadas ao problema particular que enfrentava. Poderíamos levar esta hesitação até um pouco mais a fundo, a meu ver, pois estas duas características já aparecem no próprio TLP que, como assevera McGuinness, é uma obra repleta de ironias, um texto que representa uma "paródia de um tratado matemático" (2006, p. 379). Longe do sistematizante "tratado lógico-filosófico" do título e da organizada expressão escrita, seu interesse se restringia, na realidade, a que a leitora ou o leitor se apercebesse dos compromissos velados da filosofia com o contrassenso, e tomasse uma atitude no campo da ética, não no plano propriamente cognitivo ou lógico do tratado, como poderia parecer à primeira vista. Neste ponto, precisamente, parece-me que Wittgenstein sempre foi o mesmo, alguém que se utiliza de ferramentas filosóficas para livrar-se da filosofia e chegar enfim a uma solução ética - que, claro, depende de cada um, particularmente de cada um dos seus leitores.

Pois precisamente este é o caso da sua filosofia da matemática, quando enfatiza que "o que fornecemos são, na realidade, observações sobre a história natural da humanidade" (PI§142). Não se trata, neste texto, da criação de uma teoria, nem da defesa de alguma doutrina, mas da "constatação de fatos dos quais ninguém duvida, e que só escapam de ser observados porque estão continuamente perambulando diante dos nossos olhos" (PI§142). Seu propósito continua a ser o de favorecer uma tomada de uma atitude, depois que reconhecemos o que ele nos mostra e passamos a ver de outra maneira: "A insatisfação filosófica desaparece pelo fato de que vemos mais" (PIII§85).

Assim, não é implausível cogitar que a sua filosofia da matemática deva ser vista nesta chave, e não pela via do interesse cognitivo mediante o qual se alinha a maior parte da filosofia contemporânea, seja ela a continental ou a analítica. Do contrário corre-se o risco de desentender-se todo o seu esforço, classificando-o de ingênuo, superficial, diletante ou até mesmo de ignorante, a exemplo de críticas já célebres como as de Kreisel (1958), Bernays (1959), Dummett (1978), ou Gödel (cf. Wang, 1987, p. 49). Tal desentendimento coloca a perder a mais rica contribuição dos seus textos: os métodos filosóficos. Um método que serviu de inspiração para ninguém menos que Alan Turing (cf. pp. 568, 572-574, 580, 594 e 640 das Notas de Tradução).

Podemos flagrá-lo em ação no TLP, em 1922 (cf. McManus, 2006), nas discussões presenciais e epistolares com Ramsey, que perduraram de 1923 a 1929, nas conversações mantidas com dois membros do Círculo de Viena, Schlick e Waismann, cujas anotações, publicadas atualmente em WWK e em VW, podem cobrir um período de, pelo menos, seis anos, entre 1929 e 1935. Trata-se sempre, invariavelmente, da procura da maneira mais eficaz de persuadir o interlocutor (leitora ou leitor) a enxergar os mesmos fatos de outra maneira. Sem que, para isto, nada lhe seja sugerido; sem que nada do que ela ou ele realmente acreditam seja de

6. No MS 122, p. 88r, Wittgenstein, em meio às reflexões sobre a matemática, anota em código que "Toda grande arte toma como o seu baixo contínuo as pulsões humanas primitivas".

fato tocado.

A imagem desta filosofia da matemática está muito bem descrita numa passagem em que ele declara, por exemplo: "A claridade filosófica tem, sobre o crescimento da matemática, a mesma influência que a luz do sol sobre o desabrochar dos rebentos da batata. (No escuro da despensa eles crescem muitos metros)" (TS 213, p. 643). Isto mostra que a luta de Wittgenstein é sempre no sentido de extirpar, pelo esclarecimento filosófico, a filosofia do pensamento da matemática. Não permitir que ela prolifere descontroladamente e redunde em outra coisa que não seja mais reconhecida como a atividade do cálculo ou da medição em que se pode, efetivamente, chegar a uma decisão. A matemática, como jogo de linguagem, é uma atividade prática efetiva e decidível, destinada a resolver problemas concretos localizados em contextos e formas de vida.

Por outro lado, é também por este motivo que ele espera que o matemático fique simplesmente horrorizado pelas suas explanações (TS 213, p. 644). Por exemplo, quando numa discussão sobre provas de consistência de Hilbert, provoca Schlick e Waismann, com ironia, ao dizer: "Eu já posso até prever: vão surgir investigações matemáticas sobre cálculos que contêm uma contradição, e eles vão fazer alguma coisa de bom para se livrarem da consistência" (WWW, p. 139). Suas manobras retóricas, muito variadas ao longo de toda a produção escrita, têm sempre o fito de persuadir o interlocutor sem que seja preciso lançar mão do convencimento argumentativo direto. Declara-se nas OFM: "Pode-se não se ter uma visão panorâmica da justificação de uma expressão *por causa do seu emprego*, observando-se uma faceta deste emprego; por exemplo, uma imagem a ela vinculada." (PII§62). À diferença do ideal de neutralidade lógica do argumento, em Wittgenstein premissas e conclusão vão ser tomados pragmaticamente, como expressão de interesse. Uma demonstração matemática é tomada como ato de convencimento, como manifestação de uma imagem que se impõe como um modelo a ser seguido (cf. PI§79; PIII§22). O papel da sua filosofia, entretanto, e nisto devemos ser cuidadosos, não é desconsiderar o argumento em favor de algum outro, supostamente melhor, que lhe possa ocupar o lugar. Habitualmente, isto é o que se faz num mundo em que teorias conspiratórias e pseudociências se multiplicam, umas depois das outras. Em vez da disputa sobre quais seriam as melhores razões, trata-se aqui simplesmente de desconstruir por dentro alegados bons argumentos, derruir as bases de pressupostas verdades eternas a fim de que o sujeito possa tomar uma decisão independente da força pragmática imposta pelo uso especializado de certas palavras. Por este crivo passam, no presente texto, o logicismo, quando Wittgenstein coloca em causa o sentido da fundamentação da matemática; o formalismo, quando considera de maneiras inesperadas o papel dos axiomas e das contradições na demonstração; o intuicionismo, quando reflete sobre a relação entre o mental e o empírico na formulação dos conceitos matemáticos; o platonismo, quando aborda a matemática como uma mineralogia ou uma zoologia. Mas o argumento não é desprezado nem desconsiderado, apesar da prática desconstrucionista, já que ninguém parece estar obrigado a abandonar suas próprias convicções depois de observá-las à luz do sol.

A notável diferença de estilo literário entre o BT (TS 213) e as OFM não deve ser também descuidada. Lembremos que Wittgenstein fazia extensas revisões no TS 213 ainda no outono de 1937, anotadas entre as páginas 1 a 135 do MS 116, sobre as quais von Wright observa que se moviam marcadamente na direção das IF (1993, p.494). Um ano antes, no outono de 1936, em Skjolden, nosso filósofo já havia produzido o MS 142 que, datilografado, se tornaria, em 1938, o TS 220 (§§ 1-189a das atuais IF). Lembremos também que a parte final do BT (5 das 18 seções que compõem o livro) é dedicada à matemática, começando pela seção intitulada "Fundamentos da Matemática". Os TSS 221, 222, 223 e 224, que atualmente compõem a Parte I e anexos das OFM, são também, do mesmo modo como se enunciou no BT, "observações sobre fundamentos da matemática". Por isto é que me parece que a desistência da publicação em 1938 da conjunção do TS 220 com o TS 221 como o seu novo livro deve ser também considerada como um forte indicativo da rendição, até mesmo nos textos sobre a matemática, da inclinação sistematizante da sua escrita ao estilo literário dialógico, polifônico e assistemático que encontramos nas IF, bem mais propício aos métodos antifilosóficos do autor.

Sob esta perspectiva descortina-se diante do leitor uma variedade muito grande de situações em que a matemática está furtivamente comprometida com a filosofia, em que ela se torna mais filosofia do que propriamente matemática executada na prática. Momentos em que a atividade prática se perde em considerações atemporais. O que, no caso de uma ciência que se baseia no rigor e na consistência, parece inacreditável. Com que tão sólidas razões poderíamos dizer, assim, que uma proposição matemática corresponderia a uma construção mental, e não, antes, à influência sobre a nossa comunidade de um certo palavrório (PIV§27), ou de um certo tipo de relação com o mundo empírico (PIV§29)? O fato é que os textos de Wittgenstein nos confrontam com a nossa própria fisiognomia (cf. Almeida, 2015), com as atitudes a ela correlacionadas, e, na verdade, nos interpelam a perquirir sobre compromissos tácitos que assumimos em nossos afazeres científicos.

Esta é a primeira vez que este texto é apresentado em língua portuguesa. O tradutor também espera que, com isto, novos desafios se abram em nossa comunidade para uma compreensão do pensamento deste filósofo que tão peculiarmente se situa no movimento da filosofia analítica do século XX, e que tanto ainda teria para ser debatido no escopo da filosofia que se apresenta agora, no século XXI. Uma exploração mais clara do seu texto, realizada em perspectiva com a totalidade do *Nachlass*, é a nossa contribuição particular para fomentar tal debate.

Quanto à qualidade desta tradução, ela certamente deve ser julgada como é investigado um "jogo de linguagem" (cf. IF § 23). Pode ser boa ou ruim, pode ter sido bem ou mal-sucedida: "(Quem disse que somos capazes de traduzir satisfatoriamente este poema inglês em alemão?!) (Mesmo que esteja claro que existe, em um certo sentido, para cada sentença do inglês, uma tradução em alemão)" (PIII§85). O fato é que o retorno crítico da leitora e do leitor é imprescindível para o melhoramento da qualidade do trabalho apresentado até agora. Por outro lado, esperamos ter entregue o melhor do nosso esforço.

Por fim, gostaria de agradecer a leitura e discussão de muitos pontos desta tradução, e consequentemente da filosofia da matemática de Wittgenstein, a Cláudio Banzato (UNICAMP), Fátima Évora (UNICAMP), Helena Martins (PUC-RJ), Reinaldo Furlan (USP) e Richard Simanke (UFJF), que compuseram a banca de livre docência em que uma versão preliminar deste trabalho foi apresentado como tese em 2019. Despois disto, Antonio Miguel (UNICAMP), Carolina Tamayo-Osorio (UFMG), e Elizabeth Souza (UFPA) discutiram comigo, ao longo de muitos encontros, a correlação entre matemática, filosofia e educação, que é imprescindível para compreender-se mais plenamente a obra de Wittgenstein. Nossas discussões se basearam em trechos desta tradução. Deixo aqui também o meu profundo agradecimento ao financiamento da pesquisa que deu origem a este trabalho, um projeto de auxílio à pesquisa outorgado pela Fapesp em 2017 (processo nº 16/21147-8).

BEMERKUNGEN ÜBER DIE GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

OBSERVAÇÕES SOBRE OS FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA

Teil I

1937-1938

1. Wir verwenden den Ausdruck: »die Übergänge sind durch die Formel ... bestimmt«. Wie wird er verwendet? – Wir können etwa davon reden, daß Menschen durch Erziehung (Abrichtung) dahingebracht werden, die Formel $y = x^2$ so zu verwenden, daß Alle, wenn sie die gleiche Zahl für x einsetzen, immer die gleiche Zahl für y herausrechnen. Oder wir können sagen: »Diese Menschen sind so abgerichtet, daß sie alle auf den Befehl ›+ 3‹ auf der gleichen Stufe den gleichen Übergang machen.« Wir könnten dies so ausdrücken: »Der Befehl ›+ 3‹ bestimmt für diese Menschen jeden Übergang von einer Zahl zur nächsten völlig.« (Im Gegensatz zu andern Menschen, die auf diesen Befehl nicht wissen, was sie zu tun haben, oder die zwar mit Sicherheit, aber ein jeder in anderer Weise, auf ihn reagieren.)

Wir können anderseits verschiedene Arten von Formeln und zu ihnen gehörige verschiedene Arten der Verwendung (verschiedene Arten der Abrichtung) einander entgegensetzen. Wir *nennen* dann Formeln einer bestimmten Art (und der dazugehörigen Verwendungsweise) »Formeln, welche eine Zahl y für ein gegebenes x bestimmen«, und Formeln anderer Art, solche, »die die Zahl y für ein gegebenes x nicht bestimmen«. ($y = x^2 + 1$ wäre von der ersten Art, $y > x^2 + 1$, $y = x^2 \pm 1$, $y = x^2 + z$ von der zweiten.)

TS 222, p. 1

Der Satz: »die Formel ... bestimmt eine Zahl y« ist dann eine Aussage über die Form der Formeln – und es ist nun ein Satz »Die Formel, die ich hingeschrieben habe, bestimmt y«, oder »Hier steht eine Formel, die y bestimmt«, zu unterscheiden von einem Satz wie: »Die Formel $y = x^2$ bestimmt die Zahl y für ein gegebenes x«. Die Frage »Steht dort eine Formel, die y bestimmt?« heißt dann dasselbe wie: »Steht dort eine Formel dieser Art, oder jener Art?«; was wir aber mit der Frage anfangen sollen: »Ist $y = x^2$ eine Formel, die y für ein gegebenes x bestimmt?« –. ist nicht ohne weiteres klar. Diese Frage könnte man etwa an einen Schüler stellen, um zu prüfen, ob er die Verwendung des Ausdrucks »bestimmen« versteht; oder es könnte eine mathematische Aufgabe sein, zu berechnen, ob auf der rechten Seite der Formel nur eine Variable steht, wie z. B. im Fall: $y = (x^2 + z)^2 - z(2x^2 + z)$.

2. »Wie die Formel gemeint wird, das bestimmt, welche Übergänge zu machen sind«. Was ist das Kriterium dafür, wie die Formel gemeint ist? Doch wohl die Art und Weise, wie wir sie ständig gebrauchen, wie uns gelehrt wurde, sie zu gebrauchen.

Wir sagen z. B. Einem, der ein uns unbekanntes Zeichen gebraucht: »Wenn du mit ›x~2‹ meinst x^2, so erhältst du *diesen* Wert für y, wenn du damit $\sqrt{x}$ meinst, *jenen*.« – Frage dich nun: Wie macht man es, mit ›x~2‹ das eine, oder das andere *meinen*?

So kann also das Meinen die Übergänge zum voraus bestimmen.

Parte I

1937-1938

1. Nós empregamos a expressão: “as passagens são determinadas pela fórmula ...”. Como ela é empregada? – Nós poderíamos dizer, por exemplo, que as pessoas foram levadas a empregar a fórmula $y = x^2$ pelo ensino (adestramento), de tal forma que todos, quando substitutem x pelo mesmo número, sempre obtêm o mesmo resultado para y. Ou poderíamos dizer: “Estas pessoas são adestradas de tal modo que todas elas, sob a ordem ‘+ 3’, dada no mesmo estágio, executam a mesma passagem.” Poderíamos expressar isto assim: “A ordem ‘+ 3’ determina completamente, para estas pessoas, qualquer passagem de um número ao seguinte.” (Em contraposição a outras pessoas que, sob esta ordem, não sabem o que se tem que fazer, ou que, ainda que reajam a ela com segurança, no entanto cada uma o faz de um jeito diferente.)

Por outro lado, nós poderíamos contrapor diferentes tipos de fórmula e diferentes tipos de emprego (diferentes tipos de adestramento) apropriados a elas. Nós *nomearíamos* as fórmulas de um determinado tipo (e modos de emprego correspondentes) como “fórmulas que determinam um número y para um número x dado”, e as fórmulas de outro tipo como as que “não determinam um número y para um dado número x”. ($y = x^2 + 1$ seriam do primeiro tipo, e $y > x^2 + 1$, $y = x^2 \pm 1$, $y = x^2 + z$, do segundo.)

TS 222, p. 1

A proposição: “a fórmula ... determina um número y” seria então um enunciado sobre a forma das fórmulas – e agora uma proposição como “A fórmula que anotei aqui determina y”, ou como “Aqui está uma fórmula que determina y”, deveria ser diferenciada de uma proposição como: “A fórmula $y = x^2$ determina o número y para um dado número x”. A pergunta “Ali está uma fórmula que determina y?” significa o mesmo que “Ali está uma fórmula deste ou daquele tipo?”; mas o que fazer com a pergunta “$y = x^2$ é uma fórmula que determina o y para um dado x?” – não é imediatamente claro. Esta pergunta poderia ser proposta para um estudante, para conferir se ele compreende o emprego da expressão “determinar”; ou poderia ser uma tarefa de matemática, para calcular se permanece apenas uma variável no lado direito da fórmula, como, por exemplo, no caso: $y = (x^2 + z)^2 - z(2x^2 + z)$.

2. “O modo[1] como se pretende que a fórmula seja entendida[2] é o que determina que passagens devem ser feitas”. Qual é o critério para o modo como se pretende que a fórmula seja entendida? Supõe-se que seja a maneira como ela foi constantemente usada, como nos foi ensinado a usá-la.

Nós dizemos, por exemplo, para alguém que usa um sinal desconhecido por nós: “Se você, com ‘x~2’, quer dizer x^2, então admite *este* valor para y; mas se você quer dizer $\sqrt{x}$, então *aquele*.” – Agora, pergunte-se a si mesmo: como se faz com ‘x~2’ para se *querer dizer* ou um ou outro?

Assim, portanto, o querer dizer pode determinar previamente as passagens.

TS 222, p. 2

3. *Wie weiß ich*, daß ich im Verfolg der Reihe + 2 schreiben muß

»20004, 20006«

und nicht

»20004, 20008«?

(Ähnliche ist die Frage: »Wie weiß ich, daß diese Farbe ›rot‹ ist?«)

»Aber du weißt doch Z. B., daß du immer die *gleiche* Zahlenfolge in den Einern schreiben mußt: 2, 4, 6, 8, 0, 2, 4, usw.« – Ganz richtig! das Problem muß auch schon in dieser Zahlenfolge, ja auch schon in *der*: 2, 2, 2, 2, usw. auftreten. – Denn wie weiß ich, daß ich nach der 500sten »2« »2« schreiben soll? daß nämlich an dieser Stelle »2« ›die gleiche Ziffer‹ ist?

TS 222, p. 3

Und wenn ich es *zuvor* weiß, was hilft mir dies Wissen für später? Ich meine: wie weiß ich dann, wenn der Schritt wirklich zu machen ist, was ich mit jenem früheren Wissen anzufangen habe?

(Wenn zur Fortsetzung der Reihe + 1 eine Intuition nötig ist, dann auch zur Fortsetzung der Reihe + 0.)

TS 222, p. 4

»Aber willst du sagen, daß der Ausdruck ›+ 2‹ es für dich zweifelhaft läßt, was du, nach 2004 z. B., schreiben sollst?« – Nein; ich antworte ohne Bedenken: »2006«. Aber darum ist es ja überflüssig, daß dies schon früher festgelegt wurde. Daß ich keinen Zweifel habe, wenn die Frage an mich herantritt, heißt eben nicht, daß sie früher schon beantwortet worden war.

»Aber ich weiß doch auch, daß, welche Zahl immer man mir geben wird, ich die folgende gleich mit Sicherheit werde angeben können." – Ausgenommen ist doch gewiß der Fall, daß ich sterbe, ehe ich dazu komme, und viele andere Fälle. Daß ich aber so sicher bin, daß ich werde fortsetzen können, ist natürlich sehr wichtig. –

TS 222, p. 5

4. »Worin liegt dann aber die eigentümliche Unerbittlichkeit der Mathematik?« – Wäre für sie nicht ein gutes Beispiel die Unerbittlichkeit, mit der auf eins zwei Folgt, auf zwei drei, usw.? – Das heißt doch wohl: in der *Kardinalzahlenreihe* folgt; denn in einer andern Reihe folgt ja etwas anderes. Und ist denn *diese* Reihe nicht eben durch diese Folge *definiert*? – »Soll das also heißen, daß es gleich richtig ist, auf welche Weise immer Einer zählt, und daß jeder zählen kann, wie er will?« – Wir würden es wohl nicht »zahlen« nennen, wenn jeder *irgendwie* Ziffern nacheinander ausspräche; aber es ist freilich nicht einfach eine Frage der Benennung. Denn das, was wir »zählen« nennen, ist ja ein wichtiger Teil der Tätigkeiten unseres Lebens. Das Zählen, und Rechnen, ist doch – z. B. – nicht einfach ein Zeitvertreib. Zahlen (und das heißt: so zählen) ist eine Technik, die täglich in den mannigfachsten Verrichtungen unseres Lebens verwendet wird. Und darum lernen wir zählen, wie wir es lernen: mit endlosem Üben, mit erbarmungsloser Genauigkeit; darum wird unerbittlich darauf gedrungen, daß wir Alle auf »eins« »zwei«, auf »zwei« »drei« sagen, usf. – »Aber ist dieses Zählen also nur ein *Gebrauch*; entspricht dieser Folge nicht auch eine Wahrheit?« Die *Wahrheit* ist, daß das Zählen sich bewährt hat. – »Willst

TS 222, p. 2

3. *Como sei* que no decurso da série + 2 tenho que escrever

"20004, 20006"

e não

"20004, 20008"?

(Semelhante à pergunta: "Como sei que esta cor é 'vermelha'?")

"Mas você sabe, por exemplo, que sempre tem que escrever a *mesma* série numérica nas unidades: 2, 4, 6, 8, 0, 2, 4, e assim por diante." – Certíssimo! O problema já tem que aparecer também nesta sequência numérica, mas também *nesta*: 2, 2, 2, 2, e assim por diante. – Pois como saberia que depois do 500º "2" devo escrever um "2"? Ou seja, que neste lugar o "2" é 'o mesmo algarismo'?

TS 222, p. 3

E se já sei disto antes, em que me ajuda posteriormente este saber? Quero dizer: como vou saber, então, quando o passo realmente deve ser dado, o que fazer com aquele conhecimento anterior?

(Se para a continuação da série + 1 é preciso uma intuição, então é também preciso para a continuação da série + 0.)

TS 222, p. 4

"Mas você quer dizer que a expressão '+ 2' deixa dúvidas sobre o que você deveria escrever depois de 2004, por exemplo?" – Não; eu repondo sem pensar: "2006". Mas é por isto que é supérfluo que isto já se tenha estabelecido anteriormente. Que não tivesse nenhuma dúvida quando me foi feita a pergunta, não significa que ela já havia sido respondida antes.[3]

"Mas sei também que, para qualquer número que me seja dado, poderei declarar o seguinte imediatamente com segurança." – Certamente exclui-se o caso de que morra antes de chegar lá, assim como muitos outros casos. Que esteja tão seguro de que posso continuar é, naturalmente, muito importante. –

TS 222, p. 5

4. "Em que consiste então a peculiar inexorabilidade da matemática?" – Não seria um bom exemplo disto a inexorabilidade com a qual o dois se segue do um, e o três do dois etc.? – Admitamos que isto significa: seguir a *série dos números cardinais*; já que em outra série talvez se siga outra coisa. E não é *esta* série *definida* justamente por esta sequência? – "Deve isto então significar que são igualmente corretas a maneira como alguém sempre conta e a maneira como qualquer um conta a seu bel-prazer?" – Não chamaríamos realmente de "contar", se cada um proferisse sucessivamente algarismos *de qualquer jeito*; mas isto não é simplesmente uma pergunta sobre nomeação. Pois o que chamamos de "contar" é uma parte importante das atividades da nossa vida. O contar e o calcular não são simplesmente – por exemplo – um passatempo. O contar (e isto significa: contar assim) é uma técnica empregada diariamente nos múltiplos afazeres da nossa vida. E por isto aprendemos a contar como aprendemos: com infindáveis exercícios de impiedosa exatidão; por isto somos impelidos inexoravelmente a dizer depois de todo "um", "dois", depois de todo "dois", "três", e assim por diante. – "Mas este contar é só um *uso*; não corresponde a esta sequência também uma verdade?" A *verdade* é que o contar se veridu also sagen, daß ›wahr-sein‹ heißt: brauchbar (oder nützlich) sein?« – Nein; sondern, daß man von der natürlichen Zahlenreihe – ebenso wie von unserer Sprache ¬ nicht sagen kann, sie sei wahr, sondern: sie sei brauchbar und, vor allem, *sie werde verwendet*.

TS 222, p. 6

5. »Aber folgt es nicht mit logischer Notwendigkeit, daß du zwei erhältst, wenn du zu eins eins zählst, und drei, wenn du zu zwei eins zählst, usf.; und ist diese Unerbittlichkeit nicht dieselbe, wie die des logischen Schlusses?« – Doch! sie ist dieselbe. – »Aber entspricht denn der logische Schluß nicht einer Wahrheit? Ist es nicht *wahr*, daß das aus diesem folgt?« – Der Satz: »es ist wahr, daß das aus diesem Folgt«, heißt einfach: das folgt aus diesem. Und wie verwenden wir diesen Satz? – Was würde denn geschehen, wenn wir anders schlössen – *wie* würden wir mit der Wahrheit in Konflikt geraten?

TS 222, p. 7

Wie würden wir mit der Wahrheit in Konflikt geraten, wenn unsere Zollstäbe aus sehr weichem Gummi wären, statt aus Holz und Stahl? – »Nun, wir würden nicht das richtige Maß des Tisches kennen lernen.« – Du meinst, wir würden nicht, oder nicht zuverlässig, *die* Maßzahl erhalten, die wir mit unsern harten Maßstäben erhalten. *Der* wäre also im Unrecht, der den Tisch mit dem dehnbaren Maßstab gemessen hätte und behauptete, er mäße 1.80 m nach unserer gewöhnlichen Meßart; sagt er aber, der Tisch mißt 1.80 m nach der seinen, so ist das richtig. – »Aber das ist dann doch überhaupt kein Messen!« – Es ist unsern Messen ähnlich und kann unter Umständen ›praktische Zwecke‹ erfüllen. (Ein Kaufmann könnte auf diese Weise verschiedene Kunden verschieden behandeln.)

Einen Maßstab, der sich bei geringer Erwärmung außerordentlich stark ausdehnte, würden wir – unter gewöhnlichen Umständen – deshalb *unbrauchbar* nennen. Wir könnten uns aber Verhältnisse denken, in denen gerade dies das Erwünschte wäre. Ich stelle mir vor, wir nehmen die Ausdehnung mit freiem Auge wahr; und wir legen Körpern in Räumen von ungleicher Temperatur die gleiche Maßzahl der Länge bei, wenn sie auf den Maßstab, der fürs Auge bald länger bald kürzer ist, gleich weit reichen.

Man kann dann sagen: Was hier »messen« und »Länge« und »längengleich« heißt, ist etwas Anderes, als was wir so nennen. Der Gebrauch dieser Wörter ist hier ein anderer als der unsere; aber er ist mit ihm *verwandt*, und auch wir gebrauchen diese Wörter auf vielerlei Weise.

TS 222, p. 8

6. Man muß sich klar machen, worin Schließen eigentlich besteht. Man wird etwa sagen, es besteht im Übergang von einer Behauptung zu einer andern. Aber heißt das, daß Schließen etwas ist, was stattfindet beim übergang von der einen zur andern Behauptung, also *ehe* die andere ausgesprochen ist – oder, daß Schließen darin besteht, die eine Behauptung auf die andere folgen zu lassen, d. h., z. B. nach ihr auszusprechen? Wir stellen uns, verleitet durch die besondere Verwendung des Verbums »schließen«, gern vor, das Schließen sei eine eigentümliche Tätigkeit, ein Vorgang im Medium des Verstandes, gleichsam ein Brauen der Nebel, aus welchem dann die Folgerung auftaucht.

fica.[4] – “Você quer dizer então que ‘ser-verdadeiro’ significa: ser utilizável (ou útil)?” – Não; mas que não se pode dizer da série dos números naturais – do mesmo modo que da nossa linguagem – que ela é verdadeira, mas: que ela é utilizável e, sobretudo, *que é empregada*.

TS 222, p. 6

5. “Mas não se segue com necessidade lógica que você obtém dois quando efetua um sobre um, e três quando efetua um sobre dois etc.; e esta inexorabilidade não é a mesma da conclusão lógica?” – Sim! É a mesma. – “Mas não corresponde à conclusão lógica uma verdade? Não é *verdadeiro* que isto se segue daquilo?” – A proposição: “é verdadeiro que isto se segue daquilo”, significa simplesmente: isto se segue daquilo. E como empregamos esta proposição? – Que ocorreria se concluíssemos outra coisa – *como* entraríamos em conflito com a verdade?

TS 222, p. 7

Como entraríamos em conflito com a verdade se os nossos metros fossem feitos de uma borracha bem mole, em vez de madeira ou metal? – “Não saberíamos mais qual a medida correta da mesa.” – Você quer dizer que não obteríamos *a* medida que teríamos com as nossas réguas rígidas, ou que ela não seria confiável. Estaria errado, portanto, *aquele* que medisse a mesa com uma régua elástica e afirmasse que ela mede 1,80 m segundo os nossos padrões usuais de medida; mas se ele dissesse que a mesa mede 1,80 segundo os seus padrões, então estaria correto. – “Mas isto não é de nenhum modo uma medida!”– Ela é semelhante à nossa medida e pode,[5] sob certas circunstâncias, servir a ‘finalidades práticas’. (Um comerciante poderia, deste modo, atender diferentemente a diferentes clientes.)[6]

Uma régua que por um diminuto aquecimento sofresse uma expansão extraordinariamente forte, chamaríamos – sob as circunstâncias usuais –, por causa disto, de *inservível*. Poderíamos, porém, pensar em situações nas quais isto seria justamente o desejável. Imagino que percebemos a dilatação a olho nu; e atribuimos a corpos em espaços com temperaturas desiguais a mesma medida de comprimento quando eles têm a mesma extensão pela régua que, para o olho, ora é mais comprida, ora mais curta.

Pode-se então dizer: O que aqui significa “medida”, “comprimento” e “mesmo comprimento” é algo diferente do que assim chamamos. O uso destas palavras aqui é outro, diferente do nosso; mas ele é *aparentado* com este, e também usamos estas palavras de modo diverso.

TS 222, p. 8

6. Deve-se deixar claro em que consiste realmente a inferência. Pode-se talvez dizer que ela consiste na passagem de uma asserção a outra. Mas isto significa que o inferir é algo que se efetua pela passagem de uma asserção a outra, portanto *antes* que a outra seja proferida – ou que o inferir consiste em permitir que uma asserção se siga da outra, isto é, segundo o seu proferimento, por exemplo? Nós imaginamos prontamente, seduzidos pelo emprego singular do verbo “inferir”,[7] que a inferência é uma atividade peculiar, um processo no âmago da compreensão, uma infusão da bruma, digamos assim, da qual emerge o corolário.[8]

TS 222, p. 9

Sehen wir aber doch zu, was dabei geschieht! – Da gibt es einen Übergang von einem Satz zum andern auf dem Weg über andere Sätze, also durch eine Schlußkette; aber von diesem brauchen wir nicht zu reden, da er ja eine andere Art von Übergang voraussetzt, nämlich den von einem Glied der Kette zum nächsten. Es kann nun zwischen den Gliedern ein Vorgang der Überleitung stattfinden. An diesem Vorgang ist nun nichts Okkultes; er ist ein Ableiten des einen Satzzeichens aus dem andern nach einer Regel; ein Vergleichen der beiden mit irgendeinem Paradigma, das uns das Schema des übergangs darstellt; oder dergleichen. Das kann auf dem Papier, mündlich, oder ›im Kopf‹ vor sich gehen. – Der Schluß kann aber auch so gezogen werden, daß der eine Satz, ohne Überleitung, nach dem andern ausgesprochen wird; oder die Überleitung besteht nur darin, daß wir »Also«, oder »Daraus folgt« sagen, oder dergl.. Man nennt es dann »Schluß«, wenn der gefolgerte Satz sich tatsächlich aus der Prämisse ableiten *läßt*.

7. Was heißt es nun, daß sich ein Satz aus einem andern, vermittels einer Regel, ableiten *läßt*? Läßt sich nicht alles aus allem vermittels *irgend* einer Regel – ja nach jeder Regel mit entsprechender Deutung – ableiten? Was heißt es, wenn ich z. B. sage: diese Zahl laßt sich durch die Multiplikation jener beiden erhalten? Dies ist eine

TS 222, p. 10

Regel, die sagt, daß wir diese Zahl erhalten müssen, wenn anders wir *richtig* multiplizieren; und diese Regel können wir dadurch erhalten, daß wir die beiden Zahlen multiplizieren, oder auch auf andere Weise (obwohl man auch jeden Vorgang, der zu diesem Ergebnis führt, eine ›Multiplikation‹ nennen könnte), Man sagt nun, ich habe multipliziert, wenn ich die Multiplikation 265 X 463 ausgeführt habe, aber auch, wenn ich sage: »4 mal 2 ist 8«, obwohl hier kein Rechnungsvorgang zum Produkt geführt hat (das ich aber auch hätte *ausrechnen* können). Und so sagen wir auch, es werde ein Schluß gezogen, wo er nicht errechnet wird.

8. Ich darf aber doch nur folgern, was wirklich *folgt*! – Soll das heißen: nur das, was den Schlußregeln gemäß folgt; oder soll es heißen: nur das, was *solchen* Schlußregeln gemäß folgt, die irgendwie mit einer Realität übereinstimmen?

TS 222, p. 11

Hier schwebt uns in vager Weise vor, daß diese Realität etwas sehr abstraktes, sehr allgemeines und sehr hartes ist. Die Logik ist eine Art von Ultra-Physik, die Beschreibung des ›logischen Baus‹ der Welt, den wir durch eine Art von Ultra-Erfahrung wahrnehmen (mit dem Verstande etwa). Es schweben uns hier vielleicht Schlüsse vor wie dieser: »Der Ofen raucht, also ist das Ofenrohr wieder verlegt.« (Und *so* wird dieser Schluß gezogen! Nicht so: »Der Ofen raucht, und wenn immer der Ofen raucht, ist das Ofenrohr verlegt; also ..... «.)

9. Was wir ›logischer Schluß‹ nennen, ist eine Transformation des Ausdrucks. Z. B. die Umrechnung von einem Maß auf ein anderes. Auf der einen Kante eines Maßstabes sind Zoll aufgetragen, auf der andern cm. Ich messe den Tisch in Zoll und gehe dann *auf dem Maßstab* zu cm über. – Und freilich gibt es auch beim Übergang von einern Maß zum andern richtig und

TS 222, p. 9

Vejamos, porém, o que acontece aqui! – Existe uma passagem de uma proposição a outra pelo caminho de outras proposições, portanto mediante uma cadeia inferencial; mas não precisamos falar disto, pois ela já pressupõe um outro tipo de passagem, a saber, a que passa de um elo da cadeia ao próximo. Pode-se efetuar então um processo de passagem entre os elos. Não há nada oculto neste processo; trata-se de uma derivação de um sinal proposicional a outro segundo uma regra; uma comparação de ambos com algum paradigma que nos apresenta o esquema da passagem; ou outras coisas parecidas. Pode-se fazê-lo sobre o papel, oralmente ou ‘de cabeça’. – A conclusão pode ser tirada, no entanto, de tal maneira que uma proposição pode ser proferida após a outra sem a passagem; ou a passagem consiste somente em que dizemos “portanto” ou “disto se segue que”, ou coisas semelhantes. Chama-se de “conclusão” se a proposição que se segue *pode* realmente ser derivada da premissa.

7. Que significa então que uma proposição *possa* ser derivada de outra mediante uma regra? Não pode tudo ser deduzido de tudo mediante *alguma* regra – segundo qualquer regra com interpretação adequada? Que significa se digo, por exemplo: pode-se obter este número pela multiplicação daqueles dois? Isto é uma

TS 222, p. 10

regra que diz que temos que obter este número se, por outro lado, multiplicamos *corretamente*; e podemos obter esta regra se multiplicamos os dois números, ou também de outra forma (conquanto se possa chamar de ‘multiplicação’ qualquer processo que leve a tal resultado). Pode-se dizer então que multipliquei quando efetuei a multiplicação 265 x 463, mas também quando digo: “4 vezes 2 são 8”, mesmo que aqui nenhum processo de cálculo tenha levado ao produto (ainda que eu também tivesse podido *calcular*). E então também dizemos que se tira uma conclusão mesmo quando não se chega a calcular.

8. Mas só posso inferir o que realmente se *segue*! – Isto deve significar: só o que se segue em conformidade com as regras de inferência; ou deve significar: só o que se segue em conformidade com *certas* regras de inferência que de algum modo concordam com uma realidade?

TS 222, p. 11

Imaginamos aqui de maneira vaga que esta realidade é algo muito abstrato, muito generalizado e muito rígido. A lógica é uma espécie de ultrafísica, a descrição da ‘estrutura lógica’ do mundo que percebemos por uma espécie de ultra-experiência (porventura com o entendimento). Talvez aqui nos ronde pela cabeça inferências como esta: “O fogão esfumeia, logo a sua chaminé está deslocada novamente.” (E *assim* se tira esta conclusão! Não assim: “O fogão esfumeia, e sempre que o fogão esfumeia a sua chaminé está deslocada; logo .....”.)

9. O que chamamos aqui de ‘inferência lógica’ é uma transformação da expressão. Por exemplo, a conversão de uma medida em outra. Uma das bordas de uma régua é marcada em polegadas, a outra, em centímetros. Messo a mesa em polegadas e depois passo, *com a régua*, para centímetros. – E claro que há também, na passagem de uma medida para outra, o correto falsch; aber mit welcher Realität stimmt hier das Richtige überein? Wohl mit einer *Abmachung*, oder einem *Gebrauch*, und etwa mit den praktischen Bedürfnissen.

TS 222, p. 12

10. »Aber muß denn nicht – z. B. – aus ›(x).fx‹ ›fa‹ folgen, *wenn* ›(x).fx‹ so gemeint ist, wie wir es meinen?« – Und wie äußert es sich, *wie* wir es meinen? Nicht durch die ständige Praxis seines Gebrauchs? und etwa noch durch gewisse *Gesten* – und was dem ähnlich ist. — Es ist aber, als hinge dem Wort »alle«, wenn *wir* es sagen, noch etwas an, womit ein anderer Gebrauch unvereinbar wäre; nämlich die *Bedeutung*. »›Alle‹ heißt doch: *alle*!« möchten wir sagen, wenn wir sie erklären sollen; und dabei machen wir eine gewisse Geste und Miene.

Hacke alle diese Bäume um! —– Ja, verstehst du nicht, was ›*alle*‹ heißt? (Er hatte *einen* stehen lassen.) Wie hat er gelernt, was ›alle‹ heißt? Doch wohl durch Übung. – Und freilich diese Übung hat nun nicht nur bewirkt, daß er auf den Befehl *das tut*, – sondern sie hat das Wort mit einer Menge von Bildern (visuellen und andern) umgeben, von denen das eine oder das andere auftaucht, wenn wir das Wort hören und aussprechen. (Und wenn wir Rechenschaft darüber geben sollen, was die ›Bedeutung‹ des Wortes ist, greifen wir zuerst *ein* Bild aus dieser Masse heraus – und verwerfen es dann wieder als unwesentlich, wenn wir sehen, daß einmal dies, einmal jenes auftritt, und manchmal keines.)

Man lernt die Bedeutung von »alle«, indem man lernt, daß aus ›(x).fx‹ ›fa‹ folgt. – Die Übungen, die den Gebrauch dieses Wortes einüben, seine Bedeutung lehren, zielen immer dahin, daß eine Ausnahme nicht gemacht werden darf.

TS 222, p. 13

11. Wie *lernen* wir denn schließen? Oder lernen wir es nicht – ?

Weiß das Kind, daß aus der doppelten Verneinung die Bejahung folgt? – Und wie *überzeugt* man es davon? Wohl dadurch, daß man ihm einen Vorgang zeigt (eine doppelte Umkehrung, zweimalige Drehung um 180, u. dergl.) den es nun als Bild der Verneinung annimmt.

Und man macht den Sinn von ›(x).fx‹ klar, indem man darauf dringt, daß aus ihm ›fa‹ folgt.

TS 222, p. 14

12. »Aus ›alle‹, wenn es *so* gemeint ist, muß doch *das* folgen.« – Wenn es *wie* gemeint ist? Überlege es dir, wie meinst du es? Da schwebt dir etwa noch ein Bild vor – und mehr hast du nicht. – Nein, es *muß* nicht – aber es *folgt*: Wir *vollziehen* diesen Übergang.

Und wir sagen: Wenn das nicht folgt, dann waren es eben nicht *alle*! — und das zeigt nur, wie wir mit Worten in so einer Situation reagieren. –

13. Es kommt uns vor, daß außer dem *Gebrauch* des Wortes »alle« noch etwas anderes sich geändert haben muß, wenn aus ›(x).fx‹ nicht mehr ›fa‹ folgen soll; etwas, was dem Wort selbst anhängt.

Ist das nicht ähnlich, wie wenn man sagt: »Wenn dieser Mensch anders handelte, dann müßte auch sein Charakter ein anderer sein.« Nun das kann in manchen Fällen etwas heißen

e o errado; mas com qual realidade aqui o correto concorda? Ou é com um *arranjo*, ou com um *uso*, e, digamos, com as necessidades práticas.[9]

TS 222, p. 12

10. "Mas 'fa' – por exemplo – não tem que se seguir de '(x).fx', *se* '(x).fx' é entendido do modo como nós o entendemos?" – E como se expressa este *como* o entendemos? Não seria pela prática constante do seu uso? e talvez ainda por certos *gestos* – e coisas similares. — Isto é como se à palavra "todo" se juntasse, quando *nós* a pronunciamos, alguma coisa com a qual um outro uso seria incompatível; a saber, o *significado*. "'Todo' significa: *todo*!", poderíamos dizer quando temos que explicá-lo; e aí fazemos um certo gesto e uma cara.

Corte todas estas árvores! — Você não entende o que significa 'todas'? (Ele havia deixado *uma* para trás.) Como ele aprendeu o que significa 'todas'? Talvez pelo exercício. – E certamente este exercício não resultou apenas que ele *fizesse isto* sob uma ordem, – mas também circundou a palavra com um conjunto de imagens (visuais e outras) do qual uma ou outra aflora quando escutamos ou proferimos a palavra. (E quando devemos prestar contas do que seria o 'significado' da palavra, separamos primeiro *uma* imagem desta massa – e então a descartamos novamente como não essencial quando vemos que surge ora esta, ora aquela, ou, às vezes, nenhuma sequer.)

Aprende-se o significado de "todo" quando se aprende que 'fa' se segue de '(x).fx'. – Os exercícios que ensaiam o uso desta palavra, que ensinam o seu significado, indicam sempre que não se pode dar nenhuma exceção.

TS 222, p. 13

11. Como *aprendemos* então a inferir? Ou não aprendemos – ?[10]

A criança sabe que uma afirmação se segue de uma dupla negação? – E como a *convencemos* disto? Pode-se lhe mostrar um processo (uma dupla inversão, rodar 180º duas vezes, e coisas similares) que ela passa a assumir como imagem da negação.

E o sentido de '(x).fx' torna-se claro quando se insiste que dele se segue 'fa'.

TS 222, p. 14

12. "Do 'todo', quando é subentendido *assim*, *isto* tem que se seguir." – Quando é subentendido *como*? Considere como você o subentendeu? Talvez esteja ainda na sua mente uma imagem – e nada mais que isto. – Não, isto não *tem que* – mas se *segue*: nós *levamos a cabo* este processo.

E dizemos: se isto não se segue, então simplesmente não era o todo![11] — e isto só mostra como reagimos com palavras a uma situação como esta. –

13. Parece-nos que fora do *uso* da palavra "todo" ainda uma outra coisa tem que haver se modificado, para que 'fa' não mais se siga de '(x).fx'; alguma coisa que se junta à própria palavra.

Isto não é semelhante a quando se diz: "Para esta pessoa se comportar de outra maneira, seu caráter teria também que ser outro." Mas isto pode significar alguma coisa em alguns casos, e em outros, nada. Nós dizemos: "a conduta emana do caráter", e assim emana o uso do significado.

und in manchen nicht. Wir sagen: »aus dem Charakter fließt die Handlungsweise«, und so fließt aus der Bedeutung der Gebrauch.

14. Das zeigt dir – könnte man sagen – wie fest

TS 222, p. 15

verbunden gewisse Gesten, Bilder, Reaktionen, mit einem ständig geübten Gebrauch sind.

›Es drängt sich uns das Bild auf .....‹. Es ist sehr interessant, daß Bilder sich uns *aufdrängen*. Und wäre das nicht, wie könnte ein Satz wie der »What's done cannot be undone« uns etwas sagen?

15. Wichtig ist, daß in unserer Sprache – in unserer natürlichen Sprache – ›alle‹ ein Grundbegriff ist und ›alle außer einem‹ weniger fundamental; d. h., es gibt dafür nicht *ein* Wort, auch nicht eine charakteristische Geste.

16. Der *Witz* des Wortes »alle« ist ja, daß es keine Ausnahme zuläßt. – Ja, das ist der Witz seiner Verwendung in unserer Sprache; aber welche Verwendungsarten wir als ›Witz‹ empfinden, das hängt damit zusammen, welche Rolle diese Verwendung in unserm ganzen Leben spielt.

TS 222, p. 16

17. Auf die Frage, worin denn das Schließen besteht, hören wir etwa: »Wenn ich die Wahrheit der Sätze ...... erkannt habe, so bin ich nun berechtigt, ... hinzuschreiben.« – Inwiefern berechtigt? Hatte ich früher kein Recht, es hinzuschreiben? — »Jene Sätze überzeugen mich von der Wahrheit dieses Satzes.« Aber darum handelt sich's natürlich auch nicht. — »Nach diesen Gesetzen vollführt der Geist die besondere Tätigkeit des logischen Schließens.« Das ist gewiß interessant und wichtig; aber ist es denn auch wahr? schließt er immer nach *diesen* Gesetzen? Und worin besteht die besondere Tätigkeit des Schließens? — Darum ist es notwendig, zu schauen, wie wir denn in der Praxis der Sprache Schlüsse vollziehen; was das Schließen im Sprachspiel für ein Vorgang ist.

Z. B.: In einer Vorschrift steht: »Alle, die über 1.80 m hoch sind, sind in die ..... Abteilung aufzunehmen.« Ein Kanzlist verliest die Namen der Leute, dazu ihre Höhe. Ein anderer teilt sie den und den Abteilungen zu. – »N.N. 1.90 m.« – »Also N.N. in die ..... Abteilung.« Das ist Schließen.

TS 222, p. 17

18. Was nennen wir, nun, ›Schlüsse‹ bei Russell, oder bei Euklid? Soll ich sagen: die Übergange von einem Satz zum nächsten im Beweis? Aber wo steht der *Übergang*? – Ich sage, bei Russell folge ein Satz aus einem andern, wenn jener aus diesem gemäß der Stellung der beiden in einem Beweise, und den ihnen beigefügten Zeichen, abzuleiten ist, – wenn wir das Buch lesen. Denn, dieses Buch zu lesen ist ein Spiel, welches gelernt sein will.

14. Isto te mostra – poder-se-ia dizer – como estão

TS 222, p. 15

ligados fortemente certos gestos, imagens e reações com um uso constantemente exercitado.

'Se nos impõe a imagem de .....'. É muito interessante que imagens nos sejam *impostas*. E não seria assim que uma sentença como "What's done cannot be undone" poderia nos dizer alguma coisa?[12]

15. É importante que na nossa linguagem – na nossa linguagem natural – 'todo' é um conceito fundamental, e 'todo menos um' é menos fundamental; isto é, não há para isto *uma* palavra, nem tampouco um gesto característico.

16. A *perspicácia* da palavra "todo" é a de que ela não comporta nenhuma exceção. – Pois esta é a perspicácia do seu emprego na nossa linguagem; mas que tipos de emprego que sentimos como 'perspicácia' está relacionado com o papel que este emprego joga no conjunto da nossa vida.

TS 222, p. 16

17. Diante da pergunta sobre em que consiste a inferência, às vezes ouvimos: "Se reconheço a verdade das proposições ......, estou justificado em anotar que ...." – Em que medida estou justificado? Não tinha nenhum direito antes de anotá-la? — "Aquelas proposições me convencem da verdade desta proposição." Mas não se trata disto tampouco. — "O espírito executa, segundo estas leis, a atividade específica da inferência lógica." Isto é certamente interessante e importante; mas é também verdadeiro? ele infere sempre de acordo com *estas* leis? E em que consiste a atividade específica da inferência? — Por isto é preciso ver como executamos inferências na práxis da linguagem; que espécie de processo é a inferência no jogo de linguagem.

Por exemplo: um regulamento prescreve: "Todos os que são maiores do que 1,80 m devem se acomodar na divisão ......". Um funcionário lê os nomes das pessoas e as suas alturas. Um outro os reparte entre esta e aquela divisão. – "N.N., 1,90 m." – Portanto, N.N. na divisão ......" Isto é inferir.

TS 222, p. 17

18. Ora, o que chamamos de 'inferências' em Russell ou em Euclides? Devo dizer: a passagem de uma proposição para a próxima numa demonstração? Mas onde está a *passagem*? – Digo que em Russell uma proposição segue-se de outra quando aquela deve ser derivada desta de acordo com a posição de ambas numa demonstração e com os sinais que lhes são ajuntados – quando lemos o livro. Pois ler este livro é um jogo a ser aprendido.

19. Man ist sich oft im Unklaren, worin das Folgen und Folgern eigentlich besteht; was für ein Sachverhalt, und Vorgang, es ist. Die eigentümliche Verwendung dieser Verben legt uns nahe, daß Folgen das Bestehen einer Verbindung zwischen Sätzen ist, der wir beim Folgern nachgehen. Dies zeigt sich sehr lehrreich in Russell's Darstellung (»Principia Mathematica«). Daß ein Satz $\vdash q$ aus einem Satz $\vdash p \supset q . p$ folgt, ist hier ein logisches Grundgesetz:

$$\vdash p \supset q . p . \supset . \vdash q$$

Dieses berechtige uns nun, heißt es, $\vdash q$ aus $\vdash p \supset q . p$ zu schließen. Aber worin besteht denn ›schließen‹, die Prozedur, zu der wir berechtigt werden? Doch darin, den einen Satz – in irgendeinem Sprachspiel – nach dem andern als Behauptung auszusprechen, anzuschreiben, und dergl.; und wie kann mich jenes Grundgesetz *dazu* berechtigen?

TS 222, p. 18

20. Russell will doch sagen: »*So* werde ich schließen und so ist es *richtig*.« Er will uns also einmal mitteilen, wie er schließen will: das geschieht durch eine *Regel* des Schließens. Wie lautet sie? Daß dieser Satz jenen impliziert? — Doch wohl, daß in den Beweisen dieses Buchs ein solcher Satz nach einem solchen stehen soll. – Aber es soll ja ein logisches Grundgesetz sein, daß es *richtig* ist, so zu schließen! – Dann müßte das Grundgesetz lauten: »Es ist richtig von ..... auf ..... zu schließen«; und dieses Grundgesetz sollte nun wohl einleuchten — aber dann wird uns eben die Regel selbst als richtig, oder berechtigt, einleuchten. »Aber diese Regel handelt doch von Sätzen in einem Buch, und das gehört doch nicht in die Logik!« – Ganz richtig; die Regel ist wirklich nur eine Mitteilung, daß in diesem Buche nur *dieser* Übergang von einem Satz zum andern gebraucht wird (gleichsam eine Mitteilung aus dem Index): denn die Richtigkeit des Übergangs muß an Ort und Stelle einleuchten; und der Ausdruck des ›logischen Grundgesetzes‹ ist dann die *Folge der Sätze* selbst.

21. Russell scheint mit jenem Grundgesetz von einem Satz zu sagen: »Er folgt schon – ich brauche ihn nur noch zu folgern.« So heißt es einmal bei Frege, die Gerade, welche je zwei Punkte verbindet, sei eigentlich schon da, ehe wir sie zögen und so ist es auch, wenn wir sagen, die Übergänge, der Reihe + 2 etwa, wären eigentlich bereits gemacht, ehe wir sie

TS 222, p. 19

mündlich oder schriftlich machen, – gleichsam nachzögen.

22. Einem, der dies sagt, könnte man antworten: Du verwendest hier ein Bild. Man *kann* die Übergänge, die Einer in einer Reihe machen soll, dadurch *bestimmen*, daß man sie ihm vormacht. Indem man z. B. die Reihe, die er schreiben soll, in einer anderen Notation hinschreibt, daß er sie nur noch zu übertragen hat, oder indem man sie wirklich ganz dünn vorschreibt und er hat sie nachzuziehen. Im ersten Fall können wir auch sagen, wir schreiben nicht *die* Reihe an, die er zu schreiben hat, machen also die Übergänge dieser Reihe selbst nicht; im zweiten Falle aber werden wir gewiß sagen, die Reihe, die er schreiben soll, sei schon vorhanden. Wir würden dies auch sagen, wenn wir ihm, was er hinzuschreiben hat, *diktieren*, obwohl wir dann eine Reihe von Lauten hervorbringen und er eine Reihe von Schriftzeichen. Es ist jedenfalls eine sichere Art, die Übergänge, die Einer zu machen hat, zu *bestimmen*, sie ihm, in irgendeinem

19. Com frequência não se sabe muito bem em que consiste propriamente seguir e inferir; que espécie de estado de coisas e de processo é este. O emprego peculiar destas palavras sugere que seguir indica a existência de uma ligação entre proposições que nós seguimos pela inferência. Isto se mostra de maneira muito instrutiva na apresentação de Russell ("Principia Mathematica"). Que uma proposição $\vdash q$ se siga de uma proposição $\vdash p \supset q . p$ é ali uma lei fundamental da lógica:

$$\vdash p \supset q . p . \supset . \vdash q$$ [13]

Diz-se que isto nos justifica agora a inferir $\vdash q$ de $\vdash p \supset q . p$. Mas em que consiste então a 'inferência', o procedimento pelo qual nos justificamos? Em que proferimos, anotamos etc. como afirmação – em algum jogo de linguagem – uma proposição segundo outra proposição; e como aquela lei fundamental pode me justificar *para isto*?

TS 222, p. 18

20. Russell quer dizer: "Vou inferir *assim*, e assim é o *correto*." Ele quer, portanto, nos avisar de uma vez por todas como quer inferir: isto ocorre mediante uma *regra* de inferência. O que ela diz? Que esta proposição implica aquela? — Provavelmente que nas demonstrações deste livro uma proposição como aquela deve ficar como aquela outra. – Mas deve ser uma lei fundamental da lógica que seja *correto* inferir assim! – Então a lei fundamental teria que estar formulada assim: "É correto inferir ..... de .....''; e esta lei fundamental deveria estar bem evidente — caso em que simplesmente nos seria evidente a própria regra como correta ou justificada. "Mas esta regra trata de proposições em um livro, e isto não pertence à lógica!" – Certíssimo; a regra é realmente só uma informação de que neste livro só se usa *esta* passagem de uma proposição a outra (como se fosse uma informação do índice):[14] pois a correção da passagem tem que ser evidente em um lugar e numa posição; e a expressão da 'lei fundamental da lógica' é então a própria *sequência de proposições*.

21. Com aquela lei fundamental da proposição, Russell parece dizer: "Ela já se segue – eu só preciso dela para a inferência." Isto já é assim em Frege, em que a linha que conecta dois pontos já está realmente ali, antes que a tracemos, e assim é também quando dizemos que as passagens da série + 2, por exemplo, já teriam sido realmente feitas, antes que nós

TS 222, p. 19

a realizássemos oralmente ou por escrito, – como se fosse um retracejamento.

22. Pode-se responder para alguém que diga isto: aqui você emprega uma imagem. *Pode*-se simular as passagens que uma pessoa deve fazer em uma série, *determinando-as* deste modo. Escrevendo, por exemplo, em outra notação a série que ele deve anotar, de modo que ele só deva fazer uma transcrição, ou então escrevendo em traços bem finos para que ele a retraceje. No primeiro caso poderíamos também dizer que não anotamos *a* série que ele deve escrever, não fazemos, portanto, as passagens da própria série; no segundo caso, no entanto, dizemos certamente que a série que ela tem que escrever já estava à disposição. Diríamos isto também se *ditássemos* o que ele deve escrever, ainda que produzíssemos uma série de sons e ele uma série de sinais escritos. Em todo caso, um modo seguro de *determinar* as passagens que uma pessoa deve fazer é já exibi-las previamente de algum modo. – Se nós, em vista disto, determi-

Sinne, schon vorzumachen. – Wenn wir daher diese Übergänge in einem ganz andern Sinne bestimmen, indem wir nämlich unserm Schüler einer Abrichtung unterziehen, wie z. B. Kinder sie im Einmaleins und im Multiplizieren erhalten, so nämlich, daß Alle, die so abgerichtet sind, nun beliebige Multiplikationen, die sie nicht in ihrer Lehrzeit gemacht haben, auf die gleiche Weise und mit übereinstimmenden Resultaten ausführen – wenn also die Übergänge, die Einer auf den Befehl ›+ 2‹ zu machen hat,

TS 222, p. 20

durch Abrichtung so bestimmt sind, daß wir mit Sicherheit voraussagen können, wie er gehen wird, auch wenn er *diesen* Übergang bis jetzt noch nie gemacht hat, – dann kann es uns natürlich sein, als Bild dieses Sachverhalts den zu gebrauchen: die Übergänge seien bereits alle gemacht, er schreibe sie nur noch hin.

TS 222, p. 21

23. »Aber wir folgern doch diesen Satz aus jenem, weil er tatsächlich folgt! Wir überzeugen uns doch, daß er folgt.« – Wir überzeugen uns, daß, was hier steht, aus dem folgt, was dort steht. Und dieser Satz ist *zeitlich* gebraucht.

TS 222, p. 23

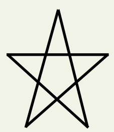
24. Trenne die Gefühle (Gebärden) der Übereinstimmung, von dem, was du mit dem Beweise *machst*!

TS 222, p. 24

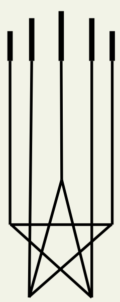
25. Wie ist es aber, wenn ich mich davon überzeuge, daß das Schema dieser Striche:


(a)

gleichzahlig ist mit dem Schema dieser Eckpunkte:


(b)

(ich habe die Schemata absichtlich einprägsam gemacht), indem ich zuordne:


(c)

namos estas passagens em um sentido completamente diferente, possivelmente submetendo nosso estudante a um adestramento, tal como as crianças recebem, por exemplo, as tabuadas de multiplicações, de modo que todos que são assim adestrados podem multiplicar de improviso coisas que não viram no seu tempo de aprendizado, chegando da mesma forma e com resultados consensuais – se, portanto, as passaegns que uma pessoa deve fazer segundo a ordem '+ 2'

TS 222, p. 20

são tão determinadas pelo adestramento que podemos predizer com certeza como se seguirá, mesmo que ele ainda não tenha feito *esta* passagem até agora, – então pode ser para nós natural usá-las como imagem deste estado de coisas: as passagens já estariam todas feitas, ele só as anota até aqui.[15]

TS 222, p. 21

23. "Mas nós inferimos esta proposição daquela porque ela de fato dela se segue! Nós nos convencemos de que ela se segue." Nós nos convencemos de que o que aqui está segue-se do que está ali. E esta proposição é usada *temporalmente*. [16]

TS 222, p. 23

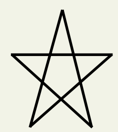
24. Separe os sentimentos (gestos) de concordância daquilo que você *faz* com a demonstração!

TS 222, p. 24

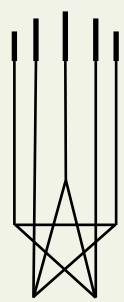
25. Mas como me convenço de que o esquema destes traços:


(a)

é equinumérico ao esquema destes vértices:


(b)

(fiz os esquemas propositalmente sugestivos), que correlaciono assim:

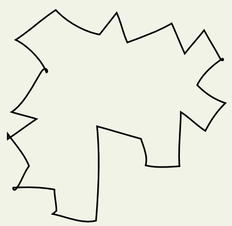

(c)

Nun, wovon überzeuge ich mich denn, wenn ich diese Figur ansehe? Ich sehe einen Stern mit fadenförmigen Fortsätzen. –

26. Aber ich kann von der Figur so Gebrauch machen: Fünf Leute stehen im Fünfeck aufgestellt; an der Wand stehen Stäbe, wie die Striche in (a); ich sehe auf die Figur (c) und sage: »ich kann jedem der Leute einen Stab geben.«

Ich könnte die Figur (c) als schematisches *Bild* davon auffassen, daß ich den fünf Leuten je einen Stab gebe.

27. Wenn ich nämlich erst ein beliebiges Vieleck zeichne



TS 222, p. 25

und dann eine beliebige Reihe von Strichen

so kann ich nun durch Zuordnung herausfinden, ob ich oben soviele Ecken habe, wie unten Striche. (Ich weiß nicht, was herauskommen würde.) Und so kann ich auch sagen, ich habe mich durch das Ziehen der Projektionslinien davon überzeugt, daß am oberen Ende der Figur (c) soviele Striche stehen, wie der Stern unten Ecken hat. (Zeitlich!) In dieser Auffassung gleicht die Figur nicht einem mathematischen Beweise (so wenig wie es ein mathematischer Beweis ist, wenn ich einer Gruppe von Leuten einen Sack Äpfel austeile und finde, daß Jeder gerade *einen* Apfel kriegen kann).

Ich kann die Figur (c) aber als mathematischen Beweis auffassen. Geben wir den Gestalten der Schemata (a) und (b) Namen! Die Gestalt (a) heiße »Hand«, H, die Gestalt (b) »Drudenfuß«, D. Ich habe bewiesen, daß H soviel Striche hat, wie D Ecken. Und dieser Satz ist wieder unzeitlich.

28. Ein Beweis – könnte ich sagen – ist *eine* Figur, an deren einem Ende gewisse Sätze stehen und an derem andern Ende ein Satz steht (den wir den ›bewiesenen‹ nennen).

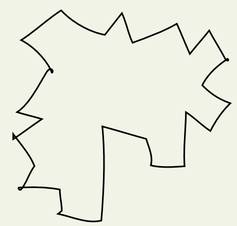
Man kann als Beschreibung so einer Figur sagen: in ihr folge der Satz ...... aus .... Das ist eine Form der Beschreibung eines *Musters*, das z. B. auch ein Ornament (Tapetenmuster) sein könnte. Ich kann also sagen: »In

Ora, de que me convenço então quando observo esta figura? Vejo uma estrela com prolongamentos em forma de linha. –

26. Mas posso fazer um uso assim da figura: cinco pessoas são colocadas num pentágono; na parede estão bastões como os traços em (a); olho para a figura (c) e digo: “posso dar para cada pessoa um bastão.”

Poderia conceber a figura (c) como uma *imagem* esquemática das cinco pessoas para as quais dei um bastão.

27. Se primeiro eu desenho um polígono arbitrário qualquer,



TS 222, p. 25

e depois uma série arbitrária de traços

posso assim descobrir, pela correlação, se tenho a mesma quantidade de pontas acima que traços abaixo. (Não sei o que sairia disto.) E posso assim também dizer que me convenci, pelo tracejado das linhas de projeção, de que há a mesma quantidade de traços nas bordas da figura (c) acima que pontas na estrela abaixo. (Temporalmente!) Esta concepção não iguala a figura a uma demonstração matemática (assim como tampouco seria uma demonstração matemática se repartisse um saco de maçãs com um grupo de pessoas e descobrisse que cada um pode ganhar exatamente *uma* maçã).

Mas posso conceber a figura (c) como demonstração matemática. Vamos dar nomes às configurações dos esquemas (a) e (b)! A configuração (a) vai se chamar “mão”, M, a configuração (b) vai se chamar “pentagrama”, P. Demonstrei que M tem tantos traços quantas pontas em P. E esta proposição é novamente atemporal.

28. Uma[17] demonstração – poderia dizer – é *uma* figura na qual em uma das pontas estão determinadas proposições, e na outra ponta está uma proposição (que chamamos de ‘demonstrada’).

Na descrição de uma figura assim pode-se dizer: nela a proposição ..... segue-se de ..... . Isto é uma forma de descrição de um *padrão* que poderia ser, por exemplo, um ornamento (um padrão de um papel de parede). Poderia, portanto, dizer: “Na

TS 222, p. 26

dem Beweise, welcher auf jener Tafel steht, folgt der Satz p aus q und r«, und das ist einfach eine Beschreibung dessen, was dort zu sehen ist. Es ist aber nicht der mathematische Satz, daß p aus q und r folgt. Dieser hat eine andere Anwendung. Er sagt – so könnte man es ausdrücken – daß es Sinn hat, von einem Beweise (Muster) zu reden, in welchem p aus q und r folgt. Wie man sagen kann, der Satz »weiß ist heller als schwarz« sage aus, es habe Sinn, von zwei Gegenständen zu reden, von denen der hellere weiß, der andere schwarz sei, aber nicht von zwei Gegenständen, von denen der hellere schwarz, der andere weiß sei.

29. Denken wir uns, wir hätten das Paradigma für »heller« und »dunkler« in Form eines weißen und schwarzen Flecks gegeben, und nun leiten wir mit seiner Hilfe sozusagen ab: daß Rot dunkler ist als Weiß.

30. Der durch (c) bewiesene Satz dient nun als neue Vorschrift zum Konstatieren der Gleichzahligkeit: Hat man eine Menge von Gegenständen in Form der Hand angeordnet und eine andere als die Ecken eines Drudenfußes, so sagen wir, die beiden Mengen seien gleichzahlig.

31. »Aber ist das nicht bloß, weil wir H und D schon einmal zugeordnet haben und gesehen, daß sie gleichzahlig

TS 222, p. 27

sind?« – Ja aber, wenn sie es in *einem* Fall waren – wie weiß ich, daß sie es jetzt wieder sein werden? – »Weil es eben im *Wesen* der H und des D liegt, daß sie gleichzahlig sind.« – Aber wie konntest du *das* durch die Zuordnung herausbringen? (Ich dachte, die Zählung, oder Zuordnung, ergibt nur, daß diese beiden Gruppen, die ich jetzt vor mir habe, gleichzahlig – oder ungleichzahlig – sind.)

– »Aber wenn er nun eine H von Dingen hat und einen D von Dingen, und er ordnet sie nun tatsächlich einander zu, so ist es doch nicht *möglich*, daß er etwas anders erhält, als daß sie gleichzahlig sind. – Und, daß es nicht möglich ist, das sehe ich doch aus dem Beweis.« – Aber *ist* es denn nicht möglich? Wenn er z. B. – wie ein Anderer sagen könnte – eine der Zuordnungslinien zu ziehen *übersieht*. Aber ich gebe zu, daß er in der ungeheuern Mehrzahl der Fälle immer das gleiche Resultat erhalten wird und, erhielte er es nicht, sich für irgendwie gestört halten würde. Und wäre es nicht so, so würde dem ganzen Beweis der Boden entzogen. Wir entscheiden uns nämlich, das Beweisbild statt einer Zuordnung der Gruppen zu gebrauchen; wir ordnen sie *nicht* zu, sondern vergleichen *statt dessen* die Gruppen mit denen des Beweises (in welchem allerdings zwei Gruppen einander zugeordnet sind.)

32. Ich könnte als Resultat des Beweises auch

TS 222, p. 28

TS 222, p. 26

demonstração que está naquela lousa a proposição p segue-se de q e r", e isto é simplesmente uma descrição do que ali se vê. Mas ela não é a proposição matemática de que p se segue de q e r. Esta tem uma outra aplicação. Ela diz – poder-se-ia expressá-la assim – que tem sentido falar de uma demonstração (padrão) em que p segue-se de q e r. Tal como se pode dizer que a proposição "o branco é mais claro que o preto" declara que faz sentido falar de dois objetos dos quais o mais claro é o branco e o outro preto, mas não de dois objetos em que o mais claro é preto e o outro branco.

29. Imaginemos que nos tivesse sido dado o paradigma para "mais claro" e "mais escuro" na forma de uma mancha branca e de uma mancha preta, e deduzimos, por assim dizer, com a sua ajuda: que o vermelho é mais escuro que o branco.

30. A proposição demonstrada por (c) nos serve agora como nova prescrição para constatar a equinumericidade: se correlacionamos um conjunto de objetos na forma de uma mão e outro como as pontas de um pentagrama, então podemos dizer que os dois conjuntos são equinuméricos.

31. "Mas isto não é só porque já tínhamos correlacionado M e P e visto que eles

TS 222, p. 27

são equinuméricos?" – Sim, mas se eles estavam assim *num* caso – como sei que eles estarão novamente assim agora? – "Porque está justamente na *essência* de M e de P serem equinuméricos." – Mas como você pode desvendar *isto* mediante a correlação? (Eu achava que a contagem, ou a correlação, só dá como resultado que ambos os grupos que tenho agora diante de mim são equinuméricos – ou não são equinuméricos.)

– "Mas se ele só tem um M de coisas e um P de coisas, e as correlaciona entre si efetivamente, então não é *possível* que ele obtenha outra coisa senão a de que eles são equinuméricos. – E que não é possível já vejo a partir de uma demonstração." – Mas isto não *é* possível? Quando ele, por exemplo – como um outro poderia dizer – *se omite* de traçar uma das linhas da correlação. Mas eu assumo que ele vai obter, na enorme maioria dos casos, sempre o mesmo resultado, e não o obteria se fosse impedido por alguma perturbação. Se não fosse assim, toda demonstração ficaria sem chão. Decidimos, para ser específico, por usar uma imagem da demonstração em vez de uma correlação entre os grupos; *não* os correlacionamos, mas, *em vez disto*, comparamos os grupos com os da demonstração (na qual certamente dois grupos são mutuamente correlacionados.)[18]

32. Poderia também dizer, como resultado da demonstração,

TS 222, p. 28

sagen: »Eine H und ein D heißen von nun an ›gleichzahlig‹.«

Oder: Der Beweis *erforscht* nicht das Wesen der beiden Figuren, aber er spricht aus, was ich von nun an zum Wesen der Figuren rechnen werde. — Was zum Wesen gehört, lege ich unter den Paradigmen der Sprache nieder.

Der Mathematiker erzeugt *Wesen*.

33. Wenn ich sage: »Dieser Satz folgt aus jenem«, so ist das die Anerkennung einer Regel. Sie geschieht *auf Grund* des Beweises. D. h., ich lasse mir diese Kette (diese Figur) als *Beweis* gefallen. — »Aber könnte ich denn anders? *Muß* ich mir sie nicht gefallen lassen?« – Warum sagst du, du müssest? Doch darum, weil du am Schlusse des Beweises etwa sagst: »Ja – ich muß diesen Schluß anerkennen.« Aber das ist doch nur der Ausdruck deiner unbedingten Anerkennung.

D. h., glaube ich: die Worte »Das muß ich zugeben« werden in *zweierlei* Fallen gebraucht: wenn wir einen Beweis erhalten haben – aber auch in Bezug auf den einzelnen Schritt selber des Beweises.

34. Und worin äußert es sich denn, daß der Beweis mich *zwingt*? Doch darin, daß ich so und so darauf vorgehe, daß ich mich weigere, einen anderen Weg zu gehen. Als letztes Argument, gegen Einen, der so nicht gehen wollte, würde ich nur noch sagen: »Ja siehst du denn nicht

TS 222, p. 29

...... !« – und das ist doch kein *Argument*.

35. »Aber, wenn du recht hast, wie kommt es dann, daß sich alle Menschen (oder doch alle normale Menschen) diese Figuren als Beweise dieser Satze gefallen lassen?« – Ja, hier besteht eine große – und interessante – Übereinstimmung.

36. Denk' dir, du hättest eine Reihe von Kugeln vor dir; du numerierst sie mit arabischen Ziffern und es geht von 1 bis 100; dann machst du nach je 10 einen größern Abstand; in jedem Reihenstück von je 10 einen etwas kleineren Abstand in der Mitte, zwischen 5 und 5 – so werden die 10 übersichtlich; nun nimmst du die Zehnerstücke und legst sie *unter* einander, und machst in der Mitte der Kolonne einen größeren Abstand, also zwischen fünf Reihen und fünf Reihen; nun numerierst du die Reihen von 1 bis 10. – Es wurde, sozusagen, mit den Kugeln exerziert. Ich kann sagen, wir haben Eigenschaften der hundert Kugeln entfaltet. – Nun aber denk' dir, daß dieser ganze Vorgang, dies Experiment mit den hundert Kugeln, gefilmt wurde. Ich sehe nun auf der Leinwand doch nicht ein Experiment, denn das Bild eines Experiments ist doch nicht selbst ein Experiment. – Aber das ›mathematisch Wesentliche‹ am Vorgang sehe ich nun auch in der Projektion! Denn es erscheinen da zuerst 100 Flecke, dann werden sie in Zehnerstücke eingeteilt, usw., usw.

TS 222, p. 30

Ich könnte also sagen: der Beweis dient mir nicht als Experiment, wohl aber als Bild eines Experiments.

que: "Um M e um P significam de agora em diante 'equinumericidade'."

Ou: a demonstração não *averigua* a essência das duas figuras, mas profere o que vou contar de agora em diante como essência das figuras. — O que pertence à essência registro sob os paradigmas da linguagem.[19]

O matemático produz *essências*.[20]

33. Quando digo: "Esta proposição segue-se daquela", isto é o reconhecimento de uma regra. Ele ocorre *em razão* da demonstração. Isto é, acolho esta cadeia (esta figura) como *demonstração*. — "Mas poderia ser de outro modo? Não *tenho que* acolhê-la?" – Por que você diz que teria? Porque você diz na conclusão da demonstração algo como: "Sim – tenho que reconhecer esta conclusão." Mas isto é só a expressão do seu reconhecimento incondicional.

Ou seja, acredito: a frase "Tenho que admiti-lo" é usada em *duas espécies* de casos: quando obtemos uma demonstração – mas também em relação ao próprio passo concreto da demonstração.

34. Mas então onde se mostra que a demonstração me *obriga*? Precisamente em que procedo de tal e tal modo, em que me recuso a ir por outro caminho. Como último argumento contra alguém que não quer ir por ele, só poderia ainda dizer: "Você não está vendo

TS 222, p. 29

que ......!" – mas isto não é nenhum *argumento*.

35. "Mas se você tem razão, como ocorre que todas as pessoas (ou pelo menos todas as pessoas normais) tomam essas figuras como demonstração dessas proposições?" – Sim, existe aqui uma grande – e interessante – concordância.

36. Imagine que você tenha diante de si uma série de bolinhas de gude; você as numera com algarismos arábicos que vão de 1 até 100; então você abre, depois de 10, um grande espaço; em cada pedaço de série de 10, abre um espaço um pouco menor no meio, entre 5 e 5 – então as 10 se tornam mais manifestas;[21] agora você pega os pedaços de dez e os coloca um *debaixo* do outro, e abre no meio da coluna um espaço maior, portanto entre séries de cinco e séries de cinco; agora você numera as séries de 1 até 10. – Isto foi exercitado, por assim dizer, com as bolinhas de gude.[22] Posso dizer que desdobramos as propriedades das cem bolinhas de gude. – Imagine agora que todo este processo, este experimento com as cem bolinhas de gude, tenha sido filmado. Não vejo agora na tela um experimento, pois a imagem de um experimento não é ela mesma um experimento. – Mas o 'matematicamente essencial' do processo eu vejo agora na projeção também! Pois ali apareceu primeiro 100 manchas, depois elas foram repartidas em pedaços de 10, e etc., etc.

TS 222, p. 30

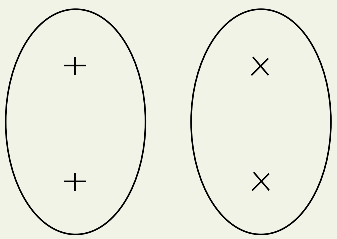
Poderia, portanto, dizer: a demonstração não me serve como experimento, mas antes como imagem de um experimento.

37. Lege 2 Äpfel auf die leere Tischplatte, schau daß niemand in ihre Nähe kommt und der Tisch nicht erschüttert wird; nun lege noch 2 Äpfel auf die Tischplatte; nun zähle die Äpfel, die da liegen. Du hast ein Experiment gemacht; das Ergebnis der Zählung ist wahrscheinlich 4. (Wir würden das Ergebnis so darstellen: wenn man unter den und den Umständen erst 2, dann noch 2 Äpfel auf einen Tisch legt, verschwindet zumeist keiner, noch kommt einer dazu.) Und analoge Experimente kann man, mit dem gleichen Ergebnis, mit allerlei festen Körpern ausführen. – So lernen ja die Kinder bei uns rechnen, denn man läßt sie 3 Bohnen hinlegen und noch 3 Bohnen und dann zählen, was da liegt. Käme dabei einmal 5, einmal 7 heraus, (etwa darum weil, *wie wir jetzt sagen würden*, einmal von selbst eine dazu-, einmal eine wegkäme), so würden wir zunächst Bohnen als für den Rechenunterricht ungeeignet erklären. Geschähe das Gleich aber mit Stäben, Fingern, Strichen und den meisten andern Dingen, so hätte das Rechnen damit ein Ende.

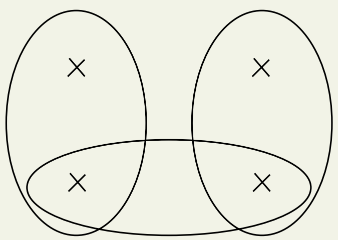
»Aber wäre dann nicht doch noch 2 + 2 = 4?« – Dieses Sätzchen wäre damit unbrauchbar geworden. –

TS 222, p. 31

38. »Du brauchst ja nur auf die Figur



zu sehen, um zu sehen, daß 2 + 2 = 4 ist.« – Dann brauche ich nur auf die Figur



zu schauen, um zu sehen, daß 2 + 2 + 2 = 4 ist.

TS 222, p. 32

39. Wovon überzeuge ich Einen, der jene Abbildung im Film des Versuchs mit den hundert Kugeln verfolgt?

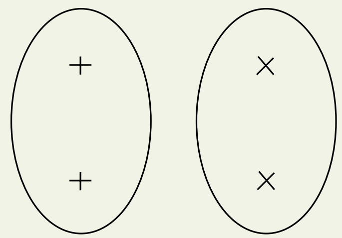
Man könnte sagen: davon, daß sich dies so zugetragen hat. – Aber das wäre keine mathematische Überzeugung. — Aber kann ich denn nicht sagen: *ich präge ihm einen Vorgang ein*? Dieser Vorgang ist die Umgruppierung einer Reihe von 100 Dingen in 10 Reihen zu 10. Und dieser Vorgang ist *tatsächlich* immer wieder durchzuführen. Und davon kann er mit Recht überzeugt

37. Coloque 2 maçãs em cima da tábua de uma mesa vazia, não deixe que ninguém chegue perto da mesa e nem que ela seja sacudida; agora coloque mais 2 maçãs em cima da tábua da mesa; conte as maçãs que estão ali. Você fez um experimento; o resultado da contagem é provavelmente 4. (Nós apresentaríamos o resultado assim: quando se coloca, sob tais e tais circunstâncias, primeiro 2 e depois mais 2 maçãs sobre a mesa, geralmente não se perde nenhuma, nem se agrega nenhuma.) E pode-se conduzir experimentos análogos com resultados iguais com todos os tipos de corpos sólidos. – E assim as crianças aprendem conosco a calcular quando se coloca para elas 3 feijões, depois 3 feijões, e então se conta o que ali está. Se numa vez saísse 5, e na outra 7 (talvez porque, *como poderíamos dizer agora*, uma vez se acrescentou por si mesmo, e na outra se perdeu), então explicaríamos inicialmente que feijões não são apropriados para lições de cálculo. Mas se ocorresse o mesmo com bastões, dedos, traços e com a maioria das outras coisas, então teríamos, com isto, o fim do cálculo.

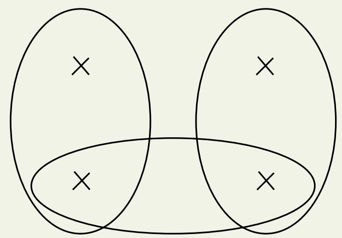
“Mas então não teríamos mais 2 + 2 = 4?” – Estas tabuadas se tornariam inutilizáveis. –

TS 222, p. 31

38. “Você só precisa olhar para a figura



para ver que 2 + 2 = 4.” – Então eu só preciso enxergar a figura



para ver que 2 + 2 + 2 = 4.

TS 222, p. 32

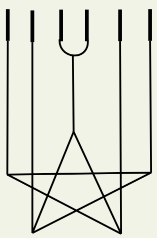
39. Do que convenço alguém que seguiu aquela projeção em filme da experiência com as cem bolinhas de gude?

Poder-se-ia dizer: de que aquilo aconteceu assim. – Mas isto não seria um convencimento matemático. — Mas não poderia dizer então: *eu gravo nele um processo*? Este processo é o reagrupamento de uma série de 100 coisas em séries de 10 em 10. E este processo pode ser *de fato* sempre executado novamente. E ele pode ser, com razão, convencido disto.

sein.

TS 222, p. 33

40. Und so prägt der Beweis (25) durch Ziehen der Projektionslinien einen Vorgang ein, den der eins-zu-eins Zuordnung der H und des D. – »Aber *überzeugt* er mich nicht auch davon, daß diese Zuordnung *möglich* ist?« – Wenn das heißen soll: daß du sie immer ausführen kannst –, so muß das durchaus nicht wahr sein. Aber das Ziehen der Projektionslinien überzeugt uns davon, daß oben soviele Striche sind, wie unten Ecken; und es liefert eine Vorlage, um danach solche Figuren einander zuzuordnen. – »Aber zeigt die Vorlage dadurch nicht, daß es geht? nicht, daß es diesmal ging! In dem Sinne, in welchem es nicht ginge, wenn oben statt | | | | | die Figur | | | | | | stünde.« – Wieso? geht es denn da nicht? *So* z. B.:



Diese Figur könnte doch auch als Beweis für etwas angewandt werden! Und zwar um zu zeigen, daß man Gruppen dieser Formen *nicht* 1-1 zuordnen kann. ›Eine 1-1 Zuordnung ist hier unmöglich‹ – heißt etwa: die Figuren und 1-1 Zuordnung passen nicht zusammen.

»So hab' ich's nicht gemeint!« – Dann zeig' mir, wie du's meinst, und ich werde es machen.

Aber kann ich denn nicht sagen, die Figur zeige, *wie* eine solche Zuordnung möglich ist – und muß sie darum nicht auch zeigen, *daß* sie möglich ist?–

41. Was war denn damals der Sinn davon, daß wir

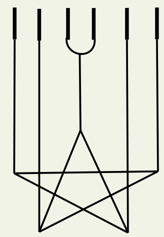
TS 222, p. 34

vorschlugen, den Formen der 5 parallelen Striche und des Fünfecksterns Namen beizulegen? Was ist damit geschehen, daß sie Namen erhalten haben? Es wird dadurch etwas über die Art des Gebrauchs dieser Figuren angedeutet. Nämlich – daß man sie auf einen Blick als die und die erkennt. Man zählt dazu nicht ihre Striche oder Ecken; sie sind für uns Gestalttypen, wie Messer und Gabel, wie Buchstaben und Ziffern.

Ich kann also auf den Befehl: »Zeichne eine H!« (z. B.) – diese Form unmittelbar wiedergeben. – Nun lehrt mich der Beweis eine Zuordnung der beiden Formen. (Ich möchte sagen, es seien in dem Beweis nicht bloß diese individuellen Figuren zugeordnet, sondern die *Formen selbst*. Aber das heißt doch nur, daß ich mir jene Formen gut einpräge; als Paradigmen einpräge.) Kann ich nun, wenn ich die Formen H und D einander so zuordnen will, nicht in Schwierigkeiten geraten – indem etwa eine Ecke unten zuviel, oder oben ein Strich zuviel ist? – »Aber doch nicht, wenn du wirklich wieder H und D gezeichnet hast! – Und das läßt sich ja beweisen; sieh diese Figur an!«

TS 222, p. 33

40. A demonstração (25) grava assim um processo quando realiza o tracejado de linhas de projeção nas quais há uma correlação um-a-um entre M e P. – "Mas isto não me *convence* também de que esta[23] correlação é *possível*?" – Se isto deve significar: que você sempre pode realizá-las –, então não tem que ser verdade de forma alguma. Mas o tracejar das linhas de projeção nos convence de que há a mesma quantidade de traços acima que ângulos abaixo; e nos fornece um modelo para correlacionar entre si aquelas figuras. – "Mas o modelo não mostra assim que funciona? e não que ele funcionou desta vez! No sentido de que ele não funcionaria se em cima estivesse a figura | | | | | | em vez de | | | | | ." – Como assim? Ele então não funcionaria? Por exemplo, *assim*:



Esta figura poderia ser também empregada como demonstração de alguma coisa! Ou seja, para mostrar que grupos destas formas não podem entrar em uma correlação 1-1.[24] 'Uma correlação 1-1 é impossível aqui' – significa, por exemplo: as figuras e uma correlação 1-1 não se combinam.

"Eu não quis dizer isto deste jeito!" – Então me mostre de que jeito você quis dizer e eu o farei.

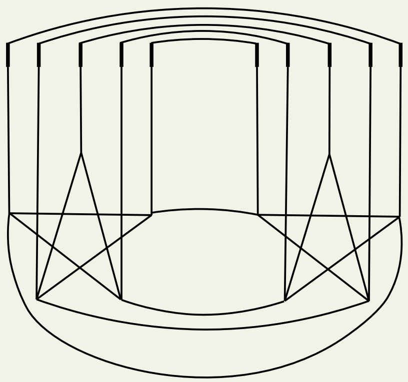
Mas eu não posso dizer então que a figura mostra *como* uma correlação assim é possível – e ela não tem que mostrar também *que* é possível? –

41. Qual foi então naquele momento o sentido de que

TS 222, p. 34

tenhamos sugerido dar nomes às formas dos 5 traços paralelos e da estrela de cinco pontas? O que aconteceu ali para que elas tenham recebido nomes? Indica-se por meio disto alguma coisa sobre o tipo de uso dessas figuras. A saber – que se as reconhece com uma só olhada como tal e tal. Para isto não se contam os seus traços ou pontas; eles são para nós configurações típicas, como faca e garfo, como letras e algarismos.

Posso, portanto, com a ordem: "Desenhe um M! (por exemplo) – reproduzir imediatamente essa forma. – Ora, a demonstração me ensina uma correlação entre as duas formas. (Poderia dizer que na demonstração não somente essas figuras concretas são correlacionadas, mas as *próprias formas*. Mas isto só significa que gravei bem aquelas formas; as gravei como paradigmas.) Posso agora, quando quero correlacionar entre si as formas M e P, não incorrer em dificuldades – pelas quais haja abaixo, por exemplo, uma ponta a mais, ou acima um traço a mais também? – "Mas não se você realmente desenhou de novo M e P! – E isto pode ser comprovado; olhe para a figura!"

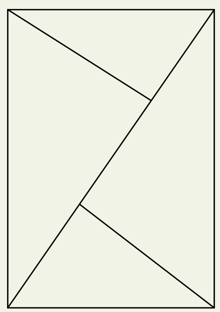


– Diese Figur lehrt mich eine neue Art der Kontrolle dafür, daß

TS 222, p. 35

ich wirklich die gleichen Figuren hingezeichnet habe; aber kann ich, wenn ich mich nun nach dieser Vorlage richten will, nicht dennoch in Schwierigkeiten geraten? Ich sage aber, ich bin sicher, daß ich normalerweise in keine Schwierigkeiten kommen werde.

42. Es gibt ein Geduldspiel, das darin besteht, eine bestimmte Figur, z. B. ein Rechteck, aus gegebenen Stücken zusammenzusetzen. Die Teilung der Figur ist eine solche, daß es uns schwer wird, die richtige Zusammenstellung der Teile zu finden. Sie sei etwa diese

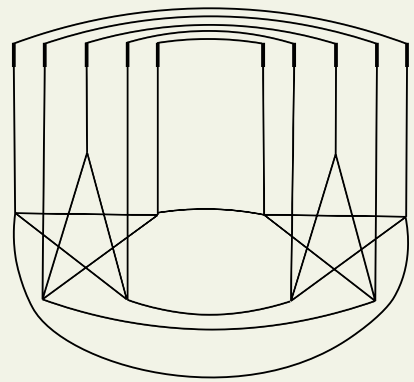


Was findet der, dem die Zusammenstellung gelingt? – Er findet: eine Lage – an welche er früher nicht gedacht hat. – Gut; aber kann man also nicht sagen: er überzeugt sich davon, daß man diese Dreiecke so zusammensetzen kann? – Aber ›diese Dreiecke‹: sind es die, welche oben im Rechteck liegen, oder sind es Dreiecke, die erst so zusammengesetzt werden sollen?

43. Wer sagt: »Ich hätte nicht geglaubt, daß man

TS 222, p. 36

diese Figuren so zusammensetzen kann«, dem kann man doch nicht, auf das zusammengeset-

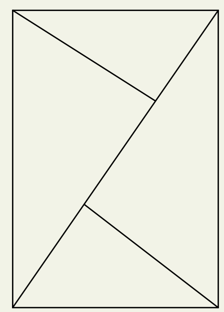


– Esta figura me ensina uma nova maneira de controlar se

TS 222, p. 35

realmente desenhei as mesmas figuras; mas não posso, se quero me guiar agora por este modelo, incorrer ainda em dificuldades? Digo, no entanto, que estou seguro de que normalmente não se apresentará nenhuma dificuldade.

42. Existe um quebra-cabeça que consiste em montar uma determinada figura, por exemplo um retângulo, a partir de peças dadas. O recorte da figura é feito de modo a criar difículdade para encontrar a correta composição das partes. Ela seria, por exemplo, esta



O que descobre aquele que consegue fazer a composição? – Ele descobre: uma disposição – que ele nunca tinha imaginado antes. – Bom; mas não se pode também dizer: ele se convence de que estes triângulos podem ser montados assim? – Mas 'estes triângulos': são os que estão acima no retângulo, ou são triângulos que devem ser montados assim antes?

43. Para quem diz: "Não acreditava que se

TS 222, p. 36

pudesse montar estas figuras assim", não se pode apontar para o quebra-cabeça montado e zte Geduldspiel zeigend, sagen: »So, du hast nicht geglaubt, daß man die Stücke so zusammensetzen kann?« – Er würde antworten: »Ich meine, ich habe an diese Art der Zusammensetzung garnicht gedacht.«

44. Denken wir uns die physikalischen Eigenschaften der Teile des Geduldspiels so, daß sie in die gesuchte Lage nicht kommen können. Aber nicht, daß man einen Widerstand empfindet, wenn man sie in diese Lage bringen will; sondern man macht einfach alle andern Versuche, nur *den* nicht und die Stücke kommen auch durch Zufall nicht in diese Lage. Es ist gleichsam diese Lage aus dem Raum ausgeschlossen. Als wäre hier ein ›blinder Fleck‹, etwa in unserm Gehirn. – Und *ist* es denn nicht so, wenn ich glaube, alle *möglichen* Stellungen versucht zu haben und an dieser, wie durch Verhexung, immer vorbeigegangen bin?

Kann man nicht sagen: die Figur, die dir die Lösung zeigt, beseitigt eine Blindheit; oder auch, sie ändert deine Geometrie? Sie zeigt dir gleichsam eine neue Dimension des Raumes. (Wie wenn man einer Fliege den Weg aus dem Fliegenglas zeigte.)

45. Ein Dämon hat diese Lage mit einem Bann

TS 222, p. 37

umzogen und aus unserm Raum ausgeschlossen.

46. Die neue Lage ist wie aus dem Nichts entstanden. Dort, wo früher nichts war, dort ist jetzt auf einmal etwas.

47. Inwiefern hat dich denn die Lösung davon überzeugt, daß man dies und dies kann? – Du konntest es ja früher *nicht* – und jetzt kannst du es etwa. –

TS 222, p. 38

48. Ich sagte, »ich lasse mir das und das als Beweis eines Satzes gefallen« – aber kann ich mir die Figur, die die Stücke des Geduldspiels zusammengefügt zeigt, *nicht* als Beweis dafür gefallen lassen, das man jene Stücke zu diesem Umriß zusammensetzen kann?

49. Aber denk nun, eines der Stücke liege so, daß es das *Spiegelbild* des entsprechenden Teils der Vorlage ist. Er will nun die Figur nach der Vorlage zusammensetzen, sieht, es muß gehen, kommt aber nicht auf den Einfall, das Stück umzuwenden und findet, daß ihm das Zusammensetzen nicht gelingt.

50. Man kann ein Rechteck aus zwei Parallelogrammen und zwei Dreiecken zusammensetzen. Beweis:

dizer: "Nossa, você não acreditava que se pudesse montar as peças assim?" – Ele responderia: "Quis dizer que jamais pensei neste tipo de montagem."

44. Imaginemos as propriedades físicas das partes do quebra-cabeça de tal modo que não se pudesse chegar na disposição buscada. Mas não que se sentisse alguma resistência se elas fossem colocadas nesta disposição; mas que se faz simplesmente todas as outras tentativas menos *esta*, e por isto as peças não podem, por acaso, chegar nesta disposição. É como se esta disposição estivesse excluída do espaço. Como se houvesse aqui um 'ponto cego' no nosso cérebro, por exemplo. – E não *é* assim que acontece quando acredito que tentei todas as posições *possíveis*, e passei sempre ao largo desta como se estivesse enfeitiçado?

Não se poderia dizer: a figura que te mostra a solução dissipa uma cegueira; ou também que ela modifica a sua geometria? É como se ela te mostrasse uma nova dimensão do espaço. (Como se mostrássemos à mosca a saída da garrafa pega-moscas.)[25]

45. Um demônio[26] cercou este lugar com

TS 222, p. 37

um feitiço e o excluiu do nosso espaço.

46. É como se o novo lugar passasse a existir do nada. Onde antes nada existia, agora, de pronto, há algo.

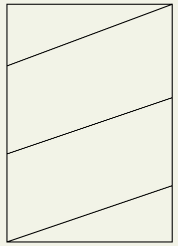
47. Em que medida a solução te convenceu de que se pode fazer isto e aquilo? – Antes você *não* podia – e agora talvez você possa. –

TS 222, p. 38

48. Disse que "aceito isto e isto como demonstração de uma proposição" – mas eu posso não aceitar a figura que mostra as peças do quebra-cabeça reunidas como demonstração de que aquelas peças podem ser montadas naquele contorno?

49. Então imagine agora que uma das peças fica posta de modo a servir de imagem especular da sua parte correspondente do modelo. Ele quer agora montar a figura segundo o modelo, e vê que isto tem que funcionar, mas não tem a ideia de virar a peça e descobrir que ela não consegue se encaixar na montagem.

50. Pode-se montar um retângulo a partir de dois paralelogramos e dois triângulos. Demonstração:



Ein Kind würde die Zusammensetzung eines Rechtecks aus diesen Bestandteilen schwer treffen und davon überrascht sein, daß zwei Seiten der Parallelogramme in eine gerade Linie fallen, wo doch die Parallelogramme schief sind. – Es könnte ihm vorkommen, daß das Rechteck gleichsam durch Zauberei aus diesen Figuren wird. Ja, es muß zugeben, daß sie nun ein Rechteck

TS 222, p. 39

bilden, aber durch einen Trick, durch eine vertrackte Stellung, auf unnatürliche Weise.

Ich kann mir denken, daß das Kind, wenn es die beiden Parallelogramme in *der* Weise zusammengelegt hat, seinen Augen nicht traut, wenn es sieht, daß sie *so* zusammenpassen. ›*Sie sehen nicht aus*, als ob sie so zusammenpaßten.‹ Und ich könnte mir denken, daß man sagte: Es erscheint uns nur durch ein Blendwerk, als gaben *sie* das Rechteck – in Wirklichkeit haben sie ihre Natur verändert, sie sind nicht mehr die Parallelogramme.

TS 222, p. 40

51. »Du gibst *das* zu – dann mußt du *das* zugeben.« – Er *muß* es zugeben – und dabei ist es möglich, daß er es nicht zugibt! Du willst sagen: »wenn er *denkt*, muß er es zugeben.«

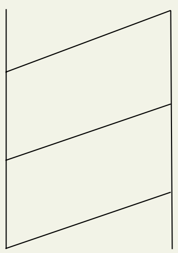
»Ich werde dir zeigen, warum du es zugeben mußt.« – Ich werde dir einen Fall vor Augen führen, welcher, wenn du ihn bedenkst, dich bestimmen wird, so zu urteilen.

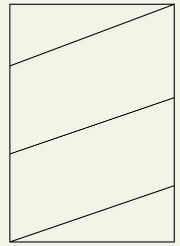
52. Wie können ihn denn die Manipulationen des Beweises dazu bringen, etwas zuzugeben?

53. »Du wirst doch zugeben, daß 5 aus 3 und 2 besteht!«

Ich will es nur zugeben, wenn ich damit nichts zugebe. Außer –daß ich *dieses Bild* verwenden will.

54. Man könnte z. B. die Figur





Uma criança poderia achar difícil montar um retângulo a partir destes componentes e ficar surpresa de que os dois lados dos paralelogramos fazem uma linha reta quando os paralelogramos são inclinados. – Poderia ocorrer-lhe que o retângulo surge destas figuras como se fosse por mágica. Claro que ela tem que assumir que elas só formam um retângulo

TS 222, p. 39

mediante um truque, mediante uma posição complicada, de maneira não natural.

Posso imaginar que a criança não confie em seus olhos quando os dois paralelogramos são juntados *desta* forma, quando ela vê que eles se encaixam *assim*. ‘*Não têm o aspecto* de se encaixarem assim.’ E eu poderia imaginar alguém dizendo: Só por miragem nos aparece como se *eles* formassem um retângulo – na realidade, eles mudaram sua natureza, não são mais paralelogramos.

TS 222, p. 40

51. “Você assume *isto* – então você tem que assumir *isto*.” – Ele *tem que* assumir isto – é possível, por conseguinte, que não assuma! Você quer dizer: “se ele *pensa*, então tem que assumir.”

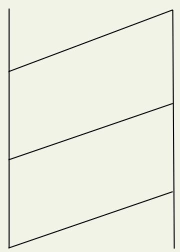
“Vou te mostrar por que você tem que assumi-lo.” – Vou trazer um caso diante dos teus olhos que, quando o considerar, você será determinado a julgar assim.

52. Como as manipulações da demonstração podem levá-lo a assumir alguma coisa?

53. “Você tem que assumir que 5 consiste em 3 e 2!”[27]

Só quero assumir se com isto não assumo nada. A não ser – que quero empregar *esta imagem*.

54. Poder-se-ia tomar, por exemplo, a figura



als Beweis dafür nehmen, das 100 Parallelogramme, so zusammengesetzt, einen geraden Streifen geben müssen. Wenn man dann wirklich 100 zusammenfügt, erhält man nun etwa einen schwach

TS 222, p. 41

gebogenen Streifen. – Der Beweis aber hat uns bestimmt, das Bild und die Ausdrucksweise zu gebrauchen: Wenn sie keinen geraden Streifen geben, waren sie ungenau hergestellt.

55. Denke nur, wie kann mich das Bild, das du mir zeigst (oder der Vorgang) dazu verpflichten, nun so und so immer zu urteilen!

Ja, liegt hier ein Experiment vor, so ist *eines* ja doch zu wenig, mich zu irgendeinem Urteil zu verbinden.

56. Der Beweisende sagt: »Schau diese Figur an! Was wollen wir dazu sagen? Nicht, daß ein Rechteck aus ..... besteht? –«

Oder auch: »Das nennst du doch ›Parallelogramme‹ und das ›Dreiecke‹ und *so* sieht es doch aus, wenn eine Figur aus andern besteht. –«

57. »Ja, du hast mich überzeugt: ein Rechteck besteht immer aus .....« – Würde ich auch sagen: »Ja du hast mich überzeugt: *dieses* Rechteck (das des Beweises) besteht aus ..... «? Und dies wäre ja doch der bescheidenere Satz; den auch der zugeben sollte, der etwa den allgemeinen Satz noch nicht zugibt. Seltsamerweise aber

TS 222, p. 42

scheint der, der *das* zugibt, nicht den bescheideneren geometrischen Satz zuzugeben, sondern gar keinen Satz der Geometrie. Freilich, – denn bezüglich des Rechtecks des Beweises hat er mich ja von nichts überzeugt. (Über diese Figur, wenn ich sie früher gesehen hätte, wäre ich ja in keinem Zweifel gewesen.) Ich habe aus freien Stücken, was diese Figur anbelangt, alles zugestanden. Und er hat mich nur *mittels* ihrer überzeugt. – Aber anderseits, wenn er mich nicht einmal bezüglich *dieses* Rechtecks von etwas überzeugt hat, wie dann erst von einer Eigenschaft andrer Rechtecke?

TS 222, p. 43

58. »Ja, die Form sieht nicht so aus, als könnte sie aus zwei windschiefen Teilen bestehen.«

Was überrascht dich? Doch nicht, daß du jetzt diese Figur vor dir siehst! Mich überrascht etwas *in* dieser Figur. – Aber in dieser Figur geht ja nichts vor!

Mich überrascht die Zusammenstellung des Schiefen mit dem Graden. Mir wird, gleichsam, schwindlich.

TS 222, p. 44

59. Ich sage aber doch wirklich: »Ich habe mich überzeugt, daß man die Figur aus diesen Teilen legen kann«, wenn ich nämlich etwa die Abbildung der Lösung des Geduldspiels gesehen

como demonstração de que 100 paralelogramos montados deste jeito vão produzir uma linha reta. Se se juntam realmente 100, talvez se consiga uma linha

TS 222, p. 41

ligeiramente arqueada. – Mas a demonstração nos determina a usar a imagem e o modo de expressão: Se eles não derem uma linha reta, foram feitos de maneira inexata.

55. Apenas imagine como a imagem que você me mostra (ou o processo) pode me comprometer agora a julgar sempre assim e assim!

Sim, se há aqui um experimento, *um* é muito pouco para me vincular a qualquer julgamento.

56. Quem faz a demonstração diz: “Olhe para esta figura! Que queremos dizer a respeito dela? Não é que um retângulo está composto de .....? –”

Ou também: “Isto você chama de ‘paralelogramo’ e isto de ‘triângulo’, e é *assim* que aparece quando uma figura está composta de outras. –”

57. “Sim, você me convenceu de que um retângulo está sempre composto de .....” – Diria também: “Sim, você me convenceu: *este* retângulo (o da demonstração) está composto de .....”? E esta seria a proposição mais modesta; que também deveria assumir quem ainda não assume a proposição geral. Estranhamente, porém,

TS 222, p. 42

aquele que assume *isto* não parece assumir a proposição geométrica mais modesta, mas antes nenhuma proposição da geometria. De fato, – pois em relação ao retângulo da demonstração ele não me convenceu de nada. (Com relação a essa figura, se a tivesse visto antes não teria nenhuma dúvida.) Admiti de moto próprio tudo o que concerne a essa figura. E ele me convenceu só *por meio* dela. – Mas, por outro lado, se ele nem mesmo me convenceu de algo a respeito *desse* retângulo, que dizer então de uma propriedade de outros retângulos?

TS 222, p. 43

58. “Sim, a forma não aparenta como se pudesse ser composta de duas partes oblíquas.”

O que te surpreende? Não é que você veja agora essa figura à sua frente! O que me surpreende é alguma coisa *nessa* figura. – Mas nada acontece com essa figura!

Surpreende-me a combinação do oblíquo com o reto. É como se me desse tonturas.

TS 222, p. 44

59. Mas digo realmente: “Estou convencido de que se pode construir a figura com estas partes”, quando já vi a reprodução da solução do quebra-cabeça.

habe.

Wenn ich nun Einem das sage, so soll es doch heißen: »Versuch nur! diese Stücke, richtig gelegt, geben wirklich die Figur.« Ich will ihn aufmuntern etwas zu tun und sage ihm einen Erfolg voraus. Und die Vorhersage beruht auf der Leichtigkeit, mit der man die Figur aus den Stücken zusammensetzen kann, sobald man weiß *wie*.

60. Du sagst, du bist erstaunt über das, was dir der Beweis zeigt. Aber bist du erstaunt darüber, daß sich diese Striche haben ziehen lassen? Nein. Du bist erstaunt nur, wenn du dir sagst, daß zwei solche Stücke diese Form *geben*. Wenn du dich also in die Situation hineindenkst, du habest dir etwas anderes erwartet und nun sahest du das Ergebnis.

61. »Aus *dem* folgt unerbittlich *das*.« – Ja, in dieser Demonstration geht es aus ihm hervor.

Und eine Demonstration ist dies für den, der sie als Demonstration anerkennt. Wer sie *nicht* anerkennt, wer ihr nicht als Demonstration folgt, der trennt

TS 222, p. 45

sich von uns, noch ehe es zur Sprache kommt.

62.  Hier haben wir etwas, was unerbittlich ausschaut. Und doch: ›unerbittlich‹ kann es nur in seinen Folgen sein! Denn sonst ist es nur ein Bild.

Worin besteht denn die Fernwirkung – wie man's nennen könnte – dieses Schemas?

63. Ich habe einen Beweis gelesen – nun bin ich überzeugt. – Wie, wenn ich diese Überzeugtheit sofort vergäße!

Denn es ist ein eigentümliches Vorgehen: daß ich den Beweis *durchlaufe* und dann sein Ergebnis annehme. — Ich meine: so *machen* wir es eben. Das ist so bei uns der Brauch, oder eine Tatsache unserer Naturgeschichte.

64. ›Wenn ich *fünf* habe, so habe ich *drei*, und *zwei*.‹ — Aber woher weiß ich, daß ich fünf habe? – Nun, wenn es so | | | | | ausschaut. – Und ist es auch gewiß, daß, wenn es *so* ausschaut, ich es immer in *solche* Gruppen zerlegen kann?

Es ist eine Tatsache, daß wir das folgende Spiel spielen können: Ich lehre Einen, wie eine Zweier-, Dreier-,

TS 222, p. 46

Vierer-, Fünfergruppe aussieht, und ich lehre ihn, Striche einander eins-zu-eins zuzuordnen; dann lasse ich ihn immer je zweimal den Befehl ausführen: »Zeichne eine Fünfergruppe« – und dann den Befehl: »Ordne die beiden Gruppen einander zu«; da zeigt es sich, daß er, so gut wie *immer*, die Striche restlos einander zuordnet.

Se agora digo isto para alguém, então isto deve significar: "Tente um pouco mais! estas peças, colocadas corretamente, dão realmente na figura." Quero animá-lo a fazer algo e lhe predigo um êxito. E a previsão se apoia sobre a facilidade com a qual se pode montar a figura com as peças, contanto que se saiba *como*.

60. Você diz que está espantado com o que a demonstração te mostra. Mas você está espantado porque se desenharam estes traços? Não. Você só está espantado quando diz para si mesmo que duas peças como essas *resultam* naquela forma. Quando você se imagina, portanto, naquela situação em que esperava por outra coisa e agora vê o resultado.

61. "A partir *disto* segue-se inexoravelmente *isto*." – Sim, nesta demonstração isto procede daquilo.

E uma demonstração é feita para aquele que a reconhece como tal. Quem *não* a reconhece, quem não a segue como demonstração, separa-se

TS 222, p. 45

de nós ainda antes que isto chegue a ser tratado na linguagem.

62.  Aqui temos algo que parece inexorável. E todavia: 'inexorável' só pode estar nas suas consequências! Pois do contrário é só uma imagem.

Em que consiste a ação à distância – como se poderia chamá-la – deste esquema?

63. Li uma demonstração – e agora estou convencido. – Como, se já me esqueci deste convencimento!

Pois este é um procedimento peculiar: em que *percorro* a demonstração e então aceito o resultado. — Quero dizer: nós simplesmente *fazemos* isto. Este é para nós o costume ou um fato da nossa história natural.[28]

64. 'Se tenho *cinco*, então tenho *três* e *dois*.' — Mas de onde sei que tenho cinco? – Bem, quando se parece com algo assim | | | | | . – E é também certo que quando isto se parece com algo assim, então pode ser sempre decomposto em grupos como *aqueles*?

É um fato que nós podemos jogar o seguinte jogo: Ensino para alguém como se parece um grupo de dois, de três.

TS 222, p. 46

de quatro, de cinco, e o ensino a colocar traços em correspondência um-a-um; e então deixo que ele execute duas vezes a ordem: "Desenhe um grupo de cinco" – Depois, dou a ordem: "Faça uma correspondência entre os dois grupos"; isto mostra que ele quase *sempre* faz a correspondência completa entre os traços.

Oder auch: es ist Tatsache, daß ich bei der eins-zu-eins Zuordnung dessen, was ich als Fünfergruppen hinzeichne, *so gut wie nie* in Schwierigkeiten komme.

65. Ich soll das Geduldspiel zusammenlegen, ich versuche hin und her, bin zweifelhaft, ob ich es zusammenbringen werde. Nun zeigt mir jemand das Bild der Lösung: Nun sage ich – ohne irgendeinen Zweifel – »jetzt kann ich's!« – Ist es denn *sicher*, daß ich es nun zusammenbringen werde? – Aber die Tatsache ist: ich zweifle nicht daran.

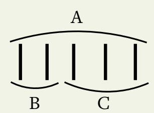
Wenn nun jemand fragte: »Worin besteht die Fernwirkung jenes Bildes?« – Darin, daß ich es anwende.

TS 222, p. 47

66. *In* einer Demonstration *einigen* wir uns mit jemand. Einigen wir uns in ihr nicht, so trennen sich unsere Wege, ehe es zu einem Verkehr mittels dieser Sprache kommt.

Es ist ja nicht wesentlich, daß der Eine den Andem mit der Demonstration überrede. Es können ja beide sie sehen (lesen), und anerkennen.

67. »Du siehst doch – es kann doch keinem Zweifel unterliegen, daß eine Gruppe wie A wesentlich aus einer wie



B und einer wie C besteht.« – Auch ich sage – d. h., auch ich drücke mich so aus – daß die Gruppe, die du hingezeichnet hast, aus den beiden kleineren besteht; aber ich weiß nicht, ob jede Gruppe, die ich eine von der Art (oder Gestalt) der ersten nennen würde, unbedingt aus zwei Gruppen von der Art jener kleineren zusammengesetzt sein wird. — Ich glaube aber, es wird wohl immer so sein (meine Erfahrung hat mich dies vielleicht gelehrt) und darum will ich als Regel annehmen: Ich will eine Gruppe dann, und nur dann, eine von der Gestalt A nennen, wenn sie in zwei Gruppen wie B und C zerlegt werden kann.

68. Und so wirkt auch die Zeichnung 50 als Beweis.

TS 222, p. 48

»Ja wahrhaftig! zwei Parallelogramme stellen sich zu dieser Form zusammen!« (Das ist sehr ähnlich, wie wenn ich sagte: »Ja wirklich! eine Kurve kann aus graden Stücken bestehen.«) – Ich hätte es nicht gedacht. Ja – nicht, daß die Teile dieser Figur diese Figur ergeben. Das heißt ja nichts. – Sondern ich staune nur, wenn ich denke, ich hätte das obere Parallelogramm ahnungslos auf das untere gestellt und sähe nun dieses Ergebnis.

69. Und man könnte sagen: Der Beweis hat mich von *dem* überzeugt – was mich auch über-

Ou também: é um fato que eu *quase nunca* tenho dificuldades em colocar em correspondência um-a-um o que desenho como grupos de cinco.

65. Tenho que juntar o quebra-cabeça, tento aqui e ali, estou em dúvida se posso recompô-lo. Então alguém me mostra a imagem da solução: Então digo – sem nenhuma dúvida – "agora eu consigo!" – É *certo* então que agora vou recompô-lo? – Mas o fato é: não tenho nenhuma dúvida.

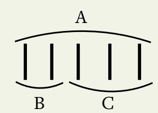
Se alguém agora perguntasse: "Em que consiste a ação à distância daquela imagem? – Em que eu a aplico.[29]

TS 222, p. 47

66. *Numa* demonstração nos *colocamos de acordo* com alguém. Se não nos colocamos de acordo nela, nossos caminhos se separam antes que cheguemos a transitar por meio dessa linguagem.

Não é essencial que um persuada o outro com a demonstração. Ambos podem vê-la (lê-la) e aceitá-la.

67. "Você bem vê – não pode haver nenhuma dúvida de que um grupo como A está composto essencialmente de um como



B e de um como C." – Também digo – isto é, também me expresso assim – que o grupo que você desenhou se compõe dos dois menores; mas não sei se todo grupo que chamaria do tipo (ou da configuração) do primeiro, estaria incondicionalmente constituído a partir de dois grupos do tipo daqueles menores. — Acredito, porém, que isto sempre será assim (minha experiência provavelmente me ensinou isto), e por isto o admitirei como regra: Direi que um grupo é da forma A se, e somente se, ele puder ser decomposto em dois grupos como B e C.

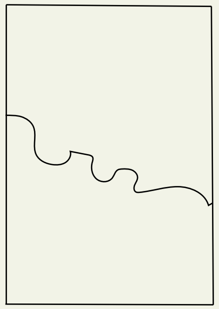
68. E assim também o desenho 50 opera como demonstração.

TS 222, p. 48

"Sim, deveras! Dois paralelogramos se combinam para compor essa forma!" (Seria muito semelhante se dissesse: "É verdade! uma curva pode consistir em segmentos retilíneos.") – Não havia pensado nisto. Sim – não pensei que as partes dessa figura resultassem nessa figura. Mas isto não significa nada. – Senão que só me admiro quando imagino que não tinha ideia de que o paralelogramo de cima foi montado com o debaixo, e agora vejo esse resultado.

69. E se poderia dizer: A demonstração me convenceu *disso* – do que também pode me surraschen kann.

70. Denn warum sage ich, jene Figur 50 überzeugt mich von etwas, und nicht geradeso auch diese:



Sie zeigt doch auch, daß zwei solche Stücke ein Rechteck geben. »Aber das ist uninteressant«, will man sagen. Und warum ist es uninteressant?

71. Wenn man sagt: »Diese Form besteht aus diesen Formen« – so denkt man sich die Form als eine feine

TS 222, p. 49

Zeichnung, ein feines Gestell von dieser Form, auf das gleichsam die Dinge gespannt sind, die diese Form haben. (Vergleiche: Platos Auffassung der Eigenschaften als Ingredientien eines Dings.)

72. »Diese Form besteht aus diesen Formen. Du hast mir eine wesentliche Eigenschaft dieser Form gezeigt.« – Du hast mir ein neues *Bild* gezeigt.

Es ist, als hätte *Gott* sie so zusammengesetzt. — *Wir bedienen uns also eines Gleichnisses*. Die *Form* wird zum ätherischen

TS 222, p. 50

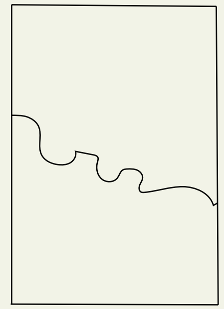
Wesen, welches diese Form hat; es ist, als wäre sie ein für allemal so zusammengesetzt worden (von dem, der die wesentlichen Eigenschaften in die Dinge gelegt hat). Denn, wird die Form zum Ding, das aus Teilen besteht, so ist der Werkmeister der Form der, der auch Licht und Dunkelheit, Farbe und Härte, etc., gemacht hat. (Denke, jemand fragte: »Die Form ..... ist aus diesen Teilen zusammengesetzt; wer hat sie zusammengesetzt? Du?«)

Man hat das Wort »Sein« für eine sublimierte, ätherische Art des Existierens gebraucht. Betrachte nun den Satz: »Rot *ist*« (z. B.). Freilich, niemand gebraucht ihn je; wenn ich mir aber doch einen Gebrauch für ihn erfinden sollte, so wäre es: als einleitende Formel zu Aussagen, die dann vom Wort »rot« Gebrauch machen sollen. Beim Aussprechen der Formel blicke ich auf ein Muster der Farbe Rot.

Einen Satz, wie »Rot *ist*« ist man versucht auszusprechen, wenn man die Farbe mit Aufmerksamkeit betrachtet: also in der gleichen *Situation* in welcher man die Existenz eines Ding's

preender.[30]

70. Então por que digo que a figura 50 me convence de algo e esta não faz também o mesmo:



Ela também mostra que dois destes pedaços formam um retângulo. "Mas isto não é interessante", alguém diria. E por que não é interessante?

71. Quando se diz: "Esta forma está composta destas formas" – imagina-se a forma como um

TS 222, p. 49

desenho fino, uma armação fina dessa forma, sobre a qual coisas que têm essa forma estariam como que distendidas (Compare: a concepção de Platão das propriedades como ingredientes de uma coisa.)[31]

72. "Esta forma está composta destas formas. Você me mostrou uma propriedade essencial desta forma." – Você me mostrou uma nova *imagem*.

É como se *Deus* a tivesse montado assim. — *Nos servimos, portanto, de uma comparação*. A *forma* se torna um ente

TS 222, p. 50

etéreo que tem essa forma; é como se ela tivesse sido montada assim de uma vez por todas (por aquele que colocou as propriedades essenciais nas coisas). Por conseguinte, se a forma vem a ser coisa que consiste em partes, então o Artífice da Forma é o mesmo que fez a luz e a escuridão, a cor e a solidez etc. (Imagine alguém que perguntasse: "A forma ..... é montada com estas partes; quem a montou? Você?")

Usou-se a palavra "ser" para um modo de existência sublimado, etéreo. Considere agora a proposição: "O vermelho *é*" (por exemplo). Ninguém nunca a usa, é claro; mas se eu tiver que inventar um uso para ela, então seria este: como fórmula introdutória para sentenças que devem fazer uso da palavra "vermelho". Ao proferir a fórmula olho para uma amostra de cor vermelha.

Busca-se proferir uma proposição como "vermelho *é*" quando se observa a cor com atenção: portanto na mesma *situação* em que se constata a existência de uma coisa (um inseto semefeststellt (eines blattähnlichen Insekts z. B.).

Und ich will sagen: wenn man den Ausdruck gebraucht, »der Beweis hat mich gelehrt – hat mich davon überzeugt – daß es sich so verhalt«, ist man noch immer in jenem Gleichnis.

TS 222, p. 51

73. Ich hätte auch sagen können: ›Wesentlich‹ ist nie die Eigenschaft des Gegenstandes, sondern das Merkmal des Begriffes.

74. »War die Gestalt der Gruppe dieselbe, so muß sie dieselben Aspekte, Möglichkeiten der Teilung, haben. Hat sie andere, so ist es nicht die gleiche Gestalt; sie hat dir dann vielleicht irgendwie den gleichen Eindruck gemacht; aber *dieselbe Gestalt* ist sie nur, wenn du sie auf gleiche Weise zerteilen kannst.«

Es ist doch, als würde dies das Wesen der Gestalt aussprechen. – Aber ich sage doch: Wer über das *Wesen* spricht –, konstatiert bloß eine Übereinkunft. Und da möchte man doch entgegnen: es gibt nichts Verschiedeneres, als ein Satz über die Tiefe des Wesens und einer – über eine bloße Übereinkunft. Wie aber, wenn ich antworte: der *Tiefe* des Wesens entspricht das *tiefe* Bedürfnis nach der Übereinkunft.

Wenn ich also sage: »es ist, als spräche dieser Satz das *Wesen* der Gestalt aus« – so meine ich: es ist doch, als spräche dieser Satz eine Eigenschaft des Wesens *Gestalt* aus! – Und man kann sagen: Das Wesen, von dem er eine Eigenschaft aussagt, und das ich hier das Wesen ›Gestalt‹ nenne, ist das Bild, das ich nicht umhin

TS 222, p. 52

kann, mir beim Wort »Gestalt« zu machen.

TS 222, p. 53

75. Aber was für Eigenschaften der 100 Kugeln hast du entfaltet, oder vorgeführt? — Nun, daß man diese Dinge mit ihnen tun kann. — Aber *welche* Dinge? Meinst du: daß du sie hast so bewegen können, daß sie nicht an der Tischfläche festgeleimt waren? — Nicht so sehr dies, als daß diese Formationen aus ihnen entstanden und dabei keine von ihnen weg- oder dazukam. — Du hast also physikalische Eigenschaften der Reihe gezeigt. Aber warum hast du den Ausdruck »entfalten« gebraucht? Du hättest doch nicht gesagt, du entfaltest die Eigenschaften einer Eisenstange, indem du zeigst, daß sie bei so und soviel Grad schmilzt.

TS 222, p. 54

Und könntest du nicht ebenso gut sagen, du habest die Eigenschaften unseres Zahlengedächtnisses entfaltet wie die Eigenschaften der Reihe (z. B.)? Was du eigentlich *entfaltest*, ist ja wohl die Reihe der Kugeln. – Und du zeigst z. B., daß eine Reihe, wenn sie so und so ausschaut, oder so römisch numeriert ist, auf einfache Weise, und ohne daß eine Kugel dazu- oder wegkommt, in jene andere einprägsame Form gebracht werden kann. Aber ebenso gut konnte das doch ein psychologisches Experiment sein, das zeigt, daß du *jetzt* gewisse Formen einprägsam findest, in die 100 Flecke durch bloßes Verschieben gebracht werden.

»Ich habe gezeigt, was sich mit 100 Kugeln machen läßt.« – Du hast gezeigt, daß sich

lhante a uma folha, por exemplo).

E quero dizer: quando se usa a expressão “a demonstração me ensinou – me convenceu – que este é o caso”, ainda se está naquela mesma comparação.

TS 222, p. 51

73. Poderia também ter dito: o ‘essencial’ nunca é a propriedade do objeto, mas a marca do conceito.[32]

74. “Se a forma do grupo fosse a mesma, então ela teria os mesmos aspectos, as mesmas possibilidades de partição. Se tem outras, então não é a mesma forma; então ela talvez tenha produzido em você, de algum modo, a mesma impressão; mas ela só é a *mesma forma* se você puder dividi-la do mesmo modo.”

É como se isto expressasse a essência da forma. – Digo, porém, que: Quem fala da *essência* –, meramente constata uma concordância. E a isto se pode replicar: não há nada mais diferente do que uma proposição sobre a profundidade da essência e uma – sobre uma mera concordância. Mas o que aconteceria se respondesse: a *profundidade* da essência corresponde à *profunda* necessidade da concordância.

Portanto, se digo: “é como se essa proposição expressasse a essência da forma” – quero dizer então: é como se essa proposição expressasse uma propriedade da essência *forma*! – E se pode dizer: A essência da qual ele afirma uma propriedade, e que aqui chamo de essência ‘forma’, é a imagem que não posso deixar

TS 222, p. 52

de fazer com a palavra “forma”.

TS 222, p. 53

75. Mas que propriedades das 100 bolinhas de gude você desdobrou ou exibiu? — Ora, que se pode fazer essas coisas com elas. — Mas *que* coisas? Você quer dizer: que você pôde movimentá-las assim, que elas não estavam grudadas à superfície da mesa? — Não tanto isto, mas que essas formações surgiram delas e que, por isto, nenhuma falta ou sobra delas. — Você então mostrou propriedades físicas da série. Mas por que usou a expressão “desdobrar”? Você nunca diria que desdobra as propriedades de uma barra de ferro quando mostra que ela se funde a tantos e tantos graus.

TS 222, p. 54

E você não poderia ter dito com a mesma facilidade que desdobrou as propriedades da nossa memória numérica, tal como as propriedades da série (por exemplo)? O que você realmente *desdobra* é justamente a série de bolinhas de gude. – E você mostra, por exemplo, que uma série, quando tem tal e tal aspecto, ou quando está numerada assim com algarismos romanos, pode ser colocada de modo simples numa outra forma fácil de lembrar, sem sobrar nem faltar nenhuma bolinha de gude. Mas isto poderia ser, do mesmo modo, um experimento psicológico que mostra que você *agora* acha certas formas fáceis de lembrar, em que se introduzem 100 pontos por simples deslocamento.

diese 100 Kugeln (oder diese Kugeln dort) so entfalten ließen. Das Experiment war eines des Entfaltens (im Gegensatz etwa zu einem des Verbrennens).

Und das psychologische Experiment konnte z. B. zeigen, wie leicht man dich betrügen kann: Daß du es nämlich nicht merkst, wenn man Kugeln in die Reihe, oder aus ihr herausschmuggelt. Man könnte ja auch *so* sagen: Ich habe gezeigt, was sich mit einer Reihe von 100 Flecken durch scheinbares Verschieben machen läßt, – welche Figuren sich durch scheinbares Verschieben machen läßt, – welche Figuren sich durch scheinbares Verschieben aus ihr erzeugen lassen. – Was aber habe ich in diesem Fall entfaltet?

TS 222, p. 55

76. Denk dir, man sagte: wir entfalten die Eigenschaften eines Vielecks, indem wir je 3 Seiten durch eine Diagonale zusammennehmen. Es zeigt sich dann als 24-Eck. Will ich sagen: ich habe eine Eigenschaft des 24-Ecks entfaltet? Nein. Ich will sagen, ich habe eine Eigenschaft dieses (hier gezeichneten) Vielecks entfaltet. Ich weiß jetzt, daß hier ein 24-Eck steht.

Ist dies ein Experiment? Es zeigt mir etwa, was für ein Polygon jetzt da steht. Man kann, was ich getan habe, ein Experiment des Zahlens nennen.

Ja, wie aber, wenn ich so einen Versuch an einem Fünfeck anstelle, das ich ja schon übersehen kann? — Nun, nehmen wir einen Augenblick an, ich könnte es nicht übersehen, – was (z. B.) der Fall sein kann, wenn es sehr groß ist. Dann wäre das Ziehen der Diagonalen ein Mittel, um mich davon zu überzeugen, daß das ein Fünfeck ist. Ich könnte wieder sagen, ich habe die Eigenschaften des Polygons, das da gezeichnet ist, entfaltet. — Kann ich es nun übersehen, dann kann sich doch *daran* nichts ändern. Es war etwa überflüssig, diese Eigenschaft zu entfalten, wie es überflüssig ist, zwei Äpfel, die vor mir liegen, zu zählen.

Soll ich nun sagen: »es war wieder ein Experiment, aber ich war des Ausgangs sicher«? Aber bin ich des Ausgangs in der Weise sicher, wie des Ausgangs der Elektrolyse einer Wassermenge? Nein; sondern anders! Ergäbe die Elektrolyse

TS 222, p. 56

der Flüssigkeit nicht ....., so würde ich mich für närrisch halten, oder sagen, ich wisse jetzt überhaupt nicht mehr, was ich sagen soll.

Denk dir, ich sagte: »Ja, hier steht ein Viereck, – aber schauen wir doch nach, ob es durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt wird!« Ich ziehe dann die Diagonale und sage: »Ja, hier haben wir zwei Dreiecke.« Da würde man mich fragen: Hast du denn nicht *gesehen*, daß es in zwei Dreiecke zerlegt werden kann? Bist du erst jetzt überzeugt, daß hier ein Viereck steht; und warum traust du jetzt deinen Augen mehr als früher?

TS 222, p. 57

77. Aufgaben: Zahl der Töne – die innere Eigenschaft einer Melodie; Zahl der Blätter – äußere Eigenschaft eines Baumes. Wie hängt das mit der Identität des Begriffes zusammen? (Ramsey.)

TS 222, p. 58

"Eu mostrei o que se pode fazer com 100 bolinhas de gude." – Você mostrou que *essas* 100 bolinhas de gude (ou aquelas bolinhas de gude dali) podem ser desdobradas daquele jeito. O experimento foi o de um desdobramento (em contraposição, por exemplo, ao de uma combustão).

E o experimento psicológico poderia mostrar, por exemplo, com que facilidade você pode ser enganado: que você não nota quando se colocam ou se tiram bolinhas de gude da série. O que se poderia também dizer *assim*: Mostrei o que se pode fazer com uma série de 100 pontos mediante deslocamentos aparentes, – que figuras neles se pode produzir mediante deslocamentos aparentes. – Mas o que desdobrei neste caso?

TS 222, p. 55

76. Imagine que se dissesse: desdobramos as propriedades de um polígono juntando 3 lados com uma diagonal. Mostra-se então um polígono de 24 lados. Direi que: desdobrei uma propriedade do polígono de 24 lados? Não. Vou dizer que desdobrei uma propriedade deste polígono (aqui desenhado). Agora sei que aqui está um polígono de 24 lados.

Isto é um experimento? Por exemplo me mostra que espécie de polígono está ali agora. Pode-se chamar o que fiz de um experimento de contagem.

Sim, mas e se tentar algo assim em um pentágono do qual já posso ter uma visão panorâmica? — Bem, admitamos por um momento que não posso vislumbrá-lo panoramicamente – o que poderia ser o caso (por exemplo) se ele fosse muito grande. Então o tracejado das diagonais seria um meio de me convencer de que aquilo é um pentágono. Eu poderia novamente dizer que desdobrei as propriedades do polígono ali desenhado. — Posso agora vislumbrá-lo panoramicamente, pois *nele* nada pode mudar. Talvez fosse supérfluo desdobrar esta propriedade, tal como seria supérfluo contar duas maçãs que estão diante de mim.

Devo dizer agora: "isso foi novamente um experimento, mas estava seguro do resultado"? Mas estou seguro do resultado do mesmo modo que do resultado de uma eletrólise numa quantidade de água? Não; bem diferente! Se o resultado

TS 222, p. 56

da eletrólise do líquido não fosse ....., teria feito papel de tolo, ou diria que agora não sei mais em absoluto o que dizer.

Imagine que eu dissesse: "Sim, aqui está um quadrado, – mas vejamos se com uma diagonal ele se decompõe em dois triângulos!" Traço então a diagonal e digo: "Sim, temos aqui dois triângulos." Logo, alguém me perguntaria: você não tinha *visto* que ele pode ser decomposto em dois triângulos? Só agora você está convencido de que aqui há um quadrado; e por que você confia mais nos seus olhos agora do que antes?

TS 222, p. 57

77. Tarefas: número de tons – a propriedade interna de uma melodia; número de folhas – propriedade externa de uma árvore. Como isto se conecta com a identidade do conceito? (Ramsey).[33]

TS 222, p. 58

78. Was zeigt uns der, der 4 Kugeln in 2 und 2 trennt, sie wieder zusammenschiebt, wieder trennt, etc.? Er prägt uns ein Gesicht ein und eine typische Veränderung dieses Gesichts.

TS 222, p. 59

79. Denke an die möglichen Stellungen einer Gliederpuppe. Oder denk, du hättest eine Kette mit, sagen wir, 10 Gliedern und du zeigst, was für charakteristische (d. h. einprägsame) Figuren man mit ihr legen kann. Die Glieder seien numeriert; dadurch werden sie zu einer leicht einprägbaren Struktur, auch wenn sie in gerader Reihe liegen.

Ich präge dir also charakteristische Lagen und Bewegungen dieser Kette ein.

Wenn ich nun sage: »Sieh', man kann auch *das* aus ihr machen« und es vorführe, zeige ich dir da ein Experiment? – Es kann sein; ich zeige z. B., daß man sie in diese Form bringen kann; aber daran hast du nicht gezweifelt. Und was dich interessiert, ist nicht etwas, was diese individuelle Kette betrifft. – Zeigt aber, was ich vorführe, nicht doch eine Eigenschaft dieser Kette? Gewiß; aber ich führe nur solche Bewegungen, solche Umformungen, vor, die einprägsamer Art sind; und dich interessiert, diese Umformungen *zu lernen*. Es interessiert dich aber darum, weil es so leicht ist, sie immer wieder, an verschiedenen Gegenstanden vorzunehmen.

80. Die Worte »Sieh, was ich aus ihr machen kann –« sind allerdings dieselben, die ich auch verwenden würde, wenn ich dir zeigte, was ich alles aus einem Klumpen Ton z. B. formen kann. Etwa *daß* ich geschickt genug bin, solche Dinge aus diesem Klumpen zu formen. In einem andern Fall:

TS 222, p. 60

daß dies Material sich *so* behandeln läßt. Hier würde man kaum sagen: ›ich mache dich darauf aufmerksam‹, daß ich dies machen kann, oder daß das Material dies aushält, – während man im Fall der Kette sagen würde: ich mache dich darauf aufmerksam, daß sich dies mit ihr machen läßt. – Denn du hättest es dir auch *vorstellen* können. Aber du kannst natürlich keine Eigenschaft des Materials durch Vorstellen erkennen.

Das Experimenthafte verschwindet, indem man den Vorgang bloß als einprägsames Bild ansieht.

81. Was ich entfalte, kann man sagen, ist die *Rolle*, die ›100‹ in unserm Rechensystem spielt.

82. (Ich schrieb einmal: »In der Mathematik sind Prozeß und Resultat einander äquivalent.«)

83. Und doch fühle ich, daß es eine Eigenschaft von *›100‹* sei, daß es so erzeugt wird, oder werden kann. Aber wie kann es denn eine Eigenschaft der Struktur *›100‹* sein, daß sie so erzeugt wird, wenn sie z. B. garnicht so erzeugt würde? Wenn niemand so multiplizierte? Doch nur, wenn man sagen könnte,

78. O que nos mostra aquele que separa 4 bolinhas de gude de 2 em 2, as agrupa de novo, as separa de novo etc.? Ele grava em nós um semblante, e uma modificação típica deste semblante.[34]

TS 222, p. 59

79. Imagine as possíveis posições de uma marionete. Ou imagine que você tivesse uma cadeia com, digamos, 10 articulações, e mostrasse que tipos de figuras características (isto é, lembráveis) se pode fazer com ela. As articulações seriam numeradas; com isto elas se tornariam uma estrutura facilmente lembrável, mesmo que estivessem colocadas em linha reta.

Portanto, gravo em sua memória disposições características e movimentos desta cadeia.

Se digo agora: "Veja, pode-se fazer *isto* também nela", e o atesto, mostro para você, assim, um experimento? – Pode ser; mostro, por exemplo, que elas podem ser colocadas desta forma; mas você não duvida disto. E o que te interessa não é algo que afeta a esta cadeia individual. – O que atesto, porém, não mostra uma propriedade desta cadeia? Certamente; mas eu só atesto aqueles movimentos, aquelas conversões, que são fáceis de lembrar; e a você interessa *aprender* estas conversões. Mas isto te interessa porque é bem fácil e podem ser feitas sempre novamente em diferentes objetos.

80. A frase "Veja o que posso fazer disto –" é, com efeito, a mesma que poderia também empregar se te mostrasse tudo o que poderia criar a partir de uma massa de argila, por exemplo. Por exemplo *que*[35] sou bastante habilidoso para criar tais coisas desta massa. Em outro caso:

TS 222, p. 60

que se pode lidar com este material *assim*. Aqui apenas se diria: 'chamo a sua atenção' de que posso fazê-lo, ou de que o material o admite, – enquanto que no caso da cadeia se diria: chamo a sua atenção de que se pode fazer isto com ela. – Porque você poderia também ter *imaginado* isto. Mas naturalmente você não pode reconhecer nenhuma propriedade do material pela imaginação.

O âmbito do experimento desaparece quando se considera o processo simplesmente como imagem fácil de lembrar.

81. O que desdobro, pode-se dizer, é o *papel* que o '100' joga no nosso sistema de cálculo.

82. (Uma vez escrevi:[36] "Na matemática, processo e resultado são equivalentes entre si.")[37]

83. No entanto, sinto que é uma propriedade do '100' ser produzido deste modo, ou poder vir a sê-lo. Mas como pode ser uma propriedade da estrutura '*100*'[38] ser produzida deste modo, se ela, por exemplo, não puder em absoluto ser produzida assim? Se ninguém multiplicasse assim? Somente quando se pudesse dizer

TS 222, p. 61

es ist eine Eigenschaft dieses Zeichens, Gegenstand dieser Regel zu sein. Z. B., es ist Eigenschaft der ›5‹, Gegenstand der Regel ›3 + 2 = 5‹ zu sein. Denn nur als Gegenstand der Regel ist die Zahl *das* Resultat der Addition jener andern Zahlen.

Wenn ich aber nun sage: es ist Eigenschaft der Zahl … , das Resultat der Addition von … nach der Regel ….. zu sein? – Es ist also eine Eigenschaft der Zahl, daß sie bei der Anwendung dieser Regel auf diese Zahlen entsteht. Die Frage ist: würden wir es ›Anwendung der Regel‹ nennen, wenn diese Zahl *nicht* das Resultat wäre? Und das ist dieselbe Frage wie: »Was verstehst du unter der ›Anwendung dieser Regel‹: das, was du etwa mit ihr machst (und du magst sie einmal so, einmal so anwenden), oder ist ›ihre Anwendung‹ anders erklärt?«

84. »Es ist eine Eigenschaft dieser Zahl, daß dieser Prozeß zu ihr führt.« – Aber, mathematisch gesprochen, führt kein Prozeß zu ihr, sondern sie ist das Ende eines Prozesses (gehört noch zum Prozeß).

TS 222, p. 62

85. Aber warum fühle ich, es werde eine Eigenschaft der Reihe entfaltet, gezeigt? – Weil ich abwechselnd, was gezeigt wird, als der Reihe wesentlich, und nicht wesentlich, ansehe. Oder: weil ich an diese Eigenschaften abwechselnd als externe

TS 222, p. 63

und interne denke. Weil ich abwechselnd etwas als selbstverständlich hinnehme und es bemerkenswert finde.

86. »Du entfaltest doch die Eigenschaften der 100 Kugeln, indem du zeigst, was aus ihnen gemacht werden kann.« – *Wie* gemacht werden kann? Denn, daß das aus ihnen gemacht werden *kann*, daran hat ja niemand gezweifelt, es muß also um die Art und Weise gehen, *wie* dies aus ihnen erzeugt wird. Aber sieh' diese an! ob sie nicht etwa das Resultat schon voraussetzt. –

Denn denke dir, es entsteht auf *diese Weise* einmal dies, einmal ein anderes Resultat; würdest du das nun hinnehmen? Würdest du nicht sagen: »Ich muß mich geirrt haben; auf *dieselbe* Art und Weise mußte immer das Gleiche entstehen.« Das zeigt, daß du das Resultat der Umformung einbeziehst in die Art und Weise der Umformung.

TS 222, p. 64

87. Aufgabe: Soll ich es Erfahrungstatsache nennen, daß *dieses* Gesicht durch *diese* Veränderung zu *jenem* wird? (Wie muß ›*dieses* Gesicht‹ , ›*diese* Veränderung‹ erklärt sein, damit …?)

88. Man sagt: diese Einteilung *macht klar*, was

TS 222, p. 61

que é uma propriedade deste sinal ser o objeto desta regra. Por exemplo, é uma propriedade do '5' ser objeto da regra '3 + 2 = 5'. Pois somente como objeto da regra o número é *o* resultado da adição daqueles outros números.

Se digo, porém, agora: é uma propriedade do número … ser o resultado da adição de … de acordo com a regra …..? – Então é uma propriedade do número que ele se produza pelo emprego desta regra sobre estes números. A pergunta é: chamaríamos de 'emprego da regra' se o resultado *não* fosse este número? E esta é a mesma pergunta que: "O que você compreende por 'emprego da regra': o que você faz com ela (a emprega ora assim, ora assado), ou o 'seu emprego' se explica de outra maneira?"

84. "É uma propriedade deste número que este processo conduz a ele." – Matematicamente falando, porém, nenhum processo conduz a ele, senão que ele é o final de um processo (pertence ainda ao processo).

TS 222, p. 62

85. Mas por que sinto que se desdobra, se mostra, uma propriedade da série? – Porque vejo alternadamente o que se mostra como essencial e como não essencial na série. Ou: porque penso nestas propriedades alternadamente como externas

TS 222, p. 63

e internas. Porque alternadamente acolho algo como óbvio e digno de nota.

86. "Você desdobra as propriedades das 100 bolinhas de gude mostrando o que pode ser feito com elas." – *Como* pode ser feito? Posto que ninguém duvida que isto *pode* ser feito com elas, então tem que ser sobre o modo e maneira *como* isto se produz a partir delas. Mas olhe para isto! se elas já não pressupõem o resultado. –

Pois imagine que *desta maneira* ora dê este, ora aquele resultado; você o aceitaria? Você não diria: "Tenho que ter me equivocado; do *mesmo* modo e maneira tem que dar sempre igual." Isto mostra que você inclui o resultado da conversão no modo e maneira da conversão.

TS 222, p. 64

87. Tarefa: devo chamar de fato empírico que este semblante se torna *aquele* mediante esta modificação? (Como tem que ser explicado 'este semblante', 'esta modificação', para que …?)39

88. Alguém diz: esta repartição *torna claro* que

TS 222, p. 65

da für eine Reihe von Kugeln steht. Macht sie klar, was für eine Reihe vor der Einteilung da *stand*, oder macht sie klar, was für eine Reihe jetzt da steht?

89. »Ich sehe auf den ersten Blick, wieviele es sind.« Nun, wieviele sind es? Ist die Antwort »*So* viele«? – (wobei man auf die Gruppe der Gegenstände zeigt). Wie lautet sie aber? Es sind ›50‹, oder ›100‹, etc.

90. »Die Einteilung macht mir klar, was da für eine Reihe steht.« Nun, was für eine steht da? Ist die Antwort »*Diese*«? Wie lautet eine sinnvolle Antwort?

91. Ich entfalte doch die geometrischen Eigenschaften

TS 222, p. 66

dieser Kette auch, indem ich die Umformungen einer andern, gleich gebauten Kette vorführe. Aber dadurch zeige ich doch nicht, was ich tatsächlich mit der ersten tun kann, wenn diese sich tatsächlich als unbiegbar, oder sonstwie physikalisch ungeeignet erweist.

Also kann ich doch nicht sagen: ich entfalte die *Eigenschaften dieser Kette*.

92. Kann man Eigenschaften der Kette entfalten, die sie garnicht besitzt?

93. Ich messe einen Tisch, und er ist 1 m lang. – Nun lege ich einen Meterstab an einen andern Meterstab. Messe ich ihn dadurch? Finde ich, daß jener zweite Meterstab I m lang ist? Mache ich das gleiche Experiment der Messung, nur mit dem Unterschied, daß ich des Ausgangs sicher bin?

94. Ja, wenn ich den Maßstab an den Tisch anlege, messe

TS 222, p. 67

ich immer den Tisch; kontrolliere ich nicht manchmal den Maßstab? Und worin liegt der Unterschied zwischen dem einen Vorgehen und dem andern?

95. Das Experiment des Entfaltens einer Reihe kann uns, unter anderem, zeigen, aus wievielen Kugeln die Reihe besteht, oder aber, daß wir diese (sagen wir) 100 Kugeln so und so bewegen können.

Die Rechnung aber des Entfaltens zeigt uns, was wir eine ›Umformung durch bloßes Entfalten‹ nennen.

TS 222, p. 68

TS 222, p. 65

tipo de série de bolinhas de gude está ali. Ela torna claro que tipo de série *estava* ali antes da repartição, ou torna claro que tipo de série está ali agora?

89. “Vejo à primeira vista quantas são.” Bem, quantas são? A resposta é “umas *quantas*”? – (enquanto se aponta para o grupo dos objetos). Mas como se as declara? Elas são ‘50’, ou ‘100’ etc.

90. “A repartição me torna claro que tipo de série está ali.” Bem, que tipo está ali? A resposta é “esta”? Como se declara uma resposta plausível?

91. Também desdobro as propriedades geométricas

TS 222, p. 66

desta cadeia ao exibir as conversões de uma outra cadeia construída da mesma forma. Mas deste modo não mostro o que de fato posso fazer com a primeira quando esta se comprova de fato como inflexível, ou, de outro modo, como fisicamente inadequada.

Portanto, não posso dizer: desdobro as *propriedades desta cadeia*.

92. Pode-se desdobrar propriedades da cadeia que ela absolutamente não possui?

93. Meço uma mesa e ela tem 1 metro. – Agora ponho uma trena em cima de outra trena. Eu a meço deste jeito? Descubro que aquela segunda trena tem 1 metro? Faço o mesmo experimento de medição, somente com a diferença de que fico mais seguro do resultado?

94. Sim, quando coloco a régua em cima da mesa, sempre

TS 222, p. 67

meço a mesa; mas não controlo a régua alguma vez? E onde está a diferença entre um e outro procedimento?

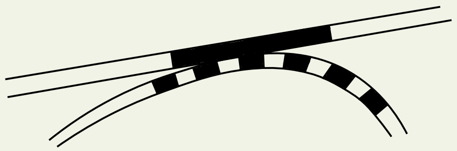
95. O experimento do desdobramento de uma série pode, entre outras coisas, nos mostrar em quantas bolinhas de gude consiste uma série, ou então que podemos mover estas (digamos) 100 bolinhas de gude deste e daquele jeito.

Mas o cálculo do desdobramento nos mostra o que chamamos de ‘conversão pelo mero desdobramento’.

TS 222, p. 68

96. Prüfe den Satz: es sei keine *Erfahrungstatsache*: daß die Tangente einer visuellen Kurve ein Stück mit dieser gemeinsam läuft; und wenn dies eine Figur zeige, so nicht als das Resultat eines Experiments.

TS 222, p. 70



Man könnte auch sagen: Du siehst hier, daß Stücke einer kontinuierlichen visuellen Kurve gerade sind. — Aber sollte ich nicht sagen: – »Das nennst du doch eine ›Kurve‹. – Und nennst du dieses Stückchen nun ›krumm‹ oder ›gerade‹? – Das nennst du doch eine ›Gerade‹, und sie enthalt dieses Stück.«

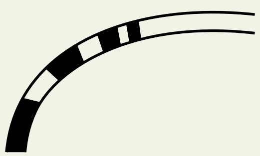
Aber warum sollte man nicht für visuelle Strecken einer Kurve, die selbst keine Krümmung zeigen, einen neuen Namen gebrauchen?

»Das Experiment des Ziehens dieser Linien hat doch gezeigt, daß sie sich nicht in einem *Punkt* berühren.« — Daß *sie* sich nicht in einem Punkt berühren? Wie sind ›*sie*‹ definiert? Oder: Kannst du mir ein Bild davon zeigen, wie es ist, wenn sie sich ›in einem Punkt berühren‹? Denn warum soll ich nicht einfach sagen: das Experiment hat ergeben, daß sie – nämlich eine krumme und eine gerade Linie – einander *berühren*? Denn ist dies *nicht*, was ich »Berührung« solcher Linien nenne?

97. Zeichnen wir einen Kreis aus schwarzen und

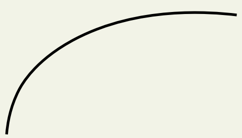
TS 222, p. 71

weißen Stücken, die kleiner und kleiner werden.



»Welches dieser Stücke – von links nach rechts – erscheint dir schon als gerade?« Hier mache ich ein Experiment.

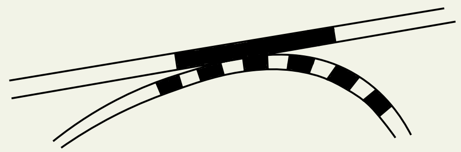
98. Wie, wenn jemand sagte: »Die Erfahrung lehrt dich, daß diese Linie



krumm ist«? – Da wäre zu sagen, daß hier die Worte »diese Linie«, den auf dem Papier gezoge-

96. Examine a proposição: não é um *fato empírico*: que a tangente de uma curva visual percorre uma parte do trecho com ela; e se uma figura mostra isto, não é como o resultado de um experimento.

TS 222, p. 70 [40]



Poder-se-ia também dizer: você vê aqui que segmentos de uma curva visual contínua são retos. — Mas não deveria dizer: – "Isto é o que você chama de 'curva'. – E você chama este segmento menor agora de 'curvo'ou 'reto'? Isto você chama de uma 'reta', e ela contém este segmento."

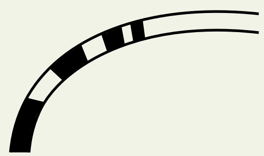
Mas por que não se deveria usar um novo nome para segmentos visuais de uma curva que não mostram eles mesmos nenhuma curvatura?

"Mas o experimento do traçar estas linhas mostrou que elas não se tocam em um *ponto*." — Que *elas* não se tocam em um ponto? Como se define o 'elas'? Ou: você pode me mostrar uma imagem de como é quando elas 'se tocam em um ponto'? Pois por que não posso simplesmente dizer: o experimento demonstrou que elas – a saber, uma linha curva e uma linha reta – se *tocaram* mutuamente? Pois *não* é isto o que chamo de "tangência" destas linhas?

97. Desenhemos um círculo com segmentos pretos e

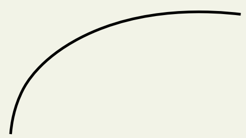
TS 222, p. 71

brancos que vão ficando cada vez mais finos.



"Qual destes segmentos – da esquerda para a direita – é o que já te parece ser reto?" Aqui faço um experimento.

98. E se alguém dissesse: "A experiência te ensina que esta linha



é curva"? – Ali deveria ter sido dito que a expressão "esta linha" significa o *traço* desenhado no nen *Strich* bedeutet. Man kann ja tatsächlich den Versuch anstellen und diesen Strich verschiedenen Menschen zeigen, und fragen: »was siehst du; eine gerade, oder eine krumme Linie?« –

Wenn aber jemand sagte: »Ich stelle mir jetzt eine krumme Linie vor«, und wir ihm darauf sagen: »Da siehst du also, daß diese Linie eine krumme ist« – was für einen Sinn hätte das?

Nun kann man aber auch sagen: »Ich stelle mir einen Kreis vor aus schwarzen und weißen Stücken, eines ist groß, gekrümmt, die folgenden werden immer kleiner, das sechste ist schon gerade.« Wo liegt hier das Experiment?

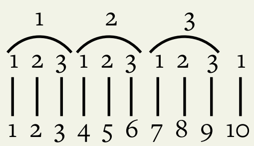
In der Vorstellung kann ich rechnen, aber nicht experimentieren.

TS 222, p. 72

99. Was ist die charakteristische Verwendung des Vorgangs der Ableitung als *Rechnung* – im Gegensatz zur Verwendung des Vorgangs als Experiment?

Wir betrachten die Berechnung als Demonstration einer *internen Eigenschaft* (eine Eigenschaft des *Wesens*) der Strukturen. Aber was heißt das?

Als Urbild der ›intemen Eigenschaft‹ könnte dieses dienen:



10 = 3 x 3 + 1

Wenn ich nun sage: 10 Striche bestehen notwendig aus 3 mal 3 Strichen und einem Strich – das heißt doch nicht: wenn 10 Striche dastehen, so stehen immer die Ziffern und Bogen rund herum. –

TS 222, p. 73

Setze ich sie aber zu den Strichen hinzu, so sage ich, ich demonstrierte nur das Wesen jener Gruppe von Strichen. – Aber bist du sicher, daß sich die Gruppe beim Dazuschreiben jener Zeichen nicht verändert hat? – »Ich weiß nicht; aber *eine* bestimmte Zahl von Strichen stand da; und wenn nicht 10, so eine andre und dann hatte die eben andre Eigenschaften. –«

100. Man sagt: die Rechnung ›entfaltet‹ die Eigenschaft der Hundert. – Was heißt es eigentlich: 100 bestehe aus 50 und 50? Man sagt: der Inhalt der Kiste besteht aus 50 Äpfeln und 50 Birnen. Aber wenn Einer sagte: »der Inhalt der Kiste besteht aus 50 Äpfeln und 50 Äpfeln« –, wir wüßten zunächst nicht, was er meint. – Wenn man sagt: »Der Inhalt der Kiste besteht aus 2 mal 50 Äpfeln«, so heißt das entweder, es seien da zwei Abteilungen zu 50 Äpfeln; oder es handelt sich etwa um eine Verteilung, in der Jeder 50 Äpfel erhalten soll, und ich höre nun, daß man aus dieser Kiste zwei Leute beteilen kann.

101. »Die 100 Äpfel in der Kiste bestehen aus 50 und 50« – hier ist wichtig der unzeitliche Charakter von ›bestehen‹. Denn es heißt nicht, sie bestünden *jetzt*, oder für einige Zeit aus 50 und 50.

papel. Pode-se, efetivamente, fazer a tentativa de mostrar este traço para diferentes pessoas e perguntar: “o que você está vendo; uma linha reta ou curva?” –

Mas se alguém dissesse: “Imagino agora uma linha curva”, e nós lhe respondêssemos: “Você vê ali, portanto, que esta linha é curva” – que sentido teria isto?

Mas agora pode-se dizer também: “Imagino um círculo com pedaços pretos e brancos, um deles é grande e curvo, os seguintes vão ficando cada vez menores, e o sexto já é reto.” Onde está o experimento?

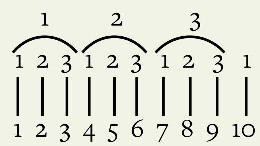
Na imaginação posso calcular, mas não experimentar.

TS 222, p. 72

99. Qual é o emprego característico do processo de dedução como *cálculo* – em contraposição ao emprego do processo como experimento?

Consideremos o cálculo como demonstração de uma *propriedade interna* (uma propriedade da *essência*) das estruturas. Mas o que significa isto?

Isto poderia servir como protótipo da ‘propriedade interna’:



10 = 3 x 3 + 1

Se digo agora: 10 traços consistem necessariamente em 3 vezes 3 traços e um traço – isto não significa: se ali estão 10 traços, sempre haverá ao redor algarismos e arcos. –

TS 222, p. 73

Mas se os acrescento aos traços, então digo que demonstrei somente a essência daquele grupo de traços. – Mas você está seguro de que o grupo não se modificou ao serem inscritos aqueles sinais? – “Eu não sei; mas *um* número determinado de traços estava ali; e se não eram 10, então era outro número que, por conseguinte, teria outras propriedades. –”

100. Alguém diz: o cálculo ‘desdobra’ a propriedade do cem. – O que significa propriamente: 100 consiste em 50 e 50? Diz-se: o conteúdo da caixa consiste em 50 maçãs e 50 peras. Mas se alguém dissesse: “o conteúdo da caixa consiste em 50 maçãs e 50 maçãs”–, não saberíamos em princípio o que ele quis dizer. – Quando se diz: “O conteúdo da caixa consiste em 2 vezes 50 maçãs”, isto significa que ali estão dois compartimentos de 50 maçãs; ou então de que possivelmente se trata de uma repartição em que cada uma deve receber 50 maçãs, e o que escuto é que esta caixa pode ser dividida por duas pessoas.

101. “As 100 maçãs na caixa consistem em 50 e 50” – é importante aqui o caráter atemporal do ‘consistir’. Pois isto não significa que elas consistiram *agora*, ou por algum tempo, de 50 e 50.

TS 222, p. 74

TS 222, p. 74

102. Was ist denn das Charakteristikum der ›internen Eigenschaften‹? Daß sie immer, unveränderlich, in dem Ganzen bestehen, das sie ausmachen; gleichsam unabhängig von allen äußeren Geschehnissen. Wie die Konstruktion einer Maschine auf dem Papier nicht bricht, wenn die Maschine selbst äußeren Kräften erliegt. – Oder ich möchte sagen: daß sie nicht Wind und Wetter unterworfen sind, wie das Physikalische der Dinge; sondern unangreifbar wie Schemen.

TS 222, p. 75

103. Wenn wir sagen: »dieser Satz folgt aus jenem«, so ist hier »folgen« wieder *unzeitlich* gebraucht. (Und das zeigt, daß dieser Satz nicht das Resultat eines Experiments ausspricht.)

104. Vergleiche damit: “Weiß ist heller als Schwarz.« Auch dieser Ausdruck ist unzeitlich und auch er spricht das Bestehen einer *internen* Relation aus.

TS 222, p. 76

105. »Diese Relation *besteht* aber eben« – möchte man sagen. Aber die Frage ist: Hat dieser Satz einen Gebrauch – und welchen? Denn einstweilen weiß ich nur, daß mir dabei ein Bild vorschwebt (aber dies garantiert mir die Verwendung nicht) und daß die Worte einen deutschen Satz geben. Aber es fällt dir auf, daß die Worte hier anders gebraucht werden, als im alltäglichen Fall einer nützlichen Aussage. (Wie etwa der Radmacher bemerken kann, daß die Aussagen, die er gewöhnlich über Kreisförmiges und Gerades macht, anderer Art sind, als die, die im Euklid stehen.) Denn wir sagen: dieser *Gegenstand* ist heller als jener, oder, die Farbe dieses Dings ist heller als die Farbe jenes, und dann ist etwas jetzt heller und kann später dunkler sein.

Woher die Empfindung, “Weiß ist heller als Schwarz« sage etwas über das *Wesen* der beiden Farben aus? –

Aber ist die Frage überhaupt richtig gestellt? Was meinen wir denn mit dem ›Wesen‹ von Weiß oder Schwarz? Wir denken etwa an ›das Innere‹, ›die Konstitution‹, aber das ergibt hier doch keinen Sinn. Wir sagen etwa auch: »Es liegt im Weiß, daß es heller ist ....«.

Ist es nicht so: das Bild eines schwarzen und eines weißen Flecks

dient uns *zugleich* als Paradigma dessen, was wir unter »heller« und »dunkler« verstehen und als Paradigma für »weiß« und für »schwarz«. In *so* fern ›liegt‹ nun die Dunkelheit

TS 222, p. 77

102. Qual é, então, o caracteristico das ‘propriedades internas’? Que elas consistem sempre, imutavelmente, na totalidade do que elas constituem; como se fossem independentes de todos os acontencimentos externos. Tal como a construção de uma máquina no papel, que não quebra quando a própria máquina sucumbe a forças externas. – Ou, como gostaria de dizer: que elas não se subordinam ao vento e ao tempo, como as coisas físicas; mas são intangíveis como espectros.

TS 222, p. 75

103. Quando dizemos: “esta proposição segue-se daquela”, o “seguir-se” é novamente usado de maneira *atemporal* aqui. (E isto mostra que esta proposição não expressa o resultado de um experimento.)

104. Compare com isto: “O branco é mais claro que o preto.” Esta expressão também é atemporal e também profere a existência de uma relação *interna*.

TS 222, p. 76

105. “Mas esta relação simplesmente *existe*” – alguém poderia dizer. Mas a pergunta é: esta proposição tem um uso – e qual? Pois, por enquanto só sei que me vem à mente uma imagem (mas isto não me garante o seu emprego), e que as palavras dão lugar a uma proposição em português. Mas chama a sua atenção que as palavras são usadas aqui de modo diferente do que no caso cotidiano de um enunciado útil. (Como, por exemplo, o fabricante de rodas pode observar que os enunciados que ele usualmente faz sobre formas circulares e retas são de outro tipo do que as que estão em Euclides.) Com efeito, dizemos: este *objeto* é mais claro do que aquele, ou a cor desta coisa é mais clara do que a daquela, de modo que alguma coisa é mais clara agora, mas pode ficar depois mais escura.

De onde vem o sentimento de que “o branco é mais claro do que o preto” declara alguma coisa sobre a *essência* das duas cores? –

Mas a pergunta está, de fato, bem colocada? O que queremos dizer com a ‘essência’ do branco ou do preto? Pensamos talvez no ‘interno’, na ‘constituição’, mas isto não tem nenhum sentido aqui. Também dizemos, por exemplo: “Faz parte do branco ser mais claro do que ....”.

Não seria o caso de que: a imagem de uma mancha preta e de uma branca

nos serve *ao mesmo tempo* como paradigma daquilo que compreendemos por “mais claro” e “mais escuro”, e como paradigma de “branco” e de “preto”. *Nesta* medida agora é que a escuridão ‘reside’

TS 222, p. 77

»im‹ Schwarz, als sie *beide* von diesem Fleck dargestellt werden. Er ist dunkel, *dadurch daß* er schwarz ist. – Aber richtiger gesagt: er *heißt* »schwarz« und damit, in unserer Sprache, auch »dunkel«. Jene Verbindung, eine Verbindung der Paradigmen und Namen ist in unsrer Sprache hergestellt. Und unser Satz ist unzeitich, weil er nur die Verbindung der Worte »weiß«, »schwarz« und »heller« mit einem Paradigma ausspricht.

Man kann Mißverständnisse vermeiden, dadurch daß man erklärt, es sei Unsinn, zu sagen: »die Farbe dieses Körpers ist heller, als die Farbe jenes«, es müsse heißen: »dieser Körper ist heller als jener«. D. h., man schließt jene Ausdrucksform aus unserer Sprache aus.

Wem sagen wir »Weiß ist heller als Schwarz«? Was teilt ihm das mit?

TS 222, p. 78

106. Aber kann ich den Satz der Geometrie nicht auch ohne Beweis glauben, z. B. auf die Versicherung eines Andern hin? – Und was verliert der Satz, wenn er seinen Beweis verliert? – Ich soll hier wohl fragen: »Was kann ich mit ihm anfangen?«, denn darauf kommt es an. Den Satz auf die Versicherung des Andern *annehmen* – wie zeigt sich das? Ich kann ihn z. B. in weiteren Rechenoperationen verwenden, oder ich verwende ihn bei der Beurteilung eines physikalischen Sachverhalts. Versichert mich jemand z. B., 13 mal 13 sei 396, und ich glaube ihm, so werde ich mich nun wundern, daß ich 396 Nüsse nicht in 13 Reihen zu je 13 Nüssen legen kann und vielleicht annehmen, die Nüsse hätten sich von selbst vermehrt.

Aber ich fühle mich versucht zu sagen:

TS 222, p. 79

man könne nicht *glauben*, daß 13 x 13 = 396 ist, man könne diese Zahl nur mechanisch vom Andern *annehmen*. Aber warum soll ich nicht sagen, ich glaube es? Ist denn, es glauben, ein geheimnisvoller Akt, der sozusagen unterirdisch mit der richtigen Rechnung in Verbindung steht? Ich kann doch jedenfalls *sagen*: »ich glaube es«, und nun danach handeln.

Man möchte fragen: »Was tut der, der glaubt, daß 13 x 13 = 396 ist?« Und die Antwort kann sein: Nun, das wird davon abhängen, ob er z. B. die Rechnung selber gemacht und sich dabei verschrieben hat, – oder ob sie zwar ein Andrer gemacht hat, er aber doch weiß, wie man so eine Rechnung macht, – oder ob er nicht multiplizieren kann, aber weiß, daß das Produkt die Zahl der Leute ist, die in 13 Reihen zu je 13 stehen, – kurz davon, was er denn mit der Gleichung 13 x 13 = 396 anfangen kann. Denn, sie prüfen, ist etwas mit ihr anfangen.

107. Denkt man nämlich an die arithmetische Gleichung als den Ausdruck einer internen Relation, so möchte man sagen: »Er kann ja garnicht glauben, daß 13 x 13 *dies* ergibt, weil das ja keine Multiplikation von 13 mit 13, oder kein *Ergeben* ist, wenn 396 am Ende steht.« Das heißt aber, daß man das Wort »glauben« für den Fall einer Rechnung und ihres Resultats nicht anwenden will, – oder nur dann, wenn man die richtige Rechnung vor sich hat.

TS 222, p. 80

‘no’ preto, pois *ambos* são apresentados por esta mancha. Ela é escura *simplesmente por* ser preta. – Dizendo, porém, mais corretamente: ela *se chama* “preta” e, assim, na nossa linguagem, também “escura”. Esta ligação é uma ligação entre paradigmas e nomes estabelecida na nossa linguagem. E a nossa proposição é atemporal porque ela só exprime a ligação entre palavras como “branco”, “preto” e “mais claro” com um paradigma.

Pode-se prevenir mal-entendidos quando se explica que é um contrassenso dizer: “a cor deste corpo é mais clara do que a cor daquele”, e que teria que ser dito: “este corpo é mais claro do que aquele”. Ou seja, exclui-se aquela forma de expressão da nossa linguagem.

A quem dizemos “o branco é mais claro do que o preto”? O que lhe comunicamos com isto?[41]

TS 222, p. 78

106. Mas eu não posso acreditar numa proposição da geometria mesmo sem demonstração, só pela garantia de outra pessoa, por exemplo? – O que perde a proposição se ela perde a sua demonstração? – O que devo perguntar aqui é: “O que posso fazer com ela”, porque isto é o que interessa. *Admitir* a proposição pela garantia de outra pessoa – o que isto mostra? Posso empregá-la, por exemplo, em posteriores operações de cálculo, ou empregá-la na avaliação de um estado de coisas físico. Se alguém me garante, por exemplo, que 13 vezes 13 é 396,[42] e eu acredito nele, então vou ficar surpreso se 396 nozes não puderem ser colocadas em 13 séries de 13 lugares cada, e talvez admita que as nozes aumentaram por conta própria.

Sinto-me, porém, tentado a dizer:

TS 222, p. 79

não se poderia *acreditar* que 13 x 13 = 396, só se poderia *admitir* mecanicamente este número de outra pessoa. Mas por que não devo dizer que acredito nisto? Acreditar é então um ato misterioso, do assim chamado subterrâneo, que está em ligação com o cálculo correto? Posso em todo caso *dizer*: “eu acredito”, e agir de acordo com isto.

Pode-se perguntar: “O que faz aquele que acredita que 13 x 13 = 396?” E a resposta pode ser: Bem, isto dependeria de saber, por exemplo, se foi ele mesmo que fez a conta e se enganou com ela, – ou se mesmo que um outro a tenha feito, ele saiba, no entanto, como se faz uma conta assim, – ou se ele não pode multiplicar, sabe, porém, que o produto é o número de pessoas que estão em 13 séries de 13 lugares cada uma, – em síntese, depende do que ele pode fazer com a equação 13 x 13 = 369. Pois demonstrá-la é fazer algo com ela.

107. Se pensamos efetivamente na equação aritmética como expressão de uma relação interna, então diríamos: “Ele não pode de jeito nenhum acreditar que 13 x 13 dá *este* produto, porque isto não é uma multiplicação de 13 por 13, ou não é um *produto* se 396 está no fim.” Mas isto significa que não se quer aplicar a palavra “acreditar” para o caso de uma conta e o seu resultado, – ou então só quando se tem a conta certa.

TS 222, p. 80

108. »Was glaubt der, der glaubt 13 x 13 ist 396?« – Wie tief dringt er – könnte man sagen, mit seinem Glauben in das Verhältnis dieser Zahlen ein? Denn bis zum Ende – will man sagen – kann er nicht dringen; oder er könnte es nicht glauben.

Aber wann dringt er in die Verhältnisse der Zahlen ein? Gerade während er sagt, daß er glaubt ......? Darauf wirst du nicht bestehen – denn es ist leicht zu sehen, daß dieser Schein nur durch die Oberflächenform unsrer Grammatik (wie man es nennen könnte) erzeugt wird.

109. Denn ich will sagen: »Man kann nur *sehen*, daß 13 x 13 = 369 ist, und man kann auch das nicht *glauben*. Und man kann – mehr oder weniger blind – eine Regel annehmen.« Und was tue ich, wenn ich dies sage? Ich mache einen Schnitt; zwischen einer *Rechnung* mit ihrem Resultat (d. i. einem bestimmten Bild, einer bestimmten Vorlage), und einem Versuch mit seinem Ausgang.

110. Ich möchte sagen: »Wenn ich glaube, daß a x b = c ist – und es kommt ja vor, daß ich so etwas glaube – sage, daß ich es glaube – so glaube ich nicht den mathematischen Satz, denn er steht am Ende eines Beweises, ist das Ende eines Beweises;

TS 222, p. 81

sondern ich glaube: daß dies die Formel ist, die dort und dort steht, die ich so und so erhalten werde u. dergl.« – Und dies klingt ja, als dränge ich in den Vorgang des Glaubens eines solchen Satzes ein. Während ich nur – in ungeschickter Weise – auf den *fundamentalen* Unterschied, bei scheinbarer Ähnlichkeit, der Rollen deute eines arithmetischen Satzes und eines Erfahrungssatzes.

Denn ich *sage* eben unter gewissen Umständen: »ich glaube, daß a x b = c ist.« Was *meine* ich damit? – Was ich *sage*! — Wohl aber ist die Frage interessant: unter was für Umständen sage ich dies, und wie sind sie charakterisiert, im Gegensatz zu denen einer Aussage: »ich glaube, es wird regnen«? Denn was uns beschäftigt, ist ja dieser Gegensatz. Wir verlangen danach, ein Bild zu erhalten von der Verwendung der mathematischen Sätze und der Sätze »ich glaube, daß ....«, wo ein mathematischer Satz der Gegenstand des Glaubens ist.

111. »Du glaubst doch nicht den mathematischen Satz.« – Daß heißt: »mathematischer Satz« bezeichnet mir eine Rolle für den Satz, eine Funktion, in der ein Glauben nicht vorkommt.

Vergleiche: »Wenn du sagst: ›ich glaube, daß das Rochieren so und so geschieht‹, so glaubst du nicht die Schachregel, sondern du glaubst etwa, daß *so* eine

TS 222, p. 82

Regel des Schachs lautet.«

112. »Man kann nicht *glauben*, die Multiplikation 13 x 13 liefere 369, weil das Resultat zur Rechnung gehört.« – Was nenne ich »die Multiplikation 13 x 13«? Nur das richtige Multiplikationsbild, an dessen unterem Ende 369 steht? oder auch eine ›Falsche Multiplikation‹?

Wie ist festgelegt, welches Bild Multiplikation 13 x 13 ist? – Ist es nicht durch die Mul-

108. “Em que acredita aquele que acredita que 13 x 13 é 396?” – Até que ponto penetra – poder-se-ia dizer, com a sua crença na relação entre estes números? Com efeito, ele não pode ir – alguém vai dizer – até o fim; ou ele não poderia acreditar nisto.

Mas quando ele penetra na relação dos números? Precisamente enquanto diz que acredita que .....? Você não precisa insistir nisto – pois é fácil ver que esta ilusão só se produz pela forma superficial da nossa gramática (se podemos dizer assim).

109. Pois quero dizer: “Só se pode *ver* que 13 x 13 = 369, não se pode também *acreditar* nisto. Pode-se admitir – mais ou menos cegamente – uma regra.” E o que faço quando digo isto? Faço um corte; entre um[43] *cálculo* com o seu resultado (isto é, uma imagem determinada de um modelo determinado), e uma tentativa com o seu desfecho.

110. Gostaria de dizer: “Se acredito que a x b = c, – e acontece que acredito em alguma coisa deste modo, – digo que acredito nisto –, então não acredito na proposição matemática, pois ela está no final da demonstração, ela é o final de uma demonstração;

TS 222, p. 81

senão que acredito: que isto é a fórmula que está ali e ali, que vou obtê-la assim e assim etc.” – E isto soa como se penetrasse no processo de acreditar em tal proposição. Enquanto que somente aponto – de uma maneira desajeitada – para a diferença *fundamental*, mediante uma semelhança aparente, dos papéis de uma proposição aritmética e de uma proposição empírica.

Pois justamente, sob certas circunstâncias, *digo*: “acredito que a x b = c.” O que *quero dizer* com isto? – O que *digo*! — Mas a pergunta é decerto[44] interessante: sob que tipo de circunstâncias digo isto, e como elas se caracterizam, em contraposição às de uma asserção como: “acredito que vá chover”? Pois o que nos ocupa é esta contraposição. Buscamos pela imagem do emprego de proposições matemáticas e de proposições como “acredito que ....”, nas quais uma proposição matemática é o objeto da crença.

111. “Mas você não acredita na proposição matemática.”[45] – Isto significa: a “proposição matemática” designa para mim um papel para a proposição, uma função na qual não ocorre uma crença.

Compare: “Se você diz: ‘acredito que o roque acontece assim e assim’, você não acredita na regra do xadrez, mas acredita, por exemplo, que uma

TS 222, p. 82

regra do xadrez soe *assim*.

112. “Não se pode *acreditar* que a multiplicação 13 x 13 dê em 369, porque o resultado pertence ao cálculo.” – O que chamo de “a multiplicação 13 x 13”? Apenas a imagem correta da multiplicação, em cuja extremidade inferior está o 369? ou também uma ‘multiplicação errada’?

Como se estabelece qual é a imagem da multiplicação 13 x 13? – Ela não seria *determinada* tiplikationsregeln *bestimmt*? – Aber wie, wenn dir mit Hilfe dieser Regeln heute etwas anderes herauskommt, als was in allen Rechenbüchern steht? Ist das nicht möglich? – »Nicht, wenn du die Regeln anwendest, wie *sie*!« – Freilich nicht! aber das ist ja ein Pleonasmus. Und wo steht, wie sie anzuwenden sind – und wenn es wo steht: wo steht, wie *dies* anzuwenden ist? Und das heißt nicht nur: in welchem Buch steht es, sondern auch, in welchem *Kopf*? – Was ist also die Multiplikation 13 x 13 – oder, wonach soll ich mich beim Multiplizieren richten: nach den Regeln, oder nach der Multiplikation, die in den Rechenbüchern steht — wenn diese beiden nämlich nicht übereinstimmen? – Nun, es kommt tatsächlich nie vor, daß der, welcher rechnen gelernt hat, bei dieser Multiplikation hartnäckig etwas anderes herausbringt, als was in den Rechenbüchern steht. Sollte es aber geschehen; so würden wir ihn für abnorm erklären, und von seiner Rechnung weiter keine Notiz nehmen.

TS 222, p. 83

113. »Aber bin ich also in einer Schlußkette nicht gezwungen, zu gehen, wie ich gehe?« – Gezwungen? Ich kann doch wohl gehen, wie ich will! – »Aber wenn du im Einklang mit den Regeln bleiben willst, *mußt* du so gehen.« – Durchaus nicht; ich nenne *das* ›Einklang‹. – »Dann hast du den Sinn des Wortes ›Einklang‹ verändert, oder den Sinn der Regel.« – Nein; – wer sagt, was hier ›verändern‹ und was ›gleichbleiben‹ heißt?

Wieviele Regeln immer du mir angibst – ich gebe dir eine Regel, die *meine* Verwendung deiner Regeln rechtfertigt.

TS 222, p. 84

114. Wir könnten auch sagen: Wenn wir den Schlußgesetzen (Schlußregeln) *folgen*, so liegt in einem Folgen immer auch ein Deuten.

TS 222, p. 85

115. »Du darfst doch das Gesetz jetzt nicht auf einmal

TS 222, p. 86

anders anwenden!« – Wenn ich darauf antworte: »Ach ja, ich hatte es ja *so* angewandt!« oder: »Ach, *so* sollte ich es anwenden –!«; dann spiele ich mit. Antworte ich aber einfach: »Anders? – Das *ist* doch nicht anders!« – was willst du tun? D. h. er kann antworten, wie ein verständiger Mensch und doch das Spiel mit uns nicht spielen.

TS 222, p. 87

116. »Nach dir könnte also jeder die Reihe fortsetzen, wie er will; und also auch auf *irgend* eine Weise schließen.« Wir werden es dann nicht »die Reihe fortsetzen« nennen und auch wohl nicht »schließen«.

TS 222, p. 88

Und Denken und Schließen (sowie das Zahlen) ist für uns natürlich nicht durch eine willkürliche Definition umschrieben, sondern durch natürliche Grenzen, dem Körper dessen entspre-

pelas regras da multiplicação? – Mas e se hoje com a ajuda destas regras sai algo diferente do que aquilo que está em todos os livros de cálculo? Isso não é possível? – “Não se você aplica as regras como *eles*!” – Sem dúvida que não! mas isto é um pleonasmo. E onde se diz como elas devem ser aplicadas – e se isto está lá: onde está o modo como *isto* deve ser aplicado? E isto não somente significa: em que livro está isto, mas também na *cabeça* de quem? – O que é, portanto, a multiplicação 13 x 13 – ou, conforme o quê devo me guiar na multiplicação: segundo as regras, ou segundo as multiplicações que estão nos livros de cálculo — digamos, quando ambos não estão de acordo? – Ora, nunca ocorre que alguém que aprendeu a calcular, conclua obstinadamente algo diferente com esta multiplicação do que aquilo que está nos livros de cálculo. Mas se isto acontecesse, então explicaríamos que a pessoa não é normal, e não levaríamos mais em conta o seu cálculo.

TS 222, p. 83

113. “Mas então não sou obrigado a seguir uma cadeia de inferências da maneira como sigo?” – Obrigado? Eu posso seguir da maneira que quiser! – “Mas se você quiser ficar em sintonia com as regras, você *tem que* seguir assim.” – De modo nenhum chamo *isto* de ‘sintonia’ – “Então você modificou o sentido da palavra ‘sintonia’ ou o sentido da regra.” – Não; – quem diz o que significa aqui ‘modificar’ e ‘permanecer igual’?

Não importa quantas regras você me indique – eu te indico uma regra que justifica o *meu* emprego da sua regra.[46]

TS 222, p. 84

114. Nós poderíamos também dizer: se *seguimos* as leis da inferência (regras de inferência), então já está de qualquer modo, no seguimento, uma interpretação.

TS 222, p. 85

115. “Você não pode de repente aplicar a lei agora

TS 222, p. 86

de maneira diferente!” – Se respondo a isto: “Ah! eu a apliquei *assim*!” ou: “Ah, eu devia aplicá--la *assim* –!”; então participo do jogo. Mas se simplesmente respondo: “De outro modo? – Mas isto não *é* de outro modo!” – o que você vai fazer? Isto é, ele pode responder como uma pessoa razoável e não jogar o jogo conosco.

TS 222, p. 87 [47]

116. “Segundo você diz, então, qualquer um poderia continuar a série como quisesse; e, portanto, também inferir de *qualquer* jeito.” Não chamaremos a isto então de “continuar a série”, como tampouco de “inferência”.

TS 222, p. 88

E pensar e inferir (bem como o contar) não nos foi naturalmente circunscrito mediante uma definição arbitrária, mas por limites naturais correspondentes ao corpo do que podemos chachend, was wir die Rolle des Denkens und Schließens in unsern Leben nennen können.

MS 127, p. 93

Denn, daß ihn Schlußgesetze nicht wie die Gleise den Zug zwingen, das und das zu reden, oder zu schreiben, darüber sind wir einig. Und wenn du sagst, er könne es zwar *reden*, aber er kann es nicht *denken*, so sage ich nur, das heiße nicht: er könne es, quasi trotz aller Anstrengung, nicht denken, sondern es heißt: zum ›Denken‹ gehört für uns wesentlich, daß er – beim Reden, Schreiben, etc. – *solche* Übergänge macht. Und ferner sage ich, daß die Grenze zwischen dem, was wir noch »denken« und dem, was wir nicht mehr so nennen, so wenig scharf gezogen ist, wie die Grenze zwischen dem, was noch »Gesetzmäßigkeit« genannt wird und dem, was wir nicht mehr so nennen.

Man kann aber dennoch sagen, daß die Schlußgesetze uns zwingen; in dem

TS 222, p. 88

Sinne nämlich, wie andere Gesetze in der menschlichen Gesellschaft. Der Kanzlist, der so schließt, wie in (17), *muß* es so tun; er wäre bestraft worden, wenn er anders schlösse. Wer anders schließt, kommt allerdings in Konflikt: z. B. mit der Gesellschaft; aber auch mit andern praktischen Folgen.

Und auch *daran* ist etwas, wenn man sagt: er kann es nicht *denken*. Man will etwa sagen: Er kann es nicht mir persönlichem Inhalt erfüllen: er kann nicht wirklich *mitgehen* – mit seinem Verstand, mit seiner Person. Es ist ähnlich, wie man sagt: Diese Tonfolgen geben keinen Sinn, ich kann sie nicht mit Ausdruck singen. Ich kann nicht *mitschwingen*. Oder, was hier auf dasselbe hinauskommt: ich schwinge nicht mit.

»Wenn er es redet – könnte man sagen – kann er es nur gedankenlos reden.« Und hierzu muß nur bemerkt werden, daß das ›gedankenlose‹ Reden sich von einem anderen wohl auch manchmal durch das unterscheidet, was beim Reden im Redenden an Vorstellungen, Empfindungen, und anderem, vor sich geht, daß aber diese Begleitung nicht das ›Denken‹ ausmacht und ihr Fehlen noch nicht die ›Gedankenlosigkeit‹.

TS 222, p. 89

117. Inwiefern ist das logische Argument ein Zwang? – »Du gibst doch *das* zu, – und *das* zu; dann mußt du auch *das* zugeben!« Das ist die Art, jemanden zu zwingen. D. h., man kann so tatsächlich Menschen zwingen, etwas zuzugeben. –Nicht anders, als wie man Einen etwa dazu zwingen kann, dorthin zu gehen, indem man gebietend mit dem Finger dorthin zeigt.

Denke, ich zeige in so einem Fall mit zwei Fingern zugleich in zwei verschiedenen Richtungen und stelle es damit dem Andern frei, in welcher der beiden Richtungen er gehen will – ein andermal zeige ich nur in *einer* Richtung; so kann man das auch so ausdrücken: mein erster Befehl habe ihn nicht gezwungen, in *einer* Richtung zu gehen, wohl aber der zweite. Das ist aber eine Aussage, die angeben soll, welcher Art meine Befehle waren; aber nicht, in welcher Art sie wirken, ob sie den und den tatsächlich zwingen, d. h., ob er ihnen gehorcht.

TS 222, p. 90

118. Es schien zuerst, als sollten diese Überlegungen zeigen, daß, ›was ein logischer Zwang

mar de o papel do pensar e do inferir na nossa vida.

MS 127, p. 93[48]

Então estamos de acordo em que as leis da inferência não o compelem, como os trilhos ao trem, a dizer ou a escrever isto e aquilo. E se você diz que ainda que ele possa *falar* disto não pode *pensar* nisto, então só digo que isto não significa: que ele, apesar de todo esforço, não possa pensar nisto, mas que isto significa: que ao 'pensar' pertence essencialmente para nós que ele faça – ao dizer, escrever etc. – *tais* passagens. E digo, ainda mais, que os limites entre o que ainda chamamos de "pensar" e o que não mais chamamos assim é um traçado tão pouco nítido quanto os limites entre o que ainda chamamos de "legalidade" e o que não mais chamamos assim.

Ainda assim, pode-se dizer que as leis da inferência nos compelem; vale dizer,

TS 222, p. 88

no sentido de outras leis da sociedade humana. O funcionário que infere como em (17), *tem que* fazer assim; ele seria punido se inferisse diferente. Quem infere diferente entra certamente em conflito: com a sociedade, por exemplo; mas também com outras consequências práticas.

Também há algo *quanto a isto* quando se diz: ele não pode *pensar* nisto. Quer-se dizer, por exemplo: Ele não pode preenchê-lo com conteúdo pessoal: ele não pode realmente *acompanhar* – com a sua compreensão, com a sua pessoa. É similar a quando se diz: Esta sequência de notas não tem sentido nenhum, não posso cantá-las com expressão. Não posso *repercuti-las*. Ou o que aqui dá no mesmo: não ressoo.

"Se ele fala disso – poder-se-ia dizer –, só pode estar falando sem pensar." E neste caso só se tem que observar que o falar 'sem pensar' também se diferencia às vezes de um outro falar pelo que passa em termos de ideias, sentimentos e outras coisas quando o falante fala, mas que este acompanhamento não conforma o 'pensar', e tampouco a sua falta conforma uma 'falta de pensamento'.[49]

TS 222, p. 89

117. Em que medida é o argumento lógico uma compulsão? – "Já que você assume *isto*, – e *isto*; então você tem que assumir *isto* também!" Esta é a maneira de compelir alguém. Isto é, de fato pode-se assim compelir pessoas a assumir alguma coisa. – Não diferente, por exemplo, do modo como se pode compelir alguém a ir daqui para lá, apontando para lá imperativamente com o dedo.

Imagine que eu aponte, num caso como este, com dois dedos ao mesmo tempo em duas direções diferentes, e deixe, assim, o outro livre para escolher em qual das duas direções ele quer ir – numa outra vez, aponto só para *uma* direção; de modo que se pode exprimir isto também assim: minha primeira ordem não o obrigou a ir em *uma* direção, mas a segunda sim. Isto, porém, é uma asserção que deve especificar de que tipo eram as minhas ordens; mas não de que modo elas se efetuam, se elas obrigam, de fato, a isto e a aquilo, isto é, se ele as obedece.

TS 222, p. 90

118. À primeira vista parecia que estas considerações deveriam mostrar que 'o que parece ser zu sein scheint, in Wirklichkeit nur ein psychologischer ist‹ – und da fragte es sich doch: kenne ich also beide Arten des Zwanges?! –

Denke dir, es würde der Ausdruck gebraucht: »Das Gesetz § .... bestraft den Mörder mit dem Tode.« Das könnte doch nur heißen: dieses Gesetz laute: so und so. Jene Form des Ausdrucks aber könnte sich uns aufdrängen, weil das Gesetz Mittel ist, wenn der Schuldige der Bestrafung zugeführt wird. – Nun reden wir von ›Unerbittlichkeit‹ bei denen, die jemand bestrafen. Da könnte es uns einfallen, zu sagen: »das Gesetz ist *unerbittlich* – die Menschen können den Schuldigen

TS 222, p. 91

laufen lassen, das Gesetz richtet ihn hin.« (Ja auch: »das Gesetz richtet ihn *immer* hin.«) – Wozu ist so eine Ausdrucksform zu gebrauchen? – Zunächst sagt dieser Satz ja nur, im Gesetz stehe das und das, und die Menschen richten sich manchmal nicht danach. Dann aber zeigt er doch das Bild des *einen* unerbittlichen – und vieler laxer Richter. Er dient darum als Ausdruck des Respekts vor dem Gesetz. Endlich aber kann man die Ausdrucksform auch so gebrauchen, daß man ein Gesetz ›unerbittlich‹ nennt, wenn es eine Möglichkeit der Begnadigung nicht vorsieht, und im entgegengesetzten Fall etwa ›einsichtig‹.

Wir reden nun von der ›Unerbittlichkeit‹ der Logik; und denken uns die logischen Gesetze unerbittlich, unerbittlicher noch, als die Naturgesetze. Wir machen nun darauf aufmerksam, wie das Wort »unerbittlich« auf mehrerlei Weise angewendet wird. Es entsprechen unsern logischen Gesetzen sehr allgemeine Tatsachen der täglichen Erfahrung. Es sind die, die es uns möglich machen, jene Gesetze immer wieder auf einfache Weise (mit Tinte auf Papier z. B.) zu demonstrieren. Sie sind zu vergleichen mit jenen Tatsachen, welche die Messung mit dem Metermaß leicht ausführbar und nützlich machen. Das legt den Gebrauch gerade dieser Schlußgesetze nahe, und nun sind *wir* unerbittlich in der Anwendung dieser Gesetze. Weil wir ›*messen*‹; und es gehört zum Messen, daß Alle das gleiche Maß haben. Außerdem aber kann man unerbittliche, d. h. *eindeutige*, von nichteindeutigen Schlußregeln unterscheiden, ich meine von solchen, die uns eine Alternative freistellen.

TS 222, p. 92

119. »Ich kann doch nur folgern, was wirklich folgt!« – D. h.: was die logische Maschine wirklich hervorbringt. Die logische Maschine, das wäre ein alles durchdringender ätherischer Mechanismus. – Vor diesem Bild ist zu warnen.

TS 222, p. 93

Denk dir ein Material härter und fester als irgend ein anderes. Aber wenn man einen Stab aus diesem Stoff aus der horizontalen in die vertikale Lage bringt, so zieht er sich zusammen; oder er biege sich, wenn man ihn aufrichtet und ist dabei so hart, daß man ihn auf keine andre Weise biegen kann. – (Ein Mechanismus aus diesem Stoff hergestellt, etwa eine Kurbel, Pleuelstange und Kreuzkopf. Andere Bewegungsweise des Kreuzkopfs.)

Oder: eine Stange biegt sich, wenn man ihr eine gewisse Masse nähert; gegen alle Kräfte aber, die wir auf sie wirken lassen, ist sie vollkommen starr. Denk dir, die Führungsschienen des Kreuzkopfs biegen sich und strecken sich wieder, wenn die Kurbel sich ihnen nähert und sich wieder entfernt. Ich nähme aber an, daß keinerlei besondere äußere Kraft dazu nötig ist, dies hervorzurufen. Dieses Benehmen der Schienen würde wie das eines lebenden Wesens anmuten.

uma compulsão lógica é, na realidade, só psicológica’ – e então se perguntava: conheço então dois tipos de compulsão?! –[50]

Imagine que se usasse a expressão: “A lei § .... pune o assassino com a morte.” Isto só poderia significar: esta lei diz: isto e aquilo. Mas esta forma de expressão poderia nos obrigar porque a lei é o meio pelo qual o culpado é conduzido à punição. – Agora falamos da ‘inexorabilidade’ com relação àqueles que punem alguém. Neste caso, poderia nos acontecer de dizer: “a lei é *inexorável* – as pessoas poderiam soltar

TS 222, p. 91

o culpado, a lei o executaria.” (E também: “a lei o executa *sempre*.”) – Para que se usa uma forma de expressão assim? – Em primeiro lugar, esta proposição diz somente que na lei está assim e assado, e que as pessoas às vezes não julgam de acordo com ela. Logo, ela mostra a imagem de *um* juiz inexorável – e de muitos condescendentes. Ela serve, portanto, como expressão de respeito pela lei. Finalmente, porém, pode-se usar esta forma de expressão de tal modo que se chame uma lei de ‘inexorável’ se ela não previr uma possibilidade de indulto, e no caso oposto, por exemplo, de ‘compreensiva’.[51]

Agora falamos da ‘inexorabilidade’ da lógica; e imaginamos as leis da lógica como inexoráveis, mais inexoráveis até que as leis da natureza. Chamamos agora a atenção sobre como a palavra “inexorável” é usada de várias maneiras. Corresponde às nossas leis lógicas fatos muito gerais da experiência cotidiana. São aqueles que nos possibilitam demonstrar sempre novamente aquelas leis de maneira simples (com tinta e papel, por exemplo). Elas são comparáveis com aqueles fatos que tornam a medida com o metro facilmente executável e útil. Isto sugere justamente o uso dessas leis de inferência, e agora somos *nós* que as aplicamos inexoravelmente. Porque nós ‘*medimos*’; e faz parte do medir que tudo tenha a mesma medida. Além disto, porém, pode-se diferenciar entre regras de inferência inexoráveis, isto é, *inequívocas*, e não inequívocas, quero dizer aquelas que nos dão uma alternativa.

TS 222, p. 92

119. “Eu só posso inferir o que realmente se segue!”[52] – Ou seja: o que a máquina lógica realmente produz. A máquina lógica, ela seria um mecanismo etéreo que tudo penetra. – Precaução[53] diante desta imagem.

TS 222, p. 93

Imagine um material mais duro e rijo que qualquer outro. Mas quando se desloca uma barra desta substância da posição horizontal para a vertical, ela se encolhe; ou ela se curva quando é levantada, mas fica tão dura que não se consegue mais curvá-la de jeito nenhum. – (Fabricar um mecanismo com esta substância, por exemplo uma manivela, uma biela, uma cruzeta. Outras formas de movimento da cruzeta.)

Ou: uma haste se curva se a aproximamos de uma determinada massa; mas fica completamente rígida apesar de todas as forças que possamos exercer contra ela. Imagine que os trilhos de guia se curvam e se esticam novamente conforme a manivela se aproxima e se afasta delas. Mas suponho que nenhuma força externa particular é necessária para ocasionar isto. Este comportamento dos trilhos causa a impressão de que eles seriam como um ser vivo.

Wenn wir sagen: »Wenn die Glieder des Mechanismus ganz starr wären, würden sie sich so und so bewegen«, was ist das Kriterium dafür, daß sie ganz starr sind? Ist es, daß sie gewissen Kräften widerstehen? oder, daß sie sich so

TS 222, p. 94

und so bewegen?

Denke, ich sage: »das ist das Bewegungsgesetz des Kreuzkopfes (die Zuordnung seiner Lage zur Lage der Kurbel etwa), wenn sich die Länge der Kurbel und der Pleuelstange nicht ändern.« Das heißt wohl: Wenn sich die Lagen der Kurbel und des Kreuzkopfes so zueinander verhalten, dann sage ich, daß die Länge der Pleuelstange gleich bleibt.

120. »Wenn die Teile ganz starr wären, würden sie sich so bewegen«: ist das eine Hypothese? Es scheint, nein. Denn wenn wir sagen: »die Kinematik beschreibt die Bewegungen des Mechanismus unter der Voraussetzung, daß seine Teile vollkommen starr .sind«, so geben wir einerseits zu, daß diese Voraussetzung in der Wirklichkeit nie zutrifft, anderseits soll es keinem Zweifel unterliegen, daß vollkommen starre Teile sich so bewegen würden. Aber woher diese Sicherheit? Es handelt sich hier wohl nicht um Sicherheit, sondern um eine Bestimmung, die wir getroffen haben. Wir *wissen* nicht, daß Körper, wenn sie (nach den und den Kriterien) starr wären, sich so bewegen würden; wohl aber würden wir (unter Umständen) Teile ›starr‹ nennen, die sich so bewegen – denke in so einem Fall immer daran, daß ja die Geometrie (oder Kinematik) keine Meßmethode spezifiziert, wenn sie von gleichen Längen oder vom Gleichbleiben einer Länge spricht.

Wenn wir also die Kinematik etwa die Lehre von der Bewegung vollkommen starrer Maschinenteile nennen, so

TS 222, p. 95

liegt hierin einerseits eine Andeutung über die (mathematische) Methode: wir bestimmen gewisse Distanzen als die Längen der Maschinenteile, die sich nicht ändern; anderseits eine *Andeutung* über die Anwendung des Kalküls.

TS 222, p. 96

121. Die Härte des logischen Muß. Wie, wenn man sagte: das Muß der Kinematik ist viel härter, als das kausale Muß, das einen Maschinenteil zwingt, sich *so* zu bewegen,

TS 222, p. 97

wenn der andere sich *so* bewegt? –

Denk dir, wir würden die Bewegungsweise des ›vollkommen Starren‹ Mechanismus durch ein kinematographisches Bild, einen Zeichenfilm, darstellen. Wie, wenn man sagen würde, dies Bild sei *vollkommen hart*, und damit meinte, wir hatten dieses Bild als Darstellungsweise genommen, – was immer die Tatsachen seien, wie immer sich die Teile des wirklichen Mechanismus biegen, oder dehnen mögen.

122. Die Maschine (ihr Bau) als Symbol für ihre Wirkungsweise: Die Maschine – könnte ich zuerst sagen – ›scheint ihre Wirkungsweise schon in sich zu haben‹. Was heißt das?

Indem wir die Maschine kennen, scheint alles Übrige, nämlich die Bewegungen, die sie

Quando dizemos: “Se os elos do mecanismo fossem totalmente rígidos, eles se movimentariam assim e assim”, qual é o critério para que eles sejam totalmente rígidos? É o de que eles resistam a certas forças? ou de que eles se

TS 222, p. 94

movimentem assim e assim?

Imagine que eu diga: “esta é a lei do movimento da cruzeta (a correlação da sua posição em relação à posição da manivela, por exemplo), se ela não modifica o comprimento da manivela e da biela.” Isto significaria: Se as posições relativas da manivela e da cruzeta permanecerem assim, então digo que o comprimento da biela fica igual.

120. “Se as partes fossem totalmente rígidas, elas se movimentariam assim”: isto é uma hipótese? Não parece que é. Pois, se dizemos: “a cinemática descreve os movimentos do mecanismo sob a pressuposição de que suas partes são completamente rígidas”, então por um lado aceitamos que esta pressuposição nunca acontece na realidade, e por outro lado não admitimos qualquer dúvida de que as partes completamente rígidas se movimentam assim. Mas de onde vem esta certeza? Não se trataria tanto aqui de uma certeza, mas de uma determinação que instauramos. Não *sabemos* se os corpos, caso sejam rígidos (segundo tal e tal critério), se movimentariam assim; mas que denominaríamos (sob certas circunstâncias) como partes ‘rígidas’ aquilo que se movimenta assim – imagine sempre num caso como este que a geometria (ou a cinemática) nunca especifica um método de medida se ela fala de comprimentos iguais ou de uma extensão constante.

Se, portanto, chamamos a cinemática, por exemplo, de estudo do movimento de partes da máquina completamente rígidas, então

TS 222, p. 95

aqui existe, por um lado, uma indicação sobre o método (matemático): determinamos certas distâncias como extensão das partes da máquina que não se alteram; por outro lado, damos uma *indicação* sobre a aplicação do cálculo.

TS 222, p. 96

121. A dureza do exigir lógico.[54] Tal como se dissesse: o exigir da cinemática é muito mais duro do que o exigir causal que obriga uma parte da máquina a se movimentar *assim*

TS 222, p. 97

quando uma outra se movimenta *assim*? –

Imagine que apresentássemos as formas do movimento do mecanismo ‘completamente rígido’ por uma imagem cinematográfica, um desenho animado. E se alguém dissesse que esta imagem é *completamente dura*, e, com isto, pretendesse dizer que as tínhamos tomado como modo de apresentação, – qualquer que fosse o caso, sejam quais forem as partes do mecanismo real que possam curvar ou esticar.

122. A máquina (a sua construção) como símbolo do seu modo de operação: A máquina – poderia dizer antes de tudo – ‘parece já ter em si seu modo de operação’.[55] O que significa isto?

Na medida em que conhecemos a máquina, ela parece já ter determinado totalmente machen wird, schon ganz bestimmt zu sein.

»Wir reden so, als *könnten* sich diese Teile nur so bewegen, als könnten sie nichts andres tun.«

Wie ist es –: vergessen wir also die Möglichkeit, daß sie sich biegen, abbrechen, schmelzen können, etc.? Ja; wir denken *in vielen* Fällen garnicht daran. Wir gebrauchen eine Maschine, oder das Bild einer Maschine, als Symbol für eine bestimmte Wirkungsweise. Wir teilen z. B. Einem

TS 222, p. 98

dieses Bild mit und setzen voraus, daß er die Erscheinungen der Bewegungen der Teile aus ihm ableitet. (So wie wir jemand eine Zahl mitteilen können, indem wir sagen, sie sei die fünfundzwanzigste der Reihe, 1, 4, 9, 16, ...)

»Die Maschine scheint ihre Wirkungsweise schon in sich zu haben« heißt: Du bist geneigt, die künftigen Bewegungen der Maschine in ihrer Bestimmtheit Gegenständen zu vergleichen, die schon in einer Lade liegen und von uns nun herausgeholt werden.

So aber reden wir nicht, wenn es sich darum handelt, das wirkliche Verhalten einer Maschine vorauszusagen; da vergessen wir, im allgemeinen, nicht die Möglichkeiten der Deformation der Teile etc.

Wohl aber, wenn wir uns darüber wundern, wie wir denn die Maschine als Symbol einer Bewegungsweise verwenden können – da sie sich doch auch ganz *anders* bewegen kann.

Nun, wir könnten sagen, die Maschine, oder ihr Bild, stehe als Anfang einer Bilderreihe, die wir aus diesem Bild abzuleiten gelernt haben .

Wenn wir aber bedenken, daß sich die Maschine auch anders hätte bewegen können, so erscheint es uns leicht, als müßte in der Maschine als Symbol ihre Bewegungsart noch viel bestimmter enthalten sein, als in der wirklichen Maschine. Es genüge da nicht, daß dies die erfahrungsmäßig vorausbestimmten Bewegungen seien, sondern sie müßten eigentlich – in einem mysteriösen Sinne – bereits *gegenwärtig* sein. Und

TS 222, p. 99

es ist ja wahr: die Bewegung des Maschinensymbols ist in anderer Weise vorausbestimmt, als die einer gegebenen wirklichen Maschine.

123. »Es ist, als könnten wir die ganze Verwendung des Wortes mit einem Schlag erfassen.« – Wie *was* z. B.? – *Kann* man sie nicht – in gewissem Sinne – mit einem Schlag erfassen? Und in *welchem* Sinne kannst du dies nicht? Es ist eben, als könnten wir sie in einem noch viel direkteren Sinne mit einem Schlag erfassen. Aber hast du dafür ein Vorbild? Nein. Es bietet sich uns nur diese Ausdrucksweise an. Als das Resultat sich kreuzender Gleichnisse.

124. Du hast kein Vorbild dieser übermäßigen Tatsache, aber du wirst dazu verführt, einen *Über-Ausdruck* zu gebrauchen.

125. Wann denkt man denn: die Maschine habe ihre möglichen Bewegungen schon in irgendeiner mysteriösen Weise in sich? – Nun, wenn man philosophiert. Und was verleitet uns, das

todo o resto, a saber, os movimentos que ela vai fazer.

"Nós falamos como se estas partes só *pudessem* se movimentar assim, como se elas não pudessem fazer outra coisa."

Como é que é isso–: esquecemos então a possibilidade de que ela se curve, quebre, se funda etc.? Sim; *em muitos* casos nós não pensamos absolutamente nisto. Nós usamos uma máquina, ou a imagem de uma maquina, como símbolo de um determinado modo de operação. Nós compartilhamos, por exemplo, com alguém

TS 222, p. 98

esta imagem e pressupomos que ele vai deduzir dela os fenômenos dos movimentos das partes. (Assim como nós podemos compartilhar com alguém um número que dizemos ser o vigésimo quinto da série 1, 4, 9, 16, ...)

"A máquina parece já ter em si seu modo de operação" significa: você está inclinado a comparar os movimentos futuros da máquina, em sua determinabilidade, com objetos que já estão numa gaveta e podem agora ser retirados por nós.

Mas não falamos assim quando se trata de predizer o comportamento real de uma maquina; geralmente não esquecemos as possibilidades de deformação das partes etc.

Mas sim quando nos maravilhamos de que podemos empregar a máquina como símbolo do seu modo de movimento – já que ela pode se movimentar também de modo totalmente *diferente*.

Agora podemos dizer que a máquina, ou a sua imagem, se coloca como o início de uma série de imagens que aprendemos a deduzir daquela primeira.

Mas quando consideramos que a máquina poderia também ter se movimentado de outra maneira, parece-nos fácil que na máquina como símbolo teriam que estar contidos os seus tipos de movimento de um modo ainda mais determinado do que na máquina real. Não seria suficiente que estes movimentos fossem predeterminados em conformidade com a experiência, senão que eles teriam que – em um sentido misterioso – já estar propriamente *presentes*. E

TS 222, p. 99

isto é bem verdadeiro: o movimento da máquina como símbolo é predeterminado de maneira diferente do que o de uma máquina real qualquer.

123. "É como se pudéssemos apreender todo o emprego da palavra de um só golpe." – Como o *quê*, por exemplo? – Não se *pode* – em certo sentido – apreendê-la de um só golpe? E em *que* sentido você não pode fazer isto? É como se pudéssemos apreendê-la de um só golpe em um sentido ainda muito mais direto. Mas você tem um modelo para isto? Não. Somente se nos oferece este modo de expressão. Como o resultado de comparações que se entrecruzam.[56]

124. Você não tem nenhum modelo deste fato sobejo, mas está tentado a usar uma *super-expressão*.[57]

125. Então[58] quando se pensa: a máquina já tem em si os seus possíveis movimentos de alguma maneira misteriosa? – Bem, quando se faz filosofia. E o que nos induz a pensar isto? A ma-zu denken? Die Art und Weise, wie wir von der Maschine reden. Wir sagen z. B., die Maschine *habe* (*besäße*) diese Bewegungsmöglichkeiten, wir sprechen von der ideal starren Maschine, die sich nur so und so bewegen *könne*. — Die Bewegungs*möglichkeit*, was ist sie? Sie ist nicht die *Bewegung*; aber sie scheint auch nicht die bloße physikalische

TS 222, p. 100

Bedingung der Bewegung zu sein, etwa, daß zwischen Lager und Zapfen ein gewisser Zwischenraum ist, der Zapfen nicht zu streng ins Lager paßt. Denn dies ist zwar *erfahrungsmäßig* die Bedingung der Bewegung, aber man könnte sich die Sache auch anders vorstellen. Die Bewegungsmöglichkeit soll eher ein Schatten der Bewegung selber sein. Aber kennst du so einen Schatten? Und unter Schatten verstehe ich nicht irgendein Bild der Bewegung; denn dies Bild müßte ja nicht das Bild gerade *dieser* Bewegung sein. Aber die Möglichkeit dieser Bewegung muß die Möglichkeit gerade dieser Bewegung sein. (Sieh', wie hoch die Wellen der Sprache hier gehen.)

Die Wellen legen sich, sowie wir uns fragen: wie gebrauchen wir denn, wenn wir von einer Maschine reden, das Wort »Möglichkeit der Bewegung«? – Woher kamen aber dann die seltsamen Ideen? Nun, ich zeige dir die Möglichkeit der Bewegung etwa durch ein *Bild* der Bewegung: ›also ist die Möglichkeit etwas der Wirklichkeit Ähnliches.‹ Wir sagen: »es bewegt sich noch nicht, aber es hat schon die Möglichkeit sich zu bewegen«, – ›also ist die Möglichkeit etwas der Wirklichkeit sehr Nahes‹. Wir mögen zwar bezweifeln, ob die und die physikalische Bedingung diese Bewegung möglich macht, aber wir diskutieren nie, ob *dies* die Möglichkeit dieser oder jener Bewegung *sei*: ›also steht die Möglichkeit der Bewegung zur Bewegung selbst in einer einzigartigen Relation, enger, als die des Bildes zu seinem Gegenstand‹, denn es kann bezweifelt

TS 222, p. 101

werden, ob dies das Bild dieses oder jenes Gegenstandes ist. Wir sagen: »die Erfahrung wird lehren, ob dies dem Zapfen diese Bewegungsmöglichkeit gibt«, aber wir sagen nicht: »die Erfahrung wird lehren, ob dies die Möglichkeit dieser Bewegung ist«: ›also ist es nicht Erfahrungstatsache, daß diese Möglichkeit die Möglichkeit gerade dieser Bewegung ist.‹

Wir achten auf unsere eigene Ausdrucksweise, diese Dinge betreffend, verstehen sie aber nicht, sondern mißdeuten sie. Wir sind, wenn wir philosophieren, wie Wilde, wie primitive Menschen, die die Ausdrucksweise zivilisierter Menschen hören, sie mißdeuten und nun seltsame Schlüsse aus dieser Deutung ziehen.

Denke dir, es verstünde Einer unsre Vergangenheitsform nicht: »er ist hier gewesen.« — Er sagt: »›er *ist*‹, das ist die Gegenwart, also sagt der Satz, daß die Vergangenheit in einem gewissen Sinne gegenwärtig ist.«

126. »Aber ich meine nicht, daß, was ich jetzt (beim Erfassen) tue, die künftige Verwendung *kausal* und erfahrungsmäßig bestimmt, sondern daß, in einer *seltsamen* Weise, diese Verwendung selbst in irgend einem Sinne, gegenwärtig ist.« – Aber ›in *irgend* einem Sinne‹ ist sie es ja! (Wir sagen ja auch: »die Ereignisse der vergangenen Jahre sind mir gegenwärtig.«) Eigentlich ist an dem, was du

TS 222, p. 102

sagst, falsch nur der Ausdruck: »in seltsamer Weise.« Das Übrige ist richtig; und seltsam ers-

neira como falamos da máquina. Nós dizemos, por exemplo, que a máquina *tem* (*possui*) estas possibilidades de movimento, nós falamos da máquina rígida ideal que só *pode* se movimentar assim e assim. — A *possibilidade* do movimento, o que é ela? Ela não é o *movimento*; mas ela parece não ser também a mera *condição*

TS 222, p. 100

física do movimento, a saber, que entre mancal e pivô ela é um espaço intermédio para que o pivô não se ajuste tão firmemente ao mancal. Pois ainda que *de acordo com experiência* esta seja a condição do movimento, se poderia também imaginar a coisa de modo diferente. A possibilidade do movimento deve ser antes uma sombra do próprio movimento. Mas você conhece uma sombra assim? E por sombra não entendo qualquer imagem do movimento; posto que esta imagem não teria que ser a imagem precisa *deste* movimento. Mas a possibilidade deste movimento tem que ser a possibilidade precisa deste movimento. (Veja como vão altas aqui as ondas da linguagem.)[59]

As ondas se acalmam tão logo nos perguntamos: como usamos a expressão “possibilidade do movimento” quando falamos de uma máquina? – Mas de onde então vieram as ideias estranhas? Ora, eu te mostro a possibilidade do movimento mediante, digamos, uma *imagem* do movimento: ‘portanto a possibilidade é alguma coisa semelhante à realidade.’ Nós dizemos: “isto ainda não se movimenta, mas já tem a possibilidade de se movimentar”, – ‘portanto a possibilidade é alguma coisa muito próxima da realidade’. Ainda que possamos duvidar se tal e tal condição física torna possível este movimento, nunca discutiremos, porém, se *esta seria* a possibilidade deste ou daquele movimento: ‘portanto a possibilidade do movimento está para o próprio movimento numa relação singular, mais estreita do que a da imagem com o seu objeto’, pois pode-se duvidar

TS 222, p. 101

se esta é a imagem deste ou daquele objeto. Nós dizemos: “a experiência vai ensinar se isto dá ao pivô esta possibilidade de movimento”, mas não dizemos: “a experiência vai ensinar se isto é a possibilidade deste movimento”: ‘portanto não é um fato empírico que esta possibilidade seja a possibilidade precisa deste movimento.’

Nós prestamos atenção ao nosso próprio modo de expressão a respeito destas coisas, mas não o compreendemos, o interpretamos mal. Nós somos, quando filosofamos, como selvagens, como seres humanos primitivos que ouvem o modo de expressão das pessoas civilizadas, o interpretam mal e agora tiram conclusões estranhas desta interpretação.

Imagine alguém que não compreendesse nossa forma de tempo passado: “ele tem estado aqui.” — Ele diz: “‘ele *tem*’ é presente, por isto a proposição diz que o passado está presente em um certo sentido.”[60]

126. “Mas[61] eu não quero dizer que o que faço agora (pela apreensão) determina o emprego *causal* e experimental futuro, mas que, de uma maneira *estranha*, este mesmo emprego está presente em algum sentido.” – Mas ‘em *algum* sentido’ ele está mesmo! (Nós também dizemos: “os acontecimentos do ano passado me estão presentes.”) Na realidade, no que você

TS 222, p. 102

diz só é falsa a expressão: “de uma maneira estranha.” O resto está correto; e a proposição só cheint der Satz nur, wenn man sich zu ihm ein anderes Sprachspiel vorstellt, als das, worin wir ihn tatsächlich verwenden. (Jemand sagte mir, er habe sich als Kind darüber gewundert, wie denn der Schneider »*ein Kleid nähe*« – er dachte, dies heiße, es werde durch *bloßes Nähen* ein Kleid erzeugt, indem nämlich Faden an Faden genäht würde.)

127. Die unverstandene Verwendung des Wortes wird als Ausdruck eines seltsamen *Vorgangs* gedeutet. (Wie man sich die Zeit als seltsames Medium, die Seele als seltsames Wesen denkt.)

Die Schwierigkeit aber entsteht hier in allen Fällen durch die Vermischung von »ist« und »heißt«.

128. Die Verbindung, die keine kausale, erfahrungsmäßige, sondern eine viel strengere und härtere sein soll, ja so fest, daß das Eine irgendwie schon das Andere *ist*, ist immer eine Verbindung in der Grammatik.

129. Woher weiß ich, daß dies Bild meine Vorstellung von der *Sonne* ist? – Ich *nenne* es Vorstellung von der Sonne. Ich *verwende* es als Bild der *Sonne*.

TS 222, p. 103

130. »Es ist, als könnten wir die ganze Verwendung des Wortes mit einem Schlag erfassen.« – Wir sagen ja, daß wir es tun. D. h., wir beschreiben ja, manchmal, was wir tun, mit diesen Worten. Aber es ist an dem, was geschieht, nichts Erstaunliches, nichts Seltsames. Seltsam wird es, wenn wir dazu geführt werden, zu denken, daß die künftige Entwickelung auf irgendeine Weise schon im Akt des Erfassens gegenwärtig sein muß und doch nicht gegenwärtig ist. – Denn wir sagen, es sei kein Zweifel, daß wir das Wort ….. verstehen und anderseits liegt seine Bedeutung in seiner Verwendung. Es ist kein Zweifel, daß ich jetzt *Schach* spielen will; aber das Schachspiel ist dies Spiel durch *alle seine Regeln* (usf.). Weiß ich also nicht, was ich spielen wollte, ehe ich gespielt *habe*? Oder aber, sind alle Regeln in meinem Akt der Intention enthalten? Ist es nun Erfahrung, die mich lehrt, daß auf diesen Akt der Intention für gewöhnlich diese Art des Spielens folgt? Kann ich also doch nicht sicher sein, was ich zu tun beabsichtigte? Und wenn dies Unsinn ist, welcherlei über-starre Verbindung besteht zwischen dem Akt der Absicht und dem Beabsichtigten? — Wo ist die Verbindung gemacht zwischen dem Sinn der Worte »Spielen wir eine Partie Schach!« und allen Regeln des Spiels? – Im Regelverzeichnis des Spiels, im Schachunterricht, in der täglichen Praxis des Spielens.

TS 222, p. 104

131. Die logischen Gesetze sind allerdings

TS 222, p. 105

der Ausdruck von ›Denkgewohnheiten‹, aber auch von der Gewohnheit *zu denken*. D. h., man kann sagen, sie zeigten: wie Menschen denken und auch, *was* Menschen »denken« nennen.

parece estranha se concebemos um jogo de linguagem diferente do que aquele que aplicamos de fato nela. (Alguém me disse que quando era criança se surpreendia com o fato de que o alfaiate “*cose um vestido*”[62] – ele pensava que isto significa que o vestido se produz pelo *mero coser*, na medida em que literalmente foi cosido fio a fio.)

127. O[63] emprego não compreendido da palavra é interpretado como expressão de um *processo* estranho. (Como se imagina o tempo como um meio estranho, a mente como um ente estranho.)

A dificuldade, entretanto, reside aqui na mistura, em todos os casos, do “é” com o “significa”.

128. A ligação que não é causal nem se dá na experiência, mas deve ser muito mais forte e dura, e até tão rija que uma, de algum modo, já *seja* outra, é sempre uma ligação na gramática.

129. Como sei que esta imagem é a minha representação do *sol*? – Eu a *chamo* de representação do sol. Eu a *emprego* como imagem do *sol*.

TS 222, p. 103

130. “É[64] como se pudéssemos apreender todo o emprego da palavra de um só golpe.” – E nós dizemos o que fazemos. Isto é, às vezes descrevemos o que fazemos com estas palavras. Mas no que acontece não há nada de espantoso, nada de estranho. Estranho é quando somos levados a pensar que o desenvolvimento futuro já tem que já estar presente de alguma forma no ato de apreensão, mas, de fato, não está. – Porque dizemos que não há dúvida de que compreendemos a palavra ….., e que, por outro lado, o seu significado está no seu emprego. Não há dúvida de que quero agora jogar *xadrez*; mas o jogo de xadrez é este jogo por meio de *todas as suas regras* (e assim por diante). Não sei então o que quero jogar antes de *ter* jogado? Ou já estão todas as regras contidas no meu ato de intenção? Seria a experiência que me ensina que com este ato de intenção normalmente se segue esta espécie de jogo? Não posso estar seguro então do que pretendo fazer? E se isto é absurdo, que tipo de ligação super-rígida existe entre o ato de pretender e o pretendido? — Onde é feita a ligação entre o sentido da frase “vamos jogar uma partida de xadrez!” e todas as regras do jogo? – Na lista de regras do jogo, na aula de xadrez, na práxis cotidiana de jogar.

TS 222, p. 104

131. As leis da lógica são notoriamente

TS 222, p. 105

a expressão de ‘hábitos do pensamento’, mas também do hábito de *pensar*. Ou seja, pode-se dizer que elas mostram: como as pessoas pensam e também o *que* as pessoas chamam de “pensar”.

132. Frege nennt ›ein Gesetz des menschlichen Fürwahrhaltens‹: »Den Menschen ist es .... unmöglich, einen Gegenstand als von ihm selbst verschieden anzuerkennen.« – Wenn ich denke, daß mir das unmöglich ist, so denke ich, daß ich *versuche*, es zu tun. Ich schaue also auf meine Lampe und sage: »diese Lampe ist verschieden von ihr selbst.« (Aber es rührt sich nichts.) Ich sehe nicht etwa, daß es falsch ist, sondern ich kann damit gar nichts anfangen. (Außer, wenn die Lampe im Sonnenlicht flimmert, dann kann ich das ganz gut durch diesen Satz ausdrücken.) Man kann sich auch in eine Art Denkkrampf versetzen, in welchem man *tut*: als versuchte man, das Unmögliche zu denken und es gelänge nicht. Ähnlich, wie man auch *tun* kann, als versuchte man (vergeblich) einen Gegenstand aus der Ferne durch bloßes Wollen an sich heran zu ziehen. (Dabei schneidet man etwa gewisse Gesichter, so, als wollte man dem Ding durch Mienen zu verstehen geben, es solle herkommen.)

TS 222, p. 106

133. Die Sätze der Logik sind ›Denkgesetze‹, ›weil sie das Wesen des menschlichen Denkens zum Ausdruck bringen‹ – richtiger aber: weil sie das Wesen, die Technik des Denkens zum Ausdruck bringen, oder zeigen. Sie zeigen, was das Denken ist, und auch Arten des Denkens.

TS 222, p. 107

134. Die Logik – kann man sagen – zeigt, was wir unter »Satz« und unter »Sprache« verstehen. –

TS 222, p. 108

135. Denk dir diese seltsame Möglichkeit: Wir hätten uns bisher immer in der Multiplikation 12 x 12 verrechnet. Ja, es ist unbegreiflich, wie das geschehen konnte, aber es ist geschehen. Also ist alles falsch, was man so ausgerechnet hat! — Aber was macht es? Es macht ja gar nichts! – Dann muß also etwas falsch sein in unsrer Idee von Wahrheit und Falschheit der arithmetischen Sätze.

TS 222, p. 109

136. Aber ist es denn unmöglich, daß ich mich in der Rechnung geirrt habe? Und wie, wenn mich ein Teufel irrt, so daß ich irgend etwas immer wieder übersehe, so oft ich auch, Schritt für Schritt nachrechne. So daß, wenn ich aus der Verhexung erwachte, ich sagen würde: »Ja, war ich denn blind!« – Aber welchen Unterschied macht es, wenn ich dies ›annehme‹? Ich könnte dann sagen: »Ja ja, die Rechnung ist gewiß falsch – aber so rechne ich. Und das nenne ich nun addieren, und diese Zahl ›die Summe dieser beiden‹.«

137. Denke, jemand würde so behext, daß er rechnete:

132. Frege denomina como ‘uma lei do que os seres humanos tomam por verdadeiro’: “Para os seres humanos é .... impossível reconhecer um objeto como diferente de si mesmo.”[65] – Se penso que para mim isto é impossível, então penso em *tentar* fazê-lo. Olho, então, para o meu abajur e digo: “este abajur é diferente de si mesmo.” (Mas ele nem sequer se mexe.) Não é que provavelmente veja que isto é falso, senão que não posso fazer absolutamente nada com isto. (Exceto quando o abajur cintila à luz do sol, pois então posso me expressar muito bem por meio desta proposição.) Uma pessoa pode também se colocar numa espécie de cãibra mental em que ela *atua*: como se tentasse pensar o impossível e não conseguisse. De modo similar ao que se pode também *fazer* quando se tenta (inutilmente) trazer um objeto distante para perto de si pelo puro querer. (Para isto se faz, por exemplo, certas caretas, como se a pessoa quisesse dar a entender à coisa, pelas expressões fisionômicas, que esta deveria se aproximar dela.)

TS 222, p. 106

133. As proposições da lógica são ‘leis do pensamento’, ‘pois elas dão expressão à essência do pensamento humano’ – mais corretamente, porém: pois elas dão expressão, ou mostram, a essência, a técnica[66] do pensar. Elas mostram o que é o pensar e também espécies do pensar.

TS 222, p. 107

134. A lógica – pode-se dizer – mostra o que compreendemos por “proposição” e por “linguagem”. –

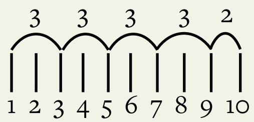
TS 222, p. 108

135. Imagine esta estranha possibilidade: Nós sempre nos equivocamos, até hoje, na multiplicação de 12 x 12. Sim, é incompreensível como isto pôde acontecer, mas aconteceu. Portanto é falso tudo o que se calculou deste modo! — Mas que importância tem isto? Isto não importa absolutamente nada! – Por conseguinte alguma coisa tem que estar errada na nossa ideia de verdade e de falsidade das proposições aritméticas.

TS 222, p. 109

136. Mas então é impossível que tenha me equivocado no cálculo? E se um demônio me engana, de modo que sempre negligencio, de certo modo, alguma coisa, mesmo que frequentemente recalcule passo a passo. De modo que quando acordo do feitiço, passo a dizer: “Puxa, como estava cego!” – Que diferença faz se ‘pressuponho’ isso? Eu poderia, então dizer: “Claro, claro, o cálculo está errado, com certeza – mas eu calculo assim. E isso é o que chamo de somar, e esse número, ‘a soma desses dois’.”

137. Imagine que alguém estivesse tão enfeitiçado que calcula assim:



also 4 x 3 + 2 = 10.

Nun soll er seine Rechnung anwenden. Er nimmt viermal 3 Nüsse und noch 2, und verteilt sie unter 10 Leute; und jeder erhält *eine* Nuß: denn er teilt sie, den Bögen der Rechnung entsprechend, aus und so oft er Einem eine zweite Nuß gibt, ist sie verschwunden.

138. Man könnte auch sagen: Du schreitest in dem Beweis von Satz zu Satz; aber läßt du dir auch eine

TS 222, p. 110

Kontrolle dafür gefallen, daß du richtig gegangen bist? – Oder sagst du bloß, »Es *muß* stimmen« und mißt alles andere mit dem Satz, den du erhältst?

139. Denn, wenn es *so* ist, dann schreitest du nur von Bild zu Bild.

140. Es könnte praktisch sein, mit einem Maßstab zu messen, der die Eigenschaft hat, sich auf etwa die Hälfte seiner Länge zusammen zu ziehen, wenn er aus diesem Raum in jenen gebracht wird. Eine Eigenschaft, die ihn unter andern Verhältnissen zum Maßstab untauglich machen würde.

Es könnte praktisch sein, beim Abzählen einer Menge, unter gewissen Umständen, Ziffern auszulassen; sie abzuzählen: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10.

TS 222, p. 111

141. Was geht da vor, wenn Einer versucht, eine Figur mit ihrem Spiegelbild durch Verschieben in der Ebene zur Deckung zu bringen und es ihm nicht gelingt? Er legt sie in verschiedener Weise aufeinander; blickt auf die Teile, die sich nicht decken, ist unbefriedigt, sagt etwa: »es *muß* doch gehen«, und legt die Figuren wieder anders zusammen.

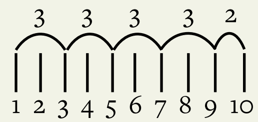
Was geht vor, wenn Einer versucht, ein Gewicht aufzuheben und es ihm nicht gelingt, weil das Gewicht zu schwer ist? Er nimmt die und die Stellung ein, faßt das Gewicht an und spannt die und die Muskeln an, dann läßt er es los und gibt etwa Zeichen der Unbefriedigung.

Worin zeigt sich die geometrische, logische Unmöglichkeit der ersten *Aufgabe*?

»Nun, er hätte doch an einem Bild oder in andrer Weise zeigen können, wie das aussieht, was er im zweiten Versuch anstrebt.« – Aber er behauptet, das auch im ersten Fall zu können, indem er zwei gleiche, *kongruente*, Figuren miteinander zur

TS 222, p. 112

Deckung bringt. – Was sollen wir nun sagen? Daß diese beiden Fälle eben verschieden sind? Aber das sind ja auch Bild und Wirklichkeit im zweiten Fall.



portanto 4 x 3 + 2 = 10.

Agora ele deve aplicar seu cálculo. Ele pega 4 vezes 3 nozes e mais 2, e as reparte entre 10 pessoas; e cada um ganha *uma* noz: pois ele as reparte de modo correspondente aos arcos do cálculo, e toda vez que ele dá para alguém uma segunda noz, ela desaparece.

138. Poder-se-ia também dizer: você avança na demonstração de proposição em proposição; mas você aceita ter também um

TS 222, p. 110

controle de que andou corretamente? – Ou você só diz “Isto já *tem que* estar certo”, e mede todas as outras coisas pela proposição que você já tem?

139. Então, se for *assim*, você só avança de imagem em imagem.

140. Poderia ser prático medir com uma escala que tivesse a propriedade de se encolher até a metade da sua extensão se fosse levada desta sala para outra. Uma propriedade que a tornaria inservível como escala em outras correlações.

Poderia ser prático, na enumeração de um conjunto, deixar de fora em certas circunstâncias alguns algarismos; enumerá-los: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10.

TS 222, p. 111

141. O que acontece quando alguém tenta fazer coincidir uma figura com a sua imagem especular pelo deslocamento no plano, e não consegue? Ele as coloca uma em cima da outra de diferentes modos; observa as partes não coincidentes, fica insatisfeito, e provavelmente diz: “isto *tem que* funcionar”, e coloca as figuras juntas novamente de outro modo.

O que acontece quando alguém tenta levantar um peso e não consegue porque o peso é muito grande? Ele toma uma posição, depois outra, pega o peso e tensiona este e aquele músculo, então desiste e dá talvez sinais de insatisfação.

Em que se mostra a impossibilidade geométrica, lógica, do primeiro *intento*?[67]

“Bem, ele teria podido mostrar com uma imagem, ou de outro modo, como parece ser o que ele aspira na segunda tentativa.” – Mas ele afirma que pode fazer isto também no primeiro caso, quando ele faz coincidir entre si duas figuras iguais, *congruentes*.

TS 222, p. 112

– O que devemos dizer agora? Que justamente estes dois casos são diferentes? Mas no segundo caso também se trata de imagem e realidade.

TS 222, p. 113

142. Was wir liefern, sind eigentlich Bemerkungen zur Naturgeschichte des Menschen; aber nicht kuriose Beiträge, sondern Feststellungen von Fakten, an denen niemand gezweifelt hat, und die dem Bemerktwerden nur entgehen, weil sie sich ständig vor unsern Augen herumtreiben.

TS 222, p. 114

143. Wir lehren jemand eine Methode, Nüsse unter Leute zu verteilen; ein Teil dieser Methode ist das Multiplizieren zweier Zahlen im Dezimalsystem.

Wir lehren jemand ein Haus errichten; dabei auch, wie er sich die genügenden Mengen von Material, etwa Brettern, anschaffen soll, hiezu eine Technik des Rechnens. Die Technik des Rechnens ist ein Teil der Technik des Hausbaues.

Leute verkaufen und kaufen Scheitholz; die Stöße werden mit einem Maßstab gemessen, die Maßzahlen der Länge, Breite, Höhe multipliziert, und was dabei herauskommt,

TS 222, p. 115

ist die Zahl der Groschen, die sie zu fordern und zu geben haben. Sie wissen nicht, ›warum‹ dies so geschieht, sondern sie machen es einfach so: so wird es gemacht. – Rechnen diese Leute nicht?

144. Wer so rechnet, muß er einen ›arithmetischen *Satz*‹ aussprechen? Wir lehren freilich die Kinder das Einmaleins in Form von *Sätzchen*, aber ist das wesentlich? Warum sollten sie nicht einfach: *rechnen lernen*? Und wenn sie es können, haben sie nicht Arithmetik gelernt?

145. Aber in welchem Verhältnis steht dann die *Begründung* eines Rechenvorgangs zu der Rechnung selbst?

146. »Ja, ich verstehe, daß dieser Satz aus diesem folgt.« – Verstehe ich, *warum* er folgt, oder verstehe ich nur, *daß* er folgt?

147. Wie, wenn ich gesagt hätte: Jene Leute zahlen für's Holz *auf Grund der Rechnung*; sie lassen sich die Rechnung als Beweis dafür gefallen, daß sie soviel zu zahlen haben. – Nun, es ist einfach eine Beschreibung ihres Vorgehens (Benehmens).

TS 222, p. 116

148. Jene Leute – würden wir sagen – verkaufen das Holz nach dem Kubikmaß — aber haben sie darin recht? Wäre es nicht richtiger, es nach dem Gewicht zu verkaufen – oder nach der Arbeitszeit des Fällens – oder nach der Mühe des Fällens, gemessen am Alter und an der Stärke des Holzfällers? Und warum sollten sie es nicht für einen Preis hergeben, der von alledem unabhängig ist: jeder Käufer zahlt ein und dasselbe, wieviel immer er nimmt (man hat etwa

TS 222, p. 113

142. O que oferecemos são propriamente observações sobre a história natural da humanidade; mas não contribuições curiosas, senão constatações de fatos dos quais ninguém duvida, e que só escapam de ser observados porque estão constantemente perambulando diante dos nossos olhos.[68]

TS 222, p. 114

143. Ensinamos para alguém um método, repartir nozes entre as pessoas; uma parte deste método é a multiplicação de dois números no sistema decimal.

Ensinamos alguém a erguer uma casa; e também como ele deve comprar a quantidade suficiente de material, de tábuas, por exemplo, e, por isto, uma técnica de cálculo. A técnica de cálculo é uma parte da técnica de construção de casas.

As pessoas vendem e compram lenha; as porções são medidas com uma escala, as medidas de comprimento, largura e altura, multiplicadas, e o que sai disto

TS 222, p. 115

são quantos tostões se pede e quanto se tem que dar. Eles não sabem 'por que' isto acontece assim, eles fazem simplesmente assim: e assim é feito. – Estas pessoas não calculam?

144. Quem calcula assim tem que proferir uma '*proposição* aritmética'? É sabido que ensinamos a tabuada às crianças na forma de *pequenas proposições*, mas isto é essencial? Por que elas não devem simplesmente: *aprender a calcular*? E se elas já o sabem, não aprenderam aritmética?

145. Mas então qual é a relação entre o *fundamento* de um processo de cálculo e o próprio cálculo?

146. "Sim, compreendo que esta proposição se segue daquela." – Compreendo *por que* ela se segue, ou só compreendo *que* ela se segue?

147. E se eu tivesse dito: aquelas pessoas pagam pela madeira *com base no cálculo*; elas tomam o cálculo como demonstração de quanto elas têm que pagar. – Ora, isto é simplesmente uma descrição do seu procedimento (comportamento).

TS 222, p. 116

148. Aquelas pessoas – diríamos – vendem madeira por medidas cúbicas — mas eles têm razão? Não seria mais correto vendê-la pelo peso – ou segundo o tempo de trabalho do corte – ou pelo esforço do corte, medido pela idade e força do madeireiro? E por que eles não deveriam passar adiante por um preço que for independente de tudo isto: todo comprador paga a mesma coisa, não importa quanto pegue (descrobre-se, por exemplo, que se pode viver assim). E há gefunden, daß man so leben kann). Und ist etwas dagegen zu sagen, daß man das Holz einfach verschenkt?

149. Gut; aber wie, wenn sie das Holz in Stöße von

TS 222, p. 117

beliebigen, verschiedenen Höhen schichteten und es dann zu einem Preis proportional der Grundfläche der Stöße verkauften?

Und wie, wenn sie dies sogar mit den Worten begründeten: »Ja, wer mehr Holz kauft, muß auch mehr zahlen.«

150. Wie könnte ich ihnen nun zeigen, daß – wie ich sagen würde – der nicht wirklich mehr Holz kauft, der einen Stoß von größerer Grundfläche kauft? – Ich würde z. B. einen, nach ihren Begriffen, kleinen Stoß nehmen und ihn durch Umlegen der Scheiter in einen ›großen‹ verwandeln. Das *könnte* sie überzeugen – vielleicht aber würden sie sagen: »ja, jetzt ist es *viel* Holz und kostet mehr« – und damit wäre es Schluß. – Wir würden in diesem Falle wohl sagen: sie meinen mit »viel Holz« und »wenig Holz« einfach nicht das Gleiche, wie wir; und sie haben ein ganz anderes System der Bezahlung, als wir.

151. (Eine Gesellschaft, die so handelt, würde uns vielleicht an die »Klugen Leute« in dem Märchen erinnern.)

152. Frege sagt im Vorwort der »Grundgesetze der Arithmetik«: »..... hier haben wir eine bisher unbekannte Art der Verrücktheit« – aber er hat nie angegeben, wie diese ›Verrücktheit‹ wirklich aussehen würde.

TS 222, p. 118

153. Worin besteht die Übereinstimmung der Menschen bezüglich der Anerkennung einer Struktur als Beweis? Darin, daß sie Worte als *Sprache* gebrauchen? Als das, was wir »Sprache« nennen.

Denke dir Menschen, die Geld im Verkehr gebrauchten, nämlich Münzen, die so aussehen wie unsere Münzen, aus Gold oder Silber sind und geprägt: und sie geben sie auch für Waren her — aber jeder gibt für die Waren, was ihm gerade gefällt und der Kaufmann gibt dem Kunden nicht mehr, oder weniger, je nachdem er bezahlt; kurz, dies Geld, oder was so aussieht, spielt bei ihnen eine ganz andere Rolle als bei uns. Wir würden uns diesen Leuten viel weniger verwandt fühlen, als solchen, die noch gar kein Geld kennen und eine primitive Art des Tauschhandels treiben. – »Aber die Münzen dieser Leute werden doch auch einen Zweck haben!« – Hat denn alles, was man tut, einen Zweck? Etwa religiöse Handlungen –.

Es ist schon möglich, daß wir geneigt wären, Menschen, die sich so benehmen, Verrückte zu nennen. Aber doch nennen wir nicht alle die Verrückte, die in den Formen unserer Kultur ähnlich handeln, Worte ›zwecklos‹ verwenden. (Denke an die Krönung eines Königs!)

alguma coisa a ser dito contra simplesmente doar a madeira?

149. Bem; mas e se eles venderem a madeira em porções aleatórias

TS 222, p. 117

empilhadas a diferentes alturas e por um preço proporcional à área das porções?

E se eles fundamentassem isto até mesmo com as palavras: "Olha, quem compra mais madeira tem que pagar mais também."[69]

150. Como poderia mostrar para eles agora que – como poderia dizer – realmente não compra mais madeira quem compra uma porção com área maior? Eu poderia, por exemplo, pegar uma porção menor, segundo o conceito deles, e convertê-la numa 'maior' deitando as lascas de lado. Isto *poderia* convencê-los – mas talvez eles dissessem: "Sim, agora é *muita* madeira e custa mais" – e acabaria deste jeito. – Nós poderíamos até dizer nestes casos: o que eles querem dizer com "muita madeira" e "pouca madeira" simplesmente não é o mesmo que nós; e eles têm um sistema de pagamento totalmente diferente do nosso.

151. (Uma sociedade que age assim talvez nos recordasse os "Espertalhões" da fábula.)[70]

152. Frege diz no prefácio das "Leis Básicas da Aritmética": "..... aqui nós temos um tipo até agora desconhecido de loucura" – mas ele nunca especificou que aspecto teria realmente essa 'loucura'.[71]

TS 222, p. 118

153. Em que consiste a concordância das pessoas com relação ao reconhecimento de uma estrutura como demonstração? Em que elas usam palavras como *linguagem*? Como aquilo que nós chamamos de "linguagem".

Imagine pessoas que usaram dinheiro nas transações, digamos, moedas que se parecem com as nossas, feitas de ouro ou prata e impressas: e elas também as dão em troca de mercadorias — mas cada um dá pelas mercadorias o que lhe parece bem, e o vendedor dá ao cliente nem mais nem menos do que corresponde ao que este paga; em síntese, este dinheiro, ou o que quer que isto seja, tem para eles um papel totalmente diferente do que tem para nós. Nos sentiríamos muito menos aparentados a este povo do que àqueles que ainda não conhecem nenhum dinheiro e estimulam uma espécie primitiva de escambo. – "Mas as moedas deste povo terão também uma finalidade!" – Então tudo o que se faz tem uma finalidade? Por exemplo, atos religiosos –.

É bem possível que estejamos inclinados a chamar pessoas que se comportam assim de loucas. Mas não chamamos de loucos todos os que agem parecido nas formas da nossa cultura, que empregam palavras 'sem finalidade'. (Pense na coroação de um rei!)

TS 222, p. 119

154. Zum Beweis gehört Übersichtlichkeit. Wäre der Prozeß, durch den ich das Resultat erhalte, unübersehbar, so könnte ich zwar das Ergebnis, daß diese Zahl herauskommt, ver-

TS 222, p. 120

merken – welche Tatsache aber soll es mir bestätigen? ich weiß nicht: ›was herauskommen *soll*‹.

TS 222, p. 121

155. Wäre es möglich, daß Leute heute eine unsrer Berechnungen durchgingen und von den Schlüssen befriedigt wären, morgen aber ganz andre Schlüsse ziehen wollen, und einen andern Tag wieder andere?

Ja, kann man sich nicht denken, daß dies mit einer *Gesetzmäßigkeit* so geschehe; daß, wenn er einmal *diesen* Übergang macht, er ›*eben darum*‹ das nächste Mal einen andern macht, und darum (etwa) das nächste Mal wieder den ersten? (Ähnlich, wie wenn in einer Sprache die Farbe, die einmal »rot« genannt wird, darum beim nächsten Male anders genannt würde und beim übernächsten wieder »rot«, usf.; dies könnte Menschen so natürlich sein. Man könnte es ein Bedürfnis nach Abwechslung nennen.)

TS 222, p. 122

156. Ist es nicht so: Solange man denkt, es kann nicht anders sein, zieht man logische Schlüsse.

Das heißt wohl: solange *das und das gar nicht in Frage gezogen wird*.

Die Schritte, welche man nicht in Frage zieht, sind logische Schlüsse. Aber man zieht sie nicht darum *nicht*

TS 222, p. 124

in Frage, weil sie ›sicher der Wahrheit entsprechen‹ – oder dergl. – sondern, dies ist es eben, was man ›Denken‹, ›Sprechen‹, ›Schließen‹, ›Argumentieren‹, nennt. Es handelt sich hier garnicht um irgendeine Entsprechung des Gesagten mit der Realität; vielmehr ist die Logik *vor* einer solchen Entsprechung; nämlich in dem Sinne, in welchem die Festlegung der Meßmethode *vor* der Richtigkeit oder Falschheit einer Längenangabe.

TS 222, p. 125

157. Wird es nun experimentell festgestellt, ob sich ein Satz aus dem andern ableiten läßt? – Es scheint, ja! Denn ich schreibe gewisse Zeichenfolgen hin, richte mich dabei nach gewissen Paradigmen – dabei ist es allerdings wesentlich, daß ich kein Zeichen übersehe, oder daß es sonstwie abhanden kommt – und was bei diesem Vorgang entsteht, davon sage ich, es folge. — Dagegen ist ein Argument dies: Wenn 2 und 2 Apfel nur 3 Apfel geben, d. h., wenn 3 Apfel daliegen, nachdem ich zwei und wieder zwei hingelegt habe, sage ich nun nicht: »2 + 2 ist also doch nicht immer 4«; sondern: »Einer muß irgendwie weggekommen sein«.

TS 222, p. 119

154. À demonstração pertence uma visibilidade panorâmica. Se estivesse obscuro o processo pelo qual obtenho o resultado, é certo que poderia reparar no produto que sai deste número

TS 222, p. 120

– mas que fato isto deve ratificar para mim? Eu não sei: ‘o que *deve* sair’.

TS 222, p. 121

155. Seria possível hoje que as pessoas revisassem nossos cálculos e se sentissem satisfeitas com as conclusões, mas amanhã quisessem tirar conclusões totalmente diferentes, e, num outro dia, conclusões novamente diferentes?

Ora, não se pode imaginar que isto acontecesse *conforme uma regularidade*; que se alguém dá *este* passo uma vez, ‘*justamente em razão disto*’ da próxima vez dá outro diferente, e em razão disto (por exemplo) na próxima vez dá novamente o primeiro? (Semelhante a como se numa língua a cor que foi uma vez chamada de “vermelho”, por esta razão na próxima vez fosse chamada de modo diferente, e na vez seguinte fosse chamada novamente de “vermelho”, e assim por diante; isto poderia ser natural para as pessoas. Poderia ser denominado como necessidade de variação.)[72]

TS 222, p. 122

156. Não é assim: enquanto se pensa que não pode ser diferente, tiram-se conclusões lógicas.

Supõe-se que isto signifique: enquanto *isto e isto não seja colocado em questão*.

Os passos que não se colocam em questão são inferências lógicas. Mas não se as coloca em questão *não*

TS 222, p. 124[73]

porque ‘correspondam com certeza à verdade’ – ou coisa parecida –, senão que isto é justamente o que se chama de ‘pensar’, ‘falar’, ‘inferir’, ‘argumentar’. Não se trata aqui, em absoluto, de alguma correspondência do dito com a realidade; mas antes que a lógica é *anterior* a esta correspondência; a saber, no sentido em que o estabelecimento do método de medida é *anterior* à correção ou incorreção de uma indicação de comprimento.[74]

TS 222, p. 125

157. Fica experimentalmente estabelecido que uma proposição se deriva de outra? – Ao que parece, sim! Pois anoto certas sequências de sinais, e, assim, julgo segundo certos paradigmas – ainda que nisto seja essencial que eu não negligencie nenhum sinal ou que o perca de algum modo – e do que resulta deste processo digo que é o que se segue. — Um argumento contra isto é este: se 2 mais 2 maçãs só dão 3 maçãs, ou seja, se ali estão 3 maçãs depois que eu coloquei duas e novamente duas maçãs, então não digo: “2 + 2 nem sempre é igual a 4”; mas que: “uma delas deve ter se extraviado de alguma forma”.

158. Aber inwiefern mache ich ein Experiment, wenn ich dem schon hingeschriebenen Beweis nur folge? Man könnte sagen: »Wenn du diese Kette von Umformungen ansiehst, – *kommt es dir nicht auch so vor, als stimmten* sie mit den Paradigmen?«

TS 222, p. 126

159. Wenn das also ein Experiment genannt werden soll, dann wohl ein psychologisches. – Der Anschein des Stimmens kann ja auf einer Sinnestäuschung beruhen. Und so ist es ja auch manchmal, wenn wir uns verrechnen.

Man sagt auch: »Das kommt mir heraus.« Und es ist doch wohl ein Experiment, das zeigt, daß dies *mir* herauskommt.

160. Man könnte sagen: Das Resultat des Experiments ist dies, daß ich, am Ende, beim Resultat des Beweises angelangt, mit Überzeugung sage: »Ja, es stimmt.«

TS 222, p. 127

161. Ist eine Berechnung ein Experiment? – Ist es ein Experiment, wenn ich morgens aus dem Bett steige? Aber könnte dies nicht ein Experiment sein, – welches zeigen soll, ob ich nach so und soviel Stunden Schlafes die Kraft habe, mich zu erheben?

TS 222, p. 128

Und was fehlt dieser Handlung dazu, dies Experiment zu sein? – Bloß, daß sie nicht zu diesem Zwecke, d. h., in der Verbindung mit einer solchen Untersuchung ausgeführt wird. *Experiment* ist etwas durch den Gebrauch, der davon gemacht wird.

TS 222, p. 129

Ist ein Experiment, in welchem wir die Beschleunigung beim freien Fall beobachten, ein physikalisches Experiment, oder ist es ein psychologisches, das zeigt, was Menschen, unter solchen Umständen, sehen? — Kann es nicht beides sein? Hängt das nicht von seiner *Umgebung* ab: von dem, was wir damit machen, darüber sagen?

TS 222, p. 130

162. Wenn man einen Beweis als Experiment auffaßt, so ist das Resultat des Experiments jedenfalls nicht das, was man das Resultat des Beweises nennt. Das Resultat der Rechnung ist der Satz, mit welchem sie abschließt; das Resultat des

TS 222, p. 131

Experiments ist: daß ich von diesen Sätzen durch diese Regeln zu diesem Satz geführt wurde.

163. Aber nicht daran haftet unser Interesse, daß die und die (oder alle) Menschen von diesen Regeln so geleitet worden sind (oder so gegangen sind); es gilt uns als selbstverständlich, daß

158. Mas em que medida faço um experimento se só sigo a demonstração já ali anotada? Poder-se-ia dizer: “quando você olha para esta cadeia de conversões, ¬– *também não sente como se ela estivesse em conformidade* com os paradigmas?”

TS 222, p. 126

159. Assim, se isto deve ser chamado de um experimento, então ele seria psicológico. A aparência de conformidade pode estar baseada numa ilusão dos sentidos. E é assim às vezes quando nos enganamos no cálculo.

Diz-se também: “Isto é o que resulta para mim.” E isto seria um experimento que mostra que isto resulta *para mim*.[75]

160. Poder-se-ia dizer: o resultado do experimento é este que eu, no fim, havendo chegado ao resultado da demonstração, digo com convencimento: “Sim, está certo.”

TS 222, p. 127

161. Um cálculo é um experimento? – Se levanto da cama de manhã isto é um experimento? Mas isto não poderia ser um experimento – que deve mostrar se tenho força para levantar depois de tantas horas assim de sono?

TS 222, p. 128

E[76] o que falta a esta ação para ser este experimento? – Só porque ela não tinha esta finalidade, isto é, ter sido conduzida em conexão com uma investigação deste tipo. Algo é um *experimento* pelo uso que dele é feito.

TS 222, p. 129

Um experimento em que observamos a aceleração de uma queda livre é físico, ou ele é psicológico porque mostra o que as pessoas veem nestas circunstâncias? — Ele não pode ser os dois? Isto não depende do seu *contexto*: do que fazemos com isto, dizemos sobre isto?

TS 222, p. 130

162. Se concebemos uma demonstração como experimento, então o resultado do experimento não é, em todo caso, o que chamamos de resultado da demonstração. O resultado do cálculo é a proposição com a qual o concluímos; o resultado do

TS 222, p. 131

experimento é: que eu, com estas proposições, mediante estas regras, fui conduzido a esta proposição.

163. Mas não atrai nosso interesse que tal e tal pessoa (ou todas elas) sejam guiadas assim por essas regras (ou vão desse jeito); o que conta para nós como evidente é que as pessoas – ‘se die Menschen – ›wenn sie richtig denken können‹ – *so* gehen. Wir haben jetzt aber einen *Weg* erhalten, sozusagen durch die Fußtapfen derer, die so gegangen sind. Und auf diesem Weg geht nun der Verkehr vor sich – zu verschiedenen Zwecken.

TS 222, p. 132

164. Erfahrung lehrt mich freilich, wie die Rechnung ausgeht; aber damit erkenne ich sie noch nicht an.

165. Die Erfahrung hat mich gelehrt, daß das diesmal herausgekommen ist, daß es für gewöhnlich herauskommt; aber sagt das der Satz der Mathematik? Die Erfahrung hat mich gelehrt, daß ich diesen Weg gegangen bin. Aber ist *das* die mathematische Aussage? – Was sagt er aber? In welchem Verhältnis steht er zu diesen Erfahrungssätzen? Der mathematische Satz hat die Würde einer Regel.

Das ist wahr daran, daß Mathematik Logik ist: sie bewegt sich in den Regeln unserer Sprache. Und das gibt ihr ihre besondere Festigkeit, ihre abgesonderte und unangreifbare Stellung.

Mathematik unter den Urmaßen niedergelegt.

166. Aber wie –, dreht sie sich in diesen Regeln *hin* und *her*? – Sie schafft *immer* neue und neue Regeln:

TS 222, p. 133

baut immer neue Straßen des Verkehrs; indem sie das Netz der alten weiterbaut.

167. Aber bedarf sie denn dazu nicht einer Sanktion? Kann sie das Netz denn *beliebig* weiterführen? Nun, ich könnte ja sagen: der Mathematiker erfindet immer neue Darstellungsformen. Die einen, angeregt durch praktische Bedürfnisse, andre aus ästhetischen Bedürfnissen, – und noch mancherlei anderen. Und denke dir hier einen Gartenarchitekten, der Wege für eine Gartenanlage entwirft; es kann wohl sein, daß er sie bloß als ornamentale Bänder auf dem Reißbrett zieht und garnicht daran denkt, daß jemand einmal auf ihnen gehen wird.

168. Der Mathematiker ist ein Erfinder, kein Entdecker.

169. Erfahrung lehrt, daß beim Auszählen, wenn wir die Finger einer Hand brauchen, oder irgend eine Gruppe von Dingen, die so | | | | | ausschaut, und an ihnen abzählen: Ich, Du, Ich, Du, etc., das erste Wort auch das letzte ist. »Aber *muß* es denn nicht so sein?« — Ist es denn so unvorstellbar, daß Einer die Gruppe | | | | | (z. B.) als Gruppe | | ‖ | |

TS 222, p. 134

sieht, in der die beiden Mittelstriche verschmolzen sind und dementsprechend den Mittelstrich zweimal zählt? (Ja, das Gewöhnliche ist es nicht. –)

podem pensar corretamente' – vão *desse jeito*. Agora, no entanto, resguardamos um *caminho* pelos rastros, por assim dizer, daqueles que foram desse jeito. E por este caminho passa agora o tráfego –[77] para diferentes finalidades.

TS 222, p. 132

164. Sabidamente, a experiência me ensina como acaba o cálculo; mas não é por isto que o reconheço.

165. A experiência me ensinou que o que resultou desta vez é o que usualmente resulta; mas é o que diz a proposição matemática? A experiência me ensinou que tomei este caminho. Mas é *este* o enunciado matemático? – O que ele diz, então? Em que relação ele se coloca com estas proposições da experiência? A proposição matemática tem a dignidade de uma regra.

Isto é verdadeiro com relação a que a matemática é lógica: ela se movimenta nas regras da nossa linguagem. E isto lhe dá a sua particular solidez, sua posição peculiar e invulnerável.

A matemática assentada nas métricas originárias.[78]

166. Mas como – se ela se vira para *lá* e para *cá* nessas regras? – Ela cria *sempre*[79] novas e novas regras:

TS 222, p. 133

constrói sempre novas rotas de tráfego; ampliando a rede das antigas.

167. Mas ela não precisa para isso de uma sanção? Ela pode dar continuidade à rede *arbitrariamente*? Agora poderia dizer: o matemático inventa sempre novas formas de apresentação. Algumas são provocadas por necessidades práticas, outras por necessidades estéticas, ¬– e ainda por outras necessidades diversas. Imagine aqui um paisagista que projeta caminhos no esboço de um jardim; pode bem ser que ele os desenhe na prancheta meramente como faixas ornamentais e nunca imagine que alguém algum dia caminhará sobre eles.

168. O matemático é um inventor, não um descobridor.[80]

169. A experiência ensina que na contagem, se nós precisamos dos dedos de uma mão, ou de algum outro grupo de coisas que se pareça com isto | | | | | para que os contemos: eu, você, eu, você etc., então a primeira palavra será também a última. "Mas isto não *tem que* ser assim mesmo?" — É assim tão inimaginável que alguém veja o grupo | | | | | (por exemplo) como o grupo | | ‖ | |,

TS 222, p. 134

no qual duas barras centrais estão aglutinadas e, de modo correspondente, a barra central se conta duas vezes? (Bem, normalmente isto não acontece. –)

170. Wie aber ist es, wenn ich Einen erst darauf aufmerksam mache, daß das Ergebnis des Auszählens durch den Anfang vorausbestimmt ist, und er es nun versteht und sagt: »Ja freilich, – es muß ja so sein!« Was ist das für eine Erkenntnis? – Er hat sich etwa das Schema aufgezeichnet:

I D I D I
| | | | |

Und sein Raisonnement ist etwa: »Es ist doch *so*, wenn ich auszähle. – Also muß ...... «

TS 222, p. 135

171. (Damit hängt zusammen: Wir möchten manchmal sagen, »es muß doch einen Grund haben, warum auf dieses Thema – in einem Sonatensatz etwa – gerade *das* Thema folgt«. Als Grund würden wir eine gewisse Beziehung der beiden Themen, eine Verwandtschaft, einen Gegensatz, oder dergleichen, anerkennen. – Aber wir können ja eine solche Beziehung konstruieren: sozusagen eine Operation, die das eine Thema aus dem andern erzeugt; aber damit ist uns nur gedient, wenn diese Beziehung eine uns wohlvertraute ist. Es ist also, als müßte die Folge dieser Themen einem in uns

TS 222, p. 148

schon vorhandenen Paradigma entsprechen.

Von einem Gemälde, das zwei menschliche Gestalten zeigt, könnte man ähnlich sagen: »Es muß einen Grund haben, warum gerade *diese* zwei Gesichter uns einen solchen Eindruck machen.« Wir möchten – heißt das – diesen Eindruck der beiden Gesichter wo anders wieder finden – in einem anderen Gebiet. – Aber ob er wieder zu finden ist?

Man könnte auch fragen: Welche Zusammenstellung von Themen hat eine *Pointe*, welche *keine*? Oder: *Warum* hat diese Zusammenstellung eine Pointe und *die* keine? Das mag nicht leicht zu sagen sein! Oft können wir sagen: »Diese entspricht einer Geste, diese nicht.«)

TS 222, p. 149

170. Mas e se eu primeiro chamar a atenção de alguém para o fato de que o resultado da contagem está predeterminado pelo começo, e que ele agora o compreende e diz: “Sim, é mesmo – isto tem que ser assim!”[81] Que tipo de conhecimento é este? – Ele talvez tenha registrado o esquema:[82]

I D I D I
| | | | |

E o seu raciocínio seja, por exemplo: “É *assim* mesmo quando eu conto. – Então tem que ......”

TS 222, p. 135

171. (Conecta-se [83] com isto: muitas vezes gostaríamos de dizer “Tem que haver uma razão pela qual após este tema – no movimento de uma sonata, por exemplo – segue-se imediatamente *este* tema”. Reconheceríamos como razão uma certa relação entre dois temas, um parentesco, uma oposição ou coisa parecida. – Mas podemos também reconstruir uma relação como esta: uma operação, por assim dizer, que produz um tema a partir do outro; mas ele só nos serve se esta relação for bem familiar para nós. É como se a sequência destes temas tivesse que corresponder a um

TS 222, p. 148

paradigma já existente em nós.

De uma pintura que mostra duas formas humanas pode-se dizer de maneira semelhante: “Tem que haver uma razão pela qual *estas* duas fisionomias nos provocam uma impressão como esta.” Gostaríamos – isto é o que significa – de encontrar novamente esta impressão das duas fisionomias em outro lugar – em um outro âmbito. – Mas ela pode ser encontrada novamente?

Poder-se-ia também perguntar: qual composição de temas tem uma *argúcia*, e qual *nenhuma*? Ou: *por que* esta composição tem uma argúcia e *esta* nenhuma? Pode ser que isto não seja fácil de dizer! Frequentemente podemos dizer: “Isto corresponde a um gesto, isto não.”)

TS 222, p. 149

Anhang I
(1938)

1. Könnte ich nicht sagen: zwei Wörter – schreiben wir sie »non« und »ne« – hätten dieselbe Bedeutung, sie seien beide Verneinungszeichen – aber

non non p = p

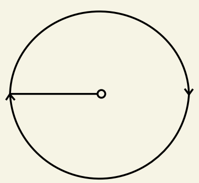
und

ne ne p = ne p?

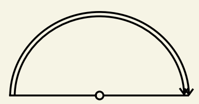
(In den Wortsprachen bedeutet eine doppelte Verneinung sehr oft eine Verneinung.) – Warum nenne ich dann aber beide »Verneinungen«? Was haben sie miteinander gemein? Nun, es ist klar, ein großer Teil ihrer Verwendung ist ihnen gemeinsam. Das löst aber unser Problem noch nicht. Denn wir möchten doch sagen: Auch, daß die doppelte Verneinung eine Bejahung ist, muß für beide stimmen, wenn wir nur die Verdoppelung entsprechend auffassen. Aber *wie*? – Nun so, wie es z. B. durch Klammern ausgedrückt werden kann:

(ne ne) p = ne p , ne (ne p) = p.

Wir denken gleich an einen analogen Fall der Geometrie: »Zwei halbe Drehungen addiert heben einander auf«, »Zwei halbe Drehungen addiert sind eine halbe Drehung«.



I



II

Es kommt eben darauf an, wie wir sie addieren. (Ob wir sie nebeneinander schalten, oder hintereinander.)

TS 222, p. 136

2. (Wir stoßen hier auf eine merkwürdige und charakteristische Erscheinung in philosophischen Untersuchungen: Die Schwierigkeit – könnte ich sagen – ist nicht, die Lösung zu finden, sondern, etwas als die Lösung anerkennen: Wir haben schon alles gesagt. – Nicht etwas, was daraus folgt, sondern eben *das* ist die Lösung!

Das hängt, glaube ich, damit zusammen, daß wir fälschlich eine Erklärung erwarten; während eine Beschreibung die Lösung der Schwierigkeit ist, wenn wir sie richtig in unsere Betrachtung einordnen. Wenn wir bei ihr verweilen und nicht versuchen, über sie hinauszukommen.)

3. »Das ist bereits alles, was sich darüber sagen läßt.« – »non non p« als Verneinung des verneinten Satzes *auffassen*, das ist im besondern Fall etwa: eine Erklärung der Art »non non p = non (non p)« geben.

Anexo I
(1938)

1. Não poderia dizer: as duas palavras – que escrevemos como “não” e “nem” – têm o mesmo significado, ambas são sinais de negação –, mas

não não p = p

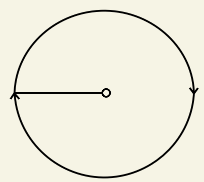
e

nem nem p = nem p?

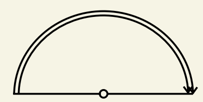
(Na língua falada uma dupla negação significa muitas vezes uma negação.) Então por que denomino as duas como “negações”? O que ambas têm em comum? Ora, é claro que uma grande parte do seu emprego é comum. Mas isto ainda não resolve o nosso problema. Pois mesmo assim gostaríamos de dizer: Também que tem que estar em conformidade com duas para que a dupla negação seja uma afirmação, se só concebemos a duplicação de maneira análoga. Mas *como*? – Bem, tal como pode ser expresso, por exemplo, por parênteses:

(nem nem) p = nem p, nem (nem p) = p.

Imaginamos logo um caso análogo da geometria:[84] “duas meias voltas somadas se anulam mutuamente”, “duas meias voltas somadas são uma meia volta”.



I



II

Isto depende justamente de como as somamos. (Se nós as acoplamos uma ao lado da outra, ou uma atrás da outra.)

TS 222, p. 136

2. (Aqui topamos com um fenômeno singular e característico das investigações filosóficas: a dificuldade – poderia dizer – não está em encontrar a solução, mas talvez em reconhecê-la como solução: nós já dissemos tudo. – Não é algo que se segue disto, mas justamente *esta* é a solução!

Isto se relaciona, acredito, com o fato de que esperamos erroneamente uma explicação; ao passo que uma descrição é a solução da dificuldade, se nós a dispusermos corretamente em nossa consideração. Se permanecemos com ela e não tentamos ir além dela.)[85]

3. “Isso já é tudo o que se pode dizer sobre aquilo.” –[86] *conceber* “não não p” como negação da proposição negada talvez seja no caso particular: dar uma explicação do tipo “não não p = não (não p)”.

4. »Wenn ›ne‹ eine Verneinung ist, so muß ›ne ne p‹, wenn es nur entsprechend aufgefaßt wird, gleich p sein.«

»Wenn man ›ne ne p‹ als Negation von p nimmt, muß man die Verdoppelung anders auffassen.«

Man möchte sagen: »›Verdoppelung‹ *heißt* dann etwas anderes, *darum* ergibt sie jetzt eine Verneinung«; also: daß sie jetzt eine Verneinung ergibt ist die Folge ihres anderen Wesens. »Ich meine sie jetzt als Verstärkung«, würde man sagen. Wir prüfen die Meinung durch den Ausdruck der Meinung.

TS 222, p. 137

5. Worin mag es gelegen haben, als ich die doppelte Verneinung sagte, daß ich sie als Verstärkung meinte? In den Umständen, unter denen ich den Ausdruck gebrauche, vielleicht in der Vorstellung die mir dabei vorschwebt, oder im Bild das ich anwendete, im Ton meiner Rede (wie ich auch im Ton die Klammern in »ne (ne p)« wiedergeben kann). Die Verdoppelung als Verstärkung meinen, entspricht dann dem: sie als Verstärkung aussprechen. Die Tätigkeit die Verdoppelung als Aufhebung meinen, war z. B. die Klammern zu setzen. – »Ja, aber diese Klammern selbst können doch verschiedene Rollen spielen; denn wer sagt, daß sie in ›non (non p)‹ im gewöhnlichen Sinn als Klammern aufzufassen seien und nicht z. B. die erste als Trennungsstrich zwischen den beiden ›non‹, die zweite als Schlußpunkt des Satzes?« – Niemand sagt es. Und du hast ja deine Auffassung jetzt wieder durch Worte ersetzt. Was die Klammern bedeuten, wird sich in ihrem Gebrauch zeigen und, in anderm Sinn, liegt es etwa im Rhythmus des Gesichtseindrucks von ›non (non p)‹.

6. Soll ich nun sagen: die Bedeutungen von »non« und »ne« seien *etwas* verschieden? Sie seien verschiedene Abarten der Verneinung? – Das würde niemand sagen. Denn, würde man einwenden, heißt dann »geh nicht in dieses Zimmer!« vielleicht nicht genau dasselbe wie gewöhnlich, wenn wir die Regel aufstellen »nicht nicht« solle als

TS 222, p. 138

Verneinung gebraucht werden? – Dagegen aber möchte man einwenden: »Wenn die beiden Satze ›ne p‹ und ›non p‹ ganz dasselbe sagen, wie kann dann ›ne ne‹ nicht dasselbe bedeuten wie ›non non‹?« Aber hier setzen wir eben einen Symbolismus voraus – d. h., nehmen einen zum Vorbild – in welchem aus »ne p = non p« folgt, daß »ne« und »non« in allen Fällen gleich verwendet werden.

Die Drehung um 180° und die Verneinung sind im besonderen Fall tatsächlich dasselbe, und die Anwendung des Satzes ›non non p = p‹ von der Art der Anwendung einer bestimmten Geometrie.

7. Was meint man damit: ›ne ne p‹, auch wenn es nach dem übereinkommen ›ne p‹ bedeutet, *könnte* auch als aufgehobene Verneinung gebraucht werden? – Man möchte sagen: »›ne‹, mit der Bedeutung, die wir ihm gegeben haben, könnte sich

4. “Se ‘nem’ é uma negação, então ‘nem nem p’ tem que ser igual a p se for concebido de maneira apropriada.”

“Se tomamos ‘nem nem p’ como negação de p, temos que conceber a duplicação de maneira diferente.”

Poder-se-ia dizer: “A ‘duplicação’ *significa* então algo diferente, *por isto* ela produz agora uma negação”; portanto: que ela produza agora uma negação é a consequência da sua diferente natureza. “Agora quero dizer que ela é como um reforço”, poder-se-ia dizer. Nós testamos o que queremos dizer pela expressão do que queremos dizer.[87]

TS 222, p. 137

5. O que pode ter acontecido quando proferi a dupla negação que quis dizer como reforço? Nas circunstâncias sob as quais uso a expressão, talvez na representação que ocorre na mente, ou na imagem que empreguei, no tom da minha fala (tom que também posso reproduzir entre parênteses em “nem (nem p)”). Querer dizer a duplicação como reforço corresponde então a: proferi-la como reforço. A atividade de querer dizer a duplicação como anulação, seria, por exemplo, colocar parênteses. – “Sim, mas estes mesmos parênteses podem desempenhar papéis diferentes; pois quem disse que eles são concebidos como parênteses no sentido usual em ‘não (não p)’, e não, por exemplo, o primeiro como travessão entre os dois ‘nãos’, e o segundo como ponto final da sentença?” – Ninguém disse isto. E você já trocou novamente a sua concepção por palavras. O que significam os parênteses se mostra em seu uso, e em outro sentido, consiste possivelmente no ritmo[88] da impressão visual do ‘não (não p)’.

6. Devo dizer agora: os significados de “não” e “nem” são diferentes em *algo*? Seriam gêneros diferentes de negação? – Ninguém diria isto. Pois não se poderia redarguir que “não vá para este quarto!” não significa talvez exatamente o mesmo que o usual se nós dispusermos que a regra “não não” deve

TS 222, p. 138

ser usada como negação? – Contra isto, porém, se poderia redarguir: “Se as proposições ‘nem p’ e ‘não p’ dizem exatamente o mesmo, como poderia então ‘nem nem’ não significar o mesmo que ‘não não’?” Mas aqui já pressupomos justamente um simbolismo – isto é, assumimos um como modelo – no qual de “nem p = não p” segue-se que “nem” e “não” empregam-se igualmente em todos os casos.

A volta de 180° e a negação são de fato, no caso particular, a mesma coisa, e o emprego da proposição ‘não não p = p’ é do mesmo tipo que o emprego de uma determinada geometria.

7. O que se quer dizer com: ‘nem nem p’, mesmo que concordemos que isto signifique ‘nem p’, *poderia* ser também usado como negação anulada? – Gostaríamos de dizer: “‘nem’, com o significado que lhe demos, só poderia

TS 222, p. 139

selbst aufheben, wenn wir es nur richtig applizieren«. Was meint man damit? (Die beiden halben Drehungen in der gleichen Richtung könnten einander aufheben, wenn sie entsprechend zusammengesetzt würden.) »Die *Bewegung* der Verneinung ›ne‹ ist imstande, sich selbst aufzuheben.« Aber wo ist diese Bewegung? Man möchte natürlich von einer geistigen Bewegung der Verneinung reden, zu deren Ausführung das Zeichen ›ne‹ nur das Signal gibt.

8. Wir können uns Menschen mit einer ›primitiveren‹ Logik denken, in der es etwas unserer Verneinung entsprechendes nur für gewisse Sätze gibt; für solche etwa, die keine Verneinung enthalten. In der Sprache dieser Menschen könnte man dann einen Satz wie »Er geht in dieses Haus« verneinen; sie würden aber eine Verdoppelung der Verneinung als bloße Wiederholung, nie als Aufhebung der Verneinung, verstehen.

9. Die Frage, ob für diese Menschen die Verneinung dieselbe Bedeutung hat, wie für uns, wäre dann analog der, ob die Ziffer ›2‹ für Menschen, deren Zahlenreihe mit 5 endigt, dasselbe bedeutet wie für uns.

TS 222, p. 140

10. Denke, ich fragte: Zeigt es sich uns klar, wenn wir die Sätze aussprechen »dieser Stab ist 1 m lang« und »hier steht 1 Soldat«, daß wir mit »1« verschiedenes meinen, da »1« verschiedene Bedeutung hat? – Es zeigt sich uns gar nicht. Besonders, wenn wir einen Satz sagen wie: »Auf je 1 m steht 1 Soldat, auf 2 m 2 Soldaten, usw.«. Gefragt, »Meinst du dasselbe mit den beiden Einsern«, würde man etwa antworten: »freilich meine ich dasselbe: – *eins*!« (wobei man etwa einen Finger in die Höhe hebt).

TS 222, p. 139

11. Wer »$\sim\sim p = p$« (oder auch »$\sim\sim p \equiv p$«) einen »notwendigen Satz der Logik« nennt (nicht, eine Bestimmung über die von uns angenommene Darstellungsart) der hat auch die Tendenz zu sagen,

TS 222, p. 140

dieser Satz gehe aus der Bedeutung der Verneinung hervor. Wenn in einer dialektischen Redeweise die verdoppelte Verneinung als Verneinung gebraucht wird, wie in »er hat nirgends nichts gefunden«, so sind wir geneigt, zu sagen: *eigentlich* heiße das, er habe überall etwas gefunden. Überlegen wir, was dieses »eigentlich« heißt! –

12. Angenommen, wir hätten zwei Systeme der Längenmessung; eine Länge wird in beiden durch ein Zahlzeichen ausgedrückt, diesem folgt ein Wort, welches das Maßsystem angibt. Das eine System bezeichnet eine Länge als »n Fuß« und Fuß ist eine Längeneinheit im gewöhnlichen Sinne; im andern System wird eine Länge mit »n W« bezeichnet und

1 Fuß = 1 W.

TS 222, p. 139

anular a si mesmo se o aplicássemos corretamente". O que se quer dizer com isto? (Duas meias voltas na mesma direção podem se anular mutuamente se forem combinadas de maneira apropriada.) "O *movimento* da negação 'nem' é capaz de anular a si mesmo." Mas onde está este movimento? Naturalmente, gostaríamos de falar de um movimento mental da negação cuja execução só é dada pelo sinal 'nem'.

8. Nós podemos imaginar pessoas com uma lógica 'primitiva' para as quais existe algo que corresponde à nossa negação apenas para certas proposições; por exemplo, para aquelas que não contenham nenhuma negação. Na língua destas pessoas uma frase como "Ele vai naquela casa" poderia ser negada; mas uma duplicação da negação seria compreendida como pura repetição, nunca como anulação da negação.

9. A pergunta se para essas pessoas a negação tem o mesmo significado que para nós seria então análoga a se o algarismo '2', para pessoas cuja sequência numérica termina em 5, significa o mesmo que para nós.

TS 222, p. 140

10. Imagine que eu perguntasse: mostra-se claramente para nós, quando proferimos as proposições "Esta barra tem 1 m de comprimento" e "Aqui tem 1 soldado", que com "1" queremos dizer coisas diferentes, que "1" tem um significado diferente? – Isto não se mostra em absoluto. Principalmente quando dizemos uma proposição como: "A cada 1 metro tem 1 soldado, a cada 2 m, 2 soldados etc.". Diante da pergunta sobre se "Você quer dizer o mesmo com os dois uns", possivelmente se respondesse: "Presumo que quis dizer o mesmo: – *um*!" (talvez até se levantasse um dedo para cima).

TS 222, p. 139[89]

11. Quem chama "$\sim\sim p = p$" (ou também "$\sim\sim p \equiv p$") de uma "proposição necessária da lógica" (e não de uma determinação sobre o que assumimos como um tipo de apresentação) tem também a tendência de dizer

TS 222, p. 140

que esta proposição provém do significado da negação. Quando se usa, no modo de falar de um dialeto, a dupla negação, tal como em "Ele não achou nada em nenhum lugar", então estaríamos inclinados a dizer: *propriamente* isto significa que ele encontrou algo em todos os lugares. Consideremos o que significa este "propriamente"! –[90]

12. Suponhamos que tivéssemos dois sistemas de medida de comprimento; um comprimento seria expresso em ambos os sistemas por um numeral seguido por uma palavra que assinala o sistema de medida. Um sistema designa um comprimento como "n pés", e pé é uma unidade de medida no sentido usual; no outro sistema, uma unidade de medida é designada como "n W", e

1 pé = 1 W

Aber: 2 W = 4 Fuß, 3 W = 9 Fuß, usw. – Also sagt der Satz »dieser Stock ist 1 W lang« dasselbe wie, »dieser Stock ist 1 Fuß lang«. Frage: Hat in diesen beiden Sätzen »W« und »Fuß« dieselbe Bedeutung?

13. Die Frage ist falsch gestellt. Das sieht man, wenn wir Bedeutungsgleichheit durch eine Gleichung ausdrücken. Die Frage kann dann nur lauten: »Ist W = Fuß, oder nicht?« – Die Sätze, in denen diese Zeichen stehen, verschwinden in dieser Betrachtung. – Ebenso wenig kann man natürlich in dieser Terrninologie

TS 222, p. 141

fragen, ob »ist« das gleiche bedeutet wie »ist«; wohl aber, ob »ε« das gleiche bedeutet wie »=«. Nun, wir sagten ja: 1 Fuß = 1 W, aber: Fuß ≠ W.

14. Hat »ne« dieselbe Bedeutung wie »non«? – Kann ich »ne« statt »non« setzen? – »Nun, an gewissen Stellen wohl, an andern nicht«. – Aber danach fragte ich nicht. Meine Frage war: kann man, ohne weitere Qualifikation, »ne« statt »non« gebrauchen? – Nein.

15. »›ne‹ und ›non‹ heißen in *diesem* Fall genau dasselbe.« – Und zwar *was*? – »Nun, man solle das und das *nicht* tun.« – Aber damit hast du nur gesagt, daß in diesem Fall ne p = non p ist und das leugnen wir nicht.

Wenn du erklärst: ne ne p = ne p, non non p = p, so gebrauchst du die beiden Worter eben in verschiedener Weise; und hält man dann an der Auffassung fest, daß, was sie in gewissen Kombinationen ergeben, von ihrer Bedeutung ›abhängt‹, der Bedeutung, die sie mit sich herumtragen, dann muß man also sagen, sie müssen verschiedene Bedeutungen haben, wenn sie, auf gleiche Weise zusammengesetzt, verschiedene Resultate ergeben können.

16. Man möchte etwa von der *Funktion*, der Wirkungsweise, des Wortes in diesem Satz reden. Wie von der Funktion eines Hebels in einer Maschine. Aber worin besteht diese Funktion? Wie

TS 222, p. 142

tritt sie zutage? Denn es ist ja nichts verborgen! Wir sehen ja den ganzen Satz. Die Funktion muß sich im Laufe des Kalküls zeigen.

Man will aber sagen: »›non‹ *tut* dasselbe mit dem Satz ›p‹, was ›ne‹ tut: es kehrt ihn um«. Aber das sind nur andere Worte für: »non p = ne p«. Immer wieder der Gedanke, das Bild, daß, was wir vom Zeichen sehen, nur eine Außenseite zu einem Innern ist, worin sich die eigentlichen Operationen des Meinens abspielen.

17. Wenn aber der Gebrauch des Zeichens seine Bedeutung ist, ist es nun nicht merkwürdig, daß ich sage, das Wort »ist« werde in zwei verschiedenen Bedeutungen (als ›ε‹ und ›=‹) gebraucht, und nicht sagen möchte, seine Bedeutung sei sein Gebrauch als Kopula und Gleichheitszeichen?

Mas: 2 W = 4 pés, 3 W = 9 pés, e assim por diante. – Portanto, a proposição “Este bastão tem 1 W de comprimento” diz o mesmo que a proposição “Este bastão tem 1 pé de comprimento”. Pergunta: “W” e “pé” têm o mesmo significado nas duas proposições?

13. A pergunta foi mal posta. Isto se vê quando expressamos a igualdade de significado por uma equação. Pois a pergunta só pode dizer: “W é = pé ou não?” – As proposições em que estes sinais ocorrem desaparecem mediante esta consideração. – Naturalmente, tampouco se pode perguntar nesta terminologia

TS 222, p. 141

se “é” significa o mesmo que “é”; mas sim se “ε” significa o mesmo que “=”. Pois bem, nós dissemos: 1 pé = 1 W, mas: pé ≠ W.

14. Teria “nem” o mesmo significado que “não”? – Posso colocar “nem” no lugar de “não”? – “Bem, em certos lugares sim, em outros não. – Mas eu não perguntei nada disto. Minha pergunta era: pode-se usar, sem qualquer qualificação, “nem” no lugar de “não”? – Não.

15. “‘nem’ e ‘não’ significam *neste* caso exatamente o mesmo.” – O *que*, então? – “Bem, que *não* se deve fazer isto e isto.” – Mas com isto você só disse que neste caso nem p = não p, e isto não o negamos.

Quando você explica: nem nem p = nem p, não não p = p, está usando justamente as duas palavras de forma diferente; e se você se aferra à concepção de que o que elas produzem em certas combinações ‘depende’ do seu significado, do significado que elas carregam consigo, então tem que se dizer que elas teriam que possuir significados diferentes quando elas, depois de compostas do mesmo modo, puderem produzir resultados diferentes.

16. Gostaríamos de falar, por exemplo, da *função*, do modo de efetuação da palavra nesta proposição. Como se fosse a função de uma alavanca em uma máquina. Mas em que consiste esta função? Como

TS 222, p. 142

se apresenta? Pois não há nada oculto! Nós vemos mesmo toda a proposição. A função[91] tem que se mostrar no decurso do cálculo.

Mas alguém dirá: “‘não’ *faz* o mesmo que ‘nem’ com a proposição p: ele a reverte”. Mas estas são apenas outras palavras para: “não p = nem p”.[92] Sempre de novo o pensamento, a imagem, do que vemos do sinal é só o lado de fora do interior onde se passam as operações reais do querer dizer.

17. Mas se o uso do sinal é o seu significado, não é então estranho que eu diga que a palavra “é” seja usada em dois significados diferentes (como ‘ε’ e ‘=’), e não tenha querido dizer que o seu significado é o seu uso como cópula e sinal de igualdade?

Poder-se-ia dizer que os dois tipos de uso não dão um significado; a união pessoal pela

Man möchte sagen, diese beiden Arten des Gebrauchs geben nicht eine Bedeutung; die Personalunion durch das gleiche Wort sei unwesentlich, sei bloßer Zufall.

18. Aber wie kann ich entscheiden, welches ein wesentlicher und welches ein unwesentlicher, zufälliger, Zug der Notation ist? Liegt denn eine Realität hinter der Notation, nach der sich ihre Grammatik richtet?

Denken wir an einen ähnlichen Fall im Spiel:

TS 222, p. 143

Im Damespiel wird eine Dame dadurch gekennzeichnet, daß man zwei Spielsteine aufeinanderlegt. Wird man nicht sagen, es sei für das Damespiel unwesentlich, daß eine Dame so gekennzeichnet wird?

19. Sagen wir: die Bedeutung eines Steines (einer Figur) ist ihre Rolle im Spiel. – Nun werde vor Beginn jeder Schachpartie durch das Los entschieden, welcher der Spieler Weiß erhält. Dazu hält ein Spieler in jeder geschlossenen Hand einen Schachkönig und der andere wählt auf gut Glück eine der Hände. Wird man es nun zur Rolle des Königs im Schachspiel rechnen, daß er beim Auslosen verwendet wird?

20. Ich bin also geneigt auch im Spiel zwischen wesentlichen und unwesentlichen Regeln zu unterscheiden. Das Spiel, möchte ich sagen, hat nicht nur Regeln, sondern auch einen Witz.

21. Wozu das gleiche Wort? Wir machen ja im Kalkül keinen Gebrauch von dieser Gleichheit! Wozu für Beides die gleichen Steine? – Aber was heißt es hier »von der Gleichheit Gebrauch machen«? Ist es denn nicht ein Gebrauch, wenn wir eben das gleiche Wort gebrauchen?

22. Hier scheint es nun, als hätte der Gebrauch des gleichen Worts, des gleichen Steines, einen *Zweck* – wenn die Gleichheit nicht zufällig, unwesentlich, ist. Und als sei der

TS 222, p. 144

Zweck, daß man den Stein wiedererkennen, und wissen könne, wie man zu spielen hat. Ist da von einer physikalischen oder einer logischen Möglichkeit die Rede? Wenn das Letztere, so gehört eben die Gleichheit der Steine zum Spiel.

23. Das Spiel soll doch durch die Regeln bestimmt sein! Wenn also eine Spielregel vorschreibt, daß zum Auslosen vor der Schachpartie die Könige zu nehmen sind, so gehört das, wesentlich, zum Spiel. Was könnte man dagegen einwenden? – Daß man den Witz dieser Regel nicht einsehe. Etwa, wie man auch den Witz einer Vorschrift nicht einsähe, jeden Stein dreimal umzudrehen, ehe man mit ihm zieht. Fänden wir diese Regel in einem Brettspiel, so würden wir uns wundern, und Vermutungen über den Ursprung, Zweck so einer Regel anstellen. (»Sollte diese Vorschrift verhindern, daß man ohne Überlegung zieht?«)

mesma palavra não é essencial, é puro acaso.

18. Mas como posso decidir qual traço da notação é essencial e qual não é essencial ou casual? Existiria uma realidade por detrás da notação pela qual se orienta a gramática?

Imaginemos um caso similar num jogo:

TS 222, p. 143

no jogo de damas, se distingue uma dama porque se coloca uma pedra em cima da outra. Não se diria que não é essencial para o jogo de damas que se distinga a dama assim?[93]

19. Digamos: o significado de uma pedra (de uma peça) é o seu papel no jogo. – Ora, decide-se pela sorte, antes do começo da partida de xadrez, qual dos jogadores fica com as brancas. Para isto, um dos jogadores segura um rei em cada mão fechada e o outro escolhe, ao azar, uma das mãos. Se levaria em conta agora, para o papel do rei no jogo de xadrez, que ele é empregado no sorteio?[94]

20. Assim, estou também inclinado no jogo a diferenciar entre regras essenciais e não essenciais. O jogo, gostaria de dizer, não tem somente regras mas também uma perspicácia.[95]

21. Para que a mesma palavra? Não fazemos no cálculo nenhum uso desta igualdade! Para que a mesma peça para os dois? – Mas o que significa aqui "fazer uso da igualdade"? Pois não é um uso justamente quando usamos a mesma palavra?[96]

22. Aqui parece agora como se o uso da mesma palavra, da mesma peça, tivesse uma *finalidade* – quando a igualdade não é casual, inessencial. E como se a

TS 222, p. 144

finalidade fosse a de se reconhecer a peça e se pudesse saber como se deve jogar. Trata-se aí de uma possibilidade física ou lógica? Se for da última, então a igualdade das peças pertence justamente ao jogo.[97]

23. O jogo deve ser, sim, determinado pelas regras! Por isto, se uma regra do jogo prescreve que se deve tomar os reis para fazer o sorteio antes do começo da partida de xadrez, então isto pertence essencialmente ao jogo. O que se poderia objetar contra isto? – Que não se enxergue a perspicácia desta regra. Mais ou menos como se não se enxergasse também a perspicácia de uma prescrição de dar três voltas em cada peça antes de se jogar com ela. Se encontrássemos esta regra num jogo de tabuleiro, ficaríamos surpresos e proporíamos hipóteses sobre a origem e a finalidade de uma regra assim. ("Deveria esta prescrição impedir que se jogue sem ponde-

24. »Wenn ich den Charakter des Spiels richtig verstehe«, könnte ich sagen, »so gehört das nicht wesentlich dazu«.

25. Denken wir uns aber die beiden Ämter in einer Person vereinigt wie ein altes Herkommen.

26. Man sagt: der Gebrauch des gleichen Wortes ist *hier* unwesentlich, weil die Gleichheit der Wortgestalt hier nicht dazu dient, einen Übergang zu vermitteln. Aber damit beschreibt man nur den Charakter des

TS 222, p. 145

Spiels, welches man spielen will.

TS 222, p. 145

27. »Was bedeutet das Wort ›a‹ im Satz ›F(a)‹«?

»Was bedeutet das Wort a im Satze Fa den du soeben ausgesprochen hast?«

»Was bedeutet das Wort … in diesem Satz?«

TS 222, p. 147

ração?”)[98]

24. “Se compreendo corretamente o caráter do jogo”, poderia dizer “então isto não pertence essencialmente a ele”.[99]

25. Imaginemos, no entanto, dois ofícios reunidos em uma só pessoa como uma velha tradição.

26. Dizemos: o uso da mesma palavra é inessencial *aqui* porque a igualdade da forma da palavra não serve aqui para mediar uma transição. Mas com isto só se descreva o caráter

TS 222, p. 145

do jogo que se quer jogar.

TS 222, p. 145

27. “O que significa a palavra ‘a’ na proposição ‘F(a)’”?

“O que significa a palavra a na proposição Fa que você pronunciou neste instante?”

“O que significa a palavra … nesta proposição?”[100]

TS 222, p. 147

Anhang II
(1938)

1. Das Überraschende kann in der Mathematik zweierlei völlig verschiedene Rollen spielen.

Man kann den Wert einer mathematischen Gedankenreihe darin erblicken, daß sie etwas uns überraschendes zutage fördert: – weil es von großem Interesse, von großer Wichtigkeit ist, zu sehen, wie ein *Sachverhalt* durch die und die Art seiner Darstellung überraschend, oder erstaunlich, ja paradox wird.

TS 224, p. 1

Hievon aber verschieden ist eine heute herrschende Auffassung, der das Überraschende, das Erstaunliche, darum als Wert gilt, weil es zeige, in welche Tiefe die mathematische Untersuchung dringt – wie wir den Wert eines Teleskops daran ermessen könnten, daß es uns Dinge zeigt, die wir ohne dieses Instrument nicht hätten *ahnen* können. Der Mathematiker sagt gleichsam: »Siehst du, das ist doch wichtig, das hattest du ohne mich nicht gewußt.« So als waren durch diese Überlegungen, als durch eine Art höheren Experiments, erstaunliche, ja die erstaunlichsten Tatsachen ans Licht gefördert worden.

2. Der Mathematiker aber ist kein Entdecker, sondern ein Erfinder.

TS 224, p. 2

»Die Demonstration hat ein überraschendes Resultat!« – Wenn es dich überrascht, dann hast du es noch nicht verstanden. Denn die Überraschung ist hier nicht legitim, wie beim

TS 224, p. 3

Ausgang eines Experiments. *Da* - möchte ich sagen - darfst du dich ihrem Reiz hingeben; aber nicht, wenn sie dir am Ende einer Schlußkette zuteil wird. Denn da ist sie nur ein Zeichen dafür, daß noch Unklarheit, oder ein Mißverständnis herrscht.

»Aber warum soll ich nicht überrascht sein, daß ich *dahin* geleitet worden bin?« – Denk dir du hättest einen langen algebraischen Ausdruck vor dir; es sieht zuerst aus, als ließe er sich nicht wesentlich kürzen; dann aber siehst du eine Möglichkeit der Kürzung und nun geht sie weiter, bis der Ausdruck zu einer kompakten Form zusammenschrumpft. Können wir nicht über dieses Resultat überrascht sein? (Beim Patience-Legen geschieht ähnliches.) Gewiß, und es ist eine angenehme Überraschung; und sie ist von psychologischem Interesse, denn sie zeigt ein Phänomen des Nicht-Überblickens und der Änderung des Aspekts eines gesehenen Komplexes. Es ist interessant, daß man es diesem Komplex nicht immer ansieht, daß er sich so kürzen läßt; ist aber der Weg der Kürzung übersichtlich vor unsern Augen, so verschwindet die Überraschung.

Wenn man sagt, man sei eben überrascht, daß man *dahin* geführt worden sei, so ist dies keine ganz richtige Darstellung des Sachverhalts. Denn diese Überraschung hat man doch nur

Anexo II
(1938)

1. O surpreendente pode cumprir na matemática duas espécies de papéis completamente diferentes.

Pode-se vislumbrar o valor de uma série de pensamentos em matemática no fato de pôr a descoberto algo surpreendente para nós: – porque é de grande interesse, de grande importância, ver como um *estado de coisas* se torna, mediante este ou aquele tipo de apresentação, surpreendente, ou assombroso e até paradoxal.

TS 224, p. 1

Diferente disto, porém, é uma concepção hoje dominante de que o surpreendente, o assombroso, conta como valor porque mostra a que profundidade penetra a investigação matemática – como se pudéssemos medir o valor de um telescópio pelo fato de que ele nos mostra coisas que, sem o instrumento, não teríamos podido *supor*. É como se o matemático dissesse: “Está vendo como isto é importante, você não saberia nada disto sem mim.” Como se mediante tais considerações, como que por um tipo de experiência superior, assombrosa, até mesmo os fatos mais assombrosos tivessem sido trazidos à luz.

2. Mas o matemático não é um descobridor, senão um inventor.

TS 224, p. 2

“A demonstração tem um resultado supreendente!” – Se te surpreende, então você ainda não compreendeu. Pois aqui a surpresa não é legítima, como a do

TS 224, p. 3

resultado final de um experimento. *Ali* – gostaria de dizer – você se permite se entregar à sua vibração; mas não quando ela calha de chegar ao fim de uma cadeia de inferências. Pois ali ela é só um sinal de que ainda domina a falta de clareza ou de compreensão.

“Mas por que não devo me surpreender de ter sido conduzido *até ali*?” – Imagine que você tenha uma expressão algébrica longa diante de si; à primeira vista poderia parecer que não é possível reduzi-la essencialmente; mas então você vê uma possibilidade de redução, e agora continua até que a expressão se encolha a uma forma compacta. Não poderíamos ficar surpresos com este resultado? (No jogo de paciência ocorre algo semelhante.) Certamente, e esta é uma surpresa agradável; e ela tem interesse psicológico, já que mostra o fenômeno da falta de um olhar panorâmico e da mudança de aspecto da visão de um complexo. É interessante que nem sempre se vê que este complexo pode ser reduzido deste modo; mas se o caminho da redução se apresenta panoramicamente diante dos nossos olhos, a surpresa desaparece.

Se dizemos que estamos surpresos justamente de termos sido guiados *até ali*, então esta não é uma apresentação totalmente correta de um estado de coisas. Porque esta surpresa só pode ocorrer se não se conhece ainda o caminho. Não quando se o tem totalmente diante dos dann, wenn man den Weg noch nicht kennt. Nicht, wenn man ihn ganz vor sich sieht. Daß dieser Weg, den ich ganz vor mir habe, da anfängt, wo er anfängt, und da aufhört, wo er aufhört, das ist keine Überraschung. Die Überraschung und das

TS 224, p. 4

Interesse kommen dann sozusagen von außen. Ich meine: man kann sagen, »Diese mathematische Untersuchung hat großes psychologisches Interesse«, oder »großes physikalisches Interesse«.

3. Ich staune immer wieder bei dieser Wendung des Themas; obwohl ich es unzählige Male gehört habe und es auswendig weiß. Es ist vielleicht sein *Sinn*, Staunen zu erwecken.

Was soll es dann heißen, wenn ich sage: ›Du *darfst* nicht staunen!‹?

Denke an mathematische Rätselfragen. Sie werden gestellt, weil sie überraschen; das ist ihr ganzer Sinn.

Ich will sagen: Du sollst nicht glauben, es sei hier etwas verborgen, in das man nicht Einsicht nehmen kann — als seien wir durch einen unterirdischen Gang gegangen und kamen nun irgendwo ans Licht, ohne aber wissen zu können, wie wir dahin gekommen sind, oder welches die Lage des Eingangs zum Ausgang des Tunnels sei.

Wie aber konnte man denn überhaupt in dieser Einbildung sein? Was gleicht in der Rechnung einer Bewegung unter der Erde? Was konnte uns denn dieses Bild nahelegen? Ich glaube: daß kein Tageslicht auf diese Schritte fällt; daß wir den Anfangs- und Endpunkt der Rechnung in einem Sinne verstehen, in dem wir den übrigen Gang der Rechnung nicht verstehen.

TS 224, p. 5

4. »Hier ist kein Geheimnis!« – aber wie konnten wir denn *glauben*, daß eines sei? – Nun, ich bin immer wieder den Weg gegangen und war immer wieder überrascht; und auf den Gedanken, daß man hier etwas *verstehen* kann, bin ich nicht gekommen. – »Hier ist kein Geheimnis«, heißt also: Schau dich doch um!

5. Ist es nicht, als sähe man in einer Rechnung eine Art Kartenaufschlagen? Man hat die Karten gemischt; man weiß nicht, was dabei vor sich ging: aber am Ende lag diese Karte obenauf, und dies bedeutet es komme Regen.

6. Unterschied zwischen dem Werfen des Loses und dem Auszählen vor einem Spiel. Könnten aber nicht naive Menschen auch im Ernstfalle statt einen Mann auszulosen sich des Auszählens bedienen?

7. Was tut der, der uns darauf aufmerksam macht, daß beim Auszählen das Ergebnis abgekartet ist?

olhos. Que este caminho, que tenho totalmente diante dos olhos, comece onde começa e termine onde termina, não causa nenhuma surpresa. A surpresa e o

TS 224, p. 4

interesse então chegam, por assim dizer, de fora. O que quero dizer é: pode-se dizer “Esta investigação matemática tem um grande interesse psicológico” ou “um grande interesse físico”.[101]

3. Constantemente me espanto com esta mudança do tema; mesmo que já o tenha ouvido por vezes incontáveis e o saiba de cor. Talvez seja o seu *sentido* a despertar o espanto.

Então o que deve significar quando digo: ‘Você não *tem permissão* de se espantar!’?

Pense nos enigmas matemáticos. Eles são formulados para surpreender; este é todo o seu sentido.

Gostaria de dizer: você não deve acreditar que haveria aqui algo oculto sobre o qual não se pode ter nenhum discernimento — como se tivéssemos caminhado por uma passagem subterrânea e depois chegado a algum lugar com luz, sem no entanto poder saber como chegamos ali e qual seria o lugar da entrada em relação à saída do túnel.

Mas como se pode sequer entrar numa fantasia como esta? A que se compara no cálculo uma caminhada por debaixo da terra? O que pode então nos sugerir esta imagem? Acredito: que nenhuma luz natural ilumina estes passos; que compreendemos o começo e o ponto final do cálculo em um sentido em que não compreendemos o resto do seu decurso.

TS 224, p. 5

4. “Não existe aqui nenhum mistério!” – mas como é que pudemos *acreditar* que houvesse? – Bem, eu percorri várias e várias vezes o caminho e fui supreendido várias e várias vezes; mas nunca cheguei a pensar que se pode *compreender* alguma coisa aqui. – “Não existe aqui nenhum mistério” significa portanto: olhe à sua volta![102]

5. Não seria como se víssemos no cálculo uma espécie de cartomancia? Embaralham-se as cartas; não se sabe o que está acontecendo: mas no fim esta carta foi virada para cima e isto significa que vai chover.

6. Diferença entre jogar a sorte e escolher por contagem antes de um jogo. Mas pessoas ingênuas não poderiam também servir-se numa emergência da escolha de uma pessoa pela contagem em vez de jogar a sorte?

7. O que faz aquele que nos chama a atenção de que pela escolha pela contagem o resultado já está combinado?

8. Ich will sagen: »Wir haben keinen Überblick über das, was wir gemacht haben, und deshalb kommt es uns geheimnisvoll vor«. Denn nun steht ein Resultat vor uns, und wir wissen nicht mehr, es ist uns nicht durchsichtig, wie wir dazu gekommen sind, aber wir sagen (wir haben

TS 224, p. 6

gelernt zu sagen): »so muß es sein«; und wir nehmen es hin – und staunen darüber. Könnten wir uns nicht diesen Fall denken: Jemand hat eine Reihe von Befehlen, von der Form »Du mußt jetzt das und das tun« einzeln auf Karten geschrieben. Er mischt diese Karten, liest die, welche obenauf zu liegen kommt – und sagt: Also, ich *muß das* tun? – Denn das Lesen eines geschriebenen Befehls macht nun einmal einen bestimmten Eindruck, hat eine bestimmte Wirkung. Und ebenso auch das Anlangen bei einer Schlußfolgerung. – Man könnte aber vielleicht den Bann eines solchen Befehls brechen, indem man diesem Menschen noch einmal klar vor Augen führt, *wie* er zu diesen Worten gekommen ist, und, was da geschehen ist, mit anderen Fallen vergleicht – indem man z. B. sagt: »Es hat dir doch niemand den Befehl gegeben!«.

Und ist es nicht auch *so*, wenn ich sage: »Hier ist kein Geheimnis«? – Er hatte ja, in gewissem Sinne, nicht geglaubt, daß ein Geheimnis vorliegt. Aber er war unter dem *Eindruck* des Geheimnisses (wie der Andere unter dem *Eindruck* eines Befehles). In *einem* Sinne kannte er ja die Situation, aber er verhielt sich zu ihr (im Gefühl und im Handeln) ›als läge ein andrer Sachverhalt vor‹ – wie wir sagen würden.

TS 224, p. 7

9. »Eine Definition führt dich doch nur wieder einen Schritt zurück, zu etwas anderem nicht Definiertern.« Was sagt uns das? Wußte das irgend jemand nicht? – Nein; aber

TS 224, p. 8

konnte er es nicht aus dem Auge verlieren?

10. Oder: »Wenn du schreibst

›1, 4, 9, 16, ... ‹, so hast du nur vier Zahlen angeschrieben, und vier Pünktchen« – worauf machst du da aufmerksam? Konnte jemand etwas anderes glauben? Man sagt Einem in so einem Falle auch: »Damit hast du weiter nichts hingeschrieben als vier Zahlzeichen und ein fünftes Zeichen – die Pünktchen«. Ja, wußte er das nicht? Aber kann er nicht doch sagen: Ja wirklich, ich habe die Pünktchen nie als *ein* weiteres Zeichen in dieser Zeichenreihe aufgefaßt, – sondern als eine Art Andeutung weiterer Zahlzeichen aufgefaßt.

11. Oder wie ist es, wenn man darauf aufmerksam macht, daß eine Linie im Sinne Euklids eine Farbengrenze ist und nicht ein Strich; und ein Punkt der Schnitt solcher Farbengrenzen und kein Tupfen? (Wie oft ist gesagt worden, daß man sich einen Punkt nicht vorstellen kann.)

8. Gostaria de dizer: “não temos nenhuma visão panorâmica sobre o que fazemos, e, por isto, nos parece misterioso”. Pois agora temos diante de nós um resultado e já não sabemos mais, não nos é transparente, como chegamos até ali, mas nós dizemos (nós aprendemos

TS 224, p. 6

a dizer): “tem que ser assim”; nós assumimos isto – e nos espantamos com isto. Não poderíamos imaginar este caso: Alguém escreveu individualmente em cartas uma série de ordens da forma “Agora você tem que fazer isto e isto”. Ele embaralha estas cartas e lê aquela que ficou no topo – e diz: Então eu *tenho que* fazer isto? – Pois a leitura de uma ordem escrita causa imediatamente uma certa impressão, tem um certo efeito. E da mesma forma também a chegada à conclusão da inferência. – Mas se poderia talvez quebrar o feitiço de uma ordem assim, colocando mais uma vez claramente diante dos olhos desta pessoa *como* ela chegou a estas palavras,[103] e o que ocorreu se comparado a outros casos – dizendo, por exemplo: “Ninguém te deu afinal esta ordem!”.

E não é também *assim* quando digo: “Não existe aqui nenhum mistério”? – Ele já não acreditava, em certo sentido, que houvesse um mistério. Mas estava sob a *impressão* do mistério (como o outro estava sob a *impressão* de uma ordem). Em *um* sentido ele conhecia a situação, mas se comportava em relação a ela (em sentimento e em ação) ‘como se se tratasse de um outro estado de coisas’ – como diríamos.

TS 224, p. 7

9. “Uma definição, de qualquer modo, só te leva novamente a um passo atrás, para outra coisa não definida.” O que nos diz isto? Ninguém sabia disto? – Não; mas

TS 224, p. 8

ele não poderia tê-lo perdido de vista?

10. Ou: “Se você escreve

‘1, 4, 9, 16, ...’, você só escreveu quatro números e quatro pontinhos” – sobre o que você está chamando a atenção aqui? Alguém poderia acreditar noutra coisa? Diz-se também para alguém em um caso assim: “Com isto você não escreveu nada mais do que quatro numerais e um quinto sinal – os pontinhos”. Bem, ele não sabia disto? Mas ele não poderia então dizer: Eu não considerei realmente os pontinhos como *um* sinal a mais nesta série de sinais, – mas os considerei como uma espécie de alusão de numerais adicionais.[103]

11. Ou o que aconteceria se alguém nos chamasse a atenção de que uma linha, no sentido de Euclides, é um limite entre cores e não um risco; e um ponto, uma intersecção neste limite de cores e não uma pinta? (Quantas vezes não se disse que não se pode representar um ponto.)[104]

12. Man kann in der Einbildung leben, denken – daß es sich so und so verhalt, ohne es zu *glauben*; d. h.: wenn man gefragt wird, so weiß man es, hat man aber nicht auf die Frage zu antworten, so weiß man es *nicht*,

TS 224, p. 9

sondern man handelt und denkt nach einer andern Ansicht.

13. Denn eine Ausdrucksform läßt uns so und so handeln. Wenn sie unser Denken beherrscht, so möchten wir trotz aller Einwendungen sagen: »in gewissem Sinne verhält es sich *doch* so«. Obwohl es gerade auf den ›gewissen Sinn‹ ankommt. (Ähnlich beinahe, wie es uns die Unehrlichkeit eines Menschen bedeutet, wenn wir sagen: er sei *kein Dieb*.)

TS 224, p. 10

12. Pode-se viver na ilusão, pensar – que isto acontece assim e assim, sem *acreditar* nisto; isto é, quando se pergunta, então se sabe, mas quando não se tem que responder a perguntas, então *não* se sabe,

TS 224, p. 9

mas se age e se pensa de acordo com a opinião do outro.

13. Pois uma forma de expressão nos permite agir assim e assim. Se ela domina o nosso pensamento, então, apesar de todas as objeções, gostaríamos de dizer: “*no entanto*, em certo sentido isto acontece assim”. Embora o que conta seja precisamente o ‘em certo sentido’. (Quase do mesmo jeito que se significa a desonestidade de uma pessoa quando se diz: ele disse que *não é ladrão*.)[105]

TS 224, p. 10

Anhang III
(1938)

1. Man kann sich leicht eine Sprache denken, in der es keine Frage- und keine Befehlsform gibt, sondern in der Frage und Befehl in der Form der Behauptung ausgedrückt wird, in Formen z. B., entsprechend unserem: »Ich möchte wissen, ob ....« und »Ich wünsche, daß ....«.

Niemand würde doch von einer Frage (etwa, ob es draußen regnet) sagen, sie sei wahr oder falsch. Es ist freilich deutsch, dies von einem Satz, »ich wünsche zu wissen, ob ....«, zu sagen. Wenn nun aber diese Form immer statt der Frage verwendet wird? –

2. Die große Mehrzahl der Sätze, die wir aussprechen, schreiben und lesen, sind Behauptungssätze.

Und – sagst du – diese Sätze sind wahr oder falsch. Oder, wie ich auch sagen könnte, mit ihnen wird das Spiel der Wahrheitsfunktionen gespielt. Denn die Behauptung ist nicht etwas, was zu dem Satz hinzutritt, sondern ein wesentlicher Zug des Spiels, das wir mit ihm spielen. Etwa vergleichbar dem Characteristikum des Schachspiels, daß es ein Gewinnen und Verlieren dabei gibt, und daß der gewinnt, der dem Andern den König nimmt. Freilich, es könnte ein dem Schach in gewissem Sinne sehr verwandtes Spiel geben, das darin besteht, daß man die Schachzüge macht, aber ohne daß es dabei ein Gewinnen und Verlieren gibt, oder die Bedingungen des Gewinnens sind andere.

TS 223, p. 1

3. Denke, man sagte: Ein Befehl besteht aus einem Vorschlag (›Annahme‹) und dem Befehlen des Vorgeschlagenen.

4. Könnte man nicht Arithmetik treiben, ohne auf den Gedanken zu kommen, arithmetische *Sätze* auszusprechen, und ohne daß uns die Ähnlichkeit einer Multiplikation mit einem Satz je auffiele?

Aber würden wir nicht den Kopf schütteln, wenn Einer uns eine falsch gerechnete Multiplikation zeigte, wie wir es tun, wenn er uns sagt, es regne, wenn es nicht regnet? – Doch; und hier liegt ein Punkt der Anknüpfung. Wir machen aber auch abwehrende Gesten, wenn unser Hund z. B. sich nicht so benimmt, wie wir es wünschen.

Wir sind gewohnt, zu sagen »2 mal 2 ist 4« und das Verbum »ist« macht dies zum Satz und stellt scheinbar eine nahe Verwandtschaft her mit allem, was wir ›Satz‹ nennen. Während es sich nur um eine sehr oberflächliche Beziehung handelt.

TS 223, p. 2

Anexo III
(1938)

1. Pode-se [106] facilmente imaginar uma língua em que não exista uma forma para pergunta ou para ordem, senão que a pergunta e a ordem estejam expressas na forma da asserção, em formas, por exemplo, correspondentes ao nosso: "Gostaria de saber se ...." e "Desejaria que ....".

Ninguém diria de uma pergunta (por exemplo, se está chovendo lá fora) que ela é verdadeira ou falsa. De todo modo, faz parte do português dizer isto de uma sentença como "desejaria saber se ....". Mas e se agora esta forma for sempre empregada em vez da pergunta? –

2. A grande maioria das sentenças que proferimos, escrevemos e lemos são sentenças de afirmação.

E – você diz – estas sentenças são verdadeiras ou falsas. Ou, como eu poderia também dizer, o jogo das funções de verdade é jogado com elas. Pois a afirmação não é algo que se insere na sentença, mas um traço essencial do jogo que com ela jogamos. Comparável, digamos, à caraterística do jogo de xadrez, que tem um ganhador e um perdedor, e o ganhador é aquele que toma o rei do outro. De todo modo, poderia haver, em certo sentido, um jogo muito parecido ao xadrez, que consistisse em fazer jogadas de xadrez, mas sem que houvesse um ganhador e um perdedor, ou em que as condições para vencer fossem outras.

TS 223, p. 1

3. Imagine que se dissesse: uma ordem consiste em uma proposta ('suposição') e no ordenar do proposto.[107]

4. Não se poderia exercer a aritmética sem ter o pensamento de proferir *proposições* aritméticas, e sem jamais nos darmos conta da semelhança entre uma multiplicação e uma proposição?

Mas não sacudiríamos a cabeça se alguém nos mostrasse uma multiplicação mal calculada, tal como fazemos quando alguém nos diz que está chovendo quando não está chovendo? – Ah, sim; e aqui está um ponto de conexão. Mas também fazemos gestos de reprovação quando o nosso cão, por exemplo, não se comporta do modo como queremos.

Estamos acostumados a dizer "2 vezes 2 são quatro" e o verbo "ser" faz disto uma proposição, e estabelece aparentemente um parentesco próximo com tudo aquilo que chamamos de 'proposição'. Embora se trate apenas de uma relação muito superficial.

TS 223, p. 2 [108]

5. Gibt es wahre Sätze in Russells System, die nicht in seinem System zu beweisen sind? – Was nennt man denn einen wahren Satz in Russells System?

6. Was heißt denn, ein Satz ›*ist wahr*‹? p *ist wahr* = p. (dies ist die Antwort.)

Man will also etwa fragen: unter welchen Umständen behauptet man einen Satz? Oder: wie wird die Behauptung des Satzes im Sprachspiel gebraucht? Und die »Behauptung des Satzes« ist hier entgegengesetzt dem Aussprechen des Satzes etwa als Sprachübung, – oder als *Teil* eines andern Satzes, u. dergl.

Fragt man also in diesem Sinne: »Unter welchen Umständen behauptet man in Russells Spiel einen Satz?«, so ist die Antwort: Am Ende eines seiner Beweise, oder als ›Grundgesetz‹ (Pp.). Anders werden in diesem System Behauptungssätze in den Russellschen Symbolen nicht verwendet.

7. »Kann es aber nicht wahre Sätze geben, die in diesem Symbolismus angeschrieben sind, aber in dem System Russells nicht beweisbar?« – ›Wahre Sätze‹, das sind also Sätze, die in einem *andern* System wahr sind, d. h. in einem andern Spiel mit Recht behauptet werden können. Gewiß: warum soll es keine solchen Sätze geben; oder vielmehr: warum soll man nicht Sätze – der Physik, z. B. – in Russells Symbolen anschreiben? Die Frage ist ganz analog der: Kann es wahre

TS 223, p. 3

Sätze in Euklids Sprache geben, die in seinem System nicht beweisbar, aber wahr sind? – Aber es gibt ja sogar Sätze, die in Euklids System beweisbar, aber in einem andern System *falsch* sind. Können nicht Dreiecke – in einem andern System – ähnlich (*sehr* ähnlich) sein, die nicht gleiche Winkel haben? – »Aber das ist doch ein Witz! Sie sind ja dann nicht im selben Sinne einander ›ähnlich‹!« – Freilich nicht; und ein Satz, der nicht in Russells System zu beweisen ist, ist in anderm Sinne »wahr« oder »falsch«, als ein Satz der ›Principia Mathematica‹.

8. Ich stelle mir vor, es fragte mich Einer um Rat; er sagt: »Ich habe einen Satz (ich will ihn mit »P« bezeichnen) in Russells Symbolen konstruiert, und den kann man durch gewisse Definitionen und Transformationen so deuten, daß er sagt: ›P ist nicht in Russells System beweisbar‹. Muß ich nun von diesem Satz nicht sagen: einerseits er sei wahr, anderseits er sei unbeweisbar? Denn angenommen, er wäre falsch, so ist es also wahr, daß er beweisbar ist! Und das kann doch nicht sein. Und ist er bewiesen, so ist bewiesen, daß er nicht beweisbar ist. So kann er also nur wahr, aber unbeweisbar sein.«

So wie wir fragen: »in welchem System ›beweisbar‹?«, so müssen wir auch fragen: »in welchem System ›wahr‹?«. ›In Russells System wahr‹ heißt, wie gesagt: in Russells

TS 223, p. 4

System bewiesen; und ›in Russells System falsch‹ heißt: das Gegenteil sei in Russells System bewiesen. – Was heißt nun dein: »angenommen, er sei falsch«? *In Russells Sinne* heißt es: ›an-

5. Há proposições verdadeiras no sistema de Russell que não podem ser demonstradas no seu sistema? – O que se chama então de uma proposição verdadeira no sistema de Russell?

6. O que significa então que uma proposição ‘*é verdadeira*’? p *é verdadeiro* = p.[109] (esta é a resposta.)

Por isto, pode-se perguntar por exemplo: sob que circunstâncias se assere uma proposição? Ou: como se usa a asserção da proposição no jogo de linguagem? E a “asserção da proposição” está aqui contraposta ao proferimento da proposição como, por exemplo, exercício de linguagem – ou como *parte* de uma outra proposição, ou coisas semelhantes.

Pergunta-se, portanto, neste sentido: “Sob que circunstâncias se assere no jogo de Russell uma proposição?”, e assim é a resposta: Ao final de uma das suas demonstrações, ou como ‘lei fundamental’ (Pp.).[110] Não se emprega nada diferente disto neste sistema de asserção de proposições do simbolismo de Russell.

7. “Mas não pode haver proposições verdadeiras escritas nesse simbolismo, mas que não são demonstráveis no sistema de Russell?” – ‘Proposições verdadeiras’ são assim proposições que são verdadeiras em *outro* sistema, isto é, que podem ser asseridas legitimamente em outro jogo. Certamente: por que não deveria haver tais proposições; ou antes: por que não se escreveriam proposições – da física, por exemplo – no simbolismo de Russell? A pergunta é totalmente análoga a: pode haver

TS 223, p. 3

proposições verdadeiras na linguagem de Euclides, que não são demonstráveis no seu sistema mas que sejam verdadeiras? Mas há mesmo proposições que são demonstráveis no sistema de Euclides e são *falsas* em outro sistema. Não pode haver triângulos semelhantes (*muito* semelhantes) – em outro sistema – que não têm ângulos iguais? – “Mas isto é só uma piada! Pois eles não são ‘semelhantes’ entre si no mesmo sentido!” – É claro que não; e uma proposição que não se pode demonstrar no sistema de Russell é “verdadeira” ou “falsa” em sentido diferente do que o de uma proposição do ‘Principia Mathematica’.

8. Imagino[111] alguém que me pede um conselho; ele diz: “Construí uma proposição (vou designá-la como “P”) com os símbolos de Russell, e mediante certas definições e transformações pode-se interpretá-la como dizendo: ‘P não é demonstrável no sistema de Russell’. Não teria que dizer agora desta proposição: por um lado ela é verdadeira, por outro lado ela é indemonstrável? Pois se assumimos que ela é falsa, então é verdadeiro que ela é demonstrável! E, de qualquer forma, isto não pode ser. E se ela é demonstrável, então é demonstrável que ela é não demonstrável. Assim, ela só pode ser verdadeira mas indemonstrável.”

Assim como perguntamos: “‘demonstrável’ em que sistema?”, temos também que perguntar: “‘verdadeira’ em que sistema?”. ‘Verdadeira no sistema de Russell’ significa, como dissemos: demonstrada

TS 223, p. 4

no sistema de Russell; e ‘falsa no sistema de Russell’ significa: demonstrado o oposto no sistema genommen das Gegenteil sei in Russells System bewiesen‹; *ist das deine Annahme*, so wirst du jetzt die Deutung, er sei unbeweisbar, wohl aufgeben. Und unter dieser Deutung verstehe ich die Übersetzung in diesem deutschen Satz. – Nimmst du an, der Satz sei in Russells System beweisbar, so ist er damit *in Russells Sinne* wahr und die Deutung »P ist nicht beweisbar« ist wieder aufzugeben. Nimmst du an, der Satz sei in Russells Sinne wahr, so folgt das *Gleiche*. Ferner: soll der Satz in einem andern als Russells Sinne falsch sein: so widerspricht dem nicht, daß er in Russells System bewiesen ist. (Was im Schach »verlieren« heißt, kann doch in einem andern Spiel das Gewinnen ausmachen.)

9. Was heißt es denn: »P« und »P ist unbeweisbar« seien der gleiche Satz? Es heißt, daß diese *zwei* deutschen Sätze in der und der Notation *einen* Ausdruck haben.

10. »Aber P kann doch nicht beweisbar sein, denn, angenommen es wäre bewiesen, so wäre der Satz bewiesen,

TS 223, p. 5

er sei nicht beweisbar.« Aber wenn dies nun bewiesen wäre, oder wenn ich glaubte – vielleicht durch Irrtum – ich hätte es bewiesen, warum sollte ich den Beweis nicht gelten lassen und sagen, ich müsse meine Deutung »*unbeweisbar*« wieder zurückziehen?

11. Nehmen wir an, ich beweise die Unbeweisbarkeit (in Russells System) von P; so habe ich mit diesem Beweis P bewiesen. Wenn nun dieser Beweis einer in Russells System wäre, – dann hätte ich also zu gleicher Zeit seine Zugehörigkeit und Unzugehörigkeit zum Russellschen System bewiesen. – Das kommt davon, wenn man solche Sätze bildet. – Aber hier ist ja ein Widerspruch! – Nun so ist hier ein Widerspruch. Schadet er hier etwas?

12. Schadet der Widerspruch, der entsteht wenn Einer sagt: »Ich lüge. – Also lüge ich nicht. – Also lüge ich. – etc.«? Ich meine: ist unsere Sprache dadurch weniger brauchbar, daß man in diesem Fall aus einem Satz nach den gewöhnlichen Regeln sein Gegenteil und daraus wider ihn folgern kann? – der Satz *selbst* ist unbrauchbar, und ebenso dieses Schlüsseziehen; aber warum soll man es nicht tun? – Es ist eine brotlose Kunst! – Es ist ein Sprachspiel, das Ähnlichkeit mit dem Spiel des Daumenfangens hat.

TS 223, p. 6

13. Interesse erhält so ein Widerspruch nur dadurch, daß er Menschen gequält hat und dadurch zeigt, wie aus der Sprache quälende Probleme wachsen können; und was für Dinge uns quälen können.

de Russell. – O que significa agora o seu: “se assumimos que ela é falsa”? *No sentido de Russell* isto significa: ‘se assumimos o oposto do que está demonstrado no sistema de Russell’; *se esta é a sua assunção*, então você abandonaria agora a interpretação de que ela é indemonstrável. E com esta interpretação eu compreendo a tradução nesta proposição em português. – Se você assume que a proposição é demonstrável no sistema de Russell, então com isto ela é verdadeira *no sentido de Russell*, e a interpretação “P não é demonstrável” tem que ser abandonada novamente. Se você assume que a proposição é verdadeira no sentido de Russell, então segue-se o *mesmo*. Além disso: se a proposição deve ser falsa em um sentido diferente do que o de Russell: então ela não o contradiz por ser demonstrada no sistema de Russell. (O que significa “perder” no xadrez pode constituir vitória em outro jogo.)[112]

9. Pois o que significa: “P” e “P é indemonstrável” são a mesma proposição? Significa que estas *duas* proposições em português têm *uma* expressão em tal e tal notação.[113]

10. “Mas P não pode mesmo ser demonstrável, pois se assumimos que tivesse sido demonstrada, então estaria demonstrada a proposição

TS 223, p. 5

de que ela não é demonstrável.” Mas se isto fosse mesmo demonstrado, ou se eu acreditasse – talvez erroneamente – que o tivesse demonstrado, por que não deixaria valer a demonstração e dizer que eu teria que voltar a retirar minha interpretação de “*indemonstrável*”?

11. Suponhamos que demonstre a indemonstrabilidade de P (no sistema de Russell); então demonstrei P com esta demonstração. Se esta demonstração estivesse mesmo no sistema de Russell, – teria agora demonstrado ao mesmo tempo a sua pertinência e a sua não pertinência ao sistema Russelliano. – Isto é o que acontece quando se constrói tais sentenças. – Mas aqui tem uma contradição! – Bem, então aqui tem uma contradição. Ela prejudica alguma coisa aqui?

12. Prejudica a contradição que se produz quando alguém diz: “Minto. – Portanto, não minto. – Portanto, minto. – etc.”? Quero dizer: a nossa língua fica menos utilizável pelo fato de que neste caso se pode, pelas regras usuais, derivar de uma proposição o seu contrário, e a partir dali outro contrário? – a *própria* proposição não é utilizável, assim como esta conclusão; mas por que não se deve fazê-lo? – É uma arte sem proveito! – É um jogo de linguagem que guarda semelhança com o jogo de pega-dedos.[114]

TS 223, p. 6

13. Uma contradição como essa só conserva o seu interesse porque atormentou as pessoas e porque mostra como problemas tormentosos podem se avultar na linguagem; e que tipo de coisas podem nos atormentar.

14. Ein Beweis der Unbeweisbarkeit ist quasi ein geometrischer Beweis; ein Beweis, die Geometrie der Beweise betreffend. Ganz analog einem Beweise etwa, daß die und die Konstruktion nicht mit Zirkel und Lineal ausführbar ist. Nun enthält so ein Beweis ein Element der Vorhersage, ein physikalisches Element. Denn als Folge dieses Beweises sagen wir ja einem Menschen: »Bemüh' dich nicht, eine Konstruktion (der Dreiteilungdes Winkels, etwa) zu finden, – man kann beweisen, daß es nicht geht.« Das heißt: es ist wesentlich, daß sich der Beweis der Unbeweisbarkeit in dieser Weise soll anwenden lassen. Er muß – könnte man sagen – für uns ein *triftiger Grund* sein, die Suche nach einem Beweis (also einer Konstruktion der und der Art) aufzugeben.

Ein Widerspruch ist als eine solche Vorhersage unbrauchbar.

15. Ob etwas mit Recht der Satz genannt wird »χ ist unbeweisbar«, hängt davon ab, wie wir diesen Satz beweisen. Nur der Beweis zeigt, was als das Kriterium der Unbeweisbarkeit gilt. Der Beweis ist ein Teil des Systems von Operationen, des Spiels, worin der Satz gebraucht wird, und zeigt uns seinen ›Sinn‹.

Es ist also die Frage ob der ›Beweis der Unbeweisbarkeit‹ von P hier ein triftiger Grund ist zur Annahme daß ein Beweis von P nicht gefunden werden wird.

TS 223, p. 7

16. Der Satz »p ist unbeweisbar« hat einen andern Sinn, nachdem – als ehe er bewiesen ist.

Ist er bewiesen, so ist er die Schlußfigur des Unbeweisbarkeitsbeweises. – Ist er unbewiesen, so ist ja noch nicht *klar*, *was* als Kriteriurn seiner Wahrheit zu gelten hat, und sein Sinn ist – kann man sagen – noch verschleiert.

17. Wie, soll ich nun annehmen, ist P bewiesen? Durch einen Unbeweisbarkeitsbeweis? oder auf eine andere Weise? Nimm an, durch einen Unbeweisbarkeitsbeweis. Nun, um zu sehen, *was* bewiesen ist, schau an den Beweis! Vielleicht ist hier bewiesen, daß die und die Form des Beweises nicht zu P führt. – Oder, es sei P auf eine direkte Art bewiesen – wie ich einmal sagen will –, dann folgt also der Satz »P ist unbeweisbar«, und es muß sich nun zeigen, wie diese Deutung der Symbole von P mit der Tatsache des Beweises kollidiert und warum sie hier aufzugeben sei.

Angenommen aber, ~ P sei bewiesen. – *Wie* bewiesen? Etwa dadurch, daß P direkt bewiesen ist – denn daraus folgt, daß es beweisbar ist, also ~ P. Was soll ich nun aussagen: »P«, oder »~P«? Warum nicht beides? Wenn mich jemand fragt: »Was ist der Fall – P, oder nicht-P?«, so antworte ich: »⊢P« steht am Ende eines Russellschen Beweises, du schreibst also im Russellschen System: »⊢P«; anderseits ist es aber eben beweisbar und dies drückt man durch »⊢~P«

TS 223, p. 8

aus, dieser Satz aber steht nicht am Ende eines Russellschen Beweises, gehört also nicht zum Russellschen System. – Als die Deutung »P ist unbeweisbar« für P gegeben wurde, da kannte man ja diesen Beweis für P nicht und man kann also nicht sagen, »P« sage: *dieser* Beweis existierte nicht. – Ist der Beweis hergestellt, so ist damit eine *neue Lage* geschaffen: Und wir haben

14. Uma demonstração da indemonstrabilidade é como se fosse uma demonstração geométrica; uma demonstração a respeito da geometria da demonstração. Totalmente análoga, por exemplo, a uma demonstração de que tal e tal construção não é exequível com compasso e régua. Bem, uma demonstração como esta contém um elemento de previsão, um elemento físico. Pois como consequência desta demonstração dizemos para uma pessoa: “Não se esforce para achar uma construção (da trissecção de um ângulo, por exemplo), – pode-se demonstrar que isto não funciona.” Isto significa: é essencial que a demonstração da indemonstrabilidade deva ser aplicável desta forma. Ela tem que ter para nós – poder-se-ia dizer – uma *razão convincente* para abandonar a busca por uma demonstração (ou seja, por uma construção de tal e tal tipo).

Uma contradição é inutilizável como uma previsão assim.[115]

15. Depende de como demonstramos uma proposição para que ela seja chamada com razão de “χ é indemonstrável”. Só a demonstração mostra o que vale como critério de indemonstrabilidade. A demonstração é uma parte do sistema de operações, do jogo no qual a proposição é usada e nos mostra o seu ‘sentido’.

A questão, assim, é se a ‘demonstração de indemonstrabilidade’ de P é aqui uma razão convincente para a suposição de que não será achada uma demonstração de P.[116]

TS 223, p. 7

16. A proposição “p é indemonstrável” tem um outro sentido depois – comparado a antes de ser demonstrada.

Se está demonstrada, então ela é o termo final da demonstração de indemonstrabilidade. – Se não está demonstrada, então ainda não está *claro* o *que* deve valer como o seu critério de verdade, e o seu sentido – pode-se dizer – ainda está velado.

17. Como devo supor agora que P foi demonstrado? Por uma demonstração de indemonstrabilidade? ou de uma outra maneira? Suponha que por uma demonstração de indemonstrabilidade. Bem, para ver o *que* foi demonstrado, olhe para a demonstração! Talvez tenha sido demonstrado aqui que esta e esta forma de demonstração não leva a P. – Ou se P foi demonstrado de um modo direto – como já quero dizer –, então se segue a proposição “P é indemonstrável”, e tem que se mostrar agora como esta interpretação dos símbolos de P colide com o fato da demonstração e por que ela deve ser aqui abandonada.

Suponhamos, porém, que ~P[117] esteja demonstrada. – demonstrada *como*? Digamos que mediante a demonstração direta de P – pois dali se segue que se ela é demonstrável, então ~P. Que devo afirmar agora: “P” ou “~P”? Por que não as duas? Se alguém me pergunta: “Qual é o caso – P ou não-P?”, então respondo: “⊢P” está ao final de uma demonstração Russelliana, então você escreve no sistema Russelliano: “⊢P”; mas, por outro lado, se está mesmo demonstrado e se expressa por “⊢~P”,

TS 223, p. 8

então esta proposição não está ao final de uma demonstração Russelliana e não pertence, portanto, ao sistema Russelliano. – Quando a interpretação “P é indemonstrável” foi dada para nun zu entscheiden, ob wir *dies* einen Beweis (*noch* einen Beweis), oder ob wir *dies* noch die Aussage der Unbeweisbarkeit nennen wollen.

Angenommen ~P sei direkt bewiesen; es ist also bewiesen, daß sich P direkt beweisen läßt! Das ist also wieder eine Frage der Deutung – es sei denn, daß wir nun auch einen direkten Beweis von P haben. Wäre es nun so, nun, so wäre es so. –

(Die abergläubische Angst und Verehrung der Mathematiker vor dem Widerspruch.)

18. »Aber angenommen, der Satz wäre nun *falsch* – und daher beweisbar!« – Warum nennst du ihn ›falsch‹? Weil du einen Beweis siehst? – Oder aus andern Gründen? Dann macht es ja nichts. Man kann ja den Satz des Widerspruchs sehr wohl falsch nennen, mit der Begründung z. B., daß wir sehr oft mit gutem Sinn auf eine Frage antworten: »Ja, und nein«. Und desgleichen den Satz »p ≡ ~~ p«: weil wir die Verdoppelung der Verneinung als eine Verstärkung der Verneinung verwenden und nicht bloß als ihre Aufhebung.

TS 223, p. 9

19. Du sagst: »……, also ist P wahr und unbeweisbar.« Das heißt wohl: »Also ⊢P«. Von mir aus – aber zu welchem Zweck schreibst du diese ›Behauptung‹ hin? (Das ist, als hätte jemand aus gewissen Prinzipien über Naturformen und Baustil abgeleitet, auf den Mount Everest, wo niemand wohnen kann, gehöre ein Schlößchen im Barockstile.) Und wie könntest du mir die Wahrheit der Behauptung plausibel machen, da du sie ja zu nichts weiter brauchen kannst als zu jenen Kunststückchen?

20. Man muß sich hier daran erinnern, daß die Sätze der Logik so konstruiert sind, daß sie als *Information keine* Anwendung in der Praxis haben. Man könnte also sehr wohl sagen, sie seien garnicht *Sätze*; und daß man sie überhaupt hinschreibt, bedarf einer Rechtfertigung. Fügt man diesen ›Sätzen‹ nun ein weiteres satzartiges Gebilde andrer Art hinzu, so sind wir hier schon erst recht im Dunkeln darüber, was dieses System von Zeichenkombinationen nun für eine Anwendung, für einen Sinn haben soll, denn der bloße *Satzklang* dieser Zeichenverbindungen gibt ihnen ja eine Bedeutung noch nicht.

TS 223, p. 10

P, não se conhecia esta demonstração de P e não se podia portanto dizer que “P” dizia: *esta* demonstração não existe. – Se a demonstração foi estabelecida, então uma *nova situação* foi criada: E agora temos que decidir se nós queremos chamar *isto* de uma demonstração (*mais* uma demonstração), ou se ainda queremos chamar *isto* de enunciado de indemonstrabilidade.

Suponhamos que ~P esteja diretamente demonstrada; então está demonstrado que se pode demonstrar P diretamente! Portanto, isto é de novo uma questão de interpretação – a não ser que nós tenhamos agora também uma demonstração direta de P. Se agora fosse assim, bem, assim seria. –

(O medo supersticioso e a veneração do matemático diante da contradição.)[118]

18. “Suponhamos, porém, que a proposição seja agora *falsa* – e por isto demonstrável!” – Por que você a chama de ‘falsa’? Porque você está vendo uma demonstração? – Ou por uma razão diferente? Então não importa. Pode-se chamar muito bem o princípio de contradição de falso, com a fundamentação, por exemplo, de que muitas vezes tem todo o sentido responder a uma pergunta: “Sim e não”. E do mesmo modo quanto à proposição “p ≡ ~~ p”:[119] porque empregamos a duplicação da negação como um reforço da negação, e não meramente como a sua anulação.

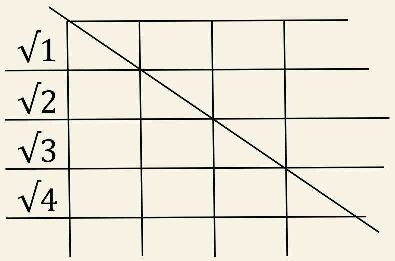
TS 223, p. 9

19. Você diz: “……, logo P é verdadeiro e indemonstrável.” Isto possivelmente significa: “portanto, ⊢P”.[120] Por mim, tudo bem – mas com que finalidade você escreve esta ‘asserção’? (É como se alguém, a partir de certos princípios sobre formas naturais e estilo arquitetônico, inferisse que forma parte do cume do Monte Evereste, onde ninguém pode morar, um palacete em estilo barroco.) E como você poderia tornar plausível para mim a verdade da asserção, dado que você não precisa dela para mais nada do que essas artimanhas?

20. Temos que nos lembrar aqui que as proposições da lógica são construídas como *informação* que *não* tem nenhuma aplicação na prática. Pode-se, portanto, muito bem dizer que elas não são mesmo *proposições*; e que se as escreva requer, de qualquer modo, uma justificação. Mas se adicionamos a estas ‘proposições’ agora uma estrutura proposicional a mais de outro tipo, passamos a estar mais do que nunca na obscuridade sobre que espécie de aplicação este sistema de combinações de sinais deve ter para fazer sentido, já que a mera *ressonância proposicional* não dá ainda nenhum significado a esta ligação de sinais.[121]

TS 223, p. 10

1. In wiefern beweist die Diagonalmethode, daß es eine Zahl gibt, die – sagen wir – keine Quadratwurzel ist? – Es ist natürlich äußerst leicht zu zeigen, daß es Zahlen gibt, die keine Quadratwurzeln sind – aber wie zeigt es *diese* Methode?



Haben wir denn einen allge-

MS 117, p. 97

meinen Begriff davon, was es heißt: zeigen, daß es eine Zahl gibt, die keine dieser unendlichen Menge ist?

Denken wir, jemand hätte diese Aufgabe erhalten, eine Zahl zu nennen, die von allen $^2\sqrt{n}$ verschieden ist; er hätte aber vom Diagonalverfahren nichts gewußt und hätte die Zahl $\sqrt[3]{2}$ als Lösung genannt; und gezeigt, daß sie keine $^2\sqrt{n}$ ist. Oder er hätte gesagt: nimm die $\sqrt{2} = 1{,}4142...$ und subtrahiere 1 von der ersten Dezimale, im übrigen aber sollen die Stellen mit $\sqrt{2}$ übereinstimmen. 1,3142... kann keine $\sqrt{n}$ sein.

2. »Nenne mir eine Zahl, die mit $\sqrt{2}$ an jeder zweiten Dezimalstelle übereinstimmt!« Was fordert diese Aufgabe? – Die Frage ist: ist sie befriedigt durch die Antwort: Es ist die Zahl, die man nach der Regel erhält: entwickle $\sqrt{2}$ und addiere 1 oder -1 zu jeder zweiten Dezimalstelle?

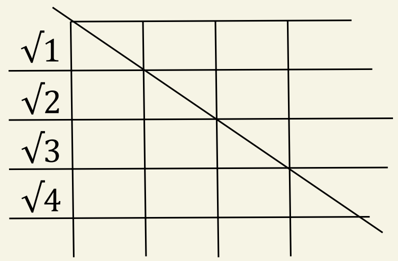
Es ist ebenso wie die Aufgabe: Teile einen Winkel in 3 Teile, dadurch als gelöst betrachtet werden kann, daß man 3 gleiche Winkel aneinander legt.

MS 117, p. 98

3. Wenn einem auf die Aufforderung: »Zeige mir eine Zahl, die von allen diesen verschieden ist«, die Diagonalregel zur Antwort gegeben wird, warum soll er nicht sagen: »Aber so hab ich's ja nicht gemeint!«? Was du mir gegeben hast, ist eine Regel, Zahlen successive herzustellen, die von jeder von diesen nach der Reihe verschieden sind.

»Aber warum willst du das nicht auch eine Methode nennen, eine Zahl zu kalkulieren?« – Aber was ist hier die Methode des Kalkulierens und was das Resultat? Du wirst sagen, sie seien *eins*, denn es hat nun Sinn zu sagen: die Zahl D ist größer als .... und kleiner als .... ; man kann

1. De[122] que maneira o método da diagonal demonstra que existe um número que – digamos – não é uma raiz quadrada? – É claro que é extremamente fácil mostrar que existem números que não são raízes quadradas – mas como este método mostra *isso*?



Teríamos, então, um conceito

MS 117, p. 97

geral do que significa: mostrar que existe um número que não é desse conjunto infinito?

Imaginemos que alguém tivesse que cumprir a tarefa de citar um número que fosse diferente de toda $^2\sqrt{n}$; mas ele nada sabe do procedimento da diagonal e cita o número $\sqrt[3]{2}$ como solução e mostra que ele não é uma $^2\sqrt{n}$. Ou que ele tenha dito: Tome $\sqrt{2} = 1{,}4142...$ e subtraia 1 do primeiro decimal, mas o resto das casas deve coincidir com a $\sqrt{2}$. 1,3142... não pode ser nenhuma $\sqrt{n}$.

2. "Cite um número que coincida com a $\sqrt{2}$ em cada segunda casa decimal!" O que exige esta tarefa? – A pergunta é: ela é satisfeita pela resposta: é o número que se obtém pela regra: desenvolva a $\sqrt{2}$ e some 1 ou -1 a cada segunda casa decimal?

É feito do mesmo modo que a tarefa: divida um ângulo em 3 partes, que pode ser considerada como resolvida quando se colocam juntos 3 ângulos iguais.

MS 117, p. 98

3. Se alguém diante da exigência: "Mostre-me um número que seja diferente de todos estes", dê como resposta a regra da diagonal, por que ele não deveria dizer: "Mas não foi assim que eu quis dizer!"? O que você me deu é uma regra para a construção de números sucessivos que são diferentes de cada um destes da série.

"Mas por que você não quer chamar isto também de um método para calcular um número?" ¬– Mas o que é aqui o método de cálculo e o que é o resultado? Você vai dizer que eles são *um só*, porque agora tem sentido dizer: o número D é maior do que .... e menor do que ....; eles podem ser elevados ao quadrado etc., etc.

sie quadrieren etc. etc.

Ist die Frage nicht eigentlich: Wozu kann man diese Zahl *brauchen*? Ja, das klingt sonderbar. – Aber es heißt eben in welcher mathematischen Umgebung steht sie.

4. Ich vergleiche also Methoden des Kalkulierens. – Aber da gibt es ja sehr verschiedene Arten und Weisen des Vergleichens. Ich soll aber in irgend einem Sinne

MS 117, p. 99

die *Resultate* der Methoden mit einander vergleichen. Aber da wird schon alles unklar, denn in *einem* Sinne haben sie nicht jede *ein* Resultat, oder es ist nicht von vornherein klar, was hier in jedem Falle als *das* Resultat zu betrachten ist. Ich will sagen, es ist hier jede Gelegenheit gegeben, die Bedeutungen zu drehen und zu wenden. —

5. Sagen wir einmal – nicht: »Die Methode gibt ein Resultat«, sondern: »sie gibt eine unendliche Reihe von Resultaten«. Wie vergleiche ich unendliche Reihen von Resultaten? Ja, da gibt es sehr Verschiedenes, was ich so nennen kann.

6. Es heißt hier immer: Blicke *weiter* um dich!

7. Das Resultat einer Kalkulation in der Wortsprache ausgedrückt, ist mit Mißtrauen zu betrachten. Die *Rechnung* beleuchtet die Bedeutung des Wortausdrucks. Sie

MS 117, p. 100

ist das *feinere* Instrument zur Bestimmung der Bedeutung. Willst du wissen, was der Wortausdruck bedeutet, so schau auf die Rechnung; nicht umgekehrt. Der Wortausdruck wirft nur einen matten allgemeinen Schein auf die Rechnung: die Rechnung aber ein grelles Licht auf den Wortausdruck. (Als wolltest du die Höhen zweier Berge nicht durch Höhenmessung vergleichen, sondern durch ihr scheinbares Verhältnis, wenn man sie von unten anschaut.)

8. ›Ich will dich eine Methode lehren, wie du in einer Entwicklung allen diesen Entwicklungen nach der Reihe *ausweichen* kannst.‹ So eine Methode ist das Diagonalverfahren. – »Also erzeugt sie eine Reihe, die von allen diesen verschieden ist.« Ist das richtig? – Ja; wenn du nämlich diese Worte auf diesen oben beschriebenen Fall anwenden willst.

9. Wie wäre es mit dieser Konstruktionsmethode: Die Diagonalzahl wird durch Addition oder Subtraktion von 1 erzeugt, aber

MS 117, p. 101

ob zu addieren oder zu subtrahieren ist, erfährt man erst, wenn man die ursprüngliche Reihe um mehrere Stellen fortgesetzt hat. Wie wenn man nun sagte: die Entwicklung der Diagonal-

Mas a pergunta não é propriamente: para que se *precisa* deste número? Sim, isto soa esquisito. – Mas isto significa justamente em que ambiente matemático ele se situa.

4. Por conseguinte, comparo métodos de cálculo. – Mas existem aqui, você sabe, maneiras muito diferentes de comparação. Mas eu devo, em algum sentido,

MS 117, p. 99

comparar entre si os *resultados* dos métodos. Mas aqui tudo se torna obcuro, pois em *um* sentido nem todos têm *um* resultado, ou não está claro desde o início o que deve ser considerado como *o* resultado em cada caso. Quero dizer que aqui é dado todo o ensejo de virar do direito e do avesso os significados. —

5. Digamos – não: “O método dá um resultado”, senão: “ele dá uma série infinita de resultados”. Como comparo séries infinitas de resultados? Sim, há coisas muito diferentes que posso chamar assim.

6. Aqui se trata sempre: olhe *mais amplamente* ao seu redor![123]

7. O resultado de uma operação de cálculo expresso na língua falada deve ser considerado com desconfiança. O *cálculo* ilumina o significado da expressão verbal. Ele

MS 117, p. 100

é o intrumento *mais refinado* para a determinação do significado. Se você quiser saber o que significa a expressão verbal, olhe para o cálculo; não o contrário. A expressão verbal só lança um fosco brilho geral sobre o cálculo: o cálculo, no entanto, uma luz resplandecente sobre a expressão verbal. (Como se você quisesse comparar a altura de duas montanhas não com um instrumento de medida, mas pelas suas relações aparentes quando vistas pelo lado de baixo.)

8. ‘Quero te ensinar um método em que você pode *evitar*, em um desenvolvimento, todos estes desenvolvimentos em série.’ Um método assim é o procedimento da diagonal. – “Assim ele produz uma série diferente de todas estas.” Isso está correto? – Sim; desde que você queira aplicar essas palavras ao caso descrito acima.

9. Como seria isto com este método de construção: o número da diagonal é produzido pela adição ou subtração de 1, mas

MS 117, p. 101

se vamos adicionar ou subtrair só se descobre depois que prosseguimos na série original para vários lugares. Mas e se agora disséssemos: o desenvolvimento da série na diagonal nunca reihe holt die Entwicklung der andern Reihen nie ein; – gewiß die Diagonalreihe weicht jeder der Reihen aus, wenn sie sie trifft, aber das nützt ihr nichts, da die Entwicklung der andern Reihen ihr wieder voraus ist. Ich kann hier doch sagen: es gibt *immer* eine der Reihen, für die nicht bestimmt ist, ob sie von der Diagonalreihe verschieden ist oder nicht. Man kann sagen: sie laufen einander ins Unendliche nach, aber immer die ursprüngliche Reihe voran.

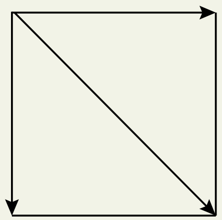
»Aber deine Regel reicht doch schon ins Unendliche, also weißt du doch schon genau, daß die Diagonalreihe von jeder andern verschieden sein wird!« – – –

10. Es heißt nichts zu sagen: »*Also* sind die X-Zahlen nicht abzählbar«. Man könnte

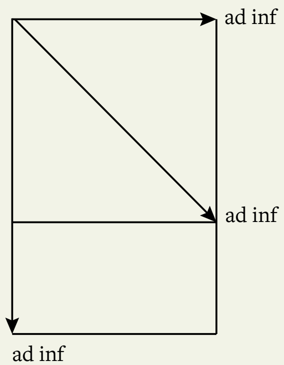
MS 117, p. 102

etwa sagen: Den Zahlbegriff X nenne ich unabzählbar, wenn festgesetzt ist, daß, welche der unter ihn fallenden Zahlen immer du in eine Reihe bringst, die Diagonalzahl dieser Reihe auch unter ihn fallen solle.

11. Da meine Zeichnung ja doch nur die *Andeutung* der Unendlichkeit ist, warum muß ich so zeichnen:



und nicht so:



Hier haben wir eben verschiedene Bilder; und ihnen entsprechen verschiedene Redeweisen. Aber kommt denn dabei etwas Nützliches heraus, wenn wir über *ihre*

MS 117, p. 103

Berechtigung streiten? Das Wichtige muß doch wo anders liegen; wenn auch diese Bilder unsre *Phantasie* am stärksten erhitzen.

alcança o desenvolvimento das outras séries; – certamente a série da diagonal evita todas as outras quando as encontra, o que não serve de nada já que o desenvolvimento das outras séries vai novamente adiante dela. De qualquer forma, posso dizer aqui: *sempre* há uma das séries para a qual nunca se determina se ela é ou não diferente da série da diagonal. Pode-se dizer: elas correm, uma depois da outra, para o infinito, mas a série original está sempre adiante.

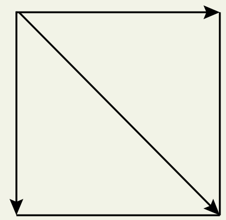
“Mas a sua regra já chega no infinito, portanto você já sabe exatamente que a série da diagonal será diferente de qualquer outra!” – – –

10. Não significa nada dizer: “*Portanto*, os números-X não são enumeráveis”. Poder-se-ia,

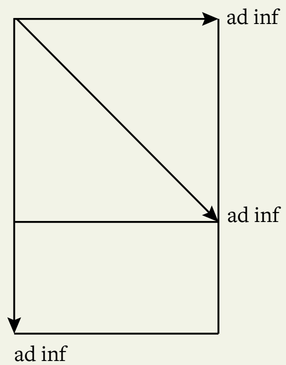
MS 117, p. 102

por exemplo, dizer: chamo o conceito de número X de não-enumerável quando se estabelece que quaisquer que sejam os números subsumidos por ele que você coloque numa série, o número da diagonal desta série também deve ser subsumido por ele.

11. Já que a minha ilustração é só a *alusão* do infinito, por que tenho que desenhá-la assim:



e não assim:



O que temos aqui são imagens diferentes; e a elas correspondem diferentes modos de falar. Mas surge daí alguma coisa proveitosa se disputamos sobre a *sua*

MS 117, p. 103

justificação? O importante, contudo, tem que se situar em outro lugar; mesmo que estas imagens aqueçam nossa *fantasia* da maneira mais intensa.

12. Wozu läßt sich der Begriff ›unabzählbar‹ verwenden?

13. Man könnte doch sagen – wenn Einer tagaus tagein versuchte ›alle Irrationalzahlen in eine Reihe zu bringen‹: »Laß das! es heißt nichts; siehst du nicht; wenn du eine Reihe aufgestellt hättest, so käme ich dir mit der Diagonalreihe!« Das könnte ihn von seinem Unternehmen abbringen. Nun, das wäre ein Nutzen. Und mir kommt vor, das wäre auch der ganze und eigentliche Zweck dieser Methode. Sie bedient sich des vagen Begriffes dieses Menschen, der gleichsam idiotisch drauflos arbeitet und bringt ihn durch ein Bild zur Ruhe. (Man könnte ihn aber durch ein andres Bild auch wieder zur Weiterführung seines Unternehmens bringen.)

MS 117, p. 104

14. Das Verfahren führt etwas vor, – was man auf sehr vage Weise die Demonstration davon nennen kann, daß sich *diese* Rechnungsmethoden nicht in eine Reihe ordnen lassen. Und die Bedeutung des »*diese*« ist hier eben vag gehalten.

15. Ein gescheiter Mann hat sich in diesem Sprachnetz gefangen! Also muß es ein interessantes Sprachnetz sein.

16. Der Fehler beginnt damit, daß man sagt, die Kardinalzahlen ließen sich in eine Reihe ordnen. Welchen Begriff hat man denn von diesem Ordnen? Ja man hat natürlich einen von einer unendlichen Reihe, aber das gibt uns ja hier höchstens eine vage Idee, einen Leitstern für die Bildung eines Begriffs. Der Begriff selbst ist ja von dieser und einigen anderen Reihen *abstrahiert*; oder: der Ausdruck bezeichnet eine gewisse Analogie von Fällen, und man kann ihn etwa dazu benützen, um ein Gebiet, von dem man reden will, vorläufig abzugrenzen.

MS 117, p. 105

Damit ist aber nicht gesagt, daß die Frage einen klaren Sinn hat: »Ist die Menge R in eine Reihe zu ordnen?« Denn diese Frage bedeutet nun etwa: Kann man mit diesen Gebilden etwas tun, was dem Ordnen der Kardinalzahlen in eine Reihe entspricht? Wenn man also fragt: »Kann man die reellen Zahlen in eine Reihe ordnen?« so konnte die gewissenhafte Antwort sein: »Ich kann mir vorläufig gar nichts Genaues darunter vorstellen«. – »Aber du kannst doch zum Beispiel die Wurzeln und die algebraischen Zahlen in eine Reihe ordnen; also verstehst du doch den Ausdruck!« – Richtiger gesagt, ich *habe* hier gewisse analoge Gebilde, die ich mit dem gemeinsamen Namen ›Reihen‹ benenne. Aber ich habe noch keine sichere Brücke von diesen Fällen zu dem ›aller reellen Zahlen‹. Ich habe auch keine allgemeine Methode um zu versuchen, ob sich die und die Menge ›in eine Reihe ordnen läßt‹.

Nun zeigt man hier das Diagonalverfahren und sagt: »hier hast du nun den Beweis, daß dieses Ordnen hier nicht geht«. Aber ich kann antworten: »Ich weiß – wie gesagt – nicht, was es ist, was

12. Em que se pode empregar o conceito de ‘não-enumerável’?

13. Poder-se-ia dizer – se alguém tentasse, dia sim, dia não, ‘colocar todos os números irracionais numa série’: “Deixe disto! não significa nada; você não vê; se você tivesse estabelecido uma série, eu viria então com uma série diagonal!” Isto poderia dissuadi-lo do seu esforço. Bem, isto seria proveitoso. E me parece que esta seria também toda e a própria finalidade deste método. Ele se serve do vago conceito desta pessoa, que trabalha à toa, como se fosse uma idiota, e lhe devolve a tranquilidade mediante uma imagem. (Poder-se-ia, porém, mediante uma outra imagem, induzi-la novamente a prosseguir com o seu esforço.)[124]

MS 117, p. 104

14. O procedimento apresenta algo – que se pode chamar, de maneira muito vaga, de demonstração de que *esses* métodos de cálculo não se deixam ordenar numa série. E o significado do “*esses*” aqui é mantido justamente de modo vago.

15. Uma pessoa inteligente capturada nesta rede de linguagem! Tem que ser então uma rede de linguagem interessante.

16. O equívoco começa quando se diz que os números cardinais podem ser ordenados numa série. Pois que conceito se tem desta ordenação? Tem-se, naturalmente, o de uma série infinita, mas isto nos dá aqui no máximo uma vaga ideia, um guia para a formação de um conceito. O próprio conceito já se *abstrai* desta e de algumas outras séries; ou: a expressão designa uma certa analogia de casos, e pode-se utilizá-la para delimitar provisoriamente um domínio do qual se queira falar.

MS 117, p. 105 [125]

Mas isto não quer dizer que a pergunta “Pode-se ordenar o conjunto R em uma série?” tenha um sentido claro. Pois esta pergunta agora significa, por exemplo: pode-se fazer algo com essas estruturas que corresponda à ordem dos números cardinais numa série? Assim, quando se pergunta: “Pode-se ordenar os números reais numa série”, a resposta meticulosa poderia ser: “Não posso, por ora, fazer nenhuma ideia exata disto”. – “Mas você pode, por exemplo, ordenar as raízes e os números algébricos numa série; portanto você compreende a expressão!” – Para ser mais exato, o que *tenho* aqui são certas estruturas análogas que denomino pelo nome comum de ‘série’. Mas não tenho ainda nenhuma ponte segura que vá destes casos até ‘todos os números reais’. Não tenho tampouco nenhum método geral para examinar se este ou aquele conjunto ‘pode ser ordenado numa série’.

Agora se mostra aqui o procedimento da diagonal e se diz: “Agora você tem a prova de que esta ordenação não é possível”. Mas posso responder: “Eu não sei – como disse – o que é o que

MS 117, p. 106

hier *nicht geht*. Wohl aber sehe ich: Du willst einen Unterschied zeigen in der Verwendung von »Wurzel«, »algebraische Zahl«, etc. einerseits und »reelle Zahl« anderseits. Und zwar etwa so: Die Wurzeln nennen wir »reelle Zahlen« und die Diagonalzahl, die aus den Wurzeln gebildet ist *auch*. Und ähnlich mit allen Reihen reeller Zahlen. Daher hat es keinen Sinn, von einer »Reihe *aller* reellen Zahlen« zu reden, weil man ja auch die Diagonalzahl der Reihe eine »reelle Zahl« nennt. — Wäre das nicht etwas ähnlich, wie wenn man gewöhnlich jede Reihe von Büchern selbst ein Buch nennte und nun sagte: »Es hat keinen Sinn, von ›der Reihe aller Bücher‹ zu reden, da diese Reihe selbst ein Buch wäre.«

17. Es ist hier sehr nützlich, sich vorzustellen, daß das Diagonalverfahren zur Erzeugung einer reellen Zahl längst vor der Erfindung der Mengenlehre bekannt und auch den Schulkindern geläufig gewesen wäre, wie es ja sehr wohl hätte sein können. So wird nämlich der Aspekt der Entdeckung Cantors geändert. Diese Entdeckung hätte sehr wohl *bloß* in der neuen Auffassung

MS 117, p. 107

dieser altbekannten, elementaren Rechnung liegen können.

18. Die Rechnungsart selbst ist ja nützlich. Die Aufgabe wäre etwa: Schreibe eine Dezimalzahl an, die verschieden ist von den Zahlen:

0.1246798
0.3469876
0.0127649 (Man denke sich eine
0.3426794 lange Reihe.)
- - - - - - -

Das Kind denkt sich: Wie soll ich das machen, ich müßte ja auf alle die Zahlen zugleich schauen, um zu vermeiden, daß ich nicht doch eine von ihnen anschriebe. Die Methode sagt nun: Durchaus nicht; ändere die erste Stelle der ersten Zahl, die zweite der zweiten, etc. etc. und du bist sicher, eine Zahl hingeschrieben zu haben, die mit keiner der gegebenen übereinstimmt. Die Zahl, die man so erhält, könnte immer die Diagonalzahl genannt werden.

19. Das Gefährliche, Täuschende der Fassung: »Man kann die reellen Zahlen nicht in eine Reihe ordnen« oder gar »Die Menge . . . ist nicht abzählbar« liegt darin, daß

MS 117, p. 108

sie das, was eine Begriffsbestimmung, Begriffsbildung ist, als eine Naturtatsache erscheinen lassen.

MS 117, p. 106

não se pode aqui. Mas eu vejo, sim, que: você quer mostrar uma diferença no emprego de "raiz", "número algébrico" etc, por um lado, e "número real" por outro lado. Especificamente deste modo, por exemplo: chamamos as raízes de "números reais" e *também* o número da diagonal que se obtém das raízes. E analogamente para todas as séries de números reais. Por isto é que não há sentido algum em falar de uma "série de *todos* os números reais", posto que também se chama o número da diagonal da série de "número real". — Não seria um pouco como se toda série de livros fosse normalmente chamada de livro em si, e agora se dissesse: "Não há sentido em falar da 'série de todos os livros', pois esta série é, ela mesma, um livro."[126]

17. É muito útil imaginar aqui que o procedimento da diagonal para produzir um número real teria sido conhecido desde muito antes da invenção da teoria dos conjuntos, e fosse também familiar às crianças da escola, como muito bem poderia ter sido o caso. Assim, o aspecto da descoberta de Cantor se modificaria. Esta descoberta poderia muito bem ter consistido *meramente* em uma nova concepção

MS 117, p. 107

deste cálculo elementar há muito conhecido.

18. O próprio tipo de cálculo já é conveniente. A tarefa seria, por exemplo: escreva um número decimal que seja diferente dos números:

0.1246798
0.3469876
0.0127649 (Imagina-se uma
0.3426794 sequência longa.)
- - - - - - -

A criança imagina: como devo fazer isso, teria que olhar para todos os números ao mesmo tempo para evitar que eu anote algum deles. O método diz agora: de jeito nenhum; modifique a primeira casa do primeiro número, a segunda do segundo etc., etc., e você estará seguro de haver escrito um número que não coincide com nenhum daqueles dados. O número assim obtido poderia ser sempre chamado de número da diagonal.

19. O perigoso, o enganoso desta versão: "Não se pode ordenar os números reais numa série", ou então "O conjunto . . . é não-enumerável", consiste em que

MS 117, p. 108

ela, que é uma determinação de um conceito, uma formação de um conceito, aparece como um fato natural.

20. Bescheiden lautet der Satz: »Wenn man etwas eine Reihe reeller Zahlen nennt, so heißt die Entwicklung des Diagonalverfahrens auch eine ›reelle Zahl‹, und zwar sagt man, sie sei von allen Gliedern der Reihe verschieden.«

21. Unser Verdacht sollte immer rege sein, wenn ein Beweis mehr beweist, als seine Mittel ihm erlauben. Man könnte so etwas ›einen prahlerischen Beweis‹ nennen.

22. Der gebräuchliche Ausdruck fingiert einen Vorgang, eine Methode des Ordnens, die hier zwar anwendbar ist, aber nicht zum Ziele führt wegen der Zahl der Gegenstände, die großer ist als selbst die aller Kardinalzahlen.

Wenn gesagt würde: »Die überlegung über das Diagonalverfahren zeigt Euch, daß der *Begriff* ›reelle

MS 117, p. 109

Zahl‹ viel weniger Analogie mit dem Begriff Kardinalzahl hat, als man, durch gewisse Analogien verführt, zu glauben geneigt ist«, so hätte das einen guten und ehrlichen Sinn. Es geschieht aber gerade das *Gegenteil*: indem die ›Menge‹ der reellen Zahlen angeblich der Größe nach mit der der Kardinalzahlen verglichen wird. Die Artverschiedenheit der beiden Konzeptionen wird durch eine schiefe Ausdrucksweise als Verschiedenheit der Ausdehnung dargestellt. Ich glaube und hoffe, eine künftige Generation wird über diesen Hokus Pokus lachen.

MS 117, p. 110

23. Die Krankheit einer Zeit heilt sich durch eine Veränderung in der Lebensweise der Menschen und die Krankheit der philo sophischen Probleme konnte nur durch eine veränderte Denkweise und Lebensweise geheilt werden, nicht durch

MS 121, p. 27r

eine Medizin die ein einzelner erfand.

Denke, daß der Gebrauch des Wagens gewisse Krankheiten hervorruft und begünstigt und die Menschheit von dieser Krankheit geplagt wird, bis sie sich, aus irgendwelchen Ursachen, als Resultat irgendeiner Entwickelung, das Fahren wieder abgewöhnt.

MS 121, p. 27v

24. Wie macht man denn von dem Satz Verwendung: »Es gibt keine größte Kardinalzahl«? Wann und bei welcher Gelegenheit würde man ihn sagen? Diese Verwendung ist jedenfalls eine ganz andere, als die des mathematischen Satzes »25 x 25 = 625«.

25. Vor allem ist zu bemerken, daß wir das überhaupt fragen, was darauf deutet, daß die Antwort nicht auf der Hand liegt.

20. A proposição soa despretenciosa: “Se algo se denomina como uma série de números reais, então o desenvolvimento do procedimento da diagonal nomeia também um ‘número real’, ou seja, diz-se que ele é diferente de todos os membros da série.”

21. Nossa suspeita deve estar sempre alerta se uma demonstração demonstra mais do que os seus meios lhe permitem. Pode-se chamar algo assim de ‘uma demonstração fanfarrona’.

22. A expressão usual finge ser um processo, um método de ordenação que, ainda que aqui aplicável, não conduz até o seu objetivo por causa do número de objetos ser maior do que até mesmo o de todos os números cardinais.

Se alguém dissesse: “A reflexão sobre o procedimento da diagonal lhes mostra que o *conceito* de ‘número

MS 117, p. 109

real’ tem muito menos analogia com o conceito de número cardinal do que, seduzidos por certas analogias, somos inclinados a acreditar”, isso teria um sentido bom e sincero. Ocorre, porém, justamente o *contrário*: comparando o pretenso ‘conjunto’ dos números reais com o dos números cardinais. A diferença de tipo entre as duas concepções é apresentada por uma forma de expressão distorcida como diferença de extensão. Acredito, e espero, que uma geração futura vá rir desses truques baratos.

MS 117, p. 110[127]

23. A doença de uma época se cura pela mudança do modo de vida das pessoas, e a doença dos problemas filosóficos só poderia ser curada por um modo de pensar e de viver mudado, não por

MS 121, p. 27r

um remédio inventado por um indivíduo.

Imagine que o uso de automóveis provoque e favoreça certas doenças e que a humanidade fique afligida por esta doença até que ela, por causa de alguma coisa qualquer, como resultado de alguma evolução, deixe novamente de dirigir.

MS 121, p. 27v

24. Pois como se faz o emprego da proposição: “Não existe o maior número cardinal”? Quando e em que oportunidade alguém a proferiria? Este emprego é, em todo caso, totalmente distinto do que o da proposição matemática “25 x 25 = 625”.[128]

25. Antes de mais nada, deve-se observar que afinal perguntamos o que interpreta que a resposta não está disponível.

Und ferner, wenn man die Frage rasch beantworten will, gleitet man leicht aus. Es ist hier ähnlich wie mit der Frage, welche Erfahrung uns zeigt, daß un-

MS 121, p. 28v

ser Raum dreidimensional ist.

26. Von einer *Erlaubnis* sagen wir, sie habe kein Ende.

27. Und man kann sagen, die Erlaubnis Sprachspiele mit Kardinalzahlen zu spielen habe kein Ende. Dies würde man etwa Einem sagen, den wir unsere Sprache und Sprachspiele lehrten. Es wäre also wieder ein grammatischer Satz, aber von *ganz* anderer Art als »25 x 25 = 625«. Er wäre aber von großer Bedeutung, wenn der Schüler etwa geneigt wäre (vielleicht weil er in einer ganz anderen Kultur erzogen worden wäre), ein definitives Ende dieser Reihe von Sprachspielen zu erwarten.

MS 121, p. 29r

28. Warum sollen wir sagen: Die Irrationalzahlen können nicht geordnet werden? – Wir haben eine Methode, jede Ordnung zu stören.

MS 121, p. 35v

29. Das Cantorsche Diagonalverfahren zeigt uns nicht eine Irrationalzahl, die von allen im System verschieden ist, aber es gibt dem mathematischen Satz Sinn, die Zahl so und so sei von allen des Systems verschieden. Cantor könnte sagen: Du kannst *dadurch* beweisen, daß eine Zahl von allen des Systems verschieden ist, daß du beweist, daß sie in der ersten Stelle von der ersten Zahl, in der zweiten Stelle von der zweiten Zahl usf. verschieden ist.

Cantor sagt etwas über

MS 121, p. 36r

die Multiplizität des Begriffs »reelle Zahl, verschieden von allen eines Systems«.

30. Cantor zeigt, wenn wir ein System von Extensionen haben, daß es dann Sinn hat, von einer Extension zu reden, die von ihnen allen verschieden ist. – Aber damit ist die Grammatik des Wortes »Extension« noch nicht bestimmt.

31. Cantor gibt dem Ausdruck »Extension die von allen Extensionen eines Systems verschieden ist« einen Sinn, indem er vorschlägt, eine Extension solle so genannt werden, wenn von ihr bewiesen werden kann, daß sie von den Extensionen

E, além disso, se alguém quiser responder apressadamente, escorrega facilmente. Ela é similar à pergunta pela experiência que nos mostra que o nosso

MS 121, p. 28v

espaço é tridimensional.[129]

26. Dizemos de um *consentimento* que ele não tem fim.

27. E pode-se dizer que o consentimento para jogar um jogo de linguagem com números cardinais não tem fim. Isto se diria, por exemplo, para alguém a quem ensinamos nossa linguagem e jogos de linguagem. Isto seria de novo uma proposição gramatical, mas de um tipo *totalmente* diferente de "25 x 25= 625". Mas seria de grande importância se o estudante estivesse, por exemplo, inclinado (provavelmente por ter sido educado numa cultura inteiramente diferente), a esperar um final definitivo para esta série de jogos de linguagem.

MS 121, p. 29r

28. Por que devemos dizer: os números irracionais não podem ser ordenados? – Nós temos um método para atrapalhar qualquer ordenação.[130]

MS 121, p. 35v

29. O procedimento da diagonal de Cantor não nos mostra um número irracional que seja diferente de todos no sistema, mas dá sentido à proposição matemática de que o número tal e tal é diferente de todos do sistema. Cantor poderia dizer: você pode demonstrar que um número é diferente de todos do sistema, *com* a demonstração de que ele é diferente na primeira casa do primeiro número, na segunda casa do segundo número, e assim por diante.

Cantor diz algo sobre

MS 121, p. 36r

a multiplicidade do conceito de "número real diferente de todos em um sistema".

30. Cantor mostra que se temos um sistema de extensões, faz sentido falar de uma extensão que é diferente de todas elas. – Mas a gramática da palavra "extensão" ainda não está determinada com isso.

31. Cantor dá um sentido à expressão "Extensão que é diferente de todas as extensões de um sistema" sugerindo que devemos denominar como extensão aquilo que se pode demonstrar como diferente

MS 121, p. 36v

eines Systems diagonal verschieden ist.

32. Es gibt also eine *Aufgabe*: Finde eine Zahl deren Entwicklung von denen dieses Systems diagonal verschieden ist.

MS 121, p. 37r

33. Man könnte sagen: Außer den rationalen Punkten befinden sich auf der Zahlenlinie *diverse Systeme* irrationaler Punkte.

Es gibt kein System der Irrationalzahlen – aber auch kein Über-System, keine ›Menge der irrationalen Zahlen‹ von einer Unendlichkeit höherer Ordnung.

34. Cantor definiert eine *Verschiedenheit höherer Ordnung*, nämlich eine Verschiedenheit einer Entwicklung von einem *System* von Entwicklungen. Man kann diese Erklärung so benützen, daß man zeigt, daß eine Zahl in diesem Sinne von

MS 121, p. 38v

einem System von Zahlen verschieden ist: sagen wir π von dem System der algebraischen Zahlen. Aber wir können nicht gut sagen, die Regel, die Stellen in der Diagonale so und so zu verändern, sei dadurch als von den Regeln des Systems verschieden bewiesen, weil diese Regel selbst ›höherer Ordnung‹ ist, denn sie *handelt* von der Veränderung eines Systems von Regeln und daher ist es von vornherein nicht klar, in welchem Fall wir die Entwickelung *so einer* Regel von allen Entwicklungen des Systems verschieden erklären wollen.

MS 121, p. 39r

35. ›Diese Überlegungen können uns dahin führen,. zu sagen, daß $2^{\aleph_0} > \aleph_0$‹.

D. h.: wir können die Überlegungen uns dahin führen *lassen*.

Oder: wir können *dies* sagen, und *dies* als Grund dafür angeben.

Aber wenn wir es nun sagen – was ist weiter damit

MS 121, p. 41v

anzufangen? In welcher Praxis ist dieser Satz *verankert*? Er ist vorläufig ein Stück mathematischer Architektur, die in der Luft hängt, so aussieht als wäre es, sagen wir, ein Architrav, aber von nichts getragen wird und nichts trägt.

36. Gewisse Überlegungen können uns dahin führen zu sagen, daß 10^{10} Seelen in einem cm^3 Platz haben. Warum sagen wir es aber trotzdem nicht? Weil es zu nichts nütze ist. Weil es zwar ein Bild herauf ruft, aber eins, womit wir weiter nichts machen können.

MS 121, p. 36v

na diagonal das extensões de um sistema.

32. Existe, portanto, uma *tarefa*: encontre um número cujo desenvolvimento seja diagonalmente diferente dos números deste sistema.

MS 121, p. 37r

33. Poder-se-ia dizer: além dos pontos racionais encontram-se na linha dos números *diversos sistemas* de pontos irracionais.

Não há nenhum sistema de números irracionais – como tampouco nenhum supersistema, nenhum 'conjunto de números irracionais' de uma ordem infinita superior.

34. Cantor define uma *diferenciação de ordem superior*, a saber, uma diferenciação de um desenvolvimento de um *sistema* de desenvolvimentos. Pode-se utilizar esta explicação de modo a mostrar que um número, neste sentido, é

MS 121, p. 38v

diferente de um sistema de números: vale dizer, π dos números do sistema algébrico. Mas não podemos muito bem dizer que a regra que muda as casas assim e assim na diagonal se demonstre por isto como diferente das regras do sistema por ser, ela mesma, um regra de 'ordem superior', já que ela *cuida* da mudança de um sistema de regras, e, por isto, não está claro desde o início em que caso queremos explicar que o desenvolvimento de *uma tal* regra é diferente de todos os desenvolvimentos do sistema.

MS 121, p. 39r

35. 'Essas considerações podem nos levar a dizer que $2^{\aleph_0} > \aleph_0$'.

Ou seja: nós podemos *deixar* que as considerações nos levem para ali.

Ou: nós podemos dizer *isso* e oferecer *isso* como razão.

Mas se o dissermos agora – o que mais fazer

MS 121, p. 41v

com isso? Em que práxis esta proposição está *ancorada*? Ela é por ora um pedaço da arquitetura matemática que se pendura no ar, e que aparenta ser, digamos assim, uma arquitrave, mas que não está sustentada por nada e não sustenta nada.

36. Certas considerações podem nos levar a dizer que 10^{10} almas cabem numa área de um cm^3. Mas por que, a despeito disso, não o dizemos? Porque não serve para nada. Porque ainda que seja uma imagem que se pode evocar, não se pode fazer mais nada com ela.

37. Der Satz gilt soviel, als seine Gründe gelten.

Er trägt soviel, wie seine Gründe tragen, die ihn stützen.

MS 121, p. 42r

38. Eine interessante Frage ist: Welchen Zusammenhang hat $\aleph_0$ mit den Kardinalzahlen, deren Zahl es sein soll? $\aleph_0$ wäre offenbar das *Prädikat »endlose Reihe«*, in seiner Anwendung auf die Reihe der Kardinalzahlen und ähnliche mathematische Bildungen. Es ist hier wichtig, das Verhältnis zwischen einer Reihe im nicht-mathematischen Sinn und einer im mathematischen Sinn zu erfassen. Es ist natürlich klar, daß wir in der Mathematik das Wort »Zahlenreihe« *nicht* im Sinne von »Reihe von Zahlzeichen« gebrauchen, wenn, natürlich, auch ein Zusammenhang zwischen dem Gebrauch des einen Ausdrucks und des andern

MS 121, p. 43r

besteht. Eine Eisenbahn ist nicht ein Eisenbahnzug; sie ist auch nicht etwas einem Eisenbahnzug ähnliches. ›Reihe‹ im mathematischen Sinn ist eine Konstruktionsart für Reihen sprachlicher Ausdrücke.

Wir haben also eine grammatische Klasse »endlose Folge« und äquivalent mit diesem Ausdruck ein Wort, dessen Grammatik (eine gewisse) Ähnlichkeit mit der eines Zahlworts hat: »Endlos« oder »$\aleph_0$«. Dies hängt damit zusammen, daß wir unter den Kalkülen der Mathematik eine Technik haben, die wir mit einem gewissen Recht 1-1 Zuordnung der ›Glieder zweier endlosen Folgen‹ nennen können, da sie mit einem solchen gegenseitigen Zuordnen der Glieder sogenannter ›endlicher‹

MS 121, p. 43v

Klassen Ähnlichkeit hat.

Daraus aber, daß wir Verwendung für eine *Art* von Zahlwort haben, welches, gleichsam, die Anzahl der Glieder einer endlosen Reihe angibt, folgt nicht daß es auch irgend einen Sinn hat von der Anzahl des Begriffes »endlose Folge« zu reden, daß wir *hier* irgend welche Verwendung für etwas zahlwort-ähnliches haben. Es gibt eben keine grammatische Technik, die die Verwendung so eines Ausdrucks nahelegte. Denn ich kann freilich den Ausdruck bilden: »Klasse aller Klassen, die mit der Klasse ›endlose Folge‹ zahlengleich sind« wie auch den: »Klasse aller Engel,

MS 121, p. 44r

die auf einer Nadelspitze Platz haben« aber dieser Ausdruck ist leer, solang es keine Verwendung für ihn gibt. Eine solche ist nicht: noch zu entdecken, sondern: erst zu *erfinden*.

39. Denke, ich legte ein in Felder geteiltes Spielbrett vor dich, setzte Schachfiguren-ähnliche Stücke darauf, – erklärte: »Diese Figur ist der ›*Konig*‹, das sind die ›*Ritter*‹, das die ›*Bürger*‹. – Mehr wissen wir von dem Spiel noch nicht; aber das ist immerhin etwas. – Und mehr wird

37. A proposição vale tanto quanto as suas razões.

Ela sustenta tanto quanto sustentam as razões que a suportam.

MS 121, p. 42r

38. Uma pergunta interessante é: que conexão $\aleph_0$ tem com os números cardinais dos quais se supõe que deveria ser um número? $\aleph_0$ seria evidentemente o *predicado* "*série infinita*", na sua aplicação sobre a série dos números cardinais e formações matemáticas semelhantes. Aqui é importante apreender a relação entre uma série em sentido não-matemático e uma em sentido matemático. É claro, naturalmente, que *não* usamos em matemática a expressão "série de números" no sentido de "série de sinais numéricos", mesmo que, naturalmente, haja uma conexão entre o uso de uma expressão e o

MS 121, p. 43r

da outra. Uma ferrovia não é um trem; ela não é nem sequer similar a alguma coisa como um trem. 'Série' em sentido matemático é um tipo de construção para séries de expressões linguísticas.

O que temos, portanto, é uma classe gramatical "sequência infinita", e, em equivalência com esta expressão, uma palavra cuja gramática tem (uma certa) similaridade com a de um numeral: "infinito" ou "$\aleph_0$". Isto se relaciona com o fato de que temos, entre os cálculos da matemática, uma técnica que, com certa razão, podemos chamar de correlação 1-1 dos 'membros de duas sequências infinitas', já que ela tem similaridade com certas correlações recíprocas de membros das assim chamadas classes

MS 121, p. 43v

'finitas'.

Partindo do fato, entretanto, de que temos emprego para um *tipo* de numeral que, por assim dizer, fornece o número de membros de uma série infinita, não se segue que haja também algum sentido em se falar do número do conceito "sequência infinita", que tenhamos *aqui* alguma aplicação para algo similar a um numeral. Não há sequer nenhuma técnica gramatical que sugira o emprego de uma expressão assim. Pois supostamente posso formar a expressão: "Classe de todas as classes que seja equinumérica com a classe 'sequência infinita', assim como também: "Classe de todos os anjos

MS 121, p. 44r

que estão na ponta de uma agulha", mas esta expressão é vazia enquanto não haja para ela nenhum emprego. Este não estaria: ainda a ser descoberto, senão: *inventar* primeiro.[131]

39. Imagine que eu ponha diante de você um tabuleiro dividido em casas, e coloque nele peças semelhantes a figuras do xadrez, – e explique: "Esta figura é o '*rei*', estas são os '*cavalos*', estas os '*peões*'. – Não sabemos ainda muito mais sobre o jogo; mas mesmo assim isto já é alguvielleicht noch entdeckt werden.«

MS 121, p. 44v

40. »Man kann die Brüche nicht ihrer Größe nach ordnen.« – Dies klingt vor allem höchst interessant und merkwürdig.

Es klingt interessant im ganz anderen Sinne, als, etwa, ein Satz aus der Differentialrechnung. Der Urterschied liegt, glaube ich, darin, daß ein solcher sich leicht mit einer Anwendung auf Physikalisches assoziiert, während *jener*

MS 121, p. 60r

Satz einzig und allein der Mathematik anzugehören, gleichsam die Naturgeschichte der mathematischen Gegenstände selbst zu betreffen scheint.

Man möchte von ihm etwa sagen: er führe uns in die Geheimnisse der mathematischen Welt ein. Es ist *dieser* Aspekt vor dem ich warnen will.

41. Wenn es den Anschein hat, ..., dann ist Vorsicht geboten.

MS 121, p. 60v

42. Wenn ich mir bei dem Satz, die Brüche konnen nicht ihrer Größe nach in eine Reihe geordnet werden, das Bild einer unendlichen Reihe von Dingen mache, und zwischen jedem Ding und seinem Nachbar werden neue Dinge sichtbar, und wieder zwischen jedem Ding und seinem Nachbar neue, und so fort ohne Ende, so haben wir hier sicher

MS 121, p. 61v

etwas, wovor Einem schwindlich werden kann.

MS 121, p. 62r

Sehen wir aber, daß dieses Bild, wenn auch sehr aufregend, doch aber kein treffendes ist, daß wir uns nicht von den Worten »Reihe«, »ordnen«, »existieren«, und andern, fangen lassen dürfen, so werden wir auf die *Technik* des Bruch-

MS 121, p. 62v

rechnens zurückgreifen, an der nun nichts *seltsames* mehr ist.

43. Daß in einer Technik der Berechnung von Brüchen der Ausdruck »der nächst größere Bruch« keinen Sinn hat, daß wir ihm keinen Sinn gegeben haben, ist nichts erstaunliches.

ma coisa. – E talvez sejam descobertas ainda mais coisas.”

MS 121, p. 44v

40. “Não se pode ordenar frações segundo a sua grandeza.” – Isto soa, antes de tudo, como algo extremamente interessante e peculiar.

Soa interessante em um sentido totalmente diferente do que, por exemplo, uma proposição do cálculo diferencial. A diferença, acredito, consiste em que esta pode ser facilmente associada com alguma aplicação em física, enquanto que *aquela*

MS 121, p. 60r

pertence, pura e simplesmente, à matemática, como se parecesse dizer respeito à própria história natural dos objetos da matemática.

Poder-se-ia dizer dela, por exemplo: ela nos introduz aos mistérios do mundo matemático. É *este* aspecto sobre o qual quero alertar.

41. Quando tem a aparência de que ....,[132] então há que se ter cautela.

MS 121, p. 60v

42. Se eu, por causa da proposição de que as frações não podem ser ordenadas pela sua grandeza numa série, faço a imagem de uma série infinita de coisas, e, entre cada coisa e o seu vizinho, tornam-se manifestas novas coisas, e, novamente, entre cada coisa e seu vizinho, outra coisa, e assim por diante, interminavelmente, então certamente temos aqui

MS 121, p. 61v

algo diante do qual alguém pode sentir vertigens.

MS 121, p. 62r

Se vemos, no entanto, que essa imagem, conquanto muito fascinante, não é apropriada, que não podemos nos deixar capturar pelas palavras “série”, “ordenar”, “existir” e outras, então remontamos à *técnica* do cálculo

MS 121, p. 62v

de frações, na qual agora não há mais nada de *estranho*.

43. Que a expressão “A próxima fração de maior grandeza” não tenha nenhum sentido numa técnica de cálculo de frações, que não lhe possamos dar nenhum sentido, não é nenhuma surpresa.

44. Wenn wir eine Technik des fortgesetzten Interpolierens von Brüchen anwenden, so werden wir keinen Bruch den »nachst größeren« nennen wollen.

45. Von einer Technik zu sagen, sie sei unbegrenzt, heißt *nicht*, sie laufe ohne aufzuhören weiter – *wachse* ins ungemessene; sondern, es fehle

MS 121, p. 63r

ihr die Institution des Endes, sie sei nicht abgeschlossen. Wie man von einem Satz sagen kann, es mangle ihm der Abschluß, wenn der Schlußpunkt fehlt. Oder von einem Spielfeld es sei unbegrenzt, wenn die Spielregeln keine Begrenzung – etwa durch einen Strich – vorschreiben.

46. Eine neue Rechentechnik soll uns ja eben ein *neues* Bild liefern, eine *neue Ausdrucksweise*; und wir können nichts Absurderes tun, als dieses neue Schema, diese neue Art von Gerüst, vermittels der

MS 121, p. 63v

alten Ausdrücke beschreiben zu wollen.

47. Was ist die Funktion eines solchen Satzes wie: »Es gibt zu einem Bruch nicht einen nächst größern Bruch, aber zu einer Kardinalzahl eine nachst größere«? Es ist doch gleichsam ein Satz, der zwei Spiele vergleicht. (Wie: im Damespiel gibt es ein Überspringen eines Steines, aber nicht im Schachspiel.)

48. Wir nennen etwas »die nachst größere Kardinalzahl konstruieren« aber nichts »den nachst größeren Bruch konstruieren«.

MS 121, p. 64r

49. Wie vergleicht man Spiele? Indem man sie beschreibt – indem man das eine als Variation des andern beschreibt – indem man sie beschreibt und die Unterschiede und Analogien *hervorhebt*.

50. »Im Damespiel gibt es keinen König« – was sagt das? (Es klingt kindisch.) Heißt es nur, daß man keinen Damestein »Konig« nennt; und wenn man nun einen so nennte, gabe es nun im Damespiel einen Konig? Wie ist

MS 121, p. 64v

es aber mit *dem* Satz: »Im Damespiel sind alle Steine gleichberechtigt, aber nicht im Schach«? Wem teile ich dies mit? Dem, der die beiden Spiele schon kennt, oder einem der sie noch nicht

44. Se aplicamos uma técnica de interpolação contínua de frações, não vamos querer chamar nenhuma fração de "a próxima de maior grandeza".

45. Dizer de uma técnica que ela seja ilimitada *não* significa que ela prossiga sem cessar – *aumente* desmesuradamente; senão que lhe falta

MS 121, p. 63r

a instituição do fim, ela não acaba. Como se pode dizer de uma proposição que carece de conclusão quando falta o ponto final. Ou de um campo de jogo que é ilimitado se as regras do jogo não prescreverem nenhuma limitação – por exemplo, mediante uma linha.

46. Uma nova técnica de cálculo deve nos fornecer justamente uma *nova* imagem, um *novo modo de expressão*; e não podemos fazer nada mais absurdo do que querer descrever este novo esquema, este novo tipo de armação, por meio de

MS 121, p. 63v

velhas expressões.

47. Qual é a função de uma proposição como: "Não existe para uma fração uma próxima fração de maior grandeza, mas existe para um número cardinal um próximo de maior grandeza"? Isto seria como se a proposição comparasse dois jogos. (Como: no jogo de damas se pode pular uma pedra, mas não no jogo de xadrez.)

48. Nomeamos algo como "construir o próximo número cardinal de maior grandeza", mas não nomeamos nada como "construir a próxima fração de maior grandeza".

MS 121, p. 64r

49. Como se comparam jogos? Descrevendo-os – descrevendo um deles como variação do outro – descrevendo-os e *realçando* as diferenças e analogias.

50. "No jogo de damas não há nenhum rei" – o que diz isso? (Soa pueril.) Só significa que não há uma peça de dama chamada "rei"; e se alguém agora chamasse uma delas assim, haveria então no jogo de damas um rei? Mas o que acontece

MS 121, p. 64v

com *a* proposição: "No jogo de damas todas as pedras valem o mesmo, mas não no xadrez"? A quem informo isso? A quem já conhece os dois jogos, ou àquele que ainda não os conhece. Pakennt. Da scheint es, daß der erste unsere Mitteilung nicht bedarf und der zweite mit ihr nichts anfangen kann. Aber wie wenn ich sagte: »Schau! im Damespiel sind alle Steine gleichberechtigt, …« oder noch besser: »Schau! in diesen Spielen sind alle Steine gleichberechtigt, in jenen nicht«. Aber was tut so ein Satz? Er führt einen neuen *Begriff* ein, einen neuen Einteilungsgrund. Ich lehre dich, die Aufgabe beantworten: »Nenne

MS 121, p. 65r

mir Spiele der ersten Art!« etc. Ähnlich aber könnte man Aufgaben stellen: »Erfinde ein Spiel, in dem es einen König gibt«.

MS 121, p. 65v

51. ›Wir können die Brüche nicht ihrer Größe nach in eine Reihe, aber wir *können* sie in eine unendliche Reihe ordnen.‹

Was hat der gelernt, der das nicht wußte? Er hat

MS 121, p. 67r

eine neue Art der Rechnung gelernt, z. B.: »Bestimme die Nummer des Bruches … «.

52. Er lernt diese Technik – aber lernt er nicht auch, daß es so eine Technik gibt?

Ich habe allerdings in einem wichtigen Sinne gelernt, daß es so eine Technik gibt; ich habe nämlich eine Technik kennen gelernt, die sich jetzt auf alles mögliche Andre anwenden läßt.

53. ›Wie würdest du nun *das* nennen?‹

	1	2	3	4	. . .
1	1	3	6	10	
2	2	5	9	.	
3	4	8	.		
4	7	.			
.	.				

Nicht, »eine Methode die Zahlenpaare

MS 121, p. 67v

fortlaufend zu numerieren«?

Und könnte ich nicht auch sagen: »die Zahlenpaare in eine Reihe zu ordnen«?

54. Lehrt mich nun die Mathematik, daß ich die Zahlenpaare in eine Reihe ordnen kann? Kann ich denn sagen: sie lehrt mich, daß ich *das* machen kann? Hat es denn Sinn zu sagen, ich lehre ein Kind, daß man multiplizieren kann – indem ich es lehre zu multiplizieren? Eher könnte man natürlich sagen, ich lehre ihn daß man Brüche multiplizieren kann, nachdem er Kardinalzahlen miteinander zu multiplizieren gelernt hat. Denn nun, könnte man sagen, weiß

rece-me que o primeiro não precisa da nossa informação, e que o segundo não pode fazer nada com ela. Mas e se eu dissesse: “Olhe! No jogo de damas todas as pedras valem o mesmo…”, ou, melhor ainda: “Olhe! Neste jogo todas as pedras valem o mesmo, mas naquele, não”. Mas o que faz uma proposição assim? Ela introduz um novo *conceito*, uma nova razão para a classificação. Eu te ensino a responder à tarefa: “Diga-me o nome

MS 121, p. 65r

de jogos do primeiro tipo!” etc. De modo similar, poder-se-ia pedir a tarefa: “Invente um jogo em que haja um rei”.[133]

MS 121, p. 65v

51. ‘Não podemos ordenar as frações em uma série segundo a sua grandeza, mas *podemos* ordená-las numa série infinita’.

O que aprendeu aquele que não sabia disso? Ele aprendeu

MS 121, p. 67r

um novo tipo de cálculo, por exemplo: “Determine o número da fração …”

52. Ele aprende essa técnica – mas não aprende também que existe uma técnica assim?

Presumidamente aprendi, em um importante sentido, que há uma técnica assim; a saber, fiquei conhecendo uma técnica que se pode aplicar agora a qualquer outro tipo de coisas.

53. ‘Como você chamaria *isto* agora?’

	1	2	3	4	. . .
1	1	3	6	10	
2	2	5	9	.	
3	4	8	.		
4	7	.			
.	.				

Não de “um método de numeração

MS 121, p. 67v

sucessiva de pares de números”?

E eu não poderia dizer também: “de ordenar os pares de números em uma série”?

54. A matemática agora me ensina que posso ordenar os pares de números em uma série? Posso dizer então: ela me ensina que posso fazer *isso*? Então há sentido em dizer que ensino a uma criança que se pode multiplicar – ensinando-a a multiplicar? Poder-se-ia antes dizer, naturalmente, que eu a ensino que se pode multiplicar frações depois que ela aprendeu a multiplicar números cardinais entre si. Pois agora se poderia dizer que ela já sabe o que significa “multiplier schon was »multiplizieren« heißt. Aber wäre nicht auch das irreführend?

MS 121, p. 68r

55. Wenn Einer sagt, ich habe den Satz bewiesen, daß man Zahlenpaare in eine Reihe ordnen könne; so ist zu antworten, daß dies ja kein mathematischer Satz ist, da man mit den Worten »man«, »kann«, »die«, »Zahlenpaare« etc. nicht rechnet. Der Satz »man kann die ... « ist vielmehr nur eine beilaufige Beschreibung der Technik die man lehrt, etwa ein nicht unpassender *Titel*, eine Überschrift zu diesem Kapitel. Aber ein Titel mit dem man, vorderhand, nicht *rechnen* kann.

56. Aber, sagst du, das ist es eben, was der logische

MS 121, p. 68v

Kalkül Freges und Russells tut: in ihm hat jedes Wort, was in der Mathematik gesprochen wird, exakte Bedeutung, ist ein Element des Kalküls. In diesem Kalkül kann man also wirklich beweisen: »man kann multiplizieren«. Wohl, nun ist er ein mathematischer Satz; aber wer sagt, daß man mit diesem Satz etwas anfangen kann? Wer sagt, *wozu* er nütze sein kann? Denn, daß er interessant klingt, ist nicht genug.

Weil wir im Unterricht vielleicht den Satz gebrauchen: »Du siehst also, man kann die Brüche in eine Reihe ordnen«, sagt nicht, daß wir für diesen Satz andere Verwendung haben, als die, ein einprägsames Bild mit dieser Rechnungsart zu verknüpfen.

MS 121, p. 69r

Wenn hier das Interesse an dem Satz haftet, der bewiesen wurde, so haftet es an einem Bild, das eine äußerst schwächliche Berechtigung hat, uns aber durch seine Seltsamkeit reizt, wie etwa das Bild von der ›Richtung‹ des Zeitverlaufs. Es bewirkt einen leisen Taumel der Gedanken.

57. Ich kann hier nur sagen: Trenne dich so bald wie möglich von diesem Bild, und sieh das Interesse der Rechnung in ihrer Anwendung. (Es ist als wären wir auf einem Maskenball, auf dem jede Rechnung in seltsamer Verkleidung erscheint.)

MS 121, p. 69v

58. »Soll man das Wort ›unendlich‹ in der Mathematik vermeiden?« Ja; dort, wo es dem Kalkül eine Bedeutung

MS 121, p. 87v

zu verleihen scheint; statt sie erst von ihm zu erhalten.

car". Mas isso não seria também ilusório?

MS 121, p. 68r

55. Se alguém diz que demonstrei a proposição de que se pode ordenar pares de números em uma série; deve-se responder que esta não é uma proposição matemática, pois não se faz cálculo com as palavras "se", "pode", "os", "pares de números" etc. A proposição "pode-se ..." é antes uma descrição fortuita da técnica que se ensina, por exemplo um *título* não inapropriado, um cabeçalho para este capítulo. Mas um título com o qual não se pode, por enquanto, *calcular*.

56. Mas, você diz, isso é justamente o que faz o

MS 121, p. 68v

cálculo lógico de Frege e de Russell: nele cada palavra que se fala em matemática tem um significado exato, é um elemento do cálculo. Neste cálculo, portanto, pode-se realmente demonstrar: "pode-se multiplicar". Muito bem, então agora ela é uma proposição matemática; mas quem diz que se pode fazer alguma coisa com essa proposição? Quem diz o *para que* ela pode ser utilizada? Já que não basta que soe interessante.

Só porque talvez usemos nas aulas a proposição: "Portanto, vocês podem ver que se pode ordenar as frações numa série", não se pode dizer que temos outro emprego para ela senão a de vincular uma imagem lembrável com este tipo de cálculo.

MS 121, p. 69r

Se aqui o interesse se adere à proposição que foi demonstrada, então ele se adere a uma imagem que tem uma justificação extremamente fraca, mas que nos incita pela sua estranheza, tal como a imagem da 'direção' do decorrer do tempo. Ela produz um calmo desvario dos pensamentos.

57. Aqui só posso dizer: separe-se dessa imagem o mais rápido possível e veja o interesse do cálculo na sua aplicação. (É como se estivéssemos em um baile de máscaras em que cada cálculo aparece com uma roupa estranha.)

MS 121, p. 69v

58. "Deve-se evitar a palavra 'infinito' em matemática?" Sim; ali onde ela parece conferir ao cálculo

MS 121, p. 87v

um significado; em vez de obter um dele antes.[134]

59. Die Redeweise: »Wenn man aber in den Kalkül sieht, ist gar nichts Unendliches da« – natürlich eine ungeschickte Redeweise – aber sie bedeutet: Ist es wirklich nötig das Bild des Unendlichen (der ungeheuern Größe) hier heraufzubeschwören? Und wie ist dieses Bild mit dem *Kalkül* in Verbindung? denn seine Verbindung ist nicht die des Bildes | | | | mit 4.

MS 121, p. 88r

60. So zu tun, als sei man enttäuscht, nichts Unendliches im Kalkül gefunden zu haben, ist freilich komisch; nicht aber zu fragen: welches ist denn die alltägliche Verwendung des Wortes »unendlich«,

MS 121, p. 88v

die ihm seine Bedeutung für uns gibt, und was ist nun seine Verbindung mit diesen mathematischen Kalkülen?

61. Finitismus und Behaviourismus sind ganz ähnliche Richtungen. Beide sagen: hier ist doch nur … . Beide leugnen die Existenz von etwas, beide zu dem Zweck, um aus einer Verwirrung zu entkommen.

62. Was ich tue ist nicht Rechnungen als falsch zu erweisen; sondern das *Interesse* von Rechnungen einer Prüfung zu unterziehen. Ich prüfe etwa die Berechtigung, hier noch das Wort … zu gebrauchen. Eigentlich aber: ich fordere immer wieder zu so einer Untersuchung auf.

MS 121, p. 89r

Zeige, daß es sie gibt, und was da etwa zu untersuchen ist. Ich darf also nicht sagen: »So darf man sich nicht ausdrücken«, oder »Das ist absurd«, oder »Das ist uninteressant«, sondern: »Prüfe diesen Ausdruck in dieser Weise auf seine Berechtigung«.

MS 121, p. 89v

Man kann die Berechtigung eines Ausdrucks, *weil seine Verwendung*, damit nicht übersehen, daß man eine Facette seiner Verwendung ansieht; etwa ein Bild, das sich mit ihm verbindet.

MS 121, p. 92r

59. O modo de falar: “Mas quando se olha para o cálculo não se vê absolutamente nada infinito” – é, naturalmente, um modo de falar desajeitado –, mas ele significa: é realmente preciso evocar aqui a imagem do infinito (da grandeza imensurável)? E como se conecta esta imagem com o *cálculo*? Pois a sua conexão não é a da imagem | | | | com o 4.

MS 121, p. 88r

60. Admite-se que agir como se estivesse decepcionado por não ter encontrado nada de infinito no cálculo é cômico; mas não perguntar: qual é então o emprego cotidiano da palavra “infinito”

MS 121, p. 88v

que dá para nós o seu significado, e qual é agora a sua conexão com esses cálculos matemáticos?

61. Finitismo e behaviorismo são tendências totalmente similares. Ambas dizem: aqui temos somente … . Ambas negam a existência de alguma coisa, ambas com a finalidade de fazer--nos escapar de uma confusão.

62. O que faço aqui não é atestar cálculos como falsos; mas submeter o *interesse* dos cálculos a uma checagem. Eu verifico aqui, por exemplo, a justificativa para ainda se usar a palavra … . Mas, propriamente: volto sempre a incitar uma investigação assim.

MS 121, p. 89r

Mostro que ela existe e o que há ali para investigar. Por isso não posso dizer: “Não podemos nos expressar assim”, ou “Isto é absurdo”, ou “Isto não é interessante”, senão: “Examine a justificação desta expressão deste modo”.

MS 121, p. 89v

Pode-se não se ter uma visão panorâmica da justificação de uma expressão *por causa do seu emprego*, observando-se uma faceta deste emprego; por exemplo, uma imagem a ela vinculada.

MS 121, p. 92r

Teil III
1939-1940

1. ›Ein mathematischer Beweis muß übersichtlich sein.‹ »Beweis« nennen wir nur eine Struktur, deren Reproduktion eine leicht lösbare Aufgabe ist. Es muß sich mit Sicherheit entscheiden lassen, ob wir hier wirklich zweimal den gleichen Beweis vor uns haben, oder

MS 122, p. 5r

nicht. Der Beweis muß ein Bild sein, welches sich mit Sicherheit genau reproduzieren läßt. Oder auch: was dem Beweise wesentlich ist, muß sich mit Sicherheit genau reproduzieren lassen. Er kann z. B. in zwei verschiedenen Handschriften oder Farben niedergeschrieben sein. Zur Reproduktion eines Beweises soll nichts gehören, was von der Art einer genauen Reproduktion eines Farbtones oder einer Handschrift ist.

Es muß leicht sein, *genau* diesen Beweis wieder anzuschreiben. Hierin liegt der Vorteil des geschriebenen

MS 122, p. 5v

im Vergleich zum gezeichneten Beweis. Dieser ist oft seinem Wesen nach mißverstanden worden. Die Zeichnung eines Euklidischen Beweises kann ungenau sein, in dem Sinne, daß die Geraden nicht gerade sind, die Kreisbögen nicht genau kreisförmig etc. etc. und dabei ist die Zeichnung doch ein exakter Beweis und daraus sieht man, daß diese Zeichnung nicht – z. B. – demonstriert, daß eine solche Konstruktion ein Vieleck mit 5 gleich langen Seiten ergibt, daß sie einen Satz der Geometrie, nicht einen über die Eigenschaften von Papier, Zirkel, Lineal und Bleistift beweist.

[Hängt zusammen mit: Beweis ein *Bild* eines Experiments.]

MS 122, p. 6r

2. Ich will sagen: Wenn man eine nicht übersehbare Beweis figur durch Veränderung der Notation übersehbar macht, dann schafft man erst einen Beweis, wo früher

MS 122, p. 6v

keiner war.

Denken wir uns nun einen Beweis für einen Russellschen Additionssatz der Art ›a + b = c‹ der aus ein paar tausend Zeichen bestünde. Du wirst sagen: Zu sehen, ob dieser Beweis stimmt oder nicht, ist eine rein äußerliche Schwierigkeit, die von keinem mathematischen Interesse ist. (»Ein Mensch übersieht leicht, was ein anderer schwer oder gar nicht übersieht« etc. etc.)

Parte III
1939-1940

1. ‘Uma demonstração matemática tem que ser panorâmica.’ Nós só chamamos de “demonstração” uma estrutura cuja reprodução seja uma tarefa facilmente resolvível. Tem que ser possível decidir com certeza se temos diante de nós a mesma demonstração duas vezes ou

MS 122, p. 5r

não. A demonstração tem que ser uma imagem que se pode com certeza reproduzir exatamente. Ou também: o que é essencial na demonstração tem que ser possível de reproduzir exatamente com certeza. Ela pode ser anotada, por exemplo, em duas escritas ou cores diferentes. Não deve fazer parte da reprodução de uma demonstração nada do que é do tipo de uma reprodução exata de um tom de cor ou de uma escrita.

É preciso que seja fácil voltar a escrever *exatamente* essa demonstração. Nisto consiste a vantagem da demonstração escrita

MS 122, p. 5v

em comparação com a desenhada. Esta é com frequência mal-entendida na sua essência. O desenho de uma demonstração euclidiana pode ser inexato no sentido de que as retas não são retas, os arcos não são exatamente circulares etc., etc., e, no entanto, o desenho seja uma demonstração exata, mas daqui pareça que o desenho não demonstra – por exemplo – que esta construção produz um polígono de 5 lados iguais, que ela demonstra uma proposição da geometria, e não uma das propriedades do papel, do compasso, da régua e do lápis.[135]

[Relaciona-se com: demonstração, uma *imagem* de um experimento.]

MS 122, p. 6r

2. Quero dizer: quando se torna panoramicamente visível, pela mudança da notação, a figura da demonstração que não estava assim, então realmente se cria uma demonstração onde antes

MS 122, p. 6v

não havia nenhuma.

Imaginemos agora uma demonstração para uma proposição de adição de Russell, do tipo ‘a + b = c’, que consiste em uns quantos milhares de sinais. Você vai dizer: Ver se esta demonstração está certa ou não é uma dificuldade puramente externa que não tem nenhum interesse matemático. (“Uma pessoa facilmente vê de maneira ampla o que outra dificilmente ou nunca vê de maneira ampla” etc., etc.)

MS 122, p. 7r

Die Annahme ist, daß die Definitionen nur zur Abkürzung des Ausdrucks dienen, zur Bequemlichkeit des Rechnenden; während sie doch ein Teil der Rechnung sind. Mit ihrer Hilfe werden Ausdrücke erzeugt, die ohne ihre Hilfe nicht erzeugt werden könnten.

MS 122, p. 7v

3. Wie ist es aber damit: »Man kann zwar im Russellschen Kalkül nicht 234 mit 537 multiplizieren – im gewöhnlichen Sinn – aber es gibt eine Russellsche Rechnung, die dieser Multiplikation entspricht.« – Welcher Art ist diese Entsprechung? Es könnte so sein: Man kann auch im Russellschen Kalkül diese Multiplikation ausführen, nur in einem andern Symbolismus – wie wir ja auch sagen würden, wir könnten sie auch in einem andern Zahlensystem ausführen. Wir könnten dann also z. B. die praktischen Aufgaben, zu deren

MS 122, p. 8r

Lösung man jene Multiplikation benützt, auch durch die Rechnung im Russellschen Kalkül lösen, nur umständlicher.

Denken wir uns nun die Kardinalzahlen erklärt als 1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, ((1 + 1) + 1) + 1, und so fort. Du sagst, die Definitionen, welche die Ziffern des Dezimalsystems einführen, dienen bloß zur Bequemlichkeit; man könnte die Rechnung 703.000 x 40.000.101 auch in jener langwierigen Schreibweise ausführen. Aber stimmt das? – »Freilich stimmt es! Ich kann doch eine Rechnung in jener Notation anschreiben, konstruieren, die der Rechnung in der Dezimalnotation entspricht.« – Aber wie weiß ich, daß sie ihr entspricht? – Nun, weil ich sie nach einer gewissen Methode

MS 122, p. 8v

aus der andern abgeleitet habe. – Aber wenn ich sie nun nach einer halben Stunde wieder anschaue, kann sie sich da nicht verandert haben? Sie ist ja nicht übersehbar.

Ich frage nun: Könnten wir uns von der Wahrheit des Satzes 7.034.174 + 6.594.321 = 13.628.495 auch durch einen Beweis überzeugen, der in der ersten Notation geführt wäre? – Gibt es so einen Beweis dieses Satzes? – Die Antwort ist: nein.

MS 122, p. 9r

4. Aber lehrt uns Russell nicht doch *eine* Art des Addierens?

Angenommen wir bewiesen auf Russells Methode, daß (Ǝa ..... g) .... (Ǝa ..... i) ⊃ (Ǝa ..... s) eine Tautologie ist; könnten wir nun unser Resultat dahin ausdrücken, g + 1 sei s? Das setzt doch voraus, daß ich

MS 122, p. 11r

die drei Stücke des Alphabets als Repräsentanten des Beweises nehmen kann. Aber zeigt denn das Russells Beweis? Den Russellschen Beweis hätte ich doch offenbar mit solchen Gruppen

MS 122, p. 7r

A suposição é a de que as definições só servem para abreviar a expressão para a conveniência daquele que calcula; ao passo que elas são, de qualquer modo, uma parte do cálculo. Com a sua ajuda se produzem expressões que sem elas não se poderiam produzir.

MS 122, p. 7v

3. Mas que tal isto: “Mesmo que não se possa multiplicar 234 por 537 no cálculo de Russell – no sentido habitual –, existe um cálculo Russelliano que corresponde a esta multiplicação.” – De que tipo é esta correspondência? Isto poderia ser assim: pode-se também efetuar esta multiplicação no cálculo de Russell, só que com outro simbolismo – tal como diríamos que também podemos efetuá-la em outro sistema numérico. Poderíamos então resolver, por exemplo, os problemas práticos para os quais

MS 122, p. 8r

se utiliza aquela multiplicação também pela operação do cálculo Russeliano, só que de forma mais complicada.

Imaginemos agora os números cardinais explicados como 1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, ((1 + 1) + 1) + 1, e assim por diante. Você diz que as definições que introduzem os algarismos do sistema decimal servem apenas por conveniência; o cálculo 703.000 x 40.000.101 também poderia ser efetuado naquela notação enfadonha. Mas isto está certo? – “Supostamente sim! Posso escrever, construir, um cálculo naquela notação que corresponda ao cálculo na notação decimal” – Mas como vou saber se um corresponde ao outro? – Ora, porque o derivei do outro segundo

MS 122, p. 8v

um certo método. – Mas e se depois de meia hora eu olhar para ele de novo, não pode ter mudado? Ele não é mesmo panoramicamente visível.

Pergunto agora: poderíamos nos convencer também da verdade da proposição 7.034.174 + 6.594.321 = 13.628.495 mediante uma demonstração conduzida conforme a primeira notação? – Existe uma demonstração assim desta proposição? – A resposta é: não.

MS 122, p. 9r

4. Mas Russell não nos ensina *um* tipo de adição?

Suponhamos que demonstramos pelo método de Russell que (Ǝa ..... g) .... (Ǝa ..... i) ⊃ (Ǝa ..... s) é uma tautologia; poderíamos agora expressar nosso resultado de que g + i é s? Isto pressupõe que

MS 122, p. 11r

posso tomar as três partes do alfabeto como representantes da demonstração. Mas a demonstração de Russell mostra isto? É evidente que poderia ter conduzido a demonstração de Russell von Zeichen in den Klammem führen können, deren Reihenfolge für mich nichts Charakteristisches gehabt hätten, so daß es nicht möglich gewesen wäre, die Zeichengruppe in einer Klammer durch ihr letztes Glied zu repräsentieren.

Angenommen sogar, der Russellsche Beweis werde mit einer Notation der Art $x_1\ x_2$ … $x_{10}\ x_{11}$ … x_{100} … als in der Dezimalnotation geführt, und es seien 100 Glieder in der ersten, 300 Glieder in der zweiten und 400 Glieder in der dritten Klammer, zeigt

MS 122, p. 11v

der Beweis selbst dann, daß 100 + 300 = 400 ist? – Wie, wenn dieser Beweis einmal zu diesem, einmal zu einem andern Resultat führte, zum Beispiel 100 + 300 = 420? Was bedarf es, um zu sehen, daß das Resultat des Beweises, wenn er richtig geführt ist, immer nur von den letzten Ziffern der ersten zwei Klammern abhängt?

Aber für kleine Zahlen lehrt uns doch Russell addieren; denn dann übersehen wir eben die Zeichengruppen in den Klammern und können *sie* als Zahlzeichen nehmen; zum Beispiel ›xy‹, ›xyz‹, ›xyzuv‹.

Russell lehrt uns also einen anderen Kalkül, um von 2 und 3 zu 5 zu gelangen; und das stimmt auch dann, wenn wir

MS 122, p. 12r

sagen, der logische Kalkül sei nur – Fransen, die dem arithmetischen Kalkül angehängt seien.

Die *Anwendung* der Rechnung muß für sich selber sorgen. Und das ist, was am ›Formalismus‹, richtig ist.

Die Zurückführung der Arithmetik auf symbolische Logik soll die Applikation der Arithmetik zeigen; gleichsam das Ansatzstück, mit welchem sie an ihrer Anwendung angebracht ist. So als zeigte man Einem erst eine Trompete ohne das Mundstück – und nun das Mundstück, welches uns lehrt, wie eine Trompete verwendet, mit dem menschlichen Körper in Kontakt gebracht wird. Das Ansatzstück aber, das uns Russell gibt, ist einerseits zu eng, anderseits

MS 122, p. 12v

zu weit – zu allgemein und zu speziell. Die Rechnung sorgt für ihre eigene Anwendung.

Wir dehnen unsre Ideen von den Rechnungen mit kleinen Zahlen auf die mit großen Zahlen aus, ähnlich wie wir uns vorstellen, daß, wenn die Distanz von hier zur Sonne mit dem Zollstock gemessen werden *könnte*, dann eben das herauskame, was wir heute auf ganz andere Art herausbringen. D. h., wir sind geneigt, die Längenmessung mit dem Zollstab zum Modell zu nehmen auch für die Messung des Abstands zweier Sterne.

Und man sagt, etwa in der Schule: »Wenn wir uns Zollstäbe

MS 122, p. 13r

com aqueles grupos de sinais entre parênteses, cuja sequência nada teria de característico para mim, de modo que não teria sido possível representar o grupo de sinais de um parêntese pelo seu último membro.

Até mesmo pressupondo que a demonstração de Russell fosse conduzida com uma notação do tipo $x_1\ x_2$ … $x_{10}\ x_{11}$ … x_{100} …, tal como na notação decimal, e que houvesse 100 elementos no primeiro parênteses, 300 elementos no segundo e 400 elementos no terceiro, mostraria

MS 122, p. 11v

a própria demonstração que 100 + 300 = 400? – E o que aconteceria se esta demonstração conduzisse ora para este resultado, ora para aquele outro, por exemplo que 100 + 300 = 420? O que seria preciso para ver que o resultado da demonstração, se fosse conduzida corretamente, sempre só depende dos últimos algarismos dos primeiros pares de parênteses?

Mas Russell nos ensina a somar com números pequenos; já que justamente vemos panoramicamente os grupos de sinais nos parênteses e podemos tomá-*los* como numerais; por exemplo, ‘xy’, ‘xyz’, ‘xyzuv’.

Russell nos ensina, portanto, um outro cálculo para se chegar de 2 e 3 a 5; e isto vale até mesmo quando

MS 122, p. 12r

dizemos que o cálculo lógico são apenas – franjas penduradas no cálculo aritmético.

A *aplicação* do cálculo tem que cuidar de si mesma.[136] E isto é o que está correto no ‘formalismo’.[137]

A redução da aritmética à lógica simbólica deve mostrar a aplicação da aritmética; o acessório, por assim dizer, que vem a propósito da sua aplicação. Como se mostrássemos primeiro para alguém um trompete sem o bocal – e depois o bocal que nos ensina como se emprega o trompete quando se o coloca em contato com o corpo humano. Mas o acessório que Russell nos fornece é, por um lado, muito curto, e, por outro lado,

MS 122, p. 12v

muito longo – muito geral e muito específico. O cálculo cuida da sua própria aplicação.

Estendemos nossas ideias de cálculos com números pequenos para os números grandes de maneira similar a quando imaginamos que, se a distância daqui ao sol *pudesse* ser medida com um metro, teríamos o mesmo resultado que hoje poderíamos extrair de uma maneira totalmente diferente. Ou seja, somos inclinados a tomar a medida da extensão com a régua como modelo até mesmo para medir a separação entre duas estrelas.

E na escola se diz, por exemplo: “Se imaginamos que podemos

MS 122, p. 13r

von hier bis zur Sonne gelegt denken, ……« und scheint damit zu erklären, was wir unter dem Abstand zwischen Sonne und Erde verstehen. Und die Verwendung eines solchen Bildes ist ganz in Ordnung, so lange es uns klar ist, daß wir den Abstand von uns zur Sonne messen können, und daß wir ihn nicht mit Zollstäben messen können.

5. Wie, wenn jemand sagen würde: »Der eigentliche Beweis von 1000 + 1000 = 2000 ist doch erst der Russellsche, der zeigt, daß der Ausdruck ……. eine Tautologie ist«? Kann ich denn nicht beweisen, daß eine Tautologie herauskommt, wenn ich in den beiden ersten Klammern

MS 122, p. 13v

je 1000 Glieder und in der dritten 2000 habe? Und wenn ich dies beweisen kann, so kann ich das als Beweis des arithmetischen Satzes ansehen.

In der Philosophie ist es immer gut, statt einer Beantwortung einer Frage eine *Frage* zu setzen.

Denn eine Beantwortung der philosophischen Frage kann leicht ungerecht sein; ihre Erledigung mittels einer andern Frage ist es nicht.

Soll ich also zum Beispiel hier eine *Frage* setzen statt der Antwort, man könne jenen arithmetischen Satz mit Russells Methode nicht beweisen?

MS 122, p. 14r

6. Der Beweis, daß (¹) (²) ⊃ (³) eine Tautologie ist, besteht darin, daß man immer ein Glied der dritten Klammer für ein Glied von 1 oder 2 abstreicht. Und es gibt ja viele Arten und Weisen dieses Kollationierens. Oder man könnte auch sagen: Es gibt viele Arten und Weisen, das Gelingen der 1-1 Zuordnung festzustellen. Eine Art wäre z. B. sternförmige Muster, eines für die linke, eines für die rechte Seite der Implikation zu konstruieren und diese wieder dadurch zu vergleichen, daß man ein Ornament

MS 122, p. 14v

aus beiden bildet.

Man könnte also die Regel geben: »Wenn du wissen willst, ob die Zahlen A und B zusammen wirklich C ergeben, schreib einen Ausdruck der Form ….. an und ordne die Variablen in den Klammern einander zu, indem du den Beweis dafür anschreibst (oder anzuschreiben trachtest), daß der Ausdruck eine Tautologie ist.«

Mein Einwand dagegen ist nun *nicht*, daß es willkürlich ist, gerade diese Art des Kollationierens vorzuschreiben, sondern, daß man auf diese Weise nicht feststellen kann, daß 1000 + 1000 = 2000 ist .

MS 122, p. 15r

colocar réguas daqui até o sol, ……”, e assim parece que se explica o que se compreende pela separação entre o sol e a terra. O emprego de uma imagem como esta estaria totalmente correto na medida em que estivesse claro que podemos medir a separação entre nós e o sol, mas que não podemos medi-la com réguas.

5. Como seria se alguém dissesse: “A demonstração real de que 1000 + 1000 = 2000 é, afinal, a de Russell, porque mostra que a expressão …… é uma tautologia”? Não posso demonstrar que se produz uma tautologia se eu tiver nos primeiros dois parênteses

MS 122, p. 13v

mil elementos, e no terceiro 2000? E se posso demonstrá-lo, posso então considerá-la como demonstração da proposição aritmética.

Em filosofia é sempre melhor colocar uma *questão* do que a resposta de uma questão.

Pois a resposta de uma questão filosófica pode facilmente ser injusta; a sua transação mediante outra questão, não.

Devo então colocar aqui, por exemplo, uma *questão* em vez da resposta sobre não se poder demonstrar aquela proposição aritmética com o método de Russell?

MS 122, p. 14r

6. A demonstração de que (¹) (²) ⊃ (³) é uma tautologia consiste em sempre riscar um membro do terceiro parênteses para um membro do 1 ou do 2. E há muitos modos e maneiras de se fazer esta compilação. Ou poder-se-ia também dizer: há muitos modos e maneiras de se conseguir estabelecer uma correlação 1-1. Um dos tipos, por exemplo, seria construir padrões em forma de estrela, um para o lado esquerdo, um para o lado direito da implicação, e em seguida compará-los novamente, formando um ornamento

MS 122, p. 14v

a partir de ambos.

Poderíamos, portanto, dar a regra: “Se você quiser saber se os números A e B realmente geram em conjunto o C, escreva uma expressão da forma ….., e correlacione as variáveis dos parênteses escrevendo (ou tentando escrever) a demonstração de que a expressão é uma tautologia.”

Minha objeção contra isto *não* é a de que seria arbitrário prescrever justamente este tipo de compilação, mas de que deste modo não se pode estabelecer que 1000 + 1000 = 2000.

MS 122, p. 15r

7. Denke, du hättest eine meilenlange

MS 122, p. 16r

›Formel‹ angeschrieben, und zeigtest durch Transformation, daß sie tautologisch ist (›wenn *sie* sich inzwischen nicht verändert hat‹ müßte man sagen). Nun *zählen* wir die Glieder in den Klammern oder teilen sie ab und machen den Ausdruck übersichtlich, und es zeigt sich, daß in der ersten Klammer 7566, in der zweiten 2434, in de dritten 10000 Glieder stehen. Habe ich nun gezeigt, daß 2434 + 7566 = 10000 ist? – Das kommt drauf an – könnte man sagen – ob du sicher bist, daß das Zählen wirklich die Zahlen der Glieder ergeben hat, die während des Beweises in den Klammern standen.

Könnte man so sagen: »Russell lehrt

MS 122, p. 16v

uns in die dritte Klammer so viele Variablen schreiben als in den beiden ersten zusammen stehen«? Aber eigentlich: er lehrt uns für je eine Variable in (1) und in (2) eine Variable in (3) schreiben.

Aber lernen wir dadurch, welche Zahl die Summe zweier gegebener Zahlen ist? Vielleicht sagt man: »Freilich, denn in der dritten Klammer steht nun das Paradigma, Urbild der neuen Zahl«. Aber inwiefern ist | | | | | | | | | | | | | | | | das Paradigma einer Zahl? Bedenke, wie man es als solches verwenden kann.

MS 122, p. 17r

8. Die Russellsche Tautologie, die dem Satz a + b = c entspricht, zeigt uns vor allem nicht in welcher Notation die Zahl c zu schreiben ist, und es ist kein Grund, warum sie nicht in der Form a + b geschrieben werden soll – Denn Russell lehrt uns ja nicht die Technik des

MS 122, p. 21v

Addierens, etwa, im Dezimalsystem. – Aber könnten wir sie vielleicht aus seiner Technik ableiten?

Fragen wir einmal so: Kann man die Technik des Dezimalsystems aus der des Systems 1 , 1 + 1, (1 + 1) + 1, etc. ableiten?

Könnte man diese Frage nicht auch so stellen: Wenn man eine Rechentechnik in dem einen System und eine im andern System hat, – wie zeigt man, daß die beiden äquivalent sind?

MS 122, p. 22r

9. »Ein Beweis soll nicht nur zeigen, daß es so ist, sondern daß es so sein muß.«

Unter welchen Umständen zeigt dies das Zählen?

7. Imagine que você tivesse escrito

MS 122, p. 16r

uma ‘fórmula’ de uma milha de comprimento, e tivesse mostrado, pelas transformações, que ela é uma tautologia (‘se *ela* não tivesse se modificado neste ínterim’, teríamos que dizer). Agora *contamos* os elementos dentro dos parênteses, ou os dividimos, apresentamos a expressão em visão panorâmica, e se mostra que nos primeiros parênteses há 7566 elementos, nos segundos, 2434, e, nos terceiros, 10000. Teria monstrado agora que 2434 + 7566 = 10000? – Isto depende – poderíamos dizer – de você estar seguro de que a contagem realmente efetuou o número de membros que estavam entre os parênteses durante a demonstração.

Poderíamos dizer assim: “Russell nos ensina

MS 122, p. 16v

a escrever nos terceiros parênteses tantas varíaveis quantas as que estão juntas nos primeiros dois pares de parênteses”? Mas, na realidade: ele nos ensina a escrever, para cada variável em (1) e em (2), uma variável em (3).

Mas aprendemos, deste modo, qual é o número que é a soma de dois números dados? Talvez se diga: “Presumivelmente sim, visto que nos terceiros parênteses está o paradigma, o arquétipo do novo número”. Mas até que ponto | | | | | | | | | | | | | | | | é o paradigma de um número? Considere como se pode empregá-lo como tal.[138]

MS 122, p. 17r

8. Sobretudo, a tautologia de Russell que corresponde à proposição a + b = c não nos mostra em que notação se deve escrever o número c, e não há nenhuma razão pela qual ele não deveria ser escrito na forma a + b – pois Russell não nos ensina, por exemplo, a técnica da

MS 122, p. 21v

adição no sistema decimal. – Mas não poderíamos talvez deduzi-la da sua técnica?

Perguntemo-nos de uma vez: pode-se deduzir a técnica do sistema decimal a partir do sistema 1 , 1 + 1, (1 + 1) + 1 etc.?

Não poderíamos formular esta pergunta também assim: quando se tem uma técnica de cálculo em um sistema, e outra em outro sistema, – como se mostra que ambas são equivalentes?

MS 122, p. 22r

9. “Uma demonstração deve não só mostrar que isto é assim, mas também que isto tem que ser assim.”

Man möchte sagen: »Wenn die Ziffern und das Gezählte ein einprägsames Bild ergeben. Wenn dieses Bild nun statt jedes neuen Zählens dieser Menge gebraucht wird.« – Aber hier scheinen wir nur von *räumlichen* Bildern zu reden: wenn wir aber eine Reihe von Wörtern auswendig wissen und nun zwei solche Reihen einander eins zu eins zuordnen,

MS 122, p. 26v

indem wir zum Beispiel sagen: »der erste – Montag; der zweite – Dienstag; der dritte – Mittwoch; etc.« – konnen wir so nicht *beweisen*, daß von Montag zum Donnerstag vier Tage sind?

Es fragt sich eben: Was nennen wir ein »einpragsämes Bild«? Was ist das Kriterium davon, daß wir es uns eingeprägt haben? Oder ist die Antwort hierauf: »Daß wir es als Paradigma der Identität benützen!«

10. Wir machen nicht *Versuche* an einem Satz oder Beweis, um seine Eigenschaften feszustellen.

Wie reproduzieren wir, kopieren

MS 122, p. 27r

wir einen Beweis? – Nicht, zum Beispiel, indem wir Messungen an ihm anstellen.

Wie, wenn ein Beweis so ungeheuer lang wäre, daß man ihn unmöglich übersehen könnte? Oder sehen wir einen andern Fall an: Man habe als Paradigma der Zahl, die wir 1000 nennen, eine lange Reihe von Strichen in einen harten Fels gegraben. Diese Reihe nennen wir die Urtausend und um zu erfahren, ob tausend Menschen auf einem Platz sind, ziehen wir Striche oder spannen Schnüre (1-1 Zuordnung).

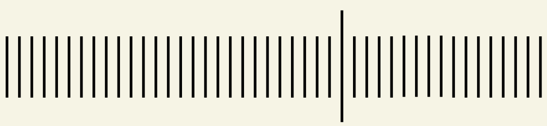
Hier hat nun das Zahlzeichen für 1000 nicht die Identität einer Gestalt, sondern eines physikalischen Gegenstandes. Wir könnten uns ähnlich

MS 122, p. 27v

eine Ur-Hundert etc. denken und einen Beweis, daß 10 x 100 = 1000 ist, den wir nicht *übersehen* könnten.

Die Ziffer für 1000 im 1 + 1 + 1 + 1 . . . System kann nicht durch ihre *Gestalt* erkannt werden.

11.



Sob que circuntâncias a contagem mostra isto?

Alguém se inclinaria a dizer: “Quando os algarismos e o que se conta fornecem uma imagem fácil de lembrar. Quando esta imagem passa a ser usada em vez de cada nova contagem daquela quantidade.” – Mas aqui parece que falamos somente de imagens *espaciais*: mas quando nós sabemos de cor uma série de palavras e passamos a ordenar uma a uma duas séries assim,

MS 122, p. 26v

de modo que, por exemplo, podemos dizer: “primeiro – segunda-feira; segundo – terça-feira; terceiro – quarta-feira etc.” – não poderíamos *demonstrar* assim que de segunda a quinta-feira são quatro dias?

O que precisamente se pergunta: o que chamamos aqui de uma “imagem fácil de lembrar”? Qual é o critério para que isto se grave em nós? Ou a resposta seria nesta ocasião: “Que nós a utilizamos como paradigma de identidade!”?[139]

10. Não fazemos *experimentos* em uma proposição ou demonstração para estabelecer suas propriedades.

Como reproduzimos, copiamos,

MS 122, p. 27r

uma demonstração? – Não, por exemplo, quando tomamos a sua medida.

O que ocorreria se uma demonstração fosse tão incrivelmente longa que seria impossível obter dela uma visão panorâmica? Ou vejamos um outro caso: tomemos como paradigma do número que chamamos de 1.000 uma longa série de traços escavados numa rocha dura. Chamamos esta série de o mil originário, e para confirmar se há mil pessoas em um determinado lugar, desenhamos linhas ou esticamos barbantes (correlação 1-1).

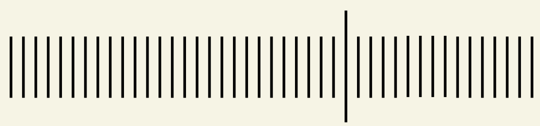
Aqui o numeral que corresponde ao mil não tem a identidade de uma forma, mas de um objeto físico. Nós poderíamos imaginar, de maneira

MS 122, p. 27v

similar, um cem originário, e uma demonstração de que 10 x 100 = 1.000 da qual não poderíamos ter uma *visão panorâmica*.

O algarismo para mil no sistema 1 + 1 + 1 + 1 . . . não pode ser reconhecido pela sua *forma*.

11.



Ist diese Figur ein Beweis für 27 + 16 = 43, weil man zu ›27‹ kommt, wenn man die Striche der linken Seite zäht, zu ›16‹ auf der

MS 122, p. 28r

rechten Seite, und zu ›43‹, wenn man die ganze Reihe zählt?

Worin liegt hier das Seltsame – wenn man die Figur den Beweis dieses Satzes nennt? Doch in der Art, wie dieser Beweis zu reproduzieren oder wiederzuerkennen ist; darin, daß er keine *charakteristische* visuelle Gestalt hat. –

Wenn nun jener Beweis auch keine visuelle Gestalt hat, so kann ich ihn dennoch genau kopieren (reproduzieren) – ist die Figur also nicht doch ein Beweis? Ich

MS 122, p. 28v

könnte ihn etwa in ein Stahlstück einritzen und von Hand zu Hand geben lassen. Ich würde also Einem sagen: »Hier hast du den Beweis, daß 27 + 16 = 43 ist.« – Nun, kann man nicht *doch* sagen: er beweise den Satz mit Hilfe der Figur? Doch; aber die Figur ist nicht der Beweis.

Das aber würde man doch einen Beweis von 250 + 3.220 = 3.470 nennen: Man zählt über 250 hinaus und fängt zugleich auch bei 1 zu zählen an und ordnet die beiden Zählungen einander zu:

251 1
252 2
253 3
etc.
3.470 .... 3.220

MS 122, p. 29r

Man könnte das einen Beweis nennen, der durch 3.220 Stufen fortschreitet. Das ist doch ein Beweis – und kann man ihn übersichtlich nennen??

MS 122, p. 29v

12. Was ist die Erfindung des Dezimalsystems eigentlich? Die Erfindung eines Systems von Abkürzungen – aber was ist das System der Abkürzungen? Ist es bloß das System der neuen Zahlen oder auch ein System ihrer Anwendungen zur Abkürzung? Und ist es das Zweite, dann ist es ja eine neue Anschauungsart des alten Zeichensystems.

Können wir, vom 1 + 1 + 1 . . . System kommend, durch bloße Abkürzungen der Schreibweise im Dezimalsystem rechnen lernen?

MS 122, p. 30v

Esta figura é uma demonstração de que 27 + 16 = 43 porque se chega a ‘27’ quando se conta os traços do lado esquerdo, a ‘16’ do

MS 122, p. 28r

lado direito, e a ‘43’ quando se conta toda a fileira?

Onde está o estranho – quando se chama a figura de demonstração desta proposição? Supostamente na maneira como esta demonstração é reproduzida ou reconhecida; no fato de que ela não tem nenhuma forma visual *característica*. – [140]

Mas ainda que esta demonstração não tenha nenhuma forma visual, posso assim mesmo copiá-la (reproduzi-la) exatamente – a figura não é então uma demonstração? Eu

MS 122, p. 28v

poderia gravá-la numa peça de metal e passá-la de mão em mão. Deste modo, diria para alguém: “Aqui você tem a demonstração de que 27 + 16 = 43”. – Ora, não se pode dizer *afinal de contas*: ele demonstra a proposição com o auxílio da figura? Claro; mas a figura não é a demonstração.

Isto, no entanto, não se chamaria de demonstração de que 250 + 3.220 = 3.470: Conta-se a partir de 250 e, ao mesmo tempo, começa-se a contar a partir de 1, e se correlaciona as duas contagens uma à outra assim:

251 1
252 2
253 3
etc.
3.470 .... 3.220

MS 122, p. 29r

Pode-se chamá-la de uma demonstração contínua em 3.220 passos. Esta é de qualquer forma uma demonstração – e pode-se chamá-la de visão panorâmica??

MS 122, p. 29v

12. O que é propriamente a invenção do sistema decimal? A invenção de um sistema de abreviaturas – mas o que é o sistema de abreviaturas? Ele é meramente o sistema dos novos números ou é também um sistema das suas aplicações como abreviatura? E se for o segundo, então ele é certamente um novo modo de visão do velho sistema de sinais.

Poderíamos, a partir do sistema de 1 + 1 + 1 ... , aprender a calcular no sistema decimal pelas meras abreviaturas da notação?

MS 122, p. 30v

13. Angenommen ich habe nach Russell einen Satz der Form (∃ xyz ...) (∃ uvw ...) ⊃ (∃ abc ...) bewiesen – und nun ›mache ich ihn übersichtlich‹, indem

MS 122, p. 31v

ich über die Variablen Zeichen x_1, x_2, x_3 . . . . schreibe – soll ich nun sagen, ich habe nach Russell einen arithmetischen Satz im Dezimalsystem bewiesen?

Aber jedem Beweis im Dezimalsystem entspricht doch einer im Russellschen System! – Woher wissen wir, daß es so ist? Lassen wir die Intuition beiseite. – Aber man kann es beweisen. –

Wenn man eine Zahl im Dezimalsystem aus 1, 2, 3, ... 9, 0 definiert und die Zeichen 0, 1 ..., 9 aus 1, 1 + 1, (1 + 1) + l, ..., kann man dann durch die rekursive Erklärung des Dezimalsystems hindurch von irgend einer Zahl zu einem Zeichen der Form 1 + 1 + 1 . . . . gelangen?

MS 122, p. 32r

Wie, wenn Einer sagte: Die Russellsche Arithmetik stimmt mit der gewöhnlichen bis zu Zahlen unter 10^{10} überein; dann aber weicht sie von ihr ab. Und nun führt er uns einen R-Beweis dafür vor, daß $10^{10} + 1 = 10^{10}$ ist. Warum soll ich nun einem solchen Beweis nicht trauen? Wie wird man mich davon überzeugen, daß ich mich im R-Beweis verrechnet haben muß?

Brauche ich denn aber einen Beweis aus einem andern System, um mich zu überzeugen, ob ich mich in dem ersten Beweis verrechnet habe? Genügt es nicht, daß ich diesen Beweis übersehbar anschreibe?

14. Liegt denn nicht meine

MS 122, p. 32v

ganze Schwierigkeit darin, einzusehen, wie man, ohne aus Russells logischen Kalkül herauszutreten, zum Begriff der *Menge der Variablen* im Ausdruck ›(∃ xyz ...)‹ kommen kann dort, wo dieser Ausdruck nicht übersehbar ist? –

Nun kann man ihn aber doch übersehbar machen, indem man schreibt: (∃x_1, x_2, x_3, etc). Und dennoch verstehe ich etwas nicht: man hat doch nun das Kriterium für die Identität so eines Ausdrucks geändert! Ich sehe jetzt auf andere Weise, daß die Menge der Zeichen in zwei solchen Ausdrücken dieselbe ist.

MS 122, p. 33r

Ich bin eben versucht zu sagen: Russells Beweis kann wohl Stufe für Stufe weitergehen, aber am Schluß wisse man nicht recht, was man bewiesen habe – wenigstens nicht nach den alten Kriterien. Indem ich den Russellschen Beweis übersichtlich mache, beweise ich etwas über diesen Beweis.

13. Suponhamos que tenha demonstrado, segundo Russell, uma proposição da forma (∃ xyz ...) (∃ uvw ...) ⊃ (∃ abc ...) – e agora 'a coloco em visão panorâmica'

MS 122, p. 31v

anotando sobre as variáveis os sinais x_1, x_2, x_3 . . . . – devo dizer agora que demonstrei segundo Russell uma proposição aritmética no sistema decimal?

Mas toda demonstração no sistema decimal corresponde a uma do sistema de Russell! – Como saberíamos que isto é assim? Deixemos de lado a intuição. – Mas isto se pode demonstrar. –

Se definimos um número no sistema decimal a partir de 1, 2, 3, ... 9, 0, e os números 0, 1, 2, 3, ... 9 a partir de 1, 1 + 1, (1 + 1) + l, ..., poderíamos então, pela explicação recursiva do sistema decimal, chegar, a partir de qualquer número, a um sinal da forma 1 + 1 + 1 . . .. ?

MS 122, p. 32r

E se alguém dissesse: A aritmética de Russell concorda com a usual até números abaixo de 10^{10}; mas a partir daí difere dela. E então demonstra por uma prova-R[141] que $10^{10} + 1 = 10^{10}$. Por que não deveria confiar numa prova destas? Como alguém me convenceria de que eu teria que ter me confundido no cálculo na prova-R?

Precisaria então de uma demonstração em outro sistema para que me convencesse de que teria calculado errado na primeira demonstração? Não seria o suficiente se anotasse esta demonstração em perspectiva panorâmica?[142]

14. Toda a minha dificuldade

MS 122, p. 32v

não estaria então em perceber, sem sair do cálculo lógico de Russell, como se pode chegar ao conceito de *conjunto de variáveis* na expressão '(∃ xyz ...)', onde esta expressão não é vista panoramicamente? –

Mas pode-se torná-la agora panoramicamente visível escrevendo: (∃x_1, x_2, x_3 etc). E no entanto há algo que não compreendo: o critério de identidade de tal expressão foi alterado agora! Vejo agora de outra forma que o conjunto de sinais destas duas expressões é o mesmo.

MS 122, p. 33r

O que precisamente estou tentado a dizer: a prova de Russell pode ser seguida passo a passo, mas ao final não se sabe direito o que foi demonstrado – pelo menos não de acordo com os velhos critérios. Ao tornar a demonstração Russell numa apresentação panorâmica demonstro algo sobre esta demonstração.

Ich will sagen: man brauche die Russellsche Rechen-

MS 122, p. 33v

technik gar nicht anzuerkennen – und könne mit einer andern Rechentechnik beweisen, daß es einen Russellschen Beweis des Satzes geben *müsse*. Dann aber ruht der Satz freilich nicht mehr auf dem R-Beweis.

Oder: Daß man sich zu jedem bewiesenen Satz der Form m + n = 1 einen Russellschen Beweis vorstellen kann, zeigt nicht, daß der Satz auf diesem Beweis ruht. Denn der Fall ist denkbar, daß man den R-Beweis eines Satzes vom R-Beweis eines andern Satzes gar nicht unterscheiden kann und nur darum sagt, sie seien verschieden, weil sie die übersetzungen zweier erkennbar verschiedener

MS 122, p. 34r

Beweise sind.

Oder: Etwas hört auf, Beweis zu sein, wenn es aufhört, Paradigma zu sein, z. B. Russells logischer Kalkül; und anderseits ist jeder andere Kalkül annehmbar, der uns als Paradigma dient.

MS 122, p. 34v

15. Es ist eine Tatsache, daß verschiedene Methoden der Zählung so gut wie immer übereinstimmen.

Wenn ich die Felder eines Schachbretts zähle, komme

MS 122, p. 36v

ich so gut wie immer zu ›64‹.

Wenn ich zwei Reihen von Wörtern auswendig weiß, z. B. Zahlwörter und das Alphabet, und ich ordne sie nun einander 1-1 zu

a 1
b 2
c 3
etc.

so komme ich bei ›z‹ so gut wie immer zu ›26‹.

Es gibt so etwas wie: eine Reihe von Wörtern auswendig können. Wann sagt man, ich wisse das Gedicht . . . auswendig? Die Kriterien sind ziemlich kompliziert. Übereinstimmung mit dem gedruckten Texte ist eines. Was müßte geschehen, das mich zweifeln machte, daß ich wirklich das ABC auswen-

Quero dizer: não se precisa de nenhum modo

MS 122, p. 33v

aceitar a técnica de cálculo de Russell – e pode-se demonstrar com uma outra técnica de cálculo que *teria que* haver uma demonstração Russelliana da proposição. Mas já então a proposição efetivamente não mais repousa sobre a prova-R.

Ou: que se possa imaginar uma demonstração Russelliana para toda proposição demonstrada da forma m + n = 1 não mostra que a proposição repousa sobre esta demonstração. Pois é concebível o caso de que não se possa em absoluto diferenciar a prova-R de uma proposição da prova-R de outra proposição, e só se diga que são diferentes porque são traduções de duas demonstrações reconhecíveis

MS 122, p. 34r

como diferentes.

Ou: alguma coisa deixa de ser uma demonstração quando deixa de ser um paradigma, por exemplo o cálculo lógico de Russell; e, por outro lado, é aceitável qualquer outro cálculo que nos sirva de paradigma.

MS 122, p. 34v [143]

15. É um fato que diferentes métodos de contagem quase sempre concordam entre si.

Se conto os quadrados de um tabuleiro de xadrez, quase sempre

MS 122, p. 36v

chego a '64'.

Se sei de cor duas séries de palavras, por exemplo os numerais e o alfabeto, e os correlaciono 1-1, assim:

a 1
b 2
c 3
etc.,

então com 'z' quase sempre chego a '26'.

Existe alguma coisa como: poder saber de cor uma série de palavras. Quando se diz que eu sei o poema . . . de cor? Os critérios são bastante complicados. Concordância com o texto impresso é um deles. O que teria que ocorrer para que pudesse duvidar que sei de cor realmente

MS 122, p. 37r

dig weiß? Es ist schwer vorzustellen.

Aber ich verwende nun das Aufsagen oder Anschreiben aus dem Gedächtnis einer Wortfolge als Kriterium der Zahlengleichheit,

MS 122, p. 37v

Mengengleichheit.

Soll ich nun sagen: Das macht ja alles nichts – die Logik bleibt doch der Grundkalkül, nur wird freilich, ob ich zweimal dieselbe Formel vor mir habe, von Fall zu Fall verschieden festgestellt?

MS 122, p. 38r

16. Es ist nicht die Logik, die mich zwingt – möchte ich sagen – einen Satz von der Form $(\exists\ \ )(\exists\ \ ) \supset (\exists\ \ )$ anzuerkennen, wenn in den ersten beiden Klammern je eine Million Variablen ist und in der dritten zwei Millionen. Ich will sagen: die Logik zwänge mich in diesem Falle gar nicht, irgend einen Satz anzuerkennen. Etwas *anderes* zwingt mich, so einen Satz als der Logik gemäß anzuerkennen.

Die Logik zwingt mich nur, sofern mich der logische Kalkül

MS 122, p. 38v

zwingt.

Aber es ist doch dem Kalkül mit 1.000.000 wesentlich, daß sich diese Zahl muß in eine Summe 1 + 1 + 1 ... auflösen lassen! Und um sicher zu sein, daß wir die richtige Anzahl von Einsern vor uns haben, können wir die Einser numerieren:

$$\underset{1}{1} + \underset{2}{1} + \underset{3}{1} + \underset{4}{1} + \ldots + \underset{1000000.}{1}$$

Diese Notation wäre ähnlich der: ›100,000.000,000‹ die ja auch das Zahlzeichen übersehbar macht. Und ich kann mir doch denken, jemand hätte große Summen Geldes in Pfennigen in ein Buch eingetragen, wo sie etwa als 100stellige Zahlen erschienen, mit denen ich nun zu rechnen hätte. Ich finge nun damit an, sie mir in eine übersehbare Notation zu übersetzen, würde sie aber doch, ›Zahlzeichen‹ nennen, sie als Dokumente von

MS 122, p. 39r

Zahlen behandeln. Ja ich würde es sogar als Dokument einer Zahl ansehen, wenn mir einer sagte, N hat soviele Schillinge, als Erbsen in dieses Faß gehen. Anders wieder: »Er hat soviele Schillinge als das Hohe Lied Buchstaben hat.«

MS 122, p. 37r

o abecedário? É difícil imaginar.

Mas eu emprego, de fato, o recitar ou o escrever de memória uma série de palavras como critério de igualdade de números,

MS 122, p. 37v

igualdade de conjuntos.

Devo dizer agora: nada disto importa tanto – a lógica permanece ainda como o cálculo fundamental, só que, de qualquer modo, se tenho duas vezes diante de mim a mesma fórmula se define de maneira diferente em cada caso?

MS 122, p. 38r

16. Não é a lógica que me obriga – gostaria de dizer – a reconhecer uma proposição da forma $(\exists\ \ )(\exists\ \ ) \supset (\exists\ \ )$, se nos dois primeiros pares de parênteses houver um milhão de variáveis, e, no terceiro, dois milhões. Quero dizer: a lógica não me obriga de nenhum modo a reconhecer neste caso qualquer proposição. Alguma coisa *diferente* me obriga a reconhecer uma proposição como esta segundo a lógica.

A lógica só me obriga contanto que me obrigue o cálculo

MS 122, p. 38v

lógico.

Mas é essencial para o cálculo com 1.000.000 que este número tenha que ter uma solução possível em uma soma 1 + 1 + 1 ...! E para que estejamos seguros de que temos diante de nós o número correto de unidades, podemos numerá-las:

$$\underset{1}{1} + \underset{2}{1} + \underset{3}{1} + \underset{4}{1} + \ldots + \underset{1.000.000.}{1}$$

Esta notação seria semelhante a: ‘100.000.000.000’, que também torna o numeral panoramicamente visível. Posso imaginar que alguém tivesse uma grande soma de dinheiro registrada em centavos em um livro, no qual eles aparecessem como números de cem dígitos que teria agora que calcular. Começaria agora a traduzi-los para mim numa notação panoramicamente visível, mas ainda os chamaria de ‘numerais’, os trataria como escriturações

MS 122, p. 39r

de números. Pois os consideraria como escrituração de um número até mesmo se alguém me dissesse que N tem tantos reais quantas ervilhas cabem dentro deste tonel. Outra alternativa: “Ele tem tantos reais quantas letras existem nos Cânticos de Salomão.”[144]

17. Die Notation ›x_1, x_2, x_3, . . .‹ macht den Ausdruck ›(Ǝ ....)‹, zur Gestalt und damit die R-bewiesene Tautologie.

Laß mich so fragen: Ist

MS 122, p. 39v

es nicht denkbar, daß die 1-1 Zuordnung im Russellschen Beweis nicht verläßlich vollzogen werden kann, daß z. B., wenn wir sie zum Addieren benutzen wollen, regelmäßig sich ein dem gewöhnlichen Resultate widersprechendes ergibt, und daß wir das auf eine Ermüdung schieben, die, ohne daß wir's merken, uns gewisse Schritte überspringen laßt? Und könnten wir dann nicht sagen: – wenn wir nur nicht ermüdeten, würde sich das gleiche Resultat ergeben –? Darum, weil es die *Logik* fordert? Fordert sie es denn? Berichtigen wir hier nicht die Logik mit einem anderen Kalkül?

MS 122, p. 40r

Nehmen wir an, wir nähmen immer 100 Schritte des logischen Kalküls zusammen und erhielten nun verläßliche Resultate, während wir sie nicht erhalten, wenn wir alle Schritte einzeln auszuführen versuchen – man möchte sagen: die Rechnung basiert ja doch auf Einerschritten, da ein Hundertschritt durch Einerschritte definiert ist. – Die Definition sagt doch: einen Hundertschritt machen, sei dasselbe wie . . . . ., und doch machen wir den Hundertschritt und *nicht* die hundert Einerschritte.

Beim abgekürzten *Rechnen* folge ich doch einer *Regel* – und wie wurde diese Regel begründet? – Wie, wenn der gekürzte und der ungekürzte Beweis verschiedene Resultate ergeben?

MS 122, p. 40v

18. Was ich sage, kommt doch darauf hinaus: daß ich z. B. ›10‹ als ›1 + 1 + 1 + 1 . . .‹ definieren kann und ›100 x 2‹ als ›2 + 2 + 2 . . .‹, aber darum nicht notwendig ›100 x 10‹ als ›10 + 10 + 10 ...‹ oder gar als ›1 + 1 + 1 + 1 . . .‹.

Ich kann mich davon , daß 100 x 100 = 10.000 ist, durch ein ›abgekürztes‹ Verfahren überzeugen. Warum soll ich dann nicht *dieses* als das ursprüngliche Beweisverfahren betrachten?

Ein abgekürztes Verfahren lehrt mich, was bei dem unabgekürten herauskommen *soll*. (Statt daß es umgekehrt wäre.)

MS 122, p. 41r

19. »Die Rechnung basiert ja doch auf den Einerschritten . . .«. Ja; aber auf andre Weise. Der Beweisvorgang ist eben ein anderer.

17. A notação 'x_1, x_2, x_3, . . .' dá uma forma à expressão '(Ǝ ....)', e, assim, para a tautologia demonstrada em R.

Deixe-me perguntar: não seria

MS 122, p. 39v

de se imaginar que a correlação 1-1 na prova de Russell não pode ser efetuada com confiabilidade, que se a queremos usar para a adição, por exemplo, regularmente obtemos um resultado em contradição com o usual e que a isto atribuímos o cansaço que, sem que nos apercebamos, nos deixa saltar certos passos? E não poderíamos então dizer: – só se não nos cansássemos é que obteríamos o mesmo resultado –? É porque a *lógica* o exige? Ela exige isto, então? Não estamos aqui corrigindo a lógica com um outro cálculo?[145]

MS 122, p. 40r

Suponhamos que juntássemos sempre 100 passos do cálculo lógico e obtivéssemos agora resultados confiáveis, enquanto que não os obteríamos se tentássemos efetuar todos os passos individualmente – gostaríamos de dizer: o cálculo ainda se baseia em passos unitários, pois o passo de uma centena se define pelo passo unitário. – Mas a definição diz: dar o passo de uma centena é o mesmo que . . . . ., e ainda assim damos o passo de uma centena e *não* o centésimo passo unitário.

Pelo *cálculo* abreviado ainda sigo uma *regra* – e como se fundamenta esta regra? – E se a demonstração abreviada e a não abreviada produzem diferentes resultados?

MS 122, p. 40v

18. O que digo se resume a isto: que, por exemplo, posso definir '10' como '1 + 1 + 1 + 1 . . .', e '100 x 2' como '2 + 2 + 2 ....', mas não por isto necessariamente '100 x 10' como '10 + 10 + 10 ...', ou sequer como '1 + 1 + 1 + 1 . . .'.

Posso me convencer, por um procedimento 'abreviado', de que 100 x 100 = 10.000 . Por que não devo então considerar que seria *este* o procedimento de demonstração originário?

Um procedimento abreviado me ensina o que *deve* resultar do não-abreviado. (Em vez do contrário.)

MS 122, p. 41r

19. "O cálculo se baseia efetivamente em passos individuais...". Sim; mas de outra maneira. O processo de demonstração justamente é outro.

Ich könnte zum Beispiel sagen: 10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + l und *gleichermaßen* 100 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10. Habe ich nicht die Erklärung von 100 auf die successive Addition von 1 basiert? Aber in derselben Weise, als hätte ich 100 Einser addiert? Braucht es in meiner Notation überhaupt ein Zeichen der Form – ›1 + 1 + 1 . . .‹ mit 100 Summanden geben?

Die Gefahr scheint hier zu sein, das gekürzte Verfahren als einen blassen Schatten des

MS 122, p. 41v

ungekürzten anzusehen. Die Regel des Zählens ist nicht das Zählen.

20. Worin besteht es, 100 Schritte des Kalküls, ›zusammenzunehmen‹? Doch darin, daß man nicht die Einerschritte, sondern einen andern Schritt als maßgebend ansieht.

MS 122, p. 42r

Beim gewöhnlichen Addieren von ganzen Zahlen im Dezimalsystem machen wir Einerschritte, Zehnerschritte, etc. Kann man sagen, das Verfahren basiere auf dem, nur Einerschritte zu machen? Und man könnte es so begründen: Das Resultat der Addition schaut allerdings so aus – ›7.583‹, aber die Erklärung dieses Zeichens, seine Bedeutung, die endlich auch in seiner Anwendung zum Ausdruck kommen muß, ist doch dieser Art: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 usf. Aber

MS 122, p. 42v

ist dem so? Muß das Zahlzeichen so erklärt werden oder diese Erklärung implizite in seiner Anwendung zum Ausdruck kommen? Ich glaube, wenn wir nachdenken, zeigt sich's, es ist nicht der Fall.

Das Rechnen mit Kurven oder mit dem Rechenschieber.

Freilich wenn wir die eine Art des Rechnens mit der anderen kontrollieren, kommt normalerweise dasselbe heraus. Wenn es nun aber mehrere Arten gibt – wer sagt, wenn sie nicht übereinstimmen, welches die eigentliche, an der Quelle der Mathematik sitzende Rechnungsweise ist?

MS 122, p. 43r

21. Wo ein Zweifel darüber auftauchen kann, ob *dies* wirklich das Bild *dieses* Beweises ist, wo wir bereit sind, die Identität eines Beweises anzuzweifeln, dort hat die Ableitung ihre Beweiskraft verloren. Denn der Beweis dient uns ja als Maß.

Könnte man sagen: Zu einem Beweise gehört ein von uns anerkanntes Kriterium der richtigen Reproduktion des Beweises?

Eu poderia, por exemplo, dizer: que 10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + l, e, *do mesmo modo*, que 100 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10. Não dei como base para a explicação de 100 a adição sucessiva de 1? Mas da mesma maneira como se tivesse adicionado 100 unidades? Seria preciso dar afinal à minha notação um sinal da forma – '1 + 1 + 1 . . .' com 100 termos?

O perigo aqui parece ser o de olhar o procedimento abreviado como uma pálida sombra

MS 122, p. 41v

do não-abreviado. A regra da contagem não é a contagem.

20. Em que consiste 'juntar' 100 passos do cálculo? Em que se veja como determinante não o passo unitário, mas um passo diferente.

MS 122, p. 42r

Na adição ordinária de números inteiros no sistema decimal damos passos unitários, passos decimais etc. Pode-se dizer que o procedimento se baseia em dar somente passos unitários? E pode-se fundamentá-lo assim: De todo modo o resultado da adição se parece com este – '7.583', mas a explicação deste sinal, o seu significado, que tem que ser finalmente também expresso em seu emprego, é deste tipo: 1 + 1 + 1 + 1 + 1, e assim por diante. Mas

MS 122, p. 42v

isto é assim? O numeral tem que ser explicado deste modo ou esta explicação ganha expressão implícita em seu emprego? Acredito que se refletimos mais um pouco, mostra-se que este não é o caso.

O cálculo com curvas ou com réguas de cálculo.

De qualquer forma, se controlamos um tipo de cálculo com o outro, normalmente obtemos o mesmo resultado. Se há, porém, vários tipos – quem vai dizer, se eles não concordam entre si, qual é o modo próprio de calcular assentado na fonte da matemática?

MS 122, p. 43r [146]

21. Onde se pode assomar uma dúvida acerca de se *esta* é realmente a imagem *desta* demonstração, onde estivermos dispostos a colocar dúvidas sobre a identidade de uma demonstração, ali a dedução perde o seu poder probatório. Pois a demonstração nos serve de métrica.

Pode-se dizer: a uma demonstração pertence um critério reconhecido por nós de reprodução correta da demonstração?

Das heißt z. B.: wir müssen sicher sein können, es muß uns als sicher feststehen, daß wir beim Beweisen kein Zeichen übersehen haben. Daß uns kein Teufelchen betrogen haben kann, indem es Zeichen ohne

MS 122, p. 44r

unser Wissen verschwinden ließ, hinzusetzte, etc.

Man könnte sich so ausdrücken: Wo man sagen kann: »auch wenn uns ein Dämon betrogen hätte, so wäre doch alles in Ordnung«, dort hat der Schabernack, den er uns antun wollte, eben seinen Zweck verfehlt.

MS 122, p. 44v

22. Der Beweis, könnte man sagen, zeigt nicht bloß, *daß* es so ist, sondern: *wie* es so ist. Er zeigt, *wie* 13 + 14 27 ergeben.

»Der Beweis muß übersehbar sein« – heißt: wir müssen bereit sein, ihn als Richtschnur unseres Urteilens zu gebrauchen.

Wenn ich sage »der Beweis ist ein Bild« – so kann man sich ihn als kinematographisches Bild denken.

MS 122, p. 45r

Den Beweis macht man ein für alle Mal.

MS 122, p. 45v

Der Beweis muß natürlich vorbildlich sein.

Der Beweis (das Beweisbild) zeigt uns das Resultat eines Vorgangs (der Konstruktion); und wir sind überzeugt, daß ein *so* geregeltes Vorgehen immer zu diesem Bild führt.

MS 122, p. 46v

(Der Beweis führt uns ein synthetisches Faktum vor.)

23. Mit dem Satz, der Beweis sei ein Vorbild, – dürfen wir natürlich nichts Neues sagen.

Der Beweis muß ein Vorgang sein, von dem ich sage: Ja, so muß es sein; das muß herauskommen, wenn ich nach dieser Regel vorgehe.

Isto significa, por exemplo: temos que estar certos de que ela tem que estabelecer para nós como certo que não negligenciamos nenhum sinal na demonstração. Que nenhum diabinho pode nos ter enganado ao fazer desaparecer um sinal,

MS 122, p. 44r

ou tê-lo colocado etc, sem que o soubéssemos.

Pode-se expressar assim: onde se pode dizer "mesmo que um demônio houvesse nos enganado, tudo ainda estaria em ordem", então o embuste que ele queria nos impingir fracassou no seu objetivo.

MS 122, p. 44v [147]

22. Pode-se dizer que a demonstração não somente mostra *que* isto é assim, mas: *como* é isto. Ela mostra *como* 13 + 14 resulta em 27.

"A demonstração tem que ter uma visão panorâmica" – significa: temos que estar prontos a usá-la como orientação para os nossos juízos.

Quando digo "A demonstração é uma imagem", – pode-se vê-la como uma imagem cinematográfica.

MS 122, p. 45r

Faz-se uma demonstração de uma vez por todas.

MS 122, p. 45v

A demonstração, naturalmente, tem que ser modelar.

A demonstração (a imagem da demonstração) nos mostra o resultado de um processo (de construção); e ficamos convencidos de que um procedimento regulado *assim* sempre nos conduz a esta imagem.

MS 122, p. 46v

(A demonstração nos exibe um fato sintético.)[148]

23. Com a proposição de que a demonstração é um modelo – não podemos dizer, naturalmente, nada de novo.

A demonstração tem que ser um processo do qual diga: sim, tem que ser assim; tem que resultar nisto se procedo segundo esta regra.

Der Beweis, könnte man sagen, muß ursprünglich eine Art Experiment sein – wird aber

MS 122, p. 47r

dann einfach als Bild genommen.

Wenn ich 200 Äpfel und 200 Äpfel zusammenschütte und zähle, und es kommt 400 heraus, so ist das kein Beweis für 200 + 200 = 400. Das heißt, wir würden dieses Faktum nicht als Paradigma zur Beurteilung aller ähnlicher Situationen verwenden wollen.

Zu sagen: »diese 200 Äpfel und diese 200 Äpfel geben 400« – sagt: Wenn man sie zusammenschüttet, kommt keiner weg noch dazu, sie verhalten sich *normal*.

MS 122, p. 47v

24. »Das ist das Vorbild der Addition von 200 und 200« – nicht: »Das ist das Vorbild davon, daß 200 und 200 addiert 400 ergeben«. Der Vorgang des Addierens *ergab* allerdings 400, aber dies Resultat nehmen wir nun zum Kriterium der richtigen Addition – oder einfach: der Addition – dieser Zahlen.

MS 122, p. 48r

Der Beweis muß unser Vorbild, unser Bild, davon sein, wie diese Operationen *ein Ergebnis* haben.

MS 122, p. 48v

Der ›bewiesene Satz‹ drückt aus, was aus dem Beweisbild abzulesen ist.

MS 122, p. 48r

Der Beweis ist unser Vorbild des richtigen Zusammenzählens von 200 Äpfeln und 200 Äpfeln. Das heißt, er bestimmt einen neuen Begriff: ›das Zusammenzählen von 200 und 200 Gegenständen‹. Oder man könnte auch sagen: »ein neues Kriterium dafür, daß nichts weggekommen oder dazugekommen ist«.

Der Beweis *definiert* das ›richtige Zusammenzählen‹.

Der Beweis ist unser Vorbild eines bestimmten *Ergebens*, wel ches als Vergleichsobjekt

MS 122, p. 48v

Pode-se dizer que a demonstração tem que ser originalmente uma espécie de experimento – mas vem

MS 122, p. 47r

a ser tomada em seguida simplesmente como imagem.

Quando despejo de uma vez 200 maçãs e 200 maçãs e as conto, e o resultado é de 400, isto não é uma demonstração de que 200 + 200 = 400. Ou seja, não empregaríamos de bom grado este fato como paradigma para julgar todas as situações similares.

Dizer: “Estas 200 maçãs e estas 200 maçãs dão 400” – é dizer: Se as despejamos de uma vez, nenhuma escapa, elas se comportam *normalmente*.[149]

MS 122, p. 47v

24. “Este é o modelo da adição de 200 e 200” – não: “Este é o modelo de que 200 e 200 adicionados dão 400”. O processo da adição *dá* de qualquer modo em 400, mas tomamos agora este resultado como critério para a adição correta – ou simplesmente: da adição – destes números.

MS 122, p. 48r

A demonstração tem que ser nosso modelo, nossa imagem, de como estas operações dão *um resultado*.

MS 122, p. 48v [150]

A ‘proposição demonstrada’ expressa o que deve ser lido na imagem da demonstração.

MS 122, p. 48r

A demonstração é o nosso modelo da soma de 200 maçãs e 200 maçãs. Ou seja, ela determina um novo conceito: ‘a soma conjunta de 200 objetos e 200 objetos’. Ou pode-se também dizer: “um novo critério de que nada escapou ou se acrescentou.”

A demonstração *define* a ‘soma conjunta correta’.

A demonstração é o nosso modelo de um *resultado* determinado, que serve como objeto de comparação

MS 122, p. 48v

(Maßstab) für wirkliche Veränderungen dient.

MS 122, p. 49r

25. Der Beweis überzeugt uns von etwas – aber nicht der Gemütszustand des Überzeugtseins interessiert uns – sondern die Anwendungen, die diese Überzeugung belegen.

Daher läßt uns die Aussage kalt: der Beweis überzeuge uns von der Wahrheit dieses Satzes, – da dieser Ausdruck der verschiedensten Auslegungen fähig ist.

Wenn ich sage: »der Beweis

MS 122, p. 50r

überzeugt mich von etwas«, so muß aber der Satz, der dieser Überzeugung Ausdruck gibt, nicht im Beweise konstruiert werden. Wie wir z. B. multiplizieren, aber nicht notwendigerweise das Ergebnis in Form des Satzes ›.... x .... = ...‹ hinschreiben. Man wird also wohl sagen: die Multiplikation gebe uns diese überzeugung, ohne daß der *Satz*, der sie ausdrückt, je ausgesprochen wird.

MS 122, p. 50v

Ein psychologischer Nachteil der Beweise, die *Sätze* konstruieren, ist, daß sie uns leichter vergessen lassen, daß der *Sinn* des Resultats nicht aus diesem allein abzulesen ist, sondern aus dem Beweis. In dieser Hinsicht hat das Eindringen des Russellschen Symbolismus in die Beweise viel Schaden getan.

Die Russellschen Zeichen hüllen die wichtigen Formen des Beweises

MS 122, p. 51r

gleichsam bis zur Unkenntlichkeit ein, wie wenn eine menschliche Gestalt in viele Tücher gewickelt ist.

26. Bedenken wir, wir werden in der Mathematik von *grammatischen* Sätzen überzeugt; der Ausdruck, das Ergebnis, dieser überzeugtheit

MS 122, p. 52r

ist also, daß wir eine *Regel annehmen*.

Nichts ist wahrscheinlicher, als daß der Wortausdruck des Resultats eines mathematischen Beweises dazu angetan ist, uns einen Mythus vorzuspiegeln.

MS 122, p. 52v

(padrão de medida) para mudanças reais.[151]

MS 122, p. 49r

25. A demonstração nos convence de algo – mas não nos interessa o estado de ânimo do estar convencido, – senão as aplicações que comprovam este convencimento.

Por isto a afirmação nos deixa gelados: a demonstração nos convence da verdade desta proposição, – posto que esta expressão é capaz das mais variadas exegeses.

Quando digo: “a demonstração

MS 122, p. 50r

me convenceu de algo”, a proposição que dá expressão a este convencimento não tem que ter sido construída na demonstração. Assim, por exemplo, multiplicamos mas não necessariamente anotamos o resultado na forma da proposição ‘.... x .... = ...’. Pode-se muito bem dizer: a multiplicação nos dá este convencimento sem que a *proposição* que a expressa seja sequer proferida.

MS 122, p. 50v

Uma desvantagem psicológica das demonstrações que constroem *proposições* é que elas nos deixam facilmente esquecer que o *sentido* do resultado não é para ser lido só nele, mas na demonstração. A este respeito a invasão do simbolismo de Russell na demonstração causou muito dano.

Os sinais Russellianos encobrem as formas importantes da demonstração

MS 122, p. 51r

até, por assim dizer, torná-las irreconhecíveis, assim como a forma humana está empacotada por um monte de panos.[152]

26. Levemos em consideração de que somos convencidos em matemática por proposições *gramaticais*; a expressão, o resultado, deste convencimento

MS 122, p. 52r

é, portanto, o de que *aceitamos uma regra*.

Nada é mais provável do que a expressão verbal do resultado de uma demonstração matemática ter sido feita para nos fazer acreditar em um mito.

MS 122, p. 52v

27. Ich will etwa sagen: Wenn auch der bewiesene mathematische Satz auf eine Realität außerhalb seiner selbst zu deuten scheint, so ist er doch nur der Ausdruck der Anerkennung eines neuen Maßes (der Realität).

Wir nehmen also die Konstruierbarkeit (Beweisbarkeit) dieses Symbols (nämlich des mathematischen Satzes) zum Zeichen dafür, daß wir Symbole so und so transformieren sollen.

Wir haben uns im Beweis zu einer Erkenntnis durchgerungen? Und der letzte Satz spricht diese Erkenntnis aus? Ist diese Erkenntnis nun frei vom Beweis (ist die Nabelschnur ab-

MS 122, p. 53r

geschnitten)? – Nun, der Satz wird jetzt allein und ohne das Anhängsel des Beweises verwendet.

Warum soll ich nicht sagen: ich habe mich im Beweis zu einer *Entscheidung* durchgerungen?

Der Beweis stellt diese Entscheidung in ein System von Entscheidungen.

(Ich könnte natürlich auch sagen: »der Beweis überzeugt mich von der Zweckmäßigkeit dieser Regel«. Aber das zu sagen könnte leicht irreführen.)

28. Der durch den Beweis bewiesene Satz dient als Regel, also als Paradigma. Denn nach der Regel *richten* wir uns.

MS 122, p. 53v

Aber bringt uns der Beweis nur dazu, daß wir uns nach dieser Regel richten (sie anerkennen), oder zeigt er uns auch, wie wir uns nach ihr richten sollen?

Der mathematische Satz soll uns ja zeigen, was zu sagen SINN hat.

Der Beweis konstruiert einen Satz; aber es kommt eben drauf an, *wie* er ihn konstruiert. Manchmal z. B. konstruiert er zuerst eine *Zahl* und dann folgt der Satz, daß es eine solche Zahl gibt. Wenn wir sagen, die Konstruktion müsse uns von dem Satz *überzeugen*, so heißt das, daß sie uns dazu bringen muß, diesen Satz so und so anzuwenden. Daß sie uns be-

MS 122, p. 54r

stimmen muß, das als Sinn, das nicht als Sinn anzuerkennen.

27. Quero dizer algo como: mesmo que a proposição de uma demonstração matemática pareça interpretar uma realidade exterior a si mesma, ela é apenas a expressão do reconhecimento de uma nova medida (da realidade).

Nós tomamos, portanto, a construtibilidade (demonstrabilidade) deste símbolo (digamos, da proposição matemática) como um sinal de que devemos transformar símbolos assim e assim.

Nós pelejamos na demonstração por um conhecimento? E a última proposição expressa este conhecimento? Este conhecimento está livre agora da demonstração (foi cortado o cordão

MS 122, p. 53r

umbilical)? – Bem, a proposição agora é empregada sozinha e sem ser um suplemento da demonstração.

Por que não devo dizer: eu pelejei na demonstração por uma *decisão*?

A demonstração coloca esta decisão em um sistema de decisões.[153]

(Naturalmente, poderia também dizer: “A demonstração me convence da conveniência desta regra”. Mas dizer isto pode facilmente se tornar enganoso.)

28. A proposição demonstrada pela demonstração serve como regra, portanto como paradigma. Pois nos *orientamos* pela regra.

MS 122, p. 53v

Mas a demonstração só nos conduz a nos orientamos pela regra (reconhecê-la), ou nos mostra também como devemos nos orientar por ela?

A proposição matemática deve nos mostrar o que tem SENTIDO dizer.

A demonstração constrói uma proposição; mas isto depende justamente de *como* ela a constrói. Algumas vezes, por exemplo, ela constrói primeiro um *número*, e depois segue-se a proposição de que este número existe. Quando dizemos que a construção tem que nos *convencer* acerca da proposição, isto quer dizer que ela tem que nos levar a empregar esta proposição assim e assim. Que ela tem que nos

MS 122, p. 54r

determinar a aceitar isto como tendo sentido e isto como não tendo sentido.

29. Was hat der Zweck einer euklidischen Konstruktion, etwa der Halbierung der Strecke, mit dem Zweck der Ableitung einer Regel aus Regeln mittels logischer Schlüsse gemein?

Das Gemeinsame scheint zu sein, daß ich durch die Konstruktion eines Zeichens die Anerkennung eines Zeichens erzwinge.

Könnte man sagen: »Die Mathematik schafft neue *Ausdrücke*, nicht neue Sätze«??

Insofern nämlich, als die mathematischen Sätze

MS 122, p. 54v

ein für allemal in die Sprache aufgenommene Instrumente sind – und ihr Beweis die Stelle zeigt, an der sie stehen.

Inwiefern sind aber zum Beispiel Russells Tautologien ›Instrumente der Sprache‹?

Russell hätte sie jedenfalls nicht für solche gehalten. Sein Irrtum, wenn ein solcher vorlag, konnte aber nur darin bestehen, daß er auf die *Anwendung* nicht acht hatte.

Der Beweis läßt ein Gebilde aus einem anderen entstehen.

Er führt uns die Entstehung von einem aus anderen vor.

Das ist alles recht gut – aber er leistet doch damit

MS 122, p. 55r

in verschiedenen Fällen ganz Verschiedenes! Was ist das *Interesse* dieser überleitung?!

Wenn ich auch den Beweis in einem Archiv der Sprache niedergelegt denke – wer sagt, *wie* dies Instrument zu verwenden ist, wozu er dient!

30. Der Beweis bringt mich dazu zu sagen: das *müsse* sich so verhalten. — Nun, das verstehe ich im Fall eines euklidischen Beweises oder eines Beweises von ›25 x 25 = 625‹, aber ist es auch so im Fall eines Russellschen Beweises etwa von ›$\vdash p \supset q . p . \supset . q$‹? Was heißt hier ›es *müsse* sich so verhälten‹, im Gegensatz zu ›es verhält sich so‹ ? Soll ich sagen: »Nun, ich

MS 122, p. 55v

nehme diesen Ausdruck als Paradigma für alle nichtssagenden Sätze dieser Forrm an«?

Ich gehe den Beweis durch und sage: »Ja, so *muß* es sein; ich muß den Gebrauch meiner Sprache *so* festlegen«.

Ich will sagen, daß das *Muß* einem Gleise entspricht, das ich in der Sprache lege.

29. O que há de comum entre a finalidade de uma construção euclidiana, digamos a bissecção de uma reta, com a finalidade da derivação de uma regra a partir de outras regras mediante inferências lógicas?

O comum parece ser o fato de que, pela construção de um sinal, forço a aceitação de um sinal.

Pode-se dizer: "A matemática cria novas *expressões*, não novas proposições"??

Contanto que, digamos, as proposições matemáticas

MS 122, p. 54v

sejam instrumentos definitivamente tomados na linguagem – e sua demonstração mostre o lugar em que estão.

Mas em que medida são, por exemplo, as tautologias de Russell 'instrumentos da linguagem'?

Em todo o caso, Russell não as tomaria como tais. Seu erro, se é que houve, só pode consistir no fato de ele não ter prestado atenção à *aplicação*.

A demonstração permite que uma estrutura surja de outra.

Ela nos exibe o surgimento de uma a partir da outra.

Tudo isto está muito bem – mas com isto ela cumpre

MS 122, p. 55r

coisas bem diferentes em casos diferentes! Qual é o *interesse* desta transição?!

Mesmo que imagine que a demonstração esteja depositada em um arquivo da linguagem – quem irá dizer *como* este instrumento deve ser empregado e para que serve!

30. A demonstração me leva a dizer: isto *tem que* ser assim. — Bem, entendo isto no caso de uma demonstração euclidiana ou de uma demonstração de que '25 x 25 = 625', mas é também assim no caso de uma demonstração Russelliana, por exemplo de que '$\vdash p \supset q . p . \supset . q$'?[154] O que significa aqui 'isto *tem que* ser assim', em contraposição a 'isto é assim'? Devo dizer: "Agora admito

MS 122, p. 55v

esta expressão como paradigma para todas as proposições não-significativas desta forma"?

Percorro toda a demonstração e digo: "Sim, assim é que *tem que* ser; tenho que estabelecer *assim* o uso da minha linguagem".

MS 122, p. 56r

31. Wenn ich sagte, ein Beweis führe einen neuen Begriff ein, so meinte ich so etwas wie: der Beweis setze ein neues Paradigma zu den Paradigmen der Sprache; ähnlich wie wenn man ein besonderes rötlich-

MS 122, p. 56v

blau mischte, die besondere Farbmischung irgendwie festlegte und ihr einen Namen gäbe.

Aber, wenn wir auch geneigt sind, einen Beweis ein solches neues Paradigma zu nennen – was ist die genaue Ähnlichkeit eines Beweises zu so einem Begriffsvorbild?

Man möchte sagen: der Beweis ändert die Grammatik unserer Sprache, ändert unsere Begriffe. Er macht neue Zusammenhänge, und er schafft den Begriff dieser Zusammenhänge. (Er stellt nicht fest, daß sie da sind, sondern sie sind nicht da, ehe er sie nicht macht.)

MS 122, p. 57r

32. Welchen Begriff schafft ›p ⊃ p‹? Und doch ist es mir als könnte man sagen ›p ⊃ p‹ diene uns als Begriffszeichen.

›p ⊃ p‹ ist eine Formel. Legt eine Formel einen Begriff fest? Man kann sagen: »daraus folgt nach der Formel .... das und das«. Oder auch: »daraus folgt auf die Art .... das und das«. Aber ist das ein Satz, wie ich ihn wünsche? Wie ist es aber damit: »Zieh' daraus die Konsequenz auf die Art .... «?

MS 122, p. 57v

33. Wenn ich vom Beweis sage, er sei ein Vorbild (ein Bild), so muß ich es auch von einem Russellschen Pp. sagen können (als der Eizelle eines Beweises).

Man kann fragen: Wie ist man darauf gekommen, den Satz ›p ⊃ p‹ als eine wahre Behauptung auszusprechen? Nun, man hat ihn nicht im praktischen Sprachverkehr gebraucht, – aber dennoch war man geneigt, ihn unter besonderen Umständen (wenn man zum Beispiel Logik

MS 122, p. 58r

betrieb) *mit Überzeugung* auszusprechen.

MS 122, p. 58v

Quero dizer que o *exigir* corresponde a um trilho que coloco na linguagem.

MS 122, p. 56r

31. Quando disse que uma demonstração introduz um novo conceito, quis dizer algo como: a demonstração coloca um novo paradigma para os paradigmas da linguagem; assim como quando se mistura um azul

MS 122, p. 56v

avermelhado, de algum modo se estabelece uma particular mistura de cores e se lhe dá um nome.

Mas mesmo quando estamos inclinados a nomear uma demonstração como um novo paradigma assim – qual é a exata similaridade de uma demonstração com um modelo de conceito assim?

Gostaríamos de dizer: a demonstração modifica a gramática da nossa linguagem, muda os nossos conceitos. Ela forma novas conexões e cria o conceito destas conexões. (Ela não estabelece que elas estão lá, mas elas não estão lá antes que a demonstração as forme.)

MS 122, p. 57r

32. Qual é o conceito criado por ‘p ⊃ p’? E, no entanto, para mim é como se pudesse dizer que ‘p ⊃ p’ nos serve como sinal de um conceito.

‘p ⊃ p’ é uma formula. Uma fórmula estabelece um conceito? Pode-se dizer: “segundo a formula ...., a partir daqui segue-se que isto e isto”. Ou também: “a partir daqui, segue-se isto e isto deste modo ....”. Mas esta é uma proposição tal como a desejo? O que acontece, então, com: “Tire a partir daqui as consequências deste modo ....”?

MS 122, p. 57v

33. Quando digo que a demonstração é um modelo (uma imagem), então tenho que poder dizer o mesmo de uma Pp.[155] de Russell (como o óvulo de uma demonstração).

Pode-se perguntar: Como se chega a proferir a proposição ‘p ⊃ p’ como uma afirmação verdadeira? Bem, ela não se usa na intercomunicação linguística prática, – mas, apesar disto, a pessoa tende a proferi-la sob circunstâncias particulares (quando, por exemplo, se pratica

MS 122, p. 58r

a lógica) *com convicção*.

MS 122, p. 58v

Wie ist es aber mit ›p ⊃ p‹? Ich

MS 122, p. 59r

sehe in ihm einen degenerierten Satz, der auf der Seite der Wahrheit ist.

Ich lege ihn als wichtigen Schnittpunkt von sinnvollen Sätzen fest. Ein Angelpunkt der Darstellungsweise.

MS 122, p. 59v

34. Die Konstruktion des Beweises beginnt mit irgend welchen Zeichen, und unter diesen müssen einige, die ›Konstanten‹, in der Sprache schon Bedeutung haben. So ist es wesentlich, daß ›v‹ und ›~‹ schon eine uns geläufige Anwendung besitzen, und die Konstruktion eines

MS 122, p. 61r

Beweises in der »Principia Mathematica« nimmt ihre Wichtigkeit, ihren Sinn, daher. Die Zeichen aber des Beweises lassen diese Bedeutung *nicht* erkennen.

Die ›Verwendung‹ des Beweises hat natürlich mit jener Verwendung seiner Zeichen zu tun.

35. Wie gesagt, ich bin ja auch schon von den Pp. Russells in gewissem Sinne überzeugt.

Die überzeugung also, die der Beweis hervorbringt,

MS 122, p. 61v

kann nicht nur von der Beweiskonstruktion herrühren.

MS 122, p. 62r

36. Wenn ich das Urmeter in Paris sähe, aber die Institution des Messens und ihren Zusammenhang mit jenem Stab nicht kennte – könnte ich sagen, ich kenne den Begriff des Urmeters?

Ist nicht auch so der Beweis ein Teil einer Institution?

Der Beweis ist ein Instrument – aber warum sage ich: »ein Instrument der Sprache«?

Ist denn die Rechnung notwendigerweise ein Instrument

MS 122, p. 64v

der Sprache?

Mas como isto acontece com ‘p ⊃ p’? Vejo

MS 122, p. 59r

nela uma proposição degenerada que está do lado da verdade.

Eu a estabeleço como um ponto de intersecção importante de proposições significativas. Um pivô do modo de apresentação.[156]

MS 122, p. 59v

34. A construção da demonstração começa com quaisquer sinais, e, entre estes, alguns, as ‘constantes’, já têm significado na linguagem. Assim, é essencial que ‘v’ e ‘~’ já possuam para nós uma aplicação habitual, e a construção de uma

MS 122, p. 61r

demonstração no “Principia Mathematica” toma a sua importância, o seu sentido, dali. Mas os sinais da demonstração *não* permitem reconhecer este significado.

O ‘emprego’ da demonstração, naturalmente, tem a ver com este emprego dos seus sinais.

35. Como disse, já estou convencido em certo sentido até mesmo pelas Pp. de Russell.

O convencimento, portanto, suscitado pela demonstração

MS 122, p. 61v

não pode provir somente da sua construção.[157]

MS 122, p. 62r [158]

36. Se visse o metro originário em Paris, mas não conhecesse a instituição da medida nem sua conexão com aquele padrão, – poderia dizer que conheço o conceito de metro originário?

Não é assim também a demonstração parte de uma instituição?

A demonstração é um instrumento – mas por que digo: “um instrumento da linguagem”?

Então o cálculo é necessariamente um instrumento

MS 122, p. 64v

da linguagem?

37. Was ich immer tue, scheint zu sein – zwischen Sinnbestimmung und Sinnverwendung einen Unterschied hervorzuheben.

MS 122, p. 66r

38. Den Beweis anerkennen: Man kann ihn anerkennen als Paradigma der Figur, die entsteht, wenn *diese* Regeln richtig auf gewisse Figuren angewandt werden. Man kann ihn anerkennen als die richtige Ableitung einer Schlußregel. Oder als eine richtige Ablei-

MS 122, p. 68r

tung aus einem richtigen Erfahrungssatz; oder als die richtige Ableitung aus einem falschen Erfahrungssatz; oder einfach als die richtige Ableitung aus einem Erfahrungssatz, von dem wir nicht wissen, ob er wahr oder falsch ist.

MS 122, p. 68v

Kann ich nun aber sagen, daß die Auffassung des Beweises als ›Beweises der Konstruierbarkeit‹ des bewiesenen Satzes in irgendeinem Sinn eine einfachere, primärere, als jede andre Auffassung ist?

Kann ich also sagen: »Ein jeder Beweis beweist *vor allem*, daß diese Zeichenform herauskommen muß, wenn ich diese Regel auf diese Zeichenformen anwende«?

Oder: »Der Beweis beweist vor allem, daß diese Zeichenform entstehen kann, wenn man nach die-

MS 122, p. 69r

sen Transformationsregeln mit diesen Zeichen operiert.« –

Das würde auf eine geometrische Anwendung deuten. Denn der Satz, dessen Wahrheit, wie ich sage, hier bewiesen ist, ist ein geometrischer Satz – ein Satz Grammatik die Transformierungen von Zeichen betreffend. Man könnte zum Beispiel sagen: es sei bewiesen, daß es *Sinn* habe zu sagen, jemand habe das Zeichen .... nach diesen Regeln aus .... und .... erhalten; aber keinen Sinn etc. etc.

MS 122, p. 69v

Oder: Wenn man die Mathematik jedes Inhalts entkleide, so bleibe, daß gewisse Zeichen aus andern nach gewissen Regeln sich konstruieren lassen. –

Das Mindeste, was wir anerkennen müssen, sei: daß dies Zei chen etc. etc. – und diese Anerkennung lege jeder anderen zu Grunde. –

MS 122, p. 70r

37. O que faço sempre parece ser – realçar uma diferença entre determinação do sentido e emprego do sentido.

MS 122, p. 66r

38. Reconhecer a demonstração: pode-se reconhecê-la como paradigma da figura que surge quando *estas* regras são aplicadas corretamente sobre certas figuras. Pode-se reconhecê-la como a derivação correta de uma regra de inferência. Ou como uma derivação correta

MS 122, p. 68r

feita a partir de uma proposição da experiência correta; ou como a derivação correta feita a partir de uma falsa proposição da experiência; ou simplesmente como a derivação correta feita a partir de uma proposição da experiência que não sabemos se é verdadeira ou falsa.

MS 122, p. 68v

Mas posso dizer agora que a concepção de demonstração como 'demonstração da construtibilidade' da proposição demonstrada é em algum sentido uma concepção mais simples, mais primária que qualquer outra?

Posso portanto dizer: "Cada demonstração demonstra *antes de tudo* que esta forma dos sinais tem que aparecer se aplico estas regras sobre estas formas de sinais"?

Ou: "A demonstração demonstra antes de tudo que esta forma dos sinais pode surgir se operamos estas

MS 122, p. 69r

regras de transformação com estes sinais." –

Isto indicaria um emprego geométrico. Pois a proposição cuja verdade, como disse, é aqui demonstrada, é uma proposição geométrica – uma proposição da gramática que diz respeito à transformação de sinais. Pode-se, por exemplo, dizer: está demonstrado que há *sentido* em dizer que alguém obteve o sinal ...., segundo estas regras, de .... e de ....; mas não há sentido etc., etc.

MS 122, p. 69v

Ou: se desnudamos a matemática de todo conteúdo, só resta que certos sinais podem ser construídos de outros segundo certas regras. –

O mínimo que teríamos que reconhecer é: que estes sinais etc., etc., – e que esta admissão assenta o fundamento para todos os outros. –

MS 122, p. 70r

Ich möchte nun sagen: Die Zeichenfolge des Beweises zieht nicht notwendigerweise irgendein Anerkennen nach sich. Wenn wir aber einmal mit dem Anerkennen anfangen, dann braucht es nicht das ›geometrische‹ zu sein.

Ein Beweis könnte doch aus bloß zwei Stufen bestehen; etwa einem Satz ›(x).fx‹ und einem ›fa‹ – spielt hier das richtige übergehen nach einer Regel eine wichtige Rolle?

MS 122, p. 70v

39. *Was* ist unerschütterlich gewiß am Bewiesenen?

Einen Satz als unerschütterlich gewiß anzuerkennen – will ich sagen – heißt, ihn als grammatische Regel

MS 122, p. 72r

zu verwenden: dadurch entzieht man ihn der Ungewißheit.

»Der Beweis muß übersehbar sein« heißt eigentlich nichts andres als: der Beweis ist kein Experiment. Was sich im Beweis ergibt, nehmen wir nicht deshalb an, weil es sich einmal ergibt, oder weil es sich oft ergibt. Sondern wir sehen im Beweis den Grund dafür zu sagen, daß es sich so ergeben *muß*.

Nicht, daß dies Zuordnen zu diesem Resultat führt, *beweist* – sondern daß wir überredet werden, diese Erscheinungen (Bilder) als Vorlagen zu nehmen dafür, wie es aus-

MS 122, p. 72v

schaut, wenn …

Der Beweis ist unser neues Vorbild dafür wie es ausschaut, wenn nichts weg- und nichts dazukommt, wenn wir richtig zählen, etc. Aber diese Worte zeigen, daß ich nicht recht weiß, wovon der Beweis ein Vorbild ist.

Ich will sagen: mit der Logik der »Principia Mathematica« könnte man eine Arithmetik begründen, in der 1.000 + 1 = 1.000 ist; und alles, was dazu nötig ist, wäre die sinnliche Richtigkeit der Rechnungen anzuzweifeln. Wenn wir sie aber nicht anzweifeln, so hat daran nicht unsre überzeugtheit von der Wahrheit der Logik die Schuld.

MS 122, p. 73r

Wenn wir beim Beweis sagen: »Das *muß* herauskommen« – so nicht aus Gründen, die wir nicht *sehen*.

Gostaria de dizer agora: a sequência de sinais da demonstração não acarreta necessariamente, por si mesma, qualquer admissão. Mas uma vez que seja uma questão de admissão, esta não precisa ser uma admissão ‘geométrica’.

De todo modo, uma demonstração poderia consistir meramente em dois passos; digamos, em uma proposição ‘(x).fx’, e uma ‘fa’ – a transição correta segundo uma regra tem aqui algum papel importante?

MS 122, p. 70v [159]

39. O *que* é inabalavelmente certo no que é demonstrado?

Reconhecer uma proposição como inabalavelmente certa – quero dizer – significa empregá-la como regra gramatical:

MS 122, p. 72r

por meio disto afastamos dela a incerteza.

“A demonstração tem que ter uma visão panorâmica” realmente não significa outra coisa senão que: a demonstração não é um experimento. Não aceitamos o resultado da demonstração porque acontece só uma vez, ou porque acontece frequentemente. Senão que vemos na demonstração a razão para dizer que isto *tem que* resultar desta maneira.[160]

Não é que se *demonstra* que esta correlação leva a este resultado – senão que somos persuadidos a tomar estes fenômenos (imagens) como molde para ver como

MS 122, p. 72v

seria se …

A demonstração é o nosso novo modelo para ver como seria se nada se perde nem nada se acrescenta quando contamos corretamente etc. Mas estas palavras mostram que não sei ao certo do que a demonstração é um modelo.

Quero dizer: com a lógica do “Principia Mathematica” poderíamos fundamentar uma aritmética na qual 1.000 + 1 = 1.000; e tudo o que é preciso para isto seria duvidar da correção sensível dos cálculos. Mas se não duvidamos dela, a culpa não é da nossa convicção da verdade da lógica.

MS 122, p. 73r

Quando dizemos numa demonstração: “*Tem que* resultar nisto” – não é por razões que não *vemos*.

Nicht, daß wir dieses Resultat erhalten, sondern, daß es das Ende dieses Weges ist, läßt es uns annehmen.

Das ist der Beweis, was uns überzeugt: Das Bild, was uns nicht überzeugt, ist der Beweis auch dann nicht, wenn von ihm gezeigt werden kann, daß es den bewiesenen Satz exemplifiziert.

MS 122, p. 73v

Das heißt: es darf keine physikalische Untersuchung des Beweisbildes nötig sein, um uns zu zeigen, was bewiesen ist.

MS 122, p. 74r

40. Wir sagen von zwei Menschen auf einem Bild nicht *vor allem*, der eine erscheint kleiner als der andre und *erst dann*, er erscheine weiter hinten zu sein. Es ist, kann man sagen, wohl möglich, daß uns das Kürzersein gar nicht auffällt, sondern *bloß* das Hintenliegen. (Dies scheint

MS 122, p. 75r

mir mit der Frage der ›geometrischen‹ Auffassung des Beweises zusammen zu hängen.)

41. »Er ist das Vorbild für das, was man so und so nennt.«

Von was soll aber der Übergang von ›$(x).\varphi x$‹ auf ›φa‹ ein Vorbild sein? Höchstens davon, wie von Zeichen der Art ›$(x).\varphi x$‹ geschlossen werden kann.

Das Vorbild dachte ich mir als eine Rechtfertigung, hier aber ist es keine Rechtfertigung. Das Bild $(x).\varphi x \therefore \varphi a$ *rechtfertigt* den Schluß nicht. Wenn wir von einer Rechtfertigung des Schlusses reden wollen, so liegt sie außerhalb dieses Zeichenschemas.

MS 122, p. 75v

Und doch ist etwas daran, daß der mathematische Beweis einen neuen Begriff schafft . – Jeder Beweis ist gleichsam ein Bekenntnis zu einer bestimmten Zeichenverwendung.

Aber zu was ist er ein Bekenntnis? Nur zu *dieser* Verwendung der Übergangsregeln von Formel zu Formel? Oder auch ein Bekenntnis zu den ›Axiomen‹ in irgend einem Sinn?

Könnte ich sagen: ich bekenne mich zu $p \supset p$ als einer Tautologie?

MS 122, p. 76r

Ich nehme ›$p \supset p$‹ als Maxime an, etwa des Schließens.

Não é que obtemos este resultado, senão que ele seja o fim deste caminho é o que nos permite aceitá-lo.

Esta é a demonstração que nos convence: a imagem que não nos convence não é a demonstração, mesmo que possa ser mostrado que ela exemplifica a proposição demonstrada.

MS 122, p. 73v

Isto significa: não é necessária nenhuma investigação física da imagem da demonstração para nos mostrar o que foi demonstrado.

MS 122, p. 74r [161]

40. Nós não dizemos *antes de tudo* sobre duas pessoas numa imagem que uma parece menor do que a outra, e *só então* que ela parece estar bem mais atrás. Pode-se dizer que é bem possível que o ser menor nem sequer nos chame a atenção, senão *somente* o estar atrás. (Isto me parece

MS 122, p. 75r

estar conectado com a questão da concepção ‘geométrica’ da demonstração.)

41. “Ela é o modelo do que chamamos de tal e tal.”

Mas do que deve a transição de ‘$(x).\varphi x$’ a ‘φa’ ser um modelo? No máximo de como se pode inferir a partir de sinais do tipo ‘$(x).\varphi x$’.

Imaginava o modelo como uma justificação, mas aqui não há nenhuma justificação. A imagem $(x).\varphi x \therefore \varphi a$ não *justifica* a conclusão. Se queremos falar de uma justificação da conclusão, então ela está fora do esquema de sinais.

MS 122, p. 75v

E no entanto há algo em dizer que a demonstração matemática cria um conceito novo. – Toda demonstração é como se fosse uma profissão de fé em um determinado emprego de sinais.

Mas em que ela é uma profissão de fé? Só *neste* emprego da regra de transição de fórmula a fórmula? Ou também uma profissão de fé, em algum sentido, nos ‘axiomas’?

Poderia dizer: professo minha fé em $p \supset p$ como uma tautologia?

MS 122, p. 76r

Aceito $p \supset p$ como máxima do inferir, por exemplo.

Die Idee, der Beweis schaffe einen neuen Begriff, könnte man ungefähr so ausdrücken: Der Beweis ist nicht seine Grundlagen plus den Schlußregeln, sondern ein *neues* Haus – obgleich ein Beispiel dieses und dieses Stils. Der Beweis ist ein *neues* Paradigma.

Der Begriff, den der Beweis schafft, kann zum Beispiel ein neuer Schlußbegriff sein, ein neuer Begriff des richtigen Schließens.

MS 122, p. 76v

Warum ich aber das als *richtiges* Schließen anerkenne, hat seine Gründe außerhalb des Beweises.

Der Beweis schafft einen neuen Begriff – indem er ein neues Zeichen schafft oder ist. Oder – indem er dem Satz, der sein Ergebnis ist, einen neuen Platz gibt. (Denn der Beweis ist nicht eine Bewegung, sondern ein Weg.)

MS 122, p. 77r

42. Es darf nicht *vorstellbar* sein, daß *diese* Substitution in *diesem* Ausdruck etwas anderes ergibt. Oder: ich muß es für nicht vorstellbar erklären. (Das Ergebnis eines Experiments aber kann so und anders ausfallen.)

Man könnte sich doch aber

MS 122, p. 79v

den Fall vorstellen, daß der Beweis sich dem Ansehen nach ändert – er ist in einen Fels gegraben und man sagt, es sei der gleiche, was immer der Anschein sagt.

Sagst du eigentlich etwas anderes als: der Beweis wird als *Beweis* genommen?

Der Beweis muß ein anschaulicher Vorgang sein. Oder auch: der Beweis ist der *anschauliche* Vorgang.

Nicht etwas hinter dem Beweise, sondern der Beweis beweist.

MS 122, p. 80r

43. Wenn ich sage: »es muß vor allem offenbar sein, daß *diese* Substitution wirklich *diesen* Ausdruck ergibt« – so könnte ich auch sagen: »ich muß es als unzweifelhaft annehmen« – aber dann müssen dafür gute Gründe vorliegen: z. B., daß die gleiche Substitution so gut wie immer das gleiche Resultat ergibt etc. Und besteht darin nicht eben die Übersehbarkeit?

A ideia de que a demonstração cria um novo conceito poderia ser expressa aproximadamente assim: a demonstração não é os seus fundamentos mais as regras de inferência, mas uma casa *nova* – mesmo que seja um exemplo deste e daquele estilo. A demonstração é um *novo* paradigma.

O conceito que a demonstração cria pode, por exemplo, ser um novo conceito de inferência, um novo conceito de inferência correta.

MS 122, p. 76v

Mas *por que* reconheço isto como inferência *correta* tem suas razões fora da demonstração.

A demonstração cria um novo conceito – na medida em que cria ou é um novo sinal. Ou – na medida em que dá um novo lugar à proposição que é o seu resultado. (Pois a demonstração não é um movimento, mas um caminho.)

MS 122, p. 77r [162]

42. Não pode ser *imaginável* que *esta* substituição *nesta* expressão resulte em algo diferente. Ou: tenho que explicá-la como não imaginável. (O resultado de um experimento, porém, pode sair assim ou de outro modo.)

Pode-se, no entanto,

MS 122, p. 79v

imaginar o caso em que a demonstração muda de aspecto – escavada na rocha, diz-se que é a mesma coisa, não importa o que diga a aparência.

Você realmente diz alguma coisa diferente do que: a demonstração é tomada como *demonstração*?

A demonstração tem que ser um processo visualmente explícito. Ou também: a demonstração é o processo *visualmente explícito*.

Não é algo por detrás da demonstração, senão o que a demonstração demonstra.[163]

MS 122, p. 80r

43. Quando digo: “tem que ser antes de tudo evidente que *esta* substituição realmente resulta *nesta* expressão”, – poderia também dizer: “tenho que aceitá-lo como indubitável” – mas então têm que estar presentes boas razões para isto: por exemplo, que a mesma substituição dê praticamente sempre o mesmo resultado etc. E não consiste justamente nisto a visibilidade panorâmica?

MS 122, p. 82v

Ich möchte sagen, daß, wo die Übersehbarkeit nicht vorhanden ist, wo also für einen Zweifel Platz ist, ob wirklich das Resultat dieser Substitution vorliegt, der *Beweis* zerstört ist. Und nicht in einer dummen und unwichtigen Weise, die mit dem *Wesen* des Beweises nichts zu tun hat.

Oder: Die Logik als Grundlage aller Mathematik tut's schon darum nicht, weil die Beweiskraft der logischen Beweise mit ihrer geometrischen Beweiskraft steht und fällt.

Das heißt: Der logische Beweis, etwa von der Russellschen Art, ist beweis-

MS 122, p. 83r

kräftig nur so lange, als er auch geometrische Überzeugungskraft besitzt. Und eine Abkürzung eines solchen logischen Beweises kann diese Überzeugungskraft haben und durch sie ein Beweis sein, wenn die voll ausgeführte Konstruktion nach Russellscher Art es nicht ist.

Wir neigen zu dem Glauben, daß der *logische* Beweis eine eigene, absolute Beweiskraft hat, welche von der unbedingten Sicherheit der logischen Grund- und Schlußgesetze herrührt. Während doch die so bewiesenen Sätze nicht sicherer sein können, als es die Richtigkeit der *Anwendung* jener Schlußgesetze ist.

MS 122, p. 83v

Die logische Gewißheit der Beweise – will ich sagen – reicht nicht weiter, als ihre geometrische Gewißheit.

44. Wenn nun der Beweis ein Vorbild ist, so muß es darauf ankommen, was als eine richtige Reproduktion des Beweises zu gelten hat.

Käme zum Beispiel im Beweis das Zeichen ›| | | | | | | | | |‹ vor, so ist es nicht klar, ob als Repro-

MS 122, p. 84r

duktion davon nur eine ›gleichzahlige‹ Gruppe von Strichen (oder etwa Kreuzchen) gelten soll, oder ebensowohl auch eine andere, wenn nicht gar zu kleine Anzahl. Etc.

Es ist doch die Frage, was als Kriterium der Reproduktion des Beweises zu gelten hat, – der Gleichheit von Beweisen. Wie sind sie zu vergleichen, um die Gleichheit festzustellen? Sind sie gleich, wenn sie gleich ausschaun?

Ich möchte, sozusagen, zeigen, daß wir den logischen Beweisen in der Mathematik

MS 122, p. 82v

Gostaria de dizer que onde a visibilidade panorâmica não está disponível, onde portanto há lugar para uma dúvida sobre a existência do resultado real desta substituição, a *demonstração* está destruída. E não de um modo tolo e desimportante que nada tem a ver com a *essência* da demonstração.

Ou: a lógica já não funciona como fundamento de toda a matemática porque a força probatória das demonstrações lógicas permanece e cai com a sua força probatória geométrica.

Isto significa: a demonstração lógica, por exemplo a do tipo Russelliano, só tem força

MS 122, p. 83r

probatória na medida em que possui também força de convencimento geométrica. E uma abreviação de uma demonstração lógica assim pode ter esta força de convencimento e, deste modo, ser uma demonstração, mesmo que não seja plenamente uma construção executada ao modo Ruselliano.

Estamos inclinados a acreditar que a demonstração *lógica* tem uma força probatória própria, absoluta, que provém da certeza incondicional das leis lógicas e de inferência fundamentais. Enquanto que uma proposição demonstrada desta maneira não pode ser mais certa do que a correção do *emprego* dessas leis de inferência.

MS 122, p. 83v

A certeza lógica das demonstrações – eu diria – não vai além da sua certeza geométrica.[164]

44. Agora, se a demonstração é um modelo, o que tem que contar é o que vale como reprodução correta da demonstração.

Se na demonstração aparece, por exemplo, o sinal '| | | | | | | | | |', então não está claro se deve valer

MS 122, p. 84r

como a sua reprodução só um grupo 'equinumérico' de traços (ou, por exemplo, de cruzezinhas), ou vale também um outro número se não for muito pequeno. Etc.

Todavia, a questão é sobre o que vale como critério de reprodução da demonstração, – de identidade da demonstração. Como devem ser comparadas para se estabelecer sua identidade? Elas são iguais se parecem iguais?

Gostaria de mostrar, por assim dizer, que podemos fugir das demonstrações lógicas em entlaufen können.

MS 122, p. 84v

45. »Mittels entsprechender Definitionen können wir ›25 x 25 = 625‹ in der Russellschen Logik beweisen.« – Und kann ich die gewöhnliche Beweistechnik durch die Russellsche erklären? Aber wie kann man eine Beweistechnik durch eine andere *erklären*? Wie kann die eine *das Wesen* der andern erklären? Denn ist die eine eine ›Abkürzung‹ der anderen, so muß sie doch eine *systematische* Abkürzung sein. Es bedarf doch eines Beweises, daß ich die langen Beweise systematisch abkürzen kann und also wieder ein System von Beweisen erhalte.

Die langen Beweise gehen nun zuerst immer mit den kurzen einher und bevormunden sie gleichsam. Aber endlich können sie den

MS 122, p. 85r

kurzen nicht mehr folgen und diese zeigen ihre Selbständigkeit.

Das Betrachten der *langen* unübersehbaren logischen Beweise ist nur ein Mittel um zu zeigen, wie diese Technik – die auf der Geometrie des Beweisens ruht – zusammenbrechen kann und neue Techniken notwendig werden.

MS 122, p. 85v

46. Ich möchte sagen: Die Mathematik ist ein BUNTES Gemisch von Beweistechniken. – Und darauf beruht ihre mannigfache Anwendbarkeit und ihre Wichtigkeit.

Und das kommt doch auf das Gleiche hinaus, wie zu sagen: Wer ein System, wie das Russellsche, besäße und aus diesem durch entsprechende Definitionen Systeme, wie den Differentialkalkül, erzeugte, der erfände ein neues Stück Mathematik.

Nun, man könnte doch einfach sagen: Wenn ein Mensch das Rechnen im Dezimalsystem erfunden hätte – der hätte doch eine mathematische Erfindung

MS 122, p. 86r

gemacht! – Auch wenn ihm Russells »Principia Mathematica« bereits vorgelegen wären. –

Wie ist es, wenn man ein Beweissystem einem anderen koordiniert? Es gibt dann eine Übersetzungsregel mittels derer man die im einen bewiesenen Satze in die im andem bewiesenen übersetzen kann.

Man kann sich doch aber denken, daß einige – oder alle – Beweissysteme der heutigen Mathematik auf solche Weise einem System, etwa dem Russellschen zugeordnet wären. Sodaß alle Beweise, wenn auch umständlich, in diesem System ausgeführt werden könnten. So gäbe es dann nur das eine System – und nicht mehr die vielen Systeme? – Aber es muß sich

matemática.

MS 122, p. 84v

45. "Por meio de definições adequadas podemos provar que '25 x 25 = 625' na lógica de Russell." – E posso explicar a técnica de demonstração habitual pela Russelliana? Mas como se pode *explicar* uma técnica de demonstração por outra? Como uma pode explicar *a essência* da outra? Pois se uma é uma 'abreviação' da outra, então ela tem que ser uma abreviação *sistemática*. É preciso uma demonstração de que posso abreviar sistematicamente as demonstrações longas e assim obter novamente um sistema de demonstrações.

As demonstrações longas começam sempre por acompanhar as curtas, como se as apadrinhassem. Mas ao final não podem mais seguir as

MS 122, p. 85r

curtas, e estas mostram a sua independência.

A consideração das demonstrações *longas*, desprovidas de visão panorâmica, é só um meio para mostrar como esta técnica – que se assenta sobre a geometria da demonstração – pode desmoronar e tornar necessário novas técnicas.

MS 122, p. 85v

46. Gostaria de dizer: a matemática é uma mistura MULTICOLORIDA de técnicas de demonstração. – E sobre isto repousa a sua múltipla aplicabilidade e sua importância.

E isto vem a ser o mesmo que dizer: quem possuísse um sistema como o de Russell, e produzisse a partir dele, mediante definições adequadas, sistemas como o cálculo diferencial, estaria inventando uma nova porção da matemática.[165]

Ora, pode-se simplesmente dizer: se uma pessoa tivesse inventado o cálculo no sistema decimal – teria feito de qualquer modo uma invenção

MS 122, p. 86r

matemática! – Mesmo que ela já tivesse sido apresentada ao "Principia Mathematica" de Russell. –

Como é que se coordena um sistema de demonstrações com um outro? Existe então uma regra de tradução mediante a qual se pode traduzir as proposições demonstradas em um deles nas proposições demonstradas pelo outro.

Contudo, pode-se imaginar que alguns – ou todos – os sistemas de demonstração da matemática atual estivessem coordenados deste modo em um sistema, por exemplo no de Russell. De modo que todas as demonstrações pudessem ser efetuadas neste sistema, mesmo que de modo complicado. Assim, só existiria este único sistema – e não mais os vários sistemas? – Mas

MS 122, p. 86v

doch also von dem *einen* System zeigen lassen, daß es sich in die vielen auflösen läßt. – *Ein* Teil des Systems wird die Eigentümlichkeiten der Trigonometrie besitzen, ein anderes die der Algebra, und so weiter. Man *kann* also sagen, daß in diesen Teilen verschiedene Techniken verwendet werden.

Ich sagte: der, welcher das Rechnen in der Dezimalnotation erfunden hat, habe doch eine mathematische Entdeckung gemacht. Aber hätte er diese Entdeckung nicht in lauter Russellschen Symbolen machen können? Er hätte, sozusagen einen neuen *Aspekt* entdeckt.

MS 122, p. 87r

»Aber die Wahrheit der wahren mathematischen Sätze kann dann dennoch aus jenen allgemeinen Grundlagen bewiesen werden.« – Mir scheint, hier ist ein Haken. Wann sagen wir, ein mathematischer Satz sei wahr? –

Mir scheint, als führten wir, ohne es zu wissen, neue Begriffe in die Russellsche Logik ein. – Zum Beispiel, indem wir festsetzen, was für Zeichen der Form ›(∃x, y, z . . .)‹ als einander äquivalent und welche nicht als äquivalent gelten sollen.

Ist es selbstverständlich, daß › (∃x, y, z)‹ nicht das gleiche Zeichen ist wie ›(∃x, y, z, n)‹?

Aber wie ist es –: Wenn ich zuerst ›p ∨ q‹ und ›~p‹ einführe und

MS 122, p. 87v

einige Tautologien mit ihnen konstruiere – und dann zeige ich etwa die Reihe ~p, ~ ~p, ~ ~ ~p, etc. vor und führe eine Notation ein wie $\sim^1 p$, $\sim^2 p$, . . .$\sim^{10} p$ … . Ich möchte sagen: wir hätten vielleicht an die *Möglichkeit* so einer Reihenordnung ursprünglich gar nicht gedacht, und wir haben nun einen neuen Begriff in unsre Rechnung eingeführt. Hier ist ein ›neuer Aspekt‹.

MS 122, p. 88r

Es ist ja klar, daß ich den Zahlbegriff, wenn auch in sehr primitiver und unzureichender Weise, hätte so einführen können – aber dieses Beispiel zeigt mir alles, was ich brauche.

MS 122, p. 88v

Inwiefern kann es richtig sein zu sagen, man hätte mit der Reihe ~p, ~ ~p, ~ ~ ~p, etc. einen neuen Begriff in die Logik eingeführt? – Nun, vor allem könnte man sagen, man habe es mit dem ›*etc.*‹ getan. Denn dieses ›etc.‹ steht für ein mir neues Gesetz der Zeichenbildung. Dafür charakteristisch – die Tatsache, daß eine *rekursive* Definition zur Erklärung der Dezimalnotation nötig ist.

Eine neue *Technik* wird eingeführt.

Man kann es auch so sagen:

então tem que

MS 122, p. 86v

ser possível mostrar *neste* único sistema que ele pode ser dissolvido em muitos. – *Uma* parte do sistema possuirá as especificidades da trigonometria, um outro, as da álgebra, e assim por diante. *Pode-se* portanto dizer que nestas partes são empregadas técnicas diferentes.

Eu disse: quem inventou o cálculo em notação decimal fez uma descoberta matemática. Mas ele não teria podido fazer esta descoberta em nada mais do que símbolos Russellianos? Ele teria descoberto, por assim dizer, um novo *aspecto*.

MS 122, p. 87r

“Mas a verdade de proposições matemáticas verdadeiras pode, não obstante, ser demonstrada a partir daqueles fundamentos gerais.” – Parece-me que há uma complicação aqui. Quando dizemos que uma proposição matemática é verdadeira? –

Parece-me como se, sem saber, estivéssemos introduzindo novos conceitos na lógica de Russell. – Por exemplo, quando estabelecemos que sinais da forma ‘(∃x, y, z . . .)’ devem valer como equivalentes entre si e quais não devem valer como equivalentes.

Está evidente que ‘(∃x, y, z)’ não é o mesmo sinal que ‘(∃x, y, z, n)’?

Mas como seria –: Se primeiro introduzisse ‘p ∨ q’ e ‘~p’ e

MS 122, p. 87v

construísse com elas algumas tautologias – e então apresentasse, por exemplo, a série ~p, ~ ~p, ~ ~ ~p etc., e introduzisse uma notação como $\sim^1 p$, $\sim^2 p$, . . .$\sim^{10} p$ … . Gostaria de dizer: talvez não tivéssemos imaginado originalmente a *possibilidade* de uma ordenação em série como esta, e agora introduzimos um novo conceito no nosso cálculo. Aqui está um ‘aspecto novo’.

MS 122, p. 88r

É claro que eu poderia ter introduzido assim o conceito de número, embora de uma maneira muito primitiva e inadequada – mas este exemplo me mostra tudo o que preciso.

MS 122, p. 88v

Em que medida pode ser certo dizer que teríamos introduzido um conceito novo na lógica com a série ~p, ~ ~p, ~ ~ ~p, etc.? – Bem, antes de tudo pode-se dizer que isto foi feito com o ‘*etc.*’. Pois este ‘etc’ representa para mim uma nova lei de formação de sinais. Disto é característico – o fato de que é necessária uma definição *recursiva* para a explicação da notação decimal.

Uma *técnica* nova é introduzida.

Pode-se dizer isto também assim:

MS 122, p. 89r

Wer den Begriff der Russellschen Beweis- und Satzbildung hat, hat damit noch *nicht* den Begriff jeder *Reihe* Russellscher Zeichen.

Ich möchte sagen: Russells Begründung der Mathematik schiebt die Einführung neuer Techniken hinaus, – bis man endlich glaubt, sie sei gar nicht mehr nötig.

(Es wäre vielleicht so, als philosophierte ich über den Begriff der Längenmessung so lange, bis man vergäße, daß zur Längenmessung die tätsachliche Festsetzung einer Längeneinheit nötig ist.)

MS 122, p. 89v

47. Kann man nun, was ich sagen will, *so* ausdrücken: »Wenn wir von Anfang an gelernt hätten, alle Mathematik in Russells System zu betreiben, so wäre natürlich mit dem Russellschen Kalkül die Dif-

MS 122, p. 90v

ferentialrechnung z. B. noch nicht erfunden. Wer also diese Rechnungsart *im Russellschen Kalkül* entdeckte – – –.«

Angenommen, ich hätte Russellsche Beweise der Sätze
›p ≡ ~ ~p‹
›~p ≡ ~ ~ ~p‹
›p ≡ ~ ~ ~ ~p‹
vor mir und fände nun einen abgekürzten Weg, den Satz
›p ≡ $\sim^{10}$ p‹
zu beweisen. Es ist, als habe ich eine neue Rechnungsart innerhalb des alten Kalküls gefunden. Worin besteht es, daß sie gefunden wurde?

Sage mir: Habe ich eine

MS 122, p. 91r

neue Rechnungsart entdeckt, wenn ich multiplizieren gelernt hatte und mir nun Multiplikationen mit lauter gleichen Faktoren als ein besonderer Zweig, dieser Rechnungen auffallen und ich daher die Notation einführe ›a^n = . . .‹?

Offenbar die bloß ›abgekürz-

MS 122, p. 91v

te‹, oder andere, Schreibweise – ›162‹ statt ›16 x 16‹ – macht's nicht. Wichtig ist, daß wir jetzt die Faktoren bloß *zählen*.

MS 122, p. 89r

quem tem o conceito de demonstração e de formação de proposição de Russell, ainda *não* tem, por outra parte, o conceito de todas as *séries* de sinais Russellianos.

Gostaria de dizer: a fundamentação Russelliana da matemática posterga a introdução de novas técnicas – até que finalmente acreditamos que elas não são mais necessárias.

(Seria talvez como se eu filosofasse sobre o conceito de medida de comprimento por tanto tempo que chegasse a esquecer que é necessário, para a medida de comprimento, o estabelecimento de fato de uma unidade de comprimento.)

MS 122, p. 89v [166]

47. Pode-se agora expressar *assim* o que quero dizer: "Se nós tivéssemos aprendido a operar desde o começo toda a matemática no sistema de Russell, então naturalmente ainda não teríamos inventado, com o cálculo Russelliano, o cálculo

MS 122, p. 90v

diferencial, por exemplo. Quem descobriu portanto este tipo de cálculo *no cálculo Russelliano* – – –."

Suponhamos que tivesse diante de mim demonstrações Russellianas das proposições
'p ≡ ~ ~p'
'~p ≡ ~ ~ ~p'
'p ≡ ~ ~ ~ ~p'
e que encontrasse agora um caminho abreviado para demonstrar a proposição
'p ≡ $\sim^{10}$ p'
Seria como se tivesse encontrado um novo tipo de cálculo por dentro do antigo cálculo. Em que consiste que ele tenha sido encontrado?

Diga-me: teria descoberto um

MS 122, p. 91r

novo tipo de cálculo se tivesse aprendido a multiplicar e agora me desse conta de que multiplicações com todos os fatores iguais é como um ramo particular destes cálculos, e por isto introduzisse a notação 'a^n = . . .'?

Evidentemente, a meramente 'abrevia-

MS 122, p. 91v

da', ou outra notação – '162' em vez de '16 x 16'– não importa. O importante agora é que mera-

Ist ›16^{15}‹ nur eine andere Schreibweise für ›16 x 16 x 16 x 16 x 16 x 16 x 16 x 16 x 16 x 16 x 16 x 16 x 16 x 16 x 16‹?

Der Beweis, daß 16^{15} = . . . ist, besteht nicht einfach darin, daß ich 16 fünfzehnmal mit sich selbst multipliziere, und daß dabei dies herauskommt – sondern der Beweis muß es zeigen, daß ich die Zahl *15-mal* zum Faktor setze.

Wenn ich frage: »Was ist das Neue an der ›neun Rechnungsart‹ des Potenzierens« – so ist das schwer zu

MS 122, p. 92r

sagen. Das Wort ›neuer Aspekt‹ ist vag. Es heißt, wir sehen die Sache jetzt anders an – aber die Frage ist: was ist die wesentliche, die *wichtige* Äußerung dieses ›anders-Ansehens‹?

Zuerst will ich sagen: »Es hätte einem nie *auffallen* brauchen, daß in gewissen Produkten alle Faktoren gleich sind« – oder: »›Produkt lauter gleicher Faktoren‹ ist ein neuer Begriff« – oder: »Das Neue besteht darin, daß wir die Rechnungen anders zusammenfassen«. Beim Potenzieren ist es offenbar das Wesentliche, daß wir auf die *Zahl* der Faktoren sehen. Es ist doch nicht gesagt, daß wir auf die Zahl der Faktoren je geachtet haben. Es

MS 122, p. 92v

muß uns nicht aufgefallen sein, daß es Produkte mit 2, 3, 4 etc. Faktoren gibt, obwohl wir schon oft solche Produkte ausgerechnet haben. Ein neuer Aspekt – aber wieder: Was ist seine *wichtige* Seite? Wozu benütze ich, was mir aufgefallen ist? – Nun vor allem lege ich es vielleicht in einer Notation nieder. Ich schreibe also zum Beispiel statt ›a x a‹ ›a^2‹. Dadurch beziehe ich mich auf die Zahlenreihe (spiele auf sie an), was früher nicht geschehen war. Ich stelle also doch eine neue Verbindung her! – Eine Verbindung – zwischen welchen Dingen? Zwischen der Technik des Zahlens von Faktoren und der Technik des Multiplizierens.

MS 122, p. 93r

Aber so macht ja jeder Beweis, jede einzelne Rechnung neue Verbindungen!

Aber der *gleiche* Beweis, der zeigt, daß a x a x a x a . . . = b ist, zeigt doch auch, daß a^n = b ist; nur, daß wir den Übergang nach der Definition von ›a^n‹ machen müssen.

Aber dieser Übergang ist ja gerade das Neue. Aber wenn er nur ein Übergang zum alten Beweis ist, wie

MS 122, p. 93v

kann er dann wichtig sein?

›Es ist nur eine andere Schreibweise.‹ Wo hört es auf – bloß eine andere Schreibweise zu sein?

mente *contemos* os fatores.

‘16^{15}’ é só uma outra forma de notação para ‘16 x 16 x 16 x 16 x 16 x 16 x 16 x 16 x 16 x 16 x 16 x 16 x 16 x 16 x 16’?

A demonstração de que 16^{15} = . . . não consiste simplesmente em que eu multiplique 16 quinze vezes por si mesmo, e obtenha assim este resultado, – senão que a demonstração tem que mostrar que pus o número como fator *quinze vezes*.

Quando pergunto: “O que é o novo no ‘novo tipo de cálculo’ da potenciação” – é difícil de

MS 122, p. 92r

dizer. A locução ‘aspecto novo’ é vaga. Significa que vemos a coisa agora como diferente – mas a questão é: o que é o essencial, a expressão *relevante* deste ‘ver-diferente’?

Em primeiro lugar, quero dizer: “Nunca teria *chamado a atenção* de alguém que em certos produtos todos os fatores são iguais” – ou: “O ‘produto de todos os fatores iguais’ é um conceito novo” – ou: “O novo consiste em que tornamos a efetuar os cálculos de maneira diferente”. Na potenciação, evidentemente o essencial é que vejamos o *número* dos fatores. Todavia, não se disse que alguma vez prestamos atenção ao número de fatores. Não

MS 122, p. 92v

tem que nos chamar a atenção que há produtos com 2, 3, 4 fatores etc., mesmo que já tenhamos calculado muitas vezes estes produtos. Um aspecto novo – mas novamente: qual é o seu lado *relevante*? Para que utilizo aquilo que me chama a atenção? – Bem, antes de tudo talvez o assente numa notação. Assim escreveria, por exemplo, em vez de ‘a x a’, ‘a^2’. Com isto me referiria à série de números (aludiria a ela), o que antes não havia ocorrido. Estabeleço portanto uma nova conexão! – Uma conexão – entre que coisas? Entre a técnica da contagem de fatores e a técnica da multiplicação.

MS 122, p. 93r [167]

Mas assim toda demonstração, todo cálculo em particular, faz novas conexões!

Mas a *mesma* demonstração que mostra que a x a x a x a . . . = b, mostra também que a^n = b; só que nós temos que fazer a transição segundo a definição de ‘a^n’.

Mas esta transição é exatamente o novo. Mas se ela só é uma transição de uma antiga demonstração, como

MS 122, p. 93v

poderia ser então relevante?

‘Isto é só uma outra forma de notação.’ Quando deixa de ser – somente uma outra forma de notação?

Nicht dort: wo nur die eine Schreibweise und nicht die andre so und so verwendet werden kann?

Man könnte es »einen neuen Aspekt finden« nennen, wenn Einer statt ›f(a)‹ schreibt ›(a)f‹; man könnte sagen: »Er *sieht* die Funktion als Argument ihres Arguments an«. Oder wenn Einer statt ›a x a‹ schriebe ›x (a)‹ könnte man sagen: »Was man früher als Spezialfall einer Funktion mit zwei Argumentstellen ansah,

MS 122, p. 94r

sieht er als Funktion mit *einer* Argumentstelle an«?

Wer das tut, hat gewiß in einem Sinn den Aspekt verändert, er hat z. B. *diesen* Ausdruck mit anderen zusammengestellt, verglichen, mit denen er früher nicht verglichen wurde. – Aber ist das nun eine *wichtige* Aspektänderung? *Nicht*, solange sie nicht gewisse Konsequenzen hat.

Es ist schon wahr, daß ich durch das Hineinbringen des Begriffs der *Anzahl* der Negationen den Aspekt der logischen Rechnung geändert habe: »So habe ich es noch nicht angeschaut« – könnte man sagen. Aber wichtig wird diese Ände-

MS 122, p. 94v

rung erst, wenn sie in die Anwendung des Zeichens eingreift.

Ein Fuß als *12 Zoll* auffassen, hieße allerdings den Aspekt des Fußes ändern, aber wichtig würde diese Änderung erst, wenn man nun auch Längen in Zoll *mäße*.

Wer das Zählen der Negations-

MS 122, p. 95r

zeichen einführt, führt eine neue Art der Reproduktion der Zeichen ein.

Es ist zwar für die Arithmetik, die doch von der Gleichheit von Anzahlen spricht, ganz gleichgültig, wie Anzahlengleichheit zweier Klassen festgestellt wird – aber es ist für ihre Schlüsse nicht gleichgültig, wie ihre Zeichen mit einander verglichen werden, nach welcher Methode also z. B. festgestellt wird, ob die Anzahl der Ziffern zweier Zahlzeichen die gleiche ist.

MS 122, p. 95v

Nicht die Einführung der Zahlzeichen als Abkürzungen ist wichtig, sondern die *Methode* des Zählens.

Não ali: onde só uma forma de notação e não outra pode ser empregada assim e assim?

Pode-se nomear como “encontrar um novo aspecto” quando alguém, em vez de ‘f(a)’, escreve ‘(a)f’; pode-se dizer: “Ele *vê* a função como argumento do seu argumento”. Ou se alguém em vez de ‘a x a’, escreve ‘x (a)’, pode-se dizer: “O que antes ele via como caso especial de uma função com duas posições de argumento,

MS 122, p. 94r

agora vê como função com *uma* posição de argumento”?

Quem faz isto certamente mudou em um sentido o aspecto, ele comparou, por exemplo, *esta* expressão com outras, o que antes ele ainda não havia feito. – Mas esta é uma mudança de aspecto *relevante*? *Não*, na medida em que ela não tem certas consequências.

É bem verdade que mudei o aspecto do cálculo lógico pela inserção do conceito do *número* de negações: “Então ainda não vi deste modo” – poder-se-ia dizer. Mas esta mudança só se torna relevante

MS 122, p. 94v

quando interfere no emprego do sinal.

Conceber um pé como *12 polegadas* significa ainda assim modificar o aspecto do pé, mas esta modificação só seria relevante quando *medíssemos* também o comprimento em polegadas.

Quem introduz a contagem dos

MS 122, p. 95r

sinais de negação, introduz um novo tipo de reprodução do sinal.

Mesmo que para a aritmética, que fala sobre a igualdade dos números, seja completamente indiferente como se estabelece a equinumericidade entre duas classes – não é indiferente para as suas inferências como os seus sinais se comparam entre si, portanto segundo que método, por exemplo, se estabelece se o número de dígitos de dois sinais numéricos é o mesmo.

MS 122, p. 95v

Não é a introdução do sinal numérico como abreviatura que é relevante, mas o *método* de contagem.

48. Ich will die Buntheit der Mathematik

MS 122, p. 96r

erklären.

49. ›Ich kann auch in Russells System den Beweis führen, daß 127 : 18 = 7.05 ist.‹ Warum nicht. – Aber muß beim Russellschen Beweis dasselbe herauskommen, wie hei der gewöhnlichen Division? Die beiden sind freilich durch eine *Rechnung* (durch Übersetzungsregeln etwa) mit einander verbunden; aber ist es nicht doch gewagt, die Division nach der neuen Technik auszuführen, – da doch die Wahrheit des Resultats nun abhängig wird von der Geometrie der Übertragung?

MS 122, p. 96v

Aber wenn nun Einer sagte: »Unsinn – solche Bedenken spielen in der Mathematik gar keine Rolle«.

– Aber nicht um die Unsicherheit handelt sich's, denn wir sind unsrer Schlüsse sicher, sondern darum, ob wir noch (Russellsche) Logik betreiben, wenn wir z. B. *dividieren*.

MS 122, p. 97r

50. Die Trigonometrie hat ihre Wichtigkeit ursprünglich in ihrer Verbindung mit Längen- und Winkelmessungen: sie ist ein Stück Mathematik, das zur Verwendung auf Längen- und Win kelmessungen eingerichtet ist.

Man könnte die Anwendbarkeit auf dieses Gebiet auch einen ›Aspekt‹ der Trigonometrie nennen.

Wenn ich einen Kreis in gleiche Teile teile und den Cosinus eines dieser Teile durch Messung bestimme – ist da eine Rechnung oder ein Experiment?

Wenn eine Rechnung – ist sie denn ÜBERSEHBAR?

MS 122, p. 98v

Ist das Rechnen mit dem Rechenschieber *übersehbar*?

Wenn man den Cosinus eines Winkels durch Messung bestimmen muß, – ist dann ein Satz der Form ›cos α = n‹ ein *mathematischer* Satz? Was ist das Kriterium dieser Entscheidung? Sagt der Satz etwas Äußeres über unsre Lineale und dergleichen aus; oder etwas Internes über unsre Begriffe? – Wie ist das zu entscheiden?

Gehören die Figuren (Zeichnungen) in der Trigonometrie zur reinen Mathematik, oder sind sie nur Beispiele einer möglichen

48. Quero explicar o multicolorido da

MS 122, p. 96r

matemática.

49. 'Posso também conduzir a demonstração no sistema de Russell de que 127 : 18 = 7,05.' Por que não. – Mas pela demonstração de Russell tem que dar o mesmo resultado que na divisão comum? Ambas, é claro, estão conectadas entre si por um *cálculo* (por exemplo, por regras de tradução); mas não é arriscado efetuar a divisão pela técnica nova, – já que a verdade do resultado depende agora da geometria da transferência?

MS 122, p. 96v

Mas e se alguém dissesse: "Bobagem – tais ponderações não têm nenhum papel na matemática".[168]

– Mas não se trata de incerteza, posto que estamos seguros das nossas inferências, senão de estarmos ainda operando com a lógica (Russelliana) quando, por exemplo, *dividimos*.

MS 122, p. 97r [169]

50. A trigonometria tem originalmente a sua relevância na conexão com a medida de comprimentos e de ângulos: ela é uma porção da matemática organizada para o emprego de medidas de comprimento e de ângulo.

Pode-se também chamar a aplicabilidade a este âmbito de um 'aspecto' da trigonometria.

Quando divido um círculo em partes iguais e determino o cosseno de uma destas partes pela mensuração – isto é um cálculo ou um experimento?

Se for um cálculo – ele é então uma VISÃO PANORÂMICA?

MS 122, p. 98v

O cálculo com a régua de cálculo é uma *visão panorâmica*?

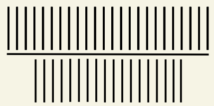
Se temos que determinar o cosseno de um ângulo pela mensuração, – uma proposição da forma 'cos α = n' é uma proposição *matemática*? Qual é o critério para esta decisão? A proposição afirma alguma coisa externa sobre a nossa régua e coisas similares; ou alguma coisa interna sobre os nossos conceitos? Como decidimos sobre isto?

As figuras (desenhos) da trigonometria pertencem à matemática pura, ou elas são apenas exemplos de uma *aplicação*

MS 122, p. 99r

Anwendung?

51. Wenn an dem, was ich sagen will, irgend etwas Wahres ist, so muß – z. B. – das Rechnen in der Dezimalnotation sein eigenes Leben haben. – Man kann natürlich jede Dezimalzahl darstellen in der Form:



und daher die vier Rechnungsarten in dieser Notation ausführen. Aber das Leben der Dezimalnotation müßte unabhängig sein von dem Rechnen mit Einerstrichen.

MS 122, p. 99v

52. In diesem Zusammenhang fällt mir immer wieder dies ein: Daß man in Russells Logik zwar einen Satz ›a : b = c‹ *beweisen* kann, daß sie uns aber einen richtigen Satz dieser Form nicht konstruieren lehrt, d. h. daß sie uns nicht *dividieren* lehrt. Der Vorgang des Dividierens entspräche z. B. dem eines *systematischen Probierens* Russellscher Beweise zu dem Zweck etwa, den Beweis eines Satzes von der Form ›37 x 15 = x‹ zu erhalten. »Aber die Technik eines solchen systematischen Probierens gründet sich doch wieder auf Logik. Man kann doch wieder logisch beweisen, daß diese Technik zum Ziel führen muß.« Es ist also ähnlich, wie wenn wir im Euklid beweisen, daß sich das und das so und so konstruieren läßt.

MS 122, p. 100r

53. Was will Einer zeigen, der zeigen will, daß Mathematik nicht Logik ist? Er will doch etwas sagen wie: – Wenn man Tische, Stühle, Schranke

MS 122, p. 100r

etc. in genug Papier wickelt, werden sie gewiß endlich kugelförmig ausschauen.

Er will nicht zeigen, daß es unmöglich ist, zu jedem mathematischen Beweis einen Russellschen zu konstruieren, der ihm (irgendwie) ›entspricht‹, sondern, daß das Anerkennen so einer Entsprechung sich nicht auf Logik stützt.

»Aber wir können doch immer auf die primitive logische Methode zurückgehen!« Nun, angenommen, daß wir es können – wie kommt es, daß wir es nicht tun *müssen*? Oder sind wir vorschnell, unvorsichtig, wenn wir es nicht tun?

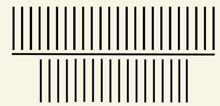
Aber wie finden wir denn zurück zum primitiven Aus-

MS 122, p. 101r

MS 122, p. 99r

possível?

51. Se houver alguma coisa verdadeira sobre aquilo que quero dizer, então o cálculo na notação decimal – por exemplo – tem que ter a sua vida própria. – Pode-se, naturalmente, apresentar qualquer número decimal na forma:



e por isto realizar os quatro tipos de cálculo nesta notação. Mas a vida da notação decimal teria que ser independente do cálculo com traços unitários.

MS 122, p. 99v

52. Neste contexto sempre me ocorre novamente: que mesmo que se possa *demonstrar* na lógica de Russell uma proposição como ‘a : b = c’, ela não nos ensina a construir uma proposição correta nesta forma, ou seja, ela não nos ensina a *dividir*. O processo da divisão corresponde, por exemplo, ao de uma *comprovação sistemática* de demonstrações Russellianas com a finalidade, por exemplo, de obter a demonstração de uma proposição da forma ’37 x 15 = x’. “Mas a técnica de uma comprovação sistemática assim está baseada, por sua vez, na lógica. Pode-se outra vez demonstrar logicamente que esta técnica tem que conduzir à finalidade.” Isto é, portanto, semelhante a quando demonstramos em Euclides que se pode construir isto e aquilo assim e assim.

MS 122, p. 100r

53. O que quer mostrar alguém que quer mostrar que matemática não é lógica? Ele quer dizer algo como: – Se embrulhamos mesas, cadeiras, armários

MS 122, p. 100r

etc. em papel suficiente, no final eles certamente parecerão ter forma arredondada.

Ele não quer mostrar que é impossível construir para cada demonstração matemática uma Russelliana que lhe ‘corresponda’ (de alguma maneira), mas que a admissão desta correspondência não se apoia na lógica.

“Mas nós sempre podemos retornar ao método lógico primitivo!” Bem, vamos supor que possamos fazer isto – como é que não *temos que* fazê-lo? Ou somos precipitados, descuidados, quando não o fazemos?

Mas como encontramos o regresso à expressão

MS 122, p. 101r

druck? Gehen wir z. B. den Weg durch den sekundären Beweis und von seinem Ende aus zurück ins primäre System und sehen zu, wo wir so hingelangen; oder gehen wir in beiden Systemen vor und machen dann die Verbindung der Endpunkte? Und wie wissen wir, daß wir im primären System in beiden Fällen zum gleichen Resultat gelangen?

Führt das Vorgehen im sekundären System nicht überzeugungskraft mit sich?

»Aber wir können uns doch beim jeden Schritt im sekundäre System denken, daß er auch im primären gemacht werden könnte!« – Das ist es eben: *wir können uns*

MS 122, p. 101v

denken, daß er gemacht werden könnte – ohne, daß wir ihn machen.

Und warum nehmen wir den einen an Stelle des andern an? Aus Gründen der *Logik*?

»Aber kann man nicht logisch beweisen, daß beide Umwandlungen zum gleichen Resultat gelangen müssen?« – Aber es handelt sich doch hier um das Ergebnis von Umwandlungen von Zeichen! Wie kann die Logik dies entscheiden?

MS 122, p. 102r

54. Wie kann der Beweis im Strichsystem beweisen, daß der Beweis im Dezimalsystem ein Beweis ist?

Nun, – ist es hier mit dem Beweis im Dezimalsystem nicht so, wie mit einer *Konstruktion* bei Euklid, von der *bewiesen* wird, daß sie wirklich eine Konstruktion dieses und dieses Gebildes ist?

Darf ich es so sagen: »Die Übertragung des Strichsystems ins Dezimalsystem setzt eine

MS 122, p. 104v

rekursive Definition voraus. Diese Definition führt aber nicht die Abkürzung *eines* Ausdrucks durch einen andern ein. Der induktive Beweis im Dezimalsystem aber enthält natürlich nicht die Menge jener Zeichen, die durch die rekursive Definition in Strichzeichen zu übertragen wären. Dieser allgemeine Beweis kann daher durch die rekursive Definition nicht in einen Beweis des Strichsystems übertragen werden«?

Der rekursive Beweis führt eine neue Zeichentechnik ein. – Er muß also den Übergang in eine neue ›Geometrie‹ machen.

MS 122, p. 105r

primitiva? Seguimos, por exemplo, o caminho da demonstração secundária, e, a partir do seu final, regressamos ao sistema primário para ver onde chegamos assim; ou prosseguimos nos dois sistemas e fazemos depois a conexão dos pontos finais? E como sabemos que no sistema primário chegamos ao mesmo resultado nos dois casos?

Não carrega consigo o procedimento no sistema secundário uma força de convencimento?

“Mas nós podemos imaginar em cada passo do sistema secundário que ele poderia também ter sido dado no primário!” – Isto é justamente: *podemos*

MS 122, p. 101v

imaginar que ele poderia ter sido dado – sem que o demos.

E por que aceitamos um no lugar do outro? Pelos fundamentos da *lógica*?

“Mas não se pode demonstrar logicamente que as duas transformações têm que chegar no mesmo resultado?” – Mas aqui se trata do resultado de transformações de sinais! Como pode a lógica decidir sobre isto?

MS 122, p. 102r [170]

54. Como a demonstração pode demonstrar no sistema de traços que a demonstração no sistema decimal é uma demonstração?

Bem, – não acontece com a demonstração no sistema decimal tal como ocorre com uma *construção* em Euclides, em que se *demonstra* que ela é realmente uma construção desta e desta estrutura?

Posso dizê-lo deste modo: “A transcrição do sistema de traços no sistema decimal pressupõe uma

MS 122, p. 104v

definição recursiva. Esta definição não introduz, porém, a abreviação de *uma* expressão pela outra. Entretanto, a prova indutiva no sistema decimal não contém, naturalmente, o conjunto daqueles sinais que teriam que ser transcritos pela definição recursiva em sinais de traços. Esta demonstração geral não pode, portanto, ser transcrita pela definição recursiva em uma demonstração do sistema de traços”?

A demonstração recursiva introduz uma nova técnica de sinais. – Ela tem, portanto, que fazer a transição para uma nova ‘geometria’.

MS 122, p. 105r

Es wird uns eine neue Methode gelehrt, Zeichen wiederzuerkennen. Es wird ein neues Kriterium für die Gleichheit von Zeichen eingeführt.

55. Der Beweis zeigt uns, was herauskommen SOLL. – Und da jede Reproduktion des Beweises das Nämliche demonstrieren muß, so muß sie einerseits also das Resultat automatisch reproduzieren, anderseits aber auch den *Zwang*, es zu erhalten.

MS 122, p. 105v

D. h.: wir reproduzieren nicht nur die *Bedingungen*, unter welchen sich dies Resultat einmal ergab (wie beim Experiment), sondern das

MS 122, p. 106r

Resultat selbst. Und doch ist der Beweis kein abgekartetes Spiel, insofern er uns immer wieder muß führen können.

Wir müssen einerseits den Beweis automatisch ganz reproduzieren können, und anderseits muß diese Reproduktion wieder ein *Beweis* des Resultats sein.

»Der Beweis muß übersehbar sein« will unsre Aufmerksamkeit eigentlich auf den Unterschied richten der Begriffe: ›einen Beweis wiederholen‹, ›ein Experiment wiederholen‹. Einen Beweis wiederholen, heißt nicht: die Bedingungen reproduzieren, unter denen einmal ein

MS 122, p. 106v

bestimmtes Resultat erhalten wurde, sondern es heißt, jede Stufe *und das Resultat* wiederholen. Und obwohl so der Beweis also etwas ist, was sich ganz automatisch muß reproduzieren lassen, so muß doch jede solche Reproduktion den Beweiszwang enthalten, das Resultat anzuerkennen.

MS 122, p. 107r

56. Wann sagen wir: ein Kalkül ›entspräche‹ einem andern, sei nur eine abgekürzte Form des ersten? – »Nun, wenn man die Resultate dieses durch entsprechende Definitionen in die Resultate jenes überführen kann.« Aber ist schon gesagt, wie man mit diesen Definitionen zu rechnen hat? Was läßt uns diese Übertragung anerkennen? Ist sie am Ende ein abgekartetes Spiel? Das ist sie, wenn wir entschlossen sind, nur die Übertragung anzuerkennen, die zu dem uns gewohnten Resultat führt.

MS 122, p. 109v

Somos ensinados sobre um novo método de reconhecimento de sinais. É introduzido um novo critério de identidade de sinais.[171]

55. A demonstração nos mostra o que DEVE resultar. – E dado que toda a reprodução da demonstração tem que demonstrar o mesmo, ela tem portanto que, por um lado, reproduzir automaticamente o resultado, mas, por outro lado, também a *compulsão* para obtê-lo.

MS 122, p. 105v

Ou seja: nós reproduzimos não somente as *condições* sob as quais uma vez se produziu este resultado (como num experimento), senão o

MS 122, p. 106r

próprio resultado. E no entanto a demonstração não é um jogo de cartas marcadas na medida em que ela tem sempre que poder voltar a nos conduzir.

Nós temos que poder, por um lado, reproduzir totalmente a demonstração de maneira automática, e, por outro lado, esta reprodução tem que ser novamente uma *demonstração* do resultado.

“A demonstração tem que ser uma visão panorâmica” quer propriamente dirigir a nossa atenção para a diferença dos conceitos: ‘repetir uma demonstração’, ‘repetir um experimento’. Repetir uma demonstração não significa: reproduzir as condições sob as quais uma vez

MS 122, p. 106v

um determinado resultado foi obtido, mas significa repetir todas as etapas *e o resultado*. E ainda que assim a demonstração seja algo que tenha que se poder reproduzir totalmente de maneira automática, cada uma destas reproduções, no entanto, tem que conter a compulsão da demonstração para a aceitação do resultado.[172]

MS 122, p. 107r

56. Quando dizemos: que um cálculo ‘corresponda’ a outro é só uma forma abreviada do primeiro? – “Bem, quando se pode transportar o resultado deste, mediante definições apropriadas, para o resultado daquele.” Mas já foi dito como se tem que calcular com estas definições? O que nos permite aceitar esta transferência? Ela seria, no final, um jogo de cartas marcadas? É assim quando nos decidimos a aceitar só a transferência que nos leva ao resultado habitual.

MS 122, p. 109v

Warum nennen wir einen

MS 122, p. 110r

Teil des Russellschen Kalküls den der Differentialrechnung entsprechenden? – Weil in ihm die Sätze der Differentialrechnung bewiesen werden. – Aber doch nicht am Ende post hoc? – Aber ist das nicht gleichgültig? Genug, daß man Beweise dieser Sätze im Russellschen System finden kann! Aber sind es Beweise dieser Sätze nicht nur dann, wenn ihre Resultate sich nur in *diese* Sätze übersetzen lassen? Aber stimmt das sogar im Fall des Multiplizierens im Strichsystem mit numerierten Strichen?

57. Nun muß klar gesagt werden, daß die Rechnungen in der Strichnotation normalerweise immer mit denen der Dezimalnotation übereinstimmen werden. Vielleicht werden wir,

MS 122, p. 110v

um sichere Übereinstimmung zu erzielen, an einem Punkt dazu greifen müssen, die Rechnung mit Strichen von *mehreren* Leuten nachrechnen zu lassen. Und das Gleiche werden wir bei Rechnungen mit noch höheren Zahlen im Dezimalsystem vornehmen.

Aber das zeigt freilich schon: daß nicht die Beweise im Strichsystem die Beweise im Dezimalsystem zwingend machen.

»Hätte man aber nun diese nicht, so könnte man jene gebrauchen, um das gleiche zu beweisen.« – Das Gleiche? Was ist das Gleiche? – Also, der Strichbeweis wird mich vom Gleichen, wenn

MS 122, p. 111r

auch nicht auf die gleiche Weise, überzeugen. – Wie, wenn ich sagte: »Der Platz, an den uns ein Beweis führt, kann nicht unabhangig von diesem Beweis bestimmt werden.« – Bin ich durch einen Beweis im Strichsystem davon überzeugt worden, daß der bewiesene Satz die Anwendbarkeit besitzt, die der Beweis im Dezimalsystem ihm gibt – ist z. B. im Strichsystem gezeigt worden, daß der Satz auch im Dezimalsystem beweisbar ist?

58. Es wäre natürlich Unsinn zu sagen, daß *ein* Satz

MS 122, p. 111v

nicht mehrere Beweise haben kann – denn so sagen wir eben. Aber kann man nicht sagen: *Dieser* Beweis zeigt, daß . . . herauskommt, wenn man *das* tut; der andere Beweis zeigt, daß dieser Ausdruck herauskommt, wenn man etwas andres tut?

Ist denn z. B. das mathematische Faktum, daß 129 durch 3 teilbar ist, unabhängig davon, daß *dies* Resultat bei *dieser* Rechnung herauskommt? Ich meine: besteht das Faktum dieser Teilbarkeit unabhängig von dem *Kalkül*, in dem es sich ergibt; oder ist es ein Faktum dieses Kalküls?

MS 122, p. 112r

Por que chamamos uma

MS 122, p. 110r

parte do cálculo Russelliano como correspondente ao cálculo diferencial? – Porque nela são demonstradas as proposições do cálculo diferencial. – Mas não ao final, post hoc? – Mas não dá no mesmo? É suficiente que se possa encontrar demonstrações destas proposições no sistema de Russell! Mas não são demonstrações dessas proposições somente quando os seus resultados são passíveis de serem traduzidos *nestas* proposições? Mas isto vale até mesmo no caso de multiplicações em sistema de traços com traços numerados?

57. Agora tem que ser dito claramente que os cálculos na notação com traços serão sempre normalmente concordes com os da notação decimal. Talvez, para conseguir uma concordância segura,

MS 122, p. 110v

tenhamos que chegar ao ponto de poder repassar com *mais* pessoas o cálculo com traços. E faremos o mesmo com cálculos com números ainda maiores no sistema decimal.

Mas isto admitidamente já mostra: que não são as demonstrações no sistema de traços que tornam compulsórias as demonstrações no sistema decimal.

"Mas se não houvesse esta agora, poder-se-ia usar aquela para demonstrar o mesmo." – O mesmo? O que é o mesmo? – Pois a demonstração em traços me convencerá do mesmo, ainda que

MS 122, p. 111r

não do mesmo modo. – Como se dissesse: "O lugar ao que uma demonstração nos leva não pode ser determinado de maneira independente desta demonstração." – Fui convencido por uma demonstração no sistema de traços de que a proposição demonstrada possui a aplicabilidade que lhe dá a demonstração no sistema decimal – foi demonstrado, por exemplo, no sistema de traços que a proposição pode ser também demonstrada no sistema decimal?

58. Naturalmente, seria absurdo dizer que *uma* proposição

MS 122, p. 111v

não pode ter *várias* demonstrações – pois dizemos justamente isto. Mas não se pode dizer: *Esta* demonstração mostra que se consegue . . . quando se faz *isto*; a outra demonstração mostra que se consegue esta expressão quando se faz algo diferente?

O fato matemático de que, por exemplo, 129 é divisível por 3 é então independente de que se consiga *este* resultado por meio *deste* cálculo? Quero dizer: o fato desta divisibilidade subsiste de modo independente do cálculo pelo qual ele se dá; ou é isto um fato deste cálculo?

MS 122, p. 112r

Denke, man sagte: »Durch das Rechnen lernen wir die Eigenschaften der Zahlen kennen.«

Aber *bestehen* die Eigenschaften der Zahlen außerhalb des Rechnens?

»Zwei Beweise beweisen dasselbe, wenn sie mich von dem Gleichen überzeugen.« – Und wann überzeugen sie mich von dem Gleichen? Wie weiß ich, daß sie mich vom Gleichen überzeugen? Natürlich nicht durch Introspektion.

Man kann mich auf verschiedenen Wegen dazu bringen, diese Regel anzunehmen.

MS 122, p. 112v

59. »Jeder Beweis zeigt nicht nur die Wahrheit des bewiesenen Satzes, sondern auch, daß er sich *so* beweisen läßt.« – Aber dies letztere läßt sich ja auch anders beweisen. – »Ja, aber der Beweis beweist es auf eine bestimmte Weise und beweist dabei, daß es sich auf diese Weise demonstrieren läßt.« – Aber auch *das* ließ sich durch einen andern Beweis zeigen. – »Ja, aber eben nicht auf diese Weise.« –

Das heißt doch etwa: Dieser Beweis ist ein mathematisches Wesen, das sich durch kein anderes Wesen ersetzen läßt; man kann sagen, er könne uns von etwas überzeugen, wovon uns nichts Anderes überzeugen kann, und man kann dies zum Ausdruck bringen, indem man ihm einen Satz zuordnet, den man keinem andern Beweis zuordnet.

MS 117, p. 154

60. Aber mache ich nicht einen groben Fehler? Den Sätzen der Arithmetik und den Sätzen der Russellschen Logik ist es ja geradezu wesentlich, daß verschiedene Beweise zu ihnen führen. Ja, sogar, daß unendlich viele Beweise zu einem jeden von ihnen führen.

Ist es richtig zu sagen, daß jeder Beweis uns von etwas überzeugt, wovon nur er uns überzeugen kann? Wäre dann nicht – sozusagen – der bewiesene Satz überflüssig, und der Beweis selbst auch das Bewiesene?

Überzeugt mich der Beweis nur vom bewiesenen Satz?

Was heißt: »ein Beweis ist ein mathematisches Wesen, das sich durch kein anderes ersetzen läßt«? Es heißt doch, daß jeder besondere Beweis einen Nutzen hat, den kein anderer hat. Man könnte sagen:

MS 117, p. 155

Imagine que se diga: “Pelo cálculo aprendemos a conhecer as propriedades dos números.”

Mas as propriedades dos números *subsistem* fora do cálculo?

“Duas demonstrações demonstram a mesma coisa quando me convencem do mesmo.” – E quando elas me convencem do mesmo? Naturalmente, não por introspecção.

Pode-se me levar a aceitar esta regra por diferentes caminhos.

MS 122, p. 112v [173]

59. “Toda demonstração mostra não somente a verdade da proposição demonstrada, mas também que ela é capaz de ser demonstrada *assim*.” – Mas esta última é capaz de ser demonstrada também de outra maneira. – “Sim, mas a demonstração demonstra isto de um modo determinado, e, com isto, se permite demonstrar que se demonstra deste modo.” – Mas *isto* também se permite mostrar por uma demonstração diferente. – “Sim, mas não justamente deste modo.” –

No entanto, isto talvez signifique: Esta demonstração é um ente matemático que não se deixa substituir por nenhum outro ente; pode-se dizer que ela poderia nos convencer de algo que nenhuma outra pode nos convencer, e pode-se dar expressão a isto associando-lhe uma proposição à qual nenhuma outra demonstração associa.

MS 117, p. 154

60. Mas não cometo um erro grosseiro? Para as proposições da aritmética e para as proposições da lógica de Russell é categoricamente essencial que diversas demonstrações levem a elas. Sim, e até mesmo que a cada uma delas leve um número infinito de demonstrações.

É correto dizer que toda demonstração nos convence de algo que só ela pode nos convencer? Não seria, então, a proposição demonstrada – por assim dizer – supérflua, e a própria demonstração também o que é demonstrado?

A demonstração só me convence da proposição demonstrada?

O que significa: “uma prova é um ente matemático que não se deixa substituir por nenhum outro”? Isto significa que toda demonstração em particular tem uma utilidade que nenhuma outra tem. Poder-se-ia dizer:

MS 117, p. 155

»– daß jeder Beweis, auch eines schon bewiesenen Satzes, eine Kontribution zur Mathematik ist«. Warum aber ist er eine Kontribution, wenn es bloß darauf ankam, den Satz zu beweisen? Nun, man kann sagen: »der neue Beweis zeigt (oder *macht*) einen neuen Zusammenhang«. (Aber gibt es dann nicht einen mathematischen Satz, welcher sagt, daß dieser Zusammenhang besteht?)

Was *lernen* wir, wenn wir den neuen Beweis sehen, – außer den Satz, den wir ohnehin schon kennen? Lernen wir etwas, was sich nicht in einem mathematischen Satz ausdrücken läßt?

MS 117, p. 156

61. Inwiefern hängt die Anwendung eines mathematischen Satzes davon ab, was man als seinen Beweis gelten läßt und was nicht?

Ich kann doch sagen: Wenn der Satz ›137 x 373 = 46.792‹ im gewöhnlichen Sinne wahr ist, *dann muß es eine Multiplikationsfigur geben*, an deren Enden die Seiten dieser Gleichung stehen. Und eine Multiplikationsfigur ist ein Muster, das gewissen Regeln genügt.

Ich will sagen: Erkennte ich die Multiplikationsfigur nicht als *einen* Beweis des Satzes an, so fiele

MS 117, p. 158

damit auch die Anwendung des Satzes auf Multiplikationsfiguren fort.

MS 117, p. 159

62. Bedenken wir, daß es nicht genug ist, daß sich zwei Beweise im selben Satzzeichen treffen! Denn wie wissen wir, daß dies Zeichen beidemale dasselbe sagt? *Dies* muß aus anderen Zusammenhängen hervorgehen.

MS 117, p. 161

63. Die *genaue* Entsprechung eines richtigen (überzeugenden) Übergangs in der Musik und in der Mathematik.

MS 117, p. 160

64. Denke, ich gabe jemandem die Aufgabe: »Finde einen Beweis des Satzes ... « – die Lösung wäre doch, daß er mir gewisse Zeichen vorlegt. Nun gut: *welcher* Bedingung müssen diese Zeichen genügen? Sie müssen ein Beweis jenes Satzes sein – aber ist das etwa eine *geometrische* Bedingung? Oder eine psychologische? Manchmal könnte man es eine geometrische Bedingung nennen; dort, wo die Beweismittel schon vorgeschrieben sind und nur noch eine bestimmte

" – que toda demonstração, até mesmo de uma proposição já demonstrada, é uma contribuição para a matemática". Mas por que é uma contribuição se tudo o que importa é demonstrar a proposição? Bem, pode-se dizer: "a nova demonstração mostra (ou *faz*) uma nova conexão". (Mas então não há uma proposição matemática que diga que existe esta conexão?)

O que *aprendemos* quando vemos a nova demonstração – fora a proposição que já conhecemos de qualquer modo? Aprendemos algo que não somos capazes de expressar numa proposição matemática?

MS 117, p. 156 [174]

61. Em que medida a aplicação de uma proposição matemática depende do que se admite como sua demonstração e do que não?

Posso dizer: Se a proposição '137 x 373 = 46.792' é verdadeira no sentido habitual, *então tem que haver uma figura da multiplicação* em cujas extremidades estejam os lados desta equação. E uma figura da multiplicação é uma amostra que satisfaz certas regras.

Quero dizer: se não reconhecesse a figura da multiplicação como *uma* demonstração da proposição, cairia

MS 117, p. 158

também a aplicação da proposição às figuras da multiplicação.

MS 117, p. 159 [175]

62. Consideremos que não é suficiente que se encontrem duas demonstrações no mesmo sinal proposicional! Pois como saberemos que este sinal diz o mesmo duas vezes? *Isto* tem que provir de outras conexões.

MS 117, p. 161 [176]

63. A correspondência *exata* de uma transição correta (convincente) na música e na matemática.

MS 117, p. 160 [177]

64. Imagine que eu dê para alguém a tarefa: "Encontre uma demonstração para a proposição . . ." – A solução seria que ele me propusesse certos sinais. Muito bem: *que* condição estes sinais teriam que satisfazer? Eles teriam que ser uma demonstração daquela proposição – mas esta é porventura uma condição *geométrica*? Ou seria psicológica? Às vezes pode-se chamá-la de condição geométrica; justamente onde os meios de demonstração já estão prescritos e só estamos

Zusammenstellung gesucht wird.

MS 117, p. 164

65. Sind die Sätze der Mathematik anthropologische Sätze, die sagen, wie wir Menschen schließen und kalkulieren? – Ist ein Gesetzbuch ein Werk über Anthropologie, das uns sagt, wie die Leute dieses Volkes einen Dieb etc. behandeln? — Könnte man sagen: »Der Richter schlägt in einem Buch über Anthropologie nach und verurteilt hierauf den Dieb zu einer Gefangnisstrafe«? Nun, der Richter GEBRAUCHT das Gesetzbuch nicht als Handbuch der Anthropologie.

MS 117, p. 172

66. Die Prophezeiung lautet *nicht*, daß der Mensch, wenn er bei der Transformation dieser Regel folgt, *das* herausbringen wird – sondern, daß er, wenn wir *sagen*, er folge der Regel, das herausbringen werde.

Wie, wenn wir sagten, daß mathematische Sätze in *diesem* Sinne Prophezeiungen sind: indem sie vorhersagen, was Glieder einer Gesellschaft, die diese Technik gelernt haben, in Übereinstimmung mit den übrigen Gliedern der Gesellschaft herausbringen werden? ›25 x 25 = 625‹ hieße also, daß Menschen, wenn sie unsrer Meinung nach die Regeln des Multiplizierens befolgen, bei der Multiplikation 25 x 25 zum Resultat 625 kommen werden. – Daß dies eine richtige Vorhersage ist, ist zweifellos; und auch, daß das Wesen des Rechnens auf solche Vorhersagen gegründet ist. D. h., daß wir etwas nicht ›rechnen‹ nennen würden, wenn wir so eine Prophezeiung nicht mit Sicherheit

MS 117, p. 173

machen könnten. Das heißt eigentlich: das Rechnen ist eine Technik. Und was wir gesagt haben, gehört zum Wesen einer Technik.

MS 117, p. 174

67. Zum Rechnen gehört *wesentlich* dieser Consensus, das ist sicher. D. h.: zum Phänomen unseres Rechnens gehört dieser Consensus.

In einer *Rechen*technik müssen Prophezeiungen möglich sein.

Und das macht die Rechentechnik der Technik eines *Spieles* wie des Schachs, ähnlich.

MS 117, p. 175

Aber wie ist das mit dem Consensus – heißt das nicht, daß *ein* Mensch allein nicht rechnen könnte?

buscando ainda uma determinada composição.

MS 117, p. 164

65. São as proposições da matemática proposições antropológicas que dizem como nós, humanos, inferimos e calculamos? – Um código penal é uma obra de antropologia que nos diz como as pessoas daquele povo tratam um ladrão etc.? — Poder-se-ia dizer: "O juiz consulta um livro de antropologia e sentencia em seguida o ladrão a uma pena de prisão"? Bem, o juiz não USA o código penal como um tratado de antropologia.[178]

MS 117, p. 172

66. A profecia *não* apregoa que a pessoa, quando segue esta regra de transformação, vai conseguir *este* resultado – senão que ela, quando lhe *dizemos* para seguir a regra, vai conseguir este resultado.

Como seria se disséssemos que proposições matemáticas são profecias *neste* sentido: na medida em que predizem o que vão conseguir membros de uma sociedade que aprenderam esta técnica em concordância com os demais membros da sociedade? '25 x 25 = 625' significaria, portanto, que pessoas, quando em nossa opinião seguem as regras de multiplicação, vão chegar ao resultado de 625 pela multiplicação de 25 x 25. – Que isto seja uma predição correta é indubitável; e também que a essência do cálculo está fundamentada sobre tal predição. Ou seja, que nós não poderíamos chamar alguma coisa de 'calcular' se não[179] pudéssemos fazer com certeza uma profecia

MS 117, p. 173

assim. Isto significa propriamente: o cálculo é uma técnica. E o que dissemos pertence à essência de uma técnica.

MS 117, p. 174

67. Ao cálculo pertence *essencialmente* este consenso, isto é certo. Ou seja: ao fenômeno do nosso cálculo pertence este consenso.

Em uma técnica de *cálculo* teria que ser possível profetizar.

E isto torna a técnica de cálculo semelhante à técnica de um *jogo* como o de xadrez.

MS 117, p. 175

Mas o que acontece então com o consenso – isto não significa que *uma* pessoa só não pode calcular?

Nun, *ein* Mensch könnte jedenfalls nicht nur *einmal* in seinem Leben rechnen.

Man könnte sagen: alle *möglichen* Spielstellungen in Schach können als Sätze aufgefaßt werden, die sagen, sie (selbst) seien *mögliche* Spielstellungen; oder auch als Prophezeiungen: die Menschen werden diese Stellungen durch Züge erreichen können, welche sie übereinstimmend den Regeln gemäß erklären. Eine so *erhaltene* Spielstellung ist dann ein bewiesener Satz dieser Art.

»Eine Rechnung ist ein Experiment.« – Eine Rechnung kann ein Experiment sein. Der Lehrer läßt den Schüler eine Rechnung machen, um zu sehen, ob er rechnen kann; das ist ein Experiment.

MS 117, p. 176

Wenn in der Früh im Ofen Feuer gemacht wird, ist das ein Experiment? Aber es könnte eins sein.

Und so sind auch Schachzüge *nicht* Beweise und Schachstellungen nicht Sätze. Und mathematische Sätze nicht Spielstellungen. Und *so* sind sie auch nicht Prophezeiungen.

MS 117, p. 177

68. Wenn eine Rechnung ein Experiment ist; was ist dann ein Fehler in der Rechnung? Ein Fehler im Experiment? nicht doch; ein Fehler im Experiment wäre es gewesen, wenn ich die *Bedingungen* des Experiments nicht eingehalten hätte, wenn ich also jemanden etwa bei furchtbarem Lärm hätte rechnen lassen.

Aber warum soll ich nicht sagen: Ein Rechenfehler ist zwar kein *Fehler* im Experiment, aber ein – manchmal erklärliches, manchmal nicht erklärliches – *Fehlgehen* des Experiments?

MS 117, p. 178

69. »Eine Rechnung, z. B. eine Multiplikation, ist ein Experiment: *wir wissen nicht, was herauskommen wird* und erfahren es nun, wenn die Multiplikation fertig ist.« – Gewiß; wir wissen auch nicht, wenn wir spazieren gehen, an welchem Punkt wir uns in 5 Minuten befinden werden – aber ist Spazierengehen deshalb ein Experiment? – Gut; aber in der Rechnung wollte ich doch von vornherein wissen, was herauskommen werde; *das* war es doch, was mich interessierte. Ich bin doch neugierig auf das Resultat. Aber nicht, als auf das, was ich sagen *werde*, sondern, was ich sagen *soll*.

MS 117, p. 180

Aber interessiert dich nicht eben an dieser Multiplikation, wie die Allgemeinheit der Menschen rechnen wird? Nein – wenigstens für gewöhnlich nicht – wenn ich auch zu einem

Bem, *uma* pessoa, em todo caso, não pode calcular só *uma vez* na sua vida.

Poder-se-ia dizer: todas as posições de jogo *possíveis* em xadrez poderiam ser concebidas como proposições que dizem que elas são (em si mesmas) posições de jogo *possíveis*; ou também como profecias: as pessoas poderiam alcançar estas posições mediante lances que elas explicam unanimemente de acordo com regras. Uma posição de jogo obtida assim é então uma proposição demonstrada deste tipo.

"Um cálculo é um experimento." – Um cálculo pode ser um experimento. O professor deixa o aluno fazer um cálculo para ver se ele pode calcular; isto é um experimento.

MS 117, p. 176

Quando o fogo é aceso no forno de manhã, isto é um experimento? Mas poderia ser.

E assim também lances do xadrez *não* são demonstrações, e posições do xadrez não são proposições. E proposições matemáticas não são posições de jogo. E *assim* elas não são tampouco profecias.

MS 117, p. 177

68. Se um cálculo é um experimento; o que é então um erro no cálculo? Um erro no experimento? nada disto; teria sido um erro no experimento se não houvesse mantido as suas *condições*, se tivesse permitido, por exemplo, que alguém calculasse com um barulho terrível.

Mas por que não devo dizer: mesmo que um erro de cálculo não seja um *erro* no experimento, no entanto é um – às vezes explicável, às vezes não explicável – *erro de percurso* do experimento?

MS 117, p. 178

69. "Um cálculo, por exemplo uma multiplicação, é um experimento: *não sabemos o que vai resultar*, e o descobrimos agora quando a multiplicação está pronta." – Certo; quando saímos a passeio nós também não sabemos em que ponto nos encontraremos daqui a 5 minutos – mas sair a passeio seria, por causa disto, um experimento? – Muito bem; mas no cálculo queria saber desde o começo o que resultaria; e era *isto* o que me interessava. Estou na expectativa pelo resultado. Mas não sobre aquilo que *vou* dizer, senão sobre o que *devo* dizer.

MS 117, p. 180

Mas não te interessa justamente nesta multiplicação como a generalidade das pessoas vêm a calcular? Não – pelo menos não habitualmente –, mesmo que me apresse para um ponto gemeinsamen Treffpunkt mit Allen eile.

Aber die Rechnung zeigt mir doch eben experimentell, wo dieser Treffpunkt liegt. Ich lasse mich gleichsam ablaufen und sehe, wo ich hingelange. Und die richtige Multiplikation ist das Bild davon, wie wir alle ablaufen, wenn wir *so* aufgezogen werden.

Die *Erfahrung* lehrt, daß wir Alle diese Rechnung richtig finden.

Wir lassen uns ablaufen und er-

MS 117, p. 181

halten das Resultat der Rechnung. Aber nun – will ich sagen – interessiert uns nicht, daß wir – etwa unter diesen und diesen Bedingungen – dies Resultat erzeugt haben – uns interessiert das Bild des Ablaufs, – allerdings als ein überzeugendes, sozusagen *wohlklingendes*, – aber nicht als das Resultat eines Experiments, sondern als ein *Weg*.

Wir sagen nicht: »also *so* gehen wir!«, sondern: »also *so* geht es!«

MS 117, p. 182

70. Unsre Zustimmung läuft gleich ab, – aber wir bedienen uns dieser Gleichheit des Ablaufs nicht bloß, um Zustimmungsabläufe vorauszusagen. Wie wir uns des Satzes »dies Heft ist rot« nicht nur *dazu bedienen* um vorherzusagen, daß die meisten Menschen das Heft ›rot‹ nennen werden.

»Und das *nennen* wir doch ›dasselbe‹.« Bestünde keine Übereinstimmung in dem, was wir ›rot‹ nennen, etc., etc., so würde die Sprache aufhören. Wie ist es aber bezüglich der Übereinstimmung in dem, was wir ›Übereinstimmung‹ nennen?

Wir können das Phänomen einer Sprachverwirrung beschreiben; – aber welches sind für uns die Anzeichen einer Sprachverwirrung? Nicht notwendigerweise Tumult und Wirrwarr

MS 117, p. 184a

im Handeln. Dann also: daß ich mich, wenn die Leute sprechen, nicht auskenne; nicht übereinstimmend mit ihnen reagieren kann.

»Das ist für mich kein Sprachspiel.« Ich könnte dann aber auch sagen: Sie begleiten zwar ihre Handlungen mit Sprachlauten, und ihre Handlungen kann ich nicht ›verwirrt‹ nennen, aber doch haben sie keine *Sprache*. – Vielleicht aber würden ihre Handlungen verwirrt, wenn man sie daran hinderte, jene Laute von sich zu geben.

71. Man könnte sagen: Ein Beweis dient der *Verständigung*. Ein Experiment setzt sie voraus.

Oder auch: Ein mathematischer Beweis formt unsre Sprache.

de encontro em comum com todos.

Mas o cálculo me mostra, justamente de maneira experimental, onde está este ponto de encontro. Eu me permito, por assim dizer, o decurso e vejo até onde chego. E a correta multiplicação é a imagem de como todos percorremos quando somos educados *assim*.

A *experiência* ensina que nós todos achamos este cálculo correto.

Nós nos deixamos percorrer e obter

MS 117, p. 181

o resultado do cálculo. Mas agora – quero dizer – não nos interessa – por exemplo sob tais e tais condições – que tenhamos produzido este resultado –, interessamo-nos pela imagem do percurso, – em todo caso, como algo convincente, que *soe bem*, por assim dizer, – mas não como o resultado de um experimento, senão como um *caminho*.

Nós não dizemos: “Então é *assim* que vamos!”, senão: “Então é *assim* que se vai! [180]

MS 117, p. 182

70. Nosso assentimento percorre do mesmo modo, – mas não nos servimos desta igualdade de percurso somente para predizer percursos de assentimento. Como não nos *servimos* da proposição “Este caderno é vermelho” para prognosticar que a maioria das pessoas vai chamar o caderno de ‘vermelho’.

“E *chamamos* isto ‘do mesmo modo’.” Se não existisse nenhuma concordância sobre o que chamamos de ‘vermelho’ etc., etc., a linguagem acabaria. Mas como é que é isto em relação à concordância sobre o que chamamos de ‘concordância’?

Nós podemos descrever o fenômeno de uma confusão na linguagem; – mas quais são para nós os indícios de uma confusão na linguagem? Não necessariamente tumulto e rebuliço

MS 117, p. 184a [181]

na ação. Por conseguinte: que não me localizo[182] quando as pessoas falam; não posso reagir em concordância com elas.

“Isto, para mim, não é um jogo de linguagem.” Mas eu poderia também dizer: mesmo que eles acompanhem as suas ações com sons de fala, e não possa chamar as suas ações de ‘confusas’, eles não têm nenhuma *linguagem*. – Mas talvez as suas ações ficassem confusas se alguém os impedisse de fazer aqueles sons.[183]

71. Poder-se-ia dizer: uma demonstração serve ao *entendimento*. Um experimento o pressupõe.

Ou também: uma prova matemática molda a nossa linguagem.

MS 117, p. 184b

Aber es bleibt doch bestehen, daß man mittels eines mathematischen Beweises wissenschaftliche Voraussagen über das Beweisen anderer Menschen machen kann. –

Wenn mich Einer fragt: »Was für eine Farbe hat dieses Buch?« und ich antworte : »Es ist grün« – hätte ich ebensowohl die Antwort geben können: »Die Allgemeinheit der Deutschsprechenden nennt das ›grün‹«?

Könnte er darauf nicht fragen: »Und wie nennst *Du* es?« Denn er wollte meine Reaktion hören.

›*Die Grenzen des Empirismus*.‹

72. Es gibt doch eine Wissenschaft von den konditionierten Rechenreflexen; – ist das die Mathematik? Jene Wissenschaft wird sich auf Experimente stützen: und diese Experimente werden *Rechnungen* sein. Aber wie, wenn diese Wissenschaft recht exakt und am Ende gar eine ›mathematische‹ Wissenschaft würde?

Ist das Resultat dieser

MS 117, p. 185

Experimente nun, daß Menschen in ihren Rechnungen übereinstimmen, oder, daß sie darin übereinstimmen, was sie ›übereinstimmen‹ nennen? Und das geht so weiter.

Man könnte sagen: jene Wissenschaft würde nicht funktionieren, wenn wir in Bezug auf die Idee der Übereinstimmung nicht übereinstimmten.

Es ist doch klar, daß wir ein mathematisches Werk zum Studium der Anthropologie verwenden können. Aber eines ist dann nicht klar: – ob wir sagen sollen: »diese Schrift zeigt uns, wie bei diesem Volk mit Zeichen operiert wurde«, oder ob wir sagen sollen: »diese Schrift zeigt uns, welche Teile der Mathematik dieses Volk heherrscht hat«.

MS 117, p. 186

73. Kann ich, am Ende einer Multiplikation

MS 117, p. 187

angelangt, sagen: »Also *damit* stimm' ich überein! – «? – Aber kann ich es bei einem *Schritt* der Multiplikation sagen? Etwa bei dem Schritt ›2 x 3 = 6‹? Nicht ebensowenig, wie ich, auf dies Papier sehend, sagen kann: »Also das nenne ich ›*weiß*‹«?

Ähnlich scheint mir der Fall zu sein, wenn jemand sagte: »Wenn ich mir ins Gedächtnis rufe, was ich heute getan habe, mache ich ein Experiment (ich lasse mich ablaufen) und die

MS 117, p. 184b

Mas permanece subsistente o fato de que se pode, por meio de uma prova matemática, fazer previsões científicas sobre a demonstração de outras pessoas. –

Se alguém me pergunta: "Qual é a cor deste livro?", e eu respondo: "Ele é verde" – poderia ter dado igualmente a resposta: "A generalidade dos falantes de português a chamam de 'verde'"?

Ele não poderia ter perguntado: "E como *Você* a chama?", porque queria ouvir minha reação.

'*Os limites do empirismo*.'[184]

72. Existe todavia uma ciência dos reflexos condicionados do cálculo; – ela é a matemática? Esta ciência se baseia em experimentos: e estes experimentos serão *cálculos*. Mas o que ocorreria se esta ciência calculasse de maneira exata e ao fim se tornasse realmente uma ciência 'matemática'?

Bem, o resultado deste

MS 117, p. 185

experimento é que as pessoas concordam em seus cálculos ou que elas concordam no que chamam de 'concordar'? E continua assim.

Poder-se-ia dizer: esta ciência poderia não funcionar se não concordássemos em relação à ideia de concordância.

E é claro que poderíamos empregar uma obra matemática em um estudo de antropologia. Mas uma coisa então não é clara: – se devemos dizer: "Este escrito nos mostra como este povo opera com sinais", ou se devemos dizer: "Este escrito nos mostra que partes da matemática este povo domina".[185]

MS 117, p. 186

73. Posso, ao chegar ao fim de uma multiplicação,

MS 117, p. 187

dizer: "Então eu concordo *com isto*! – "? – Mas posso dizer isto em um *passo* da multiplicação? Por exemplo no passo '2 x 3 = 6'? Não menos do que posso dizer olhando para este papel: "Então chamo isto de '*branco*'"?

Parece-me ser semelhante ao caso de alguém que dissesse: "Se puxo pela memória o que fiz hoje, faço um experimento (eu me deixo levar), e a lembrança que então chega serve para me

Erinnerung, die dann kommt, dient dazu, mir zu zeigen, was Andere, die mich gesehen haben, auf die Frage, was ich getan habe, antworten werden.«

Was geschähe, wenn es uns öfter so ginge, daß wir eine Rechnung machen und sie als richtig finden; dann rechnen wir sie nach und finden, sie stimmt nicht: wir glauben, wir hätten früher etwas übersehen – wenn wir sie wieder nachrechnen, scheint uns unsre zweite Rechnung nicht zu stimmen, usf.?

Sollte ich das nun ein Rechnen

MS 117, p. 188

nennen oder nicht? – Er kann jedenfalls nicht die Voraussage auf seine Rechnung bauen, daß er das nächste Mal wieder dort landen wird. – Könnte ich aber sagen, er habe diesmal *falsch* gerechnet, weil er das nächste Mal nicht wieder so gerechnet hat? Ich könnte sagen: wo *diese* Unsicherheit bestünde, gäbe es kein Rechnen.

Aber ich sage doch anderseits wieder: »Wie man rechnet – so ist es richtig.« Es *kann* kein Rechenfehler in ›12 x 12 = 144‹ bestehen. Warum? Dieser Satz ist unter die Regeln aufgenommen.

Ist aber ›12 x 12 = 144‹ die Aussage, es sei allen Menschen natürlich, 12 x 12 so zu rechnen, daß 144 herauskommt?

74. Wenn ich eine Rechnung mehrmals nachrechne, um sicher zu sein, daß ich richtig gerechnet habe, und wenn ich sie dann als richtig anerkenne, – habe ich da nicht ein Experiment wiederholt, um sicher zu sein, daß ich das nächste Mal wieder gleich ablaufen werde? – Aber warum

MS 117, p. 189

sollte mich dreimaliges Nachrechnen davon überzeugen, daß ich das vierte Mal ebenso ablaufen werde? – Ich würde sagen: ich habe nachgerechnet, um sicher zu sein, ›daß ich nichts übersehen habe‹.

Die Gefähr ist hier, glaube ich, eine Rechtfertigung unsres Vorgehens zu geben, wo es eine Rechtfertigung nicht gibt und wir einfach sagen sollten: *so machen wir's*.

Wenn Einer wiederholt ein Experiment anstellt, ›immer wieder mit dem gleichen Resultat‹, hat er dann zugleich ein Experiment gemacht, das ihn lehrt, *was* er ›das gleiche Resultat‹ nennt, wie er also das Wort »gleich« gebraucht? Mißt der, der den Tisch mit dem Zollstock mißt, auch den Zollstock? Mißt er den Zollstock, so kann er dabei den Tisch nicht messen.

Wie, wenn ich sagte: »Wenn Einer den Tisch mit dem Zollstock mißt, so macht er dabei ein Experiment, welches

MS 117, p. 190

ihn lehrt, was bei der Messung dieses Tisches mit *allen andern* Zollstäben herauskäme«? Es ist

mostrar o que os outros, que me viram, vão responder à pergunta que fiz."

O que aconteceria se nos fosse mais frequente que, ao fazer um cálculo, o achássemos correto; então o fazemos depois e achamos que ele não bate: acreditaríamos que teríamos deixado algo de lado antes – quando novamente o recalculamos, parece-nos que o nosso segundo cálculo não vai concordar, e assim por diante?

Deveria chamar isto agora de

MS 117, p. 188

um cálculo ou não? – Em todo caso, ele não pode construir a predição sobre o seu cálculo, que ele vai chegar de novo ali da próxima vez. – Mas eu não posso dizer que ele calculou *errado* desta vez porque na outra vez ele não calculou de novo assim? Eu poderia dizer: onde subsiste *esta* incerteza não há nenhum cálculo.

Mas então, por outro lado, digo de novo: "Tal como se calcula – assim é o correto." Não *pode* existir nenhum erro de cálculo em '12 x 12 = 144'. Por quê? Esta proposição é admitida pelas regras.

Mas '12 x 12 = 144' é a asserção de que seria natural, para todas as pessoas que calculassem 12 x 12 assim, que se resolva em 144?

74. Quando refaço um cálculo muitas vezes para me certificar de que calculei certo, e se então o reconheço como correto, – não repeti assim um experimento para me certificar de que da próxima vez vou fazer o percurso do mesmo modo? – Mas por que

MS 117, p. 189

deveria recalcular três vezes para me convencer de que da quarta vez vou percorrer do mesmo modo? – Eu diria: refiz o cálculo para me certificar 'de que não deixei nada de lado'.

O perigo aqui, acredito, é o de dar uma justificativa para o nosso procedimento onde não há nenhuma justificativa, e onde nós deveríamos simplesmente dizer: *nós o fazemos assim*.

Quando alguém recomeça um experimento 'sempre novamente com o mesmo resultado', fez então, ao mesmo tempo, um experimento que lhe ensina o *que* ele chama de 'o mesmo resultado', como ele usa, por conseguinte, a palavra "mesmo"? Mede também o metro aquele que mede a mesa com um metro? Se mede o metro, então não pode medir a mesa ao mesmo tempo.

Seria como se dissesse: "Se alguém mede a mesa com o metro, então faz ao mesmo tempo um experimento que

MS 117, p. 190

lhe ensina, pela medição desta mesa, o resultaria com *todos os outros* metros"? Não há nenhuma dúvida de que se pode predizer, pela medição com *um* metro, o que produz a medição com doch gar kein Zweifel, daß man aus der Messung mit *einem* Zollstab voraussagen kann, was die Messung mit andern Zollstäben ergeben wird. Und ferner, könnte man es nicht tun – daß dann unser ganzes System des Messens zusammenfiele.

Kein *Zollstab*, könnte man sagen, wäre richtig, wenn sie nicht allgemein übereinstimmten. – Aber wenn ich das sage, so meine ich nicht, daß sie dann alle *falsch* wären.

MS 117, p. 191

75. Das Rechnen verlöre seinen Witz, wenn *Verwirrung* einträte. Wie der Gebrauch der Worte »grün« und »blau« seinen Witz verlöre. Und doch scheint es Unsinn zu sein zu sagen – daß ein Rechensatz *sage*: es werde keine Verwirrung eintreten. – Ist die Lösung einfach die, daß der Rechensatz nicht *falsch* werde sondern nutzlos, wenn Verwirrung einträte?

So wie der Satz, dies Zimmer ist 16 Fuß lang, dadurch nicht *falsch* würde, daß Verwirrung in den Maßstäben und im Messen einträte. Sein Sinn, nicht seine Wahrheit, basiert auf dem ordnungsgemäßen Ablauf der Messungen. (Sei aber hier nicht dogmatisch. Es gibt Übergänge, die die Betrachtung erschweren.)

Wie, wenn ich sagte: der Rechensatz

MS 117, p. 192

drückt die Zuversicht aus, es werde keine Verwirrung eintreten. –

Dann drückt der Gebrauch aller Worte die Zuversicht aus, es werde keine Verwirrung eintreten.

Man kann aber dennoch nicht sagen, der Gebrauch des Wortes »grün« besage, es werde keine Verwirrung eintreten – weil dann der Gebrauch des Wortes »Verwirrung« wieder eben dasselbe über *dieses* Wort aussagen müßte.

Wenn ›25 x 25 = 625‹ die Zuversicht ausspricht, wir werden uns immer wieder leicht dahin einigen können, daß der Weg, der mit diesem Satz endet, zu nehmen sei – wie drückt dann dieser Satz nicht die andere Zuversicht aus, wir würden uns immer

MS 117, p. 193

wieder über *seinen* Gebrauch einigen können?

Wir spielen mit den beiden Satzen nicht das gleiche Sprach spiel.

Oder kann man sowohl zuversichtlich sein, man werde dort die gleiche Farbe sehen, wie hier – und auch: man werde die Farbe, wenn sie die gleiche ist, gleich zu benennen geneigt sein?

Ich will doch sagen: Die Mathematik ist als solche immer Maß und nicht Gemessenes.

outros metros. E, além disto, se não se pudesse fazê-lo – que todo o nosso sistema de medição entraria em colapso.

Nenhum *metro*, poder-se-ia dizer, seria correto se em geral eles não concordassem. – Mas, quando digo isto, não quero dizer que eles seriam todos *falsos*.

MS 117, p. 191 [186]

75. O cálculo perderia o seu interesse se surgisse uma *confusão*. Assim como o uso das palavras “verde” e “azul” também perderia o seu interesse. E, no entanto, parece ser um contrassenso dizer – que uma proposição aritmética *dissesse*: não vai surgir nenhuma confusão. – Seria a solução simplesmente a de que a proposição aritmética não viria a ser *falsa*, mas inútil, se surgisse uma confusão?

Assim como a proposição de que este quarto tem 16 pés não viria a ser, por causa disto, *falsa*, se surgisse uma confusão nas escalas e nas medidas. Seu sentido, não sua verdade, se baseia no decurso regular das medições. (Mas não seja dogmático aqui. Há transições que complicam a reflexão.)

Como seria se dissesse: a proposição aritmética

MS 117, p. 192

expressa a confiança de que não vai surgir nenhuma confusão. –

Então o uso de todas as palavras expressa a confiança de que não vai surgir nenhuma confusão.[187]

Mas não se pode, apesar disto, dizer que o uso da palavra “verde” exprimiria que não vai surgir nenhuma confusão – pois então o uso da palavra “confusão” teria que asserir outra vez justamente a mesma coisa sobre *esta* palavra.

Se ‘25 x 25 = 625’ exprime a confiança de que sempre poderemos facilmente nos unificar em que se deve tomar o caminho que termina com esta proposição – como então esta proposição não expressa a outra confiança de que sempre

MS 117, p. 193

poderemos nos unificar sobre o *seu* uso?

Não jogamos com as duas proposições o mesmo jogo de linguagem.

Ou pode-se estar tão confiante de que se verá ali a mesma cor que aqui – e também: que se estará inclinado a chamar do mesmo modo a cor se ela for a mesma?

MS 117, p. 194

76. Der Begriff des Rechnens schließt Verwirrung aus. – Wie, wenn Einer beim Rechnen einer Multiplikation zu verschiedenen Zeiten Verschiedenes herausbrächte und dies *sähe*, aber in der Ordnung fände? – Aber dann könnte er doch das Multiplizieren nicht zu den Zwecken verwenden, wie wir es tun! – Warum nicht? Und es ist auch nicht gesagt, daß er dabei übel fahren müßte.

MS 117, p. 195

Die Auffassung der Rechnung als Experiment kommt uns leicht als die einzige *realistische* vor.

Alles andere, meinen wir, sei Gefasel. Im Experiment haben wir etwas Greifbares. Es ist beinahe, als sagte man: »Ein Dichter, wenn er dichtet, stellt ein psychologisches Experiment an. Nur so ist es zu erklären, daß ein Gedicht einen Wert haben kann.« Man verkennt das Wesen des ›*Experiments*‹, – indem man glaubt, jeder Vorgang, auf dessen Ende wir gespannt sind, sei, was wir »Experiment« nennen.

MS 117, p. 196

Es scheint wie Obskurantismus, wenn man sagt, eine Rechnung sei kein Experiment. In gleicher Weise auch die Feststellung, die Mathematik *handle* nicht von Zeichen, oder Schmerz sei nicht eine Form des Benehmens. Aber nur, weil die Leute glauben, man behaupte damit die Existenz eines ungreifbaren, d. i. schattenhaften, Gegenstands neben dem uns Allen greifbaren. Während wir nur auf· verschiedene Verwendungsweisen der Worte hinweisen.

Es ist beinahe als sagte man: ›blau‹ müsse einen blauen Gegenstand bezeichnen – der Zweck des Wortes wäre sonst nicht einzusehen.

MS 117, p. 197

77. Ich habe ein Spiel erfunden – komme drauf, daß, wer anfängt, immer gewinnen muß: Es ist also kein Spiel. Ich ändere es ab; nun ist es in Ordnung.

Habe ich ein Experiment gemacht, und war das Ergebnis, daß, wer anfängt, immer gewinnt? Oder: daß wir so zu spielen geneigt sind, daß dies geschieht? Nein. – Aber das Resultat hättest du dir doch nicht erwartet! Freilich nicht; aber das macht das Spiel nicht zum Experiment.

Was heißt es aber: Nicht wissen, *woran es liegt*, daß es immer so ausgehen muß? Nun, es liegt an den Regeln. – Ich will wissen, wie ich die Regeln abändern muß, um zu einem richtigen

O que quero dizer, de todo modo, é: a matemática é, como tal, sempre a medida e não o medido.[188]

MS 117, p. 194

76. O conceito de cálculo exclui a confusão. – Como seria se alguém, ao calcular uma multiplicação em tempos diferentes, extraísse resultados diferentes, e *visse* isto mas achasse que estava tudo em ordem? – Mas então ele não poderia empregar a multiplicação para as finalidades que nós utilizamos! – Por que não? E tampouco se disse que deste modo ele estaria conduzindo mal.

MS 117, p. 195

A concepção de cálculo como experimento parece-nos como a única *realista*.

Todas as outras, queremos dizer, são bobagens. No experimento nós temos algo tangível. É quase como se se dissesse: “Um poeta, quando poetiza, põe em marcha um experimento psicológico. Somente assim se explica que um poema possa ter um valor.” Desconhece-se a essência do ‘*experiments*’ – acreditando-se que todo processo cujo fim estamos ansiosos por ver é o que chamamos de “experimento”.

MS 117, p. 196

Parece obscurantismo quando se diz que um cálculo não é um experimento. Do mesmo modo que a declaração de que a matemática não *lida* com sinais ou que a dor não é uma forma de comportamento. Mas só porque as pessoas acreditam que com isto se afirmaria a existência de algum intangível, isto é, de objetos fantasmagóricos ao lado daqueles por todos nós tangíveis. Enquanto que só apontamos para diferentes modos de emprego das palavras.

Isto é quase como se alguém dissesse: ‘azul’ tem que designar um objeto azul – de outro modo a finalidade da palavra não seria entendida.

MS 117, p. 197 [189]

77. Eu inventei um jogo – me dou conta de que quem começa sempre tem que ganhar: Não é, por conseguinte, um jogo. Eu o modifiquei; agora ele está em ordem.

Eu fiz um experimento e o desfecho era o de que quem começa sempre vence? Ou: que estamos tão inclinados a jogar assim que isto acontece? Não. Mas o resultado não foi o que você esperava! Admitidamente, não; mas isto não faz do jogo um experimento.

Mas o que significa: não saber *qual é o motivo* por que isto tenha que funcionar sempre assim? Bem, isto está nas regras. – Quero saber como tenho que modificar as regras para ter

Spiel zu gelangen. – Aber du kannst sie ja z. B. *ganz* abändern – also statt deinem ein ganzlich anderes Spiel angeben. – Aber das will ich nicht. Ich will die Regeln im großen ganzen beibehalten und nur einen Fehler ausmerzen. – Aber das ist vag. Es ist nun einfach

MS 117, p. 204

nicht klar, was als dieser Fehler zu betrachten ist.

Es ist beinahe, wie wenn man sagt: Was ist der Fehler in diesem Musikstück? es klingt nicht gut in den Instrumenten. – Nun, den Fehler muß man nicht in der Instrumentation suchen; man *könnte* ihn in den Themen suchen.

Nehmen wir aber an, das Spiel sei so, daß, wer anfängt, immer durch einen bestimmten einfachen Trick gewinnen kann. Darauf aber sei man nicht gekommen; – es ist also ein Spiel. Nun macht uns jemand darauf aufmerksam; – und es hört auf, ein Spiel zu sein.

Wie kann ich das wenden, daß es mir klar wird? – Ich will nämlich sagen: »und es hört auf ein Spiel zu sein« – nicht: »und wir sehen nun, daß es kein Spiel war«.

Das heißt doch, ich will sagen, man kann es auch so auffassen: daß der Andre uns nicht auf etwas *aufmerksam gemacht* hat; sondern daß er uns statt unseres ein andres Spiel

MS 117, p. 205

gelehrt hat. – Aber wie konnte durch das neue das alte obsolet werden? – Wir sehen nun etwas anderes und können nicht mehr naiv weiterspielen.

Das Spiel bestand einerseits in unsern Handlungen (Spielhandlungen) auf dem Brett; und diese Spielhandlungen könnte ich jetzt so gut ausführen wie früher. Aber anderseits war dem Spiel doch wesentlich, daß ich blind versuchte zu gewinnen; und das kann ich jetzt nicht mehr.

78. Nehmen wir an: die Menschen haben ursprünglich die 4 Species in gewöhnlicher Weise gepflogen. Dann fingen sie an, mit Klammerausdrücken zu rechnen und auch mit solchen von der Form (a - a). Sie bemerkten nun, daß z.B. Multiplikationen vieldeutig wurden. Müßte sie das in Verwirrung stürzen? Müßten sie sagen: »Nun erscheint der Grund der Arithmetik zu wanken«?

Und wenn sie nun einen Beweis der Widerspruchsfreiheit fordern, weil sie sonst bei jedem Schritt in Gefahr wären, in den Sumpf zu fallen – was fordern sie da?

MS 117, p. 206

Nun, sie fordern eine *Ordnung*. Aber war früher *keine* Ordnung? – Nun, sie fordern eine Ordnung, die sie jetzt beruhigt. – Aber sind sie wie Kinder und sollen nur eingelullt werden?

um jogo de verdade. – Mas você pode, por exemplo, modificá-las *totalmente* – ou seja, em vez do seu, oferecer um jogo totalmente diferente. – Mas isto eu não quero. Quero manter as regras em quase toda a sua totalidade e só eliminar um erro. – Mas isto é vago. Agora, simplesmente

MS 117, p. 204

não está claro qual é o erro de que se trata aqui.

É quase como quando se diz: qual é o erro nesta peça musical? não soa bem nos instrumentos. – Ora, não há que buscar o erro na instrumentação; *pode-se* buscá-lo nos temas.

Suponhamos, entretanto, que o jogo seja tal que quem começa sempre pode ganhar mediante um determinado truque simples. Mas não se chegou a isto; – trata-se portanto de um jogo. Agora alguém nos chama a atenção para isto; – e deixa de ser um jogo.

Como posso reverter isto para que me fique claro? – Quero dizer, especificamente: “e deixa de ser um jogo” – não: “e agora vemos que não era um jogo”.

De todo modo isto significa, eu diria, que também se pode conceber assim: que o outro não nos *chamou a atenção* para algo; senão que ele nos ensinou, em vez do nosso,

MS 117, p. 205

um outro jogo. – Mas como poderia mediante o novo o velho tornar-se obsoleto? – Agora vemos algo diferente e não podemos mais seguir jogando ingenuamente.

Por um lado o jogo consiste nas nossas ações (ações do jogo) sobre o tabuleiro; e estas ações do jogo posso executar agora tão bem quanto antes. Mas, por outro lado, era essencial no jogo que eu tentasse vencer cegamente; e isto agora já não mais o consigo.

78. Suponhamos: as pessoas cultivaram originalmente as 4 operações de maneira habitual. Logo começaram a calcular com expressões entre parênteses e também com aquelas da forma (a - a). Agora elas observaram que as multiplicações, por exemplo, se tornaram ambíguas. Isto teria que lançá-los em confusão? Teriam que dizer: “Agora parece que cambaleia o fundamento da aritmética”?

E se agora eles reivindicam uma prova de consistência, porque senão estariam correndo o risco de, a cada passo, cair no pântano – o que estão reivindicando?

MS 117, p. 206

Bem, eles reivindicam uma *ordem*. Mas não havia antes *nenhuma* ordem? – Bem, eles reivindicam uma ordem que agora os tranquilize. – Mas eles são agora como crianças e só devem ser ninadas?[190]

Nun, die Multiplikation würde doch durch ihre Vieldeutigkeit praktisch unbrauchbar – d. h.: für die früheren normalen Zwecke. Voraussagen, die wir auf Multiplikationen basiert hätten, träfen nicht mehr ein. – (Wenn ich voraussagen wollte, wie lang eine Reihe von Soldaten ist, die aus einem Carré von 50 x 50 gebildet werden kann, käme ich immer wieder zu falschen Resultaten.)

Also ist diese Rechnungsart falsch? – Nun, sie ist für *diese* Zwecke unbrauchbar. (Vielleicht für andre brauchbar.) Ist es nicht, wie wenn ich einmal statt zu multiplizieren, dividierte? (Wie dies wirklich vorkommen kann.)

Was heißt das: »Du mußt hier *multiplizieren*; nicht dividieren!« –

Ist nun die gewöhnliche Multiplikation ein *rechtes* Spiel, ist es *unmöglich*

MS 117, p. 207

auszugleiten? Und ist die Rechnung mit (a - a) kein rechtes Spiel – ist es unmöglich *nicht* auszugleiten?

(*Beschreiben*, nicht erklären, ist, was wir wollen!)

Nun, wie ist das, wenn wir uns in unserem Kalkül nicht auskennen?

Wir gingen schlafwandelnd den Weg zwischen Abgründen dahin. – Aber wenn wir auch jetzt sagen: »Jetzt sind wir wach«, – können wir sicher sein, daß wir nicht eines Tages aufwachen werden? (Und dann sagen: wir haben also wieder geschlafen.)

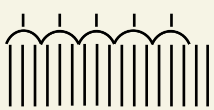
Können wir sicher sein, daß es nicht *jetzt* Abgründe gibt, die wir nicht sehen?

Wie aber, wenn ich sagte: Die Abgründe in einem Kalkül sind nicht da, wenn ich sie nicht sehe!

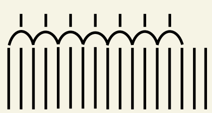
Irrt uns jetzt *kein* Teufelchen? Nun wenn es uns irrt, – so macht's nichts. Was ich nicht weiß, macht mich nicht heiß.

MS 117, p. 208

Nehmen wir an: Früher dividierte ich manchmal so durch 3:



manchmal so:



Bem, a multiplicação se tornaria praticamente inutilizável por causa da sua ambiguidade – isto é: para as finalidades normais anteriores. Predições que estivessem baseadas nas multiplicações não se realizariam mais. – (Se eu quisesse predizer a extensão de uma linha de soldados que poderia ser formada em um quadrado de 50 x 50, chegaria sempre e repetidamente a resultados falsos.)

Seria, por isto, falso este modo de calcular? – Bem, ele seria inutilizável para *estes* fins. (Talvez fosse utilizável para outros.) Isto não é como se alguma vez eu, em vez de multiplicar, dividisse? (Como pode acontecer realmente.)

O que significa isto: "Aqui você tem que *multiplicar*, não dividir!" –

Ora, a multiplicação habitual é um jogo *preciso*, é *impossível*

MS 117, p. 207

escorregar? E o cálculo com (a - a) não é um jogo preciso – é impossível *não* escorregar?

(*Descrever*, não explicar, é o que queremos!)

Ora, como é que nos desorientamos no nosso cálculo?[191]

Caminhamos sonâmbulos ao longo do caminho entre precipícios. – Mesmo que agora digamos: "Agora estamos acordados", – podemos estar seguros de que um dia não acordaremos? (E então dizer: logo, voltamos a dormir.)

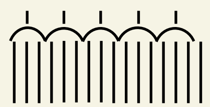
Podemos estar seguros de que não há precipícios *agora* que não vemos?

Mas e se eu dissesse: os precipícios num cálculo não estão ali se não os vejo!

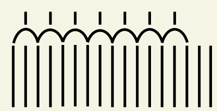
Não nos engana agora *nenhum* demônio? Bem, se nos engana, – não importa. Aquilo que não me esquenta, não me apoquenta.

MS 117, p. 208

Suponhamos: eu costumava dividir por 3 assim:



e algumas vezes assim:



und merkte es nicht. – Dann macht mich jemand darauf aufmerksam.

Auf einen Fehler? Ist es unbedingt ein Fehler? Und unter welchen Umständen nennen wir es so?

MS 117, p. 209

79. $\sim f(f) = \varphi(f)$ Def.

$\varphi(\varphi) \overset{\cdot\cdot}{=} \sim\varphi(\varphi)$ Die Sätze ›φ (φ)‹ und ›~φ (φ)‹ scheinen uns einmal das Gleiche und einmal Entgegengesetztes zu sagen. *Je nachdem wir ihn ansehen*, scheint der Satz ›φ (φ)‹ einmal zu sagen ~φ (φ), einmal das Gegenteil davon. Und zwar sehen wir ihn einmal als das Substitutionsprodukt

$$\varphi(f)\Big|^{f}_{\varphi}$$

ein andermal als

$$f(f)\Big|^{f}_{\varphi}$$

Wir möchten sagen: »›heteronom‹ ist nicht heteronom; also kann man es nach der Definition ›heteronom‹ nennen.« Und klingt ganz richtig, geht ganz glatt, und es braucht uns der Widerspruch gar nicht auffallen. Werden wir auf den Widerspruch aufmerksam, so möchten wir zuerst sagen, daß wir mit der Aussage, ξ ist heteronom, in den beiden Fällen nicht

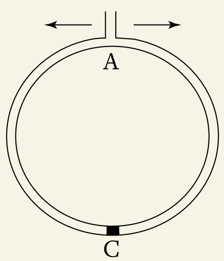
MS 117, p. 222

dasselbe meinen. Einmal sei es die unabgekürzte Aussage, das andre mal die nach der Definition abgekürzte.

Wir möchten uns dann aus der Sache ziehen, indem wir sagen: "$\sim\varphi(\varphi) = \varphi_1(\varphi)$". Aber warum sollen wir uns so belügen? Es führen hier wirklich zwei entgegengesetzte Wege – zu dem Gleichen.

Oder auch: – es ist ebenso natürlich, in diesem Falle ›~φ(φ)‹ zu sagen, wie ›φ(φ)‹.

Es ist, der Regel gemäß, ein ebenso natürlicher Ausdruck zu sagen C liege vom Punkte A rechts, wie, es



liege links. Dieser Regel gemäß – welche sagt, ein Ort liege in der Richtung des Pfeils, wenn die Straße, die in diese Richtung beginnt, zu ihm führt.

Sehen wir' s vom Standpunkt der Sprachspiele an. –
Wir haben ursprünglich das Spiel nur mit geraden Straßen gespielt. – – –

e não me dava conta. – Então alguém me chama a atenção.

De um erro? Isto é incondicionalmente um erro? E sob que circunstâncias o denominamos assim?

MS 117, p. 209 [192]

79. $\sim f(f) = \varphi(f)$ Def.

$\varphi(\varphi) \overset{\cdot\cdot}{=} \sim\varphi(\varphi)$ As proposições 'φ (φ)' e '~φ (φ)' ora parecem dizer o mesmo, ora o contrário. *Consoante o que nela vejamos*, a proposição 'φ (φ)' parece ora dizer ~φ (φ), ora o contrário disto. Especificamente, a vemos uma vez como o produto da substituição

$$\varphi(f)\Big|^{f}_{\varphi}$$

e na outra vez como

$$f(f)\Big|^{f}_{\varphi}$$

Gostaríamos de dizer: "'heterônomo' não é heterônomo;[193] por conseguinte, podemos denominá-lo, pela definição, de 'heterônomo'." E parece tão certo, passa tão fácil, que nem precisamos notar a contradição. Se nos damos conta da contradição, vamos preferir dizer primeiro que, pela asserção de que ξ é um heterônomo, não queremos dizer a mesma coisa nos dois casos.

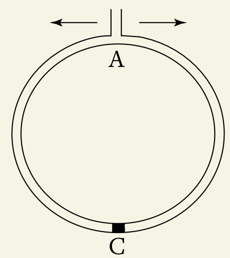
MS 117, p. 222

Por um lado, é a asserção não abreviada, por outro lado, é a asserção abreviada segundo a definição.

Gostaríamos então de nos retirar da coisa, ao dizer: "$\sim\varphi(\varphi) = \varphi_1(\varphi)$". Mas por que devemos nos enganar assim? Seguem-se aqui, realmente, dois caminhos *contrários* – em direção ao *mesmo*.

Ou também: – *é igualmente natural*, neste caso, tanto dizer '~φ(φ)' quanto dizer 'φ(φ)'.

É uma expressão igualmente natural, em conformidade com a regra, tanto dizer que C está à direita do ponto A, quanto dizer que



ele está à esquerda. De acordo com esta regra – que diz que um um local está na direção da seta, se a rua que começa nesta direção conduz a ele.

Olhemos para isto do ponto de vista dos jogos de linguagem. –
Nós jogamos o jogo originalmente só com ruas retas. – – –

MS 117, p. 223

80. Könnte man sich etwa denken, daß, wo ich *blau* sehe, das bedeutet, daß der Gegenstand, den ich sehe, *nicht* blau ist – daß die Farbe, die mir erscheint, immer als die gilt, die *ausgeschlossen* ist? Ich könnte z. B. glauben, daß Gott mir immer eine Farbe zeigt, um zu sagen: Die *nicht*.

Oder geht es so: Die Farbe, die ich sehe, sage mir bloß, daß diese Farbe in der Beschreibung des Gegenstands eine Rolle spielt. Sie entspricht nicht einem Satz, sondern nur dem Wort »*blau*«. Und die Beschreibung des Gegenstands kann also ebenso gut heißen: »er ist blau«, als auch »er ist nicht blau«. Man sagt dann: das Auge zeigt mir nur Bläue, aber nicht die Rolle dieser Bläue. – Wir vergleichen das Sehen der Farbe mit dem Hören des Wortes »blau«, wenn wir das *Übrige* des Satzes nicht gehört haben.

MS 117, p. 227

Ich möchte zeigen, daß man dahin geführt werden könnte, daß etwas blau ist, mit den Worten beschreiben zu wollen, es sei blau und auch, es sei nicht blau.

Daß wir also, unter der Hand, die Projektionsmethode so verschieben könnten, daß ›p‹ und ›~ p‹ den gleichen Sinn erhalten. Wodurch sie ihn aber verlieren, wenn ich nicht etwas Neues als Negation einführe.

Ein Sprachspiel kann nun durch einen Widerspruch seinen *Sinn* verlieren, den Charakter des Sprachspiels.

Und hier ist es wichtig zu sagen, daß dieser Charakter nicht dadurch beschrieben ist, daß man sagt, die Laute müssen eine gewisse *Wirkung* haben. Denn das Sprachspiel (2) würde den Charakter des Sprachspiels einbüßen, wenn statt der 4 Befehle immer wieder andere Laute vom Bauenden ausgestoßen würden; auch wenn etwa phy-

MS 117, p. 228

siologisch gezeigt werden könnte, daß immer wieder diese Laute es seien, die den Helfer dazu bewegen, die Bausteine zu bringen, die er bringt.

Auch hier könnte man sagen, daß freilich die Betrachtung der Sprachspiele ihre Wichtigkeit darin hat, daß Sprachspiele immer wieder funktionieren. Daß also ihre Wichtigkeit darin liegt, daß die Menschen sich zu einer solchen Reaktion auf Laute abrichten lassen.

Damit hängt, scheint mir, die Frage zusammen, ob eine Rechnung ein Experiment ist zum Zweck, Rechnungsablaufe vorauszusagen. Denn wie, wenn man eine Rechnung ausführte und – richtig – voraussagte, man werde das nächste Mal anders rechnen, da ja die Umstände sich beim nächsten Mal schon dadurch geändert haben, daß man die Rechnung nun bereits *so und so* oftmal gemacht hat?

Das Rechnen ist ein Phänomen, das wir vom Rechnen her kennen. Wie die Sprache ein Phänomen ist, das wir von unsrer

MS 117, p. 223

80. Pode-se imaginar, por exemplo, que onde vejo *azul* significa que o objeto que vejo *não* é azul – que a cor que aparece para mim tem sempre o valor da que é *excluída*? Poderia, por exemplo, acreditar que Deus sempre me mostra uma cor para dizer: esta *não*.

Ou acontece assim: a cor que vejo me diz somente que esta cor joga um papel na descrição do objeto. Ela corresponde não a uma proposição, mas só à palavra “*azul*”. E a descrição do objeto pode muito bem significar: tanto “ele é azul” como também “ele não é azul”. Diz-se então: o olho só me mostra azuis, mas não o papel destes azuis. – Nós comparamos a visão da cor com a audição da palavra “azul” quando não ouvimos o *resto* da proposição.

MS 117, p. 227

Gostaria de mostrar que se pode ser levado ao ponto de querer descrever que alguma coisa é azul tanto com as palavras isto é azul quanto também com isto não é azul.

Que pudéssemos mudar por debaixo do pano o método de projeção de tal modo que ‘p’ e ‘~ p’ recebam o mesmo sentido. Mas como elas o perdem se não introduzo alguma coisa nova como uma negação.

Um jogo de linguagem pode agora perder seu *sentido,* o caráter de jogo de linguagem, mediante uma contradição.

E aqui é importante dizer que este caráter não é descrito porque dizemos que os sons têm que ter um certo *efeito*. Pois o jogo de linguagem (2)[194] perderia o caráter de jogo de linguagem se em vez das 4 ordens outros sons fossem emitidos sem parar pelos construtores; mesmo que algo fisio-

MS 117, p. 228

lógico pudesse ser mostrado, que esses sons fossem sempre o que movia o servente a trazer os blocos de construção que trazia.

Também aqui se poderia dizer que a consideração dos jogos de linguagem tem a sua importância no fato de que eles funcionam sempre. Que a sua importância consiste no fato de que as pessoas possam ser adestradas para reações como estas aos sons.

Parece-me que a questão está ligada a saber se um cálculo é um experimento com a finalidade de predizer o seu percurso. Pois como seria se alguém efetuasse um cálculo e predissesse – corretamente – que se calcularia diferente da próxima vez, dado que as circunstâncias já teriam mudado porque já então se teria feito o cálculo *assim e assim* muitas vezes?

O cálculo é um fenômeno que conhecemos por calcular. Assim como a linguagem é um fenômeno que conhecemos pela

MS 117, p. 229

Sprache her kennen

Kann man sagen: »Der Widerspruch ist unschädlich, wenn er abgekapselt werden kann«? Was aber hindert uns, ihn abzukapseln? Daß wir uns im Kalkül nicht auskennen. *Das* also ist der Schaden. Und das ist es, was man meint, wenn man sagt: der Widerspruch zeige an, daß etwas in unserem Kalkül nicht in Ordnung sei. Er sei bloß das lokale *Symptom* einer Krankheit des ganzen Körpers. Aber der Körper ist nur krank, wenn wir uns nicht auskennen.

Der Kalkül hat eine heimliche Krankheit, heißt: was wir vor uns haben, ist, wie es ist, kein Kalkül, und *wir kennen uns nicht aus* – d. h., wir können keinen Kalkül angeben, der diesem Kalkül Ähnlichen

MS 117, p. 230

›im Wesentlichen‹ entspricht und nur das Faule in ihm ausschließt.

Aber wie ist es möglich, sich in einem Kalkül nicht auszukennen; liegt er denn nicht offen vor uns?!

Denken wir uns den Fregeschen Kalkül mitsamt dem Widerspruch in ihm gelehrt. Nicht aber so, daß man diesen als etwas Krankhaftes hinstellt. Er ist vielmehr ein anerkannter Teil des Kalküls, es wird mit ihm gerechnet. (Die Rechnungen dienen nicht dem gewöhnlichen Zweck logischer Rechnungen.) – Nun wird die Aufgabe gestellt, diesen Kalkül, von dem der Widerspruch ein durchaus wohlanständiger Teil ist, in einen andern umzuwandeln, in dem es diesen Widerspruch nicht geben soll, da man den Kalkül nun zu Zwecken verwenden will, die einen Widerspruch unerwünscht machen. – Was ist das für eine Aufgabe? Und was ist das für ein Unvermögen, wenn wir sagen: »Wir haben einen Kalkül, der dieser Bedingung entspricht, noch nicht gefunden«?

Mit: »ich kenne mich in dem Kalkül nicht aus« – meine ich nicht einen

MS 117, p. 231

seelischen Zustand, sondern ein Unvermögen, etwas zu *tun*.

Es ist oft zur Klärung eines philosophischen Problems sehr nützlich, ich die historische Entwicklung, in der Mathematik, z. B., ganz anders vorzustellen, als sie tatsächlich war. Wäre sie anders gewesen, so käme niemand auf die Idee zu sagen, was man tätsachlich sagt.

Ich möchte etwas fragen, wie: »Gehst du bei deinem Kalkül auf Nützlichkeit aus? – dann erhältst du auch keinen Widerspruch. Und wenn du nicht auf Nützlichkeit ausgehst – dann macht es schließlich nichts, wenn du einen erhältst. «

MS 117, p. 232

MS 117, p. 229

nossa linguagem.

Pode-se dizer: “A contradição é inofensiva se puder ser encapsulada”? O que nos impede de a encapsular? Que no cálculo não sabemos bem onde estamos. *Este* é o mal. E isto é o que se tem em mente quando se diz: a contradição mostra que alguma coisa não está em ordem no nosso cálculo. Ela é meramente o *sintoma*[195] localizado de uma doença no corpo todo. Mas o corpo só está doente se não sabemos onde estamos.

O cálculo tem uma doença secreta, significa: o que temos diante de nós, tal como está, não é um cálculo, e *não sabemos mais onde estamos*[196] – isto é, não podemos especificar nenhum cálculo que corresponda ‘no essêncial’ a este

MS 117, p. 230

simulacro de cálculo e só elimine nele o que está corrompido.

Mas como é possível não saber onde se está num cálculo; então ele não está diante da nossa vista?!

Pensemos no cálculo Fregeano juntamente com a contradição que nele se ensina. Mas não de modo que se apresente como algo doentio. Ela é antes reconhecida como parte do cálculo e com ele calculada. (Os cálculos não servem para o propósito habitual dos cálculos lógicos.) – Agora propõe-se a tarefa de tornar este cálculo, do qual a contradição é uma parte inteiramente respeitável, numa outra versão na qual a contradição não deva existir, pois se quer empregar o cálculo agora com a finalidade de tornar a contradição algo indesejável. Que tipo de tarefa é esta? E que tipo de incapacidade é esta quando dizemos: “Ainda não achamos um cálculo que satisfaça esta condição”?

Com: “Eu não sei mais onde estou no cálculo” – não quero dar a entender um

MS 117, p. 231

estado mental, mas uma incapacidade de *fazer* algo.

Costuma ser muito útil, para a clarificação de um problema filosófico, que imagine o desenvolvimento histórico, o da matemática, por exemplo, de uma maneira totalmente diferente do que de fato o foi. Se tivesse sido outro, ninguém teria tido a ideia de dizer o que de fato se disse.

Gostaria de perguntar algo como: “Você tem em vista a utilidade com o seu cálculo? – então você também não vai pegar nenhuma contradição. E se você não tem em vista a utilidade – então por fim não importa se você pega uma.”

MS 117, p. 232

81. Unsre Aufgabe ist es nicht, Kalküle zu finden, sondern den *gegenwärtigen* Zustand zu beschreiben.

Die Idee des Prädikats, das von sich selber gilt, etc., stützt sich freilich auf *Beispiele* – aber diese Beispiele waren ja *Dummheiten*, sie waren ja gar nicht ausgedacht. Aber das sagt nicht, daß solche Prädikate nicht verwendet werden könnten, und daß dann nicht der Widerspruch seine Verwendung hätte!

Ich meine: wenn man sein Augenmerk wirklich auf die Verwendung richtet, so kommt man gar nicht auf die Idee ›f (f)‹ zu schreiben. Anderseits kann man, wenn man die Zeichen im Kalkül, sozusagen, *voraussetzungslos* gebraucht, auch ›f (f)‹ schreiben, und muß dann die Konsequenzen ziehen und darf nicht vergessen, daß man von einer eventuellen praktischen Verwendung dieses Kalküls noch keine *Ahnung* hat.

Ist die Frage die: »Wo haben wir das Gebiet

MS 117, p. 233

der Brauchbarkeit verlassen?« ? –

Wäre es denn nicht möglich, daß wir einen Widerspruch hervorbringen *wollten*? Daß wir – mit dem Stolz auf eine mathematische Entdeckung – sagten: »Sieh, so erzeugen wir einen Widerspruch«. Wäre es nicht möglich, daß z. B. viele Leute versucht hätten, einen Widerspruch im Gebiet der Logik zu erzeugen, und daß es dann endlich *einem* gelungen wäre?

Aber warum hätten Leute *das* versuchen sollen? Nun, ich kann vielleicht jetzt nicht den plausibelsten Zweck angeben. Aber warum nicht z. B. um zu zeigen, daß alles auf dieser Welt ungewiß sei?

Diese Leute würden dann Ausdrücke von der Form ›f(f)‹ zwar nie wirklich verwenden, wären aber doch froh, in der *Nachbarschaft* eines Widerspruchs zu leben.

»Sehe ich eine *Ordnung*, die mich verhindert, unversehens zu einem Widerspruch zu kommen?« Das ist so, wie wenn ich

MS 117, p. 234

sage: Zeige mir eine Ordnung in meinem Kalkül, die mich überzeugt, daß ich auf diese Weise nicht einmal zu einer Zahl kommen kann, die . . . . Ich zeige ihm dann etwa einen Rekursionsbeweis.

Ist es aber falsch zu sagen: »Nun, ich gehe meinen Weg weiter. *Sehe* ich einen Widerspruch, so ist es Zeit, etwas zu machen.«? – Heißt das: nicht wirklich Mathematik betreiben? Warum soll das *nicht* Kalkulieren sein?! Ich gehe ruhig diesen Weg weiter; sollte ich an einen Abgrund kommen, so werde ich versuchen, umzukehren. Ist das nicht ›*gehen*‹?

81. A nossa tarefa não é a de descobrir cálculos, mas a de descrever a situação *presente*.

A ideia do predicado que vale por si mesmo etc., apoia-se de todo modo em *exemplos* – mas estes exemplos são *idiotices*, nem sequer foram refletidos. Mas isto não quer dizer que tais predicados não possam ser empregados, e que a contradição não tivesse então o seu emprego!

Quero dizer: quando se dirige realmente a atenção para o emprego, ninguém chega a ter a ideia de escrever ‘f (f)’. Por outro lado, quando se usa os sinais no cálculo, por assim dizer, *sem pressuposições*, pode-se também escrever ‘f (f)’, e então se tem que tirar as consequências e não se pode esquecer que não se tem nenhum *palpite* sobre algum eventual emprego prático deste cálculo.[197]

Seria esta a pergunta: “Onde foi que abandonamos

MS 117, p. 233

o âmbito da utilidade?” ? –

Não seria então possível que *quiséssemos* gerar uma contradição? Que disséssemos – com o orgulho de uma descoberta matemática –: “Veja, assim é que engendramos uma contradição”. Não seria possível que, por exemplo, muita gente tivesse tentado engendrar uma contradição no âmbito da lógica, e que, assim, *alguém* finalmente tivesse conseguido?

Mas por que as pessoas deveriam ter tentado *isto*? Bem, talvez eu não possa indicar agora a finalidade mais plausível. Mas por que não para mostrar, por exemplo, que tudo neste mundo é incerto?

Esta gente realmente nunca empregaria então expressões da forma ‘f (f)’, mas estariam de fato felizes em viver nas *vizinhanças* de uma contradição.

“Vejo uma *ordem* que me coíbe de chegar inesperadamente a uma contradição?”. Isso é como se eu

MS 117, p. 234

dissesse: mostre-me uma ordem no meu cálculo que me convença de que eu não posso nunca chegar deste modo a um número que . . . . Então eu te mostro, por exemplo, uma demonstração recursiva.

Mas seria falso dizer: “Bem, prossigo no meu caminho. Se *vejo* uma contradição, então haverá tempo de fazer algo.”? – Isto significa: não operar realmente em matemática? Por que isto *não* deveria ser calcular?! Prossigo tranquilo neste caminho; se devo chegar num precipício, vou tentar voltar para trás. Isto não é um ‘*caminhar*’?

Imaginemos o seguinte caso: o povo de uma certa tribo só pode calcular oralmente. Eles ainda não conhecem a escrita. Eles ensinam as suas crianças a contar no sistema decimal. Entre

Denken wir uns folgenden Fall: Die Leute eines gewissen Stammes können nur mündlich rechnen. Sie kennen die Schrift noch nicht. Sie lehren ihre Kinder im Dezimalsystem zählen. Es kommen bei ihnen sehr häufige Fehler im Zahlen vor, Ziffern werden wiederholt oder ausgelassen, ohne daß sie es bemerken.

MS 117, p. 235

Ein Reisender aber nimmt ihr Zählen phonographisch auf. Er lehrt sie die Schrift und schriftliches Rechnen und zeigt ihnen dann, wie oft sie sich beim bloß mündlichen Rechnen verrechnen. – Müssen diese Leute nun zugeben, sie hätten früher eigentlich nicht gerechnet? Sie wären nur herumgetappt, während sie jetzt gehen? Könnten sie nicht vielleicht sogar sagen: früher seien ihre Sachen besser gegangen, ihre Intuition sei nicht durch die toten Schreibmittel belastet gewesen. Man könne den Geist nicht mit Maschinen fassen. Sie sagen etwa: »Wenn wir damals, wie deine Maschine behauptet, eine Ziffer wiederholt haben, so wird es schon wohl so recht gewesen sein.«

Wir vertrauen etwa ›mechanischen‹ Mitteln des Rechnens oder Zählens mehr als unserm Gedächtnisse. Warum? – Muß das so sein? Ich mag mich verzählt haben, die Maschine, von uns einmal

MS 117, p. 236

so und so konstruiert, kann sich nicht verzählt haben. Muß ich diesen Standpunkt einnehmen? – »Nun, Erfahrung hat uns gelehrt, daß das Rechnen mit der Maschine verläßlicher ist, als das mit dem Gedächtnisse. Sie hat uns gelehrt, daß unser Leben glatter geht, wenn wir mit Maschinen rechnen .« Aber muß das Glatte unbedingt unser Ideal sein (muß es unser Ideal sein, daß alles in Zellophan gewickelt sei)?

Könnte ich nicht auch dem Gedächtnis trauen und der Maschine nicht trauen? Und könnte ich nicht der *Erfahrung* mißtrauen, die mir ›vorspiegelt‹, die Maschine sei verläßlicher?

MS 117, p. 237

82. Vorher war ich nicht sicher, daß unter den Arten des Multiplizierens, die

MS 117, p. 239

dieser Beschreibung entsprechen, keine ist, die ein anderes Resultat als das anerkannte liefert. Nehmen wir aber an, meine Unsicherheit sei eine solche, die erst in einer gewissen Entfernung von der normalen Art des Rechnens anfing; und nehmen wir an, wir sagten: Da schadet sie nichts; denn rechne ich auf sehr abnormale Weise, so muß ich mir eben alles noch einmal überlegen. Wäre das nicht ganz in Ordnung?

Ich will doch fragen: *Muß* ein Beweis der Widerspruchsfreiheit (oder Eindeutigkeit) mir unbedingt eine größere Sicherheit geben, als ich ohne ihn habe? Und, wenn ich wirklich auf Abenteuer ausgehe, *kann* ich dann nicht auch auf solche ausgehen, in denen dieser Beweis mir keine Sicherheit mehr bietet?

eles ocorre muito frequentemente erros de contagem, os algarismos são repetidos ou omitidos sem que eles se deem conta.

MS 117, p. 235

Mas um viajante grava fonograficamente a sua contagem. Ele lhes ensina a escrever e a calcular por escrito, e lhes mostra então o quanto que eles erram na conta ao fazer cálculo só oralmente. – Teria este povo agora que assumir que antes não haviam propriamente calculado? Que estavam só engatinhando, mas que agora andam? Não poderiam talvez até mesmo dizer: antes as coisas iam melhor, a sua intuição não tinha sido sobrecarregada pela escrita morta. Não se pode capturar o espírito com máquinas. Eles dizem, por exemplo: "Se, como afirma a sua máquina, nós repetimos um número naquele momento, então estava bem como estava."

Confiamos mais, por exemplo, em meios 'mecânicos' de calcular ou de contar do que na nossa memória. Por quê? – Tem que ser assim? Posso ter errado nas contas, e a máquina, uma vez por nós

MS 117, p. 236

construída assim e assim, não pode errar nas contas. Tenho que assumir este ponto de vista? – "Bem, a experiência tem nos ensinado que o cálculo feito pela máquina é mais fidedigno do que aquele que é feito com a memória. Ela nos ensina que a nossa vida fica mais fácil se calculamos com a máquina." Mas o fácil tem que ser incondicionalmente o nosso ideal (o nosso ideal tem que ser o de que tudo seja embrulhado em papel celofane)?

Eu não poderia também confiar na memória e não confiar na máquina? E não poderia desconfiar da *experiência* que me 'faz acreditar' que a máquina é mais fidedigna?

MS 117, p. 237

82. Antes eu não estava seguro de que, entre os tipos de multiplicação que

MS 117, p. 239

correspondem a *esta* descrição, não há nenhum que proporcione um resultado diferente do que o admitido. Mas suponhamos que a minha incerteza seja tal que ela só apareça a partir de uma certa distância do tipo normal de cálculo; e suponhamos que disséssemos: Isto não faz mal nenhum; pois se calculo de um modo muito anormal, vou ter que reconsiderar tudo de novo. Não estaria tudo bem?

Quero então perguntar: uma prova de consistência (ou de não-ambiguidade) *tem que* me dar incondicionalmente uma maior certeza do que teria sem ela? E se saio realmente em aventuras, não *posso* então buscar aquelas em que esta prova não pode mais me oferecer nenhuma segurança?

Mein Ziel ist, die *Einstellung* zum Widerspruch und zum Beweis der Widerspruchsfreiheit

MS 117, p. 240

zu ändern. (*Nicht* zu zeigen, daß dieser Beweis mir etwas Unwichtiges zeigt. Wie *könnte* das auch so sein!)

Wäre es mir z. B. daran gelegen, Widersprüche etwa zu asthetischen Zwecken zu erzeugen, so würde ich nun den Induktionsbeweis der Widerspruchsfreiheit unbedenklich annehmen und sagen: es ist hoffnungslos, in diesem Kalkül einen Widerspruch erzeugen zu wollen; der Beweis zeigt dir, daß es nicht geht. (Beweis in der Harmonielehre.) – – –

MS 117, p. 241

83. Es ist ein guter Ausdruck zu sagen: »dieser Kalkül kennt diese Ordnung (diese

MS 117, p. 242

Methode) nicht, dieser Kalkül kennt sie.«

Wie, wenn man sagte: »ein Kalkül, der diese Ordnung nicht kennt, ist eigentlich kein Kalkül«?

(Ein Kanzleibetrieb, der diese Ordnung nicht kennt, ist eigentlich kein Kanzleibetrieb.)

Die Unordnung – möchte ich sagen – wird zu praktischen, nicht zu theoretischen Zwecken vermieden.

Eine Ordnung wird eingeführt, weil man ohne sie üble Erfahrungen gemacht hat – oder auch, sie wird eingeführt wie die Stromlinienform bei Kinderwagen und Lampen, weil sie sich etwa irgendwo anders bewährt hat und so der Stil oder die Mode geworden ist.

Der Mißbrauch der Idee der *mechanischen* Sicherung gegen den Widerspruch. Wie aber, wenn die Teile des Mechanismus mit einander verschmelzen, brechen oder sich biegen?

84. »Der Beweis der Widerspruchsfreiheit erst zeigt mir, daß ich mich dem Kalkül anvertrauen kann.«

MS 117, p. 243

Was ist das für ein Satz: Du kannst dich dem Kalkül erst *dann* anvertrauen? Wenn du dich ihm aber nun *ohne* jenen Beweis anvertraust!? Welche Art von Fehler hast du begangen?

Meu objetivo é modificar a *atitude* com relação à contradição e à prova de

MS 117, p. 240

consistência. (*Não* para mostrar que esta prova mostra para mim algo desimportante. Como *poderia* ser assim!)

Se estivesse interessado em produzir contradições por finalidades estéticas, por exemplo, aceitaria sem hesitação a prova indutiva de consistência e diria: não há esperança em querer produzir neste cálculo uma contradição; a prova te mostra que isto não funciona. (Prova em teoria da harmonia.) – – –

MS 117, p. 241

83. É uma boa expressão dizer: "este cálculo desconhece esta ordem (este

MS 117, p. 242

método), aquele, sim, conhece."

E se alguém dissesse: "um cálculo que desconhece esta ordem não é realmente um cálculo"?

(Um escritório de chancelaria que desconhece esta ordem não é realmente um escritório de chancelaria.)

A desordem – gostaria de dizer – é evitada por finalidades práticas, não por teóricas.

Uma ordem é introduzida porque sem ela tivemos experiências ruins – ou então, ela é introduzida assim como a forma aerodinâmica dos carrinhos de bebê e luminárias, porque deu provas de eficácia em algum lugar e assim se tornou um estilo ou uma moda.

O abuso da ideia de segurança *mecânica* contra a contradição. Mas o que aconteceria se as partes do mecanismo se fundissem, quebrassem ou entortassem?

84. "Só a prova de consistência me mostra que posso confiar no cálculo."

MS 117, p. 243

Que tipo de proposição é esta: só *então* você pode confiar no cálculo? Mas e se você confia nele *sem* esta prova!? Que tipo de erro você cometeu?

Eu coloco uma ordem; eu digo: "Só existem *estas* possibilidades: . . .". Isto é como se eu

Ich mache Ordnung; ich sage: »Es sind nur *diese* Möglichkeiten: . . . «. Es ist, wie wenn ich die möglichen Permutationen der Elemente A, B, C bestimme: ehe die Ordnung da war,

MS 117, p. 244

hatte ich etwa nur einen nebelhaften Begriff von dieser Menge. – Bin ich jetzt ganz sicher, daß ich nichts übersehen habe? Die Ordnung ist ein Mittel, nichts zu übersehen. Aber: keine Möglichkeit im Kalkül zu übersehen, oder: keine Möglichkeit in der Wirklichkeit zu übersehen? – Ist nun sicher, daß Leute nie werden anders rechnen wollen? Daß Leute unsern Kalkül nie so ansehen werden, wie wir das Zählen der Wilden, deren Zahlen nur bis fünf reichen? – daß wir die Wirklichkeit nie *anders* werden betrachten wollen? Aber *das* ist gar nicht die Sicherheit, die uns diese Ordnung geben soll. Nicht die ewige Richtigkeit des Kalküls soll gesichert werden, sondern nur die zeitliche, sozusagen.

»Diese Möglichkeiten *meinst* du doch! – Oder meinst du andre?«

MS 117, p. 245

Die Ordnung überzeugt mich, daß ich mit diesen 6 Möglichkeien keine übersehen habe. Aber überzeugt sie mich auch davon daß nichts meine gegenwärtige Auffassung solcher Möglichkeiten wird umstoßen können?

85. Könnte ich mir denken, daß man sich vor einer Möglichkeit der Siebenecks-Konstruktion ebenso fürchtete, wie vor der Konstruktion eines Widerspruchs, und daß der Beweis, daß die Siebenecks-Konstruktion unmöglich ist, eine beruhigende Wirkung hätte, wie der Beweis der Widerspruchsfreiheit?

Wie kommt es denn, daß wir überhaupt versucht sind (oder doch in der Nähe davon) in (3-3) x 2 = (3-3) x 5 durch (3-3) zu kürzen? Wie kommt es, daß dieser Schritt nach den Regeln plausibel erscheint, und wie kommt es, daß er dann dennoch unbrauchbar ist?

MS 117, p. 246

Wenn man diese Situation beschreiben will, ist es ungeheuer leicht, in der Beschreibung einen Fehler zu machen. (Sie ist also sehr schwer zu beschreiben.) Die Beschreibungen, die uns unmittelbar in den Mund kommen, sind irreleitend – so ist, auf diesem Gebiet, unsre Sprache eingerichtet.

Man wird dabei auch immer vom Beschreiben ins Erklären fallen.

Es war oder scheint *ungefähr* so: Wir haben einen Kalkül, sagen wir, mit Kugeln einer Rechenmaschine; ersetzen den durch einen Kalkül mit Schriftzeichen; dieser Kalkül legt uns eine Ausdehnung der Rechnungsweise nahe, die der erste Kalkül uns nicht nahegelegt hat – oder viel-

determinasse as possibilidades de permutação dos elementos A, B, C: antes que a ordem estivesse lá

MS 117, p. 244

eu só tinha uma nebulosa ideia deste conjunto. – Estou agora totalmente seguro de que não deixei nada de lado? A ordem é um recurso para não deixar nada de lado. Mas: para não deixar passar nenhuma possibilidade no cálculo, ou: para não deixar passar nenhuma possibilidade na realidade? – É certo agora que as pessoas nunca vão querer calcular diferente? Que as pessoas nunca vão olhar para o nosso cálculo assim como nós olhamos para a contagem dos selvagens, cujos números só chegam até cinco? – que nós nunca vamos querer observar a realidade de *outro* jeito? Mas *esta* não é a certeza que esta ordem deve nos dar. Não é a eterna correção do cálculo que deve ser assegurada, mas só a temporária, por assim dizer.

"Você *quer dizer* estas possibilidades! – Ou quer dizer outras?"

MS 117, p. 245

A ordem me convence de que com estas 6 possibilidades não deixei nada de lado. Mas me convence também de que nada pode anular minha atual concepção dessas possibilidades?

85. Poderia imaginar que nos amedrontamos diante da possibilidade de construção de um heptágono do mesmo modo que diante de uma contradição, e que a demonstração de que a construção de um heptágono é impossível tem o mesmo efeito tranquilizador que a prova de consistência?[198]

Como é que então somos tentados em geral (ou então a estar perto disto) a reduzir (3-3) x 2 = (3-3) x 5 por (3 -3)? Como é que este passo parece plausível segundo as regras e, não obstante, inutilizável?

MS 117, p. 246

Se alguém quer descrever esta situação, fica extremamente fácil cometer um erro na descrição. (Ela é portanto muito difícil de descrever.) As descrições que nos chegam imediatamente aos lábios são enganosas – assim é que a nossa linguagem se organiza neste âmbito.

Sempre se vai cair ali da descrição para a explicação.

Era ou parece *aproximadamente* assim: nós temos um cálculo, digamos, feito com as bolinhas de um ábaco; nós o substituímos por um cálculo com sinais escritos; este cálculo nos sugere uma extensão do modo de calcular que o primeiro cálculo não nos sugeriu – ou, talvez

MS 117, p. 247

MS 117, p. 247

leicht besser: der zweite Kalkül *verwischt* einen Unterschied, der im ersten nicht zu übersehen war. Wenn es nun der Witz des ersten Kalküls war, daß dieser Unterschied gemacht werde, und er im zweiten nicht gemacht wird, so hat dieser damit seine Brauchbarkeit als Äquivalent des ersten verloren. Und nun könnte das Problem entstehen – so scheint es –: *wo* haben wir uns von dem ursprünglichen Kalkül entfernt, welche Grenzen in dem neuen entsprechen den natürlichen Grenzen des alten?

Ich habe ein System von Rechenregeln, die nach denen eines andern Kalküls gemodelt waren. Ich habe mir ihn zum Vorbild genommen. Bin aber über ihn hinausgegangen. Dies war sogar ein Vorzug; aber nun wurde der neue Kalkül an gewissen Stellen (zum mindesten für die alten Zwecke) unbrauchbar. Ich suche ihn daher abzuändern:

MS 117, p. 248

d. h., durch einen *einigermaßen* anderen zu ersetzen. Und zwar durch einen, der die Vorteile des neuen ohne die Nachteile hat. Aber ist das eine klar *bestimmte* Aufgabe?

Gibt es – könnte man auch fragen – *den richtigen* logischen Kalkül, nur ohne die Widersprüche?

Könnte man z. B. sagen, daß Russells »Theory of Types« zwar den Widerspruch vermeidet, daß aber Russells Kalkül doch nicht DER allgemeine logische Kalkül ist, sondern etwa ein künstlich eingeschränkter, verstümmelter? Könnte man sagen, daß der *reine*, *allgemeine* logische Kalkül erst gefunden werden muß??

Ich spielte ein Spiel und richtete mich dabei nach gewissen Regeln: aber *wie* ich mich nach ihnen richtete, das hing von Umständen ab und diese Abhängigkeit war nicht schwarz auf weiß niedergelegt. (Dies ist eine einigermaßen irreführende Darstellung.) Nun wollte ich dies Spiel so spielen, daß ich mich ›mechanisch‹ nach Regeln richtete und ich ›formalisierte‹ das Spiel. Dabei aber kam ich an Stellen, wo

MS 117, p. 249

das Spiel *jeden* Witz verlor; diese wollte ich daher ›mechanisch‹ vermeiden. – Die Formalisierung der Logik war nicht zur Zufriedenheit gelungen. Aber wozu hatte man sie überhaupt versucht? (Wozu war sie nütze?) Entsprang dies Bedürfnis und die Idee, es müsse sich befriedigen lassen, nicht einer Unklarheit an anderer Stelle?

Die Frage »wozu war sie nütze?« war eine durchaus *wesentliche* Frage. Denn der Kalkül war nicht für einen praktischen Zweck erfunden worden, sondern dazu, ›die Arithmetik zu begründen‹. Aber wer sagt, daß die Arithmetik Logik ist; oder was man mit der Logik tun muß, um sie in irgend einem Sinne zum Unterbau der Arithmetik zu machen? Wenn wir etwa von ästhetischen Überlegungen dazu geführt worden wären, dies zu versuchen, wer sagt,

MS 117, p. 250

daß es uns gelingen kann? (Wer sagt, daß sich dieses englische Gedicht zu unsrer Zufriedenheit

melhor: o segundo cálculo *apaga* uma diferença que no primeiro não foi deixada de lado. Pois bem, se era do espírito do primeiro cálculo que esta diferença fosse feita, e não do segundo, então este perdeu a sua utilidade como um equivalente do primeiro. E agora o problema poderia consistir em – assim parece –: *onde* nos distanciamos do cálculo original, que limites do novo correspondem aos limites naturais do antigo?

Tenho um sistema de regras de cálculo que foi modelado segundo as de um outro cálculo. Eu o tomei como modelo. Mas o ultrapassei. Isto foi até mesmo uma vantagem; mas agora o novo cálculo se tornou inutilizável em certos pontos (pelo menos para as antigas finalidades). Por isto, tento modificá-lo:

MS 117, p. 248

isto é, substitui-lo por algum *em certa medida* diferente. A saber, por algum que tenha as vantagens do novo sem as suas desvantagens. Mas esta é uma tarefa claramente *determinada*?

Existe – também se poderia perguntar – *o* cálculo lógico *correto*, mas sem as contradições?

Poderia ser dito, por exemplo, que, mesmo que a "Theory of Types" de Russell evite a contradição, o cálculo de Russell não é O cálculo lógico universal, mas, digamos, um cálculo artificialmente restringido, mutilado? Pode ser dito que o cálculo lógico *puro*, *universal*, ainda tem que ser encontrado??

Eu estava jogando um jogo e, ao fazê-lo, seguia certas regras: mas *como* as seguia depende de circunstâncias, e esta dependência não estava escrita em preto e branco. (Esta é, em alguma medida, uma apresentação enganosa.) Agora eu queria jogar este jogo de tal maneira que pudesse seguir 'mecanicamente' as regras, e 'formalizei' o jogo. Mas ao fazê-lo cheguei em pontos onde

MS 117, p. 249

o jogo perdia *todo* o espírito; por isto, quis evitá-los 'mecanicamente'. – A formalização da lógica não conseguiu ser satisfatória. Mas para que a buscamos afinal? (Para que ela servia?) Não correspondia esta necessidade, e a ideia de que ela teria que ser capaz de ser satisfatória, a uma falta de clareza em outro ponto?

A pergunta "para que ela servia?" era uma questão absolutamente *essencial*. Pois o cálculo não foi inventado para alguma finalidade prática, mas para 'fundamentar a aritmética'. Mas quem disse que a aritmética é lógica; ou o que temos que fazer com a lógica para que ela em algum sentido se torne um alicerce para a aritmética? Se nós tivéssemos sido levados a esta tentativa por considerações estéticas, por exemplo, quem disse

MS 117, p. 250

que conseguiríamos ser bem-sucedidos? (Quem disse que somos capazes de traduzir satisfatoriamente este poema inglês em alemão?!)

(*Mesmo* que esteja claro que existe, em *algum* sentido, para cada sentença do inglês uma ins Deutsche übersetzen laßt?!)

(*Wenn* es auch klar ist, daß es zu jedem englischen Satz, in *einem* Sinne, eine Übersetzung ins Deutsche gibt.)

Die philosophische Unbefriedigung verschwindet dadurch, daß wir *mehr* sehen.

Dadurch, daß ich das Kürzen durch (3-3) gestatte, verliert die Rechnungsart ihren Witz. Aber wie, wenn ich z. B. ein neues Gleichheitszeichen einführte, das ausdrücken sollte: ›gleich, nach *dieser* Operation‹? Hätte es aber einen Sinn zu sagen: »Gewonnen in *dem* Sinne«, wenn in diesem Sinne *jedes* Spiel von mir gewonnen wäre?

Der Kalkül verleitete mich an

MS 117, p. 251

gewissen Stellen zur Aufhebung seiner selbst. Ich will nun einen Kalkül, der dies nicht tut und schließe diese Stellen aus. – Heißt das nun aber, daß jeder Kalkül, in dem eine solche Ausschließung nicht stattfindet, ein unsicherer ist? »Nun, die Entdeckung dieser Stellen war uns eine Warnung«. – Aber hast du diese ›Warnung‹ nicht *mißverstanden*?

86. Kann man beweisen, daß man nichts übersehen hat? – Gewiß. Und muß man nicht vielleicht später zugeben: »Ja, ich habe etwas übersehen; aber *nicht* in dem Feld, wofür mein Beweis gegolten hat«?

Der Beweis der Widerspruchsfreiheit muß uns Gründe für eine Voraussage geben; und das ist sein *praktischer Zweck*. Das heißt nicht, daß dieser Beweis ein Beweis aus der Physik unsrer Rechentechnik ist – also ein Beweis aus der angewandten Mathematik – aber es heißt, daß die uns nächstliegende Anwendung, und die, um derentwillen uns an diesem Beweis liegt, eine Voraussagung ist. Die Voraus-

MS 117, p. 252

sagung ist nicht: »*auf diese Weise* wird keine Unordnung entstehen« (denn das wäre keine Voraussagung, sondern das ist der mathematische Satz) sondern: »es wird keine Unordnung entstehen«.

Ich wollte sagen: Der Beweis der Widerspruchsfreiheit kann uns nur dann *beruhigen*, wenn er ein triftiger Grund für diese Voraussage ist.

87. Wo es mir genügt, daß bewiesen wird, daß ein Widerspruch oder eine Dreiteilung des Winkels auf *diese* Weise nicht konstruiert werden kann, dort leistet der induktive Beweis, was man von ihm verlangt. Wenn ich mich aber fürchten müßte, daß irgend etwas irgendwie einmal als Konstruktion eines Widerspruchs gedeutet werden könnte, so kann kein Beweis mir diese

tradução em alemão.)

A insatisfação filosófica desaparece pelo fato de que vemos *mais*.[199]

Ao permitir a redução por (3 – 3), este tipo de cálculo perde o seu espírito. Mas o que aconteceria se eu, por exemplo, introduzisse um novo sinal de igualdade que devesse expressar: ‘igual segundo *esta* operação’? Mas faria algum sentido dizer: “Ganho *neste* sentido”, se neste sentido ganhei *todos* os jogos?

O cálculo me induziu

MS 117, p. 251

em certos pontos a fazer a sua própria supressão. Agora quero um cálculo que não faça isto e que elimine estes pontos. – Mas isto então significa que todo cálculo em que não ocorre uma eliminação assim é inseguro? “Bem, a descoberta destes pontos foi para nós uma advertência” – Mas será que você não *entendeu mal* esta ‘advertência’?

86. Pode-se provar que não se deixou nada de lado? – Certamente. E não teremos que provavelmente assumir mais tarde: “Sim, eu deixei algo de lado, mas *não* no âmbito no qual minha prova tem validade”?

A prova de consistência tem que nos dar razões para uma previsão; e esta é a sua *finalidade prática*. Isto não significa que esta prova é uma prova da física da nossa técnica de cálculo – portanto, uma prova da matemática aplicada –, mas significa que é uma previsão para a aplicação mais próxima de nós e que é por causa dela que nos interessamos por esta prova. A pre-

MS 117, p. 252

visão não é: “*Deste modo* não vai surgir nenhuma desordem” (pois isto não é uma previsão, mas a proposição matemática), mas: “Não vai surgir nenhuma desordem”.[200]

Queria dizer: a prova de consistência só pode nos *tranquilizar* se for uma razão mais convincente para esta previsão.

87. Onde é suficiente para mim que se demonstre que uma contradição ou uma trissecção do ângulo não podem ser construídos *deste* modo, ali a prova indutiva cumpre o que dela se exige. Mas se eu tiver que ter medo de que alguma coisa alguma vez possa ser interpretada como construção de uma contradição, então nenhuma prova pode tirar de mim este medo unbestimmte Furcht nehmen.

MS 117, p. 253

Der Zaun, den ich um den Widerspruch ziehe, ist kein ÜberZaun.

Wie konnte der Kalkül durch einen Beweis prinzipiell in Ordnung kommen?
Wie konnte es kein rechter Kalkül

MS 117, p. 255

sein, solange man diesen Beweis nicht gefunden hatte?

»Dieser Kalkül ist rein mechanisch; eine Maschine könnte ihn ausführen.« Was für eine Maschine? Eine, die aus gewöhnlichen Materialien hergestellt ist – oder eine Über-Maschine? Verwechselst du nicht die Härte einer Regel mit der Härte eines Materials?

Wir werden den Widerspruch in einem ganz andern Lichte sehen, wenn wir sein Auftreten und seine Folgen gleichsam anthropologisch betrachten – als wenn wir ihn mit der Entrüstung des Mathematikers anblicken. D. h., wir werden ihn anders sehen, wenn wir nur zu *beschreiben* versuchen, wie der Widerspruch Sprachspiele beeinflußt; als wenn wir ihn vom Standpunkt des mathematischen Gesetzgebers ansehen.

MS 117, p. 256

88. Aber halt! Ist es nicht klar, daß niemand zu einem Widerspruch gelangen will? Daß also der, dem du die Möglichkeit eines Widerspruchs vor Augen stellst, alles tun wird, um einen solchen unmöglich zu machen? (Daß also, wer das nicht tut, eine Schlafmütze ist.)

Wie aber, wenn er antwortete: »Ich kann mir einen Widerspruch in meinem Kalkül nicht vorstellen. – Du hast mir zwar einen Widerspruch in einem andern gezeigt, aber nicht in *diesem*. In diesem *ist keiner*; und ich sehe auch nicht die Möglichkeit.«

»Sollte sich einmal meine Auffassung von dem Kalkül ändern; sollte, durch eine Umgebung, die ich jetzt nicht sehe, sich sein Aspekt ändern – dann wollen wir weiter reden.«

MS 117, p. 258

»Ich sehe die Möglichkeit eines Widerspruches *nicht*. So wenig, wie du – scheint es – die Möglichkeit, daß in deinem Beweis der Widerspruchsfreiheit einer ist.«

Weiß ich denn, ob, wenn ich je einen Widerspruch dort sehen sollte, wo ich jetzt die Möglichkeit eines solchen nicht sehe, er mir dann gefährlich erscheinen wird?

indeterminado.

MS 117, p. 253

A cerca que estendo ao redor da contradição não é nenhuma supercerca.[201]

Como poderia o cálculo por princípio ficar em ordem mediante uma prova?
Como não poderia ser um cálculo correto

MS 117, p. 255

enquanto esta prova ainda não tivesse sido achada?

“Este cálculo é puramente mecânico; uma máquina poderia efetuá-lo.” Que tipo de máquina? Alguma construída de material comum – ou uma supermáquina? Você não está confundindo a dureza de uma regra com a dureza de um material?

Veremos a contradição sob uma luz completamente diferente se observamos a sua ocorrência e suas consequências como se fossem antropológicas – em vez de olharmos para ela com a indignação do matemático. Isto é, nós a veremos diferente se tentamos apenas *descrever* como a contradição influencia os jogos de linguagem; em vez de a vermos pelo ponto de vista do legislador matemático.

MS 117, p. 256 [202]

88. Mas, espere aí! Não está claro que ninguém quer chegar a uma contradição? Que, portanto, aquele para quem você coloca diante dos olhos a possibilidade de uma contradição fará de tudo para tornar tudo isto uma impossibilidade? (Que, portanto, quem não faz isto é um dorminhoco.)

Mas e se ele respondesse: “Eu não posso imaginar uma contradição no meu cálculo. – Na realidade, você me mostrou uma contradição em um outro, mas não *neste*. Neste, *não há nenhuma*; e eu tampouco vejo a possibilidade.”

“Se alguma vez devesse mudar a minha concepção de cálculo; se o seu aspecto devesse mudar por causa de um contexto que agora não vejo – então vamos querer continuar essa conversa.”

MS 117, p. 258

“*Não* vejo a possibilidade de uma contradição. Tão pouco quanto você vê – aparentemente – a possibilidade de que a sua prova de consistência tenha alguma.”

MS 117, p. 259

89. »Was lehrt mich ein Beweis, abgesehen von seinem Resultat?« – Was lehrt mich eine neue Melodie? Bin ich nicht in Versuchung zu sagen, sie *lehre* mich etwas? –

90. Die Rolle des Verrechnens habe ich noch nicht klar gemacht. Die Rolle des Satzes: »Ich muß mich verrechnet haben«. Sie ist eigentlich der Schlüssel zum Verstandnis der ›Grundlagen‹ der Mathematik.

MS 117, p. 267

Vou saber então, quando tiver que ver ali uma contradição onde agora não vejo tal possibilidade, se ela vai parecer perigosa para mim?

MS 117, p. 259 [203]

89. “O que me ensina uma prova, à parte do seu resultado?” – O que me ensina uma nova melodia? Não estou tentado a dizer que ela me *ensina* alguma coisa? –

90. Eu ainda não tornei claro o papel do erro de cálculo. O papel da proposição: “Tenho que ter errado no cálculo”. Ele é propriamente a chave para a compreensão dos ‘fundamentos’ da matemática.

MS 117, p. 267

Teil IV
1942-1944

1. »Die Axiome eines mathematischen Axiomsystems sollen einleuchtend sein.« Wie leuchten sie denn ein?

MS 125, p. 5v

Wie wenn ich sagte: *So* kann ich mir's am leichtesten vorstellen.

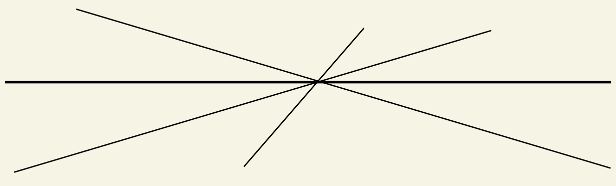
Und hier ist vorstellen nicht ein bestimmter seelischer Vorgang, bei dem man zumeist die Augen schließt, oder mit den Händen bedeckt.

2. Was sagen wir, wenn uns so ein Axiom dargeboten wird, z. B. das Parallelenaxiom? Hat Erfahrung uns gezeigt, daß es sich so verhält? Nun vielleicht; aber *welche* Erfahrung? Ich meine: Erfahrung spielt eine Rolle;

MS 125, p. 6r

aber nicht die, die man unmittelbar erwarten würde. Denn man hat ja doch nicht Versuche gemacht und gefunden, daß wirklich durch den Punkt nur *eine* Gerade die andre Gerade nicht schneidet. Und doch leuchtet der Satz ein. – Wenn ich nun sagte: es ist ganz gleichgültig, warum er einleuchtet. Genug: wir nehmen ihn an. Wichtig ist nur, wie wir ihn gebrauchen.

Der Satz beschreibt ein Bild. Nämlich dieses:



MS 125, p. 6v

Dies Bild ist uns annehmbar. Wie es uns annehmbar ist, die beiläufige Kenntnis einer Zahl durch Abrunden auf ein Vielfaches von 10 anzudeuten.

›Wir nehmen diesen Satz an.‹ Aber als *was* nehmen wir ihn an?

3. Ich will sagen: Wenn der Wortlaut des Parallelen-Axioms, z. B., gegeben ist (und wir die Sprache verstehen) so ist die Art der Verwendung dieses Satzes

Parte IV
1942-1944

1. "Os axiomas de um sistema axiomático da matemática devem ser evidentes." Como os tornamos evidentes, então?

MS 125, p. 5v

Como seria se eu dissesse: posso imaginá-lo mais facilmente *assim*.

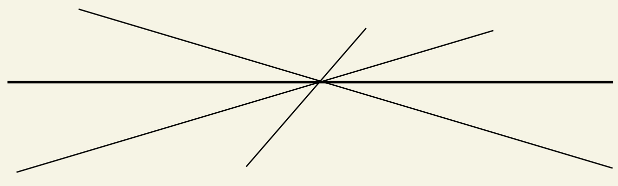
E aqui o imaginar não é um determinado processo mental no qual, na maioria das vezes, se fecha os olhos ou se os cobre com as mãos.

2. O que dizemos quando somos apresentados a um axioma assim, por exemplo o axioma das paralelas? A experiência nos mostrou que isto é assim mesmo? Bem, talvez; mas *que* experiência? Quero dizer: a experiência tem um papel;

MS 125, p. 6r

mas não aquele que esperaríamos imediatamente. Pois não se fazem experimentos e não se descobre que realmente só *uma* reta não corta a outra em um ponto. E, no entanto, a proposição é evidente. – Se agora dissesse: é totalmente indiferente o motivo pelo qual ela é evidente. Basta: nós a aceitamos. O importante é só como nós a usamos.

A proposição descreve uma imagem. Digamos, esta:



MS 125, p. 6v

Esta imagem é aceitável para nós. Assim como é para nós aceitável indicar o conhecimento aproximado de um número pelo seu arredondamento para um múltiplo de 10.

'Aceitamos esta proposição.' Mas como o *quê* nós a aceitamos?

3. Quero dizer: quando é dado, por exemplo, o enunciado verbal do axioma das paralelas (e nós compreendemos a língua), ainda não está determinado

MS 125, p. 7r

und also sein Sinn, noch gar nicht bestimmt. Und wenn wir sagen, er leuchtet uns ein, so haben wir damit, ohne es zu wissen, schon eine bestimmte Art der Verwendung des Satzes gewählt. Der Satz ist kein mathematisches Axiom, wenn wir ihn nicht gerade *dazu* verwenden.

Daß wir nämlich hier nicht Versuche machen, sondern das Einleuchten anerkennen, legt schon die Verwendung fest. Denn wir sind

MS 125, p. 7v

ja nicht so naïf, das Einleuchten statt des Versuchs gelten zu lassen.

Nicht, daß er uns als wahr einleuchtet, sondern daß wir das Einleuchten gelten lassen, macht ihn zum mathematischen Satz.

4. Lehrt uns die Erfahrung, daß zwischen je 2 Punkten eine Gerade möglich ist? Oder, daß zwei verschiedene Farben nicht an einem Orte sein können?

Man könnte sagen: die

MS 125, p. 7v

Vorstellung lehrt es uns. Und darin liegt die Wahrheit; man muß es nur recht verstehen.

Vor dem Satz ist der Begriff noch geschmeidig.

Aber könnten nicht Erfahrungen uns bestimmen, das Axiom zu verwerfen?! Ja. Und dennoch spielt es nicht die Rolle des Erfahrungssatzes.

Warum sind die Newtonschen Gesetze keine Axiome der Mathematik? Weil man sich ganz wohl vorstellen könnte, daß es sich

MS 125, p.8v

anders verhielte. Aber – will ich sagen – dies weist jenen Sätzen nur eine gewisse Rolle im Gegensatz zu einer anderen zu. D. h.: von einem Satz zu sagen: ›man könnte sich das auch anders vorstellen‹ oder ›man kann sich auch das Gegenteil davon vorstellen‹, schreibt ihm die Rolle des Erfahrungssatzes zu.

Der Satz, den man sich nicht anders als wahr soll vorstellen können, hat eine andere *Funktion* als der für den es sich

MS 125, p. 9r

MS 125, p. 7r

o tipo de emprego desta proposição e, portanto, o seu sentido. E quando dizemos que ela nos é evidente, já escolhemos, sem o saber, um determinado tipo de emprego para a proposição. A proposição não é um axioma da matemática se nós não a empregamos especificamente *para isto*.

Que nós não façamos aqui, particularmente, nenhum exame, mas aceitemos a evidência, já estabelece o emprego. Pois, de fato, nós

MS 125, p. 7v

não somos tão ingênuos a ponto de admitir a evidência em vez do exame.

Não que ela se nos evidencia como verdadeira, mas que nós admitimos a evidência, nós a tornamos numa proposição matemática.[204]

4. A experiência nos ensina que entre 2 pontos é possível uma reta? Ou que duas cores diferentes não podem ficar no mesmo lugar?

Poderíamos dizer: a

MS 125, p. 7v

imaginação nos ensina isso. E nisto consiste a verdade; só temos que compreendê-la corretamente.

Antes da proposição o conceito ainda é flexível.

Mas a experiência não poderia nos determinar a rejeição do axioma?! Sim. E, no entanto, ela não joga o papel de proposição da experiência.

Por que as leis newtonianas não são axiomas da matemática? Porque poderíamos muito bem imaginar tudo isto acontecendo de uma outra

MS 125, p.8v

maneira. Mas – quero dizer – isto assinala para aquelas proposições só um determinado papel em contraposição a uma outra. Ou seja: dizer de uma proposição: ‘pode-se imaginá-la também de outra maneira’ ou ‘pode-se imaginar também o contrário dela’, atribui a ela o papel de proposição da experiência.

A proposição que não se pode imaginar senão como verdadeira tem uma outra *função* do que aquela para a qual isto

MS 125, p. 9r

nicht so verhält.

5. Die mathematischen Axiome funktionieren dergestalt, daß, wenn Erfahrung uns dazu bewegte, ein Axiom aufzugeben, sein Gegenteil damit nicht zum Axiom würde.

›2 x 2 ≠ 5‹ heißt nicht,

›2 x 2 = 5‹ habe sich nicht bewährt.

Man könnte den Axiomen, sozusagen, ein spezielles Behauptungszeichen vorsetzen.

Axiom ist etwas nicht

MS 125, p. 9v

dadurch, daß wir es als äußerst wahrscheinlich, ja als gewiß, anerkennen, sondern dadurch, daß *wir* ihm eine bestimmte Funktion zuerkennen und eine, die der des Erfahrungssatzes widerstreitet.

Wir geben dem Axiom eine andere Art der Anerkennung als dem Erfahrungssatz. Und damit meine ich nicht, daß der ›seelische Akt des Anerkennens‹ ein andrer ist.

MS 125, p. 10r

Das Axiom ist, möchte ich sagen, ein andrer Redeteil.

6. Man nimmt, wenn man das mathematische Axiom, das und das sei möglich, hört, ohne weiters an, man wisse, was hier ›möglich sein‹ bedeutet; weil diese Satzform uns natürlich geläufig ist.

Man wird nicht gewahr, wie verschiedenerlei die Verwendung der Aussage, »... ist möglich«, ist! und kommt darum nicht auf den Gedanken, nach der

MS 125, p. 10v

besonderen Verwendung in diesem Fall zu fragen.

Ohne die Verwendung im Geringsten zu übersehen, können wir hier gar nicht zweifeln, daß wir den Satz verstehen.

Ist der Satz, daß es keine Wirkung in die Ferne gibt, von dem Geschlecht der mathematischen Sätze? Man möchte da auch sagen: der Satz ist nicht dazu bestimmt eine

MS 125, p. 11r

não acontece assim.

5. Os axiomas matemáticos funcionam de tal modo que se a experiência nos levasse a abandonar um axioma, o seu contrário não se tornaria, por isto, um axioma.

‘2 x 2 ≠ 5’ não significa que

‘2 x 2 = 5’ não se comprovou.

Poder-se-ia antepor aos axiomas, por assim dizer, um sinal de afirmação especial.

O axioma é alguma coisa não

MS 125, p. 9v

porque o reconhecemos como extremamente provável ou como certo, mas porque *nós*[205] adjudicamos a ele uma determinada função, e uma que se opõe à da proposição empírica.

Nós damos ao axioma um tipo diferente de reconhecimento do que à proposição empírica. E com isto não quero dizer que o ‘ato mental de reconhecimento’ seja diferente.

MS 125, p. 10r

O axioma é, gostaria de dizer, uma outra classe gramatical.

6. Aceita-se sem mais delongas, quando se ouve o axioma matemático, que tal e tal coisa é possível, que se sabe o que aqui significa ‘ser possível’; porque esta forma proposicional nos é naturalmente habitual.

Não nos damos conta de como é variado o emprego da asserção “... é possível”!, e por isto não chegamos a ter a ideia de nos perguntarmos

MS 125, p. 10v

qual é o emprego particular deste caso.

Sem ter a mais ínfima visão panorâmica do emprego não podemos em absoluto duvidar aqui de que compreendemos a proposição.[206]

A proposição de que não há ação à distância é do gênero das proposições matemáticas? Pode-se ali também dizer: a proposição não está determinada a

MS 125, p. 11r

Erfahrung auszudrücken, sondern daß man sich etwas nicht anders vorstellen könne.

Zu sagen, zwischen zwei Punkten sei – geometrisch – immer eine Gerade möglich, heißt: der Satz »die Punkte ... liegen auf einer Geraden« ist eine Aussage über die Lage von Punkten nur, wenn er von mehr als 2 Punkten

MS 125, p. 11v

handelt.

So wie man sich auch nicht fragt, was ein Satz der Form »Es gibt kein ... « (z. B.. »Es gibt keinen Beweis dieses Satzes«) im besonderen Fall bedeutet. Auf die Frage was er bedeutet, antwortet man dem Anderen und sich selbst mit einem Beispiel des Nichtexistierens.

7. Der mathematische Satz steht auf vier Füßen, nicht auf

MS 125, p. 12r

dreien; er ist überbestimmt.

8. Wenn wir das Tun eines Menschen, z. B., durch eine Regel beschreiben, so wollen wir, daß der, dem wir die Beschreibung geben, durch Anwendung der Regel wisse, was im besonderen Fall geschieht. Gebe ich ihm nun durch die Regel eine *indirekte* Beschreibung?

Es gibt natürlich einen Satz, der sagt: wenn einer die Zahlen ... nach

MS 125, p. 12v

den und den Regeln zu multiplizieren trachtet, so erhalt er ...

Eine Anwendung des mathematischen Satzes muß immer das Rechnen selber sein. Das bestimmt das Verhältnis der Rechentätigkeit zum Sinn der mathematischen Sätze.

Wir beurteilen Gleichheit und Übereinstimmung nach den Resultaten unseres Rechnens, darum können wir nicht das Rechnen mit Hilfe der übereinstimmung erklären.

MS 125, p. 13r

Wir beschreiben mit Hilfe der Regel. Wozu? Warum? das ist eine andere Frage.

›Die Regel, auf diese Zahlen angewandt, gibt jene‹ könnte heißen: der Regelaus-

MS 125, p. 13v

expressar uma experiência, senão que não se pode imaginar alguma coisa diferente.

Dizer que entre dois pontos é sempre possível – geometricamente – uma reta, significa: a proposição “Os pontos ... estão sobre uma reta” só é uma asserção sobre a localização dos pontos se ela trata de mais do que

MS 125, p. 11v

2 pontos.

Assim como também não se pergunta o que significa uma proposição da forma “Não existe ...” (por exemplo, “Não existe nenhuma prova para esta proposição”) em um caso particular. À pergunta sobre o que ela significa, responde-se para os outros e para si mesmo com um exemplo de não existência.

7. A proposição matemática se apoia sobre quatro pés, não sobre

MS 125, p. 12r

três; ela é sobredeterminada.

8. Se descrevemos o agir uma pessoa, por exemplo mediante uma regra, então queremos que aquele de quem realizamos a descrição saiba, pelo emprego da regra, o que ocorre em um caso particular. Então lhe dou pela regra uma descrição *indireta*?

Existe, naturalmente, uma proposição que diz: se alguém tentar multiplicar

MS 125, p. 12v

os números ..., segundo tais e tais regras, então vai obter ...

Uma aplicação da proposição matemática tem que ser sempre o próprio calcular. Isto determina a relação da atividade de calcular com o sentido das proposições matemáticas.

Julgamos igualdade e concordância pelos resultados dos nossos cálculos, por isto não podemos explicar o cálculo recorrendo à concordância.

MS 125, p. 13r

Nós descrevemos recorrendo às regras. Para quê? Por quê? Esta é uma outra questão.

‘A regra, aplicada a estes números, geram aqueles’ poderia significar: a expressão da

MS 125, p. 13v

druck auf den Menschen angewendet läßt ihn aus diesen Zahlen jene erzeugen.

Man fühlt ganz richtig, daß dies *kein* mathematischer Satz wäre.

Der mathematische Satz bestimmt einen Weg; legt für uns einen Weg fest.

Es ist kein Widerspruch,

MS 125, p. 14r

daß er eine Regel ist und nicht einfach festgesetzt, sondern nach Regeln erzeugt wird.

Wer mit einer Regel beschreibt, weiß selbst auch nicht mehr als er sagt. D. h., er sieht auch nicht die Anwendung voraus, die er im besonderen Fall von der Regel machen wird. Wer »usw.« sagt, weiß selbst auch nicht mehr als »usw.«.

9. Wie könnte man

MS 125, p. 14r

einem erklären, was der zu tun hat, der einer Regel folgen soll?

Man ist versucht, zu erklären: vor allem tu das *Einfachste* (wenn die Regel z. B. ist immer das gleiche zu wiederholen). Und daran ist natürlich etwas. Es ist von Bedeutung, daß wir sagen können, es sei einfacher eine Zahlenreihe anzuschreiben, in der jede Zahl gleich der vorhergehenden ist,

MS 125, p. 15r

als eine Reihe, in der jede Zahl um 1 größer ist als die vorhergehende, und wieder, daß dies ein einfacheres Gesetz ist als das, abwechselnd 1 und 2 zu addieren.

10. Ist es denn nicht übereilt, einen Satz, den man an Stäbchen und Bohnen erprobt hat, auf Wellenlängen des Lichts anzuwenden? Ich meine: daß 2 x 5000 = 10000 ist.

Rechnet man wirklich damit, daß, was sich in soviel Fällen

MS 125, p. 15v

bewahrheitet hat, auch für diese stimmen muß? Oder ist es nicht vielmehr, daß wir uns mit der arithmetischen Annahme noch *gar* nicht binden?

11. Die Arithmetik als die Naturgeschichte (Mineralogie) der Zahlen. *Wer* spricht aber so von ihr? Unser ganzes Denken ist von dieser Idee durchsetzt.

regra, aplicada sobre a pessoa, faz com que ela produza aqueles números a partir destes.

Sente-se, de maneira totalmente correta, que esta *não* seria uma proposição matemática.

A proposição matemática determina um caminho; assenta para nós um caminho.

Não é uma contradição

MS 125, p. 14r

que ela seja uma regra, e não simplesmente estabelecida mas produzida segundo regras.

Quem descreve com uma regra não sabe mais do que diz. Isto é, tampouco prevê a aplicação que fará no caso particular da regra. Quem diz "e assim por diante" não sabe mais do que o "e assim por diante".

9. Como se poderia

MS 125, p. 14r

explicar para alguém o que se faz para que deva seguir uma regra?

Somos tentados a explicar: antes de tudo faça o *mais simples* (se a regra, por exemplo, for sempre repetir o mesmo). E nisto há, naturalmente, alguma coisa. É significativo que possamos dizer que é mais fácil anotar uma série de números em que cada número é igual ao precedente,

MS 125, p. 15r

do que uma série em que cada número é cerca de 1 vez maior que o precedente, e também que esta é uma lei mais simples do que a de adicionar alternadamente 1 e 2.

10. Não é precipitado aplicar uma proposição que se testou com pauzinhos e feijões a comprimentos de onda de luz? Quero dizer: que 2 x 5.000 = 10.000?

Conta-se realmente que o que se comprovou

MS 125, p. 15v

em tantos casos também tem que valer para este? Ou não seria muito mais que ainda não nos comprometemos *em absoluto* com o pressuposto aritmético?

11. A aritmética como a história natural (mineralogia) dos números. Mas *quem* fala assim dela? Todo o nosso pensamento está permeado por esta ideia.[207]

Die Zahlen sind Gestalten (ich meine nicht die Zahlzeichen) und die Arithmetik teilt uns die Eigenschaften dieser Gestalten mit. Aber die

MS 125, p. 16r

Schwierigkeit ist da, daß diese Eigenschaften der Gestalten *Moglichkeiten* sind; nicht die gestaltlichen Eigenschaften der Dinge solcher Gestalt. Und diese Möglichkeiten wieder entpuppen sich als physikalische, oder psychologische, Möglichkeiten (der Zerlegung, Zusammensetzung, etc.). Die Gestalten aber spielen nur die Rolle der Bilder, die man so und so verwendet. Nicht Eigenschaflten von Gestalten ist es, was wir geben,

MS 125, p. 16v

sondern Transformationen von Gestalten, als irgendwelche Paradigmen aufgestellt.

12. Wir beurteilen nicht die Bilder, sondern mittels der Bilder.

Wir erforschen sie nicht, sondern mittels ihrer etwas anderes.

Du bringst ihn zur Entscheidung dies Bild anzunehmen. Und zwar durch Beweis, d. i. durch Vorführung einer Bilderreihe, oder einfach dadurch, daß du ihm das Bild zeigst. Was zu dieser

MS 125, p. 17r

Entscheidung bewegt ist hierbei gleichgültig. Die Hauptsache ist, daß es sich um das Annehmen eines Bildes handelt.

Das Bild des Zusammensetzens ist kein Zusammensetzen; das Bild des Zerlegens kein Zerlegen; das Bild eines Passens kein Passen. Und doch sind diese Bilder von der größten Bedeutung. *So sieht es aus*, wenn zusammengesetzt wird; wenn zerlegt wird; usw.

MS 125, p. 17v

13. Wie wäre es, wenn Tiere oder Krystalle so schöne Eigenschaften hätten wie die Zahlen? Es gäbe also z. B. eine Reihe von Gestalten, eine immer um eine Einheit größer als die andere.

Ich möchte darstellen können, wie es kommt, daß die Mathematik jetzt uns als Naturgeschichte des Zahlenreiches, jetzt wieder als eine Sammlung von Regeln erscheint.

MS 125, p. 18r

Könnte man aber nicht Transformationen von Tiergestalten (z. B.) studieren? Aber *wie* ›studieren‹? Ich meine: könnte es nicht nützlich sein, sich Transformationen von Tiergestalten vorzuführen? Und doch wäre dies kein Zweig der Zoologie. –

Os números são formas (não quero dizer os numerais) e a aritmética nos comunica as propriedades destas formas. Mas a

MS 125, p. 16r

dificuldade é que estas propriedades das formas são *possibilidades*; não as propriedades formais das coisas de uma tal forma. E estas possibilidades, por sua vez, acabam sendo possibilidades físicas ou psicológicas (de decomposição, combinação etc.). Mas formas só jogam o papel de imagens que se empregam de tal e tal modo. Não são propriedades das formas que damos,

MS 125, p. 16v

mas transformações de formas estabelecidas como paradigmas de alguma espécie.

12. Não julgamos as imagens, senão por meio das imagens.

Nós não as investigamos, senão, por meio delas, alguma outra coisa.

Você o leva à decisão de aceitar esta imagem. Especificamente, mediante uma demonstração, isto é, pela exposição de uma série de imagens ou simplesmente mostrando-lhe a imagem. O que o leva

MS 125, p. 17r

a esta decisão é indiferente aqui. A questão principal é que se trata da aceitação de uma imagem.[208]

A imagem da combinação não é uma combinação; a imagem da decomposição não é uma decomposição; a imagem de um ajustamento não é um ajustamento. E todavia estas imagens são da maior relevância. *É assim que parece* quando são combinadas, quando são decompostas; e assim por diante.

MS 125, p. 17v

13. Como seria se animais ou cristais tivessem tão belas propriedades quanto os números? Haveria, por exemplo, uma série de formas, cada uma sempre maior do que a outra em uma unidade.

Gostaria de poder demonstrar como é que a matemática ora nos parece como uma história natural do domínio dos números, e numa outra vez como uma coleção de regras.

MS 125, p. 18r

Mas não poderíamos estudar (por exemplo) transformações das formas dos animais? Mas ‘estudar’ *como*? Quero dizer: não seria útil demonstrar transformações das formas dos ani-

Ein mathematischer Satz wäre es dann (z. B.), daß *diese* Transformation *diese* Gestalt in *diese* über-

MS 125, p. 18v

leitet. (Die Gestalten und die Transformation wiedererkennbar.)

14. Wir müssen uns aber dessen erinnern, daß der mathematische Beweis durch seine Umformungen nicht nur zeichengeometrische Sätze, sondern Sätze des verschiedenartigsten *Inhalts* beweist.

So beweist die Umformung eines Russellschen Beweises, daß dieser logische Satz mit Hilfe dieser Regeln sich aus den Grundgesetzen bilden lasse.

MS 125, p. 19r

Aber der Beweis wird als Beweis der Wahrheit des Schlußsatzes angesehen, oder als Beweis dafür, daß der Schlußsatz *nichts* sagt.

Das ist nun nur durch eine Beziehung des Satzes nach außen möglich; d. h. durch seine Beziehung zu andern Sätzen, z. B., und deren Anwendung.

»Die Tautologie (›p v ~p‹, z. B.) sagt nichts« ist ein Satz, der sich auf das Sprachspiel bezieht, worin der Satz p ange-

MS 125, p. 19v

wendet wird. (Z. B.: »Es regnet, oder regnet nicht« ist keine Mitteilung über das Wetter.)

Die Russellsche Logik sagt nichts darüber, welcher Art und Verwendung *Sätze*, ich meine nicht *logische* Sätze, sind: Und doch enthält die Logik ihren ganzen Sinn nur von der supponierten Anwendung auf die Sätze.

MS 125, p. 20r

15. Man kann sich denken, daß Leute eine angewandte Mathematik haben ohne eine reine Mathematik. Sie können z. B. – nehmen wir an – die Bahn berechnen, welche gewisse sich bewegende Körper beschreiben und deren Ort zu einer gegebenen Zeit vorhersagen. Dazu benützen sie ein Koordinatensystem, die Gleichungen von Kurven (*eine Form der Beschreibung wirklicher Bewegung*) und die Technik des Rechnens

MS 125, p. 28v

im Dezimalsystem. Die Idee eines Satzes der reinen Mathematik kann ihnen ganz fremd sein.

Diese Leute haben also Regeln, denen gemäß sie die betreffenden Zeichen (insbesondere

mais? E isto não seria ainda um ramo da zoologia. –

Uma proposição matemática seria então (por exemplo) que *esta* transformação *desta* forma passa para

MS 125, p. 18v

esta. (As formas e a transformação reconhecíveis.)

14. Devemos nos lembrar, porém, que a demonstração matemática, mediante as suas transformações, demonstra não só proposições de sinais geométricos mas também proposições dos mais variados *conteúdos*.

Assim a transformação de uma demonstração Russelliana demonstra que esta proposição lógica pode ser formada a partir de leis fundamentais com a ajuda de algumas regras.

MS 125, p. 19r

Mas se considera a demonstração como demonstração da verdade da conclusão, ou como demonstração de que a conclusão *nada* diz.

Mas isto só é possível por uma relação da proposição com o externo; isto é, por sua relação com outras proposições, por exemplo, e sua aplicação.

"A tautologia ('p v ~p', por exemplo) nada diz" é uma proposição que se relaciona com o jogo de linguagem em que a proposição p se

MS 125, p. 19v

se aplica. (Por exemplo: "Chove ou não chove" não é uma informação sobre a meteorologia.)

A lógica Russelliana nada diz sobre quais são o tipo e empregos de *proposições*, e não me refiro a proposições *lógicas*: E ainda assim a lógica ganha todo o seu sentido apenas a partir da aplicação suposta às proposições.

MS 125, p. 20r [209]

15. Pode-se imaginar que hajam pessoas que têm uma matemática aplicada sem uma matemática pura. Elas podem, por exemplo – vamos supor –, calcular a trajetória que descrevem certos corpos móveis e predizer o seu lugar num tempo dado. Para isto elas utilizam um sistema de coordenadas, equações de curvas (*uma forma de descrição de movimento real*) e a técnica de cálculo

MS 125, p. 28v

em sistema decimal. A ideia de uma proposição da matemática pura pode ser totalmente estranha para eles.

z. B. Zahlzeichen) transformieren zum Zweck der Voraussage des Eintreffens gewisser Ereignisse.

Aber wenn sie nun z. B. multiplizieren, werden sie da nicht einen Satz gewinnen, des Inhalts, daß das Resultat der Multiplikation dasselbe

MS 125, p. 29r

ist, wenn man die Faktoren vertauscht? Das wird keine primäre Zeichenregel sein, aber auch kein Satz ihrer Physik.

Nun, sie *brauchen* so einen Satz nicht zu erhalten – selbst wenn sie das Vertauschen der Faktoren erlauben.

Ich denke mir die Sache so, daß diese Mathematik ganz in Form von *Geboten* betrieben wird. »Du mußt *das und das* tun« – um nämlich die Antwort darauf zu erhalten, – ›wo

MS 125, p. 29v

wird sich dieser Körper zu der und der Zeit befinden?‹ (Wie diese Menschen zu dieser Methode der Vorhersagung gekommen sind, ist ganz gleichgültig.)

Der Schwerpunkt ihrer Mathematik liegt für diese Menschen *ganz* im *Tun*.

16. Ist das aber möglich? Ist es möglich, daß sie das kommutative Gesetz (z. B.) nicht als *Satz* ansprechen?

Ich will doch sagen: Diese Leute sollen

MS 125, p. 30r

nicht zu der Auffassung kommen, daß sie mathematische Entdeckungen machen, – sondern *nur* physikalische Entdeckungen.

Frage: Müssen sie mathematische Entdeckungen als Entdeckungen machen? Was geht ihnen ab, wenn sie keine machen? Könnten sie (z. B.) den Beweis des kommutativen Gesetzes gebrauchen, aber ohne

MS 125, p. 30v

die Auffassung, er gipfle in einem *Satz*, er habe also ein Resultat, das ihren physikalischen Satzen irgendwie vergleichbar sei?

Estas pessoas têm, portanto, regras consoante as quais transformam os sinais relevantes (em particular, por exemplo, sinais numéricos) com a finalidade de prever a ocorrência de certos acontecimentos.

Mas se eles agora, por exemplo, multiplicam, não chegarão a uma proposição cujo teor seja que o resultado da multiplicação é o mesmo

MS 125, p. 29r

se se permutam os fatores? Isto não será uma regra primária de sinais, mas tampouco uma proposição da sua física.

Bem, eles não *precisam* obter uma proposição assim – mesmo quando permitem a permuta de fatores.

Imagino a questão como se essa matemática fosse operada completamente na forma de *ordens*. “Você tem que fazer *isto e isto*” – para que se obtenha a resposta sobre – ‘onde

MS 125, p. 29v

se encontrarão estes corpos em tal e tal tempo?’ (Como estas pessoas chegaram a este método de predição é totalmente indiferente.)

O centro de gravidade da sua matemática consiste *totalmente*, para essas pessoas, no *fazer*.

16. Mas isto é possível? É possível que não falem sobre a lei comutativa (por exemplo) como uma *proposição*?

No entanto, vou dizer: Essas pessoas não devem

MS 125, p. 30r

chegar à concepção de que fazem descobertas matemáticas, – mas *só* descobertas físicas.[210]

Pergunta: Eles teriam que fazer descobertas matemáticas como descobertas? O que deixam para trás se não as fazem? Eles poderiam (por exemplo) usar a demonstração da lei comutativa, mas sem

MS 125, p. 30v

a concepção de que ela culmina em uma *proposição* que tem um resultado que de alguma forma seja comparável a suas proposições físicas?

17. Das bloße Bild

o o o o o
o o o o o
o o o o o
o o o o o

einmal als 4 Reihen zu 5 Punkten, einmal als 5 Kolumnen zu 4 Punkten betrachtet, könnte jemand vom kommutativen Gesetz

MS 125, p. 31r

überzeugen. Und er könnte daraufhin Multiplikationen einmal in der einen, einmal in der anderen Richtung ausführen.

Ein Blick auf die Vorlage und die Steine überzeugt ihn, daß er mit ihnen die Figur wird legen können, d. h. er *unternimmt* daraufhin, sie zu legen.

»Ja, aber nur, wenn

MS 125, p. 31v

die Steine sich nicht ändern.« – Wenn sie sich nicht ändern und wenn wir keinen unbegreiflichen Fehler machen, oder Steine unbemerkt verschwinden oder dazukommen.

»Aber es ist doch wesentlich, daß sich die Figur tatsächlich allemal aus den Steinen legen läßt! Was geschähe wenn sie sich nicht legen ließe?« – Vielleicht würden wir uns dann für irgendwie gestört halten. Aber – was weiter? – Vielleicht würden wir die Sache auch

MS 125, p. 32r

hinnehmen, wie sie ist. Und Frege könnte dann sagen: »Hier haben wir eine neue Art der Verrücktheit!«

18. Es ist klar, daß die Mathematik als Technik des Umwandelns von Zeichen zum Zweck des Vorhersagens mit Grammatik nichts zu tun hat.

19. Jene Leute, deren Mathematik nur eine solche Technik ist, sollen nun auch Beweise aner-

MS 125, p. 32v

kennen, die sie von der Ersetzbarkeit einer Zeichentechnik durch eine andere überzeugen. D. h., sie finden Transformationen, Bilderreihen, auf welche hin sie es wagen können, statt einer Technik eine andere zu verwenden.

17. A mera imagem

o o o o o
o o o o o
o o o o o
o o o o o

considerada ora como 4 fileiras de 5 pontos, ora como 5 colunas de 4 pontos, poderia convencer alguém da lei

MS 125, p. 31r

comutativa. E ele poderia em seguida efetuar multiplicações ora numa, ora noutra direção.

Uma olhada sobre o modelo e as peças o convencem de que com eles a figura pode ser composta, ou seja, ele *se encarrega* em seguida de compô-la.

"Sim, mas só se

MS 125, p. 31v

as peças não mudarem." – Se elas não mudarem e se não cometemos nenhum erro inconcebível, ou peças desapareçam sem que notemos ou sejam acrescentadas.

"Mas é essencial que a figura possa de fato ser sempre composta pelas peças! O que aconteceria se ela não pudesse?" Talvez então ficássemos perturbados de alguma maneira. Mas – o que mais? – Talvez chegássemos a aceitar

MS 125, p. 32r

as coisas como elas são. E Frege então pudesse dizer: "Temos aqui um novo tipo de loucura!"[211]

18. Está claro que a matemática como técnica de transformação de sinais com a finalidade de predição não tem nada a ver com a gramática.[212]

19. Os povos cuja matemática é somente essa técnica, devem agora reconhecer também as demonstrações

MS 125, p. 32v

que os convencem da substitutibilidade de uma técnica de sinais por outra. Isto é, eles encontram transformações e séries de imagens a partir das quais eles pudessem arriscar-se a empregar uma técnica em vez da outra.

20. Wenn uns das Rechnen als maschinelle Tätigkeit erscheint, so ist *der Mensch*, der

MS 125, p. 33r

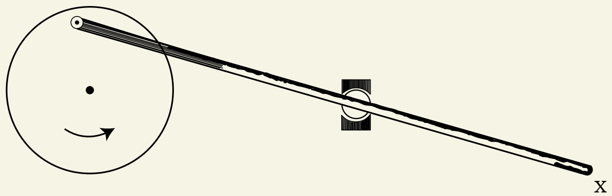
die Rechnung ausführt, die Maschine.

Die Rechnung wäre dann gleichsam ein Diagramm, das ein Teil der Maschine aufzeichnet.

21. Und das bringt mich darauf, daß ein Bild uns sehr wohl davon überzeugen kann, daß ein bestimmter Teil eines Mechanismus sich so und so bewegen werde, wenn man den Mechanismus in Gang setzt.

MS 125, p. 33v

So ein Bild (oder eine Bilderreihe) wirkt wie ein Beweis. So könnte ich z. B. konstruieren, wie der Punkt x des Mechanismus



sich bewegen werde.

Ist es nicht *seltsam*, daß es nicht augenblicklich klar ist, *wie* uns das Bild der Periode beim Dividieren von der Wiederkehr der Ziffernreihe überzeugt?

MS 125, p. 34r

(Es ist so schwer für mich, die innere Beziehung von der äußeren zu scheiden – und das Bild von der Vorhersage.)

MS 125, p. 34v

Der Doppelcharakter des mathematischen Satzes – als *Gesetz* und als *Regel*.

MS 125, p. 35v

22. Wie, wenn man statt »Intuition« sagen würde »richtiges Erraten«? Das würde den Wert einer Intuition in einem ganz anderen Lichte zeigen. Denn

MS 125, p. 36r

20. Se o cálculo nos parece uma atividade maquinal, então a máquina é *o ser humano*

MS 125, p. 33r

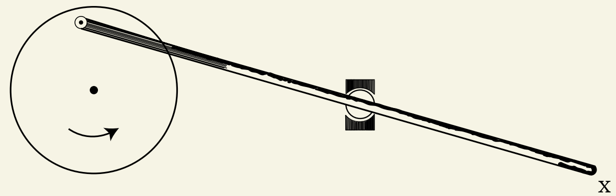
que efetua o cálculo.

O cálculo seria então como um diagrama que registra uma parte da máquina.

21. E isto me leva a pensar que uma imagem pode muito bem nos convencer de que uma determinada parte de um mecanismo pode se mover assim e assado se colocamos o mecanismo em movimento.

MS 125, p. 33v

Uma imagem assim (ou série de imagens) atua como uma demonstração. Assim eu poderia por exemplo construir como o ponto x do mecanismo



vai se mover.

Não é *estranho* que não esteja instantaneamente claro *como* a imagem do período, ao se dividir, nos convence da recorrência da série de algarismos?

MS 125, p. 34r

(É muito difícil para mim separar a relação interna da externa – e a imagem da predição.)

MS 125, p. 34v

O caráter duplo da proposição matemática – como *lei* e como *regra*.

MS 125, p. 35v

22. E como seria se em vez de "intuição" disséssemos "adivinhação correta"? Isto mostraria o valor de uma intuição em uma luz totalmente diferente. Pois

MS 125, p. 36r

das Phänomen des Ratens ist ein psychologisches, aber nicht das des richtig Ratens.

23. Daß wir die Technik gelernt haben, macht, daß wir sie nun, auf den Anblick dieses Bildes hin, so und so abändern.

MS 125, p. 36v

›Wir entschließen uns zu einem neuen Sprachspiel.‹

›Wir entschließen uns *spontan* (möchte ich sagen) zu einem neuen Sprachspiel.‹

24. Ja – es scheint: wenn unser Gedächtnis

MS 125, p. 39v

anders funktionierte, daß wir dann nicht so wie wir's tun, rechnen könnten. Könnten wir aber dann Definitionen geben, wie wir es tun; so reden und schreiben, wie wir es tun?

Wie aber können wir die Grundlage unserer Sprache durch Erfahrungssatze beschreiben?!

25. Angenommen, eine Division, wenn wir sie ganz ausführen, würde nicht zu demselben Resultat

MS 125, p. 40r

führen wie das Kopieren der Periode. Das könnte z. B. daherkommen, daß wir die Rechengesetze, ohne uns dessen bewußt zu sein, veränderten. (Es könnte aber auch daher kommen, daß wir anders kopieren.)

26. Was ist der Unterschied zwischen *nicht* rechnen und *falsch* rechnen? – Oder: ist eine *scharfe* Grenze zwischen dem, die Zeit *nicht* zu messen

MS 125, p. 40v

und sie *falsch* messen? Keine Zeitmessung zu kennen und eine falsche?

27. Gib auf das Geschwätz acht, wodurch wir jemand von der Wahrheit eines mathematischen Satzes überzeugen. Es gibt einen Aufschluß über die Funktion dieser überzeugung. Ich meine das Geschwätz, womit die Intuition geweckt wird.

Womit also die Maschine einer Rechentechnik in Gang gesetzt wird.

MS 125, p. 41r

o fenômeno da adivinhação é psicológico, mas não o da adivinhação correta.

23. Que tenhamos aprendido a técnica faz com que agora, pela visão desta imagem, a modifiquemos assim e assado.

MS 125, p. 36v

'Nós nos decidimos por um novo jogo de linguagem.'

'Nós nos decidimos *espontaneamente* (gostaria de dizer) por um novo jogo de linguagem.'

24. Sim – parece: se nossa memória

MS 125, p. 39v

funcionasse de outro modo, de modo que não pudéssemos calcular como fazemos. Mas poderíamos então dar definições de como o fazemos; falar e escrever tal como o fazemos?

Mas como poderíamos descrever o fundamento da nossa linguagem mediante proposições empíricas?!

25. Suponhamos uma divisão em que quando a efetuamos completamente não se chega ao mesmo resultado

MS 125, p. 40r

que a cópia do período. Isto poderia acontecer, por exemplo, se modificamos as leis do cálculo sem nos darmos conta. (Mas poderia também ser proveniente de que copiamos de outro modo.)

26. Qual é a diferença entre *não* calcular e calcular *errado*? – Ou: há um limite *preciso* entre *não* medir o tempo

MS 125, p. 40v

e medi-lo *errado*? Não saber a medida do tempo e saber errado?

27. Esteja atento ao palavrório pelo qual convencemos alguém da verdade de uma proposição matemática. Existe uma elucidação acerca da função deste convencimento. Quero dizer, o palavrório mediante o qual se desperta a intuição.

Mediante o qual, portanto, a máquina coloca em movimento uma técnica de cálculo.

MS 125, p. 41r

28. Kann man sagen, daß, wer eine Technik lernt, sich dadurch von der Gleichheit der Resultate überzeugt??

29. Die Grenze der Empirie – ist die *Begriffsbildung*.

Welchen Übergang mache ich von »es wird so sein« zu »es *muß* so sein«? Ich bilde einen andern Begriff. Einen, in dem inbegriffen ist was

MS 125, p. 41v

es früher nicht war. Wenn ich sage: »Wenn diese Ableitungen gleich sind, dann *muß* … «, dann mache ich etwas zu einem Kriterium der Gleichheit. Bilde also meinen Begriff der Gleichheit um.

Wie aber, wenn Einer nun sagt: »Ich bin mir nicht dieser *zwei* Vorgänge bewußt, ich bin nur der Empirie bewußt, nicht einer von ihr unabhängigen Begriffsbildung und Begriffsumbildung; alles scheint mir im Dienste

MS 125, p. 42r

der Empirie zu stehen«?

Mit andern Worten: Wir scheinen nicht bald mehr, bald weniger rational zu werden, oder die Form unseres Denkens zu verändern, so daß damit sich *das* ändert, *was wir »Denken« nennen*. Wir scheinen nur immer unser Denken der Erfahrung anzupassen.

Das ist klar: daß wenn Einer sagt: »Wenn du der

MS 125, p. 42v

Regel folgst, so *muß* es so sein,« er keinen *klaren* Begriff von Erfahrungen hat, die dem Gegenteil entsprächen.

Oder auch so: Er hat keinen klaren Begriff davon, wie es aussähe, wenn es anders wäre. Und das ist sehr wichtig.

MS 125, p. 43r

30. Was zwingt uns den Begriff der Gleichheit *so* zu formen, daß wir etwa sagen: »Wenn du beidemale wirklich das Gleiche tust, muß auch dasselbe herauskommen«? – Was zwingt uns, nach einer Regel vorzugehen, etwas als Regel aufzufas-

MS 125, p. 43v

sen? Was zwingt uns, mit uns selbst in den Formen der von uns gelernten Sprache zu reden?

28. Pode-se dizer que quem aprende uma técnica de cálculo está convencido da igualdade dos resultados??

29. O limite do empírico – é a *formação do conceito*.

Que transição faço entre o "será assim" e o "*tem que* ser assim"? Formo um outro conceito. Aquele em que se inclui o que

MS 125, p. 41v

antes não estava. Quando digo: "Se estas derivações são as mesmas, então isto *tem que* …", então transformo algo em um critério de igualdade. Reformo assim meu conceito de igualdade.

Mas e se alguém diz agora: "Eu não estou consciente destes *dois* processos, só estou consciente do empírico, não de uma formação e reformação de conceitos dele independente; tudo me parece estar a serviço

MS 125, p. 42r

do empírico"?

Em outras palavras: Não parecemos ser ora mais ora menos racionais, ou modificar a forma do nosso pensamento, de modo que assim se modifica *aquilo que chamamos de "pensar"*. Só parecemos estar sempre acomodando à experiência o nosso pensar.

Isto é claro: que se alguém diz: "Se você segue a

MS 125, p. 42v

regra, então *tem que* ser assim", ele não tem nenhum conceito *claro* de que experiências correspondem ao contrário.

Ou também assim: Ele não tem nenhum conceito claro de como seria se fosse diferente. E isto é muito importante.[213]

MS 125, p. 43r

30. O que nos obriga a formar o conceito de igualdade *de tal modo* que, por exemplo, dizemos: "Se você realmente faz o mesmo duas vezes, também tem que resultar o mesmo"? – O que nos obriga a proceder segundo uma regra, a conceber alguma coisa como uma

MS 125, p. 43v

regra? O que nos obriga a falar conosco nas formas da linguagem que aprendemos?

Denn das Wort »muß« drückt doch aus, daß wir von *diesem* Begriff nicht abgehen können. (Oder soll ich sagen »wollen«?)

Ja, auch wenn ich von einer Begriffsbildung zu einer andern übergegangen bin, so bleibt der

MS 125, p. 44r

alte Begriff noch im Hintergrund.

Kann ich sagen: »Ein Beweis bringt uns zu einer gewissen Entscheidung, und zwar zu der, eine bestimmte Begriffsbildung anzunehmen«??

MS 125, p. 44v

Sieh den Beweis nicht als einen Vorgang an, der dich *zwingt*, sondern der dich *führt*. – Und zwar führt er deine *Auffassung* eines (gewissen) Sachverhalts.

MS 125, p. 45r

Aber wie kommt es, daß er *jeden* von uns so führt, daß wir übereinstimmend von ihm beeinflußt werden? Nun, wie kommt es, daß wir übereinstimmend *zählen*? »Wir sind eben so abgerichtet«, kann man sagen »und die Übereinstimmung, die so erzeugt wird, setzt sich durch die Beweise fort«.

Während dieses Be-

MS 125, p. 45v

weises haben wir eine Anschauungsweise von der 3-Teilung des Winkels gebildet, die eine Konstruktion mit Lineal und Zirkel ausschlißt.

Dadurch daß wir einen Satz als selbstverständlich anerkennen, sprechen wir

MS 125, p. 46r

ihn auch von jeder Verantwortung gegenüber der Erfahrung frei.

Wahrend des Beweises wird unsere Anschauung geändert – und daß das mit Erfahrungen zusammenhängt, tut dem keinen Eintrag.

Unsere Anschauung wird umgemodelt.

Pois a expressão “temos que” expressa que não podemos nos afastar *deste* conceito. (Ou devo dizer “queremos”?)

E mesmo que eu tenha passado de uma formação de conceito para outra, ainda permanece o

MS 125, p. 44r

velho conceito no pano de fundo.[214]

Posso dizer: “Uma demonstração nos leva a uma certa decisão, especificamente àquela de aceitar uma determinada formação de conceito”??

MS 125, p. 44v [215]

Não veja a demonstração como um processo que te *obriga*, mas que te *guia*. – Especificamente, ela guia a sua *concepção* de um (determinado) estado de coisas.

MS 125, p. 45r

Mas como é que ela guia *cada um* de nós de tal modo que somos influenciados em concordância com ela? Pois, o que acontece para que concordemos na *contagem*? “Nós somos adestrados precisamente assim”, pode-se dizer, “e a concordância que assim se produz se renova pelas demonstrações”.

No decurso desta demonstração

MS 125, p. 45v

formamos uma maneira de ver a trissecção do ângulo que exclui uma construção com régua e compasso.

Pelo reconhecimento de uma proposição como evidente, nós também a isentamos

MS 125, p. 46r

de toda responsabilidade diante da experiência.

No decurso da demonstração nossa visão se modifica – e que isto esteja relacionado com a experiência não faz nenhuma diferença.

Nossa visão é remodelada.

31. Es muß so sein, heißt nicht, es wird so sein. Im

MS 125, p. 46v

Gegenteil: ›Es wird so sein‹ wählt eine aus anderen Möglichkeiten. ›Es muß so sein‹ sieht nur *eine* Möglichkeit.

Der Beweis leitet unsere Erfahrungen sozusagen in bestimmte Kanäle. Wer das und das immer wieder versucht hat, gibt den Versuch nach dem Beweis auf.

Es versucht Einer

MS 125, p. 47r

ein gewisses Bild aus Steinen zusammenzulegen. Er sieht nun eine Vorlage, in welcher ein *Teil* jenes Bildes aus allen seinen Steinen zusammengelegt erscheint, und gibt nun seinen Versuch auf. Die Vorlage war der *Beweis* dafür, daß sein Vorhaben unmöglich ist.

Auch die Vorlage, sowie die, die ihm zeigt, daß er wird ein Bild aus diesen

MS 125, p. 47v

Steinen zusammensetzen können, ändert seinen *Begriff*. Denn er hat, könnte man sagen, die Aufgabe des Zusammensetzens des Bildes aus den Steinen noch nie so angesehen.

Ist es gesagt, daß Einer, der sieht, daß man mit diesen Steinen einen Teil des Bildes

MS 125, p. 48r

legen kann, einsieht, daß man also auf keine Weise das ganze Bild aus ihnen wird legen können? Ist es nicht möglich, daß er versucht und versucht, ob nicht doch eine Stellung der Steine dies Ziel erreicht? und ist es nicht möglich, daß er sein Ziel erreicht? (Doppelte Verwendung eines Steins z. B.)

Muß man hier nicht zwischen Denken und dem praktischen Erfolg des Denkens unterscheiden?

32. ».... die nicht, wie wir, gewisse Wahrheiten unmittelbar

MS 125, p. 48v

einsehen, sondern vielleicht auf den langwierigen Weg der Induktion angewiesen sind«, so sagt Frege. Aber was mich interessiert ist das unmittelbare Einsehen, ob es nun das einer Wahrheit ist, oder einer Falschheit. Ich frage: was ist das charakteristische Gebahren von Menschen, die etwas ›unmittelbar einsehen‹ – was immer der praktische Erfolg dieses Einsehens ist?

31. Tem que ser assim não significa será assim. Ao

MS 125, p. 46v

contrário: ‘Será assim’ elege uma possibilidade entre outras. ‘Tem que ser assim’ só vê *uma* possibilidade.[216]

A demonstração conduz nossas experiências, por assim dizer, por determinados canais. Quem voltou a tentar sempre isto e aquilo, abandonou a tentativa depois da demonstração.

Alguém tenta

MS 125, p. 47r

agrupar uma certa imagem a partir de peças. Ele vê agora um padrão no qual uma *parte* daquela imagem parece ter sido agrupada com todas as suas peças, e abandona então a tentativa. O padrão foi a *demonstração* de que o seu projeto era impossível.

O padrão, da mesma forma que aquele que mostra que uma imagem pode ser composta

MS 125, p. 47v

com estas peças, também muda o seu *conceito*. Pois, pode-se dizer, ele nunca viu a tarefa de composição da imagem com as peças dessa maneira.

Já foi dito que alguém que vê que se pode compor uma parte da imagem com

MS 125, p. 48r

essas peças entende também que não se pode de nenhum modo compor toda a imagem com elas? Não seria possível que ele tentasse e tentasse se algum arranjo das peças não alcançaria este objetivo? e não seria possível que ele alcançasse seu objetivo? (O duplo emprego de uma peça, por exemplo).

Não teríamos que diferenciar aqui entre o pensamento e a consequência prática do pensamento?

32. “.... que não veem, como nós, certas verdades imediatamente,

MS 125, p. 48v

mas talvez sejam dependentes do enfadonho caminho da indução”, assim diz Frege.[217] Mas o que me interessa é o entendimento imediato de que algo seja uma verdade ou uma falsidade. Pergunto: qual é a conduta característica das pessoas que têm um ‘entendimento imediato’ de alguma coisa – qualquer que seja a consequência prática deste entendimento?

MS 125, p. 49r

Mich interessiert nicht das unmittelbare Einsehen einer Wahrheit, sondern das Phänomen des unmittelbaren Einsehens. Nicht (zwar) als einer besonderen seelischen Erscheinung, sondern als einer Erscheinung im Handeln der Menschen.

33. Ja; es ist, als ob die Begriffsbildung unsere Erfahrung in bestimmte Kanäle leitete, so daß man nun

MS 125, p. 49v

die eine Erfahrung mit der anderen auf neue Weise zusammensieht. (Wie ein optisches Instrument Licht von verschiedenen Quellen auf bestimmte Art in einem Bild zusammenkommen läßt.)

Denke dir, der Beweis wäre eine Dichtung, ja ein Theaterstück. Kann mich das Ansehen eines solchen nicht zu etwas bringen?

Ich wußte nicht wie es gehen werde, – aber

MS 125, p. 50r

ich sah ein Bild, und nun wurde ich überzeugt, daß es so gehen werde, wie im Bilde.

Das Bild verhalf mir zur Vorhersage. Nicht als ein Experiment – es war nur der Geburtshelfer der Vorhersage.

Denn, was immer

MS 125, p. 50v

meine Erfahrungen sind, oder waren, ich muß doch noch die Vorhersage *machen*. (Die Erfahrungen machen sie nicht für mich.)

MS 125, p. 51r

Dann ist es ja kein großes Wunder, daß der Beweis uns zur Vorhersage hilft. Ohne dieses Bild hätte ich nicht sagen können, wie es werden wird, aber wenn ich es sehe, so ergreife ich es zur Vorhersage.

Welche Farbe eine chemische Verbindung haben wird kann ich nicht mit Hilfe eines Bildes vorhersagen, das mir die Substanzen in der Proberöhre

MS 125, p. 51v

MS 125, p. 49r

Não me interessa o entendimento imediato de uma verdade, mas o fenômeno do entendimento imediato. Não (na realidade) como uma configuração mental em particular, mas como uma configuração da ação das pessoas.[218]

33. Sim; é como se a formação do conceito conduzisse nossa experiência por canais determinados, de modo que agora víssemos

MS 125, p. 49v

uma experiência em conjunto com a outra de uma nova maneira. (Como um instrumento óptico que permite que a luz de diferentes fontes se junte de uma determinada maneira em uma imagem.)

Imagine que a demonstração fosse um poema, uma peça de teatro. O olhar de algo assim não pode me trazer alguma coisa?

Não sabia como isto iria, – mas

MS 125, p. 50r

vi uma imagem e fui convencido de que isto vai tal como na imagem.

A imagem me auxiliou na predição. Não como um experimento – ela só foi a parteira da predição.

Pois, quaisquer que

MS 125, p. 50v

sejam ou tenham sido as minhas experiências, eu ainda tenho que *fazer* a predição. (As experiências não a fazem por mim.)[219]

MS 125, p. 51r

Então não é um grande prodígio que a demonstração nos ajude na predição. Sem essa imagem não teria podido dizer como seria, mas quando a vejo, eu me aproveito dela para a predição.

Que cor vai ter uma composição química não posso predizer com a ajuda de uma imagem que ilustre para mim as substâncias nos tubos de ensaio

MS 125, p. 51v

und ihre Reaktion veranschaulicht. Zeigt das Bild ein Aufschäumen und am Ende rote Krystalle, so könnte ich nicht sagen: »Ja, *so* muß es sein«, oder »Nein, so kann es nicht sein«. Anders aber ist es wenn ich das Bild eines Mechanismus in Bewegung sehe; dieses kann mich lehren, wie ein Teil sich wirklich bewegen wird. Stellte

MS 125, p. 52r

aber das Bild einen Mechanismus dar, dessen Teile aus einem sehr weichen Material (etwa Teig) bestünden, und sich daher im Bild auf verschiedene Art verbögen, so würde mir das Bild vielleicht wieder nicht zu einer Vorhersage verhelfen.

Kann man sagen: ein Begriff werde so geformt, daß er einer gewissen Vorhersage angepaßt ist, d. h., sie

MS 125, p. 52v

in den einfachsten Terminis ermöglicht –?

34. Das philosophische Problem ist: Wie können wir die Wahrheit sagen, und dabei diese starken Vorurteile *beruhigen*?

Es ist ein Unterschied: ob ich etwas als eine Täuschung meiner Sinne oder als ein äußeres Ereignis denke, ob ich diesen Gegenstand zum Maß jenes nehme oder umgekehrt, ob ich mich entschließe, zwei Kriterien entschei-

MS 125, p. 53r

den zu lassen, oder nur eins.

35. Wenn richtig gerechnet wurde, so muß das herauskommen: Muß es dann *immer so* herauskommen? Natürlich.

Indem wir zu einer Technik erzogen sind, sind wir es auch zu einer Betrachtungsweise, die *ebenso fest* sitzt als jene Technik.

MS 125, p. 53v

Der mathematische Satz scheint weder von den Zeichen, noch von den Menschen zu handeln, und er *tut* es daher auch nicht.

Er zeigt *die* Verbindungen die wir als starr betrachten. Wir schauen aber gewissermaßen von diesen Verbindungen weg und auf etwas anderes. Wir drehen ihnen sozusagen den Rücken. Oder: wir lehnen uns an sie oder fußen auf ihnen.

Nochmals: Wir sehen den mathematischen Satz nicht

e a sua[220] reação. Se a imagem mostra uma espuma e cristais vermelhos ao final, não poderia dizer: “Sim, tem que ser *assim*”, ou “Não, não pode ser assim”. Mas é diferente quando vejo a imagem de um mecanismo em movimento; isto poderia me ensinar como uma parte realmente se movimenta. Mas

MS 125, p. 52r

se a imagem apresentasse um mecanismo cujas partes consistissem de um material muito mole (uma massa de pão, por exemplo), e daí ela fosse dobrada de diferentes modos na imagem, então talvez a imagem não me auxiliasse novamente a fazer uma predição.

Pode-se dizer: um conceito se forma de tal modo que ele se ajusta a uma certa predição, isto é, a

MS 125, p. 52v

possibilita nos termos mais fáceis –?

34. O problema filosófico é: como podemos dizer a verdade e ao mesmo tempo *acalmar* estes fortes preconceitos?

Há uma diferença: se imagino algo como uma ilsusão dos meus sentidos ou como um acontecimento externo, se tomo este objeto como medida daquilo ou, ao revés, se resolvo deixar que dois critérios

MS 125, p. 53r

decidam ou só um.

35. Se foi calculado corretamente, tem que ter este resultado: tem que ter *sempre este* resultado? Naturalmente.

Ao sermos educados para uma técnica, também somos educados para uma maneira de ver as coisas que é *tão firmemente* assentada quanto esta técnica.

MS 125, p. 53v

A proposição matemática não parece tratar nem dos sinais nem das pessoas, e, por conseguinte, ela não o *faz*.

Ela mostra *as* ligações que consideramos como rígidas. Mas, de certo modo, desviamos o olhar dessas ligações e olhamos para outra coisa. Damos as costas para elas, por assim dizer. Ou: nos respaldamos nelas ou nos baseamos nelas.

Novamente: Não vemos a proposição matemática como uma

MS 125, p. 54r

als einen Satz, der von Zeichen handelt an, er *ist* es daher auch nicht.

Wir erkennen ihn an, *indem* wir ihm den Rücken drehen.

Wie ist es, z.B., mit den Grundgesetzen der Mechanik? Wer sie versteht, muß wissen, auf welche Erfahrungen sie sich stützen. Anders verhält es sich mit den Sätzen der reinen Mathematik.

36. Ein Satz kann ein Bild beschreiben und dieses

MS 125, p. 54v

Bild mannigfach in unserer Betrachtungsweise der Dinge, also in unserer Lebens- und Handlungsweise verankert sein.

Ist nicht der Beweis

MS 125, p. 55r

ein zu *dünner* Grund, die Suche nach einer Konstruktion der 3-Teilung ganz aufzugeben? Du bist nur ein oder zweimal die Zeichenreihe durchgegangen und daraufhin willst du dich entschließen? Nur weil du diese eine Transformation gesehen hast, willst du die Suche aufgeben?

Der Effekt des Beweises sei, so meine ich, daß der Mensch sich in die neue Regel hineinstürzt.

MS 125, p. 55v

Er hatte bisher nach der und der Regel gerechnet; nun zeigt ihm Einer den Beweis, man könne auch anders rechnen, und er schaltet nun (auf die andere Technik) um – nicht weil er sich sagt, es werde so auch gehen, sondern weil er die neue Technik mit der alten als identisch empfindet, weil er ihr denselben Sinn geben muß, weil er sie als gleich anerkennt wie er diese Farbe als Grün anerkennt.

D. h.: Das Einsehen der

MS 125, p. 56r

mathematischen Relationen spielt eine ähnliche Rolle wie das Einsehen der Identität. Man könnte beinahe sagen, es ist eine komplizierte Art von Identität.

MS 125, p. 56v

Man könnte sagen: Die Gründe, warum er nun auf eine andere Technik umschaltet, sind von gleicher Art wie die, die ihn eine neue Multiplikation so ausführen lassen, wie er sie aus-

MS 125, p. 54r

proposição que lida com sinais, por conseguinte ela também não *é* isso.

Nós a reconhecemos *dando-lhe* as costas.

O que acontece, por exemplo, com as leis fundamentais da mecânica? Quem as compreende tem que saber em que experiências se baseiam. A situação é diferente com as proposições da matemática pura.

36. Uma proposição pode descrever uma imagem, e esta

MS 125, p. 54v

imagem ancorar de maneira variada no nosso modo de consideração das coisas, portanto em nosso modo de viver e agir.[221]

Não é a demonstração

MS 125, p. 55r

uma razão muito *tênue* para abandonar completamente a busca pela contrução da trissecção? Você só percorreu uma ou duas vezes a série de sinais e já quer se decidir sobre isto? Só porque você viu só esta única transformação já quer abandonar a busca?

O efeito da demonstração é que, assim acredito, a pessoa mergulha na nova regra.

MS 125, p. 55v

Ele tinha até aqui calculado segundo tal e tal regra; agora, alguém lhe demonstra que se pode também calcular de outra maneira e então ele muda (para a outra técnica) – não porque ele diga a si mesmo que também funcionará assim, mas porque ele sente que a nova técnica é idêntica à antiga, porque ele tem que dar a ela o mesmo sentido, porque ele a reconhece como a mesma, assim como ele reconhece esta cor como verde.

Isto é: A intuição das

MS 125, p. 56r

relações matemáticas joga um papel semelhante ao da intuição da identidade. Pode-se até quase dizer que este é um tipo complicado de identidade.

MS 125, p. 56v

Pode-se dizer: As razões pelas quais ele agora muda para uma outra técnica são do mesmo tipo que aquelas que o permitem efetuar uma nova multiplicação tal como ele a efetua; na medida em que reconhece a técnica como a *mesma* que havia empregado em outras multiplica-führt; indem er die Technik als die *gleiche* anerkennt, wie die, die er bei andern Multiplikationen angewandt hatte.

MS 125, p. 57r

37. Ein Mensch ist in einem Zimmer *gefangen*, wenn die Tür unversperrt ist, sich nach innen öffnet; er aber nicht auf die Idee kommt zu *ziehen*, statt gegen

MS 125, p. 57v

sie zu drücken.

38. Wenn Weiß zu Schwarz wird, sagen manche Menschen »Es ist im Wesen-

MS 125, p. 58r

tlichen noch immer dasselbe«. Und andere, wenn die Farbe um einen Grad dunkler wurde, sagen »Es hat sich *ganz* verändert«.

MS 125, p. 58v

39. Die Sätze ›a = a‹, ›p ⊃ p‹, »Das Wort ›Bismarck‹ hat 8 Buchstaben«, »Es gibt kein Rötlichgrün«, sind alle einleuchtend und Sätze über das Wesen: was haben sie gemeinsam? Sie sind offenbar

MS 125, p. 59v

jeder von andrer Art und anderem Gebrauch. Der vorletzte ist einem Erfahrungssatz am ähnlichsten. Und es ist verständlich, daß man ihn einen synthetischen Satz a priori nennen kann.

Man kann sagen: wenn einer die Zahlenreihe mit der Buchstabenreihe nicht *zusammenhält*, kann er nicht wissen, wieviel Buchstaben das Wort hat.

MS 125, p. 60r

40. Eine Figur aus der andern nach einer Regel abgeleitet. (Etwa die Umkehrung vom Thema.)

Dann das Resultat als Äquivalent der Operation gesetzt.

41. Wenn ich schrieb »der Beweis muß übersichtlich sein«, so hieß das: *Kausalität* spielt im Beweis keine Rolle.

ções.

MS 125, p. 57r

37. Uma pessoa está *presa* num quarto se a porta está destrancada e abre para dentro; mas ele nunca tem a ideia de *puxar*, em vez de

MS 125, p. 57v

fazer pressão contra ela.

38. Quando o branco se torna preto, algumas pessoas dizem "Essen-

MS 125, p. 58r

cialmente segue sempre o mesmo". E outras, quando a cor se torna um grau mais escura, dizem: "Mudou *completamente*".

MS 125, p. 58v

39. As proposições 'a = a', 'p ⊃ p', "A palavra 'Bismarck' tem 8 letras", "Não existe o verde avermelhado" são todas evidentes e são proposições sobre a essência: o que elas têm em comum? Obviamente,

MS 125, p. 59v

cada uma é de um tipo diferente da outra e tem uso diferente. A penúltima é a mais parecida com uma proposição empírica. E é compreensível que se possa chamá-la de uma proposição sintética a priori.

Pode-se dizer: se alguém não tivesse *comparado* a série de números e a série de letras, não poderia saber quantas letras tinha a palavra.

MS 125, p. 60r

40. Uma figura derivada de outra segundo uma regra. (A inversão do tema, por exemplo.)

Depois o resultado colocado como equivalente da operação.

41. Quando escrevi que "a demonstração tem que ser uma visão panorâmica", isto significava que: a *causalidade* não tem nenhum papel na demonstração.

Oder auch: der Beweis muß sich durch bloßes Kopieren reproduzieren lassen.

MS 125, p. 60v

42. Daß bei der Fortsetzung der Division von 1 : 3 immer wieder 3 herauskommen muß, wird eben so wenig durch Intuition erkannt, wie, daß die Multiplikation 25 x 25 wenn man sie wiederholt immer wieder dasselbe Produkt liefert.

43. Man könnte vielleicht sagen,

MS 125, p. 61r

daß der synthetische Charakter der mathematischen Sätze sich am augenfälligsten im unvorhersehbaren Auftreten der Primzahlen zeigt.

Aber weil sie synthetisch sind (in diesem Sinne), sind sie drum nicht

MS 125, p. 61v

weniger a priori. Man könnte sagen, will ich sagen, daß sie nicht aus ihren Begriffen durch eine Art von Analyse erhalten werden können, wohl aber einen Begriff durch Synthese bestimmen, etwa wie man durch die Durchdringung von Prismen einen Körper bestimmen kann.

MS 125, p. 62r

Die Verteilung der Primzahlen wäre ein ideales Beispiel für das was man synthetisch a priori nennen könnte, denn man kann sagen, daß sie jedenfalls durch eine Analyse des Begriffs der Primzahl nicht zu finden ist.

MS 124, p. 133

44. Könnte man nicht wirklich von Intuition in der Mathematik reden? Nicht so aber, daß eine *mathematische* Wahrheit intuitiv erfaßt würde, wohl aber eine physikalische oder psychologische. So weiß ich mit *großer* Sicherheit, daß ich jedesmal 625 errechnen werde, wenn ich zehnmal 25 mit 25 multipliziere. D. h. ich weiß die psychologische Tatsache, daß mir immer wieder diese Rechnung als richtig erscheinen

MS 125, p. 62v

wird; so wie ich weiß, wenn ich die Zahlenreihe von 1 bis 20 zehnmal nacheinander aus dem Gedächtnis aufschreibe, die Aufschreibungen sich beim Kollationieren als gleich erweisen werden. – Ist das nun eine Erfahrungstatsache? Freilich – und doch wäre es schwer Experimente anzugeben, die mich von ihr überzeugen würden. Man könnte so etwas eine intuitiv erkannte *Erfah-*

Ou também: a demonstração tem que poder ser reproduzida por mera cópia.

MS 125, p. 60v

42. Que a continuidade da divisão de 1 : 3 sempre resulte em 3 vem a ser tão pouco reconhecido pela intuição quanto que a multiplicação de 25 x 25, se for repetida continuamente, dá sempre no mesmo produto.

43. Poder-se-ia talvez dizer

MS 125, p. 61r

que o caráter sintético das proposições matemáticas mostra-se mais evidente na ocorrência imprevisível de números primos.

Mas que elas sejam sintéticas (neste sentido) não as tornam, por isto,

MS 125, p. 61v

menos a priori. Poder-se-ia dizer, eu diria, que elas não poderiam ser obtidas dos seus conceitos por algum tipo de análise, mas sim um conceito ser determinado por síntese, como se pode, por exemplo, determinar um corpo pela intersecção de prismas.

MS 125, p. 62r

A distribuição dos números primos seria um exemplo ideal para o que se poderia chamar de sintético a priori, pois não se pode dizer em nenhum caso que se encontra um número primo pela análise do conceito.

MS 124, p. 133 [222]

44. Não se poderia realmente falar de intuição na matemática? Mas não que uma verdade *matemática* fosse intuitivamente apreendida, senão de maneira física ou psicológica. Assim, eu sei com *a maior* das certezas que chegarei a 625 todas as vezes se por dez vezes multiplicar 25 por 25. Isto é, eu sei o fato psicológico de que para mim este cálculo vai parecer para todo o sempre

MS 125, p. 62v

correto; assim como sei que, se escrever de memória a série numérica de 1 a 20 consecutivamente por dez vezes, as anotações se comprovarão no cotejamento como iguais. – Isto é então um fato empírico? Certamente – e não obstante seria difícil especificar experimentos que dele me convencessem. Poder-se-ia, assim, chamar alguma coisa de fato *empírico* intuitivamente

MS 125, p. 63r

*rungs*tatsache nennen.

45. Du willst sagen, daß jeder neue Beweis in einer oder der anderen Weise den Begriff des Beweises ändert.

Aber nach welchem Prinzip wird denn etwas als neuer Beweis anerkannt? Oder vielmehr gibt es da gewiß kein ›Prinzip‹.

MS 125, p. 63v

46. Soll ich nun sagen: »wir sind überzeugt, daß immer wieder dasselbe Resultat herauskommen wird«? Nein, das ist nicht genug. Wir sind überzeugt, daß immer dieselbe *Rechnung* herauskommen, gerechnet werden, wird. Ist *das* nun eine mathematische Überzeugung? Nein – denn würde nicht immer dasselbe gerechnet, so könnten wir nicht folgern, daß die Rech-

MS 125, p. 65r

nung einmal ein Resultat, das andre mal ein anderes ergibt.

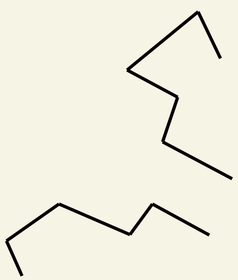
Wir sind *freilich* auch überzeugt, daß wir beim wiederholten Rechnen das Bild der Rechnung wiederholen werden. –

MS 125, p. 65v

47. Könnte ich nicht sagen: wer die Multiplikation macht, findet jedenfalls nicht das mathematische Faktum, aber den mathematischen Satz? Denn, was er *findet*, ist das nicht-mathematische Faktum, und so den mathematischen Satz. Denn der mathematische Satz ist eine Begriffsbestimmung, die auf eine Entdeckung

MS 125, p. 69r

folgt.



MS 125, p. 63r

reconhecido.[223]

45. O que você quer dizer é que cada nova demonstração modifica o conceito de demonstração de uma maneira ou de outra.

Mas sob que princípio então alguma coisa seria reconhecida como uma nova demonstração? Ou melhor, certamente não existe nenhum 'princípio'.

MS 125, p. 63v [224]

46. Devo agora dizer: "estamos convencidos de que vai dar para sempre o mesmo resultado"? Não, isto não é o bastante. Estamos convencidos de que vai dar sempre o mesmo *cálculo*, será sempre calculado. E *isto* agora é um convencimento matemático? Não – pois se não fosse calculada sempre a mesma coisa, não poderíamos inferir que o cálculo produz

MS 125, p. 65r

ora um resultado ora um outro.

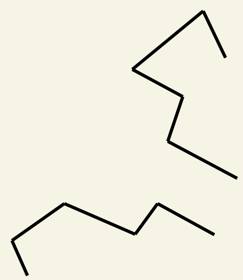
Supostamente estamos também convencidos de que ao calcular repetidamente se repetirá a imagem do cálculo. –

MS 125, p. 65v [225]

47. Não poderia dizer: quem faz a multiplicação não encontra, de qualquer forma, o fato matemático mas a proposição matemática? Pois o que ele *encontra* é o fato não-matemático e, deste modo, a proposição matemática. Pois a proposição matemática é uma determinação de conceito que se segue de uma

MS 125, p. 69r

descoberta.



Du *findest* eine neue Physiognomie. Du kannst dir sie z. B. jetzt *merken* oder sie kopieren.

Es ist eine *neue* Form gefunden, konstruiert worden. Aber sie wird dazu benützt, mit der alten einen neuen Begriff zu geben.

MS 125, p. 69v

Man ändert den Begriff so, daß das hat herauskommen *müssen*.

Ich finde nicht das Resultat; sondern ich finde, daß ich

MS 125, p. 70r

dahin gelange.

Und nicht das ist eine Erfahrungstatsache, daß *dieser* Weg da anfängt und da endet, sondern, daß ich diesen Weg, oder einen Weg zu diesem Ende, gegangen bin.

48. Aber könnte man nicht sagen, daß die *Regeln* diesen Weg führen, auch wenn niemand ihn ginge?

MS 125, p. 70v

Denn das ist es ja, was man sagen möchte – und hier sehen wir die mathematische Maschine, die, von den Regeln selbst getrieben, nur mathematischen Gesetzen gehorcht und nicht physikalischen.

MS 125, pp. 71r-71v

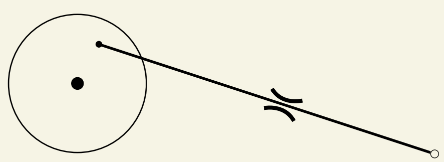
Ich will sagen: das Arbeiten der mathematischen Maschine ist nur das

MS 125, p. 71v

Bild des Arbeitens einer Maschine.

Die Regel *arbeitet* nicht, denn, was immer der Regel nach geschieht, ist eine Deutung der Regel.

49. Nehmen wir an, ich habe die Stadien der Bewegung von



Você *encontra* uma nova fisiognomia. [226] Você pode agora, por exemplo, *memorizá-la* ou copiá-la.

Uma *nova* forma é encontrada, construída. Mas ela é utilizada com a antiga para oferecer um novo conceito.

MS 125, p. 69v

Modifica-se o conceito de modo que isto é o que *tem que* ser obtido.

Eu não acho o resultado; mas acho que

MS 125, p. 70r

chego até ali.

E não é um fato da experiência que *este* caminho começa aqui e termina ali, mas que percorri este caminho, ou um caminho, até o final.

48. Mas não se podera dizer que as *regras* conduzem este caminho mesmo que ninguém percorra por ele?

MS 125, p. 70v

Pois isto é o que se gostaria de dizer – e aqui vemos a máquina matemática que, impelida pela própria regra, só obedece leis matemáticas e não físicas.[227]

MS 125, pp. 71r-71v

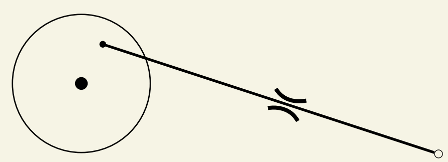
Quero dizer: o trabalho da máquina matemática é só a

MS 125, p. 71v

a *imagem* do trabalho de uma máquina.

A regra não *trabalha*, pois o que quer que ocorra segundo a regra é sempre uma interpretação da regra.[228]

49. Suponhamos que tenha diante de mim os estágios do movimento de



im Bilde vor mir, so verhilft mir das zu einem Satz, den ich von diesem Bild gleichsam ablese. Der

MS 125, p. 72r

Satz enthält das Wort »ungefähr« und ist ein Satz der Geometrie.

Es ist seltsam, daß ich einen Satz von einem *Bild* soll ablesen können.

Der Satz aber handelt nicht von dem Bild das ich sehe. Er sagt nicht, daß auf diesem Bild das und das zu sehen ist. Er sagt aber auch nicht, was der wirkliche Mechanismus tun wird, obwohl er dies andeutet.

MS 125, p. 72v

Aber könnte ich von der Bewegung des Mechanismus, wenn ihre Teile sich nicht ändern, auch andere Zeichnungen anfertigen? D. h., bin ich nicht *gezwungen* eben dies als Bild der Bewegung, *unter diesen Bedingungen*, anzunehmen?

Denken wir uns die Konstruktion der Stadien des Mechanismus mit Strichen von wechselnder Farbe ausgeführt. Die Striche seien zum

MS 125, p. 73r

Teil schwarz auf weißem Grund, zum Teil weiß auf schwarzem Grund. Denke dir die Konstruktionen im Euklid so ausgeführt; sie werden allen Augenschein verlieren.

50. Das umgekehrte Wort hat ein *neues* Gesicht.

MS 125, p. 73v

Wie, wenn man sagte: Wer die Folge 1 2 3 umgekehrt hat, *lernt* über sie, daß sie umgekehrt 3 2 1 ergibt? Und zwar ist, was er lernt, nicht eine Eigenschaft dieser Tintenstriche, sondern der Folge von *Formen*. Er lernt eine *formale* Eigenschaft von Formen. Der Satz, welcher diese formale Eigenschaft aussagt, wird durch die Erfahrung bewiesen, die ihm die Entstehung der einen Form auf diese Weise aus der andern zeigt.

MS 126, p. 12

Hat nun, wer das lernt, *zwei* Eindrücke? Einen davon, daß die Reihenfolge *umgekehrt* wird, den andern davon, daß 3 2 1 entsteht? Und könnte er die Erfahrung, den Eindruck, daß 1 2 3 umgekehrt wird, nicht haben und doch nicht den, daß 3 2 1 entsteht? Vielleicht wird man sagen: »nur durch eine seltsame Täuschung«. –

uma imagem; então isto me ajuda a formular uma proposição como se fosse lida desta imagem. A

MS 125, p. 72r

proposição contém a palavra “aproximadamente” e é uma proposição da geometria.

É estranho que eu deva poder ler uma proposição em uma *imagem*.

A proposição, no entanto, não trata da imagem que vejo. Não diz que isto e aquilo é visto na imagem. Mas ela não diz tampouco o que vai fazer o mecanismo real, ainda que o sugira.

MS 125, p. 72v

Mas eu poderia fazer também outros desenhos do movimento do mecanismo se as suas partes não se alteram? Isto é, não estou *obrigado* justamente a aceitar, *nestas condições*, que seja esta a imagem do movimento?

Imaginemos a construção dos estágios do mecanismo com traços executados em cores alternadas. Que os traços sejam

MS 125, p. 73r

em parte pretos sobre um fundo branco, e em parte brancos sobre um fundo preto. Imagine as construções executadas assim em Euclides; elas perderão toda a perspectividade.

50. A palavra invertida tem uma face *nova*.[229]

MS 125, p. 73v

Como seria se disséssemos: Quem inverte a sequência 1 2 3 *aprende* que ela, invertida, dá em 3 2 1? E, de fato, o que ele aprende não é uma propriedade das tintas dos traços, mas da sequência de *formas*. Ele aprende uma propriedade *formal* das formas. A proposição que atesta esta propriedade formal se demonstra pela experiência que mostra para ele, deste modo, o surgimento de uma forma a partir da outra.

MS 126, p. 12 [230]

Pois bem, quem aprende isso tem *duas* impressões? Uma de que a sequência foi *invertida*, e outra de que surge 3 2 1? E ele não poderi ter a experiência, a impressão, de que 1 2 3 foi invertida, e ainda assim de que 3 2 1 não surgiu? Talvez disséssemos: “só mediante uma estranha ilusão”. –

Warum man eigentlich nicht sagen kann, daß man jenen formalen Satz aus der Erfahrung lernt – weil man es erst dann

MS 126, p. 13

diese Erfahrung nennt, wenn dieser Prozeß zu diesem Resultat führt. Die Erfahrung, die man meint, besteht schon aus diesem Prozeß mit diesem Resultat.

Darum ist sie mehr wie die Erfahrung: Ein Bild zu sehen.

Kann eine Buchstabenreihe zwei Umkehrungen haben?

Etwa eine akustische und eine andere optische Umkehrung. Angenommen, ich erkläre jemandem was die Umkehrung eines Wortes auf dem Papier ist, was man so nennt. Und nun

MS 126, p. 14

stellt sich heraus, daß er eine akustische Umkehrung des Wortes hat, d. h., etwas was er so nennen möchte, was aber nicht ganz mit dem geschriebenen übereinstimmt. So daß man sagen kann: er hört *das* als Umkehrung des Wortes. Gleichsam als verzerrte sich ihm das Wort beim Umkehren. Und dies könnte etwa eintreten, wenn er das Wort und die Umkehrung fließend ausspricht im Gegensatz zu dem Fall, wenn er es buchstabiert. Oder die Umkehrung könnte anders scheinen, wenn er das

MS 126, p. 15

Wort in einem Zuge vor- und rückwärts spricht.

Es wäre möglich, daß man das genaue Spiegelbild eines Profils sogleich nach diesem gesehen nie für das gleiche und nur in die andere Richtung gedrehte erklärte, sondern daß, um den Eindruck der genauen Umkehrung zu machen, das Profil in den Maßen ein wenig geändert werden mußte.

MS 126, p. 16

Ich will doch sagen, man habe kein Recht zu sagen: wir mögen zwar über die korrekte Umkehrung, eines langen Wortes z. B., im Zweifel sein, aber wir *wissen*, daß das Wort nur *eine* Umkehrung hat.

»Ja, aber wenn es eine Umkehrung in *diesem* Sinne sein soll, dann kann es nur *eine* geben!« Heißt hier ›in diesem Sinne‹: nach diesen Regeln, oder: mit dieser Physiognomie? Im ersten Falle wäre der Satz tautologisch, im zweiten muß er nicht wahr sein.

MS 126, p. 17

Por que não se pode propriamente dizer que aprendemos aquela proposição formal pela experiência – porque somente chamamos

MS 126, p. 13

isto de experiência se este processo leva a este resultado. A experiência que se quer dar a entender já consiste deste processo com este resultado.

É por isto que ela é mais do que a experiência: Ver uma imagem.

Uma série de letras pode ter duas inversões?

Por exemplo, uma inversão acústica e outra ótica. Suponhamos que eu explique para alguém o que é a inversão de uma palavra no papel, o que se denomina assim. E agora

MS 126, p. 14

se revela que ele faz uma inversão acústica da palavra, isto é, algo que ele gostaria de chamar assim mas que não concorda totalmente com o escrito. De modo que se pode dizer: ele ouve *isto* como inversão da palavra. Como se a palavra fosse distorcida para ele pela inversão. E isto poderia ocorrer, por exemplo, quando ele pronunciasse fluentemente a palavra e a sua inversão, ao contrário do caso quando ele a soletrasse. Ou a inversão poderia parecer diferente quando ele dissesse

MS 126, p. 15

a palavra de uma só vez para frente e para trás.

Seria possível que a imagem especular exata de um perfil, vista imediatamente depois deste, nunca fosse explicada como a mesma e só virada para a outra direção, mas que, para dar a impressão de inversão exata, o perfil tinha que ser ligeiramente modificado em suas medidas.[231]

MS 126, p. 16

Mas quero dizer que não há nenhum direito em dizer: ainda que pudéssemos estar em dúvida sobre a correta inversão de uma longa palavra, *sabemos* que a palavra só *tem* uma inversão.

"Sim, mas se isso deve ser uma inversão *neste* sentido, então só pode haver *uma*!." 'Neste sentido' significa aqui: segundo esta regra, ou: com esta fisiognomia? No primeiro caso, a proposição seria tautológica, no segundo, ela não tem por que ser verdadeira.

MS 126, p. 17

51. Denk dir eine Maschine, die ›so konstruiert ist‹, daß sie eine Buchstabenreihe umkehrt. Und nun den Satz, daß das Resultat im Falle

ABER

REBA ist. –

MS 125, p. 75r

Die Regel, wie sie wirklich gemeint ist, scheint eine treibende Kraft zu sein, die eine ideale

MS 125, p. 76r

Reihe *so* umkehrt, – was immer ein Mensch mit einer wirklichen Reihe tun mag.

Dieser ist also der Mechanismus, der für den wirklichen der Maßstab, das Ideal ist.

Und das ist verständlich. Denn wird das Resultat der Umkehrung zum Kriterium dafür daß die Reihe wirklich umgekehrt wurde, und drücken wir dies so aus, daß

MS 125, p. 76v

wir es einer idealen Maschine nachtun, so muß diese Maschine *unfehlbar* dies Resultat erzeugen.

52. Kann man nun sagen: daß die Begriffe, die die Mathematik schafft, eine Bequemlichkeit sind, daß es wesentlich auch ohne sie ginge?

Zuvörderst drückt die Annahme dieser Begriffe die *sichere* Erwartung gewisser Erfahrungen aus.

MS 125, p. 77r

Wir nehmen es z. B. nicht hin, daß eine Multiplikation nicht jedesmal immer das gleiche Resultat ergibt.

Und was wir mit Sicherheit erwarten, ist für unser ganzes Leben wesentlich.

53. Warum soll ich aber dann nicht sagen, daß die mathematischen Sätze eben jene bestimmten Erwartungen, d. h.

MS 125, p. 77v

also Erfahrungen, ausdrücken? Nur weil sie es eben nicht tun. Die Annahme eines Begriffes ist eine Maßregel, die ich vielleicht nicht ergreifen würde, wenn ich nicht das Eintreten gewisser Tatsachen mit Bestimmtheit erwartete; aber darum ist die Festsetzung dieses Maßes nicht äquivalent mit dem Aussprechen der Erwartungen.

51. Imagine uma máquina ‘construída de tal modo’ que inverta uma série de letras. E agora a proposição cujo resultado no caso de

LADO

seja ODAL. –[232]

MS 125, p. 75r [233]

A regra, tal como realmente foi pensada, parece ser uma força motriz que inverte *assim*

MS 125, p. 76r

uma série ideal, – o que quer que seja o que uma pessoa possa fazer com uma sequência real.

Este é portanto o mecanismo que, para o real, é o padrão de medida, o ideal.

E isto é compreensível. Pois se o resultado da inversão se torna um critério para o fato de que a série foi realmente invertida, e expressamos isto de tal forma que

MS 125, p. 76v

imitamos uma máquina ideal, então esta máquina tem que produzir *infalivelmente* este resultado.

52. Pode-se agora dizer: que os conceitos que a matemática cria são uma conveniência que funcionaria essencialmente sem ela?

Sobretudo, a admissão desses conceitos expressa a expectativa *segura* de certas experiências.

MS 125, p. 77r

Não aceitamos, por exemplo, que uma multiplicação nem sempre dê o mesmo resultado todas as vezes.

E o que esperamos com certeza é essencial para a totalidade da nossa vida.

53. Mas por que não devo então dizer que as proposições matemáticas expressam precisamente essas determinadas expectativas, ou seja,

MS 125, p. 77v

portanto experiências? Somente porque elas precisamente não o fazem. A aceitação de um conceito é uma medida que talvez não tomaria se não aguardasse resolutamente a ocorrência de certos fatos; mas, por isto, a estipulação desta medida não é equivalente à expressão das expectativas.

54. Es ist schwer, den Tatsachenkörper auf die richtige Fläche zu stellen: das Gegebene als

MS 125, p. 78r

gegeben zu betrachten. Es ist schwer den Körper anders aufzustellen als man gewöhnt ist, ihn zu sehen. Ein Tisch in einer Rumpelkammer mag immer auf der Tischplatte liegen, aus Gründen der Raumersparnis, z. B. So habe ich den Tatsachenkörper immer *so* aufgestellt gesehen, aus mancherlei Gründen; und nun soll ich etwas anderes als seinen Anfang und etwas anderes als sein Ende ansehen. Das ist schwer. Er will gleichsam nicht so stehen, es sei denn daß man ihn in dieser Lage durch andere Vorrich-

MS 125, p. 78v

tungen unterstützt.

MS 125, p. 79r

55. Es ist *eines* eine mathematische Technik zu gebrauchen, die darin besteht, den Widerspruch zu vermeiden, und ein anderes gegen den Widerspruch in der Mathematik überhaupt zu philosophieren.

MS 127, p. 81

56. Der Widerspruch. Warum grad dieses *eine* Gespenst? Das ist doch sehr verdächtig.

Warum sollte eine Rechnung, zu einem praktischen Zweck angestellt, die einen Widerspruch ergibt, nur nicht sagen: »Tu wie dir's beliebt, ich, die Rechnung, entscheide darüber nicht«?

Der Widerspruch könnte als Wink der Götter aufgefaßt werden, daß ich handeln soll und *nicht* überlegen.

MS 127, p. 83

57. »Warum soll es in der Mathematik keinen Widerspruch geben dürfen?« – Nun, warum darf es in unsern einfachen Sprachspielen keinen geben? (Da besteht doch gewiß ein Zusammenhang.) Ist das also ein Grundgesetz, das alle denkbaren Sprach-

MS 127, p. 80

spiele beherrscht?

54. É difícil colocar o corpo de fatos no plano correto: observar o dado

MS 125, p. 78r

como dado. É difícil situar o corpo de modo diferente do que se está acostumado a vê-lo. Uma mesa num depósito sempre pode estar posta de cabeça para baixo, por razões de economia de espaço, por exemplo. De modo que sempre vejo o corpo de fatos situado *assim* por várias razões; e agora devo olhar para algo diferente como o seu começo, e para algo diferente como o seu fim. Isto é difícil. É como se ele não quisesse ficar assim, a não ser que o apoiássemos nessa posição mediante

MS 125, p. 78v

outros dispositivos.

MS 125, p. 79r [234]

55. *Uma coisa* é usar uma técnica matemática que consista em evitar a contradição, e outra é filosofar contra a contradição em matemática.

MS 127, p. 81

56. A contradição. Por que logo *este* fantasma? Isto é muito suspeito.

Por que não deveria um cálculo feito para uma finalidade prática, mas que gera uma contradição, somente dizer: "Faça como quiser, eu, o cálculo, não tomo decisões"?

A contradição poderia ser concebida como um sinal de Deus sobre o qual eu deveria agir e *não* refletir.

MS 127, p. 83 [235]

57. "Por que não deve ser permitido haver contradição na matemática?" – Bem, por que não poderia haver nenhuma nos nossos jogos de linguagem simples? (Aqui certamente há uma conexão.) Isto é uma lei fundamental que governa todos os jogos de linguagem

MS 127, p. 80

imagináveis?

Angenommen ein Widerspruch in einem Befehl z. B. bewirkt Staunen und Unentschlossenheit – und nun sagen wir: das eben ist der Zweck des Widerspruchs in diesem Sprachspiel.

MS 127, p. 81

58. Einer kommt zu Leuten und sagt: »Ich lüge immer«. Sie antworten: »Nun, dann können wir dir trauen!« – Aber könnte *er* meinen, was er sagte? Und warum nicht? Gibt es nicht ein Gefühl: man sei unfähig, etwas wirklich Wahres

MS 127, p. 88

zu sagen; sei es was immer? –

»Ich lüge immer!« – Nun, und wie war's mit *diesem* Satz? – »Der war auch gelogen!« – Aber dann lügst du also nicht immer! – »Doch, alles ist gelogen!«

Wir würden vielleicht von diesem Menschen sagen, er meint mit »wahr« und mit »lügen« nicht dasselbe, was wir meinen. Er meine, vielleicht, so etwas wie: was er sage, flimmere; oder nichts komme wirklich vom Herzen.

Man könnte auch sagen: sein »ich lüge immer« war eigentlich keine *Behauptung*.

MS 127, p. 89

Eher war es ein Ausruf.

Man kann also sagen: »Wenn er jenen Satz nicht ohne Gedanken aussprach, – so mußte er die Worte so und so meinen, er *konnte* sie nicht auf die gewöhnliche Weise meinen«?

MS 127, p. 90

59. Warum sollte man den Russellschen Widerspruch nicht als etwas Über-propositionales auffassen, etwas das über den Sätzen thront und noch

MS 125, p. 67r

nach beiden Seiten, wie ein Januskopf, zugleich schaut? N. B. Der Satz $F(F)$ – in welchem $F(\xi) = \sim \xi(\xi)$ – enthält keine Variablen und könnte also als etwas Über-logisches, als etwas Unangreifbares, dessen Verneinung es nur wieder selber aussagt, gelten. Ja, könnte man nicht sogar die Logik mit diesem Widerspruch anfangen? Und von ihm gleichsam zu den Sätzen niedersteigen.

MS 125, p. 67v

Suponhamos que uma contradição em uma ordem, por exemplo, cause espanto e indecisão – e, então, nós dizemos: esta é justamente a finalidade da contradição neste jogo de linguagem.

MS 127, p. 81

58. Alguém chega perto de algumas pessoas e diz: "Eu sempre minto". Elas respondem: "Bem, neste caso nós confiamos em você!" – Mas *ele* pôde pensar no que dizia? E por que não?[236] Não há um sentimento: uma pessoa é incapaz de dizer alguma coisa

MS 127, p. 88

realmente verdadeira; haja o que houver? –

"Eu sempre minto!" – Bem, então o que acontece com *esta* proposição? – "Ela também era uma mentira!" – Mas então você nem sempre mente! – "Sim, tudo é mentira!"

Talvez nós disséssemos a respeito dessa pessoa que ela não quer dizer, com "verdade" e "mentira", o mesmo que nós. Talvez ela queira dizer alguma coisa como: o que ela disse tremulou; ou nada vem realmente do coração.

Poder-se-ia também dizer: a sua "eu sempre minto", não era realmente uma *asserção*.

MS 127, p. 89

Era antes uma exclamação.

Pode-se portanto dizer: "Se ele não proferiu aquela proposição sem pensar, – então ele tinha que querer dizer as palavras assim e assim, ele não *poderia* querer dizê-las da maneira usual"?

MS 127, p. 90

59. Por que não se deveria conceber a contradição de Russell como algo supraproposicional, algo que reine sobre as proposições e ainda

MS 125, p. 67r

olhe para os dois lados, como uma cabeça de Janus? Note-se bem, a proposição $F(F)$ – em que $F(\xi) = \sim \xi(\xi)$[237] – não contém nenhuma variável e poderia, portanto, valer como algo supralógico, algo intangível, cuja negação somente assere o mesmo de novo. Sim, não se poderia até mesmo começar a lógica com esta contradição? Como se descêssemos dela até as proposições.

MS 125, p. 67v

Der sich selbst widersprechende Satz stünde wie ein Denkmal (mit einem Januskopf) über den Sätzen der Logik.

MS 125, p. 68r

60. Nicht dies ist perniziös: einen Widerspruch zu erzeugen in der Region, in der weder der widerspruchsfreie

MS 121, p. 74v

noch der widerspruchsvolle Satz irgend welche Arbeit zu leisten hat; wohl aber das: nicht zu wissen, wie man dorthin gekommen ist, wo der Widerspruch nicht mehr schadet.

MS 121, p. 75r

A proposição autocontraditória ficaria como um monumento (com uma cabeça de Janus) sobre as proposições da lógica.

MS 125, p. 68r

60. Não é isto que é pernicioso: produzir uma contradição na região em que nem a proposição consistente

MS 121, p. 74v [238]

nem a contraditória tem algum trabalho a cumprir; mas, sim, isto: não saber como se chegou até ali onde a contradição já não mais causa dano.

MS 121, p. 75r

Teil V
1942-1944

1. Es ist natürlich klar, daß der Mathematiker, insofern er wirklich ›ein Spiel spielt‹, keine *Schlüsse zieht*. Denn ›Spielen‹ muß hier heißen: in Übereinstimmung mit gewissen Regeln *handeln*. Und schon das wäre ein Heraustreten aus dem bloßen Spiel: wenn er den Schluß zöge, daß er hier der allgemeinen Regel gemäß *so* handeln dürfe.

MS 126, p. 28

2. *Rechnet* die Rechenmaschine?

Denk dir, eine Rechenmaschine wäre durch Zufall entstanden; nun drückt Einer durch Zufall auf ihre Knöpfe (oder ein Tier läuft über sie) und sie rechnet das Produkt 25 x 20. –

Ich will sagen: Es ist der Mathematik wesentlich, daß ihre Zeichen auch *im Zivil* gebraucht werden.

Es ist der Gebrauch

MS 126, p. 30

außerhalb der Mathematik, also die *Bedeutung* der Zeichen, was das Zeichenspiel zur Mathematik macht.

So, wie es ja auch kein logischer Schluß ist, wenn ich ein Gebilde in ein anderes transformiere (eine Anordnung von Stühlen etwa in eine andere), wenn diese Anordnungen nicht außerhalb dieser Transformation einen sprachlichen Gebrauch haben.

3. Aber ist nicht das wahr, daß Einer, der keine Ahnung von der Bedeutung der Russellschen Zeichen hätte, Russells Beweise *nachrechnen* könnte? Und

MS 126, p. 31

also in einem wichtigen Sinne prüfen könnte, ob sie richtig seien oder falsch?

MS 126, p. 32

Man könnte eine mensch-

MS 126, p. 33

Parte V
1942-1944

1. É claro, naturalmente, que o matemático, na medida em que ele realmente 'joga um jogo', não *tira* nenhuma *conclusão*. Pois 'jogar' aqui tem que significar: *agir* em concordância com certas regras. E isto já seria alguma coisa de fora do puro jogo: se ele tirou a conclusão de que poderia agir *assim* de acordo com a regra geral.

MS 126, p. 28

2. A máquina de calcular *calcula*?

Imagine que uma máquina de calcular passasse a existir por acaso; então alguém, por acaso, aperta os seus botões (ou um animal pisa em cima deles), e ela calcula o produto de 25 x 20. –

Quero dizer: É essencial para a matemática que os seus sinais venham a ser usados também *à paisana*.

É o uso

MS 126, p. 30

fora da matemática, portanto o *significado* dos sinais, que torna o jogo de sinais em matemática.

Assim como não é uma inferência lógica se transformo uma estrutura em outra (uma arrumação de cadeiras, por exemplo, em outra), se esta arrumação não tiver um uso linguístico fora desta transformação.[239]

3. Mas não é verdade que alguém que não tivesse nenhuma ideia do significado dos sinais Russellianos pudesse *conferir* as demonstrações de Russell? E que

MS 126, p. 31

portanto, em um sentido importante, pudesse verificar se elas estão corretas ou incorretas?

MS 126, p. 32

Poderíamos adestrar

MS 126, p. 33 [240]

liche Rechenmaschine so abrichten, daß sie, wenn ihr die Schlußregeln gezeigt und etwa an Beispielen vorgeführt wurden, die Beweise eines mathematischen Systems (etwa des Russellschen) durchliest und nach jedem richtig gezogenen Schluß mit dem Kopf nickt, bei einem Fehler aber den Kopf schüttelt und zu rechnen aufhört. Dieses Wesen könnte man sich im übrigen vollkommen idiotisch vorstellen.

Einen Beweis nennen wir etwas, was sich nachrechnen, aber auch kopieren läßt.

MS 126, p. 34

4. Wenn die Mathematik ein Spiel ist, dann ist ein Spiel spielen Mathematik treiben, und warum dann nicht auch: Tanzen?

Denke dir, daß Rechenmaschinen in der Natur vorkämen, ihre Gehäuse aber für die Menschen undurchdringlich wären. Und diese Menschen benützten nun diese Vorrichtungen etwa wie wir das Rechnen, wovon sie aber

MS 126, p. 35

gar nichts wissen. Sie machen also etwa Verhersagungen mit Hilfe der Rechenmaschinen, aber für sie ist das Handhaben dieser seltsamen Gegenstände ein Experimentieren.

Diesen Leuten fehlen Begriffe, die wir haben; aber wodurch sind diese bei ihnen ersetzt? –

Denke an den Mechanismus, dessen Bewegung wir als geometrischen (kinematischen) Beweis ansahen: Das ist klar, daß normalerweise von einem, der das Rad umtreibt, nicht

MS 126, p. 36

gesagt würde, er beweist etwas.

Ist es nicht ebenso mit dem, der zum Spiel Zeichen aneinander reiht und diese Reihen verändert; auch wenn, was er hervorbringt, als Beweis angesehen werden könnte?

Zu sagen, die Mathematik sei ein Spiel, soll heißen: wir brauchen beim Beweisen nirgends an die Bedeutung der Zeichen appellieren, also an ihre außermathematische Anwendung. Aber was heißt es denn überhaupt: an diese appellieren? Wie kann so ein Appell etwas fruchten?

MS 126, p. 37

Heißt das, aus der Mathematik heraustreten und wieder in sie zurückkehren, oder heißt es aus *einer* mathematischen Schlußweise in eine andre treten?

Was heißt es, einen neuen Begriff von der Oberfläche einer Kugel gewinnen? In wiefern

uma máquina de calcular humana de tal forma que, se lhe mostrássemos as regras de inferência e, por exemplo, as tivéssemos apresentado por exemplos, ela lesse as demonstrações de um sistema matemático (por exemplo o de Russell), e, para cada inferência correta, assentisse com a cabeça, mas no erro ela balançasse a cabeça e parasse de calcular. Poderíamos imaginar este ente, aliás, como um completo idiota.

Chamamos de demonstração algo que se pode conferir, mas também copiar.

MS 126, p. 34

4. Se a matemática é um jogo, então jogar um jogo é fazer matemática, e por que também não: dançar?[241]

Imagine que máquinas de calcular aparecessem na natureza, mas o seu invólucro fosse opaco para as pessoas. E que estas pessoas utilizassem estes dispositivos, digamos, tal como nós calculamos, mesmo que elas

MS 126, p. 35

nada soubessem disso. Portanto, elas fariam predições, por exemplo, com a ajuda das máquinas de calcular, mas para elas a manipulação destes estranhos objetos seria uma experimentação.

Para essas pessoas faltam os conceitos que temos; mas pelo que elas os substituiriam? –

Imagine um mecanismo cujo movimento víssemos como demonstração geométrica (cinemática): É claro que normalmente não diríamos de alguém que roda a roda

MS 126, p. 36

que ele está demonstrando alguma coisa.

Não é o mesmo com aquele que ao jogar coloca os sinais em séries e as modifica; mesmo que o que ele produz possa ser visto como uma demonstração?

Dizer que a matemática é um jogo deve significar: não precisamos, ao demonstrar, apelar em lugar nenhum para o significado dos sinais, portanto para a sua aplicação fora da matemática. Mas então o que significa, de todo modo: apelar a isto? Como tal apelo pode ser frutífero?

MS 126, p. 37

Isto significa sair da matemática e retornar a ela de novo, ou isto significa passar de *um* modo de inferência matemático para outro?

O que significa adquirir um novo conceito de superfície de uma esfera? Em que medida isto é então um conceito de superfície de uma *esfera*? Claro que só na medida em que ele possa ist das dann ein Begriff von der Oberfläche einer *Kugel*? Doch nur insofern er sich auf wirkliche Kugeln anwenden läßt.

Wieweit muß man einen Begriff vom ›Satz‹ haben, um die Russellsche mathematische Logik zu verstehen?

MS 126, p. 38

5. Wenn die intendierte Anwendung der Mathematik wesentlich ist, wie steht es da mit Teilen der Mathematik, deren Anwendung – oder doch *das*, was Mathematiker für die Anwendung halten, – gänzlich phantastisch ist? So daß man, wie in der Mengenlehre, einen Zweig der Mathematik treibt, von dessen Anwendung man sich einen ganz falschen Begriff macht. Treibt man nun nicht *doch* Mathematik?

Wenn die arithmetischen Operationen lediglich zur Konstruktion einer Chiffre dienten, wäre ihre Anwendung natürlich grundlegend von der unsern

MS 126, p. 39

verschieden. Wären diese Operationen dann aber überhaupt mathematische Operationen?

Kann man von dem, der eine Regel des Entzifferns anwendet, sagen, er vollziehe mathematische Operationen? Und doch lassen sich seine Umformungen so auffassen. Denn er könnte doch sagen, er berechne, was bei der Entzifferung des Zeichens ... gemäß dem und dem Schlüssel herauskommen müsse. Und der Satz: daß die Zeichen ... dieser Regel gemäß entziffert ... ergeben,

MS 126, p. 40

ist ein mathematischer. Sowie auch der Satz: daß man beim Schachspiel von *dieser* Stellung zu jener kommen kann.

Denke dir die Geometrie des vierdimensionalen Raums zu dem Zweck betrieben, die Lebensbedingungen der Geister kennen zu lernen. Ist sie darum nicht Mathematik? Und kann ich nun sagen, sie bestimme Begriffe?

Würde es nicht seltsam klingen, von einem Kinde zu sagen, es könne bereits tausende und tausende von

MS 126, p. 41

Multiplikationen machen – womit nämlich gemeint sein soll, es könne bereits im unbegrenzten Zahlenraum rechnen. Und zwar könnte das noch als eine äußerst bescheidene Ausdrucksweise gelten, da er nur ›tausende und tausende‹ statt ›unendlich viele‹ sagt.

ser aplicado a esferas reais.

Até que ponto temos que dispor de um conceito de ‘proposição’ para compreender a lógica matemática de Russell?

MS 126, p. 38

5. Se a aplicação pretendida da matemática é essencial, como ficaria isto com as partes da matemática cuja aplicação – ou *disto* que o matemático toma como aplicação – seja inteiramente fantástica? De modo que se estimula, tal como na teoria dos conjuntos, um ramo da matemática sobre cuja aplicação se forma uma noção totalmente falsa. Não se faz matemática, *afinal*?

Se as operações aritméticas só servissem para a construção de uma cifra, a sua aplicação seria por certo fundamentalmente diferente

MS 126, p. 39

da nossa. Mas então estas operações seriam, de todo modo, operações matemáticas?

Pode-se dizer daquele que emprega uma regra de decifração que executa operações matemáticas? E, no entanto, permite-se conceber assim suas transformações. Pois ele poderia dizer que calcula o que teria que resultar da decifração do sinal ... de acordo com tal e tal chave . E a proposição: de que os sinais ..., decifrados de acordo com esta regra, geram ...,

MS 126, p. 40

é matemática. Tanto quanto a proposição: de que se pode passar *desta* posição para aquela no jogo de xadrez.

Imagine a geometria do espaço quadridimensional seja praticada para se chegar a conhecer as condições de vida dos espíritos. Ela não seria, por isto, matemática? E eu poderia agora dizer que ela determina conceitos?

Não iria parecer estranho dizer que uma criança já poderia fazer milhares e milhares de

MS 126, p. 41

multiplicações – de modo que isto deveria querer dizer que ela já poderia calcular num domínio de números ilimitados. Mais precisamente, isto poderia apenas ser uma forma extremamente modesta de expressão, pois ele só disse ‘milhares e milhares’, em vez de ‘infinitas vezes’.

Pode-se imaginar pessoas que na sua vida cotidiana só calculem, por exemplo, até 1000, e tenham reservado os cálculos com números maiores para as investigações matemáticas sobre

Könnte man sich Menschen denken, die im gewöhnlichen Leben etwa nur bis 1000 rechnen und die Rechnungen mit höheren Zahlen zu mathematischen Untersuchungen über die Geisterwelt vorbehalten haben?

MS 126, p. 42

»Ob das nun von einer *wirklichen* Kugelfläche gilt – von der mathe-

MS 126, p. 45

matischen gilt es« – das erweckt den Anschein, als unterschiede sich der mathematische Satz von einem Erfahrungssatz insbesondere darin, daß wo die Wahrheit des Erfahrungssatzes schwankend und ungefähr ist, der mathematische Satz *sein* Objekt exakt und unbedingt wahr beschreibt. Als wäre eben die ›mathematische Kugel‹ eine Kugel. Und man könnte sich etwa fragen ob es nur *eine* solche Kugel, oder ob es mehrere gebe (eine Fregesche Fragestellung).

Tut ein Mißverständnis, die mögliche Anwendung

MS 126, p. 46

betreffend, der Rechnung als einem Teil der Mathematik Eintrag?

Und abgesehen von einem Mißverständnis, – wie ist es mit der bloßen Unklarheit?

Wer glaubt, die Mathematiker haben ein seltsames Wesen, die √(-1), entdeckt, die quadriert nun doch -1 ergebe, kann der nicht doch ganz gut mit komplexen Zahlen rechnen und solche Rechnungen in der Physik anwenden? Und sind's darum weniger *Rechnungen*?

In *einer* Beziehung steht freilich sein Verständnis auf schwachen Füßen; aber

MS 126, p. 47

er wird mit Sicherheit seine Schlüsse ziehen, und sein Kalkül wird auf *festen* Füßen stehen.

Wäre es nun nicht lächerlich, zu sagen, dieser triebe nicht Mathematik?

Es erweitert Einer die Mathematik, gibt neue Definitionen und findet neue Lehrsätze — und in *gewisser* Beziehung kann man sagen, er wisse nicht was er tut. – Er hat eine vage Vorstellung, etwas *entdeckt* zu haben wie einen Raum (wobei er an ein Zimmer

MS 126, p. 48

denkt), ein Reich erschlossen zu haben, und würde, darüber gefragt, viel Unsinn reden.

Denken wir uns den primitiven Fall, daß Einer ungeheure Multiplikationen ausführte um, wie er sagt: dadurch neue riesige Provinzen des Zahlenreichs zu gewinnen.

o mundo dos espíritos?

MS 126, p. 42

"Bem, se isto é válido para uma superfície esférica *real*, – então é válido para

MS 126, p. 45

a matemática" – isto suscita a aparência de que a proposição matemática se diferencia particularmente da proposição empírica pelo fato de que enquanto a verdade da proposição empírica é oscilante e aproximativa, a proposição matemática descreve *seu* objeto de maneira exata e incondicionalmente verdadeira. Como se a 'esfera matemática' fosse uma esfera. E alguém poderia se perguntar, por exemplo, se só há *uma* esfera assim, ou se há várias (uma questão fregeana).

Um mal-entendido em relação à possível

MS 126, p. 46

aplicação do cálculo é prejudicial como uma parte da matemática?

E afora o mal-entendido, – como seria a mera falta de clareza?

Quem acredita que os matemáticos que descobriram um ente estranho, a √(-1) cujo quadrado agora vai dar -1, não pode então calcular muito bem com números complexos e aplicar estes cálculos na física? E eles são, por isto, *cálculos* menores?

Por *um* lado, a sua compreensão repousa sobre bases frágeis; mas

MS 126, p. 47

ele vai tirar suas conclusões com segurança, e o seu cálculo vai repousar sobre bases *firmes*.

Não seria, então, ridículo dizer que ele não está fazendo matemática?

Alguém amplia a matemática, dá novas definições e encontra novos teoremas — e de *certa* maneira pode-se dizer que ele não sabe o que faz. – Ele tem uma vaga ideia de haver *descoberto* algo como um espaço (que ele imagina ser

MS 126, p. 48

um salão), de haver disponibilizado um reino, e, quando indagado sobre isto, falaria um monte de bobagens.

Imaginemos o caso primitivo de alguém que efetuou multiplicações extraordinárias para, como ele diz: assim conquistar imensas e novas províncias do reino dos números.

Denk dir das Rechnen mit der √(-1) wäre von einem Narren erfunden worden, der, bloß vom Paradoxen der Idee angezogen, die Rechnung als eine Art Gottes- oder Tempeldienst des Absurden treibt. Er bildet sich ein,

MS 126, p. 49

das Unmögliche aufzuschreiben und mit ihm zu operieren.

Mit andern Worten: Wer an die mathematischen *Gegenstände* glaubt, und ihre seltsamen Eigenschaften, – kann der nicht doch Mathematik betreiben? Oder: – treibt der nicht auch Mathematik?

›Idealer Gegenstand.‹ »Das Zeichen ›a‹ bezeichnet einen idealen Gegenstand« soll offenbar etwas über die Bedeutung, also den Gebrauch von ›a‹ aussagen. Und es heißt natürlich, daß dieser Gebrauch in gewisser Beziehung ähnlich ist dem eines

MS 126, p. 50

Zeichens, das einen Gegenstand hat, und daß es keinen Gegenstand bezeichnet. Es ist aber interessant, was der Ausdruck ›idealer Gegenstand‹ aus diesem Faktum macht.

6. Man könnte unter Umständen von einer endlosen Kugelreihe reden. – Denken wir uns eine solche gerade, endlose Reihe von Kugeln in gleichen Abständen und wir berechnen die Kraft, die alle diese Kugeln

MS 126, p. 51

nach einem bestimmten Attraktionsgesetz auf einen bestimmten Körper ausüben. Die Zahl, die diese Rechnung liefert, betrachten wir als das Ideal der Genauigkeit für gewisse Messungen.

Das Gefühl des *Seltsamen* kommt hier von einem Mißverständnis. Der Art von Mißverständnis, die ein Daumenfangen des Verstandes erzeugt – und dem ich Einhalt gebieten will.

Der Einwand, daß ›das Endliche nicht das Unendliche erfassen kann‹ richtet sich *eigentlich* gegen die Idee eines

MS 126, p. 52

psychologischen Aktes des Erfassens oder Verstehens.

Oder denke dir, wir sagen einfach: »Diese Kraft entspricht der Anziehung einer endlosen Kugelreihe, die so und so angeordnet sind und den Körper nach diesem Attraktionsgesetz anziehen«. Oder wieder: »Berechne die Kraft, die eine endlose Kugelreihe, von der und der Beschaffenheit, auf einen Körper ausübt!« – Dieser Befehl hat doch gewiß Sinn. Eine bestimmte

Imagine que o cálculo com a √(-1) tivesse sido descoberto por um tolo que, atraído meramente pelos paradoxos da ideia, faz o cálculo como um tipo de ritual divino ou templário do absurdo. Ele imagina

MS 126, p. 49

anotar o impossível e operar com ele.

Em outras palavras: Quem acredita em *objetos* matemáticos e suas estranhas propriedades, – não pode fazer matemática? Ou: – ele também não faz matemática?

‘Objeto ideal’. “O sinal ‘a’ designa um objeto ideal” deve expressar evidentemente algo sobre o significado, portanto o uso, de ‘a’. E isto, naturalmente, significa que este uso é de certa forma similar ao de um

MS 126, p. 50

sinal que tem um objeto e que não designa nenhum objeto. Mas é interessante o que a expressão ‘objeto ideal’ faz deste fato.[242]

6. Sob certas circunstâncias pode-se falar de uma série infindável de esferas. – Imaginemos uma linha deste tipo, reta e infindável de esferas em distâncias equivalentes, e calculemos a força que todas estas esferas exercem,

MS 126, p. 51

segundo uma determinada lei de atração, em um determinado corpo. Nós consideramos o número fornecido por este cálculo como o ideal de exatidão para certas medidas.

O sentimento de *estranheza* provém aqui de um mal-entendido. O tipo de mal-entendido que produz uma travação no intelecto – e que eu quero fazer cessar.

A objeção de que ‘o finito não pode abarcar o infinito’ se dirige *propriamente* contra a ideia de um

MS 126, p. 52

ato psicológico do abarcamento ou da compreensão.

Ou imagine que nós disséssemos simplesmente: “Esta força corresponde à atração de uma série infinita de esferas que estão ordenadas assim e assim, e que atraem os corpos segundo esta lei de atração”. Ou então: “Calcule a força que uma série infinita de esferas de tais e tais características exerce sobre um corpo!” – Esta ordem com certeza tem sentido. Um determina-

Rechnung ist beschrieben.

MS 126, p. 53

Wie wäre es mit dieser Aufgabe: »Berechne das Gewicht einer Säule von so vielen aufeinanderliegenden Platten, als es Kardinalzahlen gibt; die unterste Platte wiegt 1 kg, jede höhere immer die Hälfte der vorhergehenden.«

Die Schwierigkeit ist *nicht* die, daß wir uns keine Vorstellung machen können. Es ist leicht genug sich irgend eine Vorstellung einer unendlichen Reihe, z. B., zu machen. Es fragt sich: was nützt uns die Vorstellung.

Denke dir unendliche Zahlen in einem Märchen

MS 126, p. 54

gebraucht. Die Zwerge haben soviele Goldstücke aufeinander getürmt als es Kardinalzahlen gibt – etc. Was in diesem Märchen vorkommen kann, muß doch Sinn haben. –

7. Denke dir die Mengenlehre wäre als eine Art Parodie auf die Mathematik von einem Satirik er erfunden worden. – Später hätte man dann einen vernünftigen Sinn gesehen und sie in die Mathematik einbezogen. (Denn wenn der eine sie als das Paradies der Mathematiker ansehen kann, warum nicht ein andrer als einen Scherz?)

Die Frage ist: ist sie nun

MS 126, p. 55

als Scherz nicht auch offenbar Mathematik? –

Und warum ist sie offenbar Mathematik? – Weil sie ein Zeichenspiel nach Regeln ist?

Werden hier nicht doch offenbar Begriffe gebildet – auch wenn man sich über deren Anwendung nicht im Klaren ist?

Aber wie kann man einen Begriff haben und sich über seine Anwendung nicht klar sein?

8. Nimm die Konstruktion des Kräftepolygons: ist das nicht ein Stück

MS 126, p. 56

angewandte Mathematik? und wo ist der Satz der *reinen* Mathematik der bei dieser graphischen Berechnung zu Hülfe genommen wird ? Ist dies nicht ein Fall wie der des Stammes, welcher eine rechnerische Technik zum Zweck gewisser Vorhersagungen hat, aber keine Sätze der reinen Mathematik?

do cálculo foi descrito.

MS 126, p. 53

O que aconteceria com esta tarefa: “Calcule o peso de uma coluna composta com tantos palacas sobrepostas quanto o número de números cardinais; a placa mais baixa pesa 1 kg, e cada uma superior pesa sempre a metade da anterior.”

A dificuldade *não* é a de que não podemos fazer nenhuma ideia disto. É bastante fácil, por exemplo, fazer alguma ideia de uma série infinita. O que se pergunta é: de que nos serve esta ideia.

Imagine o uso de números infinitos em um conto

MS 126, p. 54

de fadas. Os anões empilharam sobrepostas tantas pepitas de ouro quanto o número de números cardinais – etc. O que pode acontecer neste conto de fadas tem que fazer pleno sentido. –

7. Imagine que a teoria dos conjuntos tivesse sido inventada por um satírico como uma espécie de paródia sobre a matemática. – Mais tarde alguém teria visto nela um sentido razoável e a teria incluído na matemática. (Pois se alguém pode vê-la como paraíso da matemática, por que não um outro como uma bricadeira?).[243]

A questão é: ela agora,

MS 126, p. 55

como brincadeira, não é também manifestamente matemática? –

E por que é manifestamente matemática? – Porque é um jogo de sinais segundo regras?

Não há aqui, manifestamente, conceitos formados? – mesmo que não esteja clara qual seria sua aplicação?

Mas como se pode ter um conceito e sua aplicação não ser clara?

8. Tome a construção de um polígono de forças: isto não é um capítulo

MS 126, p. 56

da matemática aplicada? E onde está a proposição da matemática *pura* que serve de ajuda para este cálculo gráfico? Não é este caso como o da tribo que tem uma técnica de cálculo com o objetivo de fazer certas previsões, mas sem nenhuma proposição da matemática pura?

Die Rechnung, die zur Ausführung einer Zeremonie dient. Es werde z. B. nach einer bestimmten Technik aus dem Alter des Vaters und der Mutter und der Anzahl ihrer Kinder die Anzahl der Worte einer Segensformel abgeleitet, die auf das Haus der Familie anzu-

MS 126, p. 57

wenden ist. In einem Gesetz wie dem Mosaischen könnte man sich Rechenvorgänge beschrieben denken. Und könnte man sich nicht denken, daß das Volk, das diese zeremoniellen Rechenvorschriften besitzt, im praktischen Leben nie rechnet?

Dies wäre zwar ein *angewandtes* Rechnen, aber es würde nicht dem Zwecke einer Vorhersage dienen.

Wäre es ein Wunder, wenn die Technik des Rechnens eine Familie von Anwendungen hätte?!

9. Wie seltsam die Frage

MS 126, p. 58

ist, ob in der unendlichen Entwicklung von π die Figur φ (eine gewisse Anordnung von Ziffern, z. B. ›770‹) vorkommen wird, sieht man erst, wenn man die Frage in einer ganz hausbackenen Weise zu stellen versucht: Menschen sind darauf abgerichtet worden, nach gewissen Regeln Zeichen zu setzen. Sie verfahren nun dieser Abrichtung gemäß und wir sagen es sei ein Problem, ob sie der gegebenen Regel folgend *jemals* die Figur φ anschreiben werden.

MS 126, p. 59

Was aber sagt der, der sagt, eines sei klar: man werde oder werde nicht, in der endlosen Entwicklung auf φ kommen?

Mir scheint, wer dies sagt, stellt schon selbst eine Regel, oder ein Postulat auf.

Wie, wenn man auf eine Frage hin erwiderte: ›Auf diese Frage gibt es bis jetzt noch keine Antwort‹?

So könnte etwa der Dichter antworten, der gefragt wird, ob der Held seiner Dichtung

MS 126, p. 60

eine Schwester hat oder nicht – wenn er nämlich noch nicht darüber entschieden hat.

Die Frage – will ich sagen – verändert ihren Status, wenn sie entscheidbar wird. Denn ein Zusammenhang wird dann gemacht, der früher nicht *da war*.

O cálculo que serve para a execução de uma cerimônia. Segundo uma determinada técnica, por exemplo, a quantidade de palavras de uma fórmula de bendição que se aplica sobre a casa da família, é derivado da idade do pai e da mãe e do número

MS 126, p. 57

dos seus filhos. Numa lei como a mosaica pode-se imaginar a descrição de procedimentos de cálculo. E não se pode imaginar que o povo que possui estes preceitos cerimoniais de contagem nunca calcula na vida prática?

Mesmo que isto seja um cálculo *aplicado*, não serviria para as finalidades de uma predição.

Seria surpreendente se a técnica de cálculo tivesse uma família de aplicações?!

9. Só se vê como é estranha

MS 126, p. 58

a pergunta se ocorre na expansão infinita de π a figura φ (uma certa disposição de algarismos, por exemplo ‘770’), quando se a tenta formular de uma maneira totalmente corriqueira: as pessoas foram adestradas para colocar sinais segundo certas regras. Elas procedem agora em conformidade com este adestramento, e nós dizemos que seria um problema se elas, ao seguir a regra dada, *algum dia* escrevem a figura φ.

MS 126, p. 59

Mas o que diz quem diz que uma coisa é clara: na expansão infinita chega-se ou não se chega a φ?

Parece-me que quem diz isso já estabelece por si mesmo uma regra ou um postulado.

E se se replicasse assim a uma pergunta: ‘Não há até agora nenhuma resposta para esta pergunta’?

O poeta poderia responder assim, por exemplo, a quem lhe perguntasse se o herói do seu poema

MS 126, p. 60

tem ou não tem uma irmã – se ele particularmente ainda não houvesse se decidido a respeito.

A pergunta – eu diria – muda o seu status quando se torna decidível. Pois então se forma uma conexão que antes não *estava ali*.

Man kann von dem Abgerichteten fragen: ›Wie *wird* er die Regel für diesen Fall deuten?‹, oder auch ›wie *soll* er die Regel für diesen Fall deuten?‹ Wie aber, wenn über diese Frage keine Entscheidung getroffen wurde? – Nun, dann

MS 126, p. 61

ist die Antwort nicht: ›er soll sie so deuten, daß φ in der Entwicklung vorkommt‹ oder: ›er soll sie so deuten, daß es nicht vorkommt‹, sondern, ›darüber ist noch nichts entschieden‹.

MS 126, p. 62

So seltsam es klingt, die Weiterentwicklung einer irrationalen Zahl

MS 126, p. 133

ist eine Weiterentwicklung der Mathematik.

MS 126, p. 134

Wir mathematisieren mit den Begriffen. – Und mit gewissen Begriffen mehr als mit andern.

Ich will sagen: Es *scheint*, als ob ein Entscheidungsgrund bereits vorläge; und er muß erst erfunden werden.

MS 126, p. 62

Käme das darauf hinaus, zu sagen: Man benutzt beim Denken über die gelernte Technik des Entwickelns das falsche Bild einer vollendeten Entwicklung (dessen, was man für gewöhnlich »Reihe« nennt) und wird dadurch gezwungen unbeantwortbare Fragen zu stellen?

Denn schließlich müßte sich doch jede Frage über die Entwicklung von √2 auf eine praktische Frage, die Technik des Entwickelns betreffend, bringen lassen.

MS 126, p. 63

Und es handelt sich hier natürlich nicht nur um den Fall der Entwicklung einer reellen Zahl oder überhaupt die Erzeugung mathematischer Zeichen, sondern um jeden analogen Vorgang, er *sei* ein Spiel, ein Tanz, etc., etc.

10. Wenn Einer uns den Satz vom ausgeschlossenen Dritten einhämmert, dem nicht zu entgehen sei, – so ist klar, daß mit seiner Frage etwas nicht in Ordnung ist.

MS 126, p. 64

Pode-se perguntar a respeito da pessoa adestrada: ‘Como ela *vai* interpretar a regra para este caso?’, ou ‘Como ela *deve* interpretar a regra para este caso?’. Mas e se não se toma nenhuma decisão a respeito desta pergunta? – Bem, então

MS 126, p. 61

a resposta não é: ‘Ela deve interpretá-la de tal modo que φ ocorra na expansão’, ou: ‘Ela deve interpretá-la de tal modo que isto não ocorra’, senão: ‘Sobre isto não há nada ainda decidido’.

MS 126, p. 62

Por mais estranho que soe, a expansão posterior de um número irracional

MS 126, p. 133

é uma expansão posterior da matemática.

MS 126, p. 134 [244]

Nós matematizamos com conceitos. – E com certos conceitos mais do que com outros.

Eu diria: *Parece* como se já estivesse ali presente uma base para a decisão; e ele ainda tem que ser inventada.

MS 126, p. 62

Isso redundaria em dizer: Utiliza-se, ao se pensar sobre a técnica aprendida da expansão, a falsa imagem de uma expansão completa (aquilo que habitualmente chamamos de “série”) e nos forçamos, assim, a formular questões irrespondíveis?

Pois, afinal de contas, todas as questões sobre a expansão da √2 teriam que poder ser reduzidas a uma questão prática relacionada à técnica da expansão.

MS 126, p. 63

E não se trata só aqui, naturalmente, do caso da expansão de um número real ou em geral da geração de sinais matemáticos, mas de todos os processos análogos, *seja* ele um jogo, uma dança etc., etc.

10. Se alguém repisa que não se pode escapar da proposição do terceiro excluído, – então está claro que alguma coisa não está em ordem com a sua questão.

MS 126, p. 64

Wenn einer den Satz vom ausgeschlossenen Dritten aufstellt, so legt er uns gleichsam zwei Bilder zur Auswahl vor und sagt, eins müsse der Tatsache entsprechen. Wie aber wenn es fraglich ist, ob sich die Bilder hier anwenden lassen?

Und wer da von der endlosen Entwicklung sagt, sie müsse die Figur φ enthalten oder sie nicht enthalten, zeigt uns sozusa-

MS 126, p. 65

gen das Bild einer in die Ferne verlaufenden unübersehbaren Reihe.

Wie aber, wenn das Bild in weiter Ferne zu flimmern anfinge?

11. Von einer unendlichen Reihe zu sagen, sie enthielte eine bestimmte Figur *nicht*, hat nur unter ganz speziellen Bedingungen Sinn.

Das heißt: Man hat diesem Satz für gewisse Fälle Sinn gegeben.

Ungefähr den: Es ist im *Gesetz* dieser Reihe, keine Figur .... zu enthalten.

MS 126, p. 66

Ferner: So wie ich die Entwicklung weiterrechne, leite ich neue Gesetze ab, denen die Reihe folgt.

»Nun gut, – so können wir sagen: ›Es muß entweder im Gesetz der Reihe liegen, daß die Figur vorkommt, oder das Gegenteil‹.« Aber ist das so? – »Nun, *determiniert* das Entwicklungsgesetz die Reihe denn nicht vollkommen?

MS 126, p. 67

Und wenn es das tut, keine Zweideutigkeiten läßt, dann muß es, implizite *alle* Fragen die Struktur der Reihe betreffend entscheiden.« – Du denkst da an die endlichen Reihen.

»Aber es sind doch alle Glieder der Reihe vom 1sten bis zum 100sten, bis zum 1010-ten und so fort, bestimmt; also sind doch *alle* Glieder bestimmt.« Das ist richtig, wenn es heißen soll, es sei nicht

MS 126, p. 68

etwa das so-und-so-vielte *nicht* bestimmt. Aber du siehst ja, daß *das* dir keinen Aufschluß darüber gibt, ob eine Figur in der Reihe erscheinen wird (wenn sie soweit nicht erschienen ist). *Wir sehen also*, daß wir ein irreführendes *Bild* gebrauchen.

Se alguém estabelece a proposição do terceiro excluído, nos apresenta, por assim dizer, duas imagens para nossa escolha, e diz que uma delas teria que corresponder aos fatos. Mas e se for questionável se as imagens podem ser aplicadas aqui?

E quem diz da expansão infinita que ela teria que conter ou não conter a figura φ, nos mostra, por assim

MS 126, p. 65

dizer, a imagem de uma série inabarcável correndo à distância.

Mas e se a imagem começasse a tremular a uma longa distância?

11. Dizer de uma série infinita que ela não *contém* uma determinada figura, só tem sentido sob condições totalmente especiais.

Isto significa: Dá-se sentido a esta proposição para certos casos.

Aproximadamente: Está na *lei* desta série não conter nenhuma figura ....

MS 126, p. 66

Além disso: Na medida em que continuo a calcular na expansão, deduzo novas leis que são obedecidas pela série.

"Pois bem, – então podemos dizer assim: 'Tem que estar na lei da série a ocorrência da figura, ou o contrário'." Mas isto é assim mesmo? – "Ora, a lei da expansão não *determina* completamente a série?

MS 126, p. 67

E se é assim que acontece, se não cabe nenhuma ambiguidade, então tem que decidir implicitamente *todas* as questões relacionadas à estrutura da série." – Você está pensando aqui nas séries finitas.

"Mas todos os membros da série, do primeiro até o centésimo, até o que está na ordem 1010, e assim por diante, estão determinados; portanto, *todos* os membros estão determinados." Isto é correto quando se deve significar que não é o caso,

MS 126, p. 68

por exemplo, de que o enésimo tal e tal *não* esteja determinado. Mas você já vê que *isto* não vai te dar nenhuma informação sobre o aparecimento de uma figura na série (se ela não apareceu até aqui). *Vemos, portanto*, que usamos uma *imagem* enganosa.

Willst du mehr über die Reihe wissen, so mußt du, sozusagen in eine andere Dimension (gleichsam wie aus der Linie in eine sie umgebende Ebene) gehen. – Aber ist die Ebene nicht eben da, so wie die Linie, und nur zu *erforschen*, wenn man wissen will, wie es sich verhält?

MS 126, p. 69

Nein, die Mathematik dieser weitern Dimension muß so gut erfunden werden, wie jede Mathematik.

In einer Arithmetik, in der man nicht weiter als 5 zählt, hat die Frage, wieviel 4 + 3 ist, noch keinen Sinn. Wohl aber kann das Problem existieren, dieser Frage einen Sinn zu geben. Das heißt: die Frage hat *so wenig* Sinn, wie der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, auf sie angewendet.

12. Man meint in dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten schon etwas

MS 126, p. 70

Festes zu haben, was jedenfalls nicht in Zweifel zu ziehen ist. Während in Wahrheit diese Tautologie einen ebenso schwankenden Sinn (wenn ich so sagen darf) hat, wie die Frage, ob p oder ~ p der Fall ist.

Denke, ich fragte: Was meint man damit »die Figur .... kommt in dieser

MS 126, p. 71

Entwicklung vor«? So wird man antworten: »Du *weißt* doch was das heißt. Sie kommt vor, wie die Figur ... in der Entwicklung tatsächlich vorkommt« – Also *so* kommt sie vor? – Aber *wie* ist das?

Denke dir, man sagte: »Entweder sie kommt

MS 126, p. 72

so vor, oder sie kommt nicht so vor«!

»Aber verstehst du denn wirklich nicht, was gemeint ist?!« – Aber kann ich nicht glauben, ich verstehe es, und mich irren? –

Wie weiß ich denn, was es heißt: die Figur .... komme in der Entwicklung vor? Doch durch Beispiele – die mir zeigen, wie das ist, wenn .... . Diese Beispiele zeigen mir aber nicht, wie es ist, wenn die Figur in der Entwicklung *nicht* vorkommt!

Könnte man nicht sagen: Wenn ich wirklich ein

MS 126, p. 73

Se você quiser saber mais sobre a série, você teria que, por assim dizer, ir para uma outra dimensão (como se fosse da linha para o seu plano envolvente). – Mas não está o plano justamente ali, assim como a linha, e só para ser *pesquisado* quando se quer saber como são os fatos?

MS 126, p. 69

Não, a matemática desta outra dimensão tem que ser inventada, assim como qualquer matemática.

Numa aritmética em que não se conta mais do que 5, a questão de quanto é 4 + 3 ainda não tem sentido. Mas o problema pode muito bem existir para dar um sentido a esta questão. Isto significa: a pergunta tem *tão pouco* sentido quanto a proposição do terceiro excluído aplicada a ela.

12. Pretende-se já ter na proposição do terceiro excluído algo

MS 126, p. 70

firme, que não se pode em nenhum caso colocar em dúvida. Enquanto que, na verdade, esta tautologia tem um sentido tão vacilante (se posso dizer assim) quanto a questão de se p ou ~ p é o caso.

Imagine que eu perguntasse: O que se quer dizer com “A figura .... ocorre

MS 126, p. 71

nesta expansão”? Então se responderia: “Você *sabe* o que significa, não? Ela ocorre como de fato a figura .... ocorre na expansão” – Então ela ocorre *assim*? – Mas *como* seria isto?

Imagine que se dissesse: “Ou ela ocorre

MS 126, p. 72

assim ou ela não ocorre assim”!

“Mas você então não compreende realmente o que se quis dizer?!” – Mas não posso acreditar que compreendo e me equivocar? –

Como fico sabendo então o que significa: a figura .... ocorre na expansão? Por exemplos, de todo modo – que me mostram como é que é quando .... . Mas estes exemplos não me mostram como é que é quando a figura *não*[245] ocorre na expansão!

Não se poderia dizer: Se eu realmente tivesse

MS 126, p. 73

Recht hätte zu sagen, diese Beispiele lehren mich, wie es ist, wenn die Figur in der Entwicklung vorkommt, so müßten sie mir auch zeigen, was das Gegenteil des Satzes bedeutet.

13. Der allgemeine Satz, die Figur kommt in der Entwicklung nicht vor, kann nur ein *Gebot* sein.

Wie wenn man die mathematischen Sätze als Gebote ansieht und sie auch als solche ausspricht? »252 gebe 625«.

Nun – ein Gebot hat eine innere und eine äußere Verneinung.

MS 126, p. 74

Die Symbole »(x).φx« und »(∃x).φx« sind wohl nützlich in der Mathematik, wenn man im übrigen die Technik der Beweise der Existenz oder Nicht-Existenz kennt, auf den sich die Russellschen Zeichen *hier* beziehen. Wird dies aber offen gelassen, so sind diese Begriffe der alten Logik äußerst irreführend.

Wenn Einer sagt: »Aber du weißt doch was ›die Figur kommt in der Entwicklung vor‹ bedeutet, nämlich *das*« – und zeigt auf einen Fall des Vorkommens, – so kann

MS 126, p. 75

ich nur erwidern, daß was er mir zeigt, *verschiedene* Fakten illustrieren kann. Man kann daher nicht sagen, ich wisse was der Satz heißt, weil ich weiß, daß er ihn in diesem Fall gewiß anwenden wird.

Das Gegenteil von »es besteht ein Gesetz, daß p« ist nicht: »es besteht ein Gesetz, daß ~ p«. Drückt man aber das erste durch P, das andere durch ~ P aus, so wird man in Schwierigkeiten geraten.

14. Wie, wenn den Kindern beigebracht wird, die

MS 126, p. 76

Erde sei eine unendliche Ebene; oder Gott habe eine unendliche Reihe von Sternen geschaffen; oder ein Stern fliege in einer geraden Linie gleichförmig immer weiter und weiter ohne je aufzuhören.

Seltsam: wenn man so etwas als selbstverständlich, gleichsam ganz ruhig, aufnimmt, so verliert es alles Paradoxe. Es ist als sagte mir jemand: Beruhige dich, diese Reihe oder Bewegung läuft fort ohne je aufzuhören. Wir sind sozusagen der Mühe überhoben an ein Ende zu denken.

MS 126, p. 77

direito de dizer que estes exemplos me ensinam como seria se a figura ocorresse na expansão, então eles teriam que me mostrar também o que significa o contrário da proposição.

13. A proposição universal de que a figura não ocorre na expansão só pode ser uma *injunção*.

Como seria se víssemos as proposições matemáticas como injunções e as expressássemos como tais? “Que 252 dê 625”.

Ora, – uma injunção tem uma negação interna e uma externa.

MS 126, p. 74

Os símbolos “(x).φx” e “(∃x).φx” são bastante úteis na matemática se, de resto, se conhece a técnica da demonstração de existência e de não existência a que os sinais Russellianos *aqui* se referem. Mas se isto for deixado em aberto, estes conceitos da velha lógica ficam extremamente enganosos.

Se alguém diz: “Mas você sabe o que significa ‘a figura ocorre na expansão’, certo? Ou seja, *isto*” – e mostra um caso da ocorrência, – então eu só

MS 126, p. 75

posso replicar que o que ele me mostra pode ilustrar fatos *diferentes*. Não se pode dizer por isto que sei o que a proposição significa, porque sei que ela certamente será aplicada neste caso.

O contrário de “Existe uma lei de que p” não é: “Existe uma lei de que ~ p”. Mas se expressamos o primeiro mediante p e o segundo por ~p, então nos meteremos em dificuldades.

14. Como seria se as crianças fossem ensinadas que a

MS 126, p. 76

terra é um plano infinito; ou que Deus teria criado uma série infinita de estrelas; ou que uma estrela voa uniformemente, e cada vez mais e mais longe, em linha reta sem jamais parar.

Estranho: se se aceita algo assim como evidente, como se estivesse tudo tranquilo, então se desfaz todo o paradoxo. Seria como se alguém me dissesse: Fique tranquilo, esta série ou movimento avança jamais parar. Nós estaríamos, por assim dizer, dispensados do esforço de pensar em um fim.

MS 126, p. 77

›Wir werden ein Ende nicht in Betracht ziehen‹ (we won't bother about an end).

Man könnte auch sagen: ›für uns ist die Reihe endlos‹.

›Wir werden uns um ein Ende der Reihe nicht bekümmern; für uns ist es immer unabsehbar.‹

15. Man kann die rationalen Zahlen nicht

MS 126, p. 78

abzählen, weil man sie nicht zählen kann, aber man kann mittels der rationalen Zahlen zählen – so nämlich wie mit den Kardinalzahlen. Die schielende Ausdrucksweise gehört mit zu dem ganzen System der Vorspiegelung, daß wir mit dem neuen Apparat die unendlichen Mengen mit der gleichen Sicherheit behandeln, wie bis dahin nur die endlichen.

MS 126, p. 79

›Abzählbar‹ dürfte es nicht heißen, dagegen hätte es Sinn zu sagen ›numerierbar‹. Und dieser Ausdruck läßt auch eine Anwendung des Begriffs erkennen.

MS 126, p. 116

Denn man kann zwar die rationalen Zahlen nicht abzählen wollen, wohl aber kann man ihnen Nummern zulegen wollen.

MS 126, p. 117

Aber wo ist hier das Problem? Warum soll ich nicht sagen, was wir Mathematik nennen sei eine Familie von Tätigkeiten zu einer Familie von Zwecken?

MS 126, p. 79

Die Menschen könnten z. B. Rechnungen zum Zweck einer Art von Wettrennen gebrauchen. Wie Kinder ja manchmal um die Wette rechnen; nur, daß diese Verwendung bei uns eine ganz untergeordnete Rolle spielt.

Oder das Multiplizieren könnte uns viel schwerer fallen, als es tut – wenn wir z. B. nur mündlich rechneten, und um uns eine Multiplikation zu merken, sie also zu erfassen, wäre es nötig, sie in die Form eines gereimten Gedichts zu bringen. Wäre

MS 126, p. 80

dies dann einem Menschen gelungen, so hätte er das Gefühl, eine große, wunderbare Wahrheit

'Não levaremos em consideração um fim' (we won't bother about an end).

Pode-se também dizer: 'a série é para nós infinita'.

'Não vamos nos molestar acerca de um fim de uma série; para nós ela é sempre inabarcável.'

15. [246] Não se pode *enumerar* os números

MS 126, p. 78

racionais porque não se pode contá-los, mas pode-se contá-los por meio dos números racionais – tal como no caso dos números cardinais. A estrábica forma de expressão faz parte de todo o sistema de impostura pelo qual, com o novo aparato, lidamos com conjuntos infinitos com a mesma segurança que até aqui só fazíamos com os conjuntos finitos.

MS 126, p. 79

Não deveria se chamar de 'enumerável' em contraposição ao que tivesse sentido dizer 'numerável'. E esta expressão permite também reconhecer uma aplicação do conceito.

MS 126, p. 116 [247]

Pois mesmo que se possa querer não enumerar os números racionais, pode-se bem querer acrecentar-lhes números.

MS 126, p. 117

Mas onde está aqui o problema? Por que não devo dizer que o que chamamos de matemática é uma família de atividades para uma família de propósitos?

MS 126, p. 79

As pessoas poderiam, por exemplo, usar os cálculos com o propósito de fazer um tipo de competição. Como as crianças muitas vezes brincam de calcular; só que este emprego desempenha para nós um papel totalmente subalterno.

Ou a multiplicação poderia ser muito mais difícil para nós do que realmente é – se nós, por exemplo, só calculássemos oralmente, e para memorizar uma multiplicação, para apreendê-la, seria preciso evocá-la na forma de um poema rimado. Se uma

MS 126, p. 80

pessoa, então, tivesse conseguido fazer isto, ela teria o sentimento de haver descoberto uma grande e maravilhosa verdade.

gefunden zu haben.

Es wäre sozusagen für jede neue Multiplikation eine neue individuelle Arbeit nötig.

Wenn diese Leute nun glaubten, die Zahlen wären Geister und durch ihre Rechnungen erforschten sie das Geisterreich, oder zwängen die Geister, sich zu offenbaren – wäre dies nun Arithmetik? Oder – wäre es auch dann Arithmetik, wenn diese Menschen die Rechnungen

MS 126, p. 81

zu nichts anderem gebrauchten?

16. Der Vergleich mit der Alchemie liegt nahe. Man könnte von einer Alchemie in der Mathematik reden.

MS 126, p. 82

Ist schon das die mathematische Alchemie, daß die mathematischen Sätze

MS 126, p. 83

als Aussagen über mathematische Gegenstände betrachtet werden, – also die Mathematik als die Erforschung dieser Gegenstände?

In einem gewissen Sinn kann man in der Mathematik darum nicht an die Bedeutung der Zeichen appellieren, weil die Mathematik ihnen erst die Bedeutung gibt.

Es ist das Typische der Erscheinung von welcher ich rede, daß das *Mysteriöse* an irgendeinem mathematischen Begriff nicht *sofort* als irrige Auffas-

MS 126, p. 84

sung, als Fehlbegriff gedeutet wird; sondern als etwas, was jedenfalls nicht zu verachten, vielleicht sogar eher zu respektieren ist.

Alles was ich machen kann, ist einen leichten Weg aus dieser Unklarheit und dem Glitzern der Begriffe zeigen.

Man kann seltsamerweise sagen, daß an allen diesen glänzenden Begriffsbildungen ein sozusagen solider Kern ist. Und ich möchte sagen, daß der es ist, der sie zu mathematischen Produkten macht.

MS 126, p. 85

Seria preciso para cada nova multiplicação, por assim dizer, um novo trabalho individual.

Se essa gente acreditasse, então, que os números são espíritos, e que pelos seus cálculos eles explorassem o reino dos espíritos, ou obrigassem os espíritos a se revelarem – seria isto agora aritmética? Ou – seria aritmética mesmo que essas pessoas não

MS 126, p. 81

usassem os cálculos para mais nada?

16. A comparação com a alquimia se impõe. Poder-se-ia falar sobre uma alquimia na matemática.

MS 126, p. 82 [248]

Já é alquimia matemática[249] quando se considera as proposições matemáticas

MS 126, p. 83

como enunciados sobre objetos matemáticos, – portanto a matemática como a pesquisa destes objetos?

Em um certo sentido, não podemos apelar na matemática ao significado dos sinais, porque é antes a matemática que lhes dá o significado.

É típico do fenômeno de que falo que o *misterioso* em algum conceito matemático não é interpretado

MS 126, p. 84

logo como uma concepção errônea, como conceito desajustado; mas como algo que não se menospreza em nenhum caso, que talvez seja até mesmo respeitado.

Tudo o que posso fazer é mostrar uma saída simples dessa vagueza e da resplandecência dos conceitos.[250]

Pode-se curiosamente dizer que todas essas reluzentes formações de conceitos são, por assim dizer, um núcleo duro. E gostaria de dizer que isto é o que os torna em produtos matemáticos.

MS 126, p. 85

Man könnte sagen: Was du siehst schaut freilich mehr wie eine glänzende Lufterscheinung aus; aber sieh sie von einer anderen Seite an und du siehst den soliden Körper, der nur von jener Richtung wie ein Glanz ohne körperliches Substrat aussieht.

MS 126, p. 86

17. ›Die Figur ist in der Reihe oder sie ist nicht in der Reihe‹ heißt: entweder schaut die Sache *so* aus oder sie schaut nicht so aus.

Wie weiß man, was das Gegenteil des Satzes »φ kommt in der Reihe vor«, oder auch des Satzes »φ kommt nicht in der Reihe vor« bedeutet? Diese Frage klingt unsinnig, hat aber doch einen

MS 126, p. 87

Sinn.
Nämlich: wie weiß ich, daß ich den Satz, »φ kommt in der Reihe vor«, verstehe?
Es ist wahr, ich kann Beispiele geben für den Gebrauch solcher Aussagen, und auch der gegenteiligen. Und sie sind Beispiele dafür, daß es eine Regel gibt, die das Vorkommen in einer bestimmten Zone, oder einer Reihe von Zonen, vorschreibt; oder bestimmt, daß dies Vorkommen ausgeschlossen ist.

Wenn »du tust es« heißt: du mußt es tun, und »du

MS 126, p. 88

tust es nicht« heißt: du darfst es nicht tun – dann ist »du tust es, oder du tust es nicht« nicht der Satz vom ausgeschlossenen Dritten.

Jeder fühlt sich ungemütlich bei dem Gedanken, ein Satz könne aussagen, in der endlosen Reihe komme das und das nicht vor – dagegen hat es gar nichts befremdliches, ein Befehl sage: in dieser Reihe dürfe, so weit sie auch fortgesetzt werde, das nicht vorkommen.

Woher aber dieser Unterschied zwischen: »soweit

MS 126, p. 89

du auch gehst, wirst du das nie finden« – und »soweit du auch gehst, darfst du das nie tun«?

Auf jenen Satz kann man fragen: »wie kann man so etwas wissen?«, aber nichts Analoges gilt vom Befehl.

Die Aussage scheint sich zu übernehmen, der Befehl aber gar nicht.

Kann man sich denken, daß alle mathematischen Sätze im Imperativ ausgesprochen

Pode-se dizer: O que você vê parece bem mais como um reluzente fenômeno atmosférico; mas olhe para eles de um outro lado e você verá o corpo sólido que só daquela direção parece um fulgor sem substrato corpóreo.

MS 126, p. 86

17. ‘A figura está na série ou não está na série’ significa: ou a coisa parece ser *assim* ou não parece ser assim.

Como se sabe o que significa o contrário da proposição “φ ocorre na série”, ou então da proposição “φ não ocorre na série”? Esta pergunta soa como um contrassenso, mas tem, contudo, um

MS 126, p. 87

sentido.
A saber: como sei que compreendi a proposição “φ ocorre na série”?
É verdade que posso dar exemplos dos usos destes enunciados, e também dos seus opostos. E eles são exemplos de que existe uma regra que prescreve a ocorrência em uma determinada zona ou em uma série de zonas; ou determina que a ocorrência está excluída.

Se “você faz isto” significa: você tem que fazer isto, e “você

MS 126, p. 88

não faz isto” significa: você pode não fazer isto – então “você faz isto ou você não faz isto” não é a proposição do terceiro excluído.

Todo mundo se sente desconfortável com o pensamento de que uma proposição possa enunciar que isto e aquilo não ocorre numa série infinita – em contraposição, nada há de desconfortante em que uma ordem diga: nesta série não pode ocorrer isto, não importa o quão longe nela se prossiga.

Mas de onde vem esta diferença entre: “por mais longe

MS 126, p. 89

que você vá, nunca vai encontrar nada” – e “por mais longe que você vá, nunca pode fazer isto”?

Sobre esta proposição pode-se perguntar: “como se pode saber uma coisa dessas?”, mas nada análogo vale para a ordem.

O enunciado parece muito sobrecarregado, mas a ordem, nada disto.

Pode-se imaginar todas as proposições matemáticas expressas no imperativo? Por exemwürden? Zum Beispiel: »10 x 10 sei 100!«.

MS 126, p. 90

Und wer nun sagt: »Es sei so, oder es sei nicht so«, der spricht nicht den Satz vom ausgeschlossenen Dritten aus – wohl aber eine *Regel*. (Wie ich es schon weiter oben einmal gesagt habe.)

18. Aber ist das wirklich ein Ausweg aus der Schwierigkeit? Denn wie verhält es sich dann mit allen andern mathematischen Sätzen, sagen wir ›$25^2 = 625$‹; gilt für diese nicht der Satz vom ausgeschlossenen Dritten *innerhalb* der Mathematik?

Wie wendet man den Satz vom

MS 126, p. 91

ausgeschlossenen Dritten an?

»Es gibt entweder eine Regel, die es verbietet, oder eine, die es gebietet.«

Angenommen, es gibt keine Regel, die das Vorkommen verbietet, – warum soll es dann eine geben, die es gebietet?

Hat es Sinn zu sagen: »Es gibt zwar keine Regel die das Vorkommen verbietet, die Figur kommt aber tatsächlich doch nicht vor«? – Und wenn das nun keinen Sinn hat, – wie kann das Gegenteil davon Sinn

MS 126, p. 92

haben, nämlich, die Figur komme vor?

Nun, wenn ich sage, sie kommt vor, schwebt mir das Bild der Reihe vor, von ihrem Anfang bis zu jener Figur – wenn ich aber sage, die Figur komme *nicht* vor, so nützt mir kein solches Bild, und die Bilder gehen mir aus.

Wie, wenn die Regel sich beim Gebrauch unmerklich biegen würde? Ich meine so, daß ich von verschiedenen Räumen sprechen

MS 126, p. 93

könnte, in denen ich sie gebrauche.

Das Gegenteil von »φ darf nicht vorkommen« heißt »φ darf vorkommen«. Für ein endliches Stück der Reihe aber scheint das Gegenteil von » φ darf in ihm nicht vorkommen« zu sein: »φ muß darin vorkommen«.

plo, "Que 10 x 10 seja 100!".

MS 126, p. 90

E quem então disser: "Que isto seja assim, ou que isto não seja assim", não expressa a proposição do terceiro excluído – mas, sim, uma *regra*. (Como já disse mais acima.)[251]

18. Mas isso é realmente uma saída da dificuldade? Pois como isso se relaciona então com todas as outras proposições matemáticas, digamos '$25^2 = 625$'; a proposição do terceiro excluído não vale para elas *dentro* da matemática?

Como empregamos a proposição do

MS 126, p. 91

terceiro excluído?

"Ou há uma regra que a proíbe, ou alguma que a imponha."

Na suposição de que não exista uma regra que proíba a ocorrência, – por que então deveria haver alguma que a imponha?

Tem sentido dizer: "Mesmo que não haja nenhuma regra que proíba a ocorrência da figura, ela de fato não ocorre"? – E se isto não tiver mesmo nenhum sentido, – como poderia o contrário disto ter

MS 126, p. 92

sentido, ou seja, que a figura ocorra?

Ora, se digo que ela ocorre, cogita-se na minha mente a imagem da série desde o seu começo até aquela figura – mas se digo que a figura *não* ocorre, então não se aproveita em mim tal imagem, e as imagens se apagam.

Como seria se a regra se envergasse imperceptivelmente pelo uso? O que quero dizer com isto é que poderia falar dos diferentes espaços

MS 126, p. 93

em que a uso.

O contrário de "φ não pode ocorrer" é "φ pode ocorrer". Mas para uma parte finita da série o contrário de "φ não pode ocorrer nela" parece ser "φ tem que ocorrer ali".

Das Seltsame in der Alternative »φ kommt in der unendlichen Reihe vor, oder es kommt nicht vor« ist, daß wir uns die beiden Möglichkeiten einzeln vorstellen müssen,

MS 126, p. 94

daß wir nach einer Vorstellung für jedes besonders suchen, und daß nicht wie sonst *eine* für den negativen und für den positiven Fall zureicht.

19. Wie weiß ich, daß der allgemeine Satz »Es gibt .... « hier Sinn hat? Nun, wenn er zu einer Mitteilung über die Technik des Entwickelns in einem Sprachspiel verwendet werden kann.

Eine Mitteilung heißt: »es darf nicht vorkommen« – d. h.: wenn es vorkommt, hast du falsch gerechnet.

MS 126, p. 95

Eine heißt: »es darf vorkommen«, d. h., es existiert so ein Verbot nicht. Eine: »es muß in der und der Region (an dieser Stelle immer in diesen Regionen) vorkommen«. Das Gegenteil davon aber scheint zu sein: »es darf dort und dort nicht vorkommen« – statt »es *muß* dort nicht vorkommen«.

Wie aber, wenn man die Regel gäbe, daß, z. B., überall, wo die Bildungsregel von ϖ 4 ergibt, statt der 4 auch eine beliebige andere Ziffer gesetzt werden kann?

Zieh auch die Regel in Betracht, die an gewissen Stellen eine

MS 126, p. 96

Ziffer verbietet, aber im übrigen die Wahl offen läßt.

Ist es nicht so: Die Begriffe in den mathematischen Sätzen von den unendlichen Dezimalbrüchen sind nicht Begriffe von Reihen, sondern von der unbegrenzten Technik des Entwickelns von Reihen?

Wir lernen eine endlose Technik: D. h., es wird uns etwas vorgemacht, wir machen es nach; es werden uns Regeln gesagt und wir machen Übungen in ihrer Befolgung;

MS 126, p. 97

es wird dabei vielleicht auch ein Ausdruck wie »usf. ad inf.« gebraucht, aber es ist damit von keiner riesenhaften Ausdehnung die Rede.

Das sind die Fakten. Und was heißt es nun: »φ kommt entweder in der Entwicklung vor, oder es kommt nicht vor«?

O curioso na alternativa “φ ocorre na série infinita ou ele não ocorre” é que temos que imaginar individualmente as duas possibilidades

MS 126, p. 94

que buscamos para uma representação de cada uma em particular, e não como, normalmente, *uma* que baste para o caso negativo e para o positivo.

19. Como sei que a proposição universal “Existe ....” tem aqui um sentido? Bem, quando ela pode ser empregada como uma informação sobre a técnica da expansão em um jogo de linguagem.

Uma informação diz: “não pode ocorrer” – ou seja: se ocorrer, você calculou errado.

MS 126, p. 95

Outra diz: “pode ocorrer”, ou seja, não existe uma proibição assim. Outra: “tem que ocorrer em tal e tal região (sempre neste lugar nestas regiões)”. Mas o contrário disto parece ser: “não pode ocorrer ali e ali” – em vez de “não *tem que* ocorrer ali”.

Mas o que acontece se alguém desse a regra de que, por exemplo, onde quer que a regra de formação de ϖ resulte em 4, em vez do 4 pode-se colocar também um outro algarismo qualquer?

Leve em consideração também a regra que proíbe um algarismo

MS 126, p. 96

em certos lugares, mas no resto a escolha é deixada em aberto.

Não é assim: Os conceitos de pontos decimais infinitos nas proposições matemáticas não são conceitos de séries, mas da técnica de expansão ilimitada de séries?

Nós aprendemos uma técnica infinita: Isto é, se nos mostra como se faz alguma coisa, nós imitamos; se nos conta sobre regras e fazemos exercícios do seu seguimento;

MS 126, p. 97

é deste modo, talvez, que uma expressão como “e assim por diante, até o infinito” vem a ser usada, mas nem por isto se fala de alguma extensão colossal.

Estes são os fatos. E o que então significa: “φ ocorre na expansão ou não ocorre”?

20. Aber heißt das nun, daß es kein Problem gibt: »Kommt die Figur φ in dieser Entwicklung vor?«? – Wer das fragt,

MS 126, p. 98

fragt nach einer Regel, das Vorkommen von φ betreffend. Und die Alternative des Existierens oder Nichtexistierens so einer Regel ist jedenfalls keine mathematische.

Erst innerhalb einem erst zu errichtenden mathematischen Gebäude läßt die Frage eine *mathematische* Entscheidung zu, und wird somit zur Forderung einer solchen Entscheidung.

MS 126, p. 99

21. Ist denn das Unendliche nicht wirklich – kann ich nicht sagen: »diese zwei Kanten der Platte schneiden sich im Unendlichen«?

Nicht »der Kreis hat diese Eigenschaft, weil er durch die beiden unendlich fernen Punkte .... geht«; sondern: »die Eigenschaften des Kreises lassen sich aus dieser (merkwürdigen) Perspektive betrachten«.

Es ist wesentlich eine Perspektive, und eine weit hergeholte. (Womit kein Tadel

MS 126, p. 100

ausgesprochen ist.) Aber es muß immer ganz klar sein, *wie weit* hergeholt diese Anschauungsart ist. Denn sonst ist ihre eigentliche *Bedeutung* im Dunkeln.

22. Was heißt das: »der Mathematiker weiß nicht was er tut«, oder »er weiß was er tut«?

23. Kann man unendliche Vorhersagungen machen? – Nun, warum soll man nicht z. B. das Trägheitsgesetz eine solche nennen? Oder den Satz, daß ein Komet eine Parabel beschreibt?

MS 126, p. 101

In gewissem Sinne wird freilich ihre Unendlichkeit nicht sehr ernst genommen.

Wie ist es nun mit einer *Vorhersagung*: daß, wer π entwickelt, so weit er auch gehen mag, nie auf die Figur φ stoßen wird? – Nun, man könnte sagen, daß dies entweder eine *unmathematische* Vorhersagung ist, oder aber eine mathematische Regel.

Jemand, der √2 entwickeln gelernt hat, geht zu einer Wahrsagerin, und sie weissagt ihm, daß,

20. Mas agora isto significa que não há nenhum problema: “A figura φ ocorre nesta expansão?”? – Quem pergunta isto,

MS 126, p. 98

pergunta de acordo com uma regra que se relaciona com a ocorrência de φ. E a alternativa da existência ou não existência de uma regra assim não é, em todo caso, matemática.

Somente no interior de um edifício matemático ainda não construído é que se permite a questão sobre uma decisão *matemática*, e, assim sendo, torna-se uma reivindicação para uma tal decisão.

MS 126, p. 99

21. Pois se o infinito não é atual – não posso dizer: “estas duas arestas do plano se cruzam no infinito”?

Não: “o círculo tem esta propriedade porque ele passa pelos dois pontos .... distantes no infinito”; mas: “as propriedades do círculo podem ser observadas a partir desta (curiosa) perspectiva”.

É essencial uma perspectiva, e uma bem remota (com a qual nenhuma objeção

MS 126, p. 100

seja expressa.) No entanto, tem que estar sempre totalmente claro *o quão* remoto é este modo de ver as coisas. Pois, do contrário, o seu autêntico *significado* fica obscuro.

22. O que significa: “o matemático não sabe o que faz” ou “ele sabe o que faz”?

23. Pode-se fazer predições infinitas? – Ora, por que não se deve, por exemplo, chamar a lei da inércia de uma coisa assim? Ou a proposição de que um cometa descreve uma parábola?

MS 126, p. 101

Ainda assim, o seu infinitismo, em certo sentido, não é levado tão a sério.

O que acontece então com uma *predição*: a de que quem expande π até onde pode chegar nunca vai esbarrar na figura φ? Bem, poder-se-ia dizer que isto ou é uma predição *não-matemática*, ou então uma regra matemática.

Alguém que aprendeu a expandir a √2, vai a uma vidente e ela lhe pressagia que,

MS 126, p. 102

MS 126, p. 102

soweit er auch die √2 entwickeln mag, er nie zu einer Figur .... gelangen wird. – Ist ihre Weissagung ein mathematischer Satz? Nein. – Außer sie sagt: »Wenn du immer richtig entwickeln wirst, kommst du nie .... «. Aber ist das noch eine Vorhersage?

Es scheint nun, daß so eine *Vorhersage* des richtig Entwickelten denkbar wäre und sich von einem mathematischen Gesetz, daß es sich so und so verhalten *muß*, unterschiede. So daß es in der mathematischen Entwicklung einen Unterschied gäbe zwischen

MS 126, p. 103

dem, was tatsächlich so herauskommt – gleichsam zufällig – und dem, was herauskommen muß.

Wie soll man es entscheiden, ob eine unendliche Voraussage Sinn hat?

So jedenfalls nicht, indem man sagt: »ich bin sicher, ich *meine* etwas, wenn ich sage .... «.

Auch ist wohl nicht so sehr die Frage, ob die Voraussage irgendeinen Sinn hat, als: was für eine Art von Sinn sie hat. (Also,

MS 126, p. 104

in welchen Sprachspielen sie vorkommt.)

MS 126, p. 105

24. »Der unheilvolle Einbruch« der Logik in die Mathematik.

MS 126, p. 108

In dem so vorbereiteten Feld ist *das* ein Existenzbeweis.

Das Verderbliche der logischen Technik ist, daß sie uns die

MS 126, p. 109

spezielle mathematische Technik vergessen läßt. Während die logische Technik nur eine Hilfstechnik in der Mathematik ist. Z. B. gewisse Verbindungen zwischen anderen Techniken herstellt.

Es ist beinahe als wollte man sagen, daß das Tischlern im Leimen besteht.

MS 126, p. 110

por mais que expanda a √2, nunca vai conseguir chegar a uma figura .... . – O seu presságio é uma proposição matemática? Não. – A não ser que ela diga: “Se você expandir sempre corretamente, nunca chegará a ....”. Mas isto é ainda uma predição?

Agora parece que seria imaginável uma tal *predição* sobre a expansão correta e que se diferencia de uma lei matemática de que isto *tem que* ocorrer assim e assim. De modo que existiria na expansão matemática uma diferença entre

MS 126, p. 103

o que, de fato, resulta assim – como se fosse casual –, e o que tem que resultar assim.

Como se deve decidir se uma previsão infinita tem sentido?

Em todo caso, não dizendo: “estou seguro de que *quis dizer* algo quando digo que ....”.

Tampouco a questão não é tanto assim sobre se a previsão tem algum sentido, mas: que tipo de sentido ela tem. (Portanto,

MS 126, p. 104

em que jogo de linguagem ela ocorre.)

MS 126, p. 105 [252]

24. “A desastrosa incursão” da lógica na matemática.

MS 126, p. 108

Em um campo tão preparado assim, *isto* é uma prova de existência.[253]

O pernicioso da técnica lógica é que ela nos deixa

MS 126, p. 109

esquecer a técnica particularmente matemática. Enquanto que a técnica lógica é só uma técnica auxiliar da matemática. Por exemplo, formar certas conexões entre outras técnicas.

É quase como se quiséssemos dizer que a marcenaria consiste em colar.

MS 126, p. 110 [254]

25. Der Beweis überzeugt dich davon, daß es eine Wurzel der Gleichung gibt (ohne dir eine Ahnung zu geben *wo*) – – wie weißt du, daß du den Satz verstehst, es gebe eine Wurzel? Wie weißt du daß du wirklich von etwas überzeugt bist? Du mags davon überzeugt sein, daß sich die Anwendung des bewiesene Satzes finden lassen wird. Aber du verstehst ihn nicht, solang du sie nicht gefunden hast.

MS 126, p. 112

Wenn ein Beweis allgemein beweist, *es gebe* eine Wurzel, so kommt alles darauf an, in welcher Form er das beweist. Was es ist, das hier zu diesem Wortausdruck führt, der ein bloße Schemen ist und die *Hauptsache* verschweigt. Während er de Logikern nur die Nebensache zu verschweigen scheint. Während er den Logikern nur die Nebensache zu verschweigen scheint.

MS 126, p. 113

Das mathematisch Allgemeine steht zum mathematisch Besonderen nicht in dem Verhältnis wie sonst das Allgemeine zu Besondern.

Alles was ich sage, kommt eigentlich darauf hinaus, daß man einen Beweis genau kennen und ihm Schritt für Schritt folgen kann, und dabei doch, was bewiesen wurde, nicht *ver-*

MS 126, p. 117

steht.

Und das hängt wieder damit zusammen, daß man einen mathematischen Satz grammatisch richtig bilden kann ohne seinen Sinn zu verstehen.

Wann versteht man ihn nun? – Ich glaube: wenn man ihn anwenden kann.

Man könnte vielleicht sagen: wenn man ein klares Bild von seiner Anwendung hat. Dazu aber genügt es nicht, daß man ein klares Bild mit ihm verbindet.

MS 126, p. 118

Vielmehr wäre besser gewesen, zu sagen: wenn man eine klare Übersicht von seiner Anwendung hat. Und auch das ist schlecht, denn es handelt sich nur darum, daß man die Anwendung nicht dort vermutet, wo sie nicht ist; daß man sich von der Wortform des Satzes nicht täuschen läßt.

Wie kommt es aber nun, daß man einen Satz, oder Beweis, auf diese Weise nicht verstehen, oder mißverstehen kann? Und was

MS 126, p. 119

ist dann nötig um das Verständnis herbeizuführen?

25. A demonstração te convence de que há uma raiz da equação (sem te dar nenhuma ideia de *onde*) – – como você sabe que compreende a proposição de que há uma raiz? Como você sabe que está realmente convencido de alguma coisa? Você pode estar convencido de que é possível encontrar a aplicação da proposição demonstrada. Mas você não compreende a proposição enquanto não encontrar a aplicação.

MS 126, p. 112

Quando uma demonstração demonstra em geral de que *há* uma raiz, tudo depende então da forma como ela o demonstra. O que é isto que aqui leva a esta expressão verbal que é um mero espectro e omite o *principal*. Enquanto que para os lógicos parece omitir apenas o secundário.

MS 126, p. 113 [255]

A generalidade matemática não está em relação à particularidade matemática da mesma maneira que como de costume está o geral para o particular.

Tudo o que digo se resume propriamente ao fato de que se pode conhecer exatamente uma demonstração e segui-la passo a passo, e, no entanto, não se *compreender* o que foi

MS 126, p. 117

demonstrado.

E isto se conecta por sua vez com o fato de que se pode formar uma proposição matemática gramaticalmente correta sem compreender o seu sentido.

Quando se a compreende então? – Acredito: quando se pode aplicá-la.

Pode-se talvez dizer: quando se tem uma imagem clara da sua aplicação. Mas para isto não é suficiente vincular com ela uma imagem clara.

MS 126, p. 118

Teria sido antes muito melhor dizer: quando se tem uma visão panorâmica clara da sua aplicação. E isto também é ruim, pois só se trata de não supor a aplicação onde ela não está; de não se permitir ser enganado pela forma das palavras da proposição.

Mas como é que não se pode compreender, ou compreender mal, uma proposição ou demonstração deste modo? E o que

MS 126, p. 119

então é preciso para dar lugar à compreensão?

Es gibt da, glaube ich, Fälle in denen Einer den Satz (oder Beweis) zwar anwenden kann, über die Art der Anwendung aber nicht klar Rechenschaft zu geben im Stande ist. Und der Fall, daß er den Satz auch nicht anzuwenden weiß. (MultiplikativAxiom.)

Wie ist es in der Beziehung mit 0 x 0 = 0?

Man möchte sagen, das Verständnis eines

MS 126, p. 120

mathematischen Satzes sei nicht durch seine Wortform garantiert, wie im Fall der meisten nicht-mathematischen Sätze. Das heißt – so scheint es – daß der Wortlaut das *Sprachspiel* nicht bestimmt, in welchem der Satz funktioniert.

Die logische Notation verschluckt die Struktur.

26. Um zu sehen, wie man etwas ›Existenzbeweis‹ nennen kann was keine Konstruktion des Existierenden zuläßt, denke an die verschiedenartigen Bedeutungen des Wortes »wo«. (Z. B. des topolo-

MS 126, p. 121

gischen und des metrischen.)

Es kann ja der Existenzbeweis nicht nur den Ort des ›Existierenden‹ unbestimmt lassen, sondern es braucht auf einen solchen Ort gar nicht anzukommen.

D. h.: Wenn der bewiesene Satz lautet »es gibt eine Zahl, für die .... « so muß es keinen Sinn haben zu fragen, »und welches ist diese Zahl?«, oder zu sagen, »und diese Zahl ist .... «.

MS 126, p. 122

27. Ein Beweis, daß 777

MS 127, p. 47

in der Entwicklung von π vorkommt, der nicht zeigt, wo, müßte diese Entwicklung von einem ganz neuen Standpunkt ansehen, sodaß er etwa Eigenschaften von Regionen der Entwicklung zeigte, von denen wir nur wüßten, daß sie sehr weit draußen liegen. Es schwebt nur dabei vor, daß man sehr weit draußen in π sozusagen eine dunkle Zone von unbestimmter Länge annehmen müßte, wo

Acredito que existem casos em que mesmo que alguém possa aplicar a proposição (ou demonstração), não está em posição de prestar contas claramente sobre o tipo de aplicação. E o caso de que a pessoa tampouco sabe aplicar a proposição. (Axioma Multiplicativo).[256]

Como é que é isto na relação com 0 x 0 = 0?

Se diria que a compreensão de uma

MS 126, p. 120

proposição matemática não é garantida pela forma das suas palavras, tal como no caso da maioria das proposições não-matemáticas. Isto significa – assim parece – que o modo de expressão não determina o *jogo de linguagem* no qual a proposição funciona.

A notação lógica engole a estrutura.[257]

26. Para se ver como se pode chamar de 'prova de existência' algo que não permite nenhuma construção do existente, pense nos diferentes tipos de significado da palavra "onde". (Por exemplo, o topoló-

MS 126, p. 121

gico e o métrico.)

Pois a prova de existência pode não apenas deixar indeterminado o lugar do 'existente', mas nem sequer precisa tratar de absolutamente nada sobre este lugar.

Ou seja: Quando a proposição demonstrada reza "Existe um número para o qual ....", não tem que haver nenhum sentido na pergunta "E qual é este número?", ou dizer "E este número é ....".

MS 126, p. 122

27. Uma demonstração de que 777

MS 127, p. 47 [258]

ocorre na expansão de π que não mostre onde se teria que ver esta expansão de um ponto de vista totalmente novo, de modo que a ela mostrasse, por exemplo, propriedades de regiões da expansão das quais só soubéssemos que estão muito longe. A única coisa que se cogita sobre isto é que teríamos que assumir que seria uma zona obscura, por assim dizer, muito longe e de extensão indeterminada em π, onde

MS 127, p. 48

unsere Rechenhilfsmittel nicht mehr verläßlich sind, und noch weiter draußen dann eine Zone, wo man auf *andere* Weise wieder etwas sehen kann.

MS 127, p. 49

28. Vom Beweis durch reductio ad absurdum kann man sich immer vorstellen, er werde im Argument mit jemandem ge-

MS 126, p. 122

braucht, der eine nicht-mathematische Behauptung aufstellt (etwa: er habe gesehen, daß A den B mit den und den Figuren matt gesetzt habe), die sich mathematisch widerlegen läßt.

Die Schwierigkeit, die man bei der reduc-

MS 126, pp. 123s

tio ad absurdum in der Mathematik empfindet ist die: Was geht bei diesem Beweis vor? Etwas mathematisch Absurdes, also Unmathematisches? Wie kann man – möchte man fragen – das mathematisch Absurde überhaupt nur annehmen? Daß ich das physikalisch Falsche annehmen und ad absurdum führen kann macht mir keine Schwierigkeiten. Aber wie das sozusagen Undenkbare denken?!

Der indirekte Beweis sagt aber: »Wenn du es *so* willst, darfst du *das* nicht annehmen: denn *da*mit

MS 126, p. 125

wäre nur das Gegenteil dessen vereinbar, wovon du nicht abgehen willst«.

MS 126, p. 126

29. Die geometrische Illustration der mathematische Analysis ist allerdings unwesentlich, nicht aber die geometrische Anwendung. Ursprünglich waren die geometrischen Illustrationen *Anwendungen der Analysis*. Wo sie aufhören, dies zu sein, können sie leicht gänzlich irreführen.

Hier haben wir dann die

MS 126, p. 131

phantastische Anwendung. Die eingebildete Anwendung.

Die Idee des ›Schnittes‹ ist so eine gefährliche Illustration.

MS 127, p. 48

nossos recursos de cálculo não são mais confiáveis, e depois uma zona ainda mais longe onde podemos ver novamente alguma coisa de maneira *diferente*.

MS 127, p. 49

28. Pode-se sempre imaginar que a prova por redução ao absurdo será usada no argumento com alguém

MS 126, p. 122 [259]

que proponha uma afirmação não-matemática (por exemplo: ele viu que A deu xeque-mate em B com esta e aquela peça) que se pode refutar matematicamente.

A dificuldade que se sente com a redu-

MS 126, pp. 123s

ção ao absurdo na matemática é: O que acontece com esta prova? Alguma coisa matematicamente absurda, portanto não-matemática? Como se pode – perguntar-se-ia –, sequer assumir o absurdo matemático? Que eu assuma o fisicamente falso e possa levá-lo ao absurso não me apresenta nenhuma dificuldade. Mas como pensar o que se pode chamar de impensável?!

Mas a prova indireta diz: “Se você o quer *assim*, não pode assumir *isto*: pois *daí*

MS 126, p. 125

só o contrário disto seria compatível com aquilo que você não quer abandonar”.

MS 126, p. 126 [260]

29. A ilustração geométrica da análise matemática é admitidamente inessencial, mas não a aplicação geométrica. Originalmente as ilustrações geométricas eram *aplicações da análise*. Onde elas deixam de ser isto, podem facilmente induzir totalmente ao engano.

Então temos aqui a

MS 126, p. 131

aplicação fantástica. A aplicação imaginária.

A ideia de ‘corte’ é uma ilustração perigosa deste tipo.

Nur soweit, als die Illustrationen auch Anwendungen sind, erzeugen sie nicht jenes gewisse Schwindelgefühl, das die Illustration erzeugt, im Moment, wo sie aufhört eine mögliche Anwendung zu sein; wo sie also dumm wird.

MS 126, p. 132

30. So könnte man Dedekinds Theorem ableiten, wenn, was wir irrationale Zahlen nennen, *ganz unbekannt* wäre, wenn

MS 126, p. 110

es aber eine Technik gäbe, die Stellen von Dezimalzahlen zu würfeln. Und dieses Theorem hätte dann seine Anwendung, auch wenn es die Mathematik der irrationalen Zahlen nicht gäbe. Es ist nicht, als sähen die Dedekindschen Entwicklungen alle besonderen reellen Zahlen schon voraus. Es *scheint* nur so, sobald man den Dedekindschen Kalkül mit den Kalkülen der besonderen reellen Zahlen vereinigt.

MS 126, p. 111

31. Man könnte fragen: Was könnte ein Kind von 10 Jahren am Beweis des Dedekindschen Satzes *nicht* verstehen? – Ist denn dieser Beweis nicht viel einfacher, als alle die Rechnungen, die das Kind beherrschen muß? – Und wenn nun jemand sagte: den tieferen Inhalt des Satzes kann es

MS 126, p. 136

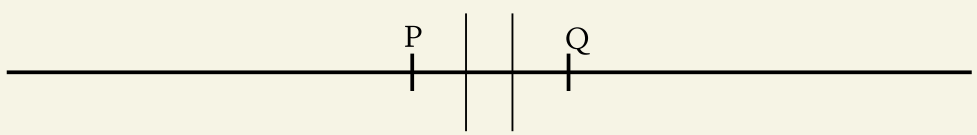
nicht verstehen – dann frage ich: wie kommt dieser Satz zu einem tiefen Inhalt?

MS 126, p. 137

32. Das Bild der Zahlengeraden ist ein absolut natürliches bis zu einem gewissen Punkt: nämlich soweit man es *nicht* zu einer allgemeinen Theorie der reellen Zahlen gebraucht.

MS 126, p. 138

33. Wenn du die *reellen* Zahlen in eine höhere und eine niedere Klasse teilen willst, so tu's erst einmal roh durch



Só na medida em que as ilustrações são também aplicações é que não produzem uma certa vertigem no momento em que deixam de ser um aplicação possível; quando, portanto, se tornam estúpidas.

MS 126, p. 132 [261]

30. Assim, se poderia derivar o teorema de Dedekind se o que chamamos de números irracionais fosse *completamente desconhecido*,

MS 126, p. 110 [262]

mas houvesse uma técnica de jogar dados para as posições dos números decimais. E este teorema, então, teria sua aplicação mesmo que não existisse a matemática dos números irracionais. Não é como se a expansão de Dedekind previsse particularmente todos os números reais. Só *parece* ser assim quando se reúne o cálculo de Dedekind com o cálculo dos números reais em particular.

MS 126, p. 111

31. Poder-se-ia perguntar: O que uma criança de 10 anos *não* compreenderia na demonstração do teorema de Dedekind? – Não seria esta demonstração muito mais simples que todos os cálculos que uma criança tem que dominar? – E se agora alguém dissesse: o conteúdo mais profundo do teorema ela não

MS 126, p. 136

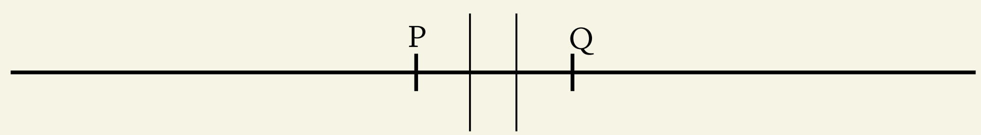
pode compreender – então eu perguntaria: como este teorema chega a ter um conteúdo profundo?

MS 126, p. 137

32. A imagem da linha de números é absolutamente natural até certo ponto: a saber, até onde *não* a usamos para uma teoria geral dos números reais.

MS 126, p. 138

33. Se você quer dividir os números *reais* entre uma classe alta e uma baixa, então faça-o, primeiramente, de modo grosseiro entre



zwei rationale Punkte P und Q. Dann halbiere P Q und entscheide, in welcher Hälfte (wenn nicht im Teilungspunkt) der Schnitt liegen soll; wenn z. B. in der unteren, halbiere

MS 126, p. 148

diese und mache eine genauere Entscheidung; usf.

Hast du ein Prinzip der unbegrenzten Fortsetzung, so kannst du von diesem Prinzip sagen, es führe einen Schnitt aus, da es von jeder Zahl entscheidet, ob sie rechts oder links liegt. – Nun ist die Frage, ob ich durch ein solches Prinzip der Teilung *überall* hin gelangen kann, oder ob noch eine andere Art der Entscheidung nötig ist; und man könnte fragen, ob *nach* der vollendeten Entscheidung durch das Prinzip, oder *vor* der Vollendung. Nun, jedenfalls nicht

MS 126, p. 149

vor der Vollendung; denn solange noch die Frage ist, in welchem endlichen Stück der Geraden der Punkt liegen soll, kann die weitere Teilung entscheiden. – Aber *nach* der Entscheidung durch ein Prinzip, ist noch Raum für eine weitere Entscheidung?

Es ist mit dem Dedekindschen Satz wie mit dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten: Er scheint ein Drittes auszuschließen, während von einem Dritten in ihm nicht die Rede ist.

MS 126, p. 150

Der Beweis des Dedekindschen Satzes arbeitet mit einem Bild, das *ihn* nicht rechtfertigen kann, das eher vom Satz gerechtfertigt werden soll.

Ein Prinzip der Teilung siehst du leicht für eine unendlich fortgesetzte Teilung an, denn es entspricht jedenfalls keiner endlichen Teilung und scheint dich weiter und weiter zu führen.

MS 126, p. 151

34. Könnte man nicht die Lehre

MS 126, p. 153

vom Limes, den Funktionen, den reellen Zahlen, mehr, als man es tut, *extensional vorbereiten*? auch wenn dieser vorbereitende Kalkül *sehr* trivial und an sich nutzlos erscheinen sollte?

Die Schwierigkeit der bald intensionalen, bald wieder extensionalen Betrachtungsweise beginnt schon beim Begriff des ›Schnittes‹. Daß man jede rationale Zahl ein Prinzip der Teilung der rationalen Zahlen nennen kann, ist wohl klar. Nun *entdecken* wir etwas anderes, was wir Prinzip

MS 126, p. 154

dois pontos racionais P e Q. Depois divida ao meio P e Q e decida em que metade (se não no ponto da repartição) o corte deve ficar; se, por exemplo, na mais baixa, divida-o ao meio

MS 126, p. 148

e faça uma decisão mais exata; e assim por diante.

Se você tem um princípio de continuidade ilimitada, então você pode dizer deste princípio que ele executa um corte, já que decide para cada número se ele vai ficar à direita ou à esquerda. – Pois bem, a questão agora é se posso chegar em *todos os lugares* com este princípio de repartição ou se ainda é preciso um outro tipo de decisão; e poderíamos perguntar se *depois* da decisão cumprida pelo princípio, ou *antes* do cumprimento. Ora, de todo modo não

MS 126, p. 149

antes do cumprimento; pois enquanto houver ainda a questão acerca de em qual porção finita da linha reta o ponto deve ficar, a divisão posterior pode decidir. – Mas *após* a decisão mediante um princípio existe ainda um espaço para uma decisão posterior?

O teorema de Dedekind é como a proposição do terceiro excluído: ele parece excluir um terceiro enquanto não fala sobre um terceiro.

MS 126, p. 150

A prova do teorema de Dedekind trabalha com uma imagem que não pode justificá-*lo*, que deve antes ser justificada pelo teorema.

Você vê facilmente um princípio de divisão para uma divisão contínua infinita, pois isto não corresponde, de qualquer modo, a nenhuma divisão finita, e parece te levar cada vez mais longe.

MS 126, p. 151

34. Não se poderia *preparar*[263]

MS 126, p. 153

extensionalmente a teoria dos limites, das funções, dos números reais, melhor do que se faz? mesmo que este cálculo preparatório devesse parecer *muito* trivial e inútil em si mesmo?

A dificuldade de uma abordagem ora intensional, ora novamente extensional, já começa pelo conceito de ‘corte’. Que possamos chamar todo número racional de um princípio da divisão de números racionais é bem claro. Agora *descobrimos* uma outra coisa que podemos chamar

MS 126, p. 154

der Teilung nennen können, etwa das, welches der √2 entspricht. Dann andere ähnliche – und nun sind wir mit der Möglichkeit solcher Teilungen schon ganz wohl vertraut, und sehen sie unter dem Bild eines irgendwo entlang der Geraden geführten Schnittes, *also extensional*. Denn wenn ich *schneide*, so kann ich ja wählen, wo ich schneiden will.

Ist aber ein *Prinzip* der Teilung ein Schnitt, so ist es dies doch nur weil man von beliebigen rationalen Zahlen sagen kann, sie seien

MS 126, p. 155

oberhalb oder unterhalb des Schnittes. – Kann man nun sagen, die Idee des Schnitts habe uns von der rationalen Zahl zu irrationalen Zahlen geführt? Sind wir denn z.B. zur √2 durch den Begriff des Schnitts gelangt?

Was ist nun ein Schnitt der reellen Zahlen? Nun, ein Prinzip der Teilung in eine untere und eine obere Klasse. So ein Prinzip gibt also jede rationale und irrationale Zahl ab. Denn wenn wir auch kein System der irrationalen Zahlen haben,

MS 126, p. 156

so zerfallen doch die, *die wir haben*, in obere und untere in Bezug auf den Schnitt (soweit sie mit ihm nämlich vergleichbar sind).

Nun ist aber die Dedekindsche Idee, daß die Einteilung in eine obere und untere Klasse (mit den bekannten Bedingungen) die reelle Zahl ist.

Der Schnitt ist eine extensive *Vorstellung*.

Es ist freilich wahr, daß, wenn ich ein mathematisches Kriterium habe um für eine belie-

MS 126, p. 157

bige rationale Zahl festzustellen, ob sie zur oberen oder unteren Klasse gehört, es ein Leichtes ist mich dem Ort systematisch beliebig zu nähern, wo die beiden Klassen sich treffen.

Wir machen bei Dedekind einen Schnitt nicht dadurch, daß wir schneiden, also auf den Ort zeigen, sondern daß wir, – wie beim Finden der √2 – uns den einander zugekehrten Enden der oberen und unteren Klasse nähern.

Nun soll bewiesen werden, daß keine andere Zahlen, als nur

MS 126, p. 158

die reellen so einen Schnitt ausführen können.

Vergessen wir nicht, daß *ursprünglich* die Teilung der rationalen Zahlen in zwei Klassen keinen Sinn hatte, bis wir auf Gewisses aufmerksam machten, was man so beschreiben konnte. Der Begriff *ist vom täglichen Sprachgebrauch hergenommen* und scheint darum auch für die Zahlen unmittelbar einen Sinn haben zu müssen.

de princípio de divisão, que, por exemplo, corresponde a √2. Depois outros semelhantes – e agora já estamos totalmente familiarizados com a possibilidade destas divisões, e as vemos sob a imagem de um corte dirigido a algum lugar ao longo da reta, *portanto extensionalmente*. Pois, quando *corto*, também escolho onde quero cortar.

Mas se um *princípio* de divisão é um corte, então só é assim porque se pode dizer de números racionais arbitrários que eles estão

MS 126, p. 155

acima ou abaixo do corte. – Podemos dizer agora que a ideia de corte nos levou do número racional para os números irracionais? Chegamos, por exemplo, a √2 pelo conceito de corte?

O que seria agora um corte dos números reais? Ora, um princípio de divisão entre uma classe superior e uma inferior. Um princípio que fornece, assim, todo número racional e irracional. Pois mesmo que não tenhamos nenhum sistema de números irracionais,

MS 126, p. 156

decompõem-se aqueles *que temos* em superiores e inferiores em relação ao corte (na medida em que são comparáveis com ele, vale dizer).

Mas agora a ideia de Dedekind é que a divisão entre uma classe superior e uma inferior (nas condições já conhecidas) é o número real.

O corte é uma *representação* extensional.

Admitidamente é verdade que se tenho um critério matemático para estabelecer, para cada

MS 126, p. 157

número racional arbitrário, se ele pertence à classe superior ou inferior, facilita-se para mim aproximar sistematicamente o quanto quiser ao local em que as duas classes se juntam.

Com Dedekind nós fazemos um corte não pelo que cortamos, isto é, mostrando o local, portanto, mas pela aproximação – tal como quando encontramos a √2 – das extremidades opostas das classes superior e inferior.

Agora deve ser demonstrado que nenhum outro número, a não ser

MS 126, p. 158

o real, pode realizar a um corte desses.

Não nos esqueçamos de que *originalmente* a divisão de números racionais em duas classes não tinha qualquer sentido, até que chamássemos a atenção para algo que poderia ser descrito deste modo. O conceito *é reaproveitado do uso da linguagem cotidiana*, e por isto parece também ter que ter um sentido imediato para os números.

Wenn man nun

MS 126, p. 159

die Idee eines Schnitts der *reellen* Zahlen einführt, indem man sagt, es sei jetzt einfach der Begriff des Schnitts von den rationalen auf die reellen Zahlen auszudehnen, alles was wir brauchen ist eine Eigenschaft, die die reellen Zahlen in zwei Klassen einteilt (etc.) – so ist *zunächst* nicht klar, was mit so einer Eigenschaft gemeint ist, die *alle* reellen Zahlen so einteilt. Nun kann man uns darauf aufmerksam machen, daß jede reelle Zahl dazu dienen kann. Aber das führt uns nur soweit

MS 126, p. 160

und nicht weiter.

MS 126, p. 161

35. Die extensionalen Erklärungen der Funktionen, der reellen Zahlen, etc. übergehen alles Intensionale – obwohl sie es voraussetzen – und beziehen sich auf die immer wiederkehrende äußere Form.

MS 127, p. 10

36. Unsre Schwierigkeit fängt eigentlich schon mit der unendlichen Geraden an; obwohl wir schon als Knaben lernen, eine Gerade habe kein Ende, und ich weiß nicht, daß diese Idee irgend jemandem Schwierigkeiten bereitet habe. Wie, wenn ein Finitist versuchte, diesen Begriff durch den einer geraden Strecke von

MS 127, p. 12

bestimmter Länge zu ersetzen?!

Aber die Gerade ist ein *Gesetz* des Fortschreitens.

MS 127, p. 12

Der Begriff des Limes und der Stetigkeit, wie sie heute eingeführt werden, hängen, ohne daß dies ausgesprochen wird, von dem Begriff des *Beweises* ab. Denn wir sagen $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$, wenn *bewiesen* werden kann, daß .. .

Das heißt wir gebrauchen Begriffe, die unendlich viel schwerer zu fassen sind als die, die wir offen herzeigen.

MS 127, p. 17

Se neste momento introduzimos

MS 126, p. 159

a ideia[264] de um corte dos números *reais*, em que dizemos que ele é simplesmente agora a extensão do conceito de corte dos números racionais aos reais, tudo o que precisamos é de uma propriedade que reparta os números reais em duas classes (etc.) – então, *em primeiro lugar*, não está claro o que se quer dizer com uma propriedade dessas, que reparte assim *todos* os números reais. Agora, pode-se chamar a nossa atenção para o fato de que todos os números reais servem para isso. Mas isso só nos leva até ali,

MS 126, p. 160

e não mais adiante.

MS 126, p. 161 [265]

35. As definições extensionais das funções, dos números reais etc., ultrapassam todo o intensional – conquanto o pressuponham – e se referem à sempre recorrente forma externa.

MS 127, p. 10

36. Nossa dificuldade já começa propriamente com a linha reta infinita; mesmo que já aprendamos desde meninos que uma linha reta não tem fim e eu não tenha conhecimento de que esta ideia apresentou dificuldades para alguém. E se um finitista tentasse substituir este conceito por um segmento de reta

MS 127, p. 12

de comprimento determinado?!

Mas a linha reta é uma *lei* da continuidade.

MS 127, p. 12

O conceito de limite e de continuidade, tal como são introduzidos hoje, dependem, sem que isto seja expresso, do conceito de *demonstração*. Pois dizemos $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ quando pode ser *demonstrado* que...

Isto significa que usamos conceitos que são infinitamente mais difíceis de apreender do que os que manifestamente exibimos.

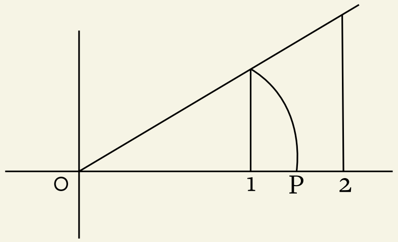
MS 127, p. 17

37. Das Irreführende an der Dedekindschen extensionalen Auffassung ist die Idee, daß die reellen Zahlen in der Zahlenlinie ausgebreitet daliegen. Man mag sie kennen

MS 127, p. 21

oder nicht; das macht nichts. Und so braucht man nur zu schneiden, oder in Klassen zu teilen, und hat ihnen allen ihren Platz angewiesen.

Es ist durch die *Kombination* der *Rechnung und der Konstruktion*, daß man die Idee erhält, es müßte auf der Geraden ein Punkt ausgelassen werden, nämlich P,



wenn man nicht die

MS 127, p. 22

√2 als ein Maß der Entfernung von 0 zuließe. ›Denn, wenn ich wirklich genau konstruierte, so müßte dann der Kreis die Gerade *zwischen* ihren Punkten hindurch schneiden.‹

Das ist ein schrecklich verwirrendes Bild.

Die irrationalen Zahlen sind – sozusagen – Einzelfälle.

MS 127, p. 23

Was ist die *Anwendung* des Begriffes der Geraden, der ein Punkt fehlt?! Die Anwendung muß ›hausbacken‹ sein. Der Ausdruck »Gerade, der ein Punkt fehlt« ist ein fürchterlich irreleitendes Bild. Der klaffende Spalt zwischen Illustration und Anwendung.

MS 127, p. 24

38. Die Allgemeinheit der Funktionen ist sozusagen eine *ungeordnete*

MS 127, p. 13

Allgemeinheit. Und unsere Mathematik ist auf so einer ungeordneten Allgemeinheit aufgebaut.

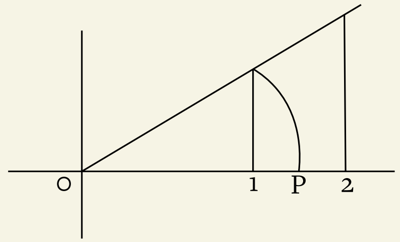
MS 127, p. 14

37. O que é enganoso sobre a concepção extensional de Dedekind é a ideia de que os números reais estão estendidos ao longo da linha de números. Pode-se conhecê-los

MS 127, p. 21

ou não; isto não importa. E, assim, só temos que cortar ou dividir em classes, e tê-los a todos atribuídos a seus lugares.

É pela *combinação* de cálculo *e de construção* que se obtém a ideia de que um ponto da linha reta teria que ser deixado de fora, a saber, P,



se não se admite

MS 127, p. 22

a √2 como uma medida da distância de 0. ‘Pois se eu realmente construísse de maneira exata, o círculo teria então que cortar a reta *entre* os seus pontos.’

Esta é uma imagem terrivelmente confusa.

Os números irracionais são – por assim dizer – casos à parte.

MS 127, p. 23

Qual é a *aplicação* do conceito de linha reta na qual falta um ponto?! A aplicação tem que ser ‘prosaica’. A expressão “linha reta na qual falta um ponto” é uma imagem espantosamente enganosa. A fissura aberta entre ilustração e aplicação.

MS 127, p. 24

38. A generalidade das funções é, por assim dizer, uma generalidade

MS 127, p. 13

desordenada. E a nossa matemática está edificada sobre uma generalidade desordenada assim.

MS 127, p. 14 [266]

39. Wenn man sich den allgemeinen Funktionen-Kalkül ohne die Existenz von Beispielen denkt, dann sind eben die vagen Erklärungen

MS 127, p. 31

durch Wertetafeln und Zeichnungen, wie man sie in den Lehrbüchern findet, am Platz, als *Andeutungen*, wie etwa diesem Kalkül einmal ein Sinn zu geben sein möchte.

Denk dir Einer sagte: »Ich will eine Komposition hören, die so geht«:

Müßte das unsinnig sein? Könnte es nicht eine Komposition geben,

MS 127, p. 32

von der sich zeigen ließe, daß sie, in irgend einem wichtigen Sinne, dieser Linie entspräche?

MS 127, p. 33

Oder wie, wenn man die Stetigkeit als Eigenschaft des Zeichens ›$x^2 + y^2 = z^2$‹ ansähe – natürlich nur, wenn diese Gleichung und andere

MS 127, p. 36

gewohnheitsmäßig einer bekannten Art der Prüfung unterzogen würden. ›*So* stellt sich diese Regel (Gleichung) zu dieser bestimmten Prüfung‹. Eine Prüfung, die mit einem Streifblick auf eine Art Extension geschieht.

Es wird bei jener Prüfung der Gleichung etwas vorgenommen, was mit gewissen Extensionen zusammenhängt. Aber nicht als handelte es sich da um eine Extension, die der

MS 127, p. 37

Gleichung selbst irgendwie äquivalent wäre. Es wird nur auf gewisse Extensionen sozusagen angespielt. – Nicht die Extension ist hier das Eigentliche, das nur faute de mieux intensional beschrieben wird; sondern die *Intension* wird beschrieben – oder dargestellt – vermittels gewisser Extensionen, die sich da und dort aus ihr ergeben.

Der Verlauf gewisser Extensionen wirft

39. Se imaginamos o cálculo geral de funções sem a existência de exemplos, então as vagas explicações

MS 127, p. 31

por meio de tabela de valores e diagramas, tal como as encontramos nos manuais, estão acomodadas como *alusões* de como, por exemplo, se gostaria que alguma vez se desse sentido a este cálculo.[267]

Imagine que alguém dissesse: “Gostaria de ouvir uma composição que tenha um andamento assim”:

Isto teria que ser um contrassenso? Não poderia haver uma composição

MS 127, p. 32

que pudesse ser mostrada como correspondente a esta linha em um sentido importante?

MS 127, p. 33

Ou como seria se considerássemos a continuidade como propriedade do sinal ‘$x^2 + y^2 = z^2$’ – naturalmente, só se esta equação e outras

MS 127, p. 36

fossem *habitualmente* submetidas a um tipo conhecido de checagem. ‘Esta regra (equação) se apresenta *assim* nesta determinada checagem.’ Uma checagem que se produz com um passar de olhos sobre um tipo de extensão.

Nesta checagem da equação se efetua alguma coisa que se conecta com certas extensões. Mas não como se se tratasse aqui de uma extensão que seria

MS 127, p. 37

de algum modo equivalente à própria equação. Alude-se somente a certas extensões, por assim dizer. – Não é a extensão o que propriamente aqui se descreve, faute de mieux, intensionalmente; mas é a *intensão* que é descrita – ou apresentada – mediante certas extensões que são por ela geradas aqui e ali.

MS 127, p. 38

ein *Streiflicht* auf die algebraische Eigenschaft der Funktion.

In diesem Sinne könnte man also sagen, es werfe die Zeichnung einer Hyperbel ein Streiflicht auf die Hyperbelgleichung.

Dem widerspricht nicht, daß jene Extensionen die wichtigste Anwendung der Regel wären; denn es ist eines, eine Ellipse zeichnen, und ein anderes, sie *mittels ihrer Gleichung* konstruieren. –

Wie, wenn ich sagte:

MS 127, p. 39

Die extensionalen Überlegungen (z. B. der Heine-Borelsche Satz) zeigen: *so* soll man die Intensionen behandeln.

Das Theorem gibt uns in großen Zügen eine Methode, wie mit Intensionen zu verfahren ist. Es sagt etwa: ›*So* wird es ausschauen müssen‹.

Und man wird dann etwa zu einem Verfahren mit bestimmten Intensionen eine

MS 127, p. 40

bestimmte Illustration zeichnen können. Die Illustration ist ein Zeichen, eine Beschreibung, die besonders übersichtlich, einprägsam, ist.

Die Illustration wird hier eben ein *Verfahren* angeben.

Lehre, wie Figuren in einem Bilde (Gemälde) zu plazieren sind, – aus allgemeinen ästhetischen Gründen etwa – *abgesehen davon*, ob diese Figuren nun

MS 127, p. 41

kämpfen oder einander liebkosen, etc.

Die Lehre von den Funktionen als ein Schema, in das, einerseits eine Unmenge von Beispielen paßt, und das anderseits, als ein Standard zur Klassifikation von Fällen dasteht.

Das Irreführende der üblichen Darstellung besteht darin, daß es scheint, als ließe sich die *allgemeine* auch ohne

MS 127, p. 42

alle Beispiele, ohne einen Gedanken an Intension*en* (im Plural) ganz verstehen, da sich eigentlich alles extensional abmachen ließe, wenn es aus äußeren Gründen nicht unmöglich wäre.

O decurso de certas extensões jogam

MS 127, p. 38

um *raio de luz* sobre a propriedade algébrica da função.

Neste sentido, poder-se-ia então dizer que o desenho de uma hipérbole joga um raio de luz sobre a equação hiperbólica.

O que não contradiz que essas extensões sejam a aplicação mais importante da regra; pois uma coisa é desenhar uma elipse e outra, construí-la *por meio da sua equação*. –

Seria como se eu dissesse:

MS 127, p. 39

As considerações extensionais (por exemplo, o teorema de Heine-Borel) mostram: deve-se tratar as intensões *assim*.

O teorema nos dá em grandes traços um método sobre como proceder com intensões. Ele diz algo como: 'É *assim* que tem que parecer'.

E então pode-se desenhar, por exemplo, uma determinada ilustração

MS 127, p. 40

para um procedimento com determinadas intensões. A ilustração é um sinal, uma descrição particularmente panorâmica, memorizável.

A ilustração vai assinalar aqui justamente um *procedimento*.

A teoria de como as figuras são colocadas numa imagem (pintura) – por razões estéticas gerais, por exemplo, – *independentemente de* sabermos se estas figuras

MS 127, p. 41

estão em luta ou se acariciando etc.

A teoria das funções como um esquema em que, por um lado, encaixa uma multidão de exemplos, e, por outro lado, está ali como um padrão para a classificação de casos.

O ilusório da apresentação usual consiste em que parece permitir uma compreensão total do *geral* mesmo sem

MS 127, p. 42

nenhum exemplo, sem nenhum pensamento sobre intens*ões* (no plural), pois tudo o que é ex-

Vergleiche die beiden Formen der Erklärung:
»Wir sagen $\lim_{x \to \infty} \varphi (x) = L$, *wenn es sich zeigen läßt*, daß ..., «, und
»$\lim_{x \to \infty} \varphi (n) = L$ heißt: *es gibt für jedes* ε ein δ .... «

MS 127, p. 43

40. Dedekind gibt ein allgemeines Schema der Ausdrucksweise; sozusagen eine logische Form

MS 127, p. 57

des Raisonnements.

Eine allgemeine Formulierung eines Vorgangs. Der Effekt ist ein ähnlicher, wie der der Einführung des Wortes »Zuordnung« zur allgemeinen Erklärung der Funktionen. Es wird eine allgemeine Redeweise eingeführt, die zur Charakterisierung eines mathematischen Vorgangs sehr nützlich ist. (Ähnlich wie in der Aristotelischen Logik.) Die Gefahr aber ist, daß man mit dieser allgemeinen Redeweise die vollständige Erklä-

MS 127, p. 58

rung der einzelnen Fälle zu besitzen glaubt (die gleiche Gefahr wie in der Logik).

Wir bestimmen den Begriff *der Regel* zur Bildung eines unendlichen Dezimalbruchs weiter und weiter.

Aber der Inhalt des Begriffes?! – Nun, können wir denn nicht das Begriffsgebäude ausbauen als Behältnis für welche Anwendung immer daherkommt? Darf ich denn nicht die *Form* ausbauen (die Form zu der mir irgend

MS 127, p. 59

ein Inhalt die *Anregung* geboten hat) und gleichsam eine Sprachform vorbereiten für mögliche Verwendung? Denn diese Form wird auch, soweit sie leer bleibt, die Form der Mathematik bestimmen helfen.

Ist denn nicht die Subjekt-Prädikat Form in dieser Weise offen und wartet auf die verschiedensten neuen Anwendungen?

D. h.: ist es wahr, daß die ganze Schwierig-

MS 127, p. 60

keit, die Allgemeinheit des mathematischen Funktionsbegriffs bietreffend, schon in der Aristotelischen Logik da ist, da die Allgemeinheit der Sätze und Prädikate von uns ebensowenig

tensional pode realmente ser resolvido se não for impossível por razões externas.

Compare as duas formas de explicação:
"Dizemos que $\lim_{x \to \infty} \varphi (x) = L$ *quando se pode mostrar que* ....", e
"$\lim_{x \to \infty} \varphi (n) = L$ significa: *para cada* ε *existe* um δ ...."

MS 127, p. 43[268]

40. Dedekind oferece um esquema geral de forma de expressão; uma forma lógica de raciocínios,

MS 127, p. 57

por assim dizer.

Uma formulação geral de um processo. O efeito é similar ao da introdução da palavra "correlação" para a definição geral das funções. Introduz-se uma maneira de falar que é muito útil para a caracterização de um processo matemático. (Semelhante ao da lógica aristotélica.) Mas o perigo com esta maneira de falar em geral é o de se acreditar possuir a expli-

MS 127, p. 58

cação completa dos casos individuais (o mesmo perigo que há na lógica).

Nós determinamos mais e mais o conceito *de regra* para a formação de uma fração decimal infinita.

Mas e o conteúdo do conceito?! – Bem, não podemos ampliar a estrutura do conceito como um recipiente para qualquer aplicação que sobrevenha? Não posso ampliar a *forma* (a forma que me ofereceu o *estímulo*

MS 127, p. 59

de um conteúdo qualquer), e preparar, por assim dizer, uma forma de linguagem para um emprego possível? Pois esta forma, na medida em que permanece vazia, ajuda também a determinar a forma da matemática.

Não fica então a forma sujeito-predicado deste modo aberta e a espera das mais diferentes e novas aplicações?

Ou seja: é verdade que toda a dificul-

MS 127, p. 60

dade a respeito da generalidade do conceito de função matemática já está na lógica aristotélica, uma vez que não podemos abarcar a generalidade de proposições e predicados como tampouco a das funções matemáticas?

überblickt werden kann, wie die der mathematischen Funktionen?

MS 127, p. 61

41. Begriffe, die in ›notwendigen‹ Sätzen vorkommen, müssen auch in nicht notwen-

MS 127, p. 64

digen auftreten und eine Bedeutung haben.

MS 127, p. 65

42. Würde man von Einern sagen, er verstehe den Satz ›563 + 437 = 1000‹, der nicht wüßte, wie man ihm beweisen kann?

MS 127, p. 160

Kann man leugnen, daß es ein Zeichen des Verstehens des Satzes ist, wenn Einer weiß, wie er zu beweisen wäre?

Das Problem, eine mathematische Entscheidung eines Theorems zu finden, könnte man mit gewissem Recht das Problem nennen, einer Formel mathematischen Sinn zu geben.

MS 127, p. 161

Die Gleichung koppelt zwei Begriffe; sodaß ich nun von einem zum andern übergehen kann.

Die Gleichung bildet eine Begriffsbahn. Aber ist eine Begriffsbahn ein Begriff?? Und wenn nicht, ist

MS 127, p. 162

eine scharfe Grenze zwischen ihnen?

Denke, du hast jemanden eine Technik des Multiplizierens gelehrt. Er verwendet sie in einem Sprachspiel. Damit er nun nicht immer von neuem multiplizieren muß, schreibt er sich die Multiplikation in verkürzter Form, als Gleichung nämlich, auf und benutzt diese, wo er früher multipliziert hat.

MS 127, p. 163

Von der Technik des Multiplizierens nun sagt er, daß sie Verbindungen zwischen den

MS 127, p. 61 [269]

41. Conceitos que ocorrem em proposições ‘necessárias’ têm que aparecer também nas

MS 127, p. 64

não necessárias e ter um significado.

MS 127, p. 65 [270]

42. Diríamos que alguém compreende a proposição ‘563 + 437 = 1000’ se não sabe como ela pode ser demonstrada?

MS 127, p. 160

Pode-se negar que um sinal de compreensão da proposição é se alguém sabe como ela teria que ser demonstrada?

O problema de encontrar uma decisão matemática para um teorema poderia, com certo direito, ser chamado de o problema de dar sentido matemático para uma fórmula.

MS 127, p. 161

A equação acopla dois conceitos; de modo que agora posso atravessar de um para o outro.

A equação forma uma trilha conceitual. Mas uma trilha conceitual é um conceito?? E se não, há

MS 127, p. 162

uma fronteira nítida entre eles?

Imagine que você ensinou para alguém uma técnica de multiplicação. Ele a emprega num jogo de linguagem. Para não ter que multiplicar de novo, ele anota agora a multiplicação de forma abreviada, possivelmente como uma equação, e a utiliza onde ele já tinha feito a multiplicação.

MS 127, p. 163

Sobre a técnica de multiplicação, ele diz agora que ela consegue fazer a conexão entre

Begriffen schlägt. Er wird dasselbe auch von der Multiplikation als Bild dieses Übergangs sagen. Und endlich auch von der Gleichung: Denn es ist ja wesentlich, daß sich der Übergang auch einfach durch das Schema der Gleichung

MS 127, p. 164

muß darstellen lassen. Daß also der Übergang *nicht* immer von Neuem gemacht werden muß.

Wird er nun aber geneigt sein, vom Prozeß des Multiplizierens zu sagen, dieser sei ein Begriff?

Er ist doch eine *Bewegung*. Eine Bewegung scheint es, zwischen zwei Ruhepunkten; diese sind die Begriffe.

Fasse ich den Beweis als meine *Bewegung* von einem Begrif zum andern auf, dann werde ich von ihm nicht auch sagen wollen, er selbst sei ein neuer Begriff. Aber kann ich nicht die Multiplikation als *ein* Bild auffassen,

MS 127, p. 165

vergleichbar einem Zahlzeichen, und kann sie nicht auch als Begriffszeichen funktionieren?

MS 127, p. 166

43. Ich möchte sagen: Wenn wir einmal die eine, einmal die andre Seite der Gleichung verwenden, verwenden wir zwei Seiten desselben Begriffs.

MS 127, p. 167

44. Ist der begriffliche Apparat ein Begriff?

MS 127, p. 168

45. Wie zeigt denn einer, daß er einen mathematischen Satz versteht? Darin, etwa, daß er ihn anwendet. Also nicht auch darin, daß er ihn beweist?

Ich möchte sagen: der Beweis zeigt mir einen neuen Zusammenhang, daher gibt er mir auch einen neuen Begriff.

MS 127, p. 172

Ist der neue Begriff nicht der Beweis selbst?

Du kannst doch gewiß, wenn der Beweis erbracht ist, ein neues Urteil bilden. Denn du kan-

os conceitos. Ele vai dizer o mesmo também da multiplicação como imagem desta transição. E, finalmente, também da equação: Pois é essencial que a transição tenha que ter simplesmente também a possibilidade de ser apresentada

MS 127, p. 164

pelo esquema da equação. Que, portanto, a transição *não* tenha que ser feita sempre de novo.

Mas estaria ele agora inclinado a dizer que o processo de multiplicação é um conceito?

Ele é um *movimento*, certo? Parece ser um movimento entre dois pontos de repouso; estes são os conceitos.

Se concebo a demonstração como meu *movimento* de um conceito para outro, então não vou também querer dizer que ele próprio é um novo conceito. Mas não posso conceber a multiplicação como *uma* imagem

MS 127, p. 165

comparável a um sinal numérico, e ela não pode também funcionar como um sinal conceitual?

MS 127, p. 166

43. Gostaria de dizer: Se empregamos ora um lado, ora o outro, da equação, empregamos dos dois lados o mesmo conceito.

MS 127, p. 167

44. O aparato conceitual é um conceito?

MS 127, p. 168 [271]

45. Como alguém mostra que compreende uma proposição matemática? Por exemplo, pelo seu emprego. Portanto, também não pelo fato de que a demonstra?

Gostaria de dizer: a demonstração me mostra uma nova conexão, assim sendo ela também me dá um novo conceito.

MS 127, p. 172

O novo conceito não é a própria demonstração?

Você pode, certamente, quando a demonstração é apresentada, formar um novo juízo.

nst doch nun von einem bestimmten Muster sagen, es sei oder sei nicht dieser Beweis.

Ja, aber ist der Beweis als Beweis betrachtet, gedeutet, eine Figur? Als *Beweis*, könnte ich sagen, soll er mich von etwas überzeugen. Ich will, auf ihn hin, etwas tun oder lassen. Und auf einen neuen Begriff hin tue oder lasse ich nichts.

MS 127, p. 173

Ich will also sagen: der Beweis ist das Beweisbild in bestimmter Art verwendet.

Und das, wovon er mich überzeugt, kann nun sehr verschiedener Art sein. (Denke an Beweise Russellscher Tautologien, Beweise in der Geometrie und in der Algebra.)

Der Mechanismus kann mich von etwas überzeugen (kann etwas beweisen). Aber unter welchen Umständen – in welcher Umgebung von Tätigkeiten und Problemen – werde ich sagen, er überzeuge mich von etwas?

MS 127, p. 174

»Aber ein Begriff überzeugt mich doch von nichts, denn er zeigt mir nicht eine Tatsache.« – Aber warum soll mich ein Begriff nicht vor allem davon überzeugen, daß ich *ihn* gebrauchen will?

Warum soll der neue Begriff, einmal gebildet, mir nicht unmittelbar den Übergang zu einem Urteil gestatten?

MS 127, p. 176

46. ›Einen mathematischen Satz verstehen‹ – das ist ein sehr vager Begriff.

Sagst du aber »Aufs Verstehen kommt's überhaupt nicht an. Die mathematischen Sätze sind nur Stellungen in einem Spiel«, so ist das auch Unsinn!

MS 127, p. 184

›Mathematik‹ ist eben kein scharf umzogener Begriff.

Daher der Streit, ob ein Existenzbeweis, der keine Konstruktion ist, ein wirklicher Existenzbeweis ist. Es fragt sich nämlich: *verstehe* ich den Satz »Es gibt ... « wenn ich keine Möglichkeit habe zu finden, wo es existiert? Und da gibt es zwei Gesichtspunkte: Als deutschen Satz z. B. verstehe ich ihn, soweit ich ihn nämlich erklären kann (und merke, wie weit meine Erklärung geht!). Was aber kann ich mit ihm anfangen? Nun, nicht

MS 127, p. 185

Porque agora você pode dizer de um determinado padrão que ele é ou não é esta demonstração.

Sim, mas é a demonstração, considerada, interpretada, como demonstração, uma figura? Como *demonstração*, eu poderia dizer, ela deve me convencer de algo. Eu quero, em relação a ela, fazer ou deixar de fazer algo. E, em relação a um noco conceito, nada faço ou deixo de fazer.

MS 127, p. 173

Quero, por isto, dizer: a demonstração é a imagem da demonstração empregada de um certo modo.

E aquilo do que ela me convence pode ser, então, de muitos tipos diferentes. (Pense em demonstrações de tautologias Russellianas, demonstrações da geometria e da álgebra.)

O mecanismo pode me convencer de algo (pode demonstrar alguma coisa). Mas em que circunstâncias – em que ambiente de atividades e problemas – vou dizer que ele me convenceu de alguma coisa?

MS 127, p. 174 [272]

"Mas, de todo modo, um conceito não me convence de nada, porque não me mostra um fato." – Mas por que um conceito não deveria antes de tudo me convencer a querer usá-*lo*?

Por que não deveria o novo conceito, uma vez formado, me permitir imediatamente a transição para um juízo?

MS 127, p. 176 [273]

46. 'Compreender uma proposição matemática' – este é um conceito muito vago.

Mas se você disser "A compreensão não é de nenhum modo importante. As proposições matemáticas são apenas posições em um jogo", isto também é um contrassenso!

MS 127, p. 184

'Matemática' não é exatamente um conceito muito bem delimitado.

Daí a disputa sobre se uma demonstração de existência que não é uma construção seja realmente uma demonstração de existência. Com efeito, pode-se questionar: *compreendo* a proposição "Existe ..." se não tenho nenhuma possibilidade de achar onde isto existe? E ali existem dois pontos de vista: como proposição em português, por exemplo, eu a compreendo na medida em que, de fato, eu a posso explicar (e note até que ponto vai a minha explicação!). Mas o que posso fazer com ela? Ora, não das was mit einem Konstruktionsbeweis. Und soweit, was ich mit dem Satz machen kann, das Kriterium seines Verstehens ist, soweit ist es nicht *von vornherein* klar, ob und wie weit ich ihn verstehe.

Das ist der Fluch des Einbruchs der mathematischen Logik in die Mathematik, daß nun jeder Satz sich in mathematischer Schreibung darstellen läßt, und wir uns daher verpflichtet fühlen, ihn zu verstehen. Obwohl ja diese Schreibweise nur die Übersetzung der vagen gewöhnlichen Prosa ist.

MS 127, p. 186

47. Ein Begriff ist nicht wesentlich ein Prädikat. Wir sagen zwar manchmal: »dieses Ding ist keine Flasche«, aber es ist dem

MS 127, p. 187

Sprachspiel mit dem Begriff ›Flasche‹ gar nicht wesentlich, daß solche Urteile darin gefällt werden. Achte eben darauf, wie ein Begriffswort (zum Beispiel »Platte«) in einem Sprachspiel gebraucht wird.

Es brauchte zum Beispiel gar keinen Satz »dies ist eine Platte« geben; sondern etwa nur den: »hier ist eine Platte«.

48. Die ›mathematische Logik‹ hat das Denken von Mathematikern und Philosophen gänzlich verbildet, indem

MS 127, p. 188

sie eine oberflächliche Deutung der Formen unserer Umgangsprache zur Analyse der Strukturen der Tatsachen erklärte. Sie hat hierin freilich nur auf der Aristotelischen Logik weiter gebaut.

MS 127, p. 189

49. Es ist schon wahr: das Zahlzeichen gehört zu einem Begriffszeichen und

MS 127, p. 194

nur mit diesem ist es sozusagen ein Maß.

MS 127, p. 195

MS 127, p. 185

o que posso com uma demonstração de construção. E, na medida em que o critério da compreensão é o que posso fazer com a proposição, até aqui não está claro *desde o princípio* se e até onde a compreendo.

Esta é a maldição da incursão da lógica matemática na matemática, a de que toda a proposição pode ser apresentada em escrita matemática e por isto nos sentimos comprometidos a compreendê-la. Mesmo que esta forma de notação seja apenas a tradução da vaga prosa cotidiana.

MS 127, p. 186

47. Um conceito não é essencialmente um predicado.[274] Na verdade, nós dizemos muitas vezes: “esta coisa não é uma garrafa”, mas não é

MS 127, p. 187

realmente essencial no jogo de linguagem do conceito ‘garrafa’ que este juízo ocorra ali. Esteja atento a como palavras conceituais (como, por exemplo, “chapa”) são usadas num jogo de linguagem.

Nem é mesmo preciso haver, por exemplo, uma proposição como “Isto é uma chapa”; senão somente, por exemplo, esta: “Aqui está uma chapa”. [275]

48. A ‘Lógica Matemática’ deformou completamente o pensamento de matemáticos e filósofos ao

MS 127, p. 188

explicar uma interpretação superficial das formas da nossa linguagem cotidiana como análise das estruturas dos fatos. Nisto, com efeito, ela só alargou a edificação da lógica aristotélica.

MS 127, p. 189

49. Isto é bem verdade: o numeral pertence a um conceitual, e

MS 127, p. 194

só com este é, por assim dizer, uma medida.

MS 127, p. 195

50. Wenn du dieser Maus ins Maul schaust, wirst du zwei lange Schneidezähne sehen. – Wie weißt du das? – Ich weiß, daß alle Mäuse sie haben, also auch diese. (Und man sagt nicht: »und dieses Ding ist eine Maus, also hat auch sie … «) Warum ist das eine so wichtige Bewegung? Nun, wir untersuchen z. B. Tiere, Pflanzen etc. etc., bilden allgemeine Urteile und wenden sie im einzelnen Fall an. – Es ist aber doch eine Wahrheit, daß diese Maus die Eigenschaft hat, *wenn alle* Mäuse sie haben! Das ist eine Bestimmung über die Anwendung des Wortes »alle«. Die

MS 127, p. 204

tatsächliche Allgemeinheit liegt wo anders. Nämlich z. B. in dem allgemeinen Vorkommen jener Untersuchungsmethode und ihrer Anwendung.

Oder: »Dieser Mann ist ein Student der Mathematik.« Wie weißt du das? – »Alle Leute in diesem Zimmer sind Mathematiker; es sind nur solche zugelassen worden.« –

Das interessante Allgemeine ist, daß wir oft ein Mittel haben, uns vom allgemeinen Satz zu überzeugen, ehe wir besondere Fälle in Betracht ziehen:

MS 127, p. 205

und daß wir dann mittels der allgemeinen Methode den besondern Fall beurteilen.

Wir haben dem Pförtner den Befehl gegeben, nur Leute mit Einladungen hereinzulassen und rechnen nun darauf, daß dieser Mensch, der hereingelassen wurde, eine Einladung hat.

Das interessante Allgemeine am logischen Satz ist nicht die Tatsache, die er auszusprechen scheint, sondern die immer wiederkehrende Situation, in der dieser Übergang gemacht

MS 127, p. 206

wird.

MS 127, p. 207

51. Wenn man vom Beweis sagt, er zeige wie (z. B.) 25 x 25 625 ergeben;

MS 127, p. 229

so ist das natürlich eine seltsame Redeweise, da das arithmetische Ergebnis ja kein zeitlicher Vorgang ist. Aber nun zeigt ja der Beweis auch keinen Vorgang.

Denke dir eine Reihe von Bildern. Sie zeigen, wie zwei Leute nach den und den Regeln mit Rapieren fechten. Eine Bilderreihe kann das doch zeigen. Hier bezieht sich das Bild auf eine Wirklichkeit. Man kann nicht sagen, es zeige, *daß* so gefochten wird, aber *wie* gefochten wird.

50. Se você olhar para o focinho deste rato, vai ver dois grandes dentes incisivos. – Como você sabe disto? – Eu sei que todos os ratos os têm, portanto também este. (E não se diz: “e esta coisa é um rato, portanto ele também …” Por que isto é um movimento tão importante? Bem, nós investigamos, por exemplo, animais, plantas etc., etc., formamos juízos gerais e os aplicamos a casos particulares. – Mas de todo modo é uma verdade que este rato tem a propriedade *se todos* a tiverem! Esta é uma determinação sobre a aplicação da palavra “todos”. A

MS 127, p. 204

efetiva generalidade está em outro lugar. Digamos, por exemplo, na ocorrência geral daquele método de investigação e a sua aplicação.

Ou: “Este homem é um estudante de matemática.” Como você sabe disto? – “Todas as pessoas nesta sala são matemáticos; são só estes os que foram admitidos.” –

A generalidade interessante é a de que nós frequentemente temos um meio de nos convencer pela proposição geral antes de levarmos em consideração os casos particulares:

MS 127, p. 205

e que então julgamos o caso particular por meio do método geral.

Nós demos ao porteiro a ordem de só deixar entrar gente com convite, e contamos agora com que esta pessoa que deixamos entrar tenha um convite.

A generalidade interessante da proposição lógica não é o fato que ela parece proferir, senão a sempre recorrente situação em que é feita esta

MS 127, p. 206

transição.

MS 127, p. 207

51. Se dizemos da demonstração que ela mostra como (por exemplo) 25 x 25 dá 625;

MS 127, p. 229

então isto é, naturalmente, uma forma de falar estranha, já que o resultado aritmético não é um processo temporal. Mas a demonstração tampouco mostra algum processo.

Imagine uma série de imagens. Elas mostram como duas pessoas esgrimem floretes de acordo com tais e tais regras. Uma série de imagens pode mostrar isto, presume-se. A imagem aqui refere-se a uma realidade. Não se pode dizer que ela mostra *que* se esgrimiu assim, mas

In einem andern

MS 127, p. 230

Sinne kann man sagen, die Bilder zeigen, wie man in drei Bewegungen von dieser Lage in jene kommen kann. Und nun zeigen sie auch, *daß* man auf diese Weise in jene Lage kommen kann.

MS 127, p. 231

52. Der Philosoph muß sich so drehen und wenden, daß er an den mathematischen Problemen vorbeikommt, nicht gegen eines rennt, – das gelöst werden müßte, ehe er weiter gehen kann.

Sein Arbeiten in der

MS 127, p. 198

Philosophie ist gleichsam eine Faulheit in der Mathematik.

Nicht ein neues Gebäude ist aufzuführen, oder eine neue Brücke zu schlagen, sondern die Geographie, *wie sie jetzt ist*, zu beschreiben.

Wir sehen wohl Stücke der Begriffe, aber nicht klar die Abhänge, die den einen in andere übergehen lassen.

MS 127, p. 199

Darum hilft es in der Philosophie der Mathematik nichts, Beweise in neue Formen umzugießen. Obwohl hier eine starke Versuchung liegt.

Auch vor 500 Jahren konnte es eine Philosophie der Mathematik geben, dessen, was damals die Mathematik war.

MS 127, p. 200

53. Der Philosoph ist der, der in sich viele Krank-

MS 127, p. 219

heiten des Verstandes heilen muß, ehe er zu den Notionen des gesunden Menschenverstandes kommen kann.

MS 127, p. 220

como se esgrime. Em um outro

MS 127, p. 230

sentido, pode-se dizer que as imagens mostram como se pode chegar em três movimentos desta posição para aquela. E agora elas mostram também *que* se pode chegar deste modo naquela posição.

MS 127, p. 231

52. O filósofo tem que se virar de um lado para o outro de tal modo que contorne os problemas matemáticos e não se jogue contra um deles, – isto teria que ser resolvido antes que ele possa ir adiante.

O seu trabalho na

MS 127, p. 198

filosofia é como o de um preguiçoso na matemática.

Não se trata de construir um novo edifício ou lançar uma nova ponte, senão de descrever a geografia *tal como ela está agora*.

Nós vemos bem as partes dos conceitos, mas não claramente os barrancos que permitem atravessar de um para o outro.[276]

MS 127, p. 199

Por isto é que de nada ajuda na filosofia da matemática refundir as demonstrações em novas formas. Embora haja aqui uma grande tentação.

Mesmo há 500 anos poderia haver uma filosofia da matemática para o que era então a matemática.

MS 127, p. 200

53. O filósofo é aquele que tem que se curar de muitas

MS 127, p. 219

doenças do entendimento antes de que possa chegar às noções do entendimento humano sadio.

MS 127, p. 220 [277]

Teil VI
ca. 1941-1944

1. Die Beweise ordnen die Sätze.
Sie geben ihnen Zusammenhang.

2. Der Begriff einer formalen Prüfung setzt den Begriff einer Regel des Transformierens, und also einer Technik, voraus.

Denn nur durch eine Technik können wir eine Regelmäßigkeit *begreifen*.

Die Technik ist außerhalb des Beweisbildes. Man könnte den Beweis genau sehen und ihn doch nicht als Transformation nach diesen Regeln

MS 164, p. 1

verstehen.

Man wird gewiß die Addition der Zahlen .... , um zu sehen, ob sie 1.000 geben, eine formale Prüfung der Zahlzeichen nennen. Aber doch *nur*, wenn das Addieren eine praktizierte Technik ist. Denn wie könnte der Vorgang denn sonst irgendeine Prüfung genannt werden?

Der Beweis ist eine formale Prüfung nur innerhalb einer *Technik* des Transformierens.

Wenn du fragst, mit welchem

MS 164, p. 2

Recht sprichst du diese Regel aus, so ist die Antwort der Beweis.

Mit welchem Recht sagst du das? Mit *welchem* Recht sagst du das?

Wie prüfst du das Thema auf eine kontrapunktische Eigenschaft?
Du transformierst es nach *dieser* Regel, setzt es *so* mit einem andern zusammen; und dergleichen. So erhältst du ein bestimmtes Resultat. Du erhältst es, wie du es durch ein Experiment auch erhieltest.

MS 164, p. 3

Soweit konnte, was du tust, auch ein Experiment sein. Das Wort »erhältst« ist hier zeitli-

Parte VI
ca. 1941-1944

1. As demonstrações ordenam as proposições.
Elas lhes dão um contexto.

2. O conceito de uma checagem formal pressupõe o conceito de uma regra de transformação, e, portanto, de uma técnica.

Pois só mediante uma técnica podemos *apreender* uma regularidade.

A técnica está fora da imagem da demonstração. Poder-se-ia ver a demonstração de maneira exata e não compreendê-la como transformação segundo estas

MS 164, p. 1

regras.

Certamente a adição dos números ...., para ver se eles dão 1.000, será chamada de uma checagem formal dos numerais. Mas, de todo modo, *só* se a adição for uma técnica praticada. Pois, se não, como se poderia chamar o processo de alguma forma de checagem?

A demonstração só é uma checagem formal no interior de uma *técnica* de transformação.

Se você pergunta com que

MS 164, p. 2

direito você profere essa regra, a resposta é a demonstração.

Com que direito você diz isso? Com *que* direito você diz isso?

Como você verifica o tema de uma propriedade contrapontística?
Você o transforma segundo *esta* regra, o confronta *assim* com um outro; e assim por diante. Então você consegue um resultado determinado. Você o consegue do mesmo modo que você também o consegue mediante um experimento.

MS 164, p. 3

Até aqui o que você fez poderia ser também um experimento. A palavra “consegue” é ch gebraucht; du erhieltst das Resultat um 3 Uhr. – In dem mathematischen Satz, den ich dann forme, ist das Verbum (»erhält«, »ergibt« etc.) unzeitlich gebraucht.

Die Tätigkeit der Prüfung brachte das und das Resultat hervor. Die Prüfung war bis jetzt also sozusagen experimentell. Nun wird sie als Beweis aufgefaßt. Und der Beweis ist das *Bild* einer Prüfung.

MS 164, p. 4

Der Beweis steht im Hintergrund des Satzes, wie die Anwendung. Er hängt auch mit der Anwendung zusammen.

Der Beweis ist der Weg der Prüfung.

Die Prüfung ist eine formale nur insofern, als wir das Ergebnis als das eines formalen Satzes auffassen.

3. Und wenn dieses Bild die Voraussage rechtfertigt – das heißt, wenn du es nur sehen brauchst und überzeugt bist, ein

MS 164, p. 5

Vorgang werde so und so verlaufen – dann rechtfertigt dieses Bild natürlich auch die Regel. In diesem Falle steht der Beweis hinter der Regel als Bild, das sie rechtfertigt. –

Warum rechtfertigt denn das Bild der Bewegung des Mechanismus den Glauben, *diese* Bewegung werde diese Art von Mechanismus immer machen? – Es gibt unserm Glauben eine bestimmte Richtung.

Wenn der Satz in

MS 164, p. 6

der Anwendung nicht zu stimmen scheint, so muß mir der Beweis doch zeigen, warum und wie er stimmen *muß*, das heißt, *wie* ich ihn mit der Erfahrung versöhnen muß.

Der Beweis ist also auch eine Anweisung zur Benützung der Regel.

4. Wie rechtfertigt der Beweis die Regel? – Er zeigt wie und daher warum sie benützt werden kann.

Der Läufer des Königs zeigt uns, *wie* 8 x 9 72 ergibt – aber da

usada temporalmente aqui. Você consegue o resultado às 3 horas. – Na proposição matemática que formo nesta hora, o verbo ("consegue", "gera" etc.) é usado atemporalmente.

A atividade de checagem produziu tal e tal resultado. A checagem foi até o momento experimental, por assim dizer. Agora ela é concebida como demonstração. E a demonstração é a *imagem* de uma checagem.

MS 164, p. 4

A demonstração está no pano de fundo da proposição,[278] assim como a aplicação. Ela também se conecta com a aplicação.

A demonstração é o caminho da checagem.

A checagem só é formal na medida em que concebemos o resultado como o de uma proposição formal.

3. E se essa imagem justifica a previsão – ou seja, se você só precisa ver isto e está convencido de que

MS 164, p. 5

um processo decorrerá assim e assim, – então esta imagem justifica, naturalmente, também a regra. Neste caso, a demonstração fica por detrás da regra como uma imagem que a esta justifica. –

Por que então a imagem do movimento do mecanismo justifica a crença de que este tipo de mecanismo fará sempre *este* movimento? – Ela dá à nossa crença uma direção determinada.

Se a proposição

MS 164, p. 6

não parece se coadunar com a aplicação, então a demonstração tem que me mostrar, de todo modo, por que e como ela *tem que* se coadunar, ou seja, *como* tenho que conciliá-la com a experiência.

A demonstração é também, portanto, uma instrução para a utilização da regra.

4. Como a demonstração justifica a regra? – Ela mostra como e, por este motivo, por que a regra pode ser utilizada.

O bispo do rei nos mostra *como* 8 x 9 dá 72 – mas aqui

MS 164, p. 7

ist die Regel des Zählens nicht als Regel anerkannt.

Der Läufer des Königs zeigt uns, *daß* 8 x 9 72 ergibt: Nun erkennen wir die Regel an.

Oder sollte ich sagen: der Läufer des Königs zeigt mir, wie 8 x 9 72 ergeben *kann*; das heißt, er zeigt mir *eine* Weise.

Der Vorgang zeigt mir

MS 164, p. 8

ein Wie des Ergebens.

Insofern 8 x 9 = 72 eine Regel ist, heißt es natürlich nichts zu sagen, jemand zeige mir *wie* 8 x 9 = 72 ist; es sei denn, dies hieße: jemand zeigt mir einen Vorgang, durch dessen Anschauen man zu dieser Regel geleitet wird.

Ist nun nicht das Durchgehen jedes Beweises ein solcher Vorgang?

Hieße es etwas zu sagen: »Ich will dir

MS 164, p. 9

zeigen, wie 8 x 9 zuerst 72 ergab«?

5. Das Seltsame ist ja, daß das Bild, nicht die Wirklichkeit, einen Satz soll erweisen können! Als übernähme hier das Bild selbst die Rolle der Wirklichkeit. – Aber so ist es doch nicht: denn aus dem Bild leite ich nur eine Regel ab. Und die verhält sich zum Bild nicht so, wie der Erfahrungssatz zur Wirklichkeit. – Das Bild zeigt natürlich nicht, daß das und das geschieht. Es zeigt nur, daß, was geschieht, *so*

MS 164, p. 10

aufgefaßt werden kann.

Der Beweis zeigt, wie man nach der Regel vorgeht, ohne anzustoßen.

Man kann also auch sagen: der Vorgang, der Beweis, zeige mir, inwiefern 8 x 9 = 72 ist.

Das Bild zeigt mir natürlich nicht, daß etwas geschieht, aber, daß was immer geschieht sich so wird anschauen lassen.

Wir werden dazu gebracht: diese Technik in diesem Falle zu verwenden.

MS 164, p. 7

a regra da contagem não está reconhecida como regra.

O bispo do rei nos mostra *que* 8 x 9 dá 72: agora reconhecemos a regra.[279]

Ou deveria dizer: o bispo do rei me mostra como é que 8 x 9 *pode* dar 72; ou seja, ele me mostra *uma* maneira.

O processo me mostra

MS 164, p. 8

um como do resultado.

Na medida em que 8 x 9 = 72 é uma regra, isto não significa dizer, naturalmente, que alguém me mostra *como* é que 8 x 9 = 72; a não ser que isto signifique: alguém me mostra um processo cuja visão conduz a esta regra.

E não é o percurso de toda demonstração um processo deste tipo?

Significaria alguma coisa dizer: "Quero te

MS 164, p. 9

mostrar como 8 x 9 deu 72 pela primeira vez"?

5. O estranho é que seja a imagem, não a realidade, que deve poder fazer a demonstração de uma proposição! Como se a própria imagem aqui tomasse para si o papel da realidade. – Mas não é assim, certo?: pois da imagem só derivo uma regra. E esta não se relaciona com a imagem do mesmo modo que a proposição empírica com a realidade. – A imagem não mostra, naturalmente, que isto e isto ocorre. Ela só mostra que o que ocorre pode

MS 164, p. 10

ser concebido *assim*.

A demonstração mostra como proceder de acordo com a regra sem esbarrar nela.

Pode-se, por conseguinte, também dizer: o processo, a demonstração, me mostra em que medida 8 x 9 = 72.

A imagem não me mostra, naturalmente, que ocorre alguma coisa, mas que o que sempre ocorre pode ser visto assim.[280]

MS 164, p. 11

Ich werde dazu gebracht – und in *sofern* von etwas überzeugt.

Sieh, so geben 3 und 2   5. Merk dir diesen Vorgang. »Du merkst dir dabei die Regel auch gleich.«

6. Der Euklidische Beweis der Endlosigkeit der Primzahlenreihe könnte so geführt werden, daß die Untersuchung der Zahlen zwischen p und p! + 1 an einem Beispiel oder mehreren vorgeführt und uns so eine Technik der Untersuchung gelehrt würde. Die Kraft des Beweises läge dann natürlich nicht darin, daß in *diesem* Beispiel eine Prim-

MS 164, p. 12

zahl > p gefunden würde. Und das ist, auf dem ersten Blick, seltsam.

Man wird nun sagen, daß der algebraische Beweis strenger ist als der durch Beispiele, weil er sozusagen der Extrakt des wirksamen Prinzips dieser Beispiele ist. Aber *eine* Einkleidung enthält ja der algebraische Beweis auch. *Verstehen* – könnte ich sagen – muß man beide!

Der Beweis lehrt

MS 164, p. 13

uns eine Technik, eine Primzahl zwischen p und p! + 1 zu finden. Und wir werden überzeugt, daß diese Technik immer zu einer Primzahl > p führen muß. Oder, daß wir uns verrechnet haben, wenn sie es nicht tut.

Wäre man nun hier geneigt zu sagen, der Beweis zeige uns *wie* es eine unendliche Reihe von Primzahlen gibt? Nun, man könnte es sagen. Und jedenfalls: »inwiefern es unendlich viele Primzahlen gibt«. Man könnte sich ja auch denken, wir hätten

MS 164, p. 14

einen Beweis, der uns zwar bestimmte, zu sagen, es gebe unendlich viele Primzahlen, aber uns nicht lehrte, eine Primzahl > p zu finden.

Nun würde man vielleicht sagen: »diese beiden Beweise bewiesen dann trotz alledem den gleichen Satz, die gleiche mathematische Tatsache«. Dies zu sagen, könnte Grund vorhanden sein, oder auch nicht.

7. Der Zuschauer sieht den ganzen, eindrucksvollen Vorgang. Und er wird von etwas überzeugt; denn das ist

Nós somos levados a: empregar esta técnica neste caso.

MS 164, p. 11

Fui levado a – e, *nesta medida*, convencido de algo.

Veja, assim é que 3 e 2 dão 5. Repare neste processo. “Você também repara simultaneamente na regra.”

6. A demonstração euclidiana da infinitude da série dos números primos pode ser conduzida de tal modo que a investigação dos números entre p e p! + 1 seja apresentada em um ou mais exemplos e nos seja ensinada, assim, uma técnica de investigação. Então a força da demonstrão não consistiria, naturalmente, em que *neste* exemplo um número

MS 164, p. 12

primo > p viesse a ser encontrado. E isto é estranho à primeira vista.

Ora, diremos que a demonstração algébrica é mais rigorosa do que a que se faz por exemplos, porque ela, por assim dizer, é o extrato do princípio de eficácia desses exemplos. Mas a demonstração algébrica também porta *uma* roupagem. Para *compreender*[281] – poderia dizer – temos que compreender as duas!

A demonstração nos

MS 164, p. 13

ensina uma técnica, encontrar um número primo entre p e p! + 1. E somos convencidos de que esta técnica sempre tem que levar a um número primo > p. Ou de que nós erramos no cálculo quando isto não ocorre.

Estaria alguém aqui então inclinado a dizer que a demonstração nos mostra *como* existe uma série infinita de números primos? Ora, poder-se-ia dizer isto. E em todo caso: “até que ponto existem infinitos números primos”. Poder-se-ia também imaginar que temos

MS 164, p. 14

uma demonstração que, conquanto nos determine a dizer que há infinitos números primos, não nos ensina entretanto a encontrar um número primo > p.

Pois bem, talvez se dissesse: “estas duas demonstrações verificam, apesar de tudo, a mesma proposição, o mesmo fato matemático”. Poderia haver uma razão ou não para dizer isto.

7. O espectador vê por inteiro o impressionante processo. E fica convencido de algo; pois esta é

MS 164, p. 15

ja der besondere Eindruck, den er erhält. Er geht von dem Schauspiel, überzeugt von etwas. Überzeugt, daß er mit andern Zahlen (zum Beispiel) zum selben Ende kommen wird. Er wird bereit sein, das, wovon er überzeugt wurde, so und so auszusprechen. Überzeugt wovon? Von einer psychologischen Tatsache? –

Er wird sagen, er habe aus dem, was er gesehen hat, einen Schluß gezogen. – *Nicht* aber, wie aus einem Experiment. (Denke an die periodische Division.)

Könnte er sagen: »Was ich

MS 164, p. 16

gesehen habe, war sehr eindrucksvoll. Ich habe daraus einen Schluß gezogen. Ich werde in Zukunft ... «?

(Etwa: ich werde in Zukunft immer *so* rechnen.)
Er erzählt:
»Ich habe gesehen, daß es so sein muß.«

»Ich habe eingesehen, daß es so sein muß« – so wird er berichten.

Er wird nun vielleicht im Geiste den Beweisvorgang durchlaufen.

Aber er sagt nicht: Ich

MS 164, p. 17

habe eingesehen, daß *das* geschieht. Sondern: daß es so sein muß. Dieses »muß« bedeutet einen Zirkel.

Ich entscheide mich dafür, die Dinge *so* anzusehen. Also auch, so und so zu handeln.

Ich denke mir, daß, wer den Vorgang sieht, selbst eine Moral aus ihm zieht.

›Es muß so sein‹ bedeutet, daß der Ausgang als dem Prozeß wesentlich erklärt wurde.

MS 164, p. 18

8. Dieses Muß zeigt, daß er einen Begriff angenommen hat.

Dieses Muß bedeutet, daß er im Kreis gegangen ist.

MS 164, p. 15

a impressão particular que ele recebe. Ele sai do espetáculo convencido de algo. Convencido de que chegará ao mesmo fim com outros números (por exemplo). Ele está pronto para expressar isto e aquilo acerca do que foi convencido. Convencido do quê? De um fato psicológico? –

Ele vai dizer que tirou uma conclusão daquilo que viu. – Mas *não* como de um experimento. (Pense na dízima periódica.)[282]

Ele poderia dizer: “O que

MS 164, p. 16

vi era muito impressionante. Eu tirei dali uma conclusão. No futuro, vou ...”?

(Digamos: no futuro vou sempre calcular *assim*.)
Ele conta:
“Eu vi que isso tem que ser assim.”

“Eu me dei conta de que isso tem que ser assim” – é assim que ele vai informar.

Talvez ele percorra agora no intelecto o processo de demonstração.

Mas ele não diz: eu

MS 164, p. 17

me dei conta de que é *isto* o que ocorre. Senão: isto tem que ser assim. Este “exigir” significa um círculo.[283]

Eu tomo a decisão de ver as coisas *assim*. Por conseguinte, também de agir assim e assim.

Imagino que quem vê o processo tira dele até mesmo uma moral.

‘Isto tem que ser assim’ significa que o desenlace foi explicado de maneira essencial para o processo.

MS 164, p. 18

8. Este exigir mostra que ele assumiu um conceito.

Este exigir significa que ele entrou num círculo.

Statt einem naturwissenschaftlichen Satz hat

MS 164, p. 19

er eine Begriffsbestimmung von dem Vorgang abgelesen.

Begriff heiße hier Methode. Im Gegensatz zu der Anwendung der Methode.

9. Sich' *so* gibt 50 und 50 100. Man hat etwa successive fünfmal 10 zu 50 addiert. Und man verfolgt das Anwachsen der Zahl bis sie zu 100 wird. Hier wäre natürlich der beobachtete Vorgang ein Vorgang der Rechnung in irgend einer Weise (auf dem Abakus, etwa), ein Beweis.

Die Bedeutung des »*so*« ist natürlich nicht, der Satz »50 + 50 = 100«

MS 164, p. 20

sage: das gehe irgendwo vor. Es ist also nicht, wie wenn ich sage: »Siehst du, *so* galoppiert ein Pferd« – und ihm Bilder zeige.

Man könnte aber sagen: »Siehst du, *darum* sage ich ›50 + 50 = 100‹.«

Oder: »Siehst du, so erhält man, daß 50 + 50 = 100 ist.«

Wenn ich nun aber sage: »Sieh' *so* ergibt 3 + 2 5« und lege

MS 164, p. 21

dabei 3 Äpfel auf den Tisch und dann 2 dazu; so will ich etwa sagen: 3 Äpfel und 2 Äpfel geben 5 Äpfel, wenn keiner wegkommt, oder dazukommt. – Oder man könnte Einern auch sagen: Wenn du (wie ich jetzt) 3 Äpfel und dann noch 2 auf den Tisch legst, so geschieht fast immer das, was du jetzt siehst und es liegen nun 5 Äpfel da.

Ich will ihm etwa zeigen, daß 3 Äpfel und 2 Äpfel nicht *so* 5 Apfel ergeben, wie sie 6 Äpfel ergeben können (indem etwa plötzlich einer erscheint).

MS 164, p. 22

Das ist eigentlich eine Erklärung, Definition der Operation des Addierens. So könnte man ja wirklich das Addieren mit dem Abakus erklären.

»Wenn wir 3 Dinge zu 2 Dingen legen, so kann das verschiedene Anzahlen von Dingen ergeben. Aber als *Norm* sehen wir den Vorgang an, daß 3 Dinge und 2 Dinge 5 Dinge ergeben. Siehst du, *so* schaut es aus, wenn sie 5 ergeben.«

Könnte man dem Kind nicht sagen: »Zeig mir, wie 3 und 2 5 ergeben«.

Em vez de uma proposição da ciência natural,

MS 164, p. 19

ele fez a leitura de uma determinação de conceito do processo.

Conceito significa aqui método. Ao contrário da aplicação do método.

9. Veja, é *assim* que 50 e 50 dão 100. Soma-se sucessivamente, digamos, 10 a 50 cinco vezes. E acompanhamos o aumento do número até que ele chegue a 100. O processo observado aqui, um processo de cálculo, naturalmente, seria de algum modo uma demonstração (no ábaco, por exemplo).

O significado do "*assim*" não é, naturalmente, que a proposição "50 + 50 =

MS 164, p. 20

100" diga: isto acontece em algum lugar. Isto não é, portanto, tal como quando digo: "Veja, é *assim* que galopa um cavalo" – e lhe mostro imagens.

Mas poder-se-ia dizer: "Veja, *por isto* é que digo que '50 + 50 = 100'."

Ou: "Veja, assim se consegue que 50 + 50 seja = 100."

Mas se digo agora: "Veja, *assim* 3 + 2 dão 5", colocando

MS 164, p. 21

3 maçãs em cima da mesa e em seguida mais 2; então o que quero dizer, por exemplo, é: 3 maçãs e 2 maçãs dão 5 maçãs, se nenhuma for retirada ou acrescentada. – Ou poder-se-ia também dizer para alguém: se você colocar (como eu agora) 3 maçãs e depois mais 2 em cima da mesa, então quase sempre ocorre o que você vê agora, que ficam ali 5 maçãs.

Quero mostrar para ele, digamos, que 3 maçãs e 2 maçãs não resultam *assim* em 5 maçãs, tal como poderiam resultar em 6 maçãs (se uma a mais apareça de repente, por exemplo).

MS 164, p. 22

Isto é propriamente uma explicação, uma definição da operação de adição. Deste modo poder--se-ia realmente explicar a adição com o ábaco.

"Se acrescentamos 3 coisas a 2 coisas, disto pode resultar diferentes contagens de coisas. Mas consideramos como *norma* o processo de que 3 coisas e 2 coisas resultam em 5 coisas. Você vê que isto parece *assim* quando resulta em 5."

Não poderia ser dito para uma criança: "Mostre-me como 3 e 2 resultam em 5".

MS 164, p. 23

Und das Kind hätte daraufhin auf dem Abakus 3 + 2 zu rechnen.

Wenn man das Kind im Rechenunterricht fragte: »Wie ergeben 3 + 2   5?« – was soll es da zeigen? Nun, es soll offenbar 3 Kugeln zu 2 Kugeln schieben und die Kugeln zählen (oder dergleichen).

Könnte man nicht sagen: »Zeig mir wie dieses Thema einen Kanon gibt«. Und wer so gefragt würde müßte nun beweisen, daß es einen Kanon gibt. – Man würde den »*wie*« fragen,

MS 164, p. 24

den man zeigen lassen will, daß er überhaupt versteht wovon hier die Rede ist.

Und wenn das Kind nun zeigt, wie 3 und 2   5 geben, so zeigt es einen Vorgang, der als Grund der Regel »2 + 3 = 5« betrachtet werden kann.

10. Wie aber, wenn man den Schüler fragt: »Zeig mir, wie es unendlich viele Primzahlen gibt.« – Hier ist die Grammatik zweifelhaft! Es ginge aber an, zu sagen: »Zeig

MS 164, p. 25

mir, inwiefern man sagen kann, es gäbe unendlich viele Primzahlen.«

Wenn man sagt: »Zeig mir, daß es … «, so ist die Frage *ob es* … schon gestellt und nur noch »ja« oder »nein« zu sagen. Sagt man »zeig mir, *wie* es … «, so ist hier das Sprachspiel überhaupt erst zu erklären. Man hat jedenfalls noch keinen *klaren* Begriff davon, was es mit dieser Behauptung überhaupt soll. (Man fragt sozusagen: »Wie kann so eine Be-

MS 164, p. 26

hauptung überhaupt gerechtfertigt werden?«)

Soll ich nun eine andre Antwort geben auf die Frage: »Zeig mir *wie* … « als auf die Frage: »Zeig mir, daß … «?

Du ziehst aus dem Beweis eine Lehre. Wenn du aus dem Beweis eine Lehre ziehst, so muß ihr Sinn unabhängig sein vom Beweis; denn sonst hätte sie nie vom Beweis getrennt werden können.

Ähnlich kann ich die Konstruktionslinien in einer Zeichnung wegziehen und das übrige stehen lassen.

Es ist also als bestimmte der Beweis den Sinn

MS 164, p. 23

E a criança logo em seguida ter calculado 3 + 2 no ábaco.

Se perguntássemos a uma criança na lição de cálculo: “Como resultam 5 de 3 + 2?” – o que ela deve mostrar? Bem, obviamente ela deve empurrar 3 bolinhas na direção de 2 bolinhas e contar as bolinhas (ou algo parecido).

Não se poderia dizer: “Mostre-me como este tema forma um cânone”. E a pessoa que foi interrogada teria que demonstrar agora que há um cânone. Pergunta-se pelo “*como*”

MS 164, p. 24

a alguém que se quer deixar que mostre que afinal compreende do que se trata aqui.

E se a criança agora mostra como 3 e 2 dão 5, então ela mostra um processo que pode ser considerado como base da regra “2 + 3 = 5”.

10. Mas e se perguntássemos ao aluno: “Mostre-me como existem infinitos números primos.” – Aqui a gramática é duvidosa! Mas seria aceitável dizer: “Mostre-me

MS 164, p. 25

até que ponto se pode dizer que haveria infinitos números primos.”

Quando se diz: “Mostre-me que …”, a pergunta sobre *se*… já está colocada e só resta dizer “sim” ou “não”. Quando se diz: “Mostre-me *como* …”, então deve-se primeiro explicar aqui o jogo de linguagem em geral. Em todo caso, ainda não se tem nenhum conceito *claro* do que deveria ser, afinal, esta afirmação. (Pergunta-se, por assim dizer: “Como se pode, afinal, justificar

MS 164, p. 26

uma afirmação como esta?”)

Devo agora dar outra resposta para a pergunta: “Mostre-me *como* …”, do que para a pergunta: “Mostre-me que …”?

Você extrai da demonstração uma teoria. Se você extrai da demonstraçao uma teoria, então o seu sentido tem que ser independente da demonstração; porque senão ela nunca poderia ser separada da demonstração.

Da mesma forma, posso retirar as linhas de construção de um esboço e deixar todo o resto.

Portanto, é como se a demonstração não determinasse o sentido

MS 164, p. 27

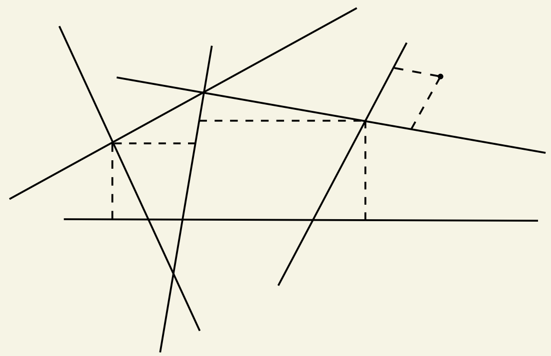
des bewiesenen Satzes nicht; und doch wieder als bestimmte er ihn.

Aber ist das nicht so mit jeder Verifikation eines jeden Satzes?

11. Ich glaube: Nur in einem großen Zusammenhang kann man überhaupt sagen, es gäbe unendlich viele Primzahlen. Das heißt: Es muß dazu schon eine ausgedehnte Technik des Rechnens mit den Kardinalzahlen geben. Nur innerhalb dieser Technik hat dieser Satz Sinn. Ein Beweis des

MS 164, p. 28

Satzes gibt ihm seinen Platz im ganzen System der Rechnungen. Und dieser Platz kann nun auf mehr als eine Weise beschrieben werden, da ja das ganze komplizierte System im Hintergrund *doch* vorausgesetzt wird.



Wenn zum Beispiel 3 Koordinatensysteme einander in

MS 164, p. 29

bestimmter Weise zugeordnet sind, so kann ich nun die Lage eines Punktes zu allen dadurch bestimmen, daß ich sie zu irgend einem angebe.

Der Beweis eines Satzes erwähnt ja nicht, beschreibt ja nicht, das ganze Rechnungssystem, das hinter dem Satz steht und ihm seinen Sinn gibt.

Nimm an, ein Erwachsener mit Intelligenz und Erfahrung hat nur die ersten Elemente des Rechnens gelernt, etwa die

MS 164, p. 30

vier Grundoperationen mit Zahlen bis zu 20. Er hat dabei auch das Wort »Primzahlen« gelernt. Und diesem sagte jemand: Ich werde dir beweisen, daß es unendlich viele Primzahlen gibt. Nun, wie kann er es ihm beweisen? Er muß ihm *rechnen lehren*. Das ist hier ein Teil des Beweisens. Er muß der Frage »Gibt es unendlich viele Primzahlen?« sozusagen erst Sinn geben.

MS 164, p. 27

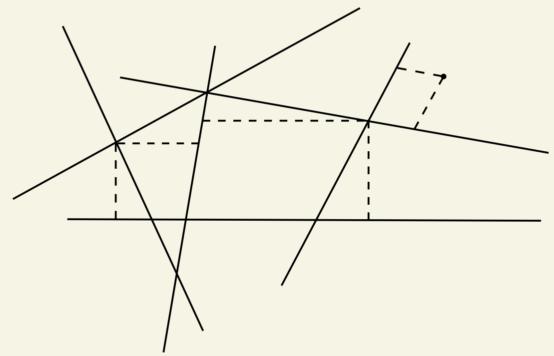
da proposição demonstrada; e de todo modo é como se novamente o determinasse.

Mas não é assim com qualquer verificação de qualquer proposição?

11. Acredito: só em um contexto amplo se pode dizer, afinal de contas, que há infinitos números primos. Isto significa: já tem que haver para isto uma técnica estendida do cálculo com os números cardinais. Só no interior desta técnica a proposição tem sentido. Uma demonstração da

MS 164, p. 28

proposiçao lhe atribui o lugar no sistema total do cálculo. E este lugar agora pode ser descrito de mais de uma maneira, posto que todo o complicado sistema está, *de todo modo*, pressuposto no pano de fundo.[284]



Se, por exemplo, 3 sistemas coordenados estão associados

MS 164, p. 29

entre si de um determinado modo, então posso determinar a posição de um ponto com relação a todos, na medida em que o especifico com relação a qualquer um.

A demonstração de uma proposição não menciona, não descreve, o sistema total de cálculo que fica por detrás da proposição e lhe dá o seu sentido.

Suponha que um adulto com inteligência e experiência só aprendeu os primeiros rudimentos do cálculo, digamos as

MS 164, p. 30

quatro operações fundamentais com números até 20. Ele também aprendeu a expressão "números primos". E sobre isto alguém lhe dissesse: vou te demonstrar que há infinitos números primos. Bem, como ele pode lhe demonstrar isto? Ele tem que *ensiná-lo a calcular*. Aqui isto é uma parte da demonstração. Ele tem dar sentido primeiro, por assim dizer, à pergunta "Existem

12. Die Philosophie hat sich mit den Versuchungen des Mißverstehens auseinander

MS 164, p. 31

zu setzen, die auf *dieser* Stufe des Wissens bestehen. (Auf einer andern Stufe bestehen wieder neue.) Aber das macht das Philosophieren nicht leichter!

13. Ist es nun nicht absurd zu sagen, man verstehe den Sinn des Fermatschen Satzes nicht? – Nun, man könnte antworten: die Mathematiker stehen ja diesem Satz nicht *ganz* ratlos gegenüber. Sie versuchen doch jedenfalls gewisse Methoden des Beweisens; und, sofern sie Methoden versuchen, *soweit* verstehen sie den Satz. – Aber ist das richtig?

MS 164, p. 32

verstehen sie ihn nicht so vollständig als man ihn nur verstehen kann?

Nun, nehmen wir an, es würde sein Gegenteil bewiesen, ganz gegen die Erwartung der Mathematiker. Man zeigt also nun, es *könne* gar nicht so sein.

Aber muß ich denn nicht, um zu wissen, was ein Satz wie der Fermatsche Satz sagt, wissen was das Kriterium dafür ist, daß der Satz wahr ist? Und ich kenne freilich Kriterien für die Wahr-

MS 164, p. 33

heit *ähnlicher* Sätze, aber kein Kriterium für die Wahrheit dieses Satzes.

›Verstehen‹ ein vager Begriff!

Erstens, es gibt so etwas wie: einen Satz zu verstehen *glauben*.

Und ist Verstehen ein psychischer Vorgang – warum soll er uns so sehr interessieren? Es sei denn, daß er erfahrungsmäßig mit der Fähigkeit, vom Satz Gebrauch zu machen, verbunden ist.

MS 164, p. 34

»Zeig mir, wie … « heißt: zeig mir, in welchem Zusammenhang du diesen Satz (diesen Maschinenteil) gebrauchst.

14. »Ich werde dir zeigen, wie es unendlich viele Primzahlen gibt«, setzt einen Zustand voraus, in welchem der Satz, daß es unendlich viele Primzahlen gebe, für den Andern keine, oder nur die vagste Bedeutung hatte. Es mochte für ihn nur ein Scherz oder ein Paradox gewesen

infinitos números primos?".

12. A filosofia tem que lidar com as tentações dos mal-entendidos

MS 164, p. 31

que existem *neste* nível do saber. (Em outro nível existem, por sua vez, novas.) Mas isto não torna mais fácil o filosofar!

13. Não é absurdo dizer agora que não se compreende o sentido do teorema de Fermat? Bem, poder-se-ia responder: os matemáticos não ficam *totalmente* desnorteados diante deste teorema. De todo modo, eles tentam certos métodos de demonstração; e enquanto tentam métodos, compreendem o teorema *na mesma medida*. – Mas isto é correto?

MS 164, p. 32

não o *compreendem* tão completamente quanto se pode chegar a compreender?

Vamos supor agora que o seu contrário fosse demonstrado, contra toda a expectativa do matemático. Mostra-se então que não *pode* ser tão assim.

Mas para saber o que um teorema como o de Fermat diz não tenho então que saber qual é o critério para que o teorema seja verdadeiro? E conheço, de qualquer forma, critérios para a ver-

MS 164, p. 33

dade de teoremas *semelhantes*, mas nenhum critério para a verdade deste teorema.

'Compreender' um conceito vago!

Em primeiro lugar, existe alguma coisa tal como: *acreditar* que se compreende uma proposição.

E se o compreender é um processo psíquico – por que deveria nos interessar tanto? A não ser que ele esteja empiricamente conectado com a capacidade de fazer uso da proposição.[285]

MS 164, p. 34

"Mostre-me como …" significa: mostre-me em que contexto você usa esta proposição (esta parte da máquina).

14. "Vou te mostrar como existem infinitos números primos" pressupõe uma situação em que a proposição de que há infinitos números primos não tem nenhum, ou somente o mais vago, significado para os outros. Para ele isto só poderia ter sido uma brincadeira ou um paradoxo.

sein.

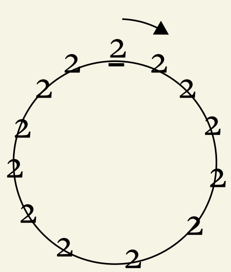
MS 164, p. 35

Wenn dieser Vorgang dich davon überzeugt, dann muß er sehr eindrucksvoll sein. – Aber ist er es? – Nicht besonders. Warum ist er es nicht *mehr*? Ich glaube, er wäre nur dann eindrucksvoll, wenn man ihn von Grund auf erklärte. Wenn man zum Beispiel nicht bloß p! + 1 hinschriebe, sondern es vorher erklärte und mit Beispielen illustrierte. Wenn man also die Techniken nicht als etwas Selbstverständliches voraussetzte, sondern sie

MS 164, p. 36

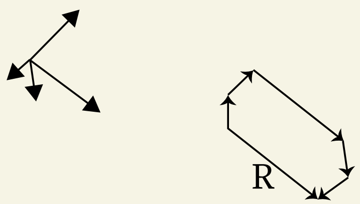
darstellte.

15.



Wir kopieren das Zeichen »2« rechts herum immer von dem zuletzt geschriebenen. Wenn wir richtig kopieren, so ist das letzte Zeichen wieder eine Kopie des ersten.

Ein Sprachspiel:



Einer (A) sagt dem Andern (B)

MS 164, p. 37

das Resultat voraus. Der Andre folgt den Pfeilen mit Spannung, gleichsam neugierig, wie sie ihn führen werden, und er freut sich daran, wie sie ihn endlich zum vorausgesagten Resultat hinführen. Er reagiert etwa ähnlich darauf, wie man auf einen Witz reagiert.

A mag das Resultat zuvor konstruiert, oder nur erraten haben. B weiß davon nichts und es interessiert ihn nicht.

Wenn er die Regel auch kannte, so war er ihr doch nie *so* gefolgt. Er *tut* jetzt etwas *Neues*.

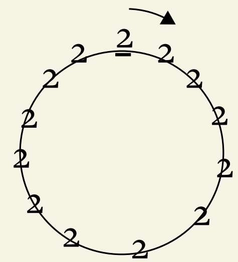
MS 164, p. 35

Se este processo te convence de algo, então tem que ser muito impressionante. – Mas ele o é? – Particularmente, não. Por que ele não o é *mais*? Acredito que só seria impressionante se fosse explicado desde o fundamento. Se, por exemplo, não meramente anotássemos p! + 1, mas o explicássemos previamente e o ilustrássemos com exemplos. Se não pressupuséssemos as técnicas como algo evidente, mas as

MS 164, p. 36

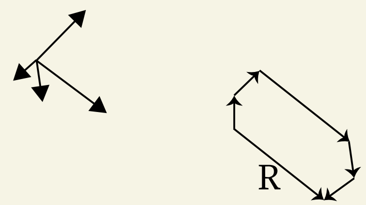
apresentássemos.

15.



Nós copiamos o sinal “2” sempre para a volta à direita, a partir do último que foi escrito. Se copiamos corretamente, o último sinal será também uma cópia do primeiro.

Um jogo de linguagem:



Alguém (A) prediz o resultado

MS 164, p. 37

para o outro (B). O outro segue as setas com tensão, como se estivesse curioso sobre como elas o conduzirão, e se alegra sobre como elas afinal o levaram ao resultado previsto. Ele reage, digamos, de maneira similar a como reagimos a uma piada.

A pode ter construído o resultado previamente ou só tê-lo adivinhado. B não sabe nada disto, e não lhe interessa.

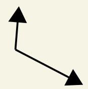
Mesmo que ele conhecesse a regra, nunca a seguiu *assim*. Ele *faz* algo *novo* agora. Mas

Es gibt

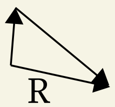
MS 164, p. 38

aber auch eine Neugierde und Überraschung wenn man den Weg schon gegangen ist. So kann man eine Geschichte wieder und wieder lesen, ja sie auswendig wissen und doch immer wieder von einer bestimmten Wendung überrascht sein.

Ehe ich den beiden Pfeilen



gefolgt bin



,

weiß ich nicht, wie der Weg,

MS 164, p. 39

oder die Resultante, ausschauen wird. Ich kenne das Gesicht nicht, das ich erhalten werde. Ist es sonderbar, daß ich es nicht kannte? Wie sollte ich's denn kennen? Ich hatte es nie gesehen! Ich kannte die Regel und beherrschte sie und sah das Pfeilbüschel. –

Warum war das aber dann

MS 164, p. 40

keine echte Voraussage, »Wenn du der Regel folgen wirst, wirst du dies erzeugen«? Während dies gewiß eine echte Vorhersage ist: »Wenn du nach bestem Wissen und Gewissen der Regel folgen wirst, so wirst du . . .. «. Die Antwort ist: das erste ist keine Voraussage, weil ich auch sagen konnte: »Wenn du der Regel folgen wirst, so *mußt* du dies erzeugen«. Es ist dann keine Voraussage, wenn der Begriff des *Folgens* nach der Regel so bestimmt ist, daß das Resultat das Kriterium dafür ist, ob der Regel gefolgt wurde.

MS 164, p. 41

A sagt: »Wenn du der Regel folgst, wirst du *das* erhalten«, oder er sagt einfach: »Du wirst das erhalten«. Dabei zeichnet er den resultierenden Pfeil hin.

War nun, was A sagte, in diesem Spiele eine Voraussage? Nun zum Teufel, in gewissem Sinne: Ja! Wird das nicht besonders klar, wenn wir annehmen, daß die Voraussage *falsch* war? Eine Voraussage war es nur dann nicht, wenn die *Bedingung* den Satz zum Pläonasmus

MS 164, p. 42

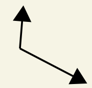
machte.

existe

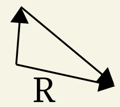
MS 164, p. 38

também curiosidade e surpresa quando o caminho já foi seguido. Assim, pode-se ler uma história várias vezes, conhecê-la de cor e ser sempre surpreendido novamente numa certa virada.

Antes de ter seguido



as duas setas



,

não sabia com que se pareceria

MS 164, p. 39

o caminho ou a resultante. Não conhecia a cara do que veria. Não é esquisito que não soubesse disto? Como deveria saber disto? Nunca o havia visto! Eu conhecia a regra e a dominava, e vi o feixe de setas. –

Mas por que isto não era

MS 164, p. 40

então uma autêntica predição, "Se você seguir a regra, vai chegar a isto"? Enquanto isto certamente é uma autêntica previsão: "Se você seguir a regra segundo o melhor do seu conhecimento e saber, você chegará ...". A resposta é: a primeira não é uma predição porque poderia também dizer: "Se você seguir a regra, *tem que* chegar a isto". Não é uma predição se o conceito de *seguimento* de regra for tão determinado que o resultado fique sendo o critério para saber se a regra foi seguida.

MS 164, p. 41

A diz: "Se você segue a regra, vai conseguir *isto*", ou ele diz simplesmente: "Você vai conseguir isto". Ao mesmo tempo desenha a seta resultante.

Pois bem, o que A disse neste jogo era uma predição? Ora, que diabos, em certo sentido: sim! Não vai ficar particularmente claro se presumimos que a predição era *falsa*? Só não seria uma predição se a *condição* fizesse da proposição um

MS 164, p. 42

pleonasmo.

A hätte sagen können: »Wenn du mit jedem deiner Schritte einverstanden sein wirst, dann wirst du *dahin* kommen«.

Nimm an, während B das Polygon zieht, veränderten die Pfeile des Büschels ein wenig ihre Richtung. B zieht immer einen Pfeil parallel, so wie er in diesem Augenblick gerade ist. Er ist nun ebenso überrascht und gespannt, wie in dem vorigen Spiel, obwohl hier das Ergebnis nicht das einer Rechnung ist. Er hat also das erste

MS 164, p. 43

Spiel so aufgefaßt wie das zweite.

»Wenn du der Regel folgen wirst, wirst du dahin gelangen« ist darum keine Voraussage, weil dieser Satz einfach sagt: »Das Resultat dieser Rechnung ist ...« – und das ist ein wahrer, oder falscher mathematischer Satz. Die Anspielung auf die Zukunft und auf dich ist nur Einkleidung.

Muß A denn überhaupt einen klaren Begriff davon haben, ob seine Voraussage mathematisch oder anders gemeint ist?! Er sagt einfach »Wenn du der Regel folgst, wird ... herauskommen« und freut

MS 164, p. 44

sich etwa an dem Spiel. Wenn zum Beispiel das Vorausgesagte nicht herauskommt, untersucht er nicht weiter.

16. – – – Und diese Reihe ist durch eine Regel definiert. Oder auch durch die Abrichtung zum Vorgehen nach der Regel. Und der unerbittliche Satz ist, daß nach dieser Regel diese Zahl auf diese folgt.

Und dieser Satz ist kein Erfahrungssatz. Aber warum kein Erfahrungssatz? Eine Regel ist doch etwas, wonach wir vorgehen und ein Zahlzeichen aus einem

MS 164, p. 45

andern erzeugen. Ist es also nicht Erfahrung, daß diese Regel jemand von hier dorthin führt?

Und führt die Regel + 1 ihn einmal von 4 zu 5, so vielleicht ein andermal von 4 zu 7. Warum ist das unmöglich?

Es fragt sich, was wir zum Kriterium des Vorgehens nach der Regel nehmen. Ist es zum Beispiel ein Gefühl der Befriedigung, das den Akt des Vorgehens nach der Regel begleitet? Oder eine Intuition (Eingebung), die mir sagt, daß ich

A poderia ter dito: “Se você estiver de acordo com cada um dos seus passos, vai chegar *até lá*.”

Suponha que, enquanto B traçava o polígono, as setas do feixe mudaram um pouco de direção. B sempre traça uma seta paralela, tal como está exatamente neste momento. Ele agora está tão surpreso e tenso como no jogo anterior, mesmo que o resultado aqui não seja o de um cálculo. Portanto, ele concebeu

MS 164, p. 43

o primeiro jogo do mesmo modo que o segundo.

“Se você seguir a regra, vai chegar lá” não é, por esta razão, uma predição, pois esta sentença simplesmente diz: “O resultado deste cálculo é ...” – e esta é uma proposição matemática verdadeira ou falsa. A alusão sobre o futuro e sobre você é só uma roupagem.

A teria que ter, afinal, um conceito claro de que a sua predição é pensada matematicamente ou de outra forma?! Ele simplesmente diz “Se você segue a regra, vai resultar em ...”, e desfruta

MS 164, p. 44

do jogo, digamos. Se, por exemplo, não resultar no que foi predito, ele não vai investigar mais nada.

16. – – – E esta série é definida por uma regra. Ou também pelo adestramento em um procedimento segundo uma regra. E a proposição inexorável é a de que segundo esta regra este número se segue depois daquele.

E esta proposição não é uma proposição da experiência. Mas por que não é uma proposição da experiência? Uma regra é alguma coisa pela qual temos um procedimento e produzimos um numeral

MS 164, p. 45

a partir de um outro. Não é, portanto, experiência o fato de que esta regra leva alguém daqui para ali?

E se a regra + 1 o leva uma vez de 4 para 5, e numa outra vez talvez de 4 para 7. Por que isto seria impossível?

O que se pergunta é o que tomamos como critério do proceder de acordo com a regra. Seria, por exemplo, um sentimento de satisfação que acompanha o ato do processo de acordo com a regra? Ou uma intuição (inspiração) que me diz que

MS 164, p. 46

richtig gegangen bin? Oder sind es gewisse praktische Folgen des Vorgehens, die bestimmen, ob ich wirklich der Regel gefolgt bin? –Dann wäre es möglich, daß 4 + 1 manchmal 5, manchmal etwas anderes ergäbe. Es wäre *denkbar*, das heißt: eine experimentelle Untersuchung würde zeigen, ob 4 + 1 immer 5 ergibt.

Soll es kein Erfahrungssatz sein, daß die Regel von 4 zu 5 führt, so muß *dies*, das Ergebnis, zum Kriterium dafür genommen werden, daß

MS 164, p. 47

man nach der Regel vorgegangen ist.

Die Wahrheit des Satzes, daß 4 + 1 5 ergibt, ist also, sozusagen, *überbestimmt*. Überbestimmt dadurch, daß das Resultat der Operation zum Kriterium dafür erklärt wurde, daß diese Operation ausgeführt ist.

Der Satz ruht nun auf einem Fuß zuviel, um Erfahrungssatz zu sein.

MS 164, p. 48

Er wird zu einer Bestimmung des Begriffs: ›die Operation + 1 auf 4 anwenden‹. Wir können nämlich jetzt in neuem Sinne beurteilen, ob jemand der Regel gefolgt ist.

4 + 1 = 5 ist daher nun selbst eine Regel, nach welcher wir Vorgänge be-

MS 164, p. 49

urteilen.

Diese Regel ist das Ergebnis eines Vorgangs, den wir als *maßgebend* zur Beurteilung anderer Vorgänge annehmen. Der die Regel begründende Vorgang ist der Beweis der Regel.

17. Wie beschreibt man den Vorgang des Lernens einer Regel? –Immer wenn A die Hände klatscht, soll B es auch tun.

Erinnere dich daran, daß die Beschreibung eines Sprachspiels schon eine Beschreibung ist.

Ich kann jemand zu einer *gleichmäßigen* Tätigkeit ab-

MS 164, p. 50

richten. Etwa dazu, mit Bleistift auf Papier eine Linie dieser Art zu ziehen:

— • • — • • — • • — • • — • •

MS 164, p. 46

fiz tudo certo? Ou são certas consequências práticas do proceder que determinam se eu realmente segui a regra? – Então seria possível que às vezes 4 + 1 desse 5 e às vezes alguma outra coisa. Seria *imaginável* significa: uma investigação experimental mostraria se 4 + 1 sempre dá 5.

Se a regra que leva de 4 para 5 não deve ser uma proposição da experiência, então *isto*, o resultado, tem que ser tomado como critério para o que

MS 164, p. 47

foi feito de acordo com a regra.

Por conseguinte, a verdade da proposição de que 4 + 1 dá 5 é, por assim dizer, *sobredeterminada*. Sobredeterminada pelo fato de que o resultado da operação é explicado como critério de que a operação foi efetuada.

Agora a proposição se baseia demasiado em um só pé para ser uma proposição empírica.

MS 164, p. 48

Ela vem a ser uma determinação de conceito: ‘aplicar a operação + 1 sobre o 4’. Nós podemos agora avaliar em um novo sentido se alguém seguiu a regra.

4 + 1 = 5 é portanto ele mesmo a regra pela qual avaliamos os

MS 164, p. 49

processos.

Esta regra é o resultado de um processo que admitimos como *decisivo* para avaliar outros processos. O processo fundante da regra é a demonstração da regra.

17. Como se descreve o processo de aprender uma regra? – Sempre que A bater palmas, B também deve fazer o mesmo.

Lembre-se de que a descrição de um jogo de linguagem já é uma descrição.

Posso adestrar alguém para uma atividade *uniforme*.

MS 164, p. 50

Por exemplo, para traçar com lápis sobre o papel uma linha deste tipo:

— • • — • • — • • — • • — • •[286]

MS 164, p. 51

MS 164, p. 51

Nun frage ich mich: was wünsche ich also,

MS 164, p. 52

daß er tun soll? Die Antwort ist: Er soll immer so weiter gehen, wie ich es ihm gezeigt habe. Und was meine ich eigentlich damit: er solle immer so weiter gehen? Die beste Antwort, die ich mir darauf geben kann, ist ein Beispiel wie das, welches ich gerade gegeben habe.

Dieses Beispiel würde ich verwenden um ihm, aber auch mir selbst, zu sagen, was ich unter gleichmäßig verstehe.

MS 164, p. 53

Wir reden und handeln. Das ist in allem, was ich sage, schon vorausgesetzt.

MS 164, p. 51

Ich sage ihm: »So ist es recht« und dieser Ausdruck ist der Träger eines Tones, einer Gebärde. Ich lasse ihn gewähren. Oder ich sage: »Nein!« und halte ihn zurück.

18. Heißt das, daß ›einer Regel folgen‹ undefinierbar ist? Nein. Ich kann es doch auf unzählige Weisen definieren. Nur nützen mir, in diesen Betrachtungen, die Definitionen nichts.

MS 164, p. 52

19. Ich könnte ihn nun auch einen Befehl verstehen lehren

MS 164, p. 53

von der Form:

(— • •) → oder (— • • • —) →

(Der Leser errät, was ich meine.)

Nun, was will ich, daß er tun soll? Die beste Antwort, die ich mir selbst darauf geben kann, ist, diese Befehle ein Stück weiter auszuführen. Oder glaubst du, ein algebraischer Ausdruck dieser Regel setze weniger voraus?

Und nun richte ich ihn dazu ab, der Regel

— • — • •— • • • etc.

zu folgen. Und wieder weiß ich selbst nicht mehr

Pergunto-me agora: o que quis então

MS 164, p. 52

que ele fizesse? A resposta é: ele deve prosseguir sempre assim, tal como lhe mostrei. E o que quis dizer propriamente com: ele deve prosseguir sempre assim? A melhor resposta que posso me dar sobre isto é um exemplo tal como o que acabei de dar.

Empregaria este exemplo para ele, mas também para mim mesmo, para dizer o que compreendo por uniforme.

MS 164, p. 53

Nós falamos e agimos. Isto já está pressuposto em tudo que digo.[287]

MS 164, p. 51

Eu lhe digo: “Assim está correto”, e esta expressão é portadora de um tom, de um gesto. Eu lhe permito fazer. Ou eu digo: “Não!” e o retenho.

18. Isto significa que ‘seguir uma regra’ é indefinível? Não. Posso, de todo modo, defini-lo de incontáveis maneiras. Só que as definições de nada me servem nestas observações.

MS 164, p. 52

19. Eu poderia agora também ensiná-lo a compreender uma ordem

MS 164, p. 53

da forma:

(— • •) → oder (— • • • —) →

(O leitor adivinha o que quero dizer.)

Ora, o que quero que ele faça? A melhor resposta que posso me dar para isto é completar um pedaço a mais destas ordens. Ou você acredita que uma expressão algébrica desta regra pressupõe menos do que isto?

E agora o adestro a seguir a regra

— • — • •— • • • etc.

E novamente eu mesmo nem sei mais

MS 164, p. 54

MS 164, p. 54

darüber was ich von ihm will, als was mir das Beispiel selbst zeigt. Ich kann freilich die Regel in allerlei Formen paraphrasieren, aber das macht sie nur für den verständlicher, der schon diesen Paraphrasen folgen kann.

20. So habe ich also etwa Einem das Zählen und Multiplizieren im Dezimalsystem beigebracht.

»365 x 428« ist ein Befehl und er befolgt ihn, indem er die Multiplikation ausführt.

MS 164, p. 55

Dabei bestehen wir darauf, daß der gleiche Ansatz immer das gleiche Multiplikationsbild im Gefolge hat, also auch das gleiche Resultat. Verschiedene Multiplikationsbilder mit dem gleichen Ansatz weisen wir zurück.

Es wird hier nun die Situation eintreten, daß der Rech-

MS 164, p. 56

nende Rechenfehler macht; und auch die, daß er die Rechenfehler richtig stellt.

MS 164, p. 57

Ein weiteres Sprachspiel ist

MS 164, p. 55

dieses: Er wird gefragt: »Wieviel ist ›365 X 428‹?«. Und auf diese Frage kann er zweierlei tun. Entweder die Multiplikation ausführen, oder wenn er sie früher schon ausgeführt hat, das Resultat der ersten Ausführung ablesen.

MS 164, p. 56

21. Die Anwendung des Begriffs ›einer Regel folgen‹ setzt eine Gepflogenheit voraus. Daher wäre es Unsinn zu sagen: einmal in der Geschichte der Welt sei jemand einer Regel gefolgt (oder einem Wegweiser, habe ein Spiel gespielt, einen Satz ausgesprochen, oder einen verstanden; usf.).

Hier ist nichts schwerer, als Pläonasmen zu vermeiden, und nur

MS 164, p. 57

zu sagen, was wirklich etwas beschreibt.

o que quero dele, salvo o que o próprio exemplo me mostra. Posso certamente parafrasear a regra em todos os tipos de formas, mas elas só se tornam compreensíveis para os que já podem seguir estas paráfrases.

20. Então instruí alguém a contar e multiplicar no sistema decimal, digamos.

"365 x 428" é uma ordem e ele a cumpre quando efetua a multiplicação.

MS 164, p. 55

Neste caso, insistimos que a mesma abordagem sempre resulte na mesma imagem de multiplicação, portanto também no mesmo resultado. Rejeitamos diferentes imagens de multiplicação com a mesma abordagem.

Agora vem a ocorrer aqui a situação de que

MS 164, p. 56

o calculador comete erros de cálculo; e também de que corrige tais erros.

MS 164, p. 57

Um outro jogo de linguagem é

MS 164, p. 55 [288]

este: pergunta-se a ele "Quanto é '365 x 428'"? E diante desta pergunta ele pode fazer duas coisas. Ou efetuar a multiplicação, ou, se ele antes já a tinha efetuado, retomar o resultado da primeira efetuação.

MS 164, p. 56

21. A aplicação do conceito de 'seguir uma regra' pressupõe um costume. Por conseguinte, seria absurdo dizer: uma vez na história universal alguém seguiu uma regra (ou uma sinalização, jogou um jogo, proferiu uma sentença ou compreendeu alguma; e assim por diante.).[289]

Aqui nada é mais difícil do que evitar pleonasmos e só

MS 164, p. 57

dizer o que realmente descreve alguma coisa.

Pois aqui a tentação de dizer alguma coisa ainda, quando tudo já está descrito, é irresis-

Denn hier ist die Versuchung überwältigend, noch etwas zu sagen, wenn schon alles beschrieben ist.

Es ist von der größten Wichtigkeit, daß zwischen den Menschen beinahe nie ein Streit darüber entsteht, ob die Farbe dieses Gegenstandes dieselbe ist wie die Farbe jenes; die Länge dieses Stabes wie die Länge jenes, etc. Diese friedliche Übereinstimmung ist die charakteristische Umgebung des Gebrauchs des Wortes

MS 164, p. 58

»gleich«.

Und Analoges muß man vom Vorgehen nach einer Regel sagen.

Es bricht kein Streit darüber aus, ob der Regel gemäß vorgegangen wurde, oder nicht. Es kommt darüber zum Beispiel nicht zu Tätlichkeiten.

Das gehört zu dem Gerüst,

MS 164, p. 59

von dem aus unsere Sprache wirkt (zum Beispiel eine Beschreibung gibt).

22. Es sagt nun jemand, daß in der Kardinalzahlenreihe, die der Regel »+ 1« gehorcht, deren Technik uns so und so beigebracht wurde, 450 auf 449 folgt. Das ist nun nicht der Erfahrungssatz, daß wir von 449 zu 450 kommen, wenn es uns vorkommt, wir hätten die Operation + 1 auf 449 angewandt. Vielmehr ist es die Bestimmung, wir haben diese Operation nur dann angewandt, wenn das Resultat 450 ist.

MS 164, p. 60

Es ist als hätten wir den Erfahrungssatz zur Regel verhärtet. Und wir haben nun nicht eine Hypothese, die durch die Erfahrung geprüft wird, sondern ein Paradigma, womit die Erfahrung verglichen und beurteilt wird. Also eine neue Art von Urteil.

MS 164, p. 61

Ein Urteil nämlich ist: »Er hat 25 x 25 gerechnet, war dabei aufmerksam und gewissenhaft und hat 615 erhalten«; und ein anderes »Er hat 25 x 25 gerechnet und statt 625 615 herausgebracht«.

Aber kommen beide Urteile nicht zu demselben hinaus?

Der arithmetische Satz ist nicht der Erfahrungssatz: »Wenn ich *das* tue, so erhalte ich *das*« – wo das Kriterium dafür, daß ich *das* tue, nicht sein darf

tível.

É da maior importância que entre as pessoas quase nunca se arme uma disputa sobre se a cor deste objeto é a mesma que a cor daquele; o comprimento deste bastão é como o comprimento daquele etc. Este acordo pacífico é o ambiente característico do uso da palavra

MS 164, p. 58

“mesmo”.

E coisas análogas têm que ser ditas sobre o procedimento feito de acordo com uma regra.

Não se irrompe nenhuma disputa sobre se o procedimento foi de acordo com a regra ou não. Não se chega às vias de fato sobre isto, por exemplo.

Isto pertence à armação

MS 164, p. 59

a partir da qual nossa linguagem funciona (por exemplo, dar uma descrição).[290]

22. Alguém diz agora que na série dos números cardinais que observa a regra “+ 1”, cuja técnica nos foi ensinada de tal e tal modo, 450 se segue de 449. Não se trata da proposição empírica de que vamos de 449 a 450 quando nos ocorre de aplicar a operação + 1 sobre 449. Em vez disto, é a determinação de que só aplicamos esta operação quando o resultado é 450.

MS 164, p. 60

É como se tivéssemos enrijecido a proposição empírica na regra. E agora não temos uma hipótese a ser testada pela experiência, senão um paradigma pelo qual a experiência é comparada e julgada. Portanto, um novo tipo de juízo.[291]

MS 164, p. 61

Um juízo, particularmente, é: “Ele calculou 25 x 25, foi atencioso e consciencioso e obteve 615”; e um outro “Ele calculou 25 x 25, e em vez de 625, extraiu 615”.

Mas não resultam os dois juízos no mesmo?

A proposição aritmética não é a proposição empírica: “Se faço *isto*, então obtenho *isto*” – onde está o critério para que, ao fazer *isto*, possa não

MS 164, p. 62

MS 164, p. 62

was dabei herauskommt.

23. Könnten wir uns nicht denken, daß es beim Multiplizieren hauptsächlich darauf ankäme, den Geist in bestimmter Weise zu konzentrieren und daß dann zwar bei dem gleichen Ansatz nicht immer das Gleiche herauskommt, aber für die bestimmten praktischen Probleme, die wir lösen wollen, gerade diese Verschiedenheiten des Resultats vorteilhaft wären.

Ist die Hauptsache

MS 164, p. 63

nicht die, daß beim *Rechnen* das Hauptgewicht darauf gelegt würde, ob richtig oder falsch gerechnet wurde und abgezogen vom psychischen Zustand etc. des Rechnenden?

Die Rechtfertigung des Satzes 25 x 25 = 625 ist natürlich, daß, wer

MS 164, p. 64

so und so abgerichtet wurde, unter normalen Umständen bei der Multiplikation 25 x 25 625 erhält. Der arithmetische Satz aber sagt nicht *dies* aus. Er ist sozusagen ein zur Regel verhärteter Erfahrungssatz. Er bestimmt, daß der Regel nur dann gefolgt wurde, wenn dies das Resultat des Multiplizierens ist. Er ist also der Kontrolle durch die Erfahrung entzogen, dient aber nun als Paradigma dazu, die Erfahrung zu beurteilen.

MS 164, p. 65

Wollen wir eine Rechnung praktisch benützen, so überzeugen wir uns davon, daß »richtig gerechnet« wurde, daß das *richtige* Resultat erhalten wurde. Und das richtige Resultat der Multiplikation, zum Beispiel, darf nur *eins* sein und hängt nicht davon ab, was die *Anwendung* der Rechnung ergeben wird. Wir beurteilen also die Fakten mit Hilfe der Rechnung ganz anders als wir es täten, wenn wir das Resultat der Rechnung nicht als etwas

MS 164, p. 66

ein für allemal bestimmtes ansähen.

Nicht Empirie und doch Realismus in der Philosophie, das ist das schwerste. (Gegen Ramsey.)

Du verstehst von der Regel selbst nicht mehr als du erklären kannst.

24. »Ich habe einen bestimmten Begriff von der Regel. Wenn man ihr in diesem Sinne folgt, so kann man von dieser Zahl nur zu dieser kommen.« Das ist eine spontane

ser o que se extraia com isto.

23. Não poderíamos imaginar que, ao multiplicar, o principal seria concentrar o espírito de uma determinada forma, e que, na verdade, nem sempre se extrairia o mesmo resultado com a mesma abordagem, mas, para determinados problemas práticos que queremos resolver, justamente estas diferenças de resultado seriam vantajosas.

Não é o importante

MS 164, p. 63

que ao *calcular* a prioridade seja dada a se calculamos correta ou equivocadamente, abstraído da condição psicológica etc. do calculador?

A justificação da proposição de que 25 x 25 = 625 é, naturalmente, a de que quem

MS 164, p. 64

foi adestrado assim e assim, obtém 625 da multiplicação de 25 x 25 sob circunstâncias normais. Mas a proposição aritmética não afirma *isto*. Ela é, por assim dizer, uma proposição empírica enrijecida na regra. Ela determina que a regra só foi seguida se este foi o resultado da multiplicação. Está, por conseguinte, subtraída do controle pela experiência, mas agora servindo como paradigma para o julgamento da experiência.

MS 164, p. 65

Se queremos usar um cálculo na prática, nos convencemos de que foi "calculado corretamente", de que foi obtido o resultado *correto*. E o resultado correto da multiplicação, por exemplo, só pode ser *um* e não depende do que a *aplicação* do cálculo vai produzir. Portanto, nós julgamos os fatos com ajuda do cálculo de uma maneira totalmente diferente do que o faríamos se não víssemos o resultado do cálculo como algo

MS 164, p. 66

determinado de uma vez por todas.

Não o empirismo e sim o realismo em filosofia, isto é o mais difícil. (Contra Ramsey.)[292]

Você não compreende mais da própria regra do que pode explicar.

24. "Tenho um conceito determinado da regra. Se a seguimos neste sentido, só podemos ir deste número para aquele." Esta é uma decisão

MS 164, p. 67

Entscheidung.

Warum sage ich aber »ich *muß*«, wenn es meine Entscheidung ist? Ja, kann ich mich denn nicht entscheiden müssen?

Heißt, daß es eine spontane Entscheidung ist, nicht nur: so handle ich; frage nach keinem Grunde!

Du sagst, du mußt; aber kannst nicht sagen, was dich zwingt.

Ich habe einen bestimmten Begriff von der Regel. Ich *weiß*, was ich in jedem besonderen

MS 164, p. 68

Fall zu tun habe. Ich weiß, d. h. ich zweifle nicht: es ist mir offenbar. Ich sage: »Selbstverständlich«. Ich kann keinen Grund angeben.

Wenn ich sage: »Ich entscheide spontan«, so heißt das natürlich nicht: ich überlege, welche Zahl hier wohl die beste wäre und entscheide mich dann für …

MS 164, p. 69

Wir sagen: »Zuerst muß richtig gerechnet sein, dann wird sich ein Urteil über die Naturtatsachen fällen lassen.«

25. Es hat Einer die Regel des Zählens im Dezimalsystem gelernt. Jetzt vergnügt er sich damit, Zahl auf Zahl der »natürlichen« Zahlenreihe hinzuschreiben.

Oder er befolgt den Befehl im Sprachspiel, »Schreibe den Nachfolger

MS 164, p. 72

der Zahl … in der Reihe … hin«. – Wie kann ich dieses Sprachspiel jemandem erklären? Nun, ich kann ein Beispiel (oder Beispiele) beschreiben. – Um zu sehen, ob er das Sprachspiel verstanden hat, kann ich ihn Beispiele rechnen lassen.

Wie, wenn Einer die Multiplikationstafeln, Logarithmentafeln etc. nachrechnete, weil er ihnen nicht traute. Kommt er zu einem andern Resultat, so traut er diesem und sagt,

MS 164, p. 73

er hätte seinen Geist so auf die Regeln konzentriert, daß sein Resultat als das richtige zu gelten habe. Weist man ihm einen Fehler nach, so sagt er, er zweifle lieber an der Zuverlässigkeit seines Verstandes und seinem Sinne jetzt als damals wie er die Rechnung zuerst gemacht hatte.

MS 164, p. 67

espontânea.

Mas por que digo “eu *tenho que*” se esta é a minha decisão? Ora, não posso ter que me decidir?

Significa que uma decisão espontânea é não só: ajo assim; não pergunto por nenhuma razão!

Você diz que tem que; mas não pode dizer o que te obriga.

Tenho um conceito determinado da regra. *Sei*[293] o que devo fazer

MS 164, p. 68

em cada caso particular. Eu sei, isto é, não duvido: isto é óbvio para mim. Eu digo: “Evidentemente”. Não posso dar nenhuma razão.

Se digo: “Eu decido espontaneamente”, isto não significa, naturalmente: eu considero que número seria o melhor aqui e então decido que …

MS 164, p. 69

Nós dizemos: “Primeiro, tem que ser calculado corretamente e então é que se pode fazer um juízo sobre os fatos da natureza.”

25. Alguém aprendeu as regras da contagem no sistema decimal. Agora se diverte escrevendo número após número da série de números “naturais”.

Ou ele segue a ordem do jogo de linguagem “Escreva o sucessor

MS 164, p. 72 [294]

do número … na série …”. – Como posso explicar este jogo de linguagem para alguém? Bem, posso descrever um exemplo (ou exemplos). – Para ver se ele compreendeu o jogo de linguagem, posso fazer com que ele calcule com exemplos.

Mas e se alguém checasse as tabelas de multiplicação, as tabelas de logaritmos etc., porque não confia neles. Se chega a um outro resultado, então confia neste e diz

MS 164, p. 73

que ele estava com a sua mente tão concentrada nas regras que o seu resultado deve ser tomado como o correto. Se se comprova para ele um erro, então diz que prefere duvidar da confiabilidade da sua compreensão e do seu sentido agora do que na ocasião em que tinha feito o cálculo

Wir können die Übereinstimmung in allen Fragen des Rechnens als gegeben annehmen. Aber macht es nun einen Unterschied, ob wir den Rechensatz als Erfahrungssatz oder

MS 164, p. 74

als Regel aussprechen?

26. Würden wir denn die Regel $25^2 = 625$ anerkennen, wenn wir nicht Alle immer zu diesem Resultat kämen? Nun, warum sollen wir dann nicht den Erfahrungssatz statt der Regel benützen können? – Ist die Antwort hierauf: Weil das Gegenteil des Erfahrungssatzes nicht dem Gegenteil der Regel entspricht?

Wenn ich dir ein Stück einer Reihe hinschreibe, daß du dann *diese* Gesetz-

MS 164, p. 75

mäßigkeit in ihr siehst, das kann man eine Erfahrungstatsache, eine psychologische Tatsache, nennen. Aber, *wenn* du dies Gesetz in ihr erblickt hast, daß du dann die Reihe so fortsetzt, das ist keine Erfahrungstatsache mehr.

Aber wieso ist es keine Erfahrungstatsache: denn »*dies* in ihr erblicken« war ja doch nicht das *Gleiche* wie: sie so fortsetzen.

Nur so kann man sagen, dies sei keine Erfahrungstatsache, daß man den Schritt auf dieser Stufe für den dem Regelausdruck entsprechenden *erklärt*.

MS 164, p. 76

Du sagst also: »Nach der Regel die *ich* in dieser Folge sehe, geht es *so* weiter.« Nicht: erfahrungsgemäß! Sondern, das ist eben der Sinn dieser Regel.

Ich verstehe: Du sagst, »Das ist nicht erfahrungsgemäß« – ist es aber nicht *doch* erfahrungsgemäß?

»Nach dieser Regel geht es so«: d. h., du *gibst* dieser Regel eine Extension.

Warum kann ich ihr aber nicht heute die,

MS 164, p. 77

morgen jene Extension geben?

Nun, ich kann es tun. Ich könnte ihr z. B. abwechselnd eine von zwei Interpretationen geben.

pela primeira vez.

Nós podemos supor como dada a concordância em todas as perguntas de cálculo. Mas faz alguma diferença se proferimos a proposição do cálculo como proposição empírica ou

MS 164, p. 74

como regra?

26. Reconheceríamos a regra $25^2 = 625$ se nem sempre chegássemos a este resultado? Bem, por que então não poderíamos utilizar a proposição empírica em vez da regra? – É a resposta para isto: porque o contrário da proposição empírica não corresponde ao contrário da regra?

Se anoto para você um pedaço de uma série em que você então vê *esta* regula-

MS 164, p. 75

ridade, a isto podemos chamar de um fato empírico, um fato psicológico. Mas *quando* você enxerga nele esta lei pela qual você pode dar continuidade assim à série, isto já não é mais nenhum fato empírico.[295]

Mas de que modo isto não é um fato empírico: pois "enxergar *isto* nela" não é, de todo modo, o *mesmo* que: continuá-la assim.

Só se pode dizer que isto não é um fato empírico se se *explica* o passo realizado nesta etapa como algo que corresponde à expressão da regra.

MS 164, p. 76

Você diz, portanto: "Segundo a regra que *eu* vejo nesta sequência, prossegue-se *assim*." Não: conforme a experiência! Senão que este é justamente o sentido desta regra.

Eu compreendo: você diz "Isto não é conforme à experiência" – mas isto não está *de todo modo* conforme à experiência?

"Segundo esta regra prossegue-se assim": ou seja, você *dá* a esta regra uma extensão.

Mas por que não posso hoje dar esta

MS 164, p. 77

e amanhã aquela extensão?

Ora, posso fazê-lo. Poderia dar a ela, por exemplo, alternadamente uma das duas interpretações.

27. Habe ich einmal eine Regel begriffen, so bin ich in dem, was ich weiter tue, gebunden. Aber das heißt natürlich nur, ich bin in meinem *Urteilen* gebunden darüber, was der Regel gemäß ist, und was nicht.

Wenn ich nun eine Regel in der mir gegebenen Folge sehe – kann das einfach darin

MS 164, p. 78

bestehen, daß ich, zum Beispiel, einen algebraischen Ausdruck vor mir sehe? Muß der nicht einer Sprache angehören?

Einer schreibt eine Folge von Zahlen an. Endlich sage ich: »Jetzt versteh ich's: ich muß immer ... «. Und dies ist doch der Ausdruck der Regel. Aber doch nur in einer Sprache!

Wann sage ich denn, ich sehe die Regel – oder eine Regel – in dieser Folge? Wenn ich zum Beispiel zu mir selbst über diese Folge in bestimmter Weise reden

MS 164, p. 79

kann. Aber nicht auch einfach, wenn ich sie fortsetzen kann? Nein, ich erkläre mir selbst oder einem Andern allgemein wie sie fortzusetzen ist. Aber könnte ich diese Erklärung nicht *bloß* im Geiste geben, also ohne eine eigentliche Sprache?

28. Jemand fragt mich: Was ist die Farbe dieser Blume? Ich antworte: »rot«. – Bist du absolut sicher? Ja, absolut sicher! Aber konnte ich mich nicht täuschen und die falsche Farbe »rot« nennen? Nein. Die Sicherheit mit der ich die Farbe

MS 164, p. 80

»rot« benenne, ist die Starrheit meines Maßstabs, ist die Starrheit von der ich ausgehe. Sie ist bei meiner Beschreibung nicht in Zweifel zu ziehen. Dies charakterisiert eben, was wir beschreiben nennen.

(Ich kann natürlich auch hier ein Versprechen annehmen, aber nichts anderes.)

Das Folgen nach der Regel ist am GRUNDE unseres Sprachspiels. Es charakterisiert das, was wir Beschreibung nennen.

MS 164, p. 81

Das ist die Ähnlichkeit meiner Betrachtung mit der Relativitätstheorie, daß sie sozusagen eine Betrachtung über die Uhren ist mit denen wir die Ereignisse vergleichen.

Ist $25^2 = 625$ eine Erfahrungstatsache? Du möchtest sagen: »Nein«. – Warum nicht? – »Weil es nach den Regeln nicht anders sein kann.« – Und warum das? – Weil *das* die Bedeutung der Regeln ist. Weil das der Vorgang ist, auf dem wir alles Urteilen aufbauen.

27. Uma vez que apreendo uma regra, estou comprometido com o que continuo a fazer. Mas isto, naturalmente, só significa que estou comprometido com os meus *juízos* acerca do que a regra está em conformidade e do que não.

Se vejo agora uma regra na sequência que me foi dada – poderia isto simplesmente

MS 164, p. 78

consistir em que vejo, por exemplo, uma expressão algébrica diante de mim? Ela não teria que pertencer a uma linguagem?

Alguém anota uma sequência de números. Por fim, digo: "Agora entendi: eu vou ter que sempre ...". E isto é bem a expressão da regra. Mas só que numa linguagem!

Quando digo então que vejo a regra – ou uma regra – nesta sequência? Se eu, por exemplo, puder falar comigo mesmo sobre esta sequência

MS 164, p. 79

de determinado modo. Mas também não, simplesmente, se posso lhe dar continuidade? Não, eu explico para mim mesmo ou para um outro em geral como ela tem continuidade. Mas não poderia *simplesmente*[296] dar esta explicação na mente, portanto sem propriamente uma linguagem?

28. Alguém me pergunta: qual é a cor desta flor? Eu respondo: "Vermelho". – Você está absolutamente seguro? Sim, absolutamente seguro! Mas não poderia me enganar e chamar a cor errada de "vermelho"? Não. A certeza com a qual denomino a cor

MS 164, p. 80

como vermelho é a rigidez da minha escala, é a rigidez da qual parto. Ela não pode ser colocada em dúvida pela minha descrição. Isto justamente caracteriza o que chamamos de descrever.

(Naturalmente, eu poderia também supor aqui um lapso de fala, mas nada mais.)

O seguimento segundo a regra está na BASE do nosso jogo de linguagem. Ele caracteriza o que chamamos de descrição.

MS 164, p. 81

Esta é a semelhança entre a minha observação e a teoria da relatividade, que ela é, por assim dizer, uma observação sobre os relógios com os quais comparamos os eventos.

Seria $25^2 = 625$ um fato empírico? Você gostaria de dizer: "Não". – Por que não? – "Porque, segundo as regras, não poderia ser diferente." – E isto por quê? – Porque *este* é o significado das regras. Porque este é o processo pelo qual construímos todos os juízos.

MS 164, p. 82

29. Wenn wir die Multiplikation ausführen, so geben wir ein Gesetz. Was ist aber der Unterschied zwischen dem Gesetz, und dem Erfahrungssatz: daß wir dieses Gesetz geben?

Wenn man mich die Regel gelehrt hat, das Ornament  zu wiederholen und man sagt mir nun, »Gehe so weiter!«: wie weiß ich was ich das nächste Mal zu tun habe? – Nun, ich tue es mit Sicherheit,

MS 164, p. 83

ich werde es auch zu verteidigen wissen – – nämlich bis zu einem gewissen Punkt. Wenn das keine Verteidigung sein soll, dann gibt es keine.

»So wie ich die Regel verstehe, folgt *das*.«

Einer Regel folgen ist eine menschliche Tätigkeit.

Ich gebe der Regel eine Extension.

Könnte ich sagen: »Sieh da, wenn ich dem Befehl folge ziehe ich diese Linie«? Nun, in gewissen Fällen

MS 164, p. 84

werde ich das sagen. Wenn ich zum Beispiel eine Kurve nach einer Gleichung konstruiert habe.

»Sieh da! wenn ich dem Befehl folge, tue ich *dies*!« Das soll natürlich nicht heißen: wenn ich dem Befehl folge, folge ich dem Befehl. Ich muß also für dieses »dies« eine andere Identifizierung haben.

»Also *so* sieht die Befolgung dieses Befehls aus!«

Kann ich sagen: »Erfah-

MS 164, p. 85

rung lehrt mich: wenn ich die Regel *so* auffasse, daß ich dann *so* fortsetzen muß«?

Man kann es nicht sagen, wenn ich das So-Auffassen und So-fortsetzen in Eins zusammenziehe.

Einer Transformationsregel folgen ist nicht problematischer als der Regel folgen: »schreibe immer wieder das Gleiche«. Denn die Transformation ist eine Art der Gleichheit.

MS 164, p. 82

29. Quando efetuamos a multiplicação, damos uma lei. Mas qual é a diferença entre a lei e a proposição empírica: de que damos esta lei?

Se alguém me ensina a regra de repetir o ornamento , e agora me diz “Siga adiante deste jeito!”: como sei o que fazer da próxima vez? – Bem, eu o faço com segurança,

MS 164, p. 83

e saberei também defendê-lo – – a saber, até um determinado ponto. Se isto não há de ser uma defesa, então não haverá nenhuma.

“Tal como compreendo a regra, *isto* se segue.”

Seguir uma regra é uma atividade humana.

Dou uma extensão à regra.

Poderia dizer: “Veja só, se sigo a ordem, traço esta linha”? Bem, em certos casos

MS 164, p. 84

vou dizer isto. Se, por exemplo, construí uma curva segundo uma equação.

“Veja só! Se sigo a ordem, faço *isto*!” Isto, naturalmente, não deve significar: se sigo a ordem, sigo a ordem. Tenho que, portanto, para este “isto”, ter uma outra identificação.

“Portanto, *assim* é que se parece o seguimento desta ordem!”

Posso dizer: “A expe-

MS 164, p. 85

riência me ensina: se concebo a regra *assim*, tenho então que prosseguir *assim*”?

Não se pode dizê-lo se restrinjo a um só o conceber-assim e o prosseguir-assim.

Seguir uma regra de transformação não é mais problemático do que seguir a regra: “Volte a escrever sempre o mesmo”. Pois a transformação é uma espécie de igualdade.

30. Man könnte doch fragen: Wenn alle Menschen, die

MS 164, p. 86

so erzogen sind, ohnehin *so* rechnen, oder sich doch mindestens auf *diese* Rechnung als die richtige einigen; wozu braucht man das *Gesetz*?

»$25^2 = 625$« kann darum nicht der Erfahrungssatz sein, daß die Menschen so rechnen, weil $25^2 \neq 626$ dann nicht der Satz wäre, daß die Menschen nicht dieses, sondern ein andres Resultat erhalten; und auch wahr sein könnte, wenn die Menschen überhaupt nicht rechneten.

MS 164, p. 87

Die Übereinstimmung der Menschen im Rechnen ist keine Übereinstimmung der Meinungen oder Überzeugungen.

Könnte man sagen: »Beim Rechnen kommen dir die Regeln unerbittlich vor; du fühlst, du kannst nur das tun und nichts andres, wenn du der Regel folgen willst«?

»Wie ich die Regel sehe, ist *das*, was sie verlangt.« Es hängt nicht davon ab, ob ich so, oder so gestimmt

MS 164, p. 88

bin.

Ich fühle, daß ich der Regel eine Interpretation gegeben habe, *ehe* ich ihr gefolgt bin; und daß diese Interpretation genug ist zu *bestimmen*, was ich im bestimmten Fall zu tun habe, um ihr zu folgen.

Wenn ich die Regel so auffasse, wie ich sie aufgefaßt habe, so entspricht ihr nur *diese* Handlung.

»Hast du die Regel verstanden?« – Ja, ich hab sie verstanden. – »Dann wende sie jetzt auf die

MS 164, p. 89

Zahlen ... an!« – Wenn ich ihr folgen will, habe ich nun noch eine Wahl?

Angenommen, er befiehlt mir, der Regel zu folgen und ich fürchte mich, ihm nicht zu gehorchen: bin ich nun nicht gezwungen?

Aber das ist doch auch so, wenn er mir befiehlt: »Bring mir diesen Stein«. Bin ich durch diese Worte weniger gezwungen?

30. Pode-se ainda perguntar: se todas as pessoas que

MS 164, p. 86

são educadas assim, de todo modo calculam *assim*, ou pelo menos coincidem quanto a ser *este* cálculo o correto; para que se precisa da *lei*?

Em vista disto, “$25^2 = 625$” não pode ser a proposição empírica de que as pessoas calculam assim, já que $25^2 \neq 626$ não seria a proposição de que as pessoas obtêm não este mas um outro resultado; e que também poderia ser verdadeira se as pessoas nem sequer calculassem.

MS 164, p. 87

A concordância das pessoas no cálculo não é uma concordância de opiniões ou de convencimentos.[297]

Poder-se-ia dizer: “Ao calcular, as regras se te apresentam como inexoráveis; você sente que só pode fazer isto e nada mais se você quer seguir a regra”?

“Tal como vejo a regra, é *isto* o que ela demanda.” Não depende de que eu esteja predisposto a isto ou

MS 164, p. 88

aquilo.

Sinto que dei uma interpretação à regra *antes*[298] que a seguisse; e que esta interpretação é suficiente para *determinar* o que tenho que fazer em determinado caso para segui-la.

Se concebo a regra assim como a concebi, então a ela só corresponde *esta* ação.

“Você compreendeu a regra?” – Sim, eu a compreendi. – “Então, aplique-a agora aos

MS 164, p. 89

números ...!” – Se eu quiser segui-la, ainda tenho uma escolha?

Suponhamos que ele me ordene seguir a regra e eu fiquei com medo de não obedecê-lo: não estou obrigado?

Mas isto é também assim quando ele me ordena: “Traga-me esta pedra”. Estou menos obrigado por estas palavras?

31. Wie weit kann man die Funktion der Sprache beschreiben? Wer eine Sprache nicht beherrscht, den kann ich zu ihrer Beherrschung abrichten.

MS 164, p. 90

Wer sie beherrscht, dem kann ich die Art und Weise der Abrichtung in Erinnerung rufen, oder beschreiben; zu einem besonderen Zweck; indem ich also schon eine Technik der Sprache verwende.

Wie weit kann man die Funktion der Regel beschreiben? Wer noch keine beherrscht, den kann ich nur abrichten. Aber wie kann ich mir selbst das Wesen der Regel erklären?

Das Schwere ist hier, nicht bis auf den Grund zu graben, sondern

MS 164, p. 91

den Grund, der vor uns liegt, als Grund zu erkennen.

Denn der Grund spiegelt uns immer wieder eine größere Tiefe vor, und wenn wir diese zu erreichen suchen finden wir uns immer wieder auf dem alten Niveau.

Unsere Krankheit ist die, erklären zu wollen.

»Wenn du die Regel inne hast, ist dir die Route vorgezeichnet.«

MS 164, p. 92

32. Welche Öffentlichkeit gehört wesentlich dazu, daß ein Spiel existiere, daß ein Spiel erfunden werden kann?

Welche Umgebung bedarf es, daß Einer das Schachspiel (z. B.) erfinden kann?

Freilich ich könnte heute ein Brettspiel erfinden, das nie wirklich gespielt würde. Ich würde es einfach beschreiben. Aber das ist nur möglich, weil es schon ähnliche Spiele gibt, d. h. weil solche Spiele *gespielt werden*.

MS 164, p. 93

Man könnte auch fragen: »Ist Regelmäßigkeit möglich *ohne* Wiederholung?«

Ich kann wohl heute eine neue Regel geben, die nie angewendet wurde und doch verstanden wird. Wäre das aber möglich, wenn *nie* eine Regel tatsächlich angewandt worden wäre?

Und wenn man nun sagt, »Genügt nicht die Anwendung in der Phantasie?« – so ist die

31. Até onde se pode descrever a função da linguagem? A quem não domina uma linguagem, posso adestrá-lo para que a domine.

MS 164, p. 90

A quem a domina, posso chamar à lembrança ou descrever o tipo e o modo do adestramento; para uma finalidade particular; na qual já emprego, por conseguinte, uma técnica da linguagem.

Até onde se pode descrever a função da regra? Para quem ainda não tem domínio, eu só posso adestrá-lo. Mas como posso explicar para mim mesmo a essência da regra?

O difícil aqui não é escavar até chegar no fundamento, mas

MS 164, p. 91

reconhecer o fundamento que está diante de nós como fundamento.

Pois o fundamento nos simula uma profundidade cada vez maior, e se tentamos alcançá-la, voltamos sempre a nos encontrar no antigo nível.

Nossa doença é a de querer explicar.

"Se você internalizou a regra, a rota para você está vaticinada."

MS 164, p. 92

32. Que esfera pública é essencialmente necessária para que um jogo exista, para que um jogo possa ser inventado?

Que ambiente é preciso para que alguém possa inventar (por exemplo) o jogo de xadrez?

Admitidamente, eu poderia hoje inventar um jogo de tabuleiro que realmente nunca foi jogado. Eu simplesmente o descreveria. Mas isto só é possível porque há jogos similares, isto é, porque *se jogam* tais jogos.

MS 164, p. 93

Poder-se-ia também perguntar: "A regularidade é possível *sem* repetição?"

Eu posso até dar hoje uma regra nova que nunca foi aplicada e ainda assim ser compreendida. Mas isto seria possível se uma regra *nunca* tivesse sido aplicada de fato?

E se agora se diz "Não basta a aplicação na imaginação?" – então a resposta é não. – (Pos-

Antwort Nein. – (Möglichkeit einer privaten Sprache.)

MS 164, p. 94

Ein Spiel, eine Sprache, eine Regel ist eine Institution.

»Wie oft aber muß eine Regel wirklich angewandt worden sein, daß man das Recht habe, von einer Regel zu sprechen?« – Wie oft muß ein Mensch addiert, multipliziert, dividiert haben, daß man sagen könne, er beherrsche die Technik dieser Rechnungsarten? Und damit meine ich nicht: wie oft muß er richtig gerechnet haben, um *Anderen* zu beweisen,

MS 164, p. 95

er könne rechnen, sondern: um es sich selbst zu beweisen.

33. Aber könnten wir uns nicht denken, daß jemand ohne jede Abrichtung sich beim Anblick einer Rechenaufgabe in dem Seelenzustand befindet, der normalerweise nur das Resultat von Abrichtung und Übung ist? So daß er also wüßte, er könne rechnen, obwohl er nie gerechnet hat. (Man könnte also, scheint es, sagen: die Abrichtung wäre nur *Geschichte*, und nur erfahrungs-

MS 164, p. 96

gemäß zur Hervorbringung des Wissens notwendig.) – Aber wenn er nun im Zustand jener Gewißheit ist und dann falsch multipliziert? Was soll er selbst nun sagen? Und nehmen wir an, er multiplizierte dann einmal richtig, einmal wieder ganz falsch. – Die Abrichtung kann freilich als bloße Geschichte vernachlässigt werden, wenn er jetzt *stets* richtig multipliziert.

MS 164, p. 97

Aber, daß er rechnen *kann* zeigt er nicht nur den Andern, sondern auch sich selbst dadurch, daß er richtig *rechnet*.

Was wir, in einer komplizierten Umgebung »einer Regel folgen« nennen, würden wir, wenn es isoliert dastünde, gewiß nicht so nennen.

34. Die Sprache, möchte ich sagen, bezieht sich auf eine Lebens*weise*.

Um das Phänomen der

MS 164, p. 98

Sprache zu beschreiben, muß man eine Praxis beschreiben, nicht einen einmaligen Vorgang, *welcher Art immer es sei*.

sibilidade de uma linguagem privada.)

MS 164, p. 94

Um jogo, uma linguagem, uma regra, é uma instituição.

"Mas com que frequência uma regra tem que ser realmente aplicada para que se tenha o direito de falar de uma regra?" – Com que frequência uma pessoa tem que ter somado, multiplicado, dividido, para que se possa dizer que ele domina a técnica destes tipos de cálculo? E com isto não quero dizer: com que frequência ele tem que ter calculado corretamente para demonstrar aos *outros*

MS 164, p. 95

que ele pode calcular, mas: para que se demonstre a si mesmo.

33. Mas não poderíamos pensar que alguém sem qualquer adestramento, à vista de uma tarefa de cálculo, se encontre na condição mental que normalmente só seria resultado de adestramento e exercício? De modo que ele então saberia que pode calcular mesmo que nunca o tivesse feito. (Poderíamos então, assim parece, dizer: o adestramento só seria *história*, e só empiricamente

MS 164, p. 96

necessário para engendrar o saber.) – Mas e se ele estivesse agora naquela condição de certeza e multiplicasse errado? O que ele mesmo deveria dizer agora? E suponhamos que ele multiplicasse ora corretamente, ora totalmente errado. – O adestramento pode admitidamente ser desprezado como mera história se ele agora multiplicar *invariavelmente* certo.

MS 164, p. 97

Mas que ele *pode* calcular, mostra não só aos outros mas também a si mesmo quando *calcula* corretamente.

O que chamamos de "seguir uma regra" em um ambiente complicado, certamente não o chamaríamos assim se fosse isolado.

34. A linguagem, gostaria de dizer, se relaciona com um *modo* de vida.

Para descrever o fenômeno

MS 164, p. 98

da linguagem, tem-se que descrever uma práxis, não um processo singular *de qualquer tipo que seja*.[299]

Das ist eine sehr schwierige Erkenntnis.

MS 164, p. 99

Denken wir uns, ein Gott erschaffe in einem Augenblick in der Mitte der Wüste ein Land, das zwei Minuten lang existiert und das genaue Abbild eines Teiles von England ist, mit alldem was in zwei Minuten da vorgeht. Die Menschen ganz wie die in England, gehen ihren verschiedenen Beschäftigungen nach. Kinder sitzen in der Schule. Einige Leute treiben Mathematik. Sehen wir nun die Tätigkeit irgend eines Menschen während dieser zwei Minuten an. Einer dieser Leute tut genau das, was ein Mathematiker in

MS 164, p. 100

England tut, der gerade eine Berechnung macht. – Sollen wir sagen, dieser Zwei-Minuten-Mensch rechne? Könnten wir uns nicht z. B. eine Vergangenheit und eine Fortsetzung zu diesen zwei Minuten denken, die uns die Vorgänge ganz anders benennen ließe?

Angenommen diese Wesen sprächen nicht Englisch, sondern verständigten sich anscheinend in einer Sprache, die wir nicht kennen. Welchen Grund hätten wir, zu sagen, sie sprächen eine Sprache?

MS 164, p. 101

Und doch, *könnte* man nicht, was sie tun, so auffassen?

Und angenommen, sie täten etwas, was wir geneigt wären »rechnen« zu nennen; etwa weil es äußerlich ähnlich ausschaut. – Aber *ist* es rechnen; und wissen es (etwa) die Leute, die es tun, und wir nicht?

35. Wie weiß ich, daß die Farbe die ich jetzt sehe »grün« heißt? Nun, zur Bestätigung könnte ich andere Leute fragen; aber wenn sie mit mir nicht

MS 164, p. 102

übereinstimmten, würde ich gänzlich verwirrt sein und sie vielleicht oder mich für verrückt halten. Das heißt: entweder mich nicht mehr zu urteilen trauen, oder auf das was sie sagen nicht mehr wie auf ein Urteil reagieren.

Wenn ich ertrinke und »Hilfe!« rufe, wie weiß ich, was das Wort Hilfe bedeutet? Nun, so reagiere ich in dieser Situation. – Nun *so* weiß ich auch, was »grün« heißt und auch wie ich die Regel in dem besondern Fall zu befolgen habe.

MS 164, p. 103

Ist es *vorstellbar*, daß die Kräftepolygon von

Este é um reconhecimento muito difícil.

MS 164, p. 99

Imaginemos que um deus criou em um instante no meio do deserto uma terra que existe por dois minutos e que é a cópia exata de uma parte da Inglaterra, com tudo o que ali acontece em dois minutos. As pessoas, totalmente como na Inglaterra, vão atrás das suas distintas ocupações. As crianças estão sentadas na escola. Algumas pessoas fazem matemática. Observamos agora as atividades de uma pessoa qualquer durante estes dois minutos. Uma destas pessoas faz exatamente o que faz um matemático

MS 164, p. 100

na Inglaterra que está fazendo um cálculo. – Devemos dizer que esta pessoa-de-dois-minutos calcula? Não poderíamos imaginar, por exemplo, um passado e uma continuação para estes dois minutos que nos permisse denominar os processos de uma maneira totalmente diferente?

Suponhamos que estes seres não falassem inglês, mas que aparentemente se entendessem em uma língua que não conhecemos. Que razão teríamos para dizer que falam uma língua?

MS 164, p. 101

E, de todo modo, não se *poderia* conceber assim o que fazem?[300]

E suponhamos que fizessem algo que estaríamos propensos a chamar de “cálculo”; possivelmente porque externamente lhe parece similar. – Mas isto *é* calcular; e as pessoas que fazem isto o sabem (digamos) e nós não?

35. Como sei que a cor que agora vejo se chama “verde”? Bem, para constatá-lo eu poderia perguntar a outras pessoas; mas se elas não concordassem

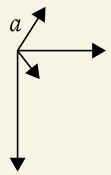
MS 164, p. 102

comigo, eu ficaria totalmente confuso e talvez os tomasse, ou a mim mesmo, por loucos. Ou seja: ou não confiaria mais em meus juízos, ou não reagiria mais sobre o que eles dizem como se fosse um juízo.

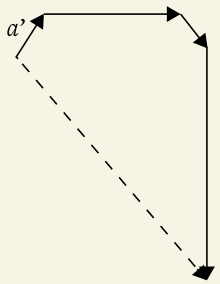
Se me afogo e grito “socorro!”, como sei que a palavra socorro tem significado? Bem, eu reajo assim nesta situação. – Então é *assim* que sei o que significa “verde” e também como tenho que seguir a regra neste caso particular.

MS 164, p. 103

É *imaginável* que o polígono de forças de



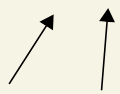
nicht so



sondern anders aussieht? Nun, ist es vorstellbar, daß die Parallele zu *a* nicht wie *a’* sondern anders gerichtet aussieht? Das heißt: ist es vorstellbar, daß

MS 164, p. 104

ich nicht *a’*, sondern einen anders gerichteten Pfeil als Parallele mit *a* anschaue? Nun, ich könnte mir zum Beispiel denken, daß ich den parallelen Pfeil irgendwie perspektivisch sehe und daher



parallele Pfeile nenne; und daß es mir nicht auffällt, daß ich eine andere Anschauungsart gebraucht habe. So also *ist* es vorstellbar, daß ich ein anderes Kräftepolygon den Pfeilen entsprechend zeichne.

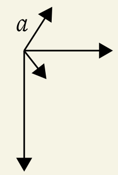
MS 164, p. 105

36. Was ist das für ein Satz: »das Wort ›OBEN‹ hat vier Laute«?
Ist es ein Erfahrungssatz?

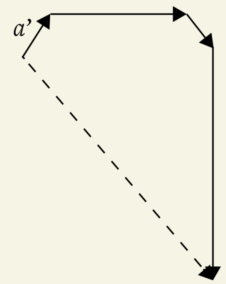
Ehe wir die Buchstaben gezählt haben, wissen wir es nicht.

Wer die Buchstaben des Wortes ›OBEN‹ zählt, um zu erfahren wieviele Laute die so klingende Lautreihe hat, tut ganz dasselbe wie der, welcher zählt um zu erfahren, wieviele Buchstaben das dort und dort aufgeschriebene Wort

MS 164, p. 106



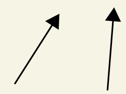
não se pareça com



mas seja de outro jeito? Bem, é imaginável que a paralela de *a* pareça se dirigir para outro lado e não como *a’*? Ou seja: é imaginável que eu não olhe

MS 164, p. 104

para *a’*, mas para outra seta direcionada como paralela a *a*? Bem, eu poderia imaginar, por exemplo, que vejo a seta paralela em perspectiva e então chame



de setas paralelas; e que não me dê conta de que usei outro tipo de visão. Assim, portanto, *é* imaginável que eu desenhe um polígono de forças diferente daquele que corresponde às setas.

MS 164, p. 105

36. Que tipo de proposição é esta: “A palavra ‘ALTO’ tem quatro sons”?
É uma proposição empírica?

Antes de que contemos as letras, ainda não sabemos.

Quem conta as letras da palavra ‘ALTO’ para saber quantos sons tem a série sonora que soa assim, faz inteiramente a mesma coisa que aquele que conta para chegar a saber quantas letras tem uma palavra escrita assim e

MS 164, p. 106

hat. Der Erstere tut also etwas, was auch ein Experiment sein könnte. Und das könnte der Grund sein, den Satz, ›OBEN‹ habe 4 Buchstaben, synthetisch a priori zu nennen.

Das Wort »Plato« hat soviele Laute wie der Drudenfuß Ecken. Ist das ein Satz der Logik? – Ist es ein Erfahrungssatz?

Ist Zählen ein Experiment? Es *kann* eins sein.

Denk dir ein Sprach-

MS 164, p. 107

spiel, in dem Einer die Laute von Wörtern zu zählen hat. Es könnte nun sein, daß ein Wort scheinbar immer den gleichen Klang hätte, aber wenn wir seine Laute zählen, so kommen wir bei verschiedenen Anlässen zu verschiedenen Zahlen. Es könnte z. B. sein, daß uns ein Wort in verschiedenen Zusammenhängen gleich zu lauten schien (gleichsam durch eine akustische Täuschung), aber beim Zählen der Laute ergäbe sich die Verschiedenheit. In einem solchen Falle werden wir etwa die

MS 164, p. 108

Laute eines Wortes bei verschiedenen Anlässen immer wieder zählen und dies wird etwa eine Art Experiment sein.

Anderseits kann es aber sein, daß wir die Laute von Wörtern ein für allemal zählen, eine Rechnung machen, und das Resultat dieser Zählung verwenden.

Der resultierende Satz wird im ersten Fall zeitlich, im zweiten unzeitlich sein.

Wenn ich die Laute des Wortes »Dädalus« zähle, so kann ich Zweierlei als das

MS 164, p. 109

Ergebnis betrachten: 1) Das Wort, welches dort steht (oder so aussieht oder jetzt ausgesprochen wurde oder etc.) hat 7 Laute. 2) Das Lautbild »Dädalus« hat 7 Laute.

Der zweite Satz ist zeitlos.

Die Verwendung der beiden Sätze muß verschieden sein.

Das *Zählen* ist in beiden Fällen *das Gleiche*. Nur, was wir damit erreichen, ist verschieden.

Die Zeitlosigkeit des zweiten Satzes ist nicht etwa ein Ergebnis des

MS 164, p. 110

Zählens, sondern der Entscheidung, das Ergebnis des Zählens in bestimmter Weise zu verwenden.

assim. O primeiro, por isto, fez algo que poderia ser um experimento. E esta poderia ser a razão para denominar a proposição de que ‘ALTO’ tem quatro letras como sintética a priori.

A palavra “Platão” tem tantos sons quantos os ângulos do hexágono. Esta é uma proposição da lógica? – Esta é uma proposição empírica?

A contagem é um experimento? Ela *pode* ser.

Imagine um jogo

MS 164, p. 107

de linguagem em que alguém tem que contar os sons das palavras. Poderia acontecer que uma palavra aparentemente soasse sempre igual, mas quando contássemos os seus sons, encontraríamos em diferentes ocasiões contagens diferentes. Por exemplo, poderia acontecer que uma palavra nos parecesse soar igual em diferentes contextos (como se fosse por uma ilusão acústica), mas a contagem denunciasse a diferença. Em um caso como este talvez contássemos

MS 164, p. 108

sempre de novo os sons de uma palavra nas diferentes ocasiões, e isto se tornaria possivelmente um tipo de experimento.

Mas, por outro lado, pode ser que contemos os sons das palavras de uma vez por todas, façamos um cálculo e empreguemos o resultado desta contagem.

A proposição resultante seria, no primeiro caso, temporal, e seria atemporal no segundo caso.[301]

Se conto os sons da palavra “Dédalus”, posso observar duas coisas

MS 164, p. 109

como resultado: 1) A palavra que ali está (ou que parece assim ou que foi proferida agora ou etc.) tem 7 sons. 2) A imagem sonora “Dédalus” tem 7 sons.

A segunda proposição é atemporal.

O emprego das duas proposições tem que ser diferente.

A *contagem* nos dois casos é *a mesma*. Só o que alcançamos com isto é que é diferente.

A atemporalidade da segunda proposição não é, digamos, um resultado da

MS 164, p. 110

contagem, mas da decisão de empregar o resultado da contagem de determinada maneira.

Em português a palavra “Dédalus” tem 7 sons. Esta é, de todo modo, uma proposição

Im Deutschen hat das Wort »Dädalus« 7 Laute. Das ist doch ein Erfahrungssatz.

Denke es zählte jemand die Laute von Wörtern, um ein Sprachgesetz, etwa ein Gesetz der Entwicklung der Sprache zu finden oder zu prüfen. Er sagt: »›Dädalus‹ hat 7 Laute«. Dies ist ein Erfahrungs-

MS 164, p. 111

satz. Betrachte hier die *Identität* des Wortes. Das gleiche Wort kann hier einmal die, einmal jene Lautzahl haben.

Nun sage ich Einem: »Zähl die Laute in diesen Wörtern und schreib die Zahl zu jedem Wort!«

Ich möchte sagen: »Durch Abzählen der Laute kann man einen Erfahrungssatz bekommen – aber auch eine Regel.«

MS 164, p. 112

Zu sagen: »Das wort ... hat ... Laute – im zeitlosen Sinne« *ist* eine Bestimmung über die Identität des Begriffs ›Das Wort ... ‹. Daher die Zeitlosigkeit.

Statt »Das Wort ... hat ... Laute – im zeitlosen Sinne«, könnte man auch sagen: »Das Wort ... hat *wesentlich* ... Laute«.

37. $p|p \;\cdot|\cdot\; q|q = p \cdot q$

$p|q \;\cdot|\cdot\; p|q = p \vee q$

$x|y \;\cdot|\cdot\; z|u \stackrel{\text{def}}{=} ||\,(x, y, z, u)$

MS 164, p. 113

Die Definitionen brauchten gar nicht Verkürzungen zu sein, sondern sie könnten auf andere Weise neue Zusammengehörigkeiten machen. Etwa durch Klammern oder auch den Gebrauch verschiedener Farben der Zeichen.

Ich kann zum Beispiel einen Satz beweisen, indem ich durch Farben andeute, daß er die Form eines meiner Axiome hat, aber durch eine gewisse Substitution verlängert.

38. »Ich weiß, wie ich zu gehen habe« heißt: ich

MS 164, p. 114

zweifle nicht, wie ich zu gehen habe.

empírica.

Imagine que alguém contasse os sons das palavras para encontrar ou testar uma lei da linguagem, por exemplo uma lei do desenvolvimento da linguagem. Ele diz: "'Dédalus' tem 7 sons". Esta é uma proposição

MS 164, p. 111

empírica. Considere aqui a *identidade* da palavra. A mesma palavra pode ter aqui ora este, ora aquele número de sons.

Agora eu digo para alguém: "Conte os sons destas palavras e escreva o número para cada palavra!"

Gostaria de dizer: "Pela contagem dos sons podemos obter uma proposição empírica – mas também uma regra."

MS 164, p. 112

Dizer: "A palavra ... tem ... sons – em sentido atemporal" *é*[302] uma determinação sobre a identidade do conceito 'A palavra ...'. Daí a atemporalidade.

Em vez de "A palavra ... tem ... sons – em sentido atemporal", poderíamos também dizer: "A palavra ... tem *essencialmente* ... sons".

37. $p|p \;\cdot|\cdot\; q|q = p \cdot q$ [303]

$p|q \;\cdot|\cdot\; p|q = p \vee q$

$x|y \;\cdot|\cdot\; z|u \stackrel{\text{def}}{=} ||\,(x, y, z, u)$

MS 164, p. 113

As definições não precisariam em absoluto ser abreviaturas, mas poderiam, por outro lado, estabelecer novas combinações. Por exemplo, mediante parênteses ou então pelo uso de diferentes cores dos sinais.

Posso, por exemplo, demonstrar uma proposição na qual indico por cores que ela tem a forma de um dos meus axiomas, mas estendida por uma certa substituição.

38. "Eu sei como tenho que seguir" significa: eu

MS 164, p. 114

não tenho dúvida sobre como devo seguir.

»Wie kann man einer Regel folgen?« So möchte ich fragen.

Wie kommt es aber, daß ich so fragen will, wo ich doch keinerlei Schwierigkeiten darin finde, einer Regel zu folgen?

Wir mißverstehen hier offenbar die Tatsachen, die uns vor Augen liegen.

Wie kann mir das Wort

MS 164, p. 115

»Platte« anzeigen, was ich zu tun habe, da ich doch jede Handlung mit jeder Deutung in Einklang bringen kann?

Wie kann ich einer Regel folgen, da doch, was immer ich tue, als ein Folgen gedeutet werden kann?

Was muß ich wissen, um dem Befehl folgen zu können? Gibt es ein *Wissen*, das die Regel nur *so* befolgbar macht? Ich muß manchmal etwas *wissen*, ich muß *manchmal* die Regel *deuten*, ehe ich sie anwende.

MS 164, p. 116

Wie konnte denn der Regel im Unterricht eine Deutung gegeben werden, die zu einer beliebigen Stufe hinaufreicht?

Und wenn diese Stufe in der Erklärung nicht genannt wurde, wie können wir denn übereinstimmen darüber, was auf dieser Stufe zu geschehen hat, da doch, was immer geschieht mit der Regel und den Beispielen in Einklang gebracht werden kann.

Es ist also, sagst du, über diese Stufen nichts

MS 164, p. 117

bestimmtes gesagt worden.

Das Deuten hat ein Ende.

39. Es ist wahr, alles ließe sich irgendwie rechtfertigen. Aber das Phänomen der Sprache beruht auf der Regelmäßigkeit, auf der Übereinstimmung im Handeln.

Hier ist es von der größten Wichtigkeit, daß wir alle, oder die ungeheure Mehrzahl in gewissen Dingen übereinstimmen. Ich kann, z. B.,

MS 164, p. 118

“Como se pode seguir uma regra?” Assim gostaria de perguntar.

Mas como é que eu perguntaria assim se não encontro qualquer dificuldade em seguir uma regra?

Nós obviamente entendemos mal os fatos que estão diante dos nossos olhos.

Como é que a palavra

MS 164, p. 115

“placa”[304] pode me indicar o que tenho que fazer, já que eu posso colocar em harmonia qualquer ação com qualquer interpretação?

Como posso seguir uma regra, já que o que faço sempre pode ser interpretado como um seguimento?

O que tenho que saber para poder seguir a ordem? Existe um *saber* que torna a regra só *assim* seguível? Eu tenho que *saber* algo às vezes, eu tenho que *interpretar* a regra *às vezes*, antes de aplicá-la.

MS 164, p. 116

Como poderia então ser dada na instrução à regra uma interpretação que alcançasse qualquer nível?

E se este nível não foi nomeado na explicação, como poderíamos concordar com o que tem que acontecer neste nível, uma vez que tudo o que acontece pode ser reconciliado com a regra e os exemplos.

Por conseguinte, você diz, nada de específico

MS 164, p. 117

foi dito sobre estes níveis.

A interpretação tem um fim.[305]

39. É verdade que tudo pode, de alguma forma, ser justificado. Mas o fenômeno da linguagem repousa sobre a regularidade, sobre a concordância na ação.[306]

Aqui é da maior importância que todos nós, ou a imensa maioria, concordamos em certas coisas. Eu posso, por exemplo,

MS 164, p. 118

ganz sicher sein, daß die Farbe dieses Gegenstandes von den allermeisten Menschen die ihn sehen ›grün‹ genannt wird.

Es wäre denkbar, daß Menschen verschiedener Stämme Sprachen besäßen, die alle den gleichen Wortschatz hätten, aber die Bedeutungen der Wörter wären verschieden. Das Wort das bei einem Stamm Grün bedeutet, bedeute in der Sprache des andern gleich, in der dritten Tisch

MS 164, p. 119

etc. Ja, wir können uns auch denken, daß die gleichen Satze, nur mit gänzlich anderem Sinn von den Stämmen gebraucht werden.

Nun, ich würde in diesem Falle nicht sagen, daß sie die gleich Sprache redeten.

Wir sagen, die Menschen, um sich miteinander zu verständigen, mußten über die Bedeutungen der Wörter mit einander übereinstimmen. Aber das Kriterium für diese Übereinstimmung ist nicht nur eine Übereinstim-

MS 164, p. 120

mung in Bezug auf Definitionen, z. B. hinweisende Definitionen, – sondern *auch* eine Übereinstimmung in Urteilen. Es ist für die Verständigung wesentlich, daß wir in einen großen Anzahl von Urteilen übereinstimmen.

40. Das Sprachspiel (2), wie kann ich es jemand, oder mir selbst, erklaren? Wenn immer A »Platte« ruft, bring B *diese* Art Gegenstand. – Ich könnte auch fragen: wie kann *ich* es verstehen? Nun, *nur*

MS 164, p. 121

sofern ich es erklären kann.

Aber es gibt hier eine eigentümliche Versuchung, die sich darin ausdrückt, daß ich sagen möchte: Ich kann es nicht verstehen, weil die Deutung der Erklärung in Vagen bleibt.

D. h., ich kann dir und mir selbst nur Beispiele der Anwendung geben.

41. Das Wort »Übereinstimmung« und das Wort »Regel« sind miteinander *verwandt*, sie sind Vettern. Das Phänomen

MS 164, p. 122

des Übereinstimmens und des Handelns nach einer Regel hängen zusammen.

ficar totalmente seguro de que a cor deste objeto vai ser chamada de 'verde' pela maior parte das pessoas que o virem.

Poderíamos imaginar pessoas de diferentes tribos que possuíssem línguas com o mesmo vocabulário, mas que os significados das palavras fossem diferentes. A palavra que para uma tribo significa verde, significa o mesmo na língua da outra, mesa na terceira

MS 164, p. 119

etc. Assim, poderíamos também imaginar que as mesmas sentenças são usadas pelas tribos só que com sentidos totalmente diferentes.

Bem, não poderia dizer neste caso que eles falam a mesma língua.

Nós dizemos que as pessoas têm que concordar entre si sobre os significados das palavras para se entenderem mutuamente. Mas o critério para esta concordância não é só uma concor-

MS 164, p. 120

dância em relação a definições, por exemplo definições ostensivas, – mas *também* uma concordância nos juízos. É essencial para o entendimento que nós concordemos em um grande número de juízos.

40. O jogo de linguagem (2),[307] como posso explicá-lo para alguém ou para mim mesmo? Sempre que A exclama "placa", B traz *este* tipo de objeto. – Eu poderia também perguntar: como *eu* posso compreender isto? Bem, *somente*

MS 164, p. 121

na medida em que posso explicá-lo.

Mas existe aqui uma tentação peculiar que se expressa no que gostaria de dizer: não posso compreendê-lo porque a interpretação da explicação permanece vaga.

Ou seja, eu só posso dar para você e para mim mesmo exemplos de aplicação.

41. A palavra "concordância" e a palavra "regra" são *aparentadas*, são primas. Os fenômenos

MS 164, p. 122

da concordância e da ação conforme uma regra estão interligados.

Poderia haver um homem das cavernas que produziu para si mesmo sequências de sinais *regulares*. Ele se divertia desenhando, por exemplo, na parede da caverna — • — — • — — •

Es könnte doch einen Höhlenmenschen geben, der für sich selbst *regelmäßige* Zeichenfolgen hervorbrächte. Er unterhielte sich z.B. damit, an die Wand der Höhle zu zeichnen — ● — — ● — — ● — — ● oder — ● — ●● — ●●● — ●●●● — .

Aber er folgt nicht dem allgemeinen Ausdruck einer Regel. Und wir sagen nicht, er handle

MS 164, p. 123

regelmäßig, weil wir so einen Ausdruck bilden können.

Aber wenn er nun gar π entwickelte! (Ich meine ohne einen allgemeinen Regelausdruck.)

Nur in der Praxis einer Sprache kann ein Wort Bedeutung haben.

Gewiß, ich kann mir selbst eine Regel geben und ihr dann folgen. Aber ist es nicht nur darum eine Regel, weil es analog dem ist, was im Verkehr der

MS 164, p. 124

Menschen ›Regel‹ heißt?

Wenn eine Drossel in ihrem Gesang die gleiche Phrase stets einige Male wiederholt, sagen wir sie gebe sich vielleicht jedesmal eine Regel, der sie dann folgt?

42. Betrachten wir sehr einfache Regeln. Der Regelausdruck sei eine Figur, etwa die:

|— —|

und man folgt der Regel indem man eine gerade Reihe solcher Figuren zeichnet

MS 164, p. 125

(etwa als ein Ornament).

|— —||— —||— —||— —||— —|

Unter was für Umständen würden wir sagen: durch das Hinschreiben einer solchen Figur gebe jemand eine Regel? Unter was für Umständen: Einer folge dieser Regel, indem er jene Reihe zeichnet? Es ist schwer, das zu beschreiben.

Wenn von zwei Schimpansen der eine einmal die Figur |— —| in den Lehmboden ritzte und ein anderer darauf die Reihe |— —||— —| etc., so hätte der erste nicht eine Regel gegeben und der

MS 164, p. 126

zweite ihr gefolgt, was immer auch dabei in der Seele der beiden vorginge.

Beobachtete man aber z. B. das Phänomen einer Art von Unterricht eines Vormachens

— — ● ou — ● — ●● — ●●● — ●●●● — .

Mas ele não seguiu a expressão geral de uma regra. E nós não dizemos que ele agiu

MS 164, p. 123

com regularidade porque podemos formar uma expressão deste jeito.

Mas e se ele tivesse desenvolvido π! (Quero dizer, sem uma expressão geral da regra.)

Só na práxis de uma linguagem uma palavra pode ter significado.

Certamente posso dar uma regra para mim mesmo e então segui-la. Mas isto não é só uma regra porque é análoga ao que significa ‘regra’

MS 164, p. 124

no intercurso humano?

Se um sabiá repetir sempre a mesma frase várias vezes no seu canto, nós vamos dizer que ele talvez dê para si toda vez uma regra que então passa a seguir?

42. Consideremos regras muito simples. A expressão da regra seria uma figura, digamos que:

|— —|

e seguimos a regra quando desenhamos uma sequência em reta destas figuras

MS 164, p. 125

(como um ornamento, por exemplo).

|— —||— —||— —||— —||— —|

Sob que circunstâncias viríamos a dizer: alguém dá uma regra mediante a escrita destas figuras? Sob que circunstâncias: alguém segue esta regra quando desenha aquela série? É difícil descrever isto.

Se um entre dois chimpanzés risca uma vez no barro a figura |— —|, e o outro em seguida a série |— —||— —| etc., então o primeiro não teria dado uma regra e o

MS 164, p. 126

segundo tampouco a teria seguido, independente do que se tivesse passado na mente de ambos.

Observado, no entanto, o fenômeno de um tipo de ensino de uma demonstração e tentativas de imitação bem-sucedidas e mal-sucedidas, de recompensas e punições e coisas semeund Nachahmens geglückter und mißgeglückter Versuche, von Belohnung und Strafe und dergleichen; würde am Ende der so Abgerichtete Figuren, die er bis dahin nicht gesehen hatte, wie im ersten Beispiel aneinander reihen, so würden wir wohl sagen, der eine Schimpanse

MS 164, p. 127

schreibe Regeln hin, der andre befolge sie.

43. Wie aber, wenn sich schon beim ersten Male der eine Schimpanse *vorgenommen* hätte, diesen Vorgang zu wiederholen? Nur in einer bestimmten Technik des Handelns, Sprechens, Denkens, kann Einer sich etwas vornehmen. (Dieses ›kann‹ ist das grammatische.)

Es ist möglich, daß ich heute ein Kartenspiel erfinde, das aber nie gespielt wird. Aber es heißt nichts zu sagen in der

MS 164, p. 128

Geschichte der Menschheit sei nur einmal ein Spiel erfunden worden und das habe niemand gespielt. Das heißt nichts. Nicht weil es psychologischen Gesetzen widerspricht. Die Worte »ein Spiel erfinden«, »ein Spiel spielen« haben nur in einer ganz bestimmten Umgebung Sinn.

So kann man auch nicht sagen, ein einziges Mal in der Geschichte der Menschheit sei Einer einem Wegweiser gefolgt. Wohl aber: ein einziges Mal in der Geschichte der Menschheit

MS 164, p. 129

sei Einer mit einer Latte parallel gegangen. Und jene erste Unmöglichkeit ist wieder keine psychologische.

Die Worte »Sprache«, »Satz«, »Befehl«, »Regel«, »Rechnung«, »Experiment«, »einer Regel folgen« beziehen sich auf eine Technik, auf eine Gepflogenheit.

Eine Vorstufe zum Handeln nach einer Regel wäre etwa die Lust an einfachen Regelmäßigkeiten, wie das Klopfen einfacher Rhythmen oder Zeichnen oder Betrachten

MS 164, p. 130

einfacher Ornamente. Man könnte jemand also abrichten, dem Befehl zu folgen: »zeichne etwas regelmäßiges«, »klopfe regelmäßig«. Und hier wieder muß man sich eine bestimmte Technik vorstellen.

Du mußt dich fragen: Unter welchen besonderen Umständen sagen wir, es hatte sich jemand »bloß verschrieben«, oder »er hätte wohl fortsetzen können, hat es aber absichtlich nicht getan«, oder »er hatte die Figur die er gezeich-

MS 164, p. 131

lhantes; se ao final aquele que foi adestrado assim com figuras que ele até então não tinha visto, numa série ordenada tal como no primeiro exemplo, então diríamos muito provavelmente que um chimpanzé

MS 164, p. 127

anotou as regras e o outro as seguiu.

43. Mas como seria se um dos chimpanzés já na primeira vez tivesse *se proposto a* repetir este processo? Só numa determinada técnica de ação, de linguagem, de pensamento, alguém pode se propor a alguma coisa. (Este ‘pode’ é o gramatical.)

É possível que eu invente hoje um jogo de cartas que nunca será jogado. Mas não significa nada dizer que na

MS 164, p. 128

história da humanidade um jogo foi inventado só uma vez e ninguém o jogou. Isto não significa nada. Não porque contradiga leis psicológicas. As palavras “inventar um jogo”, “jogar um jogo” só têm sentido em um contexto totalmente determinado.

Por conseguinte, não se pode tampouco dizer que alguém seguiu uma única vez na história da humanidade uma placa de sinalização. Mas sim: uma única vez na história da humanidade

MS 164, p. 129

alguém caminhou em paralelo a um enripamento. E aquela primeira impossibilidade tampouco é psicológica.

As palavras “linguagem”, “sentença”, “ordem”, “regra”, “cálculo”, “experimento”, “seguir uma regra”, se relacionam com uma técnica, com um costume.

Um precursor para a ação segundo uma regra seria, digamos, o prazer em regularidades simples tais como o batuque de ritmos simples, ou desenhar ou observar

MS 164, p. 130

ornamentos simples. Poder-se-ia, portanto, adestrar alguém a seguir a ordem: “desenhe alguma coisa regular”, “batuque regularmente”. E aqui novamente tem-se que imaginar uma determinada técnica.

Você tem que se perguntar: sob que circunstâncias particulares dizemos que alguém “apenas cometeu um erro ao escrever”, ou “ele poderia ter continuado, mas não o fez de propósito”, ou “ele queria repetir a figura que desenhou,

MS 164, p. 131

net hat wiederholen wollen, sei aber nicht dazu gekommen«.

Der Begriff »regelmäßiges Klopfen«, »regelmäßige Figur«, wird uns so beigebracht wie ›hell‹, ›schmutzig‹ oder ›bunt‹.

44. Aber werden wir nicht von der Regel geführt? Und wie kann sie uns führen, da ihr Ausdruck doch von uns so und anders gedeutet werden kann? d. h., da doch verschiedene Regelmäßigkeiten ihm entsprechen. Nun, wir sind geneigt zu sagen, ein Ausdruck der Regel führe uns, wir

MS 164, p. 132

sind also geneigt diese Metapher zu gebrauchen.

Was ist nun der Unterschied zwischen dem Vorgang nach einer Regel (etwa einem algebraischen Ausdruck) Zahl auf Zahl der Reihe nach abzuleiten und diesem Vorgang: Wenn wir jemandem ein gewisses Zeichen etwa  zeigen, so fällt ihm eine Ziffer ein; schaut er auf die Ziffer und das Zeichen, so fällt ihm wieder eine Ziffer ein und so ferner. Und jedesmal wenn wir dieses Experiment vornehmen,

MS 164, p. 133

fällt ihm die gleiche Reihe von Ziffern ein. Ist der Unterschied zwischen diesem Vorgang und dem Vorgehen nach der Regel der psychologische, daß im zweiten Fall ein Einfallen stattfindet? Könnte ich nicht sagen: Wenn er der Regel »| — — |« folgte, fiel ihm immer wieder »| — — |« ein?

Nun, in unserm Fall haben wir doch Intuition, und man sagt ja, daß Intuition am Grunde des Handelns nach einer Regel ist.
Nehmen wir also an,

MS 164, p. 134

jenes, sozusagen, magische Zeichen bewirke die Reihe 123123123 etc.; ist das Zeichen *dann* nicht der Ausdruck einer Regel? Nein.

Das Handeln nach einer Regel setzt das Erkennen einer *Gleichmäßigkeit* voraus und das Zeichen »123123123 etc.« war der natürliche Ausdruck einer Gleichmäßigkeit.

Nun wird man vielleicht sagen | 22 | | 22 | | 22 | sei allerdings eine gleichmäßige Ziffernfolge, aber doch nicht

| 2 | | 22 | | 222 | | 2222 |

MS 164, p. 135

Nun, ich könnte das eine andre Art der Gleichmäßigkeit nennen.

mas não chegou a fazer isto".

O conceito de "batuque regular", "figura regular", nos é ensinado tal como 'claro', 'encardido' ou 'multicolorido'.

44. Mas não somos guiados pela regra? E como ela pode nos guiar já que a sua expressão pode obviamente ser interpretada por nós assim ou assado? Ou seja, dado que, de todo modo, diferentes regularidades lhes são correspondentes? Bem, nós somos inclinados a dizer que uma expressão da regra nos guia, nós

MS 164, p. 132

somos portanto inclinados a usar esta metáfora.

Qual é a diferença agora entre o processo para derivar, segundo uma regra (digamos, uma expressão algébrica), número por número da série, e este processo: se mostramos para alguém um certo sinal, este , por exemplo, então lhe ocorre um algarismo; ele olha para o algarismo e o sinal, e então lhe ocorre novamente um algarismo, e assim por diante. E toda vez que efetuamos este experimento,

MS 164, p. 133

lhe ocorre a mesma série de algarismos. A diferença entre este processo e o procedimento segundo a regra é de ordem psicológica, pelo que no segundo caso acontece de algo lhe vir à mente? Eu não poderia dizer: se ele seguisse a regra "| — — |", sempre lhe voltaria a ocorrer "| — — |"?

Bem, no nosso caso nós temos intuição, de todo modo, e se diz que a intuição está na base da ação segundo uma regra.
Em vista disto, suponhamos que

MS 164, p. 134

aquele sinal mágico, por assim dizer, acarretasse a série 123123123 etc.; não seria o sinal *então* a expressão de uma regra? Não.

A ação segundo uma regra pressupõe o reconhecimento de uma *uniformidade*, e o sinal "123123123 etc." era a expressão natural de uma uniformidade.

Ora, talvez ainda assim se diga que | 22 | | 22 | | 22 | é uma série de algarismos uniforme, mas, de todo modo,

| 2 | | 22 | | 222 | | 2222 |

não é.

MS 164, p. 135

45. Wie aber wenn es einen Stamm gäbe, dessen Leute scheinbar für eine Art von Regelmäßigkeit Verständnis hätten, die ich nicht begreife. Es gäbe nämlich bei diesen auch ein Lernen, einen Unterricht, ganz analog dem in § 42 . Sieht man ihnen zu, so würde man sagen, sie folgen Regeln, lernen Regeln folgen. Der Unterricht bewirkt z. B. Übereinstimmung im Handeln der Schüler und Lehrer. Schauen wir aber eine ihrer Figurenreihen an, so sehen wir keiner-

MS 164, p. 136

lei Regelmäßigkeit.

Was sollten wir nun sagen? Wir *könnten* sagen: »Sie scheinen einer Regel zu folgen, die uns entgeht«; aber auch: »Hier haben wir ein Phänomen des Benehmens von Menschen, das wir nicht verstehen«.

Der Unterricht im Handeln nach der Regel läßt sich beschreiben, ohne Verwendung des Wortes »usw.«.

Wohl aber kann in dieser Beschreibung eine Geste, ein Tonfall, ein Zeichen,

MS 164, p. 137

die der Lehrer beim Unterricht in bestimmter Weise gebraucht und die die Schüler nachahmen, beschrieben werden. Es kann auch die Wirkung dieser Ausdrücke beschrieben werden, wieder ohne Zuhilfenahme des ›usw. ‹, also finit. Die Wirkung des »usw.« wird sein, Übereinstimmung zu erzeugen über den Unterricht hinaus. Es wird also bewirkt, daß wir Alle oder fast Alle gleich zählen und gleich rechnen.

Man könnte sich aber

MS 164, p. 138

auch den Unterricht ohne das »usw.« denken. Die Leute aber, wenn sie aus der Schule kämen, würden dennoch alle gleich über die Beispiele im Unterricht hinaus rechnen.

Wie, wenn der Unterricht aber eines Tages nicht mehr Übereinstimmung bewirkte?

Könnte es Arithmetik ohne Übereinstimmung der Rechnenden geben?

Könnte ein Mensch allein rechnen? Könnte einer allein einer Regel

MS 164, p. 139

folgen?

Sind diese Fragen etwa ähnlich der: »Kann Einer allein Handel treiben?«

Bem, poderia chamar a isto de um outro tipo de uniformidade.

45. Mas como seria se houvesse uma tribo cujo povo aparentemente tivesse uma compreensão para um tipo de regularidade que eu não apreendo. Haveria particularmente também entre eles um aprendizado, um ensino, totalmente análogo ao da seção § 42.[308] Quando se os vê, diz-se que seguem regras, aprendem a seguir regras. O ensino acarreta, por exemplo, a concordância na ação do aluno e do professor. Mas se observamos uma das suas séries de figuras, não vemos nenhuma

MS 164, p. 136

espécie de regularidade.

O que deveríamos dizer então? Nós *poderíamos* dizer: “Eles parecem seguir uma regra que nos escapa”; mas também: “Aqui nós temos um fenômeno de comportamento humano que não compreendemos”.[309]

O ensino da ação segundo a regra pode ser descrito sem o emprego da expressão “e assim por diante”.

Nesta descrição, porém, podem ser descritos um gesto, uma entoação, um sinal

MS 164, p. 137

que o professor usa de determinada forma no ensino e que o aluno imita. O efeito destas expressões pode também ser descrito, novamente sem a assistência do “e assim por diante”, ou seja, finitamente. O efeito do “e assim por diante” vem a ser o de produzir a concordância dali para a frente. Isto tem o efeito, portanto, de que todos ou quase todos contem igual e calculem igual.

Poderíamos, contudo,

MS 164, p. 138

imaginar também o ensino sem o “e assim por diante”. Mas as pessoas, quando chegarem da escola, ainda vão todas calcular dali para a frente igual aos exemplos dados em classe.[310]

Mas como seria se um dia o ensino não acarretasse mais a concordância?

Poderia haver aritmética sem a concordância daqueles que calculam?

Poderia um ser humano sozinho calcular? Poderia alguém sozinho seguir uma

MS 164, p. 139

regra?

São estas perguntas um tanto semelhantes a: “Pode alguém sozinho empreender o co-

Es hat nur dann Sinn, zu sagen »und so weiter«, wenn »und so weiter« *verstanden* wird. D. h., wenn der Andre ebensogut fortsetzen kann wie ich, d. h. ebenso fortsetzt wie ich.

Könnten zwei Menschen miteinander Handel treiben?

MS 164, p. 140

46. Wenn ich sage: »Wenn du der Regel folgst, *muß* das herauskommen«, so heißt das nicht: es muß, weil es immer herausgekommen ist; sondern: daß es herauskommt ist einer meiner *Grundlagen*.

Was herauskommen *muß* ist eine Urteilsgrundlage, die ich nicht antaste.

Bei welcher Gelegenheit wird man sagen: »Wenn du der Regel folgst *muß* das her-

MS 164, p. 141

auskommen«?

Es kann das eine mathematische Erklärung sein etwa auf einen Beweis hin, daß ein bestimmter Weg eine Abzweigung hat. Es kann auch sein, daß man es jemand sagt, um ihm das Wesen der Regel einzuprägen, um ihm etwa zu sagen: »Du machst ja hier kein Experiment«.

47. »Ich weiß doch bei jedem Schritt absolut, was ich zu tun habe; was die Regel von mir fordert.« Die Regel, wie ich sie auffasse. Ich überlege nicht hin und her. Das Bild der

MS 164, p. 142

Regel macht es klar, wie das Bild der Reihe fortzusetzen ist.

»Ich weiß doch bei jedem Schritt, was ich zu tun habe. Ich sehe es ganz klar vor mir. Es mag langweilig sein, aber es ist kein Zweifel, was ich zu tun habe.«

Woher diese Sicherheit? Aber warum frage ich dies? Ist es nicht genug, daß diese Sicherheit existiert? Wozu soll ich eine Quelle für sie suchen? (Und *Ursachen* für sie kann ich ja angeben.)

MS 164, p. 143

Wenn jemand, dem nicht zu gehorchen wir uns fürchten, uns befiehlt der Regel ... , die wir verstehen, zu folgen, so werden wir ohne jedes Bedenken Zahl auf Zahl hinschreiben. Und dies ist eine typische Art, wie wir auf eine Regel reagieren.

mércio?"

Então só tem sentido dizer "e assim por diante" se o "e assim por diante" for *compreendido*. Ou seja, se o outro puder dar continuidade tão bem quanto eu, ou seja, prossegue tão bem quanto eu.

Poderiam duas pessoas empreender o comércio entre si?

MS 164, p. 140

46. Se digo: "Se você seguir a regra, *tem que* resultar nisto", isto não significa: tem que ser isto porque é o que sempre resulta; senão: que se obtenha isto é um dos meus *fundamentos*.

O que *tem que* se obter é um fundamento do juízo que eu não toco.

Em que ocasião se dirá: "Se você seguir a regra, *tem que*

MS 164, p. 141

resultar nisso"?

Isto pode provir, digamos, de uma explicação matemática de uma demonstração de que um determinado caminho tem uma ramificação. Isto pode também provir de que alguém diga isto para inculcar no outro a essência da regra, para dizer para ele, por exemplo: "Aqui você não faz nenhum experimento".[311]

47. "A cada passo sei absolutamente o que devo fazer; o que a regra exige de mim." A regra tal como a concebo. Meu pensamento não vai de cá para lá. A imagem da

MS 164, p. 142

regra torna claro como a imagem da série deve ser continuada.

"A cada passo sei o que devo fazer. Vejo isto totalmente claro diante de mim. Pode ser enfadonho, mas não há nenhuma dúvida sobre o que devo fazer."

De onde vem esta certeza? Mas por que pergunto isto? Não é o bastante que exista esta certeza? Para que devo buscar uma fonte para ela? (E posso até designar *causas* para ela.)[312]

MS 164, p. 143

Se alguém a quem temos receio de desobedecer nos ordena seguir a regra ..., que entendemos que deve ser seguida, então vamos escrever um número após o outro sem vacilação. E esta é uma maneira típica de reagir a uma regra.

"Você já sabe como é isto"; "Você já sabe como

»Du weißt schon, wie das ist«; »Du weißt schon, wie

MS 164, p. 144

es weiter geht.«

Ich kann mir jetzt vorsetzen, der Regel (— • —) → zu folgen. So: — • — — • — — • — — • —.

Aber es ist merkwürdig, daß ich die Bedeutung der Regel dabei nicht verliere. Denn wie halte ich sie fest?

Aber – wie weiß ich, daß ich sie festhalte, daß ich sie nicht verliere?! Es hat gar keinen Sinn zu sagen, ich hielte sie fest, wenn es nicht ein äußeres Merkmal dafür gibt. (Wenn ich durch den Weltraum fiele könnte ich etwas halten, aber es nicht stille halten.)

MS 164, p. 145

Die Sprache ist eben ein Phänomen des menschlichen Lebens.

48. Der Eine macht eine gebietende Handbewegung, als wollte er sagen »Geh!«. Der Andre mit dem Ausdruck der Furcht schleicht sich fort. Könnte ich diesen Vorgang, auch wenn er nur einmal geschähe, nicht »Befehlen und Gehorchen« nennen?

Was soll das heißen: »Könnte ich den Vorgang … nennen«? Man könnte natürlich gegen jede Benennung einwenden,

MS 164, p. 146

es wäre sehr wohl denkbar, daß bei andern Menschen als bei uns eine ganz andere Gebärde dem »Geh fort!« entspricht und, daß etwa unsere Gebärde für diesen Befehl bei ihnen die Bedeutung unseres Darreichens der Hand zum Freundschaftszeichen hat. Und welche Deutung man einer Gebärde zu geben hat, hänge von andern Handlungen ab, die der Gebärde vorangehen und folgen.

Wie wir das Wort »Befehlen« und »Gehorchen« verwenden, sind Ge-

MS 164, p. 147

bärden sowie Wörter in einem Netz mannigfaltiger Beziehungen verschlungen. Konstruiere ich nun einen vereinfachten Fall, so ist es nun nicht klar ob ich das Phänomen noch »befehlen« und »gehorchen« nennen soll.

Wir kommen zu einem fremden Volksstamm, dessen Sprache wir nicht verstehen. Unter welchen Umständen werden wir sagen, sie hätten einen Häuptling? Was wird uns veranlassen zu sagen, dieser

MS 164, p. 144

isto prossegue.”

Posso agora me predispor a seguir a regra (— • —) →. Por isto: — • — — • — — • — — • —.

Mas é estranho que eu não perca, com isto, o significado da regra. Como o retenho, então?

Mas – como sei que o retenho, que não o perco?! Não há nenhum sentido em dizer que o retenho se não há nenhum marcador externo para isto. (Se eu me perdesse no espaço, poderia me agarrar em alguma coisa mas não mantê-la imóvel.)

MS 164, p. 145

A linguagem é justamente um fenômeno da vida humana.[313]

48. Alguém faz um movimento de comando com a mão, como se quisesse dizer “Vai embora!”. O outro, com expressão de medo, se arrasta para fora. Não poderia chamar este processo, mesmo que tivesse acontecido só uma vez, de “ordem e obediência”?

O que deve significar: “Poderia chamar o processo de …”? Pode-se objetar, naturalmente, contra toda designação,

MS 164, p. 146

que seria perfeitamente imaginável que para outras pessoas diferentes de nós um gesto totalmente diferente corresponderia a “Vai para fora!”, e que, digamos, o nosso gesto para esta ordem tem para eles o significado do nosso oferecimento da mão em sinal de amizade. E qualquer interpretação que se tenha para dar a um gesto depende de outras ações que precedem e se seguem ao gesto.

Do modo como empregamos as palavras “ordem” e “obediência”, tanto gestos

MS 164, p. 147

como palavras ficam entrelaçados em uma rede de múltiplas relações. Se construo agora um caso simplificado, ainda não está claro se devo chamar o fenômeno de “ordenar” e “obedecer”.

Chegamos a uma tribo desconhecida cuja língua não compreendemos. Sob que circunstâncias diremos que eles têm um chefe? O que nos motiva a dizer que este

MS 164, p. 148

é o chefe mesmo que ele esteja vestido de maneira mais simples que os outros? Seria incondi-

MS 164, p. 148

sei der Häuptling auch wenn er armseliger gekleidet ist als andere? Ist unbedingt der der Häuptling, dem die Andren gehorchen?

Was ist der Unterschied zwischen falsch schließen und nicht schließen? zwischen falsch addieren und nicht addieren. Überlege dir das.

49. Was du sagst scheint darauf hinaus zu kommen, daß die Logik zur Naturgeschichte des Menschen ge-

MS 164, p. 149

hört. Und das ist nicht vereinbar mit der Härte des logischen »muß«.

Aber das logische »muß« ist ein Bestandteil der Sätze der Logik und diese sind *nicht* Sätze der menschlichen Naturgeschichte. Sagte ein Satz der Logik: die Menschen stimmen in der und der Weise miteinander überein (und das wäre die Form

MS 164, p. 150

des naturgeschichtlichen Satzes), dann sagte sein Gegenteil, es bestehe hier ein *Mangel* an Übereinstimmung. Nicht, es bestehe eine Übereinstimmung anderer Art.

Die Übereinstimmung der Menschen, die eine Voraussetzung des Phänomens der Logik ist, ist nicht eine Übereinstimmung der *Meinungen*, geschweige denn von Meinungen über die Fragen der Logik.

MS 164, p. 151

cionalmente o chefe aquele a quem os demais obedecem?

Qual é a diferença entre inferir falsamente e não inferir? entre somar falsamente e não somar. Considere isto.

49. O que você está dizendo parece vir do fato de que a lógica pertence à história natural da

MS 164, p. 149

humanidade. E isto não é compatível com a dureza do “exigir” lógico.[314]

Mas o “exigir” lógico é um componente das proposições da lógica, e estas *não* são sentenças da história natural da humanidade. Se uma proposição da lógica dissesse: as pessoas concordam entre si desta e daquela forma (e esta seria a forma

MS 164, p. 150

da sentença da história natural), então a sua contraditória diria que existe aqui uma *falta* de concordância. Não de que se dá uma concordância de outro tipo.

A concordância das pessoas, que é um pressuposto do fenômeno da lógica, não é uma concordância de *opiniões*, muito menos de opiniões sobre as questões da lógica.[315]

MS 164, p. 151

Teil VII
1941 und 1944

1. Die Rolle der Sätze, die von den Maßen handeln und nicht ›Erfahrungssätze‹ sind. – Jemand sagt mir: »Diese Strecke ist

MS 124, p. 7

240 Zoll lang.« Ich sage: »Das sind 20 Fuß, also ungefähr 7 Schritte« und habe nun einen Begriff von der Länge erhalten. – Die Umformung beruht auf arithmetischen Sätzen und auf dem Satz, daß 12 Zoll = 1 Fuß ist.

Diesen letzteren Satz wird niemand, für gewöhnlich, als Erfahrungssatz aussprechen. Man sagt, er drücke ein Übereinkommen aus. Aber das Messen würde seinen gewöhnlichen Charakter gänzlich verlieren, wenn nicht z. B. die Aneinanderreihung von 12 Zollstücken für gewöhnlich eine Länge ergäbe, die sich wieder besonders aufbewahren läßt.

Muß ich darum sagen, der Satz ›12 Zoll = 1 Fuß‹ sage alle diese Dinge aus, die dem Messen seine gegenwärtige Pointe geben?

MS 124, p. 8

Nein. Der Satz *ruht in* einer Technik. Und, wenn du willst, in den physikalischen und psychologischen Tatsachen, die diese Technik möglich machen. Aber darum ist sein Sinn nicht, diese Bedingungen auszusprechen. Das Gegenteil jenes Satzes, ›12 Zoll = 1 Fuß‹, sagt nicht, daß die Maßstäbe nicht starr genug sind, oder wir nicht Alle in gleicher Weise zählen und rechnen.

Der Satz *ruht* in einer Technik, beschreibt sie aber nicht.

2. Der Satz spielt die typische (damit aber nicht *einfache*) Rolle der Regel.

Ich kann mittels des Satzes ›12 Zoll = 1 Fuß‹ eine Voraussage machen; nämlich daß 12 zoll-lange Stücke Holz anei-

MS 124, p. 9

nandergelegt sich gleich lang mit einem auf andere Weise gemessenen Stück erweisen werden. Also ist der Witz jener Regel etwa, daß man mittels ihrer gewisse Voraussagen machen kann. Verliert sie nun dadurch den Charakter der *Regel*? –

Warum kann man jene Voraussagen machen? Nun, – alle Maßstäbe sind gleich gearbei-

Parte VII
1941 e 1944

1. O papel das proposições que tratam de medidas e não são ‘proposições empíricas’. – Alguém me diz: “Este trecho tem

MS 124, p. 7[316]

240 polegadas de comprimento.” Eu digo: “Isto dá 20 pés, portanto aproximadamente 7 passos”, e agora adquiri um conceito de comprimento. – A conversão se apoia em proposições aritméticas e sobre a proposição de que 12 polegadas = 1 pé.

Normalmente ninguém vai enunciar esta última proposição como proposição empírica. Dizemos que ela expressa um acordo. Mas a medição perderia totalmente seu caráter de normalidade se, por exemplo, 12 peças de uma polegada cada uma, alinhadas em série, não resultasse em um comprimento que se pudesse particularmente preservar à parte.

Tenho que dizer, portanto, que a proposição ‘12 polegadas = 1 pé’ expressou todas estas coisas que deram para a medição a sua atual peculiaridade?

MS 124, p. 8

Não. A proposição *se assenta em* uma técnica. E, se você quiser, em fatos físicos e psicológicos que tornam possível esta técnica. Mas não é por isto que o seu sentido consiste em expressar estas condições. O contrário daquela proposição, ‘12 polegadas = 1 pé’, não diz que os padrões de medida não são suficientemente rígidos ou que todos nós não contamos e calculamos do mesmo modo.

A proposição *se assenta* em uma técnica, mas não a descreve.[317]

2. A proposição joga o papel típico (mas não, por isto, *simples*) da regra.

Posso fazer uma previsão mediante a proposição ‘12 polegadas = 1 pé’; a saber, a de que 12 pedaços de madeira de comprimento em polegadas colocados lado

MS 124, p. 9

a lado terão o mesmo comprimento que pedaços medidos de outra maneira. Portanto, o espírito daquela regra é, digamos, o de que se possa fazer por ela certas previsões. Ela perde assim o caráter de *regra*? –

Por que podemos fazer aquela previsão? Ora, – todos os padrões são feitos da mesma tet; sie verändern ihre Länge nicht beträchtlich; Stücke Holz, die man auf einen Zoll oder Fuß zugeschnitten hat, tun dies auch nicht; unser Gedächtnis ist gut genug, damit wir beim Zählen bis ›12‹ Ziffern nicht zweimal zählen und nicht auslassen; u. a.

Aber kann man denn nicht die Regel durch einen Erfahrungssatz ersetzen, der sagt, daß Maßstäbe so und so gearbeitet sind,

MS 124, p. 10

daß Leute sie *so* handhaben? Man gäbe etwa eine ethnologische Darstellung dieser menschlichen Einrichtung.

Nun ist es offenbar, daß diese Darstellung die Funktion der Regel übernehmen könnte.

Wer einen mathematischen Satz weiß, soll noch nichts wissen. Ist Verwirrung in unsern Operationen, rechnet jeder anders und einmal

MS 124, p. 11

so, einmal so, so liegt noch kein Rechnen vor; stimmen wir überein, nun dann haben wir nur unsre Uhren gestellt, doch noch keine Zeit gemessen.

Wer einen mathematischen Satz weiß, soll noch *nichts* wissen.

D. h., der mathematische Satz soll nur das Gerüst liefern für eine Beschreibung.

3. Wie kann die bloße Umformung des Ausdrucks von praktischer Konsequenz sein?

Daß ich 25 x 25 Nüsse habe, läßt sich verifizieren, indem ich 625 Nüsse zähle, aber es läßt sich auch auf andre Weise herausfinden, die der Ausdrucksform ›25 x 25‹ näher steht.

MS 124, p. 12

Und es ist natürlich die Verknüpfung dieser beiden Arten der Zahl*bestimmung*, in der ein Zweck des Multiplizierens beruhe.

Die Regel ist als Regel losgelöst, steht, sozusagen, selbstherrlich da; obschon, was ihr Wichtigkeit gibt, die Tatsachen der täglichen Erfahrung sind.

Was ich zu tun habe, ist etwas, wie: das Amt eines Königs zu beschreiben; – wobei ich nicht

MS 124, p. 13

in den Fehler verfallen darf, die königliche Würde aus der Nützlichkeit des Königs zu erklären; und doch weder Nützlichkeit noch Würde außer acht lassen darf.

maneira; eles não mudam seriamente o seu comprimento; pedaços de madeira que foram cortados em uma polegada ou um pé tampouco fazem isto; nossa memória é boa o suficiente para que não contemos duas vezes e não percamos a contagem de números que vão até ‘12’; entre outras coisas.

Mas não se pode então substituir a regra por uma proposição da experiência que diga que padrões são feitos assim e assim,

MS 124, p. 10

que as as pessoas os manipulam *assim*? Dar-se-ia, digamos, uma apresentação etnológica desta instituição humana.

Bem, é evidente que esta apresentação poderia encarregar-se da função da regra.

Quem conhece uma proposição matemática não deve saber nada ainda. Se há confusão nas nossas operações, todos calculam diferente, e ora

MS 124, p. 11

assim, ora assado, então não existe ainda nenhum cálculo; mas se agora concordamos, então só acertamos os nossos relógios e ainda não medimos o tempo.

Quem conhece uma proposição matemática não deve saber *nada* ainda.

Ou seja, a proposição matemática só deve fornecer o arcabouço para uma descrição.

3. Como pode a mera conversão da expressão ter consequência prática?

Que eu tenha 25 x 25 nozes pode ser verificado pela contagem de 625 nozes, mas também pode-se apurar de outra maneira que esteja mais próxima da forma de expressão ‘25 x 25’.

MS 124, p. 12

E é naturalmente na vinculação destes dois tipos de *determinação* numérica que repousa uma das finalidades da multiplicação.

A regra é separada enquanto regra, e permanece, por assim dizer, despótica; embora o que lhe dê importância sejam os fatos da experiência cotidiana.

O que devo fazer é alguma coisa como: descrever o encargo de um rei; – sem que eu

MS 124, p. 13

possa cair no erro de explicar a majestade real pela utilidade do rei; e, de todo modo, nem a utilidade nem a majestade podem ser desconsideradas.[318]

Ich richte mich beim praktischen Arbeiten nach dem Resultat der Umformung des Ausdrucks.

Wie kann ich dann aber noch sagen, daß es dasselbe heißt, ob ich sage »hier sind 625 Nüsse«, oder »hier sind 25 x 25 Nüsse«?

Wer den Satz »hier sind 625 … « verifiziert, verifiziert damit auch »hier sind 25 x 25 … «; u. a. Doch steht die eine Form einer Art der Verifikation, die andre einer andern näher.

Wie kannst du behaupten, daß

MS 124, p. 14

»… 625 …« und »… 25 x 25 …« dasselbe sagen? – Erst durch unsere Arithmetik *werden* sie *eins*.

Ich kann einmal die eine, einmal die andere Art der Beschreibung, durch Zählen z. B., erhalten. D. h., ich kann jede der beiden Formen auf jede Art erhalten; aber auf verschiedenem Weg.

Man könnte nun fragen: Wenn der Satz »… 625 … « einmal so, einmal anders verifiziert wurde, sagte er da beidemale dasselbe?

Oder: Was geschieht, wenn eine Methode des Verifizierens ›625‹, die andre nicht ›25 x 25‹ ergibt? – Ist da »… 625 …« wahr

MS 124, p. 15

und »… 25 x 25 … « falsch? Nein! – Das eine anzweifeln heißt, das andre anzweifeln: das ist die Grammatik, die unsre Arithmetik diesen Zeichen gibt.

Wenn die beiden Arten des Zählens die Begründung einer *Zahlangabe* sein sollen, dann ist nur *eine* Zahlangabe, wenn auch in verschiedenen Formen, da. Dagegen kann man ohne Widerspruch sagen: »Mir kommt bei der einen Art des Zählens 25 x 25 (und also 625) heraus, bei der anderen nicht 625 (also nicht 25 x 25)«. Die Arithmetik hat hiergegen keinen Einwand.

Daß die Arithmetik die beiden Ausdrücke einander gleichsetzt, ist, könnte man sagen, ein grammatischer Trick.

Sie sperrt damit eine be-

MS 124, p. 16

stimmte Art der Beschreibung ab und leitet sie in andere Kanäle. (Und daß dies mit den Tatsachen der Erfahrung zusammenhängt, braucht nicht erst gesagt zu werden.)

Nos trabalhos práticos me oriento pelo resultado da conversão da expressão.

Mas então como posso dizer ainda que significa a mesma coisa dizer “Aqui estão 625 nozes” ou “Aqui estão 25 x 25 nozes”?

Quem verifica a proposição “Aqui estão 625 …”, verifica com isto também “Aqui estão 25 x 25 …” etc. De todo modo, uma forma é um tipo de verificação, e a outra é de um outro tipo mais próximo.

Como você pode afirmar que

MS 124, p. 14

“ … 625 …” e “… 25 x 25 …” dizem o mesmo? Só pela nossa aritmética é que eles *se tornam um*.[319]

Eu posso conseguir ora um tipo, ora o outro tipo de descrição pela contagem, por exemplo. Ou seja, eu posso conseguir por qualquer uma das duas formas; mas por caminhos diferentes.

Pode-se perguntar agora: se a proposição “… 625 …” foi verificada ora assim, ora de outro jeito, ela disse duas vezes a mesma coisa?

Ou: o que acontece se um método de verificação dá ‘625’ e o outro não dá ‘25 x25’? – Fica sendo “… 625 …” verdadeiro

MS 124, p. 15

e “25 x 25” falso? Não! – Duvidar de um significa duvidar do outro: esta é a gramática que nossa aritmética dá a estes sinais.

Se os dois tipos de contagem devem ser a fundamentação de uma *indicação numérica*, então só há *uma* indicação numérica mesmo que estejam ali em diferentes formas. Todavia, pode-se dizer sem contradição: “Obtenho 25 x 25 (e, portanto, 625) em um tipo de contagem, e em outro tipo não obtenho 625 (portanto, não obtenho 25 x 25). A aritmética não tem nenhuma objeção contra isto.

Que a aritmética iguale as duas expressões é, poderíamos dizer, um truque gramatical.

Ela barra, assim, um

MS 124, p. 16

determinado tipo de descrição e a conduz por outros canais. (E que isto esteja conectado com os fatos da experiência, já nem precisa ser dito.)

4. Nimm an, ich habe jemand multiplizieren gelehrt, aber nicht mit Hilfe einer formulierten allgemeinen Regel, sondern nur dadurch, daß er sieht, wie ich ihm Beispiele vorrechne. Ich kann ihm dann eine *neue* Aufgabe anschreiben, und sagen: »Mach dasselbe mit *diesen* beiden Zahlen, was ich mit den früheren getan habe«. Aber ich kann auch sagen: »Wenn du mit diesen beiden machst, was ich mit den andern gemacht habe, so wirst du zu der Zahl ... kommen«. Was ist das für ein Satz?

»Du wirst das und das schreiben« ist eine Vorhersage.

MS 124, p. 17

»Wenn du das und das schreiben wirst, wirst du's so gemacht haben, wie ich dir's vorgemacht habe« bestimmt, was er »seinem Beispiel folgen« nennt.

›Die Lösung dieser Aufgabe ist ... ‹. – Wenn ich das lese, ehe ich die Aufgabe gerechnet habe, – was ist das für ein Satz?

»Wenn du mit diesen Zahlen machst, was ich dir mit den andern vorgemacht habe, wirst du ... erhalten« – das heißt doch: »Das Resultat dieser Rechnung ist ...« – und das ist keine Vorhersage, sondern ein mathematischer Satz. Aber es ist dennoch auch eine Vorhersage!

MS 124, p. 18

– Eine Vorhersage besonderer Art. Wie der, der am Ende findet, daß sich beim Addieren der Kolumne wirklich das und das ergibt, wirklich überrascht sein kann; z. B. ausrufen kann: ja, bei Gott, es kommt heraus!

Denke dir nur diesen Vorgang des Vorhersagens und der Bestätigung als ein besonderes Sprachspiel – ich meine: isoliert von dem Übrigen der Arithmetik und ihrer Anwendung.

MS 124, p. 19

Was ist an diesem Vorhersagespiel so sonderbar? Was mir sonderbar vorkommt, würde entfernt, wenn die Vorhersage lautete: »Wenn du glauben wirst, meinem Beispiel gefolgt zu sein, wirst du *das* herausgebracht haben« oder: »Wenn dir alles richtig scheinen wird, wird das das Resultat sein.« Dieses Spiel könnte z. B. mit dem Ein-

MS 124, p. 24

geben eines bestimmten Giftes verbunden sein, und die Vorhersage wäre, daß die Injektion unsre Fähigkeiten, unser Gedächtnis z.B. in der und der Weise beeinflußt. – Aber, wenn wir uns das Spiel mit dem Eingeben eines Giftes denken können, warum nicht mit dem Eingeben eines Heilmittels? Aber auch dann kann das Schwergewicht der Vorhersage noch immer darauf ruhen, daß der *gesunde* Mensch das als Resultat ansieht. Oder, vielleicht: daß den gesunden Menschen *das* befriedigt.

»Folge mir, so wirst du das herauskriegen« sagt natürlich nicht: »Folge mir, dann wirst du mir folgen« – noch: »Rechne *so*, dann wirst du *so* rechnen.« – Aber was heißt »Folge mir«? Im

4. Suponha que eu tenha ensinado alguém a multiplicar, mas não com a ajuda de uma regra geral já formulada, mas somente pelo que ele vê nos exemplos de cálculo que resolvo. Posso prescrever-lhe então uma *nova* tarefa e dizer: “Faça com *estes* dois números o mesmo que fiz com os anteriores”. Mas eu também posso dizer: “Se você fizer com estes dois o que eu fiz com os outros, então você vai chegar ao número ...”. Que espécie de proposição é esta?

“Você vai escrever isto e isto” é uma previsão.

MS 124, p. 17

“Se você for escrever isto e isto, você terá feito isto do modo como te mostrei” determina o que ele chama de “seguir o seu exemplo”.

‘A solução deste exercício é ...’. – Se leio isto antes de calcular o exercício, – que espécie de proposição é esta?[320]

“Se você fizer com estes números o que te mostrei com os outros, você vai obter ...” – isto certamente quer dizer: “O resultado deste cálculo é ...” – e isto não é uma previsão mas uma proposição matemática. Não obstante, isto é também uma previsão!

MS 124, p. 18

– Uma previsão de tipo particular. Como quem pode ser realmente surpreendido quando no final descobre que pela adição de uma coluna se produz realmente isto e isto; pode exclamar, por exemplo: meu Deus, está saindo assim!

Apenas imagine este processo de previsão e de constatação como um jogo de linguagem particular – quero dizer: isolado do resto da aritmética e sua aplicação.

MS 124, p. 19 [321]

O que é tão estranho neste jogo de previsão? O que me parece estranho seria removido se a previsão dissesse: “Se você acreditar que seguiu o meu exemplo, então terá apresentado *isto*” ou: “Se para você tudo parecer correto, o resultado será este.” Este jogo poderia estar associado, por exemplo,

MS 124, p. 24

com a administração de um determinado tóxico, e a previsão seria a de que a injeção influenciaria de tal e tal modo a nossa capacidade, a nossa memória, por exemplo. – Mas se podemos imaginar o jogo com a administração de um tóxico, por que não com a administração de um medicamento? Mas mesmo assim o peso da previsão ainda pode repousar no fato de que a pessoa *saudável* considera isto como resultado. Ou talvez: que *isto* satisfaça a pessoa saudável.

“Siga-me e então você vai extrair isto” não diz, naturalmente: “Siga-me e então você vai me seguir” – ou ainda: “Calcule *assim* e então você vai calcular *assim*.” – Mas o que quer dizer: “Siga-me”? No jogo de linguagem uma ordem pode simplesmente ser: “Agora, siga-me!”.

Sprachspiel kann es einfach ein Befehl sein: »Folge mir jetzt!«.

MS 124, p. 25

Was ist der Unterschied zwischen dem Vorhersagen: »Wenn du richtig rechnest, wirst du *das* erhalten« – und: »Wenn du glauben wirst, daß du richtig rechnest, wirst du *das* erhalten«?

Wer sagt nun, daß in meinem obigen Sprachspiel die Vorhersage nicht das letztere bedeutet? Es scheint, sie bedeutet das nicht – aber wie zeigt sich das? Frage dich, *unter welchen Umständen* würde die Vorhersage das eine, unter welchen das andere vorherzusagen scheinen. Denn es ist klar: es kommt hier auf die übrigen Umstände an.

Wer mir vorhersagt, daß ich *das* herausbringen werde, sagt der nicht eben vorher, daß ich dieses Resultat für richtig halten werde? – »Aber« – sagst du vielleicht – »nur eben weil es wirklich richtig *ist*!« – Aber was heißt das: »Ich halte die Rechnung für richtig, weil sie richtig ist«?

Und doch kann man sagen:

MS 124, p. 26

in meinen Sprachspiel denkt der Rechnende nicht daran, daß die Tatsache – daß er *dies* herausbringt – eine Eigentümlichkeit *seines* Wesens ist; die Tatsache erscheint ihm nicht als eine psychologishe.

Eben stelle ich mir ihn unter dem Eindruck vor, daß er nur einem bereits vorhandenen Faden gefolgt ist. Und das Wie des Folgens als eine Selbstverständlichkeit hinnimmt; und nur *eine* Erklärung seiner Handlung kennt, nämlich: den Lauf des Fadens.

Er läßt sich allerdings ablaufen, indem er der Regel oder den Beispielen folgt, aber was er tut, betrachtet er nun nicht als Besonderheit *seines*

MS 124, p. 27

Ablaufs, er sagt nicht: »also *so* bin ich abgelaufen«, sondern: »also *so* läuft es ab«.

Aber wenn nun Einer dennoch am Ende der Rechnung in unserem Sprachspiel sagte: »also *so* bin ich abgelaufen!« – oder: »also *dieser* Ablauf befriedigt mich!« – kann ich nun sagen, er habe das ganze Sprachspiel mißverstanden? Doch gewiß nicht! Wenn er nicht sonst eine unerwünschte Anwendung von ihm macht.

5. Ist es nicht die *Anwendung* der Rechnung, die jene Auffassung hervorruft: daß die Rechnung abläft und nicht wir?

MS 124, p. 28

MS 124, p. 25

Qual é a diferença entre as previsões: “Se você calcular corretamente, vai obter *isto*” – e: “Se você acreditar que calcula corretamente, vai obter *isto*”?

Quem vai dizer que no meu jogo de linguagem supracitado a previsão não signica esta última? Aparentemente, não significa isto – mas como se mostra isto? Pergunte-se *sob que circunstâncias* a previsão parece prever uma, e sob quais, a outra. Pois é claro: isto depende das circunstâncias remanescentes.

Quem prevê que vou apresentar *isto*, não prevê justamente que eu tome este resultado como correto? – “Mas” – talvez você diga – “só porque justamente este *é* o resultado realmente correto!” – Mas o que significa isto: “Tomo como correto o cálculo porque ele é correto”?

E, de todo modo, pode-se dizer:

MS 124, p. 26

no meu jogo de linguagem, aquele que calcula não pensa que o fato – de que ele apresenta *isto* – seja uma peculiaridade da *sua* natureza; o fato não lhe parece ser psicológico.

Imagino-o até mesmo sob a impressão de que ele só seguiu uma linha já existente. E de que aceita o como do seguimento como uma coisa óbvia; e só conhece *uma* explicação da sua ação, a saber: o curso da linha.[322]

Ele certamente se deixa levar quando segue a regra ou os exemplos, mas não considera o que faz como uma particularidade do *seu*

MS 124, p. 27

percurso, ele não diz: “Portanto, eu procedi *assim*”, senão: “Portanto, isto se procede *assim*”.

Mas se alguém, a despeito disto, disser ao final de um cálculo no nosso jogo de linguagem: “Portanto, eu procedi *assim*!” – ou: “Portanto, *este* percurso me satisfez!” – posso dizer então que ele não compreendeu o jogo de linguagem como um todo? Certamente não! Se ele não fizer, além disto, uma aplicação indesejada dele.

5. Não é a *aplicação* do cálculo que ocasiona tal concepção: de que o cálculo procede e não nós?

MS 124, p. 28 [323]

Die verschiedenen ›Auffassungen‹ müssen verschiedenen Anwendungen entsprechen.

Denn es ist allerdings ein Unterschied dazwischen: überrascht zu sein, daß ich *davon* befriedigt bin; überrascht zu sein, daß die Ziffern auf dem Papier sich *so* zu benehmen scheinen; und überrascht zu sein darüber, daß *das* herauskommt. Aber in jedem Fall sehe ich die Rechnung in anderm Zusammenhang.

Ich denke an das Gefühl des ›Herauskommens‹, wenn wir etwa eine längere Kolumne von Zahlen verschiede-

MS 124, p. 29

ner Gestalt addieren und eine runde Zahl wie 1 000 000 herauskommt, wie uns zuvor gesagt worden war. »Ja, bei Gott wieder eine Null –« sagen wir.

»Man sähe es den Zahlen nicht an«, könnte ich auch sagen.

Wie wäre es, wenn wir sagten – statt: ›6 x 6 ergibt 36‹ –: ›Das Ergeben der Zahl 36 durch 6 x 6‹? – Den *Satz* ersetzen durch einen substantivischen Ausdruck. (Der Beweis zeigt *das Ergeben.*)

Warum willst du die Mathematik immer unter dem Aspekt des Findens und nicht des Tuns betrachten?

Von großem Einflusse muß es sein, daß wir die Wörter »richtig« und »wahr« und »falsch«, und die Form der Aussage, im Rechnen gebrauchen. (Kopfschütteln und Nicken.)

MS 124, p. 30

Warum soll ich sagen, daß das Wissen, daß alle Menschen, die Rechnen gelernt haben, *so* rechnen, kein *mathematisches* Wissen ist? Weil es auf einen andern Zusammenhang hinzudeuten scheint.

Ist also Berechnen, was Einer durch Rechnung herauskriegen wird, schon angewandte Mathematik? – und also auch: Berechnen, was ich selber herauskriegen werde?

MS 124, p. 31

6. Es ist ja gar kein Zweifel, daß mathematische Sätze *in gewissen Sprachspielen* die Rolle von Regeln der Darstellung spielen, im Gegensatz zu Sätzen, welche beschreiben.

Aber das sagt nicht, daß dieser Gegensatz nicht nach allen Richtungen hin abfällt. Und *das* wieder nicht, daß er nicht von größter Wichtigkeit ist.

As diferentes ‘concepções’ têm que corresponder a diferentes aplicações.[324]

Pois de qualquer modo há uma diferença entre: ficar surpreso de que me satisfaço *com isto*;[325] ficar surpreso de que as cifras pareçam se comportar *assim* sobre o papel; e ficar surpreso de que se extraia *isto*. Mas em cada caso vejo o cálculo em contexto diferente.

Eu penso no sentimento do ‘extrair’, se nós, digamos, somamos uma longa coluna de números de formas

MS 124, p. 29

diferentes e extraímos um número redondo como 1 000 000, como dissemos antes. “Nossa, por Deus, um zero novamente –”, nós dizemos.

“Não se vê isto nos números”, poderia também dizer.

Como seria se disséssemos – em vez de: ‘6 x 6 resulta em 36’ –: ‘O resultado do número 36 mediante 6 x 6’? – Substituir a *proposição* por uma expressão substantivada. (A demonstração mostra *o resultado*.)[326]

Por que você quer sempre considerar a matemática sob o aspecto do descobrir e não do fazer?

Tem que ser de grande influência usarmos as palavras “certo” e “verdadeiro” e “falso”, e a forma da asserção, no cálculo. (Balançando a cabeça e concordando.)

MS 124, p. 30

Por que devo dizer que o conhecimento de que todas as pessoas que aprenderam o cálculo calculam *assim* não é um conhecimento *matemático*? Porque parece indicar um contexto diferente.

Já é, portanto, matemática aplicada calcular o que alguém vai extrair pelo cálculo? – e, portanto, também: calcular o que vou extrair por mim mesmo?

MS 124, p. 31

6. Não há absolutamente nenhuma dúvida de que proposições matemáticas jogam *em certos jogos de linguagem* o papel de regras de apresentação, em contraposição a proprosições que descrevem.

Mas isto não quer dizer que esta contraposição não se disperse em todas as direções. E *isto*, mais uma vez, não é que não seja da maior importância.

MS 124, p. 34

Das piédestal, auf welchem die Mathematik für uns steht, hat sie vermöge einer bestimmten Rolle, die ihre Sätze in unsern Sprachspielen spielen.

MS 124, p. 35

Was der mathematische Beweis zeigt, wird als interne Relation hingestellt, und dem Zweifel entzogen.

7. Was ist einem mathematischen Satz und einem mathematischen Beweis gemein, daß sie beide »mathematisch« heißen?

Nicht: daß der mathematische Satz mathematisch bewiesen sein muß; nicht: daß der mathematische Beweis einen mathematischen Satz beweisen muß.

Was hat der unbewiesene Satz (das Axiom) Mathematisches?

MS 124, p. 36

und was hat er gemein mit einem mathematischen *Beweis*?

Soll ich antworten: »Die Schlußregeln des mathematischen Beweises sind immer mathematische Sätze«? Oder: »Mathematische Sätze und Beweise dienen dem Schließen«? Das wäre schon näher dem Wahren.

8. Der Beweis muß eine interne Relation zeigen, nicht eine externe. Denn wir könnten uns auch einen Vorgang der Transformation eines Satzes durchs *Experiment* vorstellen und eine, die zum Vorhersagen des vom transformierten Satz Behaupteten benützt würde. Man könnte sich z. B. denken, daß Zeichen durch Hinzulegen anderer Zeichen sich solcherart verschöben, daß sie eine wahre Vorhersage bilden auf der Grundlage der in ihrer Anfangslage ausgedrück-

MS 124, p. 37

ten Bedingungen. Ja, wenn du willst, kannst du den rechnenden Menschen als einen Apparat für ein solches Experiment betrachten.

Denn, daß ein Mensch das Resultat *errechnet*, in dem Sinne: daß er nicht gleich das Resultat, sondern erst verschiedenes andere hinschreibt – macht ihn nicht weniger zu einem physikalisch-chemischen Hilfsmittel, eine Zeichenfolge aus einer Zeichenfolge zu erzeugen.

Ich müßte also sagen: Der bewiesene Satz ist nicht: diejenige Zeichenfolge, welche der so und so

MS 124, p. 38

MS 124, p. 34

O pedestal em que a matemática está para nós lhe facultou um determinado papel que as suas proposições jogam nos nossos jogos de linguagem.

MS 124, p. 35

O que mostra a demonstração matemática é apresentado como relação interna e removido de dúvida.

7. O que é comum a uma proposição matemática e a uma demonstração matemática para que ambas sejam chamadas de "matemática"?

Não: que a proposição matemática tenha que ser comprovada matematicamente; não: que a demonstração matemática tenha que comprovar uma proposição matemática.

O que tem de matemático a proposição não demonstrada (o axioma)?

MS 124, p. 36

e o que ela tem em comum com uma *demonstração* matemática?

Devo responder: "As regras de inferência da demonstração matemática são sempre proposições matemáticas"? Ou: "Proposições matemáticas e demonstrações servem à inferência"? Isto já estaria mais perto do verdadeiro.

8. A demonstração tem que mostrar uma relação interna, não uma externa. Pois nós poderíamos imaginar também um processo de transformação de uma proposição mediante *experimento*, e uma transformação que seria utilizada para a previsão do que é afirmado pela proposição transformada. Poderíamos, por exemplo, imaginar que sinais se deslocam pela adição de outros sinais, de modo que eles formam uma previsão verdadeira pelo fundamento das suas condições expressas

MS 124, p. 37

na posição inicial. E, de fato, se você quiser, pode até considerar a pessoa que calcula como um aparato para um experimento como este.

Pois, que uma pessoa *compute* o resultado no sentido: de que ele não anota logo o resultado, mas sim várias outras coisas antes – não o torna menos um dispositivo físico-químico de produzir uma sequência de sinais a partir de uma sequência de sinais.

Eu teria que dizer, portanto: a proposição demonstrada não é: aquela sequência de sinais que uma pessoa escolarizada

MS 124, p. 38

geschulte Mensch unter den und den Umständen erzeugt.

Wenn wir das Beweisen so betrachten, ändert sich, was wir erblicken, gänzlich. Die Zwischenstufen werden ein uninteressantes Nebenprodukt. (Wie im Innern des Automaten ein Geräusch, ehe er uns die Ware zuwirft.)

9. Wir sagen: der Beweis sei ein Bild. Aber dies Bild bedarf doch der

MS 124, p. 39

Approbation, die wir ihm beim Nachrechnen erteilen. –

Wohl wahr; aber wenn es von dem Einen die Approbation erhielte, von dem Andern nicht, und sie sich nicht *verständigen* könnten – hätten wir dann ein Rechnen?

Also ist es nicht die Approbation allein, die es zur Rechnung macht, sondern die Übereinstimmung der Approbationen.

Denn es ließe sich ja auch ein Spiel denken, in welchem Menschen durch Ausdrücke, etwa ähnlich denen allgemeiner Regeln, angeregt, für bestimmte praktische Aufgaben, also ad hoc, sich Zeichenfolgen einfallen lassen, und daß sich dies sogar bewährte. Und hier brauchen die ›Rechnungen‹, wenn man sie so nennen wollte, nicht mit einander übereinstimmen. (Hier könnte man von ›Intuition‹ reden.)

MS 124, p. 40

Die Übereinstimmung der Approbationen ist die Vorbedingung unseres Sprachspiels, sie wird nicht in ihm konstatiert.

MS 124, p. 41

Wenn die Rechnung ein Experiment ist, und *die Bedingungen sind erfüllt*, dann müssen wir als Ausgang anerkennen, was kommt; und wenn die Rechnung ein Experiment ist, so ist der Satz, daß sie das und das ergibt, doch der Satz, daß unter solchen Bedingungen diese Art von

MS 124, p. 44

Zeichen entsteht. Und entsteht also unter diesen Bedingungen einmal ein, einmal ein anderes Resultat, so darf man nun nicht sagen »da stimmt etwas nicht«, oder »beide Rechnungen können nicht in Ordnung sein«, sondern man müßte sagen: diese Rechnung ergibt nicht immer das gleiche Resultat (*warum* muß nicht bekannt sein). Aber obwohl der Vorgang nun ebenso interessant, ja vielleicht noch interessanter geworden ist, ist keine Rechnung mehr vorhanden. Und das ist wieder eine grammatische Bemerkung über den Gebrauch des Wortes »Rechnung«. Und natürlich hat diese Grammatik eine Pointe.

assim e assim produz sob tais e tais circunstâncias.

Se consideramos a demonstração deste modo, modifica-se totalmente o que enxergamos.[327] Os passos intermediários se tornam um subproduto desinteressante. (Como um barulho no interior da máquina, antes dela nos lançar a mercadoria.)

9. Nós dizemos: a demonstração é uma imagem. Mas esta imagem requer, de todo modo, a

MS 124, p. 39

aprovação que nós lhe outorgamos pela checagem do cálculo. –

Provavelmente é verdade; mas se esta aprovação fosse dada por um, não pelo outro, e eles não pudessem *se entender* – teríamos então um cálculo?

Por conseguinte, não é a aprovação sozinha que a torna num cálculo, mas a concordância de aprovações.

Pois poderíamos imaginar um jogo em que pessoas que são estimuladas por expressões, similares, digamos, a regras gerais, inventassem sequências de sinais para determinadas tarefas práticas, portanto ad hoc, e que até mesmo dessem bom resultado. E aqui não precisamos que os ‘cálculos’, se quisermos assim chamá-los, concordem entre si. (Aqui poderíamos falar de ‘intuição’.)

MS 124, p. 40

A concordância de aprovações é a pré-condição do nosso jogo de linguagem, ela não se constata nele.

MS 124, p. 41 [328]

Se o cálculo for um experimento e as *condições forem cumpridas*, então temos que reconhecer como desfecho o que vier; e se o cálculo for um experimento, então a proposição de que ele produz isto e isto é, de todo modo, a proposição que sob tais condições faz surgir

MS 124, p. 44

este tipo de sinal. E se sob estas condições ela faz surgir ora um ora outro resultado, então não se pode dizer “Há algo errado aqui” ou “Os dois cálculos não podem estar certos”, senão que teríamos que dizer: este cálculo não produz nunca o mesmo resultado (o *porquê* não tem que ser conhecido). Mas mesmo que o processo tenha se tornado agora tão interessante, talvez tenha se tornado ainda mais interessante, já não temos mais um cálculo. E isto é novamente uma observação gramatical sobre o uso da palavra “cálculo”. E esta gramática tem, naturalmente, uma certa sagacidade.[329]

MS 124, p. 45

Was heißt es, sich über einen Unterschied im Resultat einer Rechnung *verständigen*? Es heißt doch, zu einem gleichförmigen Rechnen zu gelangen. Und kann man sich nicht verständigen, so kann nun Einer nicht sagen, der Andre rechne auch; nur eben mit anderen Ergebnissen.

10. Wie ist es nun, – soll ich sagen: Der gleiche Sinn könne nur *einen* Beweis haben? Oder: wenn ein Beweis gefunden wird, ändere sich der Sinn?

Freilich würden Einige sich dagegen wehren, sagen: »So kann man also nie den Beweis eines Satzes finden, denn, hat man ihn gefunden, so ist er nicht mehr Beweis *dieses* Satzes.« Aber das sagt noch gar nichts. –

MS 124, p. 46

Es kommt eben darauf an, *was* den Sinn des Satzes festlegt. Wovon wir sagen wollen, es lege den Sinn des Satzes fest. Der Gebrauch der Zeichen muß ihn festlegen; aber was rechnen wir zum Gebrauch? –

Die Beweise beweisen denselben Satz, heißt etwa: beide erweisen ihn als ein passendes Instrument zu dem gleichen Zweck.

Und der Zweck ist eine Anspielung auf Außermathematisches.

Ich sagte einmal: ›Wenn du wissen willst, was ein mathematischer Satz sagt, schau was sein Beweis beweist.‹ Nun, ist darin nicht

MS 124, p. 47

Wahres und Falsches? Ist der Sinn, der Witz eines mathematischen Satzes wirklich klar, sobald wir nur dem Beweis folgen können?

Dem Russellschen ›~f (f)‹ fehlt vor allem die Anwendung, und daher der Sinn.

Wendet man diese Form aber dennoch an, dann ist nicht gesagt, daß ›f (f)‹ ein Satz in irgendeinem gewohnten Sinn sein muß, oder ›f (ξ)‹ eine Satzfunktion. Denn der Begriff des Satzes, außer dem des Satzes der Logik, ist ja durch Russell nur in allgemeinen, herkömmlichen Zügen erklärt.

Man sieht hier auf die Sprache, ohne auf das Sprachspiel zu sehen.

Wenn wir von verschiedenen

MS 124, p. 48

Bilderreihen sagen, sie demonstrierten, z.B., daß 25 x 25 = 625, so ist leicht genug zu erkennen, was den *Ort* dieses Satzes fixiert, den beide Wege erreichen.

MS 124, p. 45

O que significa *colocar-se de acordo* sobre uma diferença de resultado em um cálculo? Significa, de todo modo, conseguir um cálculo uniforme. E se não se pode chegar a um acordo, então ninguém pode dizer que o outro também está calculando; só que com resultados diferentes.

10. Como é isto, então – devo dizer: o mesmo sentido só pode ter *uma* demonstração? Ou: se for achada uma demonstração, altera-se o sentido?

Admitidamente, alguns batalhariam contra isto, dizendo: “Assim nunca se poderia achar a demonstração de uma proposição, pois se a encontramos, ela não é mais a demonstração *desta* proposição.” Mas dizer isto não significa absolutamente nada. –

MS 124, p. 46

Depende justamente do *que* é que estabelece o sentido da proposição. O que queremos dizer é o que estabelece o sentido da proposição. O uso dos sinais tem que estabelecê-lo; mas o que contamos como uso? –

As demonstrações demonstram a mesma proposição que dizer, por exemplo: ambas a certificam como um instrumento adequado para a mesma finalidade.

E a finalidade é uma alusão ao externo à matemática.

Eu disse uma vez: ‘Se você quiser saber o que diz uma proposição matemática, olhe para o que a sua demonstração demonstra.’[330] Bem, não há verdade

MS 124, p. 47

e falsidade nisto? É o sentido, a picardia de uma proposição matemática, realmente claro uma vez que possamos só seguir a demonstração?

O que falta antes de tudo ao ~f (f)[331] de Russell é a aplicação, e, por isto, o sentido.

Se aplicamos, contudo, esta forma, não é dito que ‘f (f)’ tem que ser uma proposição em qualquer sentido corrente, ou que ‘f (ξ)’ é uma função proposicional. Pois o conceito de proposição, exceto o da proposição da lógica, só é explicado por Russell em traços gerais, convencionais.

Aqui vemos a linguagem sem ver o jogo de linguagem.

Se nós dizemos sobre

MS 124, p. 48

diferentes séries de imagens que elas demonstram, por exemplo, que 25 x 25 = 625, então é bem fácil de reconhecer o que fixa o *lugar* desta proposição, que ambos os caminhos alcançam.

Der neue Beweis reiht den Satz in eine neue Ordnung ein; dabei findet oft ein übersetzen einer Art von Operationen in eine gänzlich andere statt. Wie wenn wir Gleichungen in Kurven übertragen. Und dann sehen wir etwas für die Kurven ein, und dadurch für die Gleichungen.

MS 124, p. 49

Aber mit welchem Rechte überzeugen wir uns durch Gedankengänge, die dem Gegenstand unsrer Gedanken scheinbar ganz fernliegen?

Nun, unsre Operationen liegen jenem Gegenstand auch nicht ferner als, etwa, das Dividieren im Dezimalsystem dem Verteilen von Nüssen. Besonders, wenn man sich vorstellt (was man leicht kann) daß jene Operation ursprünglich zu einem andern Zweck als dem des Teilens u. dergl. erfunden worden wäre.

Fragst du: »Mit welchem Recht?« so ist die Antwort: Vielleicht mit gar keinem. – Mit welchem Recht sagst du, daß die Fortsetzung dieses Systems mit jenem immer parallel laufen

MS 124, p. 50

wird? (Es ist als ob du Zoll und Fuß *beide* als Einheit festsetztest und behauptetest, 12n Zoll werden immer mit n Fuß gleichlang sein.)

Wenn zwei Beweise denselben Satz beweisen, so kann man sich allerdings Umstände denken, in denen die ganze diese Beweise verbindende Umgebung wegfiele, so daß sie allein und nackt dastünden, und kein Grund vorhanden wäre, zu sagen, sie hätten eine gemeinsame Pointe, sie bewiesen denselben Satz.

Man muß sich nur denken, daß die Beweise ohne den sie beide umhüllenden und verbindenden Organismus der Anwendungen, sozusagen nackt und bloß dastünden. (Wie zwei Knochen aus dem umgebenden mannigfachen

MS 124, p. 51

Zusammenhang des Organismus gelöst; in dem allein wir gewohnt sind, an sie zu denken.)

11. Nimm an, man rechnete mit Zahlen und verwendet manchmal auch die Division durch Ausdrücke von der Form (n – n), und erhielte auf diese Weise hie und da andere als unsere normalen Resultate des Multiplizierens etc. Das störe aber niemand. – Vergleiche damit: Man legt Listen, Verzeichnisse, von Personen an, aber nicht wie wir es tun, alphabetisch; und so kommt es, daß der gleiche Name in mancher Liste öfter als einmal vorkommt. – Aber nun kann man annehmen: daß das niemandem auffällt; oder, daß die Leute es sehen, es aber ruhig hinnehmen. Wie man Leute eines Stammes denken könnte, die, wenn sie Münzen zur Erde fallen lassen, es nicht der

A nova demonstração alinha a proposição em uma nova ordem; ali tem lugar muitas vezes uma tradução de um tipo de operação em outro totalmente diferente. Tal como quando transferimos equações para curvas. E então nos damos conta de algo com relação às curvas, e, deste modo, com relação às equações.

MS 124, p. 49

Mas com que direito nos convencemos por meio de linhas de pensamento que parecem estar totalmente distantes dos objetos do nosso pensamento?

Bem, nossas operações não estão mais distantes daquele objeto do que, digamos, dividir no sistema decimal a repartição de nozes. Particularmente se imaginamos (o que podemos fazer facilmente) que aquela operação tinha sido inventada originalmente para uma finalidade diferente do que a da repartição e coisas semelhantes.

Se você pergunta: "Com que direito?", então a resposta é: talvez sem absolutamente nenhum. – Com que direito você diz que a continuação deste sistema vai correr sempre em paralelo com

MS 124, p. 50

aquele? (Seria como se você estabelecesse que a polegada e o pé, os *dois*, são uma unidade, e afirmasse que 12n polegadas serão sempre iguais a n pés.)

Se duas demonstrações demonstram a mesma proposição, então se pode, com efeito, imaginar circunstâncias nas quais todo o entorno vinculado a estas demonstrações é suprimido, de modo que elas ficarão sozinhas e nuas, e não haveria nenhuma razão para dizer que elas teriam uma peculiaridade em comum, que elas demonstram a mesma proposição.

Só se tem que imaginar que as demonstrações, sem os respectivos organismos de aplicação que as envolve e vincula, ficariam, por assim dizer, descobertas e nuas. (Como dois ossos separados do ambiente diversificado

MS 124, p. 51

do entorno do organismo; em que só no qual nos acostumamos a imaginá-los.

11. Suponhamos que calculássemos com números e empregássemos algumas vezes a divisão por expressões da forma (n – n), e obtivéssemos por vezes, deste modo, resultados diferentes dos normais da multiplicação etc. Mas isto não incomodaria ninguém. – Compare com: organizam-se listas, catálogos, de pessoas, mas não como fazemos, alfabeticamente; e assim acontece que o mesmo nome aparece em algumas listas mais de uma vez. – Mas agora pode-se supor: que ninguém se dá conta disto; ou que as pessoas o veem, mas o aceitam tranquilamente. Tal como se pode imaginar de pessoas de uma tribo que, quando deixam as moedas caírem no chão, não acham

MS 124, p. 52

Mühe wert halten, sie aufzuheben. (Sie haben dann etwa eine Redensart: »Es gehört den Andern«, oder dergleichen.)

Nun aber ändert sich die Zeit und die Menschen fangen an (zuerst nur wenige) Exaktheit zu fordern. Mit Recht? mit Unrecht? – Waren die früheren Verzeichnisse *nicht* eigentlich Verzeichnisse? –

Sagen wir, wir erhielten manche unsrer Rechenresultate durch einen versteckten Widerspruch. Sind sie dadurch illegitim? – Aber wenn wir nun solche Resultate durchaus nicht anerkennen wollen und doch fürchten, es könnten welche durchschlüpfen. – Nun, dann haben wir also eine Idee, die einem neuen Kalkül als Vorbild dienen könnte.

MS 124, p. 53

Wie man die Idee zu einem neuen Spiel haben kann.

Der Russellsche Widerspruch ist nicht, weil er ein Widerspruch ist, beunruhigend, sondern weil das ganze Gewächs, dessen Ende er ist, ein Krebsgewächs ist, das ohne Zweck und Sinn aus dem normalen Körper herauszuwachsen scheint.

Kann man nun sagen: »Wir wollen einen Kalkül, der uns sicherer die Wahrheit sagt«?

Aber du kannst doch einen Widerspruch nicht gelten lassen! – Warum nicht? Wir gebrauchen diese Form ja manchmal in unsrer Rede, freilich selten – aber man könnte sich eine Sprachtechnik denken, in der er ein ständiges Implement wäre.

Man könnte z. B. von einem Objekt in Bewegung sagen, es existiere und existiere nicht an diesem Ort; Verände-

MS 124, p. 54

rung könnte durch den Widerspruch ausgedrückt werden.

Nimm ein Thema wie das Haydnsche (Choral St. Antons), nimm den Teil einer der Brahmsschen Variationen, der dem ersten Teil des Themas entspricht, und stell die Aufgabe, den zweiten Teil der Variation im Stil ihres ersten Teiles zu konstruieren. Das ist ein Problem von der Art der mathematischen Probleme. Ist die Lösung gefunden, etwa wie Brahms sie gibt, so zweifelt man nicht; – dies ist die Lösung.

Mit diesem Weg sind wir einverstanden. Und doch ist es hier klar, daß

MS 124, p. 55

es leicht verschiedene Wege geben kann, auf deren jedem wir einverstanden sein können, deren jeden wir konsequent nennen könnten.

MS 124, p. 52

que vale a pena recolhê-las. (Eles teriam, digamos então, uma máxima: “Pertence aos outros”, ou coisa parecida.)

Mas agora os tempos mudam e as pessoas começam a exigir exatidão (no começo, só aos poucos). Com razão? sem razão? – *Não* eram realmente catálogos os primeiros catálogos? –

Digamos que obtivemos alguns dos nossos resultados de cálculo mediante uma contradição oculta. Eles são, por isto, ilegítimos? – Mas se nós agora não queremos reconhecer estes resultados de jeito nenhum e mesmo assim tememos que alguns possam escapar. – Bem, então nós temos, por conseguinte, uma ideia que poderia servir como modelo de um novo cálculo.

MS 124, p. 53

Assim como podemos ter a ideia de um novo jogo.[332]

A contradição de Russell não é perturbadora por ser uma contradição, mas porque todo o seu crescimento, que é o seu fim, é uma proliferação tumoral que parece crescer para fora do corpo normal sem finalidade e sentido.[333]

Pode-se dizer agora: “Queremos um cálculo que nos diga mais seguramente a verdade”?

Mas você não pode deixar que valha uma contradição! – Por que não? Nós usamos esta forma algumas vezes na nossa fala, admite-se que raramente, – mas pode-se imaginar uma técnica de linguagem em que ela fosse um implemento permanente.

Poder-se-ia dizer de um objeto em movimento, por exemplo, que ele existe e não existe neste lugar; a mudança

MS 124, p. 54

poderia ser expressa mediante a contradição.[334]

Tome um tema como o de Haydn (Coral de Santo Antônio), tome a parte de uma das variações de Brahms que corresponda à primeira parte do tema, e proponha a tarefa de construir a segunda parte da variação no estilo da sua primeira parte. Este é um problema do tipo dos problemas matemáticos. Se a solução for encontrada, talvez como Brahms a deu, então não há dúvida; – esta é a solução.

Estamos de acordo com este caminho. E aqui está claro, de todo modo, que

MS 124, p. 55

pode haver facilmente diferentes caminhos sobre cada um dos quais poderíamos estar de acordo, cada um dos quais poderíamos chamar de consequentes.

›Wir machen lauter legitime – d. h. in den Regeln erlaubte – Schritte, und auf einmal kommt ein Widerspruch heraus. Also ist das Regelverzeichnis, wie es ist, nichts nutz, denn der Widerspruch wirft das ganze Spiel um.‹ Warum läßt du ihn es umwerfen?

Aber ich will, daß man nach der Regel soll *mechanisch* weiterschließen können, ohne zu widersprechenden Resultaten zu gelangen. Nun, welche Art der Voraussicht willst du? Eine, die dein gegenwärtiger Kalkül nicht zuläßt? Nun, dadurch ist er nicht

MS 124, p. 56

ein schlechtes Stück Mathematik, oder, nicht im vollsten Sinne Mathematik. Der Sinn des Wortes »mechanisch« verführt dich.

12. Wenn du zu einem praktischen Zweck einen Widerspruch mechanisch vermeiden willst, wie dein Kalkül es jetzt nicht kann, so ist das etwa, wie wenn du nach einer Konstruktion des … -Ecks suchst, das du bis jetzt nur durch Probieren hast zeichnen können; oder nach einer Lösung der Gleichung dritten Grades, die du bisher nur approximiert hast.

Nicht schlechte Mathematik wird hier verbessert, sondern ein neues Stück Mathematik erfunden.

Nimm an, ich wollte eine Irratio-

MS 124, p. 57

nalzahl so bestimmen, daß in ihrer Entwicklung nicht die Figur ›777‹ vorkommt. Ich könnte π nehmen und bestimmen: wenn jene Figur entsteht, setzen wir statt ihr ›000‹. Nun sagt man mir: das genügt nicht, denn der, welcher die Stellen berechnet, ist verhindert, auf die früheren zurückzuschauen. Nun brauche ich einen anderen Kalkül; einen in dem ich mich zum Voraus versichern kann, er könne ›777‹ nicht liefern. Ein mathematisches Problem.

›Solange die Widerspruchsfreiheit nicht bewiesen ist, kann ich nie ganz sicher sein, daß mir jemand, der gedankenlos, aber gemäß den Regeln, rechnet, nicht irgend etwas Falsches herausrechnen wird.‹ Solange also jene Voraussicht nicht gewonnen ist, ist der Kalkül

MS 124, p. 58

unzuverlässig. – Aber denke, ich fragte: »*Wie* unzuverlässig?« – Wenn wir von Graden der Unzuverlässigkeit redeten, könnten wir ihr nicht dadurch den metaphysischen Stachel nehmen?

Waren die ersten Regeln des Kalküls nicht gut? Nun, wir gaben sie nur, *weil* sie gut waren. – Wenn sich später ein Widerspruch ergibt, – haben sie *nicht* ihre Pflicht getan? Nicht doch, sie waren für diese Anwendung nicht gegeben worden.

Ich kann meinem Kalkül eine bestimmte Art der Voraussicht geben wollen. Sie macht ihn nicht zu einem *eigentlichen* Stück Mathematik, aber, etwa, zu gewissem Zweck brauchbarer.

‘Damos muitos passos legítimos – ou seja, permitidos pelas regras –, e de pronto aparece uma contradição. Por isto, o conjunto de regras, tal como está, de nada serve, já que a contradição derruba todo o jogo.’ Por que você o deixa ser derrubado?

Mas eu quero que a inferência deva poder continuar *mecanicamente* segundo a regra, sem chegar a resultados contraditórios. Bem, que tipo de previsão você quer? Uma que não permita o seu cálculo atual? Ora, isto não faz dele

MS 124, p. 56

um parte ruim da matemática, ou não no sentido mais amplo da matemática. O sentido da palavra “mecanicamente” te ilude.[335]

12. Se você quer, para uma finalidade prática, evitar mecanicamente uma contradição, coisa que o seu cálculo até agora não pode fazer, então isto seria como se, digamos, você buscasse a construção de um …-edro que você até agora só conseguiu projetar experimentalmente; ou a solução de uma equação de terceiro grau da qual você por enquanto só tem uma aproximação.

Não é uma matemática ruim que é melhorada aqui, mas um novo pedaço da matemática que é inventado.

Suponhamos que eu queira definir

MS 124, p. 57

um número irracional de maneira que não ocorra a figura ‘777’ na sua expansão. Eu poderia tomar π e determinar: se esta figura surgir, nós a substituímos por ‘000’. Agora me dizem: isto não é suficiente, pois aquele que calcula os lugares está impedido de olhar de volta para os anteriores. Agora eu preciso de um outro cálculo; algum em que eu possa estar seguro de antemão de que ele não poderia gerar ‘777’. Um problema matemático.

‘Enquanto a consistência não estiver demonstrada, nunca poderei estar totalmente seguro de que alguém que calcula sem pensar, mas em conformidade com as regras, não vai tirar como resultado algo errado.’ Por isto, enquanto aquela previsão não se realiza, o cálculo não é

MS 124, p. 58

confiável – Mas imagine que eu perguntasse: “*De que modo* não é confiável?” – Se falássemos de graus de inconfiabilidade, não poderíamos tirar dela o seu ferrão metafísico?

Não estavam boas as primeiras regras do cálculo? Ora, nós só as demos *porque* elas eram boas. – Se mais tarde se produziu uma contradição, – *não* cumpriram elas o seu dever? De todo modo, elas não tinham sido dadas para esta aplicação.

Posso querer dar ao meu cálculo um determinado tipo de previsão. Ela não o torna uma peça *propriamente* matemática, mas possivelmente proveitoso para certa finalidade.

Die Idee des Mechanisierens

MS 124, p. 59

der Mathematik. Die Mode des axiomatischen Systems.

13. Aber nehmen wir an, die ›Axiome‹ und ›Schlußweisen‹ seien nicht nur irgendwelche Konstruktionsweisen, sondern auch durchaus überzeugende! Nun,

MS 124, p. 60

dann heißt das, daß es Fälle gibt, in denen die Konstruktion aus diesen Bausteinen *nicht* überzeugt.

Und tatsächlich sind die logischen Axiome gar nicht überzeugend, wenn wir für die Satzvariablen Strukturen einsetzen, die niemand ursprünglich vorhergesehen hat, als man nämlich der Wahrheit der Axiome (im Anfang) die unbedingte Anerkennung gab.

Wie aber, wenn man sagt: die Axiome und Schlußweisen sollen doch so gewählt werden, daß sie keinen falschen Satz beweisen können?

›Wir wollen nicht nur einen ziemlich zuverlässigen, sondern einen *absolut* zuverlässigen Kalkül. Die Mathematik muß *absolut* sein.‹

Nimm an, ich hätte die Regeln

MS 124, p. 61

für's Spiel ›Fuchs und Jäger‹ aufgestellt – stellte mir das Spiel unterhaltlich und hübsch vor. – Später aber finde ich, daß die Jäger immer gewinnen können, wenn man einmal weiß, wie.

Ich bin nun, sagen wir, mit meinem Spiel unzufrieden. Die von mir gegebenen Regeln haben ein Resultat gezeitigt, das ich nicht vorausgesehen hatte und das mir das Spiel verdirbt.

14. »N. kam darauf, daß man bei Berechnungen oft durch Ausdrücke der Form ›(n - n)‹ gekürzt hatte. Er wies die dadurch entstehende Diskrepanz der Resultate nach und zeigte, wie Menschenleben durch diese Art des Rechnens verloren worden waren.«

Aber nehmen wir an, auch die Andern hätten jene Widersprüche gemerkt, nur sich nicht darüber

MS 124, p. 62

Rechenschaft geben können, woher sie kämen. Sie hätten, sozusagen, mit schlechtem Gewissen gerechnet. Sie hätten zwischen widersprechenden Resultaten *eins* gewählt, aber mit Unsicherheit, während ihnen N's Entdeckung vollkommene Sicherheit gegeben hätte. – Aber sagten

A ideia da mecanização

MS 124, p. 59

da matemática. A moda do sistema axiomático.

13. Suponhamos, porém, que ‘axiomas’ e ‘modos de inferência’ não fossem apenas tipos quaisquer de construção, mas também perfeitamente convincentes! Ora,

MS 124, p. 60

então isto significa que há casos em que a construção feita com estes blocos de construção *não* é convincente.

E, de fato, os axiomas lógicos não são de nenhum modo convincentes se nós inserimos estruturas para as variáveis proposicionais que ninguém havia antecipado originalmente, quando se deu (no começo) reconhecimento incondicional à verdade do axioma.

Mas e quando se diz: os axiomas e modos de inferência devem ser escolhidos de maneira que não possam demonstrar nenhuma proposição falsa?

‘Não queremos só um cálculo bastante confiável, mas um *absolutamente* confiável. A matemática tem que ser *absoluta*.’

Suponha que tivesse estabelecido

MS 124, p. 61

as regras para o jogo da ‘raposa e o caçador’ – imagino o jogo como divertido e encantador. Mais tarde, porém, descubro que os caçadores podem vencer sempre, uma vez que se saiba como.

Agora estou, digamos, insatisfeito com o meu jogo. As regras que dei criaram um resultado que não havia previsto e que para mim arruinou o jogo.

14. “N. se deu conta de que os cálculos eram frequentemente reduzidos mediante expressões da forma ‘(n – n)’. Ele evidenciou a discrepância de resultados que se originou deste modo e mostrou como vidas humanas haviam sido perdidas por este tipo de cálculo.”

Suponhamos, porém, que outros também tivessem notado estas contradições, só que não puderam

MS 124, p. 62

dar conta de onde elas vieram. Eles tinham calculado, por assim dizer, com má consciência. Eles escolheram *um* dentre os resultados contraditórios, mas com insegurança, enquanto que a descoberta de N. lhes teria dado completa segurança. – Mas eles disseram entre si: “Existe algo que sie sich: »Mit unserm Kalkül ist etwas nicht in Ordnung«? War ihre Unsicherheit von der Art der unseren, wenn wir eine physikalische Berechnung anstellen, aber nicht sicher sind, ob diese Formeln hier wirklich das richtige Resultat ergeben? Oder war es ein Zweifel darüber, ob ihr Rechnen wirklich ein Rechnen sei? In diesem Falle: was taten sie, um den Übelstand abzustellen?

MS 124, p. 63

Die Leute haben bisher nur verhältnismäßig selten vom Kürzen durch Ausdrücke vom Werte 0 Gebrauch gemacht. Einmal aber entdeckt jemand, daß sie auf diese Weise wirklich jedes beliebige Resultat ausrechnen können. – Was tun sie nun? Nun, wir könnten uns sehr verschiedenes vorstellen. Sie können, z. B., nun erklären, diese Art des Rechnens habe damit ihren Witz verloren, und *so* sei künftig nicht mehr zu rechnen.

›Er glaubt, er rechnet‹ – möchte man sagen – ›er rechnet tatsächlich nicht.‹

15. Wenn die Rechnung für mich ihren Witz verloren hat, sobald ich weiß, wie ich nun alles Beliebige errechnen kann – hat sie keinen gehabt, so

MS 124, p. 64

lang ich das *nicht* wußte?

Ich mag freilich jetzt alle diese Rechnungen als nichtig erklären – ich führe sie eben jetzt nicht mehr aus – aber waren es darum keine Rechnungen?

Ich habe einmal, ohne es zu wissen, über einen versteckten Widerspruch geschlossen. Ist mein Resultat nun falsch, oder doch unrecht erworben?

Wenn der Widerspruch so gut versteckt ist, daß ihn niemand merkt, warum sollen wir nicht das, was wir jetzt tun, das eigentliche Rechnen nennen?

Wir sagen, der Widerspruch würde den Kalkül *vernichten*. Aber wenn er nun sozusagen in winzigen Dosen aufträte, gleichsam

MS 124, p. 65

blitzweise, nicht als ein ständiges Rechenmittel, würde er da den Kalkül auch vernichten?

Denk' dir, die Leute hätten sich eingebildet $(a + b)^2$ müsse gleich sein $a^2 + b^2$. (Ist das eine Einbildung von der Art: es müsse eine Dreiteilung des Winkels mit Lineal und Zirkel geben?) Kann man sich also so einbilden, zwei Rechnungsweisen müßten dasselbe ergeben, wenn es nicht dasselbe ist?

Ich addiere eine Kolumne, addiere sie auf verschiedene Weise, nehme z. B. die Zahlen

não está em ordem no nosso cálculo”? Seria a sua insegurança do mesmo tipo da nossa, quando nos empenhamos em um cálculo físico mas não estamos seguros de que as fórmulas vão gerar realmente o resultado correto? Ou era esta uma dúvida sobre se o seu cálculo era realmente um cálculo? Neste caso: o que eles fizeram para afastar o mal? [336]

MS 124, p. 63

As pessoas até aqui só têm feito um uso comparativamente raro de reduções por expressões de valor 0. Mas em algum momento alguém descobre que desta forma eles podem realmente calcular qualquer resultado arbitrário. – O que fazem agora? Bem, nós podemos imaginar coisas muito diferentes. Eles poderiam explicar, por exemplo, que este tipo de cálculo perdeu a sua argúcia e eles não vão mais calcular *assim* no futuro.

‘Ele acredita que calcula’ – alguém gostaria de dizer – ‘de fato, ele não calcula.’

15. Se o cálculo perdeu para mim a sua argúcia assim que soube que posso calcular qualquer resultado arbitrário – ele não tinha nenhuma, conquanto

MS 124, p. 64

não o soubesse?

Posso certamente declarar agora todos estes cálculos como nulos – eu agora nem sequer mais os efetuo –, mas não eram, por isto, cálculos?

Uma vez inferi, sem saber, em cima de uma contradição oculta. Agora o meu resultado é falso ou foi obtido incorretamente?

Se a contradição está tão bem escondida que ninguém a nota, por que não devemos chamar o que fazemos agora de cálculo autêntico?

Nós dizemos que a contradição *aniquilaria* o cálculo. Mas se ela se apresentasse, por asim dizer, em pequenas doses, como se fosse

MS 124, p. 65

por relâmpagos, não como um meio de cálculo constante, ela também aniquilaria o cálculo?

Imagine que as pessoas tivessem feito a ideia de que $(a + b)^2$ tivesse que ser igual a $a^2 + b^2$. (Seria esta uma quimera do tipo: tem que haver uma trissecção do ângulo com régua e compasso?) Pode-se, portanto, conceber uma ideia tal que duas maneiras de calcular tivessem que gerar o mesmo resultado, se não dá no mesmo resultado?

Somo uma coluna, somo de diferentes maneiras, tomo, por exemplo, os números em in verschiedener Reihenfolge und kriege immer wieder, regellos, etwas anderes heraus. – Ich werde vielleicht sagen: »Ich bin ganz verwirrt; ich mache entweder regellos Rechenfehler,

MS 124, p. 66

oder ich mache gewisse Rechenfehler in bestimmten Verbindungen: etwa auf ›6 + 3 = 9‹ sage ich immer ›7 + 7 = 15‹.«

Oder ich könnte mir denken, daß ich plötzlich einmal in der Rechnung subtrahiere statt zu addieren, aber nicht denke, daß ich nun etwas anderes tue.

Nun könnte es sein, daß ich den Fehler nicht fände und mich für geistesgestört hielte. Aber das müßte meine Reaktion nicht sein.

›Der Widerspruch hebt den Kalkül auf‹ – woher diese Sonderstellung? Sie ist, glaube ich, durch etwas Phantasie gewiß zu erschüttern.

Um diese philosophischen Probleme zu lösen, muß man Dinge miteinander vergleichen,

MS 124, p. 67

die zu vergleichen noch niemandem ernstlich eingefallen ist.

Man kann auf diesem Gebiete allerlei fragen, was zwar zur Sache gehört, aber nicht durch die Mitte derselben führt.

Eine bestimmte Reihe von Fragen führt durch die Mitte, ins Freie. Die andern werden nebenbei beantwortet.

Den Weg durch die Mitte zu finden ist ungeheuer schwer.

Er geht über *neue* Beispiele und Vergleiche. Die abgebrauchten zeigen uns ihn nicht.

MS 124, p. 68

Nehmen wir an, der Russellsche Widerspruch wäre nie gefunden worden. Nun – ist es ganz klar, daß wir dann einen falschen Kalkül besessen hätten? Gibt es denn hier nicht verschiedene Möglichkeiten?

Und wie, wenn man den Widerspruch zwar gefunden, sich aber weiter nicht über ihn aufgeregt und etwa bestimmt hätte, es seien aus ihm keine Schlüsse zu ziehen. (Wie ja auch niemand aus dem ›Lügner‹ Schlüsse zieht.) Wäre das ein offenbarer Fehler gewesen?

»Aber dann ist doch das kein eigentlicher Kalkül! Er verliert ja alle *Strenge*!« Nun, nicht *alle*. Und er hat nur dann nicht die volle Strenge, wenn man ein bestimmtes Ideal der Strenge verfolgt, einen bestimmten Stil

diferentes sequências e extraio sempre, aleatoriamente, coisas diferentes. – Talvez diga: "Estou totalmente confuso; ora cometo erros de cálculo aleatórios,

MS 124, p. 66

ora cometo certos erros de cálculo em determinadas relações: digamos, depois de '6 + 3 = 9' digo sempre '7 + 7 = 15'."

Ou eu poderia imaginar que de repente, em um momento do cálculo, subtraio em vez de somar, mas nunca penso que nesta hora estou fazendo algo diferente.

Bem, poderia acontecer que eu não ache o erro e me considere como mentalmente perturbado. Mas esta não teria que ser a minha reação.

'A contradição anula o cálculo' – de onde veio esta posição privilegiada? Ela certamente é abalada, acredito, mediante alguma imaginação.[337]

Para resolver estes problemas filosóficos tem-se que comparar coisas entre si,

MS 124, p. 67

comparar o que ainda não ocorreu seriamente a ninguém.

Neste domínio, pode-se fazer todo tipo de perguntas que, mesmo que pertençam ao assunto, não se conduzem pelo centro.

Uma determinada série de perguntas se conduz pelo centro, no espaço aberto. As outras são respondidas incidentalmente.

Encontrar o caminho pelo centro é tremendamente difícil.

Ele se transpõe para exemplos *novos* e comparações. Os já desgastados não nos vão mostrá-lo.[338]

MS 124, p. 68

Suponhamos que a contradição de Russell nunca tivesse sido encontrada. Ora – está totalmente claro que teríamos tido, então, um cálculo errado? Pois, não existem aqui diferentes possibilidades?

E como seria se, de fato, a contradição tivesse sido descoberta, mas não nos inquietássemos ainda mais com isto e, digamos, tivesse sido determinado que não se poderia tirar dela nenhuma conclusão (assim como ninguém tira uma conclusão do 'mentiroso'.) Isto teria sido um erro evidente?

"Mas então isto não seria realmente um cálculo! Ele perderia todo o *rigor*!" Bem, não *todo*. E ele não tem o completo rigor só se perseguir um determinado ideal de rigor, construir

MS 124, p. 69

der Mathematik baut.

›Aber ein Widerspruch in der Mathematik verträgt sich doch nicht mit der Anwendung der Mathematik.

Er macht, wenn er konsequent, d. h. zum Erzeugen *beliebiger* Resultate verwendet wird, die Anwendung der Mathematik zu einer Farce, oder einer Art überflüssiger Zeremonie. Seine Wirkung ist etwa die, unstarrer Maßstäbe, die durch Dehnen und Zusammendrücken verschiedene Messungsresultate zulassen.‹ Aber war das Messen durch Abschreiten *kein* Messen? Und wenn die Menschen mit Maßstäben aus Teig arbeiteten, wäre das an sich schon falsch zu nennen?

Könnte man sich nicht leicht Gründe denken, weshalb eine gewisse Dehnbarkeit der Maßstäbe erwünscht sein könnte?

MS 124, p. 70

»Aber ist es nicht richtig, die Maßstäbe aus immer härterem, unveränderlichenn Material herzustellen?« Gewiß ist es richtig; wenn man so will!

»Also redest du dem Widerspruch das Wort?!« Durchaus nicht; so wenig, wie den weichen Maßstäben.

Ein Fehler ist zu vermeiden: Man denkt, der Widerspruch *muß* sinnlos sein: d. h., wenn man z.B. die Zeichen ›p‹, ›~‹, ›.‹, *konsequent* benützt, so kann ›p .~p‹ nichts sagen. – Aber denke: was heißt, den und den Gebrauch ›konsequent‹ fortsetzen? (›Dieses Kurvenstück konsequent fortsetzen.‹)

16. Wozu braucht die Mathematik eine Grundlegung?! Sie braucht sie, glaube ich, ebenso wenig, wie die Sätze, die von physikalischen Gegenständen – oder die, welche von Sinneseindrücken handeln, eine *Analyse*.

MS 124, p. 71

Wohl aber bedürfen die mathematischen, sowie jene andern Sätze, eine Klarlegung ihrer Grammatik.

Die *mathematischen* Probleme der sogenannten Grundlagen liegen für uns der Mathematik so wenig zu Grunde, wie der gemalte Fels die gemalte Burg trägt.

um determinado

MS 124, p. 69

estilo de matemática.

‘Mas uma contradição na matemática’ não é compatível com a aplicação da matemática.[339]

Se ela for empregada de maneira consequente, isto é, para produzir resultados *arbitrários*, torna a aplicação da matemática numa farsa, ou num tipo de cerimônia supérflua. O seu efeito é o de réguas não-rígidas, por exemplo, que, por causa da dilatação e contração, permitem diferentes resultados de medida.’ Mas a medição feita com passos *não* é uma medição? E se as pessoas trabalhassem com réguas feitas de massa, isto já seria por si mesmo chamado de errado?

Não poderíamos facilmente imaginar razões pelas quais uma certa elasticidade das réguas seria desejável?

MS 124, p. 70

“Mas não é correto fabricar as réguas com material cada vez mais duro e imutável?” Certamente que é correto; se assim o queremos!

“Então você fala a favor da contradição?!” De jeito nenhum; muito menos das réguas moles.[340]

Um erro deve ser evitado: imagina-se que a contradição *tem que* ser sem sentido: ou seja, se não se utiliza de maneira *consequente* os sinais ‘p’, ‘~’, ‘.’, então ‘p . ~p’ não pode dizer nada. – Mas pense: o que significa dar continuidade ‘de maneira consequente’ com tal e tal uso? (‘Dar continuidade consenquente com esta porção da curva.’)

16. Para que a matemática precisa de uma fundação?! Ela precisa, acredito, tão pouco quanto as proposições de objetos físicos – ou as que tratam de impressões do sentidos, de uma *análise*.

MS 124, p. 71

Mas as proposições matemáticas, bem como aquelas outras, requerem um esclarecimento da sua gramática.

Os problemas *matemáticos* dos assim chamados fundamentos estão para nós tão pouco na fundação da matemática quanto uma rocha pintada sustentando um castelo pintado.

›Aber wurde die Fregesche Logik durch den Widerspruch zur Grundlegung der Arithmetik nicht untauglich?‹ Doch! Aber wer sagte denn auch, daß sie zu diesem Zweck tauglich sein müsse?!

Man könnte sich sogar denken, daß man die Fregesche Logik einem Wilden

MS 124, p. 72

als Instrument gegeben hätte, um damit arithmetische Sätze abzuleiten. Er habe den Widerspruch abgeleitet, ohne zu merken, daß es einer ist, und aus ihm nun beliebige wahre und falsche Sätze.

›Ein guter Engel hat uns bisher bewahrt, *diesen* Weg zu gehen.‹ Nun, was willst du mehr? Man könnte, glaube ich, sagen: Ein guter Engel wird immer nötig sein, was immer du tust.

17. Man sagt: das Rechnen sei ein Experiment, um dadurch zu zeigen wie es so praktisch sein kann. Denn vom Experiment weiß man, daß es wirklich praktischen Wert hat. Nur vergißt man, daß es diesen Wert besitzt vermöge einer Technik, die ein naturgeschichtliches Faktum ist, deren Regeln aber

MS 124, p. 73

nicht die Rolle von Sätzen der Naturgeschichte haben.

»Die Grenzen der Empirie« – (Leben wir, weil es praktisch ist zu leben? Denken wir, weil Denken praktisch ist?)

Daß ein Experiment praktisch ist, das weiß er; also ist die Rechnung ein Experiment.

Unsre experimentellen Handlungen haben allerdings ein charakteristisches Gesicht. Wenn ich jemand in einem Laboratorium eine Flüssigkeit in eine Proberöhre gießen und über einer Bunsenflamme erhitzen sehe, bin ich geneigt zu sagen, er mache ein Experiment.

Nehmen wir an, Leute, welche zählen können, wollen – so wie wir – zu verschiedenerlei praktischen Zwecken Zahlen wissen. Und dazu fragen sie gewisse Leute, die, wenn ihnen das

MS 124, p. 74

praktische Problem erklärt wurde, die Augen schließen, und sich die dem Zweck entsprechende Zahl einfallen ließen — so läge hier keine Rechnung vor, wie verläßlich immer die Zahlangabe sein mag. Ja diese Zahlbestimmung könnte praktisch viel verläßlicher sein, als jede Rechnung.

Eine Rechnung – könnte man sagen – ist etwa ein Teil der Technik eines Experiments,

‘Mas a contradição com a fundação da aritmética não tornou a lógica de Frege inadequada?’ Sim! Mas também quem disse que ela teria que ser adequada para esta finalidade?!

Poder-se-ia até imaginar que a lógica fregeana tivesse sido dada

MS 124, p. 72

para um selvagem como instrumento para derivar proposições aritméticas. Ele teria derivado a contradição sem notar o que ela era, e agora deriva dela proposições arbitrariamente verdadeiras e falsas.

‘Um anjo bom nos resguardou até aqui de seguir por *este* caminho.’ Ora, o que você quer mais? Poder-se-ia, acredito, dizer: um anjo bom será sempre necessário para qualquer coisa que você faça.

17. Diz-se: o cálculo é um experimento para mostrar como pode ser bem prático. Pois sabemos que o experimento tem realmente um valor prático. Esquece-se apenas que ele possui este valor em virtude de uma técnica que é um fato da história natural, cujas regras, no entanto,

MS 124, p. 73

não têm o papel de proposições da história natural.

“Os limites do empírico”[341] – (Nós vivemos porque é prático viver? Nós pensamos porque é prático pensar?)

Que um experimento seja prático, isto ele sabe; então, o cálculo é um experimento.

Nossas ações experimentais têm, com efeito, um rosto característico.[342] Se vejo alguém em um laboratório despejando um líquido em um tubo de ensaio e o aquecendo em um bico de Bunsen, fico inclinado a dizer que ele está fazendo um experimento.

Suponhamos pessoas que podem contar e querem conhecer – tal como nós – números para uma variedade de finalidades práticas. E, para isto, eles perguntam a certa gente que, quando lhes é explicado

MS 124, p. 74

o problema prático, fecham os olhos e deixam que se lhes ocorra o número apropriado à finalidade —[343] então não haveria aqui nenhum cálculo, não importa quão confiável o dado numérico possa ser. Pois esta determinação de número poderia ser na prática muito mais confiável do que qualquer cálculo.

aber allein kein Experiment.

Vergißt man denn, daß zum Experiment eine bestimmte *Anwendung* des Vorgangs gehört? Und die Rechnung vermittelt die Anwendung.

MS 124, p. 75

Würde denn jemand daran *denken*, das übersetzen einer Chiffre mittels eines Schlüssels ein Experiment zu nennen?

Wenn ich zweifle, ob die Zahlen n und m multipliziert l ergeben werden, so bin ich nicht *darüber* im Zweifel, ob eine Verwirrung in unserm Rechnen ausbrechen wird, und etwa die Hälfte der Menschen eines – die andre Hälfte etwas andres für richtig halten werden.

›Experiment‹ ist eine Handlung nur von einem gewissen Gesichtspunkt gesehen. Und es ist *klar*, daß die Rechnungshandlung auch ein Experiment sein kann.

Ich kann z. B. prüfen wollen, was dieser Mensch unter solchen Umständen, auf diese Aufgabestellung

MS 124, p. 76

hin, rechnet. – Aber, ist es nicht eben das, was du fragst wenn du wissen willst, wieviel 52 x 63 ist! Das mag ich wohl fragen – meine Frage mag sogar in diesen Worten ausgedrückt sein. (Vgl. damit: Ist der Satz »Horch, sie stöhnt!« ein Satz über ihr Benehmen, oder über ihr Leiden?)

Aber wie ist es nun, wenn ich seine Rechnung vielleicht *nachrechne*? – ›Nun, dann mache ich noch ein Experiment um ganz sicher herauszufinden, daß alle normalen Menschen so reagieren.‹ – Und wenn sie nun *nicht* gleichförmig reagieren –: welches ist das mathematische Resultat?

18. »Soll die Rechnung praktisch sein, so muß sie Tatsachen zu Tage bringen. Und das kann nur das Experiment.«

Aber welches sind ›Tatsachen‹?

MS 124, p. 77

Glaubst du, du kannst zeigen, welche Tatsache gemeint ist, indem du etwa mit dem Finger sie zeigst? Macht das schon die Rolle klar, welche die ›Feststellung‹ einer Tatsache spielt? – Wenn nun die Mathematik erst den *Charakter* dessen bestimmte, was du ›Tatsache‹ nennst!

›Es ist interessant zu wissen *wieviele* Schwingungen dieser Ton hat.‹ Aber die Arithmetik hat dich diese Frage erst gelehrt. Sie hat dich gelehrt, diese Art von Tatsachen zu sehen.

Die Mathematik – will ich sagen – lehrt dich nicht einfach die Antwort auf eine Frage; sondern ein ganzes Sprachspiel, mit Fragen und Antworten.

Um cálculo – poderíamos dizer – é possivelmente uma parte da técnica de um experimento, mas não é unicamente experimento.

Esquece-se então que pertence ao experimento uma determinada *aplicação* do processo? E o cálculo intermedeia a aplicação.

MS 124, p. 75

Alguém *pensaria* em chamar de experimento a tradução de uma cifra por meio de uma chave?[344]

Quando estou em dúvida se os números n e m multiplicados darão 1, não estou em dúvida *de que*[345] irá irromper uma confusão no nosso cálculo, e cerca da metade das pessoas vão considerar uma coisa como correta – e a outra metade, algo diferente.

Uma ação é ‘experimento’ só quando vista de um certo ponto de vista. E está *claro* que a ação de calcular também pode ser um experimento.

Posso querer examinar, por exemplo, o que esta pessoa calcula sob tais circunstâncias, em resposta

MS 124, p. 76

a esta tarefa. – Mas não é isto precisamente o que você pergunta quando quer saber quanto é 52 x 63! Pode muito bem ser que pergunte isto – minha pergunta pode até ser expressa nestas palavras. (Compare com: a sentença “Ouça, ela está gemendo!” é sobre o seu comportamento ou sobre o seu sofrimento?)

Mas como seria se eu talvez *recalculasse* agora o seu cálculo? – ‘Bem, então eu ainda estaria fazendo um experimento para descobrir com total segurança se todas as pessoas normais reagem assim.’ – E se elas *não* reagirem de maneira uniforme –: qual é o resultado matemático?

18. “Se o cálculo deve ser prático, então ele tem que trazer os fatos a lume. E só o experimento pode fazer isto.”

Mas o que são ‘fatos’?

MS 124, p. 77

Você acha que pode mostrar o que o fato quer dizer quando, por exemplo, aponta com o dedo? Isto já torna claro o papel que joga o ‘estabelecimento’ de um fato? – E se for a matemática quem determina antes o *caráter* do que você chama de ‘fato’!

‘Seria interessante saber *quantas* vibrações tem este tom.’ Mas a aritmética já te ensinou antes esta pergunta. Ela te ensinou a ver este tipo de fatos.

A matemática – eu diria – não te ensina simplesmente a resposta a uma pergunta; mas todo um jogo de linguagem com perguntas e respostas.

Sollen wir sagen, die *Mathematik* lehre uns zählen?

MS 124, p. 78

Kann man von der Mathematik sagen, sie lehre uns experimentelle *Forschungsweisen*? Oder sie helfe uns, solche Forschungsweisen finden?

›Die Mathematik, um praktisch zu sein, muß uns Tatsachen lehren.‹ – Aber müssen diese Tatsachen die *mathematischen* Tatsachen sein? – Aber warum soll sie nicht, statt uns ›Tatsachen zu lehren‹, die Formen dessen schaffen, was wir Tatsachen nennen?

»Ja aber es bleibt doch empirische Tatsache, daß die Menschen so rechnen!« – Ja, aber damit werden ihre Rechensätze nicht zu empirischen Sätzen.

»Ja, aber es muß doch unser Rechnen auf empirischen Tatsachen beruhen!« Gewiß. Aber welche meinst du jetzt? Die psychologischen und physiologischen, die es möglich machen, oder die, die es zu einer

MS 124, p. 79

nützlichen Tätigkeit machen? Der Zusammenhang mit *diesen* besteht darin, daß die Rechnung das Bild eines Experiments ist, wie es nämlich, so gut wie immer, abläuft. Von den anderen erhält es seine Pointe, seine Physiognomie: aber das sagt durchaus nicht, daß die Sätze der Mathematik die Funktionen der empirischen Sätze haben. (Das wäre beinahe, als glaubte Einer: weil doch nur die Schauspieler im Stücke auftreten, so könnten auf der Bühne des Theaters auch keine andern Leute nützlich beschäftigt sein.)

In der Rechnung *gibt es keine* kausalen Zusammenhänge, nur die Zusammenhänge des Bildes.

MS 124, p. 80

Und daran ändert es nichts, daß wir die Beweisfigur nachrechnen, um sie anzuerkennen. Daß wir also versucht sind, zu sagen, wir ließen sie durch ein psychologisches Experiment entstehen. Denn der psychische Ablauf wird beim Rechnen nicht psychologisch untersucht.

MS 124, p. 81

›Die Minute hat 60 Sekunden.‹ Das ist ein Satz ganz *ähnlich* einem mathematischen. Hängt seine Wahrheit von der Erfahrung ab? – Nun: könnten wir von Minuten und Stunden reden, wenn es keinen Zeitsinn gäbe; wenn es keine Uhren gäbe, oder, aus physikalischen Gründen nicht geben könnte; wenn alle die Zusammenhänge nicht statt hätten, die unsern Zeitmaßen Sinn und Bedeutung geben? In diesem Falle – würden wir sagen – hätte das Zeitmaß seinen Sinn

Devemos dizer que a *matemática* nos ensina a contar?[346]

MS 124, p. 78

Pode-se dizer sobre a matemática que ela nos ensina *métodos de pesquisa* experimentais? Ou ela nos ajuda a achar estes métodos de pesquisa de pesquisa?

‘A matemática, para ser prática, tem que nos ensinar fatos’ – Mas estes fatos têm que ser fatos *matemáticos*? – Mas por que ela não deve, em vez de nos ‘ensinar fatos’, criar as formas disto que chamamos de fatos?

“Sim, mas permanece o fato empírico de que as pessoas calculam assim!” – Sim, mas nem por isto as suas proposições do cálculo se tornam proposições empíricas.

“Sim, mas o nosso cálculo de todo modo tem que se basear em fatos empíricos!” Certamente. Mas em quais você está pensando agora? Os psicológicos e fisiológicos que o tornam possível, ou aqueles que o

MS 124, p. 79

tornam uma atividade útil? A conexão com *estes* consiste em que o cálculo é a imagem de um experimento, como, particularmente, quase sempre decorre. Dos outros, ele obtém a sua peculiaridade, a sua fisiognomia: mas isto não diz, em absoluto, que as proposições da matemática tenham as funções das proposições empíricas. (Isso seria quase como se alguém acreditasse que: uma vez que só os atores aparecem na peça, então nenhuma outra pessoa estaria utilmente ocupada no palco do teatro.)

Não há quaisquer conexões causais no cálculo, só as conexões da imagem.

MS 124, p. 80

E isto em nada modifica que nós recalculemos a figura da demonstração para aceitá-la. Que sejamos, portanto, tentados a dizer que nos permitimos criá-la mediante um experimento psicológico. Pois o processo psíquico não é investigado psicologicamente pelo cálculo.

MS 124, p. 81

‘O minuto tem 60 segundos.’ Esta é uma proposição totalmente *semelhante* a uma proposição matemática. A sua verdade depende da experiência? – Ora: poderíamos falar de minutos e horas se não houvesse nenhum sentido de tempo; se não houvesse relógios ou se não pudesse havê-los por razões físicas; se não houvesse nenhuma das conexões que dão sentido e significado às nossas medidas de tempo? Neste caso – nós diríamos – a medida do tempo teria perdido

MS 124, p. 82

o seu sentido (como o ato do xeque-mate se desaparecesse o jogo de xadrez) – ou então teria

MS 124, p. 82

verloren (wie die Handlung des Mattsetzens, wenn das Schachspiel verschwände) – oder es hätte dann einen ganz anderen Sinn. – Macht aber die eine so beschriebene Erfahrung den Satz falsch, die andre wahr? Nein; *das* beschriebe nicht seine Funktion. Er funktioniert ganz anders.

MS 124, p. 83

›Das Rechnen, um praktisch sein zu können, muß auf empirischen Tatsachen beruhen.‹ – Warum soll es nicht lieber bestimmen, was empirische Tatsachen *sind*?

MS 124, p. 84

Erwäge: ›Unsre Mathematik wandelt Experimente in Definitionen um.‹

19. Aber können wir uns keine menschliche Gesellschaft denken, in der es ebensowenig ein Rechnen, ganz in unserm Sinn, wie ein Messen, ganz in unserm Sinne, gibt? – Doch. – Aber wozu will ich mich denn bemühen, was Mathematik ist, herauszuarbeiten?

Weil es bei uns eine Mathematik gibt, und eine besondere Auffassung derselben, ein Ideal, gleichsam, ihrer Stellung und Funktion, – und dieses muß klar herausgearbeitet werden.

MS 124, p. 81

Fordere nicht zuviel, und fürchte nicht, daß deine gerechte Forderung ins Nichts zerrinnen wird.

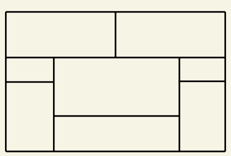
Meine Aufgabe ist es nicht, Russells Logik von *innen* anzugreifen, sondern von außen.

D. h.: nicht, sie mathematisch anzugreifen – sonst triebe ich Mathematik –, sondern ihre Stellung, ihr Amt.

MS 124, p. 82

Meine Aufgabe ist es nicht, über den Gödelschen Beweis, z. B., zu reden; sondern an ihm vorbei zu reden.

20. Die Aufgabe, die Zahl der Wege zu finden, auf denen man den Fugen dieser Mauer, ohne



abzusetzen und ohne Wiederholung entlang fahren kann, erkennt jeder als *mathematische* Aufgabe. – Wäre die Zeichnung viel komplizierter und größer, nicht zu überblicken, so könnte man annehmen, sie ändre sich, ohne daß wir's merken, und dann wäre die Auf-

MS 124, p. 84

um sentido totalmente diferente. Mas uma experiência descrita assim tornaria a proposição falsa, e uma outra experiência, verdadeira? Não; *isto* não descreve a sua função. Ela funciona totalmente diferente.[347]

MS 124, p. 83

'O cálculo, para poder ser prático, tem que se basear em fatos empíricos.' – Por que ele não deve determinar preferivelmente o que *são* fatos empíricos?

MS 124, p. 84

Pondere: 'Nossa matemática converte experimentos em definições.'[348]

19. Mas não poderíamos imaginar uma sociedade humana em que não houvesse um cálculo totalmente no nosso sentido, nem tampouco uma medida totalmente no nosso sentido? – Sim, é claro. – Mas para que vou me esforçar então em destacar o que é a matemática?

Porque existe entre nós uma matemática e uma concepção particular dela, como que um ideal da sua posição e função, – e isto tem que ser claramente destacado.

MS 124, p. 81

Não exija muito e não tema que a sua justa exigência se esvaia em nada.

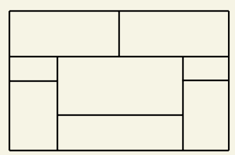
Minha tarefa não é atacar a lógica de Russell por *dentro*, mas por fora.

Ou seja: não atacá-la matematicamente – caso contrário, estaria fazendo matemática –, mas a sua posição, o seu encargo.[349]

MS 124, p. 82

Minha tarefa não é falar sobre a prova de Gödel, por exemplo; mas falar dela bordejando-a.[350]

20. A tarefa de encontrar o número de caminhos pelos quais se pode passar ao longo das



juntas deste muro, sem parar e sem repetição, qualquer um reconhece como tarefa *matemática*. – Se o desenho fosse muito mais complicado e maior, impossibilitada a visão geral, então poderíamos supor que ele se modifica sem que nos demos conta, e daí a tarefa

MS 124, p. 84

gabe, jene Zahl (die sich vielleicht gesetzmäßig ändert) zu finden, keine mathematische mehr. Aber auch wenn sie gleichbleibt, ist die Aufgabe dann nicht mathematisch. — Aber auch wenn die Mauer zu überblicken ist, so kann man nicht sagen, die Aufgabe wird dadurch zu einer mathematischen – wie man sagt: *diese* Aufgabe ist nun eine der Embryologie. Vielmehr: *hier* brauchen wir eine mathematische Lösung. (Wie: hier ist, was wir bedürfen, eine *Vorlage*.)

›Erkannten‹ wir das Problem als ein mathematisches, weil die Mathematik vom Nachfahren von Zeichnungen handelt?

Warum sind wir also geneigt, *dieses* Problem schlechtweg ein ›mathematisches‹ zu nennen? Weil wir es ihm gleich ansehen, daß hier die

MS 124, p. 85

Beantwortung einer *mathematischen* Frage *so gut wie* alles ist, was wir brauchen. Obschon man das Problem, z. B., leicht als ein psychologisches sehen könnte.

Ahnliches von der Aufgabe, aus einem Blatt Papier das und das zu falten.

Es kann so ausschauen, als ob die Mathematik hier eine Wissenschaft ist, die mit *Einheiten* Experimente macht; Experimente, bei welchen es nämlich nicht auf die Arten der Einheiten ankommt, also nicht darauf, ob sie Erbsen, Glaskugeln, Striche, usw., sind. – Nur was von *allen* diesen gilt findet sie heraus. Also z. B. nichts über ihren Schmelzpunkt, aber, daß 2 und 2 von ihnen 4 sind. Und das Problem der Mauer ist eben ein mathematisches, d. h.: kann durch *diese* Art von Experiment gelöst werden. – Und worin das mathematische Experiment besteht? Nun, im Hinlegen und Verschieben von Dingen, Ziehen von Strichen, Anschreiben von Ausdrücken, Sätzen, etc. Und man

MS 124, p. 86

muß sich dadurch nicht stören lassen, daß die äußere Erscheinung dieser Experimente nicht die physikalischer, chemischer etc, hat, es sind eben andersartige. Nur eine Schwierigkeit ist da: das, was vorgeht, ist leicht genug zu sehen, zu beschreiben, – aber *wie* ist es als Experiment anzuschauen? Welches ist hier der Kopf, welches der Fuß des Experiments? Welches sind die Bedingungen des Experiments, welches sein Resultat? Ist das Resultat das Rechnungsergebnis, oder das Rechnungsbild, oder die Zustimmung (worin immer diese besteht) des Rechnenden?

Werden aber, etwa, die Prinzipien der Dynamik zu Sätzen der reinen Mathematik dadurch, daß man ihre Interpretation offen läßt und sie nun zum Erzeugen eines Maßsystems verwendet?

›Der mathematische Beweis muß übersichtlich sein‹ – das hängt mit der Übersichtlichkeit jener Figur zusammen.

21. Vergiß nicht: der Satz, der von sich selbst aussagt, er sei unbeweisbar, ist als *mathematische* Aussage auf-

de encontrar esse número (que talvez se modifique de acordo com alguma lei) não seria mais matemática. Mas mesmo que ele permanecesse igual, a tarefa ainda não seria matemática. —[351] Mesmo que se tenha uma visão geral desta parede, não se pode dizer que a tarefa, por causa disto, seja matemática – tal como se diz: *esta* tarefa agora é de embriologia. Em vez disto: necessitamos *aqui* de uma solução matemática. (Tal como: o que precisamos aqui é de um *modelo*.)

'Reconhecemos' o problema como matemático porque a matemática trata dos seguimentos dos desenhos?

Por que então nos inclinamos a chamar simplesmente *este* problema de 'matemático'? Porque nele vemos de imediato que a

MS 124, p. 85

resposta a uma questão *matemática* é *praticamente* tudo o que precisamos aqui. Conquanto se possa ver facilmente o problema como psicológico, por exemplo.

Semelhante à tarefa de dobrar uma folha de papel assim e assim.

Pode parecer que a matemática seria aqui uma ciência que faz experimentos com *unidades*;[352] experimentos que não dependem do tipo de unidades que sejam, ou seja, se são ervilhas, bolinhas de gude, traços e assim por diante. – Ela só descobre o que vale para *todos* eles. Portanto, não, por exemplo, sobre o seu ponto de fusão, mas que 2 e 2 deles são 4. E o problema da parede é justamente matemático, ou seja: ele pode ser resolvido mediante *este* tipo de experimento. – E em que consiste o experimento matemático? Ora, na colocação e deslocamento de coisas, desenho de traços, anotação de expressões, proposições etc. E não

MS 124, p. 86

temos que nos perturbar pelo fato de que a aparência externa destes experimentos não sejam os dos físicos, químicos etc., eles são, justamente, de tipos diferentes. Só há uma dificuldade aqui: o que acontece ali é bastante fácil de ver, de descrever, – mas *como* é ser visto como experimento? Qual é a cabeça e quais são os pés do experimento? Quais são as condições do experimento e quais são os seus resultados? O resultado é o produto do cálculo, ou a imagem do cálculo, ou a aprovação (o que quer que consista nisto) daquele que calcula?

Mas isto torna, digamos, os princípios da dinâmica em proposições da matemática pura, ao se deixar sua interpretação aberta e agora empregá-la para a criação de um sistema de medida?

'A matemática tem que ser uma visão sinóptica' – isto tem a ver com a visibilidade panorâmica daquela figura.

21. Não se esqueça: a proposição que assere sobre si mesma[353] que é indemonstrável deve ser concebida como proposição

MS 124, p. 87

zufassen – – denn das ist nicht *selbstverständlich*.

Es ist nicht selbstverständlich, daß der Satz, die und die Struktur sei nicht konstruierbar, als mathematischer Satz aufzufassen ist.

D. h.: wenn man sagte: »er sagt von sich selbst aus« – so ist das auf eine spezielle Weise zu verstehen. Hier nämlich entsteht leicht Verwirrung durch den bunten Gebrauch des Ausdrucks »dieser Satz sagt etwas von … aus«.

In diesem Sinne sagt der Satz ›625 = 25 x 25‹ auch etwas über sich selbst aus: daß nämlich die linke Ziffer erhalten wird, wenn man die rechts stehenden multipliziert.

Der Gödelsche Satz, der etwas über sich selbst aussagt, *erwähnt* sich selbst nicht.

MS 124, p. 88

›Der Satz sagt, daß diese Zahl aus diesen Zahlen auf diese Weise nicht erhältlich ist.‹ – Aber bist du auch sicher, daß du ihn recht ins Deutsche übersetzt hast? Ja gewiß, es scheint so. – Aber kann man da nicht fehlgehen?

Könnte man sagen: Gödel sagt, daß man einem mathematischen Beweis auch muß trauen können, wenn man ihn, prak-

MS 124, p. 89

tisch, als den Beweis der Konstruierbarkeit der Satzfigur nach den Beweisregeln auffassen will?

Oder: Ein mathematischer Satz muß als Satz einer auf sich selbst wirklich anwendbaren Geometrie aufgefaßt werden können. Und tut man das, so zeigt es sich, daß man sich auf einen Beweis in gewissen Fällen nicht verlassen kann.

Die Grenzen der Empirie sind nicht unverbürgte Annahmen, oder intuitiv als richtig erkannte; sondern Arten und Weisen des Vergleichens und des Handelns.

22. ›Nehmen wir an, wir haben einen arithmetischen Satz, der sagt, eine bestimmte Zahl … könne nicht aus den Zahlen … , … , … , durch die und die Operationen

MS 124, p. 90

gewonnen werden. Und nehmen wir an, es ließe sich eine Übersetzungsregel geben, nach welcher dieser arithmetische Satz in die Ziffer jener ersten Zahl – die Axiome, aus denen wir versuchen, ihn zu beweisen, in die Ziffern jener andern Zahlen – und unsere Schlußregeln in die im Satz erwähnten Operationen sich übersetzen ließen. – Hätten wir dann *den arithmetischen Satz* aus den Axiomen nach unsern Schlußregeln abgeleitet, so hätten wir *dadurch* seine Ableitbarke-

MS 124, p. 87

matemática – –[354] pois isto não é *óbvio*.

Não é óbvio que a proposição de que tal e tal estrutura não é construtível deva ser concebida como proposição matemática.

Ou seja: quando se diz: “ela assere sobre si mesma” – então isto deve ser compreendido de uma maneira especial. Aqui particularmente se origina facilmente uma confusão pelo uso multicolorido da expressão “esta proposição assere algo sobre …”.

Neste sentido, a proposição ‘625 = 25 x 25’ também assere alguma coisa sobre si mesma: a saber, que a cifra à esquerda é obtida quando multiplicamos as que estão à direita.

O teorema de Gödel, que assere alguma coisa sobre si mesmo, não *alude* a si mesmo.[355]

MS 124, p. 88

‘A proposição diz que este número não pode ser obtido destes números desta maneira.’ – Mas você está seguro de que a traduziu corretamente em português? Certamente parece que sim. – Mas não se pode errar ali?[356]

Poder-se-ia dizer: Gödel diz que se tem que poder confiar também em uma demonstração matemática se se quer concebê-la,

MS 124, p. 89

na prática, como a demonstração da construtibilidade da figura da proposição segundo as regras da demonstração?

Ou: uma proposição matemática tem que ser passível de ser concebida como proposição de uma geometria realmente aplicável a si mesma. E se se faz isto, mostra-se que não se pode confiar em uma demonstração em certos casos.[357]

Os limites do empírico[358] não são suposições não garantidas ou intuitivamente reconhecidas como corretas; senão tipos e modos de comparações e de ações.

22. ‘Suponhamos que temos uma proposição aritmética que diga que um determinado número … não poderia ser alcançado a partir dos números …, …, …, mediante tais e tais

MS 124, p. 90

operações. E suponhamos que fosse dada uma regra de tradução segundo a qual esta proposição aritmética pudesse ser traduzida nos algarismos daquele primeiro número – os axiomas a partir dos quais tentamos demonstrá-la nos algarismos daqueles outros números –, e nossas regras de inferência nas operações mencionadas na proposição. – Se tivéssemos então derivado *a proposição aritmética* a partir dos axiomas segundo nossas regras de inferência, então teríamos *por este* it demonstriert, aber auch einen Satz bewiesen, den man nach jener Übersetzungsregel dahin aussprechen kann: dieser arithmetische Satz (nämlich unserer) sei unableitbar.‹

Was wäre nun da zu tun? Ich denke mir, wir schenken unserer *Konstruktion* des *Satzzeichens* Glauben, also dem *geometrischen* Beweis. Wir sagen also, diese ›Satzfigur‹ ist aus jenen so und so gewinnbar. Und übertragen, nun, in eine andre Notation heißt das: diese Ziffer ist mittels dieser Operationen aus jenen zu ge-

MS 124, p. 91

winnen. Soweit hat der Satz und sein Beweis nichts mit einer besonderen *Logik* zu tun. Hier war jener konstruierte Satz einfach eine andere Schreibweise der konstruierten Ziffer; sie hatte die *Form* eines Satzes, aber wir vergleichen sie nicht mit andern Sätzen als Zeichen, welches dies oder jenes *sagt*, einen *Sinn* hat.

Aber freilich ist zu sagen, daß jenes Zeichen weder als Satzzeichen noch als Zahlzeichen angesehen werden braucht. – Frage dich: was macht es zu dem einen, was zu dem anderen?

Lesen wir nun den konstruierten Satz (oder die Ziffer) als Satz der mathematischen Sprache (etwa auf Deutsch), so spricht er das Gegenteil von dem, was wir eben als bewiesen betrachten. Wir haben also den wirklichen Sinn des Satzes als falsch

MS 124, p. 92

demonstriert und ihn zu gleicher Zeit *bewiesen* – wenn wir nämlich seine Konstruktion aus den zugelassenen Axiomen mittels der zugelassenen Schlußregeln als Beweis betrachten.

Wenn jemand uns einwürfe, wir könnten solche *Annahmen* nicht machen, da es *logische* oder *mathematische* Annahmen wären, so antworten wir, daß nur nötig ist anzunehmen, jemand habe einen Rechenfehler gemacht und sei *dadurch* zu dem Resultat gelangt, das wir ›annehmen‹, und er könne diesen Rechenfehler vorderhand nicht finden.

MS 124, p. 93

Hier kommen wir wieder auf den Ausdruck »der Beweis überzeugt uns« zurück. Und was uns hier an der Überzeugung interessiert, ist weder ihr Ausdruck durch Stimme oder Gebärde, noch das Gefühl der Befriedigung oder ähnliches; sondern ihre Bestätigung in der Verwendung des Bewiesenen.

Man kann mit Recht fragen, welche Wichtigkeit Gödel's Beweis für unsre Arbeit habe. Denn ein Stück Mathematik kann Probleme von der Art, die *uns* beunruhigen, nicht lösen. – Die Antwort ist: daß die *Situation* uns interessiert, in die ein solcher Beweis uns bringt. ›Was sollen wir nun sagen?‹ – das ist unser Thema.

MS 124, p. 94

meio demonstrado a sua dedutibilidade, mas também demonstrado uma proposição que pode ser expressa segundo aquela regra de tradução: esta proposição aritmética (a saber, a nossa) não é derivável.'

O que deveria ser feito agora? Imagino que nós botamos fé na nossa *construção* do *sinal proposicional*, portanto na demonstração *geométrica*. Nós dizemos, portanto, que esta 'figura proposicional' é alcançável a partir daquela assim e assim. E transferir, agora, para uma outra notação significa: este algarismo pode ser alcançado a partir daqueles mediante estas

MS 124, p. 91

operações. Até aqui a proposição e a sua demonstração não tem nada a ver com uma *lógica* em particular. Aqui a proposição construída era simplesmente um outro modo de anotação do algarismo construído; ela tinha a *forma* de uma proposição, mas nós não a comparamos com outras proposições como um sinal que *diz* isto ou aquilo, que tem um *sentido*.

Mas deve-se admitidamente dizer que aquele sinal não precisa ser visto nem como sinal proposicional, nem como sinal numérico. – Pergunte para si mesmo: o que o torna em um, e o que o torna no outro?

Se agora lemos a proposição construída (ou o algarismo) como proposição da linguagem matemática (em português, digamos), então ela fala o contrário do que consideramos como demonstrado. Nós então teremos demonstrado o sentido real da proposição

MS 124, p. 92

como falso e a teremos, ao mesmo tempo, *demonstrado* – a saber, se consideramos a sua construção como demonstração a partir dos axiomas admitidos e por meio das regras de inferência permitidas.

Se alguém nos tivesse objetado que não poderíamos ter feito tais *suposições*, pois se tratam de suposições *lógicas* ou *matemáticas*, então responderíamos que só é necessário supor que alguém tenha feito um erro de cálculo e *desta maneira* ter chegado ao resultado que 'assumimos', e que por enquanto ele não pode encontrar este erro de cálculo.

MS 124, p. 93 [359]

Retornamos aqui novamente à expressão "a demonstração nos convence". E o que aqui nos interessa sobre o convencimento não é nem sua expressão mediante voz ou gesto, nem o sentimento de satisfação ou coisas afins; senão a sua corroboração pelo emprego do que foi demonstrado.

Pode-se com razão perguntar que importância tem a prova de Gödel para o nosso trabalho. Pois uma parte da matemática não pode resolver problemas do tipo que *nos* inquietam. – A resposta é: que nos interessa a *situação* em que uma prova como essa nos coloca. 'O que devemos dizer agora?' – este é o nosso tema.

So seltsam es klingt, so scheint meine Aufgabe, das Gödelsche Theorem betreffend, bloß darin zu bestehen, klar zu stellen, was in der Mathematik so ein Satz bedeutet, wie: »angenommen, man könnte dies beweisen«.

23. Es kommt uns viel zu selbstverständlich vor, daß wir »wieviele?« fragen und darauf zählen und rechnen!

Zählen wir, weil es praktisch ist zu zählen? Wir zählen! – Und so rechnen wir auch.

Man kann auf Grund eines Experiments – oder wie man es sonst nennen will – manchmal die Maßzahl des Gemessenen, manchmal aber auch das geeignete Maß bestimmen.

MS 124, p. 95

So ist also die Maßeinheit das Resultat von Messungen? Ja und nein. Nicht das Messungsresultat, aber vielleicht die *Folge* von Messungen.

Es wäre *eine* Frage: »hat uns die Erfahrung gelehrt, *so* zu rechnen?« – und eine andre: »ist die Rechnung ein Experiment?«

24. Aber läßt sich nicht alles aus allem nach irgendeiner Regel – ja nach *jeder* Regel mit entsprechender Deutung – ableiten? Was heißt es, wenn ich, zum Beispiel, sage: diese Zahl läßt sich durch Multiplikation aus jenen beiden ableiten? Frage dich: Wann gebraucht man diesen Satz? Nun, es ist z. B. kein psychologischer Satz, der sagen soll, was Menschen unter gewissen Bedingungen tun werden, was sie befriedigen wird; es ist auch kein physikalischer, das Benehmen von Zeichen auf dem Papier

MS 124, p. 96

betreffend. Es wird nämlich in einer andern Umgebung, als ein psychologischer, oder physikalischer, angewandt.

Nimm an, Menschen lernen rechnen, ungefähr, wie sie es tatsächlich tun; aber stell dir nun verschiedene ›Umgebungen‹ vor, die das Rechnen einmal zu einem psychologischen Experiment, einmal zu einem physikalischen mit den Rechenzeichen, einmal zu etwas anderem macht!

Wir nehmen an, die Kinder lernen Zählen und die einfachen Rechnungsarten durch Nachahmen, Aufmunterung und Zurechtweisung. Aber von einem gewissen Punkt wird nun die Nichtübereinstimmung der Rechnenden (also etwa die Rechenfehler) nicht als etwas Schlechtes, sondern als etwas psychologisch Interessantes behandelt. »Also das hieltest du damals für richtig?«, heißt es, »wir Andern haben es alle so gemacht.«

MS 124, p. 94

Por mais estranho que possa soar, minha tarefa com relação ao teorema de Gödel parece consistir em meramente esclarecer o que na matemática significa uma proposição tal como: “Suponhamos que se pudesse demonstrar isto”.[360]

23. Parece-nos muito natural perguntar “quantos?” e passarmos a contar e calcular!

Contamos porque contar é prático? Nós contamos! – E assim também calculamos.

Podemos, com base em um experimento – ou como se quiser chamá-lo –, determinar às vezes a medida do que foi medido, mas também às vezes a medida apropriada.

MS 124, p. 95

Então a unidade de medida é o resultado das medições? Sim e não. Não é o resultado da medição, mas talvez a *consequência* de medições.

Seria *uma* pergunta: “A experiência nos ensinou a calcular *assim*?” – e uma outra: “O cálculo é um experimento?”.[361]

24. Mas não se pode derivar tudo de tudo segundo alguma regra – bem, segundo *qualquer* regra com interpretação adequada? O que significa quando, por exemplo, digo: pode-se derivar este número daqueles dois por multiplicação? Pergunte-se: quando se usa esta proposição? Ora, não é, por exemplo, uma proposição psicológica que deve dizer o que as pessoas vão fazer sob certas condições, o que as satisfaria; tampouco seria uma física, que se relacionasse com o comportamento dos sinais sobre

MS 124, p. 96

o papel. Pois é aplicada em um ambiente diferente, diverso do psicológico ou do físico.

Suponha que as pessoas aprendam a calcular mais ou menos como de fato o fazem; mas imagine agora ‘ambientes’ diferentes que tornam o cálculo ora num experimento psicológico, ora num físico com os sinais do cálculo, ora em alguma outra coisa!

Suponhamos que as crianças aprendam a contar, e os tipos simples de cálculo, por imitação, encorajamento e repreensão. Mas agora, a partir de um certo ponto, a discordância daquele que faz o cálculo (portanto, digamos, os erros de cálculo) passa a ser tratada não como algo ruim, mas como algo psicologicamente interessante. “Daí você achou que isto estava certo naquela hora?” significa “Todos nós fizemos assim.”

MS 124, p. 97

MS 124, p. 97

Ich will sagen: daß das, was wir Mathematik, die *mathematische* Auffassung des Satzes 13 x 14 = 182, nennen, mit der besondern Stellung zusammenhängt, die wir zu der Tätigkeit des Rechnens einnehmen. Oder, die besondere Stellung, die die Rechnung ... in unserm Leben, in unsern übrigen Tätigkeiten hat. Das Sprachspiel in dem sie steht.

Man kann ein Musikstück auswendig lernen, um es richtig spielen zu können; aber auch in einem psychologischen Experiment, um das Arbeiten des musikalischen Gedächtnisses zu untersuchen. Man könnte es aber auch dem Gedächtnis einprägen, um dadurch irgendwelche Veränderungen in der Partitur zu beurteilen.

25. Ein Sprachspiel: Ich rechne Multiplikationen und sage dem Andern: wenn du richtig rechnest wird das und das herauskommen; worauf er die Rechnung ausführt und sich der Richtigkeit,

MS 124, p. 98

und manchmal der Falschheit, meiner Voraussage freut. Was setzt dieses Sprachspiel voraus? Daß ›Rechenfehler‹ leicht zu finden sind und immer Übereinstimmung über Richtigkeit, oder Falschheit der Rechnung rasch erzielt wird.

»Wenn du mit jedem Schritt übereinstimmen wirst, wirst du zu diesem Resultat gelangen.«

Was ist das Kriterium dafür, daß ein Schritt der Rechnung richtig ist; ist es nicht, daß mir der Schritt richtig erscheint, und anderes von der gleichen Art?

Was ist das Kriterium dafür, daß ich zweimal die gleiche Ziffer herausrechne? Ist es nicht, daß mir die Ziffern gleich *erscheinen*, und ähnliches?

Was ist das Kriterium dafür, daß ich hier dem Paradigma gefolgt bin?

MS 124, p. 99

»Wenn du sagen wirst, daß jeder Schritt richtig ist, wird das herauskommen.«

Die Voraussage ist eigentlich: du wirst, wofern du dein Tun für richtig hältst, *das* tun.

Du wirst, wofern du jeden Schritt für richtig hältst, diesen Weg gehen. – Daher auch zu diesem Ende gelangen.

Ein *logischer* Schluß wird gezogen, wenn keine Erfahrung dem Schlußresultat widerstreiten kann, sie widerstreite denn den Prämissen. D. h., wenn der Schluß nur eine Bewegung in den Mitteln der Darstellung ist.

Quero dizer: que o que chamamos de matemática, a concepção *matemática* da proposição 13 x 14 = 182, está ligado com a posição particular que ocupamos na atividade do cálculo. Ou a posição particular que o cálculo de ... tem na nossa vida e no resto das nossas atividades. O jogo de linguagem em que ele se situa.

Pode-se aprender de cor uma peça musical para poder tocá-la corretamente; mas também aprender um experimento psicológico para investigar o trabalho da memória musical. Mas poder-se-ia também marcá-la na memória para avaliar qualquer alteração na partitura.

25. Um jogo de linguagem: eu faço multiplicações e digo a um outro: se você calcular corretamente vai chegar a isto e isto; então ele efetua o cálculo e se rejubila com a correção,

MS 124, p. 98

e às vezes com a falsidade das minhas previsões. O que pressupõe este jogo de linguagem? Que ‘erros de cálculo’ são fáceis de achar, e que a concordância sobre a correção ou falsidade do cálculo é sempre alcançada rapidamente.

“Se você concordar com cada passo, vai conseguir chegar a esse resultado.”

Qual é o critério para que um passo do cálculo esteja correto; não é o de que o passo me pareça correto, e outras coisas do mesmo tipo?

Qual é o critério para que eu calcule o mesmo algarismo duas vezes? Não é o de que os algarismos me *pareçam* iguais, e coisas assim?

Qual é o critério para que eu tenha seguido aqui o paradigma?

MS 124, p. 99

“Se você disser que cada passo está correto, este é o resultado que vai dar.”

A previsão propriamente é: na suposição de que você tome o que fizer como correto, *isto* é o que vai fazer.

Você vai, na suposição de que tome como correto cada passo, seguir este caminho. – Daí também conseguir chegar a este fim.

Tira-se uma conclusão *lógica* se nenhuma experiência puder contradizer o resultado final, pois então ela contradiria as premissas. Ou seja, quando a conclusão é só um movimento nos meios de apresentação.

26. In einem Sprachspiel werden Sätze gebraucht; Meldungen, Befehle und dergleichen. Und nun

MS 124, p. 100

werden auch Rechensätze von den Personen verwendet. Sie sagen sie etwa zu sich selbst, zwischen den Befehlen und Meldungen.

Ein Sprachspiel, in dem Einer nach einer Regel rechnet und nach den Rechnungsresultaten Steine eines Baues setzt. Er hat gelernt, mit Schriftzeichen nach Regeln zu operieren. – Wer den Vorgang dieses Lehrens und Lernens beschreibt hat alles gesagt, was sich über das richtige Handeln nach der Regel sagen läßt. Wir können nicht weiter gehen. Es nützt, z. B., nichts, zum Begriff der Übereinstimmung zurückzugehen, weil es nicht sicherer ist, daß eine Handlung mit einer andern übereinstimmt, als, daß sie einer Regel gemäß geschehen ist. Es beruht ja, nach einer Regel vorgehen,

MS 124, p. 101

auch auf einer Übereinstimmung.

Wie gesagt, worin einer Regel richtig folgen besteht, kann man nicht *näher* beschreiben, als dadurch, daß man das *Lernen* des ›Vorgehens nach der Regel‹ beschreibt. Und diese Beschreibung ist eine alltägliche, wie die des Kochens und Nähens, etwa. Sie setzt schon soviel voraus, wie diese. Sie unterscheidet Eins vom Andern, informiert also einen Menschen, der etwas ganz bestimmtes nicht weiß. (Vgl. Bemerkung: die Philosophie verwende keine vorbereitende Sprache etc.)

Denn wer mir beschreibt, wie Leute zum Befolgen einer Regel abgerichtet werden und wie sie richtig drauf reagieren, wird selbst in der Beschreibung den Ausdruck einer Regel verwenden und sein Verständnis bei mir

MS 124, p. 102

voraussetzen.

Wir haben also jemand die Technik des Multiplizierens beigebracht. Daher verwenden wir Ausdrücke der Zustimmung und der Zurückweisung. Wir werden ihm auch manchmal das *Ziel* der Multiplikation anschreiben. »Das mußt du erhalten, wenn es richtig sein soll«, können wir ihm sagen.

Kann nun der Schüler aber widersprechen und sagen: »Woher weißt du das? Und ist, was du willst, daß ich der Regel folgen soll, oder daß ich dies Resultat erhalten soll? Denn die beiden brauchen ja nicht zusammenzutreffen.« Nun, wir nehmen nicht an, daß der Schüler das sagen kann; wir nehmen an, daß er die Regel von beiden Seiten her gelten läßt. Daß er den einzelnen

26. Em um jogo de linguagem são usadas sentenças; relatos, ordens e coisas semelhantes. E agora

MS 124, p. 100

são empregadas também pelas pessoas proposições de cálculo. Elas as dizem para si mesmas, digamos, entre as ordens e relatos.

Um jogo de linguagem no qual alguém calcula segundo uma regra e coloca as pedras de uma construção segundo os resultados do cálculo. Ele aprendeu a operar com sinais escritos segundo regras. – Quem descreve o processo deste ensino e aprendizado diz tudo o que se pode dizer sobre a ação correta segundo a regra. Nós não poderíamos ir mais longe. De nada serve, por exemplo, retornar ao conceito de concordância, porque não é mais seguro que uma ação tenha concordado com uma outra do que se ela tenha ocorrido em conformidade com uma regra. O procedimento baseado segundo uma regra

MS 124, p. 101

é também baseado em uma concordância.

Como disse, aquilo em que consiste o seguimento correto de uma regra não pode ser decrito *mais de perto* do que a descrição do *aprendizado* do ‘procedimento segundo a regra’. E esta é uma descrição do cotidiano, como a do cozinhar e do costurar, por exemplo. Ela já pressupõe tanto quanto estas. Ela diferencia uns dos outros, e portanto passa informação para uma pessoa que ainda não conhece totalmente alguma determinada coisa. (Compare com a observação: a filosofia não emprega nenhuma linguagem preparatória etc.)[362]

Pois quem me descreve como as pessoas que seguem uma regra são adestradas e como elas reagem corretamente ao adestramento, emprega em si mesmo, na descrição, a expressão de uma regra e pressupõe da minha parte

MS 124, p. 102

a sua compreensão.

Assim é que instruímos alguém na técnica da multiplicação. Para isto empregamos expressões de aprovação e de rejeição. Anotaremos também para ele algumas vezes a *finalidade* da multiplicação. “Você tem que obter isto, quando isto está correto”, poderíamos lhe dizer.

Mas o aluno agora pode contestar e dizer: “Como você sabe disto? E o que você quer é que eu deva seguir a regra ou que eu deva obter este resultado? Pois os dois não precisam de fato coincidir.” Ora, não assumimos que o aluno possa dizer isto; assumimos que ele permite que a regra valha dos dois lados. Que ele conceba o passo individual e a imagem do cálculo – e, portanto, o seu resultado – como critérios de correção, e que, quando estes não estão de acordo, Schritt und das Rechnungsbild – und also das Rechnungsresultat – als Kriterien der Richtigkeit auffaßt, und daß, wenn diese nicht übereinstimmen, er an eine Verwirrung

MS 124, p. 103

der Sinne glaubt.

27. Ist es nun denkbar, daß einer der Regel richtig folgt und zu verschiedenen Malen beim Multiplizieren 15 x 13 doch verschiedenes errechnet? Das kommt darauf an, *welche Kriterien* man für das richtige Folgen gelten läßt. In der Mathematik ist das Resultat selbst auch ein Kriterium des richtigen Rechnens. Da ist es also undenkbar, der Regel richtig zu folgen und verschiedene Rechnungsbilder zu erzeugen.

Das Nicht-Geltenlassen des Widerspruchs charakterisiert die Technik unserer Verwendung unserer Wahrheitsfunktionen. Lassen wir den Widerspruch in unsern

MS 124, p. 104

Sprachspielen gelten, so ändern wir jene Technik – so, als gingen wir davon ab, eine doppelte Verneinung als Bejahung anzusehen. Und diese Änderung wäre von Bedeutung, da die Technik unserer Logik ihrem Charakter nach zusammenhängt mit der Auffassung der Wahrheitsfunktionen.

»Die Regeln zwingen mich zu etwas«, nun das kann man schon sagen, weil, was mir mit der Regel übereinzustimmen scheint, ja nicht von meiner Willkür abhängt. Daher kann es ja geschehen, daß ich die Regeln eines Brettspiels ersinne und nachträglich herausfinde, daß in diesem Spiel wer anfängt gewinnen *muß*. Und so ähnlich ist es ja, wenn ich finde, daß die Regeln zu einem Widerspruch führen.

Ich bin nun gezwungen anzuerkennen, daß das eigentlich kein Spiel ist.

MS 124, p. 105

›Die Regeln des Multiplizierens, einmal aufgenommen, zwingen mich nun anzuerkennen, daß . . . x ... gleich ... ist.‹ Angenommen, daß es mir unangenehm wäre, diesen Satz anzuerkennen. Soll ich sagen: »Nun, das kommt von dieser Art Abrichtung. Menschen, die so abgerichtet, so konditioniert, sind, kommen dann in solche Schwierigkeiten.«?

›Wie zählt man im Dezimalsystem?‹ – »Wir schreiben auf 1, 2, auf 2, 3 ... ... auf 13, 14 ... auf 123, 124, *usf.*« – Das ist eine Erklärung für den, der zwar irgendetwas nicht wußte, das ›usf.‹ aber verstand. Und es verstehen, heißt, es nicht als Abkürzung verstehen: es heißt *nicht*, daß er jetzt im Geiste eine viel längere Reihe als die meiner Beispiele sieht. Daß er es versteht, zeigt sich darin, daß er nun gewisse Anwendungen macht, in gewissen Fällen

MS 124, p. 106

ele acredite em uma

MS 124, p. 103

confusão dos sentidos.

27. Seria imaginável agora que alguém que estivesse seguindo a regra corretamente e, no entanto, ao multiplicar 15 x 13 em diferentes vezes, efetuasse de maneiras diferentes? Isto depende de *que critérios* valem para o seguimento correto. Na matemática, o próprio resultado é também um critério do cálculo correto. Aqui é portanto inimaginável seguir a regra corretamente e produzir diferentes imagens de cálculo.

A inadmissibilidade da contradição caracteriza a técnica do nosso emprego das nossas funções de verdade. Se admitíssemos a contradição nos nossos

MS 124, p. 104

jogos de linguagem, modificaríamos esta técnica – como se nos abstivéssemos de considerar a dupla negação como afirmação. E esta mudança seria significativa, pois a técnica da nossa lógica se conecta, no seu caráter, com a concepção de funções de verdade.[363]

“As regras me obrigam a alguma coisa”, bem, pode-se dizer isto porque o que parece concordar com a regra não depende do meu arbítrio. Por isto, pode acontecer que eu invente as regras de um jogo de tabuleiro e descubra depois que neste jogo quem começa *tem que* ganhar. E isto é bem similar a quando descubro que as regras levam a uma contradição.

Agora sou obrigado a reconhecer que isto não é propriamente um jogo.

MS 124, p. 105

‘As regras da multiplicação, uma vez admitidas, me obrigam a reconhecer que ... x ... é igual a ...’. Suponhamos que fosse desagradável reconhecer esta proposição. Devo dizer: “Ora, isto vem deste tipo de adestramento. As pessoas que são adestradas assim, que são assim condicionadas, passam a ter estas dificuldades.”?

‘Como se conta no sistema decimal?’ – “Nós escrevemos 2 depois de 1, 3 depois de 2, ..., 14 depois de 13 ..., 124 depois de 123, *e assim por diante*.” – Esta é uma explicação para aquele que, mesmo que não soubesse alguma coisa, compreendia no entanto o ‘e assim por diante.’ E compreender isto significa não compreendê-lo como abreviação: *não* significa que ele agora enxerga no espírito uma série muito maior do que a do meu exemplo. Que ele o compreende se mostra em que ele faz agora certas aplicações, em certos casos

MS 124, p. 106

diz *isto* e age *assim*.

dies sagt und *so* handelt.

»Wie zählen wir im Dezimalsystem?« – … … … – Nun, ist das keine Antwort? – Aber nicht für den, der das ›usf.‹ nicht verstand. – Aber kann unsere Erklärung es ihm nicht begreiflich gemacht haben? Kann er durch sie nicht die Idee der Regel erhalten haben? – Frage dich, was die Kriterien dafür sind, daß er diese Idee nun erhalten hat.

Was zwingt mich denn? – Der Ausdruck der Regel? – Ja; wenn ich einmal so erzogen bin. Aber kann ich sagen, er zwingt mich, ihm zu folgen? Ja; wenn man sich hier die Regel nicht als Linie denkt, der ich nachfahre, sondern als Zauberspruch, der uns im Bann hält.

[»schlichten Unsinn, und Beulen … «]

28. Warum soll man nicht sagen,

MS 124, p. 107

der Widerspruch, z. B.: ›heteronom‹ ε heteronom ≡ ~ (›heteronom‹ ε heteronom), zeige eine logische Eigenschaft des Begriffs ›heteronom‹?

»›Zweisilbig‹ ist heteronom«, oder »›dreisilbig‹ ist nicht heteronom« sind Erfahrungssätze. Es könnte in irgendeinem Zusammenhang wichtig sein, herauszufinden, ob Eigenschaftswörter die Eigenschalten besitzen, die sie bezeichnen, oder nicht. Man gebraucht dann in einem Sprachspiel das Wort »heteronom«. Aber soll nun der Satz »›h‹ ε h« ein Erfahrungssatz sein? Er ist es offenbar nicht und wir würden ihn auch, wenn wir den Widerspruch nicht gefunden haben, nicht als einen Satz in unserm Sprachspiel zulassen.

›h‹ ε h ≡ ~ (›h‹ ε h) könnte man ›eine wahre Kontradiktion‹ nennen. – Aber diese Kontradiktion ist doch kein sinnvoller Satz! Wohl, aber die Tautologien der Logik sind es ja

MS 124, p. 108

auch nicht.

»Die Kontradiktion ist wahr« heißt hier: sie ist bewiesen; abgeleitet aus den Regeln für das Wort »h«. Ihre Verwendung ist, zu zeigen, daß »›h‹« ein Wort ist, welches in ›ξ ε h‹ eingesetzt keinen Satz ergibt.

»Die Kontradiktion ist wahr« heißt: Das ist wirklich ein Widerspruch, und du darfst also das Wort »›h‹« als Argument von ›ξ ε h‹ nicht verwenden.

29. Ich bestimme ein Spiel und sage: »Machst du diese Art Zug, so ziehe ich *so*, machst du jene, so ziehe ich *so*. – Jetzt spiele!« Und nun macht er einen Zug, oder etwas, was ich auch als Zug anerkennen muß und wenn ich nach meinen Regeln daraufhin ziehen will, so erweist sich, was immer ich tue, als den Regeln nicht gemäß.

"Como contamos no sistema decimal?" – … … … – Bem, isto não é uma resposta? – Mas não é para aquele que não compreende o 'e assim por diante'. Mas a nossa explicação pode não ter deixado isto claro para ele? Ele pode não ter pego por ela a ideia da regra? – Pergunte a si mesmo quais são os critérios para que ele pegue esta ideia agora.

O que me obriga, então? – A expressão da regra? – Sim; se alguma vez fui instruído assim. Mas posso dizer que ela me obriga a segui-la? Sim; se não pensamos aqui na regra como uma linha pela qual me guio, mas como fórmula mágica que nos mantém encantados.

["Simples contrassenso, e calombos..."][364]

28. Por que não se deve dizer

MS 124, p. 107

que a contradição, por exemplo: 'heterológico' ε heterológico ≡ ~ ('heterológico' ε heterológico), mostra uma propriedade lógica do conceito 'heterológico'?[365]

"'Dissílabo' é heterológico" ou "'trissílabo' não é heterológico" são proposições empíricas. Poderia ser importante em algum contexto descobrir se os adjetivos possuem as propriedades que eles designam ou não. Usamos, então, a palavra "heterológico" em um jogo de linguagem. Mas agora a proposição »›h‹ ε h« deve ser uma proposição empírica? Evidentemente, ela não o é, e, se não tivéssemos descoberto a contradição, tampouco a permitiríamos como uma proposição do nosso jogo de linguagem.

Poderíamos chamar 'h' ε h ≡ ~ ('h' ε h) de 'uma verdadeira contradição'. – Mas esta contradição não é uma sentença que faça sentido! Bem, mas as tautologias da lógica tampouco

MS 124, p. 108

o fazem.

"A contradição é verdadeira" significa aqui: ela está demonstrada; derivada das regras para a palavra "h". O seu emprego serve para mostrar que "'h'" é uma palavra que, quando está inserida em 'ξ ε h', não gera uma proposição.

"A contradição é verdadeira" significa: isto é realmente uma contradição e você não pode, portanto, empregar a palavra "'h'" como argumento de 'ξ ε h'.

29. Eu defino um jogo e digo: "Se você fizer este tipo de lance, então eu movo *assim*, se você fizer aquele, então eu movo *assim*. – Agora, jogue!" E agora ele faz um lance, ou alguma coisa que eu tenho que reconhecer como um lance, e quando eu quero mover, logo a seguir, segundo as minhas regras, então se comprova que qualquer coisa que eu faça não está em conformidade com as regras.

MS 124, p. 109

Wie konnte das geschehen? Als ich Regeln aufstellte, da *sagte* ich etwas: Ich folgte einem gewissen Brauch. Ich sah nicht voraus, was wir weiter tun würden, oder sah nur eine bestimmte Möglichkeit. Es war nicht anders, als hätte ich Einern gesagt: »Gib das Spiel auf; mit diesen Figuren kannst du nicht matt setzen« und hätte eine bestehende Möglichkeit des Mattsetzens übersehen.

Die verschiedenen, halb scherzhaften, Einkleidungen des logischen Paradoxes sind nur insofern interessant als sie einen daran erinnern, daß eine ernsthafte Einkleidung des Paradoxes von Nöten ist, um seine Funktion eigentlich zu verstehen. Es fragt sich: Welche Rolle kann ein solcher logischer Irrtum

MS 124, p. 110

in einem Sprachspiel spielen?

Man gibt jemandem etwa Instruktionen, wie er in dem und dem Fall zu handeln hat; und diese Instruktionen erweisen sich später als *unsinnig*.

30. Das logische Schließen ist ein Teil eines Sprachspiels. Und zwar folgt, der im Sprachspiel logische Schlüsse ausführt, gewissen Instruktionen, die beim Lernen des Sprachspiels selber gegeben wurden. Baut der Gehilfe etwa nach gewissen Befehlen ein Haus, so hat der das Herbeitragen der Baustoffe etc. von Zeit zu Zeit zu unterbrechen und gewisse Operationen mit Zeichen auf einem Papier auszuführen; worauf er, dem Resultat entsprechend, wieder seine Bauarbeit aufnimmt.

MS 124, p. 111

Denke dir einen Vorgang, in welchem jemand, der einen Karren schiebt daraufgekommen ist, daß er die Radachse reinigen muß, wenn der Karren sich zu schwer schieben läßt. Ich meine nicht, daß er zu sich sagt: »immer, wenn der Karren sich nicht schieben läßt, ... «. Sondern er *handelt* einfach so. Und nun kommt er darauf einem Andern zuzurufen: »Der Karren geht nicht; reinige die Achse!«, oder auch: »Der Karren geht nicht. Also muß die Achse gereinigt werden.« Nun das ist ein Schluß. Kein logischer, freilich.

Kann ich nun sagen: “Der nicht-logische Schluß kann sich als falsch erweisen; der logische nicht”?

Ist der logische Schluß richtig, wenn er den Regeln gemäß gezogen wurde; oder, wenn er *richtigen* Regeln ge-

MS 124, p. 112

mäß gezogen wird? Wäre es z. B. falsch, wenn man sagte, aus ~ p solle immer p gefolgert werden? Aber warum soll man nicht lieber sagen: so eine Regel gäbe den Zeichen ›~ p‹ und ›p‹ nicht

MS 124, p. 109

Como isto poderia acontecer? Quando estabeleci as regras, *disse* algo: seguia uma certa praxe. Não pressupunha o que faríamos além disso, ou só via uma determinada possibilidade. Foi como se eu tivesse dito para alguém: “Abandone o jogo; você não pode dar xeque-mate com estas peças”, e tivesse negligenciado uma possibilidade existente de xeque-mate.

As diferentes vestimentas, meio jocosas, do paradoxo lógico só são interessantes na medida em que lembram a alguém que uma vestimenta séria do paradoxo é necessária para se compreender realmente a sua função. Pergunte a si mesmo: que papéis pode jogar um

MS 124, p. 110

erro lógico assim num jogo de linguagem?

Dá-se instruções para alguém, digamos, sobre como ele tem que agir em tal e tal caso; e estas instruções se comprovam mais tarde como *contrassensos*.

30. A inferência lógica é uma parte de um jogo de linguagem. A saber, quem cumpre inferências lógicas no jogo de linguagem, segue certas instruções que lhes foram dadas pela aprendizagem do jogo. Se o servente constrói uma casa, digamos, segundo certas ordens, ele tem que interromper de tempos em tempos o carregamento de materiais de construção e executar certas operações com sinais sobre o papel; depois ele retoma o seu trabalho de construção, de acordo com o resultado.

MS 124, p. 111

Imagine um processo em que alguém que empurra uma carroça tem a ideia de que tem que limpar o eixo da roda quando a carroça fica difícil de empurrar. Não quero dizer que ele tenha dito para si mesmo: “Sempre que a corroça fica difícil de empurrar, ...”. Mas que simplesmente *age* assim. Agora ocorre que ele exclama para um outro: “A carroça não anda; limpe o eixo!”, ou então: “A carroça não anda. Portanto, o eixo tem que ser limpo.” Ora, isto é uma inferência. Mesmo que não lógica, admitidamente.[366]

Posso dizer agora: “A inferência não-lógica pode comprovar-se como falsa; e a lógica, não”?

A inferência lógica é correta quando é feita em conformidade com as regras; ou quando é feita em conformidade

MS 124, p. 112

com as regras *corretas*? Seria falso se disséssemos, por exemplo, de ~p conclui-se sempre que p? Mas por que não se deve em vez disto dizer: uma regra assim não dá aos sinais ‘~p’ e ‘p’ o seu ihre gewöhnliche Bedeutung?

Man kann es so auffassen – will ich sagen –, daß die Schlußregeln den Zeichen ihre Bedeutung geben, weil sie Regeln der Verwendung dieser Zeichen sind. Daß die Schlußregeln zur Bestimmung der Bedeutung der Zeichen gehören. In diesem Sinne können die Schlußregeln nicht falsch oder richtig sein.

A hat beim Bau die Länge und Breite einer Fläche gemessen und gibt dem B den Befehl: »Bring 15 x 18 Platten.« Bist dazu abgerichtet zu multiplizieren und dem Resultat entsprechend eine Menge von Platten abzuzählen.

Der Satz ›15 x 18 = 270‹ braucht

MS 124, p. 113

natürlich nie ausgesprochen zu werden.

Man könnte sagen: Experiment-Rechnung sind Pole, zwischen welchen sich menschliche Handlungen bewegen.

31. Wir konditionieren einen Menschen in dieser und dieser Weise; wirken dann auf ihn durch eine Frage ein; und erhalten ein Zahlzeichen. Dieses verwenden wir weiter zu unsern Zwecken und es erweist sich als praktisch. Das ist das Rechnen. – Noch nicht! Dies könnte ein sehr *zweckmäßiger* Vorgang sein – muß aber nicht sein, was wir ›Rechnen‹ nennen. Wie man sich denken könnte, daß zu Zwecken, denen heute unsre Sprache dient, Laute ausgestoßen wurden, die doch keine Sprache bildeten.

Zum Rechnen gehört, daß alle die richtig rechnen dasselbe Rechnungsbild erzeugen. Und ›richtig rechnen‹ heißt nicht: bei klarem Verstande, oder ungestört rechnen, sondern *so* rechnen.

MS 124, p. 114

Jeder mathematische Beweis gibt dem mathematischen Gebäude einen neuen Fuß. (Ich dachte an die Füße eines Tisches.)

32. Ich habe mich gefragt: Ist Mathematik mit rein phantastischer Anwendung nicht auch Mathematik? – Aber es fragt sich: Nennen wir es ›Mathematik‹ nicht etwa nur darum, weil es hier Übergänge, Brücken, gibt von der phantastischen zur nichtphantastischen Anwendung? D. h.: würden wir sagen, Leute besäßen eine Mathematik, die das Rechnen, Operieren mit Zeichen *bloß* zu okkulten Zwecken benützten?

significado usual?

Pode-se conceber – gostaria de dizer – que as regras de inferência deem aos sinais o seu significado, porque são regras do emprego destes sinais. Que cabe às regras de inferência a determinação do significado dos sinais. Neste sentido, as regras de inferência não poderiam estar erradas ou corretas.

Numa construção, A mede o comprimento e a largura de uma área e dá a B a ordem: "Traga 15 x 18 chapas." Para isto, B é adestrado a multiplicar e contar a que resultado corresponde um conjunto de placas.[367]

A proposição '15 x 18 = 270', naturalmente,

MS 124, p. 113

nunca precisa ser pronunciada.

Pode-se dizer: experimento-cálculo são polos entre os quais se movem as ações humanas.

31. Condicionamos uma pessoa desta e desta maneira; agimos sobre ela, então, mediante uma questão; e obtemos um sinal numérico. Este em seguida é empregado para os nossos propósitos e isto se comprova como prático. Isto é o cálculo. – Não, ainda não! Isto poderia ser um processo muito *apropriado* – mas não tem que ser o que nós chamamos de 'cálculo'. Como se alguém pudesse imaginar que para os propósitos que hoje servem à nossa linguagem fossem emitidos sons que não conformam nenhuma linguagem.

É próprio do cálculo que todos os cálculos corretos produzam a mesma imagem de cálculo. E 'calcular corretamente' não quer dizer: calcular com uma compreensão clara ou sossegadamente, mas calcular *assim*.

MS 124, p. 114

Toda demonstração matemática dá para o edifício matemático uma nova perna. (Eu pensei nas pernas de uma mesa.)[368]

32. Eu me perguntava: uma matemática com aplicação puramente fantática não é também matemática? – Mas pergunte a si mesmo: não chamamos isto de 'matemática' só porque há, digamos, transições, pontes, da aplicação fantástica para a não-fantástica? Ou seja: nós diríamos que têm uma matemática as pessoas que utilizam o cálculo, operam com sinais, *apenas* para fins ocultos?

33. Aber ist es dann doch nicht unrichtig zu sagen: das der Mathematik *Wesentliche* sei, daß

MS 124, p. 115

sie Begriffe bilde? – Denn die Mathematik ist doch ein anthropologisches Phänomen. Wir können es also als das Wesentliche in einem großen Teil der Mathematik (dessen was ›Mathematik‹ genannt wird) erkennen und doch sagen, es spiele keine Rolle in anderen Gebieten. Diese Einsicht allein wird freilich nicht ohne Einfluß auf die sein, die die Mathematik nun so sehen lernen. Mathematik ist also eine Familie; aber das sagt nicht, daß es uns also gleich sein wird, was alles in sie aufgenommen wird.

Man könnte sagen: Verstündest du *keinen* mathematischen Satz besser als du das Multiplikativ-Axiom verstehst, so verstündest du Mathematik *nicht*.

MS 124, p. 116

34. – Hier ist ein Widerspruch. Aber wir sehen ihn nicht und ziehen Schlüsse aus

MS 124, p. 117

ihm. Etwa auf mathematische Sätze; und auf falsche. Aber wir erkennen diese Schlüsse an. – Und bricht nun eine von uns berechnete Brücke zusammen, so finden wir dafür eine andere Ursache, oder sagen, Gott habe es so gewollt. War nun unsre Rechnung falsch; oder war es keine Rechnung?

Gewiß, wenn wir als Forschungsreisende die Leute beobachten, die es so machen, werden wir vielleicht sagen: diese Leute rechnen überhaupt nicht. Oder: in ihren Rechnungen sei ein Element der Willkür, welches das Wesen ihrer Mathematik von dem der unsern unterscheidet. Und doch würden wir nicht leugnen können, daß die Leute eine Mathematik haben.

Was für Regeln muß der König geben, damit er der unangenehmen Situation von nun an entgeht, in die ihn sein Gefangener gebracht hat? – Was für eine Art Problem ist das? – Es ist doch

MS 124, p. 118

ähnlich diesem: Wie muß ich die Regeln dieses Spiels abändern, daß die und die Situation nicht eintreten kann? Und das ist eine mathematische Aufgabe.

Aber kann es denn eine mathematische Aufgabe sein, die Mathematik zur Mathematik zu machen?

Kann man sagen: »Nachdem dies mathematische Problem gelöst war, begannen die Menschen eigentlich zu rechnen.«?

33. Mas então não é incorreto dizer: que o *essencial* da matemática é que

MS 124, p. 115

ela forma conceitos? – Afinal, a matemática é um fenômeno antropológico. Poderíamos, portanto, reconhecer isto como o essencial em uma grande parte da matemática (daquilo que é chamado de 'matemática'), e ainda dizer que isto não joga nenhum papel em outras áreas. Esta intuição por si só certamente não deixaria de ter influência sobre aqueles que agora aprendem a ver a matemática assim. A matemática é, por conseguinte, uma família; mas isto não diz que seríamos indiferentes quanto a qualquer coisa que nela seja incluída.

Poder-se-ia dizer: se você não compreendesse *nenhuma* proposição matemática melhor do que compreende o axioma multiplicativo, então você *não* compreenderia a matemática.[369]

MS 124, p. 116

34. – Aqui há uma contradição. Mas nós não a vemos e fazemos inferências a partir

MS 124, p. 117

dela. Digamos, sobre proposições matemáticas; e falsas. Mas admitimos estas inferências. – E se agora uma ponte calculada por nós desmorona, buscamos para isto uma outra causa, ou dizemos que Deus assim o quis. O nosso cálculo estava errado; ou ele não era um cálculo?

Certamente se nós, como investigadores de campo, observamos pessoas que fazem isto, talvez digamos: estas pessoas não calculam, em absoluto. Ou: no cálculo deles há um elemento de arbitrariedade que diferencia a natureza da matemática deles da nossa. Mas é claro que não podemos negar que aquelas pessoas têm uma matemática.

Que regras o rei tem que dar para evitar a situação desagradável em que o seu prisioneiro o colocou agora?[370] – Que tipo de problema é este? – Ele é similar,

MS 124, p. 118

é claro, a este: como tenho que modificar as regras deste jogo para que não possa sobrevir tal e tal situação? E esta é uma tarefa matemática.

Mas pode ser, então, uma tarefa matemática fazer da matemática uma matemática?

Pode-se dizer: "Depois que este problema matemático foi resolvido as pessoas começaram realmente a calcular"?

35. Was ist das für eine Sicherheit, wenn sie darauf beruht, daß unsre Banken tatsächlich im allgemeinen nicht von allen ihren Kunden auf einmal überrannt *werden*; aber bankrott würden, wenn es doch geschähe?! Nun es ist eine *andere* Art von Sicherheit als die primitivere; aber es ist doch eine Sicherheit.

Ich meine: wenn nun wirklich in der Arithmetik ein Widerspruch ge-

MS 124, p. 119

funden würde – nun so bewiese das nur, daß eine Arithmetik mit einem *solchen* Widerspruch sehr gute Dienste leisten könnte; und es besser sein wird, wenn wir unsern Begriff der nötigen Sicherheit modifizieren, als zu sagen, das wäre eigentlich noch keine rechte Arithmetik gewesen.

»Aber es ist doch nicht die ideale Sicherreit!« – Ideal, für welchen Zweck?

Die Regeln des logischen Schließens sind Regeln des *Sprachspiels*.

MS 124, p. 120

36. Was für eine *Art* von Satz ist dies: »Die Klasse der Löwen ist doch nicht ein Löwe, die Klasse der Klassen aber eine Klasse«? Wie wird er verifiziert? Wie könnte man ihn *verwenden*? – So viel ich sehe, nur als gramnatischen Satz. Einen darauf aufmerksam zu machen, daß das Wort »Löwe« grundverschieden gebraucht wird von dem Namen eines Löwen; das Gattungswort »Klasse« aber ähnlich wie die Bezeichnung für eine der Klassen, die Klasse Löwe etwa.

Man kann sagen, das Wort »Klasse« werde reflexiv gebraucht, auch wenn man z. B. die Russellsche Theorie der Typen anerkennt. Denn es wird ja doch auch in ihr relexiv verwendet.

Freilich ist, in diesem Sinn zu sagen, die Klasse der Löwen ist kein Löwe etc., ähnlich, als sagte jemand, er habe ein »e« für ein »u« gehalten, wenn er eine Kugel für einen

MS 124, p. 122

Kegel ansieht.

Das plötzliche Umwechseln der Auffassung des Bildes eines Würfels und die Unmöglichkeit ›Löwe‹ und ›Klasse‹ als vergleichbare Begriffe zu sehen.

Der Widerspruch sagt: »Nimm dich in acht ... «.

Wie aber wenn man einem bestimmten Löwen (dem König der Löwen etwa) den Namen »Löwe« gibt? Nun wirst du sagen: aber es ist doch klar, daß im Satz »Löwe ist ein Löwe« das Wort »Löwe« auf zwei verschiedene Arten gebraucht wird. (Logisch-philosophische Abhandlung.) Aber kann ich sie nicht zu *einer* Art des Gebrauchs zählen?

35. Que tipo de garantia é esta que se baseia no fato de que nossos bancos em geral não *são* invadidos por todos os seus clientes de uma só vez; mas vão à bancarrota se isto acontecesse?! Bem, é uma garantia de tipo *diferente* daquela primitiva; mas é uma garantia, de todo modo.

Quero dizer: se agora fosse descoberta realmente uma contradição

MS 124, p. 119

na aritmética – isto só demonstraria que uma aritmética com uma *tal* contradição poderia prestar um serviço muito bom; e ficaria melhor se nós modificássemos o nosso conceito de garantia necessária do que dizer que aquela não seria realmente uma aritmética correta.

“Mas esta não é a garantia ideal, certo?!” – Ideal para que finalidade?

As regras da inferência lógica são regras do *jogo de linguagem*.

MS 124, p. 120 [371]

36. Que *tipo* de proposição é esta: “A classe dos leões não é um leão, mas a classe das classes é uma classe”? Como é que a verificamos? Como poderíamos *empregá-la*? – Até onde posso ver, só como proposição gramatical. Chamar a atenção de alguém para o fato de que o uso da palavra “leão” é fundamentalmente diferente do nome de um leão; mas o nome de espécie “classe” é semelhante à designação de uma das classes, a classe dos leões, digamos.

Pode-se dizer que a palavra “classe” é usada reflexivamente, mesmo quando se admite, por exemplo, a teoria dos tipos de Russell. Pois ela também é empregada reflexivamente ali.[372]

De todo modo, dizer neste sentido que a classe dos leões não é um leão etc. é similar a quando alguém diz que trocou o “p” pelo “s” quando considerou o sino no lugar

MS 124, p. 122

do pino.

A súbita mudança de concepção da imagem de um cubo e a impossibilidade de ver ‘leão’ e ‘classe’ como conceitos comparáveis.[373]

A contradição diz: “Tome cuidado ...”.

Mas como seria se dermos para um determinado leão (para o rei dos leões, digamos) o nome de “Leão”? Então você diria: mas está claro que na proposição “O Leão é um leão” a palavra “leão” é usada de duas maneiras diferentes (Tractatus Logico-Philosophicus.)[374] Mas não

Aber wenn in dieser Weise der Satz »Löwe ist ein Löwe« gebraucht würde: würde ich den auf nichts aufmerksam

MS 124, p. 123

machen, den ich auf die Verschiedenheit der Verwendung der beiden »Löwe« aufmerksam machte?

Man kann ein Tier daraufhin untersuchen, ob es eine Katze ist. Aber den Begriff Katze kann man so jedenfalls nicht untersuchen.

Wenn auch »die Klasse der Löwen ist kein Löwe« wie ein Unsinn erscheint, dem man nur aus Höflichkeit einen Sinn beilegen könne; so will ich diesen Satz doch nicht so auffassen, sondern als einen rechten Satz, wenn er nur richtig aufgefaßt wird. (Also nicht wie in Log. Phil. Abh.) Meine Auffassung ist also hier sozusagen anders. Das heißt, aber, ich sage: es gibt auch ein Sprachspiel mit *diesem* Satz.

»Die Klasse der Katzen ist keine Katze.« – Woher weißt du das?

In der Tierfabel heißt es: »Der Löwe ging mit dem Fuchs spazieren«, nicht ein Löwe mit einem Fuchs; noch auch der Löwe so und so mit dem Fuchs so und so.

MS 124, p. 124

Und hier ist es doch wirklich so, als ob die Gattung Löwe als ein Löwe gesehen würde. (Es ist nicht so, wie Lessing sagt, als ob statt irgendeinem Löwen ein bestimmter gesetzt würde. »Grimmbart der Dachs« heißt nicht: ein Dachs mit Namen »Grimmbart«.)

MS 124, p. 125

Denk dir eine Sprache, in der die Klasse der Löwen »der Löwe aller Löwen« genannt wird, die Klasse der Bäume »der Baum aller Bäume«, etc. – Weil sie sich vorstellen, alle Löwen bildeten *einen* großen Löwen. (Wir sagen: »Gott hat den Menschen geschaffen.«)

Dann könnte jemand das Paradox aufstellen, es gäbe nicht eine bestimmte Anzahl aller Löwen. Etc.

Wäre es aber etwa unmöglich, in so einer Sprache zu zählen und zu rechnen?

37. Man könnte sich fragen: Welche Rolle kann ein Satz, wie »Ich lüge immer« im menschlichen Leben spielen? und da kann man sich Verschiedenes vorstellen.

38. Ist die Umrechnung einer Länge von Zoll auf cm ein logischer Schluß? »Der Zylinder ist 2 Zoll lang. – Also ist er ungefähr 50 mm lang.« Ist das ein *logischer* Schluß?

posso tomá-las para *um* tipo de uso?

Mas se a proposição "O Leão é um leão" fosse usada deste modo: não estaria chamando

MS 124, p. 123

a sua atenção para nada quando chamei a atenção para a diferença de emprego de cada palavra "leão"?

Pode-se investigar um animal para saber se é um gato. Mas o conceito de gato de nenhum modo pode ser investigado assim.

Mesmo que "A classe dos leões não é um leão" pareça ser um contrassenso que somente por cortesia se pode emprestar um sentido; não quero conceber esta proposição deste modo, mas como uma proposição adequada desde que seja concebida corretamente. (Portanto, não como no Tractatus.) Minha concepção aqui é, por assim dizer, outra. Mas isto quer dizer que digo: há também um jogo de linguagem com *esta* proposição.

"A classe dos gatos não é um gato." – Como é que você sabe disto?

Na fábula dos animais lê-se que: "O leão foi passear com a raposa", não um leão com uma raposa; nem sequer o leão tal e qual com a raposa tal e qual.

MS 124, p. 124

E aqui é realmente como se a espécie leão fosse vista como um leão (Não é, como diz Lessing,[375] como se, em vez de um leão qualquer, um determinado fosse posto no lugar. "Barbado, o Texugo" não significa: um texugo com o nome de "Barbado".)

MS 124, p. 125

Imagine uma linguagem em que a classe dos leões é chamada de "o leão de todos os leões", a classe das árvores de "árvore de todas as árvores" etc. – porque eles imaginam que todos os leões formam *um* grande leão. (Nós dizemos: "Deus criou o homem.")

Então alguém poderia estabelecer o paradoxo de que não há um número determinado de todos os leões. Etc.

Mas seria impossível contar e calcular numa linguagem assim?

37. Pode-se perguntar: que papel uma proposição como "Eu sempre minto" pode jogar na vida humana? E aqui pode-se imaginar coisas diferentes.

38. A conversão de um comprimento em polegadas para cm é uma inferência lógica? "O cilindro mede 2 polegadas. – Portanto, tem aproximadamente 50 mm. Isto é uma inferência

MS 124, p. 126

Ja aber ist nicht eine Regel etwas Willkürliches? Etwas, was ich *festsetze*? Und könnte ich festsetzen, daß die Multiplikation 18 x 15 *nicht* 270 ergeben solle? – Warum nicht? – Aber dann ist sie eben nicht nach der Regel geschehen, die ich zuerst festgesetzt, und deren Gebrauch ich eingeübt hatte.

Ist denn etwas, was aus einer Regel folgt, wieder eine Regel? Und wenn nicht, – was für eine Art von Satz soll ich es nennen?

»Es ist den Menschen … unmöglich, einen Gegenstand als von sich selbst verschieden anzuerkennen.« Ja, wenn ich nur eine Ahnung hätte, wie es gemacht wird, – ich versuchte es gleich! – Aber wenn es uns unmöglich ist, einen Gegenstand als von sich selbst verschieden anzuerkennen, so ist es also wohl möglich zwei Gegenstän-

MS 124, p. 127

de als von einander verschieden anzuerkennen? Ich habe also etwa zwei Sessel vor mir und erkenne an, daß es *zwei* sind. Aber da kann ich doch unter Umständen auch glauben, daß es nur *einer* ist; und in *diesem* Sinne kann ich auch einen für zwei halten. – Aber damit erkenne ich doch nicht den Sessel als von sich selbst verschieden an! Wohl; aber dann habe ich auch nicht die zwei als von einander verschieden anerkannt. Wer glaubt, er könne dies tun, und eine Art psychologisches Spiel spielt, der übersetze dies in ein Spiel der Gesten. Wenn er zwei Gegenstände vor sich hat, zeige er mit jeder Hand auf einen von ihnen; gleichsam als wolle er den beiden andeuten, daß sie autonom seien. Hat er nur einen Gegenstand vor sich, so deutet er mit beiden Händen auf ihn um anzudeuten, daß man keinen

MS 124, p. 128

Unterschied zwischen ihm und ihm selbst machen kann. – Warum soll man nun aber nicht das Spiel in umgekehrter Weise spielen?

39. Die Worte »richtig« und »falsch« werden beim Unterricht im Vorgehen nach der Regel gebraucht. Das Wort »richtig« läßt den Schüler gehen, das Wort »falsch« hält ihn zurück. Könnte man nun dem Schüler diese Worte dadurch erklären, daß man statt ihrer setzt: »das stimmt mit der Regel überein – das nicht«?

MS 124, p. 129

Nun, wenn er einen Begriff vom übereinstimmen hat. Aber wie, wenn dieser eben erst gebildet werden muß? (Es kommt darauf an, wie er auf das Wort »übereinstimmen« reagiert.)

Man lernt nicht einer Regel folgen, indem man zuerst den Gebrauch des Wortes »Übereinstimmung« lernt.

Vielmehr lernt man die Bedeutung von »Übereinstimmen«, indem man einer Regel fol-

lógica?[376]

MS 124, p. 126

Sim, mas uma regra não é algo arbitrário? Algo que *estabeleço*? E eu poderia estabelecer que a multiplicação de 18 x 15 *não* deva ser 270? – Por que não? – Mas então ela não aconteceu segundo a regra que estabeleci da primeira vez e cujo uso pratiquei.

Então algo que se segue de uma regra é novamente uma regra? E se não, – de que tipo de proposição devo chamá-la?

"É impossível para as pessoas … reconhecer um objeto como diferente de si mesmo."[377] Bem, se eu tivesse um palpite sobre como se faz isto – tentaria fazer o mesmo! –, mas se é impossível para nós reconhecer um objeto como diferente de si mesmo, então é, por conseguinte, bastante possível reconhecer

MS 124, p. 127

dois objetos como diferentes entre si? Tenho então, digamos, duas cadeiras diante de mim e reconheço que são *duas*. Mas eu posso também acreditar em certas circunstâncias que é só *uma*; e, *neste* sentido, também posso tomar uma por duas. – Mas, com isto, não reconheço a cadeira como diferente de si mesma! Bem; mas então tampouco reconheço as duas como diferentes entre si. Quem acredita que se possa fazer isto está jogando um tipo de jogo psicológico que se traduz em um jogo de gestos. Se tem diante de si dois objetos, então aponta com cada mão para um deles; como se quisesse indicar que os dois são autônomos. Se tivesse diante de si só um objeto, então ele aponta para ele com as duas mãos para indicar que não se pode fazer

MS 124, p. 128

nenhuma diferença entre ele e ele mesmo. – Mas por que não se deve jogar o jogo agora de maneira inversa?

39. As palavras "certo" e "errado" são usadas no ensino da maneira de agir de acordo com a regra. A palavra "certo" permite ao aluno prosseguir, a palavra "errado" o traz de volta. Poderíamos agora explicar estas palavras ao aluno dizendo em vez delas: "Isto concorda com a regra – isto, não"?

MS 124, p. 129

Bem, se ele tiver um conceito de concordância. Mas como seria isto se este tem que ser formado primeiro? (Isto depende de como ele reage à palavra "concordar".)

Não se aprende a seguir uma regra aprendendo primeiro o uso da palavra "concordância".

Em vez disso, aprende-se o significado de "concordância" aprendendo-se a seguir uma regra.

gen lernt.

Wer verstehen will, was es heißt: »einer Regel folgen«, der muß doch selbst einer Regel folgen können.

»Wenn du diese Regel annimmst, *mußt* du das tun.« – Das kann heißen: die Regel läßt dir hier nicht zwei Wege offen. (Ein mathematischer Satz.) Ich meine aber: die Regel führt dich wie

MS 124, p. 130

ein Gang mit festen Mauern. Aber dagegen kann man doch einwenden, die Regel ließe sich auf alle mögliche Weise deuten. – Die Regel steht hier wie ein *Befehl*; und *wirkt* auch wie ein Befehl.

40. Ein Sprachspiel: Etwas *Anderes* bringen; das *Gleiche* bringen. Nun, wir können uns vorstellen, wie es gespielt wird. – Aber wie kann ich's Einern erklären? Ich kann ihm *diesen* Unterricht geben. – Aber wie weiß er dann, was er das nächste Mal als ›Gleiches‹ bringen soll – mit welchem Recht kann *ich* sagen, daß er das richtige, oder falsche, gebracht hat? – Ja ich weiß freilich, daß in gewissen Fällen Menschen mit den Zeichen des Widersprechens auf mich einstürmen würden.

Und heißt das nun etwa, die Definition von »Gleich« wäre die: Gleich sei

MS 124, p. 131

was alle oder die meisten Menschen übereinstimmend so ansehen? – Freilich nicht.

Denn, um Gleichheit zu konstatieren, benütze ich ja natürlich nicht die Übereinstimmung der Menschen. Welches Kriterium verwendest du also? Gar keins.

Das Wort ohne Rechtfertigung zu gebrauchen heißt nicht, es zu Unrecht gebrauchen.

MS 124, p. 132

Das Problem des vorigen Sprachspiels gibt es natürlich auch in dem: Bringe mir etwas Rotes. Denn woran erkenne ich, daß etwas rot ist? An der Übereinstimmung der Farbe mit einem Muster? – Mit welchem Recht sage ich: »Ja, das ist rot.«? Nun, ich sage es; und es läßt sich nicht rechtfertigen. Und auch für dieses Sprachspiel, wie für das vorige, ist es charakteristisch, daß es sich unter der ruhigen Zustimmung aller Menschen vollzöge.

MS 124, p. 133

Ein unentschiedener Satz der Mathematik ist etwas, was weder als Regel, noch als das Gegenteil einer Regel anerkannt ist, und die Form einer mathematischen Aussage hat. – Ist diese Form aber ein klar umschriebener Begriff?

Quem quiser compreender o que significa: “seguir uma regra”, tem que ser capaz, ele mesmo, de seguir uma regra.

“Se você aceita esta regra, então *tem que* fazer isso.” – Isso pode significar: a regra não te deixa aqui dois caminhos abertos. (Uma proposição matemática.) Mas quero dizer: a regra te conduz como

MS 124, p. 130

um corredor com paredes sólidas. Mas contra isto pode-se objetar que a regra se deixa interpretar de todas as maneiras possíveis. – A regra está aqui como uma *ordem*; e também *atua* como uma ordem.

40. Um jogo de linguagem: trazer algo *diferente*; trazer o *mesmo*. Bem, podemos imaginar como se joga. – Mas como posso explicá-lo para alguém? Posso lhe dar *esta* instrução. – Mas como ele vai saber então o que deve trazer da próxima vez como ‘mesmo’ – com que direito *eu* posso dizer-lhe que trouxe isto certo ou errado? – De todo modo, sei que em certos casos as pessoas me bombardeariam com sinais de contrariedade.

E isto agora significa, por exemplo, que a definição de “mesmo” seria: mesmo é

MS 124, p. 131

o que todos ou a maioria das pessoas concordam em ver deste jeito? – Certamente que não.

Pois, para constatar a identidade não utilizo, naturalmente, a concordância das pessoas. Que critério você emprega, então? Absolutamente nenhum.

Usar a palavra sem justificativa não significa usá-la injustamente.

MS 124, p. 132

O problema do jogo de linguagem precedente[378] existe, naturalmente, também em: traga-me algo vermelho. Pois como vou reconhecer que algo é vermelho? Pela concordância da cor com uma amostra? – Com que direito vou dizer: “Sim, isto é vermelho.”? Bem, digo isto; e isto não se pode justificar. E também para este jogo de linguagem, assim como para o precedente, é característico que isto ocorra com o consentimento tranquilo de todas as pessoas.

MS 124, p. 133 [379]

Uma proposição não decidida da matemática é algo que não é reconhecido nem como regra, nem como o oposto de uma regra, e tem a forma de uma asserção matemática. – Mas esta forma é um conceito claramente circunscrito?

Denke dir den $\lim_{n \to \infty} \varphi n = e$ als eine Eigenschaft eines Musikstücks (etwa). Aber natürlich nicht *so*, daß das Stück endlos weiterliefe, sondern als eine dem Ohr erkennbare Eigenschaft (gleichsam *algebraische* Eigenschaft) des Stückes.

MS 124, p. 135

Denk dir Gleichungen als Ornamente (Tapetenmuster) verwendet, und nun eine Prüfung dieser Ornamente daraufhin, welcher Art Kurven sie entsprechen. Die Prüfung wäre analog der, der kontrapunktischen Eigenschaften eines Musikstücks.

MS 124, p. 137

41. Ein Beweis, der zeigt, daß die Figur ›777‹ in der Entwicklung von π vorkommt, aber nicht zeigt wo. Nun, so bewiesen wäre dieser ›Existenzsatz‹ für gewisse Zwecke *keine Regel*. Aber könnte er nicht z.B. als Mittel der Einteilung von Entwicklungsregeln dienen? Es wäre etwa auf analoge Art bewiesen daß ›777‹ in π^2 nicht vorkomme, wohl aber in π x e etc. Die Frage wäre nur: Ist es vernünftig, von dem betreffenden Beweis zu sagen: er beweise

MS 124, p. 138

die Existenz von ›777‹ in dieser Entwicklung? Dies kann einfach irreführend sein. Es ist eben der Fluch der Prosa, und besonders der Russellschen Prosa, in der Mathematik.

Was schadet es, z. B., zu sagen, Gott kenne *alle* irrationalen Zahlen? Oder: sie seien schon alle da, wenn wir auch nur gewisse kennen? Warum sind diese Bilder nicht harmlos?

Einmal verstecken sie gewisse Probleme. –

MS 124, p. 139

Angenommen, die Menschen berechnen die Entwicklung von ϖ immer weiter und weiter. Der allwissende Gott weiß also, ob sie bis zur Zeit des Weltuntergangs zu einer Figur ›777‹ gekommen sein werden. Aber kann seine *Allwissenheit* entscheiden, ob die Menschen nach dem Weltuntergang zu jener Figur gekommen *wären*? Sie kann es nicht. Ich will sagen: Auch Gott kann Mathematisches nur durch Mathematik entscheiden. Auch für ihn kann die bloße Regel des Entwickelns nicht entscheiden, was sie für uns nicht entscheidet.

Man könnte das so sagen: Ist uns die Regel der Entwicklung gegeben, so kann uns nun eine *Rechnung* lehren, daß an der fünften Stelle

MS 124, p. 175

der Ziffer ›2‹ steht. Hätte Gott dies, ohne diese Rechnung, bloß aus der Entwicklungsregel wissen können? Ich will sagen: Nein.

MS 124, p. 176

Imagine o $\lim_{n \to \infty} \varphi n = e$ como uma propriedade de uma peça musical (digamos). Mas naturalmente não *de um modo como* se a peça continuasse indefinidamente, senão como uma propriedade da peça (como se fosse uma propriedade *algébrica*) reconhecível auditivamente.

MS 124, p. 135 [380]

Imagine equações empregadas como ornamentos (padrões de papel de parede), e agora uma checagem destes ornamentos para ver a que tipos de curva eles correspondem. A checagem seria análoga às propriedades contrapontísticas de uma peça musical.

MS 124, p. 137

41. Uma prova que mostra que a figura '777' ocorre na expansão de π, mas que não mostra onde.[381] Ora, demonstrado desta maneira, esta 'proposição existencial' não seria nenhuma regra para certas finalidades. Mas não poderia servir, por exemplo, como meio de classificação das regras de expansão? Seria, por exemplo, demonstrado de maneira análoga que '777' não ocorre em π^2, mas sim em π x e etc. A pergunta seria somente: é razoável dizer sobre a prova em questão: ela demonstra

MS 124, p. 138

a existência de '777' nesta expansão? Isto pode ser simplesmente equivocado. Esta é justamente a maldição da prosa, e particularmente da prosa de Russell, na matemática.

Qual é o dano em dizer, por exemplo, que Deus conhece *todos* os números irracionais? Ou: eles já estão todos lá, mesmo que só conheçamos alguns deles? Por que estas imagens não são inofensivas?

De uma assentada, elas escondem certos problemas. –

MS 124, p. 139

Suponhamos que as pessoas calculem cada vez mais e mais a expansão de π. O Deus onisciente sabe, portanto, se eles terão chegado à figura '777' até o fim do mundo. Mas a sua *onisciência* pode decidir se as pessoas *teriam* chegado àquela figura depois do fim do mundo? Não pode. Gostaria de dizer: até mesmo Deus só pode decidir matematicamente por meio da matemática. Mesmo para ele a mera regra da expansão não pode decidir o que ela não decide para nós.[382]

Poder-se-ia dizer isto assim: se nos foi dada a regra da expansão, um *cálculo* pode nos ensinar que na quinta posição

MS 124, p. 175

está o algarismo '2'. Deus teria podido saber disto sem este cálculo, meramente a partir da regra de expansão? Gostaria de dizer: não.

42. Wenn ich von der Mathematik sagte, ihre Sätze bilden Begriffe, so ist das vag; denn ›2 + 2 = 4‹ bildet einen Begriff in anderem Sinne, als ›$p \supset p$‹, ›$(x) . fx . \supset . fa$‹, oder der Dedekindsche Satz. Es gibt eben eine Familie von Fällen.

Der Begriff der Regel zur Bildung eines

MS 124, p. 139

unendlichen Dezimalbruchs ist – natürlich – kein spezifisch mathematischer. Es ist ein Begriff im Zusammenhang mit einer fest bestimmten *Tätigkeit* im menschlichen Leben. Der Begriff dieser Regel ist nicht mathematischer als der: der Regel zu folgen. Oder auch: dieser letztere ist nicht weniger scharf definiert als der Begriff so einer Regel selbst. – Ja, der Ausdruck der Regel und sein Sinn ist nur ein Teil des Sprachspiels: der Regel folgen.

Man kann mit dem *gleichen* Recht allgemein von solchen Regeln reden, wie von den Tätigkeiten, ihnen zu folgen.

Man sagt freilich »das liegt alles schon in unserm Begriff« von der Regel, z. B. – aber das heißt nun: zu *diesen* Begriffsbestimmungen neigen wir. Denn was haben wir denn im Kopf, was alle diese Bestimmungen schon enthält?!

Die Zahl ist, wie Frege sagt, eine Eigenschaft

MS 124, p. 140

eines Begriffs — aber in der Mathematik ist sie ein Merkmal eines mathematischen Begriffs. $\aleph_0$ ist ein Merkmal des Begriffs der Kardinalzahl; und die Eigenschaft einer Technik. $2\aleph^{\circ}$ ist ein Merkmal des Begriffs des unendlichen Dezimalbruchs, aber wovon ist diese Zahl eine Eigenschaft? D. h.: von welcher Art von Begriff kann man sie empirisch aussagen?

43. Der Beweis des Satzes zeigt mir, was ich auf die Wahrheit des Satzes hin wagen will. Und verschiedene Beweise können mich wohl dazu bringen dasselbe zu wagen.

Das überraschende, Paradoxe, ist paradox nur in einer gewissen, gleichsam mangelhaften Umgebung. Man muß diese Umgebung so ergänzen, daß, was paradox schien, nicht länger so erscheint.

Wenn ich bewiesen habe, daß 18 x 15 = 270 ist, so habe ich damit auch den geome-

MS 124, p. 176 [383]

42. Se dissesse sobre a matemática que as suas proposições formam conceitos, isto seria vago; pois ‘2 + 2 = 4’ forma um conceito em sentido diferente do que ‘$p \supset p$’, ‘$(x) . fx . \supset . fa$’, ou do que o teorema de Dedekind. Ocorre que há uma família de casos.

O conceito da regra para a formação de uma

MS 124, p. 139 [384]

dízima periódica infinita não é – naturalmente – especificamente matemático. É um conceito em conexão com uma *atividade* rigidamente determinada na vida humana. O conceito desta regra não é mais matemático do que: seguir a regra. Ou ainda: este último não é menos precisamente definido do que o próprio conceito de tal regra. – Sim, a expressão da regra e o seu sentido é só uma parte do jogo de linguagem: seguir a regra.

Pode-se com *igual* direito falar em geral destas regras como das atividades de segui-las.

Diz-se, admitidamente, sobre a regra “Tudo isto já está no nosso conceito”, por exemplo – mas isto então significa: nos inclinamos a *estas* determinações do conceito. Pois, o que temos na cabeça que já contém todas estas determinações?!

O número é, como disse Frege, uma propriedade

MS 124, p. 140

de um conceito —[385] mas na matemática ele é um traço de um conceito matemático. $\aleph_0$ é um traço do conceito de número cardinal; e a propriedade de uma técnica. $2\aleph^{\circ}$ é um traço do conceito de dízima periódica infinita, mas de que este número é uma propriedade? Ou seja, de que tipo de conceito se pode asseri-lo empiricamente?[386]

43. A demonstração da proposição me mostra o que quero arriscar sobre a verdade da proposição. E demonstrações diferentes podem muito bem me levar arriscar o mesmo.

O surpreendente, o paradoxal, só é um paradoxo num certo entorno defeituoso, por assim dizer. Este entorno tem que ser complementado de modo que o que parece ser um paradoxo não se pareça mais como tal.

Se demonstrei que 18 x 15 = 270, então também demonstrei do mesmo modo a proposição

MS 124, p. 141

trischen Satz bewiesen, daß man durch Anwendung gewisser Transformationsregeln auf das Zeichen ›18 x 15‹ das Zeichen ›270‹ erhält. – Angenommen nun, die Menschen, durch irgendein Gift am klaren Sehen, oder richtigen Erinnern, gehindert (wie wir uns jetzt ausdrücken wollen) erhielten bei dieser Rechnung nicht ›270‹. – Ist die Rechnung, wenn man nach ihr nicht richtig voraussagen kann, was Einer unter normalen Umständen herausbringen wird, nicht nutzlos? Nun, auch wenn sie es ist, so zeigt das nicht, daß der Satz ›18 x 15 = 270‹ der Erfahrungssatz sei: die Menschen rechneten im allgemeinen *so*.

Anderseits ist es nicht klar, daß die allgemeine Übereinstimmung der Rechnenden ein charakteristisches Merkmal alles dessen ist, was man »Rechnen« nennt. Ich könnte mir denken, daß Leute, die rechnen gelernt haben, unter bestimmten Umständen, etwa

MS 124, p. 142

unter dem Einfluß des Opiums, anfingen, Einer verschieden vom Andern zu rechnen, und von diesen Rechnungen Gebrauch machten; und daß man nun nicht sagte, sie rechneten ja gar nicht und seien unzurechnungsfähig, sondern daß man ihre Rechnungen als berechtigtes Vorgehen hinnähme.

Aber müssen sie nicht wenigstens zum gleichen Rechnen abgerichtet werden? Gehört *das* nicht zum Begriff des Rechnens? Ich glaube, man könnte sich auch da Abweichungen vorstellen.

MS 124, p. 143

44. Kann man sagen, daß die Mathematik eine experimentelle Forschungsweise, Fragestellung, lehrt? Nun, kann man nicht sagen, sie lehre mich z. B. zu fragen, ob ein gewisser Körper sich einer Parabelgleichung gemäß bewegt? – Was tut aber die Mathematik in diesem Fall? Ohne sie oder ohne die Mathematiker wären wir freilich nicht zur Definition dieser Kurve gelangt. War, aber, diese Kurve definieren schon Mathema-

MS 124, p. 144

tik? Bedingte es z. B. Mathematik, wenn Leute die Bewegung von Körpern daraufhin untersuchten, ob ihre Bahn sich durch eine Ellipsenkonstruktion mit einem Faden und zwei Nägeln darstellen lasse? Wer diese Art der Untersuchung erfunden hätte, hätte der Mathematik getrieben?

Er hat doch einen neuen *Begriff* geschaffen. Aber war es auf die Art wie die Mathematik dies tut? War es, wie uns die Multiplikation 18 x 15 = 27 einen neuen Begriff gibt?

45. Kann man also *nicht* sagen, die Mathematik lehrt uns zählen? Wenn sie uns aber zählen lehrt, warum nicht auch Farben miteinander vergleichen?

Es ist klar: wer uns die Ellipsengleichung lehrt, lehrt uns einen neuen Begriff. Wer uns aber beweist, daß *diese* Ellipse und *diese* Gerade sich in *diesen* Punkten schnei-

MS 124, p. 141

geométrica de que, pela aplicação de certas regras de transformação aos sinais '18 x 15', se obtém o sinal '270'. – Suponhamos então que as pessoas foram impedidas, por causa de algum tóxico, de ver claramente ou de ter uma memória correta (como queremos dizer agora), e não obtiveram '270' com este cálculo. – Não é inútil um cálculo se não se pode prever corretamente o que alguém produziria em circunstâncias normais? Ora, mesmo que o seja, isto não mostra que a proposição '18 x 15 = 270' seja a proposição empírica: as pessoas geralmente calculam *assim*.

Por outro lado, não está claro que a concordância geral daqueles que calculam seja um traço característico de tudo aquilo que se chama de "cálculo". Eu poderia imaginar que pessoas que aprenderam a calcular sob determinadas circunstâncias, digamos

MS 124, p. 142

sob a influência do ópio, começassem a calcular um diferente do outro, e a fazer uso destes cálculos; e que não se dissesse que eles não fizeram nenhum cálculo e que estavam incapacidados para calcular, mas que se aceitasse os seus cálculos como procedimento justificado.

Mas eles não teriam que ser pelo menos adestrados no mesmo cálculo? Não é *isto* o que pertence ao conceito de cálculo? Acredito que se poderia imaginar discrepâncias aqui também.

MS 124, p. 143

44. Pode-se dizer que a matemática ensina um modo de pesquisa experimental, de formulação de questões?[387] Bem, não se pode dizer que ela me ensina, por exemplo, a perguntar se um certo corpo se movimenta em conformidade com uma equação parabólica? – Mas o que a matemática faz neste caso? Sem ela, ou sem os matemáticos, certamente não teríamos chegado à definição desta curva. Mas a definição desta curva já era matemá-

MS 124, p. 144

tica? A matemática estaria implicada se, por exemplo, as pessoas investigassem o movimento dos corpos para saber se o seu rastro pode ser representado pela construção de uma elipse feita com uma linha e duas tachinhas? Quem tivesse inventado este tipo de investigação teria exercido a matemática?

Ele, de todo modo, criou um novo *conceito*. Mas seria do mesmo modo como a matemática faz isto? Seria como se a multiplicação 18 x 15 = 270 nos desse um novo conceito?

45. *Não* se pode então dizer que a matemática nos ensina a contar? Mas se ela nos ensina a contar, por que também não a comparar as cores entre si?

Está claro: quem nos ensina a equação da elipse, nos ensina um conceito novo. Mas quem nos demonstra que *esta* elipse e *esta* reta se cortam *nestes*

MS 124, p. 145

den; nun der gibt uns auch einen neuen Begriff.

Uns die Ellipsengleichung lehren ist ähnlich wie, uns zählen lehren. Aber auch ähnlich wie, uns die Frage lehren: »sind hier hundertmal so viel Kugeln als dort?«.

Wenn ich nun jemand in einem Sprachspiele diese Frage und eine Methode sie zu beantworten gelehrt hätte, hätte ich ihn Mathematik gelehrt? Oder nur, wenn er mit Zeichen operiert hat?

(Wäre das etwa als fragte man: »wäre auch das eine Geometrie, die *nur* aus den Euklidischen Axiomen bestünde?«)

MS 124, p. 146

Wenn die Arithmetik uns die Frage »wieviel?« lehrt, warum nicht auch die Frage »wie dunkel?«?

Aber die Frage »sind hier hundertmal so viel Kugeln als dort?« ist doch keine mathematische Frage. Und ihre Antwort kein mathematischer Satz. Eine mathematische Frage wäre: »Sind 170 Kugeln hundertmal soviel als 3 Kugeln?« (Und zwar ist dies eine Frage der reinen, nicht der angewandten Mathematik.)

Soll ich nun sagen, daß, wer uns Dinge zählen lehrt und ähnliches, uns neue Begriffe gibt, und *auch* der, welcher uns reine Mathematik mit solchen Begriffen lehrt?

Ist eine neue Begriffsverknüpfung ein neuer Begriff? Und schafft die Mathematik Begriffsverknüpfungen?

Das Wort »Begriff« ist ganz und gar zu vag.

MS 124, p. 147

Die Mathematik lehrt uns, auf neue Weise mit den Begriffen operieren. Und man kann daher sagen, sie ändert unser begriffliches Arbeiten.

Aber erst der bewiesene, oder als Postulat angenommene mathematische Satz tut das, nicht der problematische.

46. Kann man aber nicht doch mathematisch experimentieren? z. B. versuchen, ob sich aus einem quadratischen Papier ein Katzenkopf falten läßt, wobei die *physikalischen* Eigenschaften des Papiers, seine Festigkeit, Dehnbarkeit, etc., nicht in Frage gezogen werden? Nun man redet

MS 124, p. 145

pontos; este também nos dá um conceito novo.

Ensinar-nos a equação da elipse é similar a nos ensinar a contar. Mas também é similar a nos ensinar a questão: “Existem aqui cem vezes mais bolinhas de gude do que ali?”.

Se houvesse ensinado a alguém esta questão em um jogo de linguagem e um método para respondê-la, haveria lhe ensinado matemática? Ou só se ele operasse com sinais?

(Possivelmente, isto seria como se perguntássemos: “isto seria ainda uma geometria, se *só* consistisse de axiomas euclidianos?”)

MS 124, p. 146 [388]

Se a aritmética nos ensina a pergunta “quantos?”, por que não também a pergunta “quão escuro?”?

Mas a questão “Existem aqui cem vezes mais bolinhas de gude do que ali?” não é de todo modo uma questão matemática. E a sua resposta não é uma proposição matemática. Uma questão matemática seria: “170 bolinhas de gude são cem vezes mais do que 3 bolinhas de gude?” (Especificamente, esta é uma questão da matemática pura, não da aplicada.)

Devo dizer agora que quem nos ensina a contar coisas, e atividades semelhantes, nos dá conceitos novos, e *também* aquele que nos ensina matemática pura com estes conceitos?

Uma nova vinculação com o conceito é um conceito novo? E a matemática cria vinculações conceituais?

A palavra “conceito” é completamente vaga.

MS 124, p. 147

A matemática nos ensina a operar de uma nova maneira com os conceitos. E pode-se, por conseguinte, dizer que ela modifica o nosso trabalho conceitual.

Mas só a proposição matemática demonstrada ou aceita como postulado faz isto, não a problemática.

46. Mas não se pode fazer experimentos matematicamente? Tentar ver, por exemplo, se podemos dobrar na forma de uma cabeça de gato um quadrado de papel, sem que coloquemos em questão as propriedades *físicas* do papel, sua dureza, maleabilidade etc.? Ora, fala-se aqui de doch hier gewiß von einem Versuchen. Und warum nicht von einem Experimentieren? Dieser Fall ist doch ähnlich dem, Zahlenpaare ver-

MS 124, p. 148

suchsweise in die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ einzusetzen, um eines zu finden, das die Gleichung befriedigt. Und kommt man also endlich auf $3^2 + 4^2 = 25$, ist dieser Satz nun das Resultat eines Experiments? Warum nannte man den Vorgang denn ein Versuchen? Hätten wir es auch so genannt, wenn Einer immer aufs erste Mal mit völliger Sicherheit (den Zeichen der Sicherheit) aber ohne Rechnung, solche Probleme löste? Worin bestünde hier das Experimentieren? Angenommen, ehe er die Lösung gibt, erscheint sie ihm als Vision. –

47. Wenn eine Regel dich nicht zwingt, so *folgst* du keiner Regel.

Aber wie soll ich ihr denn folgen; wenn ich ihr doch folgen kann, wie ich will?

Wie soll ich dem Wegweiser folgen, wenn

MS 124, p. 149

alles was ich tue ein Folgen ist?

Aber, daß alles (auch) als ein Folgen *gedeutet* werden kann, heißt doch nicht, daß alles ein Folgen ist.

Aber wie deutet denn also der Lehrer dem Schüler die Regel? (Denn der soll ihr doch gewiß eine bestimmte Deutung geben.) – Nun, wie anders, als durch Worte und Abrichtung?

Und der Schüler hat die Regel (*so* gedeutet) inne, wenn er so und so auf sie reagiert.

Das aber ist wichtig, daß diese Reaktion, die uns das Verständnis verbürgt, bestimmte Umstände, bestimmte Lebens- und Sprachformen als Umgebung, voraussetzt. (Wie es keinen Gesichtsausdruck gibt ohne Gesicht.)

(Dies ist eine wichtige Gedankenbewegung.)

MS 124, p. 150

48. Zwingt mich eine Linie dazu, ihr nachzufahren? – Nein; aber wenn ich mich dazu entschlossen habe, sie *so* als Vorlage zu gebrauchen, dann zwingt sie mich. – Nein; dann zwinge *ich* mich sie so zu gebrauchen. Ich halte mich gleichsam an ihr fest. – Aber wichtig ist hier doch, daß ich sozusagen ein für allemal den Entschluß mit der (allgemeinen) Deutung

MS 124, p. 151

fassen und halten kann, und nicht bei jedem Schritt von frischem *deute*.

uma tentativa. E por que não de um experimento? Este caso é similar ao modo como se tenta colocar pares de

MS 124, p. 148

números na equação $x^2 + y^2 = 25$ para encontrar algum que satisfaça a equação. E se finalmente se chega a $3^2 + 4^2 = 25$, esta proposição não é o resultado de um experimento? Por que se chama então o processo de uma tentativa? Teríamos chamado também assim se alguém resolvesse este problema sempre de primeira com completa certeza (com os sinais da certeza), mas sem calcular? Em que consiste aqui a experimentação? Suponhamos que antes de dar a solução, ela lhe aparecesse como uma visão. –

47. Se uma regra não te compele, então você não *segue* nenhuma regra.

Mas como então devo segui-la; se posso segui-la como quiser?

Como devo seguir a sinalização, quando

MS 124, p. 149

tudo o que faço é seguir?

Mas que tudo (também) possa vir a ser *interpretado* como um seguimento, não significa que tudo é um seguimento.

Mas como então o professor interpreta a regra para o aluno? (Pois aquele deve certamente lhe dar uma determinada interpretação.) – Bem, como senão mediante palavras e adestramento?

E o aluno internaliza a regra (interpretada *assim*), quando reage assim e assim a ela.

Mas *isto* é o importante, que esta reação que nos afiança a compreensão, pressupõe como entorno determinadas circunstâncias, determinadas formas de vida e de linguagem. (Assim como não há expressão facial sem face.)

(Este é um importante movimento de pensamento.)

MS 124, p. 150

48. Uma linha me compele a acompanhá-la? – Não; mas se me decidi a usá-la como modelo *assim*, então ela me compele. – Não; então *eu* me obrigo a usá-la assim. Como se eu me agarrasse nela. – Mas o importante aqui é que posso, por assim dizer, tomar e guardar de uma vez por todas a decisão com a

MS 124, p. 151

interpretação (geral), e não a cada passo *interpretar* novamente.

Die Linie, könnte man sagen, gibt's mir ein, wie ich gehen soll. Aber das ist natürlich nur ein Bild. Und urteile ich, sie gebe mir, gleichsam verantwortungslos, dies, oder das ein, so würde ich nicht sagen, ich folgte ihr *als Regel*.

»Die Linie gibt mir ein, wie ich gehen soll«: das paraphrasiert nur: – sie sei meine *letzte* Instanz dafür, wie ich gehen soll.

49. Denke dir, Einer folgte einer Linie als Regel auf diese Weise: Er hält einen Zirkel, dessen eine Spitze er der Regel entlang führt, während die andre Spitze *die* Linie zieht, die der Regel folgt. Und wie er so der Regel-Linie nach geht, öffnet und schließt er den Zirkel, anscheinend

MS 124, p. 152

mit großer Exaktheit, wobei er immer auf die Regel schaut, als bestimme *sie* sein Tun. Wir nun, die wir ihm zusehen, sehen keinerlei Regelmäßigkeit in diesem Öffnen und Schließen. Wir können daher seine Art, der Linie zu folgen, von ihm auch nicht lernen. Wir glauben ihm aber die Linie habe ihm eingegeben, was er tat.

Wir würden hier (vielleicht) wirklich sagen: »Die Vorlage scheine ihm *einzugeben*, wie er zu gehen hat. Aber sie ist keine Regel.«

50. Nimm an, Einer folgt der Reihe x = 1, 3, 5, 7, ... indem er die Reihe der 2x + 1 hinschreibt; und er fragte sich: »aber tue ich auch immer das Gleiche, oder jedesmal etwas anderes?«

Wer von einem Tag auf den andern verspricht: »morgen will ich das Rauchen aufgeben«, sagt er jeden Tag das Gleiche; oder jeden Tag etwas anderes?

Wie ist das zu entscheiden, ob er immer das

MS 124, p. 153

Gleiche tut, wenn ihm die Linie eingibt, wie er gehen soll?

51. Wollte ich nicht sagen: Nur das gesamte Bild der Verwendung des Wortes »gleich« in seiner Verwebung mit den Verwendungen der andern Wörter kann entscheiden, ob er das Wort verwendet wie wir?

Tut er nicht immer das Gleiche, nämlich, es sich von der Linie eingeben zu lassen, wie er gehen soll? Wie aber, wenn er sagt, die Linie gebe ihm einmal dies, einmal jenes ein? Könnte er nun nicht sagen: er tue in *einem* Sinne immer das Gleiche, aber einer Regel folge er doch nicht? Und kann aber auch nicht der, der einer Regel folgt, doch sagen, in einem gewissen Sinne tue er jedesmal etwas Anderes? So bestimmt also, ob er das Gleiche tut, oder immer ein Anderes,

A linha, poder-se-ia dizer, me sugere como devo seguir. Mas isto, naturalmente, é só uma imagem. E se julgasse que ela me sugere isto e aquilo, de algum modo injustificadamente, então não diria que a segui *como regra*.[389]

"A linha me sugere como devo seguir": isto é só uma paráfrase: – ela é a minha *última* instância sobre como devo seguir.

49. Imagine que alguém seguisse uma linha como regra desta maneira: ele segura um compasso em que uma ponta percorre ao longo da régua,[390] enquanto que a outra ponta desenha *a* linha que segue a regra. E na medida em que acompanha a regra-linha desta maneira, abre e fecha o compasso, aparentemente

MS 124, p. 152

com a maior exatidão, dado que olha sempre para a regra como se *ela* determinasse o que ele faz. Agora, nós, que olhamos para ele, não vemos qualquer regularidade neste abrir e fechar. Por conseguinte, não podemos tampouco aprender com ele o seu tipo de seguimento da linha. Mas acreditamos nele em que a linha lhe sugeriu o que fez.

Nós aqui (talvez) realmente diríamos: "O modelo parece lhe *sugerir* como deve seguir. Mas isto não é uma regra."

50. Suponha que alguém siga a série x = 1, 3, 5, 7, ..., para a qual anota a série 2x + 1; e se perguntasse: "Mas eu estou fazendo sempre a mesma coisa ou algo diferente a cada vez?"

Quem promete de um dia para o outro: "amanhã vou deixar de fumar", diz todo dia o mesmo ou a cada dia algo diferente?

Como é que se decide se ele faz sempre

MS 124, p. 153

o mesmo quando a linha lhe sugere como deve seguir?

51. Não queria dizer: só a imagem completa do emprego da palavra "mesmo", no seu entrelaçamento com os empregos das outras palavras, pode decidir se ele emprega a palavra como nós?

Não faz ele sempre o mesmo, a saber, deixa que a linha lhe sugira como deve seguir? Mas como seria se ele dissesse que a linha ora lhe sugere isto, ora aquilo? Não poderia dizer, então: em *um* sentido, faz sempre o mesmo, mas, de todo modo, não segue a regra? E não poderia até mesmo aquele que segue a regra dizer, de todo modo, que em certo sentido faz a cada vez algo diferente? Assim, se ele faz o mesmo ou sempre faz algo diferente, não determina se ele segue uma regra.

nicht, ob er einer Regel folgt.

Nur *so* kann man den Vorgang, einer Regel folgen, beschreiben, daß man in anderer Weise beschreibt, was wir dabei tun.

MS 124, p. 154

Hätte es einen Sinn zu sagen: »Wenn er jedesmal etwas *anderes* täte, würden wir nicht sagen: er folge einer Regel«? Das hat *keinen* Sinn.

52. Einer Regel folgen ist ein bestimmtes Sprachspiel. Wie kann man es beschreiben? Wann sagen wir, er habe die Beschreibung verstanden? – Wir tun dies und das; wenn er nun so und so reagiert, hat er das Spiel verstanden. Und dieses ›dies und das‹ und ›so und so‹ enthält nicht ein »und so weiter«. – Oder: verwendete ich bei der Beschreibung ein »und so weiter« und würde gefragt, was das bedeutet, müßte ich es wieder durch eine Aufzählung von Beispielen erklären; oder etwa durch eine Geste. Und ich würde es dann als Zeichen des Verständnisses ansehen, wenn er die Geste etwa mit einem verständnisvollen Gesichtsausdruck wiederholte, und

MS 124, p. 155

in speziellen Fällen so und so handelte.

»Aber reicht denn nicht das Verständnis weiter, als alle Beispiele?« Ein sehr merkwürdiger Ausdruck, und ganz natürlich.

Wenn man Beispiele aufzählt und dann sagt »und so weiter«, so wird dieser letztere Ausdruck nicht auf die gleiche Weise erklärt, wie die Beispiele.

Denn das »und so weiter« könnte man einerseits durch einen Pfeil ersetzen, der anzeigt, daß das Ende der Beispielreihe nicht ein Ende ihrer Anwendung bedeuten soll. Anderseits heißt »und so weiter« auch: es ist genug, du hast mich verstanden; wir brauchen keine weiteren Beispiele.

Wenn wir den Ausdruck durch eine Geste ersetzen, so könnte es ja sein, daß die Menschen unsere Beispielreihe

MS 124, p. 156

nur dann auffaßten, wie sie sollten, (nur dann ihr richtig folgten), wenn wir am Schluß diese Geste machten. Sie wäre also ganz analog der des Zeigens auf einen Gegenstand, oder Ort.

53. Nimm an, eine Linie gebe mir ein, wie ich ihr folgen soll; d. h., wenn ich ihr mit den Augen nachgehe, so sagt mir etwa eine innere Stimme: Zieh *so*. – Nun, was ist der Unterschied zwischen diesem Vorgang, einer Art Inspiration zu folgen und dem, einer Regel zu folgen?

Só *assim* se pode descrever o processo de seguir uma regra, descrevendo-se de outro modo o que fazemos ali.

MS 124, p. 154

Haveria um sentido em dizer: “Se ele fizesse a cada vez algo *diferente*, não diríamos: ele segue uma regra”? Isto não tem *nenhum* sentido.

52. Seguir uma regra é um jogo de linguagem determinado. Como se pode descrevê-lo? Quando dizemos que ele compreendeu a descrição? – Fazemos isto e aquilo; se ele agora reage assim e assim, compreendeu o jogo. E este ‘isto e aquilo’ e ‘assim e assim’ não contém um “e assim por diante”. – Ou: se eu empregasse na descrição um “e assim por diante”, e me fosse perguntado o que significa isto, teria que explicá-lo novamente mediante uma enumeração de exemplos; ou possivelmente por um gesto. E eu então veria como sinal de compreensão se ele repetisse o gesto, digamos, com uma expressão facial de plena compreensão, e

MS 124, p. 155

em casos particulares agisse assim e assim.

“Mas a compreensão não vai além de qualquer exemplo?” Uma expressão muito peculiar e totalmente natural.

Se se enumeram exemplos e depois se diz “e assim por diante”, esta última expressão não será explicada da mesma maneira que os exemplos.

Pois o “e assim por diante” poderia, por um lado, ser substituído por uma seta que indicasse que o final de uma série de exemplos não deve significar um final da sua aplicação. Por outro lado, o “e assim por diante” significa também: é o suficiente para que você me compreenda; não precisamos de mais exemplos.

Se substituímos a expressão por um gesto, pode ser então que as pessoas só concebessem nossa série de

MS 124, p. 156

exemplos como deveriam (só então a seguiriam corretamente), se fizéssemos este gesto no final. Ele seria, portanto, completamente análogo a apontar para um objeto ou para um lugar.

53. Suponha[391] que uma linha me sugira como devo segui-la; ou seja, se acompanho a linha com os olhos, então uma voz interior me diz: trace *assim*. – Ora, qual é a diferença entre este processo, seguir um tipo de inspiração, e o de seguir uma regra? Pois de todo modo eles não

Denn sie sind doch nicht das Gleiche. In dem Fall der Inspiration *warte* ich auf die Anweisung. Ich werde einen Andern nicht meine ›Technik‹ lehren können, der Linie zu folgen. Es sei denn, ich lehre ihn eine Art des Hinhorchens, der Rezeptivität, etc. Aber dann kann ich natürlich nicht verlangen, daß er der Linie so folge, wie ich.

Man könnte sich auch so einen

MS 124, p. 157

Unterricht in einer Art von Rechnen denken. Die Kinder können dann, ein jedes auf seine Weise, rechnen; solange sie nur auf die innere Stimme horchen und ihr folgen. – Dieses Rechnen wäre wie ein Komponieren.

Denn gehört nicht zum Befolgen einer Regel die Technik (die *Möglichkeit*) einen Andern im Folgen abzurichten? Und zwar durch Beispiele. Und das Kriterium seines Verständnisses muß die Übereinstimmung der einzelnen Handlungen sein. Also nicht wie beim Unterricht in der Rezeptivität.

54. Wie folgst du der Regel? – »Ich mach' es *so*: ... « und nun folgen allgemeine Erklärungen und Beispiele. – – Wie folgst du der Stimme der Linie? – »Ich sehe auf sie hin, schließe alle Gedanken aus, etc., etc.«

›Ich würde nicht sagen, daß sie mir immer etwas anderes eingebe, – wenn ich ihr als Regel folgte.‹ Kann man das sagen?

MS 124, p. 158

»Das Gleiche tun« ist mit »der Regel folgen« verknüpft.

55. Kannst du dir absolutes Gehör vorstellen, wenn du es nicht hast? Kannst du es vorstellen, *wenn* du es hast? – Kann ein Blinder sich das Sehen von rot vorstellen? Kann *ich* mir es vorstellen? Kann ich mir vorstellen, daß ich so und so spontan reagiere, wenn ich's nicht tue? Kann ich mir's besser vorstellen, wenn ich's tue?

Kann ich aber das Sprachspiel spielen, wenn ich nicht so reagiere?

56. Man fühlt nicht, man müsse immer des Winks der Regel gewärtig sein. Im Gegenteil. Wir sind nicht gespannt darauf: was sie uns jetzt sagen wird, sondern sie sagt uns immer dasselbe, und wir tun, was sie uns sagt.

MS 124, p. 159

Man könnte sagen: wir sehen, was wir beim Folgen nach der Regel tun, unter dem Gesichtspunkt des *immer Gleichen* an.

são iguais. No caso da inspiração, *espero* pela diretiva. Não poderei ensinar ao outro a minha 'técnica' de seguir a linha. A não ser que eu lhe ensine um tipo de escuta, de receptividade etc. Mas então eu não poderia exigir, naturalmente, que ele seguisse a linha do mesmo modo que eu.

Poder-se-ia imaginar também uma lição

MS 124, p. 157

assim sobre um tipo de cálculo. As crianças poderiam, então, cada uma do seu modo, calcular; na medida em que só escutassem a voz interior e a seguissem. – Este cálculo seria como compor.

Pois não faz parte do seguimento de uma regra a técnica (a *possibilidade*) de adestrar um outro no seguimento? Especificamente, por meio de exemplos. E o critério da sua compreensão tem que ser a concordância das ações individuais. Portanto, não como na instrução pela receptividade.

54. Como você segue a regra? – "Eu faço *assim*: ...", e agora seguem-se explicações gerais e exemplos. – – Como você segue a voz da linha? – "Eu olho para ela, elimino todos os pensamentos etc., etc."

'Eu não diria que ela me sugere sempre algo diferente, – se eu a seguisse como regra.' Pode-se dizer isto?

MS 124, p. 158

"Fazer o mesmo" está vinculado com "seguir a regra".

55. Você pode imaginar o ouvido absoluto se você não o tem? Você pode imaginá-lo *se* você o tem? – Um cego pode imaginar a visão do vermelho? *Eu* posso imaginá-la? Posso imaginar que reajo espontaneamente assim e assim, se eu não o faço? Posso imaginá-lo melhor se o faço?

Mas eu posso jogar o jogo de linguagem se eu não reajo assim?

56. Uma pessoa não sente que tem que estar sempre ciente do aceno da regra. Ao contrário. Não estamos ansiosos sobre: o que ela vai nos dizer agora, senão que ela nos diz sempre o mesmo e nós fazemos o que ela nos diz.

MS 124, p. 159

Poder-se-ia dizer: nós olhamos para o que fazemos no seguimento de acordo com a regra pelo ponto de vista do *sempre o mesmo*.

Man könnte dem, den man abzurichten anfängt, sagen: »Sieh, ich tu immer das Gleiche: … «.

57. Wann sagen wir: »Die Linie gibt mir das *als Regel* ein – immer das Gleiche.« Und anderseits: »Sie gibt mir immer wieder ein, was ich zu tun habe – sie ist keine Regel.«

Im ersten Fall heißt es: ich habe keine weitere Instanz dafür, was ich zu tun habe. Die Regel tut es ganz allein; ich brauche ihr nur zu folgen (und folgen ist eben *eins*). Ich fühle nicht, zum Beispiel, es ist seltsam, daß mir die Linie immer etwas sagt. – Der andre Satz sagt: Ich weiß nicht, was ich tun werde; die Linie wird's mir sagen.

Die Kunstrechner, die zum richtigen Resultat gelangen, aber nicht sagen können, wie.

MS 124, p. 160

Sollen wir sagen: sie rechnen nicht? (Eine Familie von Fällen.)

Diese Dinge sind feiner gesponnen, als grobe Hände ahnen.

58. Kann ich nicht einer Regel zu folgen *glauben*? Gibt es diesen Fall nicht?

Und kann ich dann nicht auch *keiner* Regel zu folgen glauben und doch einer folgen? Würden wir nicht auch etwas *so* nennen?

59. Wie kann ich das Wort »gleich« erklären? – Nun, durch Beispiele. – Aber ist das *alles*? gibt es nicht eine noch tiefere Erklärung; oder muß nicht doch das *Verständnis* der Erklärung tiefer sein? – Ja, hab ich denn selbst ein tieferes Verständnis? *Habe* ich mehr, als ich in der Erklärung gebe?

Woher aber das Gefühl, ich hätte mehr, als ich sagen kann?

Ist es, daß ich das nicht Begrenzte als Länge deute, die über jede Länge hinausreicht? (Die nicht begrenzte Erlaubnis, als Erlaubnis zu etwas

MS 124, p. 161

Grenzenlosem.)

Die Vorstellung, die mit dem Grenzenlosen geht, ist die von etwas so großem, daß wir sein Ende nicht sehen können.

Die Verwendung des Wortes »Regel« ist mit der Verwendung des Wortes »gleich« verwoben.

Poder-se-ia dizer para quem começa a ser adestrado: “Veja, eu faço sempre o mesmo: …”.

57. Quando dizemos: “A linha me sugere isto *como regra* – sempre o mesmo.” E por outro lado: “Ela sempre me sugere de novo o que tenho que fazer – ela não é uma regra.”

No primeiro caso, significa: não tenho uma instância adicional para o que tenho que fazer. A regra faz isto totalmente sozinha; eu preciso dela somente para segui-la (e seguir é apenas *uma* coisa). Eu não acho estranho, por exemplo, que a linha me diga alguma coisa. – A outra proposição diz: eu não sei o que vou fazer; a linha vai me dizer.

Os[392] calculadores prodigiosos, que chegam ao resultado correto mas não podem dizer como.

MS 124, p. 160

Devemos dizer que eles não calculam? (Uma família de casos.)

Estas coisas são tecidas de maneira mais fina do que suspeitariam as mãos rudes.

58. Não posso *acreditar* que sigo uma regra? Não existe este caso?

E não posso também acreditar que não estou seguindo *nenhuma* regra e, no entanto, estar seguindo? Não daríamos nome também alguma coisa *assim*?

59. Como posso explicar a palavra “mesmo”? – Ora, por exemplos. – Mas isto é *tudo*? não há uma explicação ainda mais profunda; ou não teria que ser mais profunda a *compreensão* da explicação? Bem, eu mesmo tenho uma compreensão mais profunda? *Tenho* eu mais do que dou na explicação?

Mas de onde vem o sentimento de que teria mais do que posso dizer?

É que interpeto o não limitado como uma longitude que se estende para além de qualquer longitude? (O consentimento não limitado como consentimento para algo

MS 124, p. 161

sem limites.)

A representação que acompanha o ilimitado é de alguma coisa tão grande que não podemos ver o seu fim.

O emprego da palavra “regra” está entrelaçado com o emprego da palavra “mesmo”.

Reflita: sob que circunstâncias o naturalista diria: a palavra “…” desta tribo significa tan-

Überlege dir: Unter welchen Umständen wird der Forschungsreisende sagen: Das Wort » … « dieses Stammes heißt soviel wie unser »und so weiter«? Stelle dir Einzelheiten ihres Lebens und ihrer Sprache vor, die ihn dazu berechtigen würden.

»Ich weiß doch was ›gleich‹ heißt!« – Daran zweifle ich nicht; ich weiß es auch.

60. »Die Linie gibt mir ein … «. Hier ist der Ton auf dem *Ungreifbaren* des Eingebens. Eben darauf, daß *nichts* zwischen

MS 124, p. 162

der Regel und meiner Handlung steht.

Man könnte sich aber denken, daß Einer mit solchen Gefühlen multipliziert, richtig multipliziert; immer wieder sagt: »Ich weiß nicht – jetzt gibt mir die Regel auf einmal *das* ein!« und, daß wir antworten: »Freilich; du gehst ja ganz nach der Regel vor.«

Einer Regel folgen: das läßt sich verschiedenem entgegensetzen. Der Forschungsreisende wird, unter anderm, auch die Umstände beschreiben, unter denen ein Einzelner

MS 124, p. 163

dieser Leute nicht von sich selbst sagen will, er folge einer Regel. Wenn es in dieser, oder jener Beziehung auch so ausschaut.

Aber könnten wir nicht auch rechnen, wie wir rechnen (Alle übereinstimmend, etc.) und doch bei jedem Schritt das Gefühl haben, von den Regeln wie von einem Zauber geleitet zu werden; erstaunt darüber vielleicht, daß wir übereinstimmen? (Der Gottheit etwa für diese Übereinstimmung dankend.)

Daraus siehst du nur, wieviel der Physiognomie dessen gehört, was wir im alltäglichen Leben »einer Regel folgen« nennen!

Man folgt der Regel ›*mechanisch*‹. Man vergleicht sich also mit einem Mechanismus.

»Mechanisch«, das heißt: ohne zu denken. Aber *ganz* ohne zu denken? Ohne *nachzudenken*.

MS 124, p. 164

Der Forscher könnte sagen: »Sie folgen Regeln, aber es sieht doch ganz anders aus, als bei uns.«

to quanto o nosso “e assim por diante”? Imagine particularidades da vida deles e da sua linguagem que o justificariam nisto.

“Eu sei o que ‘mesmo’ quer dizer!” – Disto não duvido; eu também sei.

60. “A linha me sugere …”. Aqui o acento recai sobre a *impalpabilidade* do sugerir. Justamente em que não há *nada* entre

MS 124, p. 162

a regra e a minha ação.[393]

Pode-se, no entanto, imaginar que alguém multiplica com tais sentimentos, e multiplica corretamente; sempre repete: “Eu não sei – agora a regra de repente me sugere *isto*!”, e que nós respondemos: “Certamente; você procede totalmente de acordo com a regra.”

Alguém seguir uma regra: isto pode ser contraposto a várias coisas. Entre estas, o naturalista também vai descrever as circunstâncias sob as quais um indivíduo

MS 124, p. 163

deste povo não vai querer dizer sobre si mesmo que está seguindo uma regra. Mesmo que neste ou naquele aspecto assim o pareça.

Mas não podemos também calcular como calculamos (todos em concordância etc.) e, no entanto, a cada passo ter o sentimento de ter sido guiado pela regra como se fosse uma mágica; espantados, talvez, com a nossa concordância? (Agradecidos à divindade, digamos, por esta concordância.)

A partir disto você só vê o quanto pertence à fisiognomia do que na vida cotidiana chamamos de “seguir uma regra”![394]

Segue-se a regra ‘*mecanicamente*’. Por conseguinte, compara-se com um mecanismo.

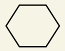
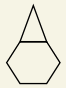
“Mecanicamente”, significa: sem pensar. Mas *totalmente* sem pensar? Sem *refletir*.

MS 124, p. 164

O pesquisador poderia dizer: “Eles seguem regras, mas isto parece totalmente diferente do que ocorre conosco.”

“Ela me sugere injustificadamente isto ou aquilo” significa: eu não posso te ensinar *como*

»Sie gibt mir, verantwortungslos, dies oder das ein« heißt: ich kann es dich nicht lehren, *wie* ich der Linie folge. Ich setzte nicht voraus, daß du ihr folgen wirst wie ich, auch wenn du ihr folgst.

61. Eine Addition von Formen, in der gewisse Glieder verschmelzen, spielt in unserm Leben eine sehr geringe Rolle. – Wie wenn  und  die Figur  ergeben. Aber wäre dies eine *wichtige* Operation, so hätten wir vielleicht einen andern geläufigen Begriff von der arithmetischen Addition.

Daß man ein Boot, einen Hut, etc., aus einem quadratischen Stück Papier (nach gewissen Regeln) falten kann, ist uns natürlich als Angelegenheit der Geometrie zu betrachten, nicht der Physik. Aber ist

MS 124, p. 165

Geometrie, so verstanden, nicht ein Teil der Physik? Nein; wir spalten die Geometrie von der Physik ab. Die geometrische Möglichkeit von der physikalischen. Aber wie, wenn man sie beisammen ließe? Wenn man einfach sagte: »Wenn du das und das und das mit dem Stück Papier tust, wird *dies* herauskommen«? Was zu tun ist, könnte durch einen Reim gegeben werden. Ist es denn nicht möglich, daß jemand zwischen den beiden Möglichkeiten gar nicht unterscheidet? Wie etwa ein Kind, das diese Technik lernt. Es weiß nicht, und denkt nicht darüber nach, ob diese Resultate des Faltens nur möglich sind, weil das Papier dabei sich in der und der Weise dehnt, verzerrt, oder, weil es sich *nicht* verzerrt.

Und ist es nun nicht auch so in der Arithmetik? Warum sollten Leute nicht rechnen lernen können ohne einen Begriff von einer mathematischen und einer physikalischen Tatsache? Sie wissen nur, daß das immer herauskommt, wenn sie gut acht geben und tun, was man sie gelehrt hat.

Denken wir uns, während wir rechneten veränderten sich die Ziffern sprungweise auf dem

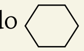
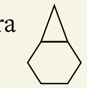
MS 124, p. 166

Papier. Eine Eins würde plötzlich zu einer 6, dann zu einer 5, dann wieder zu einer 1 usf. Und ich will einmal annehmen, das änderte an der Rechnung gar nichts, weil, sowie ich eine Ziffer ablese um mit ihr zu rechnen oder sie anzuwenden, sie wieder zu der würde, die wir bei *unserm* Rechnen vor uns haben. Dabei sähe man aber wohl während des Rechnens wie die Ziffern sich ändern; wir sind aber instruiert, uns darum weiter nicht zu kümmern.

Dieses Rechnen könnte natürlich, auch wenn wir die obige Annahme nicht machen, zu brauchbaren Resultaten führen.

Wir rechnen hier streng nach Regeln, und doch *muß* dies Resultat nicht herauskommen. – Ich nehme an, daß wir keinerlei Gesetzmäßigkeit in dem Wechsel der Ziffern sehen.

sigo a linha. Não pressuponho que você a seguirá como eu, mesmo que você a siga.

61. Uma adição de formas em que certos segmentos se fundem joga um papel muito pequeno na nossa vida. – Tal como quando  e  geram a figura . Mas se esta fosse uma operação *importante*, então talvez nós tivéssemos um outro conceito comum de adição na aritmética.

Que se possa dobrar um pedaço de papel quadrado na forma de um navio, de um chapéu etc., deve ser considerado por nós, naturalmente, como um assunto da geometria, não da física. Mas não

MS 124, p. 165

é a geometria assim compreendida uma parte da física? Não; nós separamos a geometria da física. A possibilidade geométrica da física. Mas e se as deixamos juntas? Se nós simplesmente disséssemos: "Se você fizer isto e isto e isto com o pedaço de papel vai ter *este* resultado"? O que é para ser feito poderia ser dado numa rima. Não é possível que alguém não faça nenhuma distinção entre as duas possibilidades? Como uma criança, digamos, que aprende esta técnica. Ela não sabe e não considera se os resultados da dobradura só são possíveis porque o papel é esticado desta e daquela maneira, contorcido, ou porque ele *não* é contorcido.

E não é assim também na aritmética? Por que as pessoas não deveriam poder aprender a calcular sem um conceito de um fato matemático ou físico? Elas só sabem que o resultado é sempre este se prestam bastante atenção e fazem o que se lhes ensinou.

Imaginemos que enquanto calculamos os algarismos mudam abruptamente sobre o

MS 124, p. 166

papel. O um de repente se torna um 6, depois um 5, depois novamente se torna um 1, e assim por diante. E vou assumir que isto não alterou em nada o cálculo, porque, na medida em que leio um algarismo, e calculo com ele ou o aplico, ele se torna novamente o que temos diante de nós no *nosso* cálculo. Ao mesmo tempo, pode-se ver como os algarismos mudam enquanto calculamos; mas somos instruídos a não nos preocuparmos mais com isto.

Este cálculo, mesmo que não façamos a assunção acima, poderia naturalmente conduzir a resultados úteis.

Nós calculamos aqui estritamente segundo regras, e, no entanto, este resultado não *tem que* vir a lume. – Eu assumo que nós não vemos nenhuma regularidade na mudança dos algarismos.

Ich will sagen: Man könnte dieses

MS 124, p. 167

Rechnen wirklich als ein Experimentieren auffassen, und z. B. sagen: »Versuchen wir was jetzt herauskommt, wenn ich diese Regel anwende«.

Oder auch: »Machen wir dieses Experiment: schreiben wir die Ziffern mit einer Tinte von dieser Zusammensetzung … und rechnen nach der Regel …«

Nun könntest du natürlich sagen: »In diesem Fall ist das Manipulieren von Ziffern nach Regeln kein Rechnen.«

»Wir rechnen nur, wenn hinter dem Resultat ein Muß steht.« – Aber wenn wir nun dieses Muß nicht wissen, – liegt es da dennoch in der Rechnung? Oder rechnen wir nicht, wenn wir es ganz naïf tun?

Wie ist es *damit*: Der rechnet nicht, der, wenn ihm einmal das, einmal jenes herauskommt, und er einen Fehler nicht

MS 124, p. 168

finden kann, sich damit abfindet und sagt: das zeige eben, daß gewisse noch unbekannte Umstände das Ergebnis beeinflussen.

Man könnte das so ausdrücken: wem die Rechnung einen kausalen Zusammenhang entdeckt, der rechnet nicht.

Die Kinder werden nicht nur im Rechnen geübt, sondern auch in einer ganz bestimmten Stellungnahme gegen einen Rechenfehler.

Was ich sage, kommt darauf hinaus, die Mathematik sei *normativ*. Aber »Norm« bedeutet nicht dasselbe, wie »Ideal«.

MS 124, p. 169

62. Die Einführung einer neuen Schlußregel kann man als Übergang zu einem neuen Sprachspiel auffassen. Ich stelle mir eines vor, in welchem etwa eine Person ›p ⊃ q‹ aussagt, eine andere ›p‹, und eine dritte den Schluß zieht.

63. Ist es möglich, zu beobachten, daß eine Fläche rot und blau gefärbt ist, und nicht zu beobachten, daß sie rot ist? Denk dir, man verwende eine Art Farbadjektiv für Dinge, die halb rot, halb blau sind: Man sagt sie seien ›bu‹. Könnte nun jemand nicht darauf trainiert sein, zu

Quero dizer: poderíamos conceber

MS 124, p. 167

realmente este cálculo como uma experimentação, e dizer, por exemplo: “Vamos ver que resultado dá se eu aplicar esta regra”.

Ou também: “Façamos este experimento: vamos escrever os algarismos com uma tinta com uma composição de …, e calcular de acordo com a regra …”

Agora você poderia, naturalmente, dizer: “Neste caso, a manipulação dos algarismos segundo regras não é um cálculo.”

“Nós só calculamos quando por detrás do resultado está um exigir.” – Mas se não conhecemos este exigir, – ele estaria, apesar de tudo, no cálculo? Ou não calculamos quando o fazemos de modo totalmente ingênuo?

Como seria *com isto*: não calcula aquele que chega ora a esta, ora àquela solução, não pode encontrar

MS 124, p. 168

um erro, resigna-se com isto e diz: isto mostra justamente que certas circunstâncias ainda desconhecidas influenciam o resultado.

Poder-se-ia expressar isto assim: quem descobre uma conexão causal no cálculo, não calcula.

As crianças não seriam exercitadas só no cálculo, mas também numa tomada de posição bem determinada contra erros de cálculo.[395]

O que digo provém do fato de que a matemática é *normativa*. Mas “norma” não significa o mesmo que “ideal”.

MS 124, p. 169 [396]

62. Pode-se conceber a introdução de uma nova regra de inferência como transição para um novo jogo de linguagem. Imagino um em que uma pessoa, por exemplo, assere ‘p ⊃ q’, uma outra, ‘p’, e uma terceira tira a conclusão.

63. É possível observar que uma superfície foi colorida de vermelho e azul e não observar que ela é vermelha? Imagine que se empregue um tipo de adjetivo de cor para coisas que são metade vermelhas e metade azuis: elas são referidas como ‘bu’. Não poderia alguém agora ser beobachten, ob etwas bu ist; und nicht darauf, ob es auch rot ist? Dieser würde dann nur zu melden wissen: »bu«, oder »nicht bu«. Und wir könnten aus der ersten Meldung den Schluß ziehen, das Ding sei zum Teil rot.

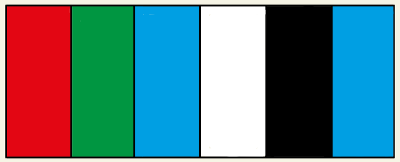
MS 124, p. 171

Ich stelle mir vor, daß die Beobachtung durch ein psychologisches Sieb geschieht, das zum Beispiel nur das Faktum durchläßt, die Fläche sei blau-weiß-rot (französische Tricolore), oder sei es nicht.

Ist es nun eine besondere Beobachtung, die Fläche sei zum Teil rot, wie kann diese logisch aus dem Vorigen folgen? Die Logik kann uns doch nicht sagen, was wir beobachten müssen.

Jemand zählt Apfel in einer Kiste; er zählt bis zu 100. Ein Andrer sagt: »also sind jedenfalls 50 Apfel in der Kiste« (das ist alles, was ihn interessiert). Das ist doch ein logischer Schluß; ist es aber nicht auch eine besondere Erfahrung?

64. Eine Fläche, in eine Anzahl von Streifen geteilt, wird von mehreren Leuten beobachtet. Die Farben der Streifen ändern sich, alle zu gleicher Zeit, immer nach je einer Minute.



MS 124, p. 172

Jetzt sind die Farben: rot, grün, blau, weiß, schwarz, blau.
Es wird beobachtet:
rot . blau ⊃ schwarz . ⊃ . weiß.
Es wird auch beobachtet:
~ grün ⊃ ~ weiß
und Einer zieht den Schluß:
~ grün ⊃ rot . blau . ~ schwarz.
Und diese Implikationen sind ›material implications‹ in Russells Sinn.

Aber kann man denn, daß
r. b ⊃ s . ⊃ . w,
beobachten? Beobachtet man nicht Farben*zusammenstellungen*, also etwa, daß r. b. s. w; und leitet dann jenen Satz ab?

Aber kann einer bei der Beobachtung einer Fläche nicht ganz von der Frage eingenommen sein, ob sie sich grün, oder nicht grün färben wird; und wenn er nun sieht: ~g, muß er auf die besondere Farbe

treinado para observar se alguma coisa é bu; e não ser para observar se alguma coisa é também vermelha? Este, então, só saberia relatar: “bu” ou “não-bu”. E nós poderíamos, pelo primeiro relato, tirar a conclusão de que a coisa é parcialmente vermelha.

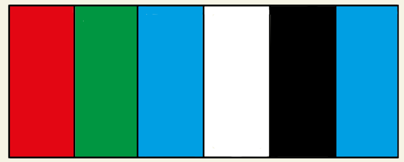
MS 124, p. 171

Imagino que a observação ocorre mediante uma peneira psicológica que, por exemplo, só deixa passar o fato de que a superfície é azul-branca-vermelha (o tricolor francês) ou de que ela não o é.

Agora, se for uma observação particular que a superfície seja em parte vermelha, como é que isto se segue logicamente do anterior? A lógica não pode nos dizer o que temos que observar.

Alguém conta as maçãs em uma caixa; ele conta até 100. Um outro diz: “Seja como for, há 50 maçãs na caixa” (isto é tudo o que lhe interessa). Isto é, de todo modo, uma conclusão lógica; mas não é também uma experiência particular?

64. Uma área dividida numa quantidade de listras é observada por muitas pessoas. As cores das listras mudam, todas ao mesmo tempo, sempre a cada minuto.



MS 124, p. 172

Agora as cores são: vermelho, verde, azul, branco, preto, azul.
Observa-se:
vermelho . azul ⊃ preto . ⊃ . branco.[397]
Observa-se também:
~ verde ⊃ ~ branco
E alguém tira a conclusão:
~ verde ⊃ vermelho . azul . ~ preto.
E estas implicações são ‘material implications’ no sentido de Russell.[398]

Mas, então, pode-se *observar* que...?
vermelho . azul ⊃ preto . ⊃ . branco?[399]
Não se observam *composições* de cores, portanto, digamos que vermelho . azul . preto . branco;[400] e se deduz, então, aquela proposição?

Mas na observação de uma área uma pessoa não poderia estar totalmente tomada pela questão de saber se as cores vão se tornar verdes ou não verdes; e se ela agora vê: ~ verde, não teria que estar atenta

MS 124, p. 173

der Fläche aufmerksam sein?

Und könnte Einer nicht ganz von dem Aspekt $r . b \supset s . \supset . w$ eingenommen sein? Wenn er zum Beispiel dazu angelernt worden wäre, alles andere vergessend, nur unter diesem Gesichtspunkt die Fläche zu betrachten. (Es könnte den Menschen unter bestimmten Verhältnissen gleichgültig sein, ob Gegenstände rot oder grün sind; von Wichtigkeit aber, ob sie eine dieser Farben, oder eine dritte besitzen. Und es könnte in diesem Falle ein Farbwort für »rot oder grün« geben.)

Wenn man aber beobachten kann, daß

$$r . b \supset s . \supset . w$$

und

$$\sim g \supset \sim w,$$

dann kann man ja auch beobachten, und nicht bloß schließen, daß

$$\sim g \supset r . b . \sim s.$$

MS 124, p. 174

Wenn dies drei Beobachtungen sind, dann muß es auch möglich sein, daß die dritte Beobachtung nicht mit dem logischen Schluß aus den beiden ersten übereinstimmt.

MS 124, p. 175

Ist es denn also denkbar, daß Einer beim Beobachten einer Fläche die Verbindung Rot-Schwarz sieht (etwa als Flagge), aber, wenn er sich nun drauf einstellt, *eine* der beiden Hälften zu sehen, statt des Rot ein Blau sieht? Nun, du hast es gerade beschrieben. – Es wäre etwa so, wie wenn jemand auf eine Gruppe von Apfeln schaute, und sie ihm immer als zwei Gruppen von je zwei Apfeln erschienen, sowie er aber versuchte, sie mit dem Blick zusammenzufassen, erschienen sie ihm als 5. Dies wäre ein sehr merkwürdiges Phänomen. Und es ist keines von dessen Möglichkeit wir Notiz nehmen.

Erinnere dich daran, daß ein Rhombus, als Raute angesehen, nicht wie ein Parallelogramm ausschaut. Nicht aber, als schienen seine gegenüberliegenden Seiten nicht parallel

MS 124, p. 176

zu sein, sondern der Parallelismus fällt uns nicht auf.

65. Ich könnte mir denken, daß Einer sagt, er sähe einen rot und gelben Stern, aber nichts Gelbes – weil er den Stern gleichsam als eine *Verbindung* von Farbteilen sieht, die er nicht zu trennen vermag.

Er hatte z. B. Figuren vor sich, wie diese

MS 124, p. 173

à cor particular da área?

E não poderia alguém estar totalmente tomado pelo aspecto de que vermelho . azul ⊃ preto . ⊃ . branco?[401] Se ele, por exemplo, tivesse sido ensinado a esquecer todo o resto, e só considerasse a área sob este ponto de vista. (Poderia ser indiferente às pessoas, sob certas correlações, se os objetos são vermelhos ou verdes; mas ser importante se eles possuem uma destas cores ou uma terceira. E neste caso poderia haver uma palavra para a cor "vermelho ou verde".)

Mas quando se pode observar que

vermelho . azul ⊃ preto . ⊃ . branco

e que

~ verde ⊃ ~ branco,[402]

então pode-se também observar, e não meramente inferir, que

~ verde ⊃ vermelho . azul . ~ preto.[403]

MS 124, p. 174

Se estas são três observações, então tem que ser também possível que a terceira observação não concorde com a conclusão lógica das duas primeiras.

MS 124, p. 175 [404]

Então é imaginável que alguém, observando uma área, veja a ligação vermelho-preto (como uma bandeira, digamos), mas quando ele se ajusta para ver *uma* das duas metades, em vez do vermelho ele vê um azul? Bem, você acabou justamente de descrevê-lo. – Possivelmente seria como se alguém olhasse para um grupo de maçãs e sempre lhe parecesse como dois grupos de duas maçãs cada um, mas, tão logo ele tentasse olhá-las como um todo, elas lhe parecessem ser 5. Este seria um fenômeno muito estranho. E não é da sua possibilidade que tomamos nota.

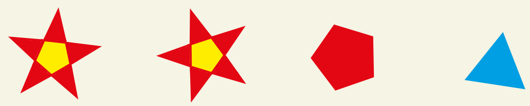
Lembre-se que um rombo, visto como um losango, não se parece a um paralelogramo. Mas não como se seus lados opostos não parecessem paralelos,

MS 124, p. 176

mas porque não nos damos conta do paralelismo.

65. Poderia imaginar alguém me dizendo que está vendo uma estrela vermelha e amarela, mas não vê o amarelo – porque está vendo a estrela, por assim dizer, como uma *associação* de partes de cores que não é capaz de separar.

Ele teria diante se si figuras como estas, por exemplo



Gefragt, ob er ein rotes Fünfeck sieht, würde er »ja« sagen; gefragt ob er ein gelbes sieht: »nein«. Ebenso sagt er, er sehe ein blaues Dreieck, aber kein rotes. – Aufmerksam gemacht, sagte er etwa: »Ja, jetzt seh' ich's; ich hatte die Sterne nicht so aufgefaßt.«

Und so könnte es ihm auch vorkommen, man könne die Farben im Stern nicht trennen, weil man die Formen nicht trennen kann.

Der kann die Geographie einer Landschaft

MS 124, p. 177

nicht übersehen lernen, der so langsam in ihr sich fortbewegt, daß er das eine Stück vergessen hat, wenn er zu einem andern kommt.

66. Warum rede ich immer vom Zwang durch die Regel; warum nicht davon, daß ich ihr folgen

MS 124, p. 178

wollen kann? Denn das ist ja ebenso wichtig.

Aber ich will auch nicht sagen, die Regel zwinge mich so zu handeln, sondern sie mache es mir möglich, mich an ihr anzuhalten und von ihr zwingen zu lassen.

Und wer, z. B., ein Spiel spielt, der hält sich an seine Regeln. Und es ist eine interessante Tatsache, daß Menschen zum Vergnügen Regeln aufstellen und sich dann nach ihnen halten.

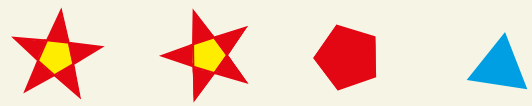
Meine Frage war eigentlich: »Wie kann man sich an eine Regel *halten*?« Und das Bild, das einem hier vorschweben könnte, wäre das eines kurzen Stücks Geländer, durch das ich mich weiter soll führen lassen, als das Geländer reicht. [Aber da *ist* doch nichts; aber da ist doch nicht *nichts*!] Denn wenn ich frage »wie *kann* man sich ... «

MS 124, p. 179

so heißt es, daß mir hier etwas *paradox* erscheint; also ein Bild mich verwirrt.

»Daß das auch rot ist, daran habe ich gar nicht gedacht; ich habe es nur als Teil des mehrfärbigen Ornaments gesehen.«

Logischer Schluß ist ein Übergang, der gerechtfertigt ist, wenn er einem bestimmten Paradigma folgt, und dessen Rechtmäßigkeit von sonst nichts abhängt.



Perguntado se está vendo um pentágono vermelho, ele diria que “sim”; perguntado se está vendo um amarelo: “não”. Do mesmo modo, diz que está vendo um triângulo azul, mas nenhum vermelho. – Chamada a sua atenção, talvez diga: “Ah, sim, agora estou vendo, não me havia atinado com a estrela assim.”

E assim poderia também lhe ocorrer que não se pode separar as cores na estrela porque não se pode separar a forma.

Quem não é capaz de aprender a ver a geografia

MS 124, p. 177

de uma região como um todo, se movimenta por ela tão devagar que já terá esquecido um pedaço dela quando chegar ao outro.[405]

66. Por que sempre falo de compulsão pela regra; por que não de que posso

MS 124, p. 178

querer segui-la? Pois isto é igualmente importante.

Mas também não quero dizer que a regra me compele a agir assim, senão que ela me torna possível ser induzido e permitir-me ser compelido por ela.

E quem, por exemplo, joga um jogo, atém-se a suas regras. E é um fato interesante que as pessoas estabelecem regras para o seu regozijo e logo se atêm a elas.

Minha pergunta realmente era: “Como alguém pode se *ater* a uma regra?”[406] E a imagem que alguém poderia entreter aqui seria a de um pedaço curto de um corrimão que me possibilita ir mais longe do que o corrimão alcança. [Mas *há* um nada ali; mas não há *nada* ali!] Pois se pergunto “Como alguém *pode* ...”,

MS 124, p. 179

isto significa que me parece haver algo *paradoxal* aqui; então, uma imagem está me confundindo.

“Nem sequer imaginei que isto também é vermelho; só o vi como parte de um ornamento policromático.”

A inferência lógica é uma transição que se justifica se estiver seguindo um determinado paradigma cuja legitimidade não depende de mais nada.

67. Wir sagen: »Wenn ihr beim Multiplizieren wirklich der Regel folgt, MUSS das Gleiche herauskommen.« Nun, wenn dies nur die etwas hysterische Ausdrucksweise der Universitätssprache ist, so braucht sie uns nicht sehr zu interessieren.

Es ist aber der Ausdruck einer Einstellung zu der Technik des Rechnens, die sich überall in unserm Leben zeigt. Die Emphase des Muß entspricht nur der Unerbittlichkeit dieser Einstellung, sowohl zur Technik des Rechnens, als auch zu unzähligen verwandten Techniken.

MS 124, p. 180

Das mathematische Muß ist nur ein andrer Ausdruck dafür, daß die Mathematik Begriffe bildet.

Und Begriffe dienen zum Begreifen. Sie entsprechen einer bestimmten Behandlung der Sachlagen.

Die Mathematik bildet ein Netz von Normen.

68. Es ist möglich, den Komplex aus A und B sehen, ohne A, oder B, zu sehen. Es ist auch möglich, den Komplex einen »Komplex von A und B« zu nennen und zu denken, diese Benennung deute nun auf eine Art Verwandschaft dieses Ganzen mit A und mit B hin. Es ist also

MS 124, p. 181

möglich, zu sagen, man sehe den Komplex von A und B, aber weder A noch B. Etwa wie man sagen könnte, es sei hier ein rötlichgelb, aber weder rot noch gelb.

Kann ich nun A und B vor mir haben und auch beide sehen, aber nur A ∨ B beobachten? Nun, in gewissem Sinne ist das doch möglich. Und zwar dachte ich mir es so, daß der Beobachter von einem gewissen Aspekt eingenommen sei; daß er etwa eine bestimmte Art von Paradigma vor sich habe, in einer bestimmten Routine der Anwendung begriffen sei. – Und wie er nun auf A ∨ B eingestellt sein kann, so auch auf A . B. Es fällt ihm also nur A . B auf und nicht, z. B., A. Auf A ∨ B eingestellt sein, heißt, könnte man sagen, mit dem Begriff ›A ∨ B‹ auf die und die Situation zu reagieren. Und genau so kann man's natürlich auch mit A . B tun.

Sagen wir: es interessiert Einen nur A . B, und er urteilt also, was immer geschieht, nur »A. B«, oder »~ (A . B)«; so kann ich mir denken, daß er »A . B« urteilt und auf die Frage »Siehst du B?« sagt »Nein, ich sehe A . B«.

MS 124, p. 182

Etwa wie mancher, der A . B sieht nicht zugeben wird, er sehe A ∨ B.

69. Aber die Fläche ›ganz rot sehen‹ und ›ganz blau sehen‹ sind doch gewiß ›echte‹ Erfahrungen, und doch sagen wir, Einer könnte sie nicht zugleich haben.

67. Dizemos: "Se você realmente segue a regra na multiplição, TEM QUE chegar no mesmo resultado." Bem, se este é apenas o modo de expressão um tanto histérico da fala universitária, não precisa nos interessar muito.

Mas esta é a expressão de uma atitude com relação à técnica do cálculo que se mostra por todos os lados da nossa vida. A ênfase do exigir só corresponde à inexorabilidade desta atitude, tanto para a técnica do cálculo como também para incontáveis técnicas aparentadas.

MS 124, p. 180

O exigir matemático é só uma expressão diferente de que a matemática forma conceitos.

E conceitos servem para o conceber. Correspondem a um determinado manejo dos estados de coisas.

A matemática forma uma rede de normas.

68. É possível ver o complexo de A e B, sem ver A ou B. É também possível chamar o complexo de um "complexo de A e B" e imaginar que esta denominação indica um tipo de parentesco desta totalidade com A e com B. É possível, portanto,

MS 124, p. 181

dizer que se vê o complexo de A e B, mas nem A nem B. Possivelmente como se poderia dizer que há aqui um amarelo avermelhado, mas nem vermelho nem amarelo.

Posso ter agora diante de mim A e B, e também ver os dois, mas só observar A ∨ B? Bem, em certo sentido isto é, sim, possível. Especificamente, imaginaria que o observador estaria tomado por um certo aspecto; que ele teria diante de si, digamos, um determinado tipo de paradigma apreendido em uma determinada rotina de aplicação. – E assim como ele poderia estar focado agora em A ∨ B, também estaria em A . B. Ocorre-lhe, portanto, só A . B e não, por exemplo, A. Estar focado em A ∨ B significa que se poderia dizer que ele reage com o conceito de 'A ∨ B' em tal e tal situação. E pode-se fazer exatamente assim, naturalmente, com A . B.

Se dizemos: alguém se interessa só por A . B, e, aconteça o que acontecer, faz juízos só com "A . B", ou então com "~ (A . B)"; então, posso imaginar que ele julgue "A . B" e, diante da pergunta "Você está vendo B?", ele diga "Não, estou vendo A . B".

MS 124, p. 182

Possivelmente como muitos que veem A . B, e não admitem que veem A ∨ B.[407]

69. Mas 'ver' a área 'totalmente vermelha' e 'totalmente azul' são experiências 'genuínas', e mesmo assim dizemos que alguém não poderia tê-las ao mesmo tempo.

Wenn er uns nun versicherte, er sehe diese Fläche wirklich ganz rot und zugleich ganz blau? Wir müßten sagen: »Du machst dich uns nicht verständlich.«

Der Satz »1 Fuß = ... cm« ist bei uns zeitlos. Man könnte sich aber auch den Fall denken, in welchem sich das Fußmaß und das Metermaß nach und nach etwas veränderten und dann immer wieder verglichen werden müßten, um in einander umgerechnet zu werden.

Ist aber nicht bei uns das Verhältnis der Längen des Meters und des Fußes experimentell bestimmt worden? Doch; aber das Ergebnis wurde zu einer Regel gestempelt.

MS 124, p. 183

70. Inwiefern kann man sagen, ein Satz der Arithmetik gebe uns einen Begriff? Nun, deuten wir uns ihn nicht als Satz, als Entscheidung einer Frage, sondern als eine, irgendwie anerkannte, Verbindung von Begriffen.

MS 124, p. 189

Das gleichgesetzte 25^2 und 625 gibt mir nun, könnte man sagen, einen neuen Begriff. Und der Beweis zeigt, was es mit dieser Gleichheit für eine Bewandtnis hat. – »Einen neuen Begriff geben« kann nur heißen, eine neue Begriffsverwendung einführen, eine neue Praxis.

MS 124, p. 191

»Wie kann man den Satz von seinem Beweis loslösen?« Diese Frage zeigt natürlich eine falsche Auffassung.

Der Beweis ist eine *Umgebung* des Satzes.

›Begriff‹ ist ein vager Begriff.

71. Nicht in jedem Sprachspiel gibt es etwas, was man »Begriff« nennen wird.

Begriff ist etwas wie ein Bild, womit man Gegenstände vergleicht.

Gibt es im Sprachspiel (2) Begriffe? Aber man könnte es leicht auf solche Art erweitern, daß »Platte«, »Würfel«, etc., zu Begriffen würden. Z. B. durch eine Technik des Beschreibens oder Abbildens jener Gegenstände. Es besteht natürlich keine scharfe Grenze zwischen Sprachspielen, die mit Begriffen arbeiten, und andern. Wichtig ist, daß

MS 124, p. 192

E se ele agora nos assegura que vê realmente esta área ao mesmo tempo totalmente vermelha e totalmente azul? Teríamos que dizer: “Você não está facilitando a nossa compreensão.”

A proposição “1 pé = ... cm” é, para nós, atemporal. Mas poder-se-ia também imaginar o caso de que o pé e o metro mudassem em algo gradualmente, e tivessem que ser comparados a cada vez para que pudessem ser convertidos um no outro.

Mas a correlação das extensões do metro e do pé não vem a ser para nós determinada experimentalmente? Sim; mas o resultado foi carimbado com uma regra.

MS 124, p. 183 [408]

70. Em que medida podemos dizer que uma proposição da aritmética nos dá um conceito? Bem, não a interpretamos como proposição, como decisão sobre uma pergunfa, mas como uma ligação entre conceitos de algum modo reconhecida.

MS 124, p. 189 [409]

A equiparação de 25^2 e 625 me fornece agora, poder-se-ia dizer, um novo conceito. E a demonstração mostra o que se passa com esta igualdade. – “Fornecer um novo conceito” só pode ter o significado de introduzir um novo emprego para o conceito, uma nova práxis.

MS 124, p. 191

“Como se pode desatar a proposição da sua demonstração?” Esta pergunta mostra, naturalmente, uma falsa concepção.

A demonstração é um *entorno* da proposição.

‘Conceito’ é um conceito vago.

71. Nem todo jogo de linguagem tem alguma coisa que venha a se chamar de “conceito”.

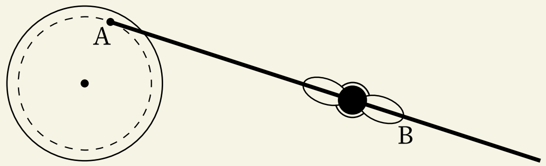
Conceito é algo como uma imagem com a qual se comparam objetos.

Há conceitos no jogo de linguagem (2)?[410] Mas poderíamos facilmente estendê-los de tal maneira que “placa”, “bloco” etc. se tornem conceitos. Por exemplo, mediante uma técnica de descrever ou afigurar aqueles objetos. Não há, naturalmente, nenhuma fronteira nítida entre jogos de linguagem que trabalham com conceitos e os outros. O importante é que

MS 124, p. 192

das Wort »Begriff« sich auf eine Art von Behelf im Mechanismus der Sprachspiele bezieht.

72. Betrachte einen Mechanismus. Etwa den:



Während der Punkt A einen Kreis beschreibt, beschreibt B eine Achterfigur. Wir schreiben das nun als einen kinematischen Satz.

Indem ich den Mechanismus umtreibe, beweist mir seine Bewegung den Satz; wie eine Konstruktion auf dem Papier es täte.

MS 124, p. 193

Der Satz entspricht etwa einem Bild des Mechanismus, mit den eingezeichneten Bahnen der Punkte A und B. Er ist also in gewisser Beziehung ein Bild jener Bewegung. Er hält das fest, wovon mich der *Beweis* überzeugt. Oder – wozu er mich überredet.

Wenn der Beweis das Vorgehen nach der Regel registriert, so erzeugt er dadurch einen neuen Begriff.

Indem er einen neuen Begriff erzeugt, überzeugt er mich von etwas. Denn zu dieser Überzeugung ist es wesentlich, daß das Vorgehen nach diesen Regeln immer das gleiche Bild erzeugen muß. (›Gleich‹ nämlich nach unsern gewöhnlichen Regeln

MS 124, p. 194

des Vergleichens und Kopierens.)

Damit hängt es zusammen, daß man sagen kann, der Beweis müsse das Bestehen einer internen Relation zeigen. Denn die interne Relation ist die Operation, die eine Struktur aus der andern erzeugt, als äquivalent angesehen mit dem Bild dieses Übergangs selbst – so daß nun der Übergang dieser Bilderreihe gemäß, eo ipso ein Übergang jenen Operationsregeln gemäß ist.

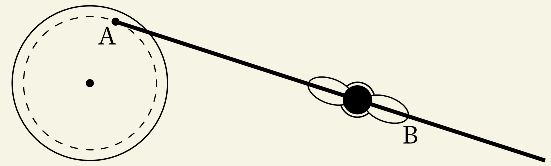
Indem der Beweis einen Begriff erzeugt, überzeugt er mich von etwas. Wovon er mich überzeugt, ist in dem Satz ausgesprochen, den er bewiesen hat.

Problem: Bedeutet das Eigenschaftswort »mathematisch« jedesmal das Gleiche: wenn wir von ›mathematischen‹ Begriffen reden, von ›mathematischen‹ Sätzen und von

MS 124, p. 195

a palavra “conceito” se refira a um tipo de recurso no mecanismo dos jogos de linguagem.

72. Considere um mecanismo. Digamos este:



Enquanto o ponto A descreve um círculo, B descreve a figura de um oito. Agora anotamos isto como uma proposição da cinemática.

Ao impulsionar em círculo o mecanismo, seu movimento me demonstra a proposição; como o faria uma contrução em papel.

MS 124, p. 193

A proposição corresponde aproximadamente a uma imagem do mecanismo, com as trajetórias dos pontos A e B assinaladas. Por isto ela é, sob certo aspecto, uma imagem daqule movimento. Ela apreende aquilo do que a *demonstração* me convence. Ou – aquilo do que me persuade.

Se a demonstração registra o procedimento segundo a regra, então, com isto, produz um novo conceito.

Ao produzir um novo conceito, me convence de algo. Pois para este convencimento é essencial que o procedimento segundo estas regras tenha que produzir sempre a mesma imagem. (‘Mesma’, a saber, segundo nossas regras usuais

MS 124, p. 194

de comparação e cópia.)

Isto está conectado com o que podemos dizer sobre o fato de que a demonstração tenha que mostrar a existência de uma relação interna. Pois a relação interna é a operação que produz uma estrutura a partir de outra, vista como equivalente à imagem desta própria transição – de modo que agora a transição segundo esta série de imagens seja, eo ipso, uma transição segundo aquelas regras de operação.

Ao produzir um conceito, a demonstração me convence de algo. Do que ela me convence é proferido na proposição que demonstrou.

Problema: o adjetivo “matemático” significa todas as vezes o mesmo: se falamos de conceitos ‘matemáticos’, de proposições ‘matemáticas’ e de

MS 124, p. 195

mathematischen Beweisen?

Was hat nun der bewiesene Satz mit dem Begriff zu tun, den der Beweis schuf? Oder: was hat der bewiesene Satz mit der internen Relation zu tun, die der Beweis demonstrierte?

Das Bild (Beweisbild) ist ein Instrument des Überzeugens.

Es ist klar, man kann auch den unbewiesenen mathematischen Satz anwenden; ja auch den falschen.

Der mathematische Satz sagt mir dann: Verfahre so!

73. »Wenn uns der Beweis überzeugt, dann müssen wir auch von den Axiomen überzeugt sein.« Nicht als von empirischen Sätzen; das ist ihre Rolle nicht. Sie sind im Sprachspiel von der Verifikation durch die Erfahrung ausgeschlossen. Sind nicht Erfahrungssätze, sondern Prinzipien des Urteilens.

MS 124, p. 196

Ein Sprachspiel: Wie habe ich mir eins vorzustellen, in dem Axiome, Beweise und bewiesene Sätze auftreten?

Wer in der Schule zum erstenmal ein bißchen von der Logik hört, der ist sogleich davon überzeugt, wenn man ihm sagt, ein Satz impliziere sich selbst, oder wenn er nun den Satz vom Widerspruch hört, oder des ausgeschlossenen Dritten. – Warum ist er gleich davon überzeugt? Nun, diese Gesetze passen ganz in den Gebrauch der Sprache, der ihm so geläufig ist.

Dann lernt er etwa kompliziertere Sätze der Logik beweisen. Die Beweise werden ihm vorgeführt, und er ist wieder überzeugt; oder er erfindet einen Beweis selber.

Er lernt so neue Techniken des Schließens. Und auch, auf welche Rechnung es zu setzen ist, wenn nun Fehler

MS 124, p. 197

sich zeigen.

Der Beweis überzeugt ihn, daß er an dem Satz, an der Technik die dieser vorschreibt, festhalten muß; aber er zeigt ihm auch, wie er an dem Satz festhalten kann, ohne Gefahr zu laufen, mit einer Erfahrung in Konflikt zu geraten.

74. Jeder Beweis in der angewandten Mathematik kann aufgefaßt werden als ein Beweis der reinen Mathematik, welcher beweist, daß *dieser* Satz aus *diesen* Sätzen folgt, oder aus ihnen durch die und die Operationen zu erhalten ist; etc.

demonstrações matemáticas?

O que tem a ver a proposição demonstrada com o conceito que a demonstração criou? Ou: o que tem a ver a proposição demonstrada com a relação interna demonstrada pela demonstração?

A imagem (imagem da demonstração) é um instrumento do convencimento.

Está claro também que se pode empregar a proposição matemática não demonstrada; e até mesmo a falsa.

A proposição matemática me diz, então: proceda assim!

73. "Se a demonstração nos convence, então temos que estar convencidos também pelos axiomas." Não como estamos pelas proposições empíricas; este não é o seu papel. Elas estão excluídas do jogo de linguagem da verificação pela experiência. Não são proposições empíricas, mas princípios do juízo.

MS 124, p. 196

Um jogo de linguagem: como vou imaginar algum em que apareçam axiomas, demonstrações e proposições demonstradas?

Quem ouviu na escola pela primeira vez um pouco de lógica fica imediatamente convencido quando lhe dizem que uma proposição implica a si mesma, ou quando ouve o teorema da contradição ou do terceiro excluído. – Por que ele fica imediatamente convencido disto? Bem, estas leis se ajustam totalmente ao uso da linguagem com a qual está bem familiarizado.

Depois aprende a demonstrar, digamos, proposições mais complicadas da lógica. As provas lhe são exibidas e ele fica novamente convencido; ou ele mesmo inventa uma demonstração.

Ele aprende assim novas técnicas de inferência. E também a que cálculo se deve imputar se agora se mostram

MS 124, p. 197

erros.

A demonstração o convence de que ele tem que insistir na proposição, na técnica que esta prescreve; mas ela também lhe mostra como ele pode se ater à proposição sem correr o risco de entrar em conflito com uma experiência.[411]

74. Toda demonstração da matemática aplicada pode ser concebida como uma demonstração da matemática pura que demonstra que *esta* proposição se segue *destas* proposições, ou é delas obtida mediante tais e tais operações; etc.

Der Beweis ist ein bestimmter *Gang*. Wenn wir ihn beschreiben, so werden Ursachen nicht genannt.

MS 124, p. 198

Ich handle auf den Beweis hin. – Aber wie? – Dem Satz gemäß der bewiesen wurde.

Der Beweis hat mich z. B. eine Technik des Approximierens gelehrt. Aber er hat doch *etwas* bewiesen, mich von etwas überzeugt. *Das* spricht der Satz aus. Er sagt, was ich nun auf den Beweis hin tun werde.

Der Beweis gehört zum Hintergrund des Satzes. Zum System, in dem der Satz wirkt.

Sieh', *so* geben 3 und 2 5.
Merk dir diesen Vorgang!

Jeder Erfahrungssatz kann als Regel dienen, wenn man ihn – wie ein Maschinenteil – feststellt, unbeweglich macht, so daß sich nun alle Darstellung um ihn dreht und er zu einem Teil des Koordinatensystems wird und unabhängig von den Tat-

MS 124, p. 199

sachen.

»So ist es, wenn dieser Satz aus diesen abgeleitet wird. Das mußt du doch zugeben.« – Was ich zugebe ist, daß ich so einen Vorgang *so* nenne.

MS 124, p. 200

A prova é um *percurso* determinado. Quando o descrevemos, não se mencionam causas.

MS 124, p. 198

Eu ajo na demonstração. – Mas como? – De acordo com a proposição demonstrada.

A prova me ensinou, por exemplo, uma técnica de aproximação. Mas ela demonstrou *alguma coisa*, me convenceu de alguma coisa. *Isto* é o que a proposição profere. Ela diz o que vou fazer agora na demonstração.

A prova pertence ao pano de fundo[412] da proposição. Ao sistema em que a demonstração é eficaz.

Veja, é *assim* que 3 e 2 dão 5.
Observe este processo!

Toda proposição empírica pode servir como regra, se a firmamos – como uma parte de uma máquina –, a tornamos imóvel, de modo que a partir dali toda apresentação gire sobre ela e a torne uma parte do sistema de coordenadas e independente dos

MS 124, p. 199

fatos.

"É assim que acontece quando esta proposição é deduzida daquelas. Isto você tem que admitir." – O que admito é que chamo *assim* um processo como este.

MS 124, p. 200 [413]

NOTAS DE TRADUÇÃO

* Abreviaturas: PI: Parte I; PII: Parte II ; PIII:Parte III; PIV: Parte IV; PV: Parte V; PVI: Parte VI; PVII: Parte VII; AI: Anexo I; AII: Anexo II; AIII: Anexo III. O símbolo § designa as seções numeradas pelos editores originais do texto.

1. [PI§2] A frase inicial do parágrafo foi riscada no original: "~~Man kann nun sagen:~~"/"~~Pode-se, agora, dizer:~~" (TS 222, p. 2), mas no datiloscrito de origem (TS 221, p. 139) permanecia intacta. A seção § 190 das IF, que repete esta mesma observação quase sem modificações, preservou a frase inicial apresentada no TS 221 (cf. TS 227, p. 136).
2. [PI§2] Nesta passagem Wittgenstein vai tentar deslocar o problema do âmbito exclusivamente mental em que muitas vezes se tenta dar conta das inferências lógicas, para o foco pragmático em que se dissolveria este problema como tal, ou esta questão como uma pergunta que teria algum sentido. Contudo, temos aqui presente também a tradicional dificuldade de tradução do verbo *meinen* ao português. A dificuldade é ainda aumentada, neste caso, não apenas pelo fato de que *meinen* (opinar, pensar, julgar, querer dizer, referir-se, ter intenção de, significar etc.) não tem correspondente exato ou direto em nossa língua, mas também porque, nesta sentença em particular, um sujeito indeterminado é o agente da vontade. Ao pé da letra, teríamos que dizer que "a fórmula é significada", isto é, "alguém deu a ela um significado tal que...". Além de tudo, o verbo *meinen* comporta várias acepções diferentes na própria língua alemã. Assim como *fürchten* (temer), *hassen* (odiar), *lieben* (amar) ou *glauben* (crer), *meinen* é também um verbo psicológico cujo sujeito pode cumprir, em relação a ele, certos papéis funcionais, a depender do caso. Na verdade, há uma série de papéis funcionais em relação a esses tipos de verbo, mas quero destacar somente dois: o papel de experienciador e o papel de agentivo do sujeito. A diferença entre um e outro caso é a seguinte: o papel de experienciador torna o sujeito um participante involuntário daquele tipo de ação mental; o papel de agentivo torna o sujeito um participante voluntário da ação mental. Assim, quando se diz "aquele povo teme o seu ditador", o papel do sujeito é o de experienciador da ação verbal: não se pode "temer" de propósito, apenas porque se quer "temer". Já o verbo "amar" comporta um papel do sujeito, pelo menos em português, como experienciador ou como agentivo. Pode-se amar involuntariamente ou porque se quer, na nossa língua. Com *meinen*, no alemão, ocorre a mesma coisa: nele o papel do sujeito pode ser de experienciador ou de agentivo. Por exemplo, quando em alemão tipicamente se pergunta "Was meinst du dazu?" ("O que você acha?"), o verbo apenas denota o pensamento de uma pessoa, o que ela considera, supõe, acredita, casos em que o sujeito do verbo mental cumpre um papel de experienciador; por outro lado, o papel do sujeito é claramente agentivo quando se diz "Was meint er mit seinem Beitrag?" ("O que ele quis dizer com a sua contribuição?"). Por isto, dependendo do caso, *meinen* será traduzido com expressões mais ou menos correspondentes do português que tenham o sujeito ora no papel de experienciador, ora como agentivo, dependendo do caso. Entretanto, como regra geral, vou tentar manter ao máximo para ele no português a forma "querer dizer", pois, apesar do desconforto, por outro lado sinaliza que *meinen* não corresponde exatamente ao nosso verbo "significar", nem ao nosso verbo "pensar".
3. [PI§3] Uma variante dessa última oração, riscada no TS 222, p. 5, era: "isso quer dizer que ela já tinha sido respondida antes?" ("...heißt das, daß sie früher bereits beantwortet worden ist?").
4. [PI§4] Em vez da tradução mais acertada desta oração ("A verdade é que o contar (ou a contagem) se comprova (ou tem se comprovado)"), preferi usar a palavra "verificar" para *sich bewähren*, a fim de preservar a ressonância que Wittgenstein realiza na frase com a palavra *Wahrheit* (verdade).

5. [PI§5] Esta frase ("Ela é semelhante à nossa medida e pode") é um acréscimo manuscrito posterior colocado para substituir a frase antes datilografada: "Gewiß, es ist nicht, was wir 'messen' nennen, kann aber unter Umständen"... ("Certamente isso não é o que chamamos de 'medir', mas pode, sob certas circunstâncias...").
6. [PI§5] A observação posta entre parênteses é um acréscimo manuscrito posterior.
7. [PI§6] Tal ilusão imaginativa é a que estaria supostamente propenso o falante de alemão, que usa o verbo *schließen* (fechar, encerrar, concluir, deduzir), que parece permitir a suposição de uma operação anterior e misteriosa que proporcionaria a transição de uma proposição a outra da cadeia inferencial.
8. [PI§6] No texto original desta seção (MS 117, p. 6), a palavra *Folgerung* (consequência, corolário) era apenas uma variante sobrescrita à palavra *Schluß* (conclusão).
9. [PI§9] No TS 222, p. 12, o advérbio e o artigo definido aparecem riscados: "... und etwa mit den praktischen Bedürfnissen." Daí a melhor conversão ao português seria: "Ou é com um acordo, ou com um uso, e com necessidades práticas." Mas os editores do texto preferiram manter a versão anterior às correções, tal como está no MS 117, p. 9, e no TS 221, p. 144. Esta mesma discussão vai retornar na PVII§38.
10. [PI§11] Este travessão é omitido na edição alemã das OFM, mas está presente no original (MS 117, p. 96; MS 118, p. 75r; TS 221, p. 204; e TS 222, p. 14).
11. [PI§12] O ponto de exclamação final foi omitido na versão alemã das OFM, mas está no MS 117, p. 13, no TS 221, p. 147, e no TS 222, p. 14.
12. [PI§14] Na versão alemã de OFM o sinal que termina a frase é um ponto de interrogação. Mas no original (TS 222, p.16) aparece apenas um ponto final de parágrafo numa frase manuscrita acrescentada à ficha datilografada. O ponto de interrogação está, entretanto, no MS 127, p. 123. A tradução da frase em inglês no original seria mais ou menos "O que está feito, está feito".
13. [PI§19] *Principia Mathernatica* 9.12 (cf. Russell & Whitehead, 2019 [1910]): O que é implicado por uma premissa verdadeira, é verdadeiro (p. 137). Na notação lógica atual, lê-se que $\vdash ((p \rightarrow q) \,\&\, p) \rightarrow \vdash q$. Na margem lateral do datiloscrito vem anotado em letra manuscrita na altura desta observação: "Emprego superficial & emprego no jogo de linguagem".
14. [PI§20] A frase entre parênteses é um acréscimo manuscrito posterior ao texto datilografado no TS 222, p. 19.
15. [PI§22] Acréscimo manuscrito ao final da ficha (TS 222, p. 21): "Die «Von der Auffassung der» Möglichkeit als blasser Schatten der Wirklichkeit hiervon wird oft zu reden sein."/ "Fala-se frequentemente da possibilidade como «da concepção de» uma sombra mais pálida da realidade disso."
16. [PI§23] A ficha anterior (TS 222, p. 22) é uma folha inteira em branco com um título acima em letra manuscrita: "Sprachspiele des Folgerns" (Jogos de linguagem da Inferência).
17. [PI§28] No TS 222, p. 26, o artigo definido der, que inicia a sentença, está riscado e substituído pelo artigo indefinido ein. Mas na edição alemã das OFM o artigo definido foi mantido.
18. [PI§31] Acréscimo manuscrito ao final do parágrafo (TS 222, p. 28):
    »Induktionsbeweis« / »Prova por indução«
    »Wie wir uns entscheiden 1/1 : 3 = 0.3« / »Como decidimos que 1/1 : 3 = 0.3«
    »Dreieck im Euclidisch Beweis« / »Triângulo na prova euclidiana«.
19. [PI§32] IF § 371 reverbera justamente o que se diz nesta frase. O matemático produz ou engendra uma essência, porque as pessoas, por uma série de razões exteriores como sentimentos, valores morais e estéticos, contextos vivenciais e o espírito de uma era, e não por causa de "argumentos", acaba acolhendo uma demonstração como uma certeza (PI§33). E estas são razões plausíveis para se reconhecer porque uma "demonstração me obriga" (PI§34).
20. [PI§32] Este é um acréscimo manuscrito posterior. Outra frase escrita à mão neste local, porém não

publicada, dizia: “Man könnte sich in Greenwich eine Mathem. Bibliotek denken.”/”Poder-se-ia imaginar uma biblioteca de matemática em Greenwich.”

21. [PI§36] A expressão *werden übersichtlich*, que aqui traduzo como “tornam-se manifestas”, poderia muito bem ser vertida ao português como “tornam-se visíveis e, portanto, investigáveis”. Todo o experimento imaginado nesta seção, contando até mesmo com a filmagem do procedimento (observemos que Wittgenstein descreve uma situação dessas em 1937, quando filmar experimentos não era um procedimento assim tão comum) reverbera claramente o método de filosofia que Wittgenstein adotou a partir de 1931 (MS 110, p. 257; cf. ORD, p. 44 e IF § 122), a *übersichtliche Darstellung*: a apresentação sinóptica ou investigativa do caso, ou do uso de um conceito revelado mediante uma descrição. (cf. abaixo PIV§6, PIV§47 e PVII§65).
22. [PI§36] Esta frase é um acréscimo manuscrito posterior.
23. [PI§40] A partir desse ponto há um acréscimo manuscrito ao texto: “heißt hier ‘diese Zuordnung’ die der Figuren des Beweises selbst? Es kann nicht etwas zugleich Maß & gemessen sein.” / “Aqui se quer dizer que ‘esta correlação’ é a das figuras da própria demonstração? Ela não pode ser ao mesmo tempo a medida e o que foi medido”.
24. [PI§40] Acréscimo manuscrito à margem do datiloscrito: “Ich werde etwa auf die Figur hin die eine Zuordnung zu machen versuchen, aber nicht die andere, und werde sagen, jene sei nicht möglich”. / “Provavelmente eu tentaria fazer uma correlação com a figura, mas não nenhuma outra, e diria que aquela não seria possível”.
25. [PI§44] Esta seção encontra ecos nas IF não somente na citação da seção IF § 309, sobre o objetivo da filosofia do autor, mas também na questão do feitiço da nossa compreensão pela maneira como dispomos as nossas peças num determinado tipo de arranjo (IF § 109), e a consequente “cegueira do aspecto”, já discutida durante toda a década de 1930 pelo autor, mas aprofundada em maiores detalhes e experimentações em PPF.
26. [PI§45] Originalmente a palavra datilografada no texto não era “demônio”, mas “essência” (*Wesen*). Ao escrever à mão *Dämon* por cima de *Wesen*, Wittgenstein empresta bastante dramaticidade ao tema da essência, tal como proferida na gramática, que ele vinha tratando desde as seções PI§§31-32 e seguintes, e acrescenta a ela o tema do enfeitiçamento e da cegueira de aspecto. Cf. tb. IF§§ 109, 371.
27. [PI§53] Na edição alemã das OFM este ponto de exclamação é trocado por ponto final. Cf., mais abaixo, a nota 273 sobre a PV§45, e as passagens do MS 127, pp. 176-177, omitidas pelos editores do texto original em alemão, que retomam as reflexões que aparecem aqui.
28. [PI§63] Os “fatos da nossa história natural” são um conceito pragmático muito importante para Wittgenstein nos textos que compõem as OFM. Eles se referem a uma multiplicidade de hábitos, costumes, técnicas corporais, atitudes, traquejo, interesses e experiências incorporadas à nossa prática de medir, contar e calcular. Mas são atos tão comuns e corriqueiros que nos esquecemos deles, não os levamos em conta quando nos referimos às nossas técnicas e ao nosso conhecimento, e não lhes prestamos a devida importância. No entanto, sem eles nada faríamos no mundo da práxis. No MS 130, pp. 135-136, Wittgenstein assim os descreve:

Die Fakten der menschlichen Naturgeschichte, die auf unser Problem Licht werfen, sind «↓uns» schwer zu sehen «finden», denn unsre Sprache «Rede» geht an ihnen vorbei, – sie ist mit andern Dingen beschäftigt. (So sagen wir Einem “Geh ins Geschäft & kauf …”, – nicht: “Setz den linken Fuß vor den rechten Fuß etc. etc., dann leg Geld auf den

Os fatos da história natural humana que lançam luz sobre o nosso problema, são «↓para nós» difíceis de ver «achar», pois a nossa linguagem «fala» passa por elas, está ocupada com outras coisas. (Assim, a gente diz para alguém “Vai no armazém & compra …”, – e não “Coloque o pé esquerdo adiante do pé direito etc., etc., ponha então o dinheiro sobre

Schalter etc. (etc.)

dinheiro sobre o guichê etc. (etc.)

O conceito de “fatos da nossa história natural” será retomado mais seis vezes ao longo das OFM: PI§142; PII§40;PIV§§11,13; PVI§49; PVII§17.

29. [PI§65] A última frase é um acréscimo manuscrito posterior onde antes estava: “Doch in seiner Anwendung wo immer es sei” / “Claro que na sua aplicação, onde quer que seja”. A imagem de uma “ação à distância” torna-se agora um fato natural de quem age com certeza do que está fazendo. Todo o mistério se dissolve no uso.
30. [PI§69] Mais adiante, no Anexo II desta Parte I, Wittgenstein vai tratar com mais detalhes do papel do “surpreendente” na matemática, e de como o matemático pode parecer um descobridor quando, na realidade, é um inventor.
31. [PI§71] Hans Biesenbach, em *Anspielungen und Zitate* (2011, p. 310), sugere que a referência é a *Teeteto* 156e. O trecho sugerido por Biesenbach, no entanto, trata da diferenca entre os sentidos (ou sensações) e os objetos dos sentidos – o que pareceria remeter, por sua vez, à diferença fregeana entre o empírico e o conceitual. Entretanto, Joachim Schulte (2013) acredita que a referência é bem mais enigmática e indireta, e requer maior complexidade interpretativa. Como recorrer, por exemplo, a outras passagens em que Wittgenstein critica a concepção platônica de “propriedades”, como na p. 34, das *Wittgenstein’s Lectures 1932-1935*, em que Ambrose anota o seguinte comentário: “O discurso platônico de busca pela essência das coisas era muito parecido com um discurso de busca pelos ingredientes de uma mistura, como se as qualidades fossem ingredientes das coisas. Mas falar de uma mistura, digamos das cores vermelha e verde, não é como falar de uma mistura de uma tinta que tenha as tintas vermelha e verde como ingredientes.” Schulte indica, por isto, que estas passagens das OFM estão mais próximas da crítica à análise e decomposição ao mais simples da linguagem, tal como a que aparece na seção § 46 das IF, do que da discussão do conceito de propriedade de Platão, ou até da forma de platonismo defendida por Frege. No entanto, a observação seguinte, na p. 50 do TS 222, e que foi riscada por Wittgenstein, talvez esclareça muito mais a respeito de como o autor criticava o essencialismo neste trecho:

Hiermit ist in Zusammenhang, dass ich oben schrieb: “…dass eine Gruppe *wesentlich* aus … besteht”.

Wann besteht denn eine Gruppe ‘*wesentlich*’ aus …? Das hängt natürlich von der Art der Verwendung der *Bezeichnung* ab, die ich der Gruppe gebe. — Meine Hand hat zwar 5 Finger, aber ich hätte nicht gesagt: die Finger meiner Hand bestehen aus 3 und 2.

Nun, wesentlich ist es, ‘wenn es nicht anders sein *kann*’; und es kann nicht anders sein, wenn die Gruppe mit ihrer Teilung als Paradigma dienen «dient» soll.

Der *wesentliche* Zug ist ein Zug der Darstellungsart.

A propósito disto, escrevi acima: “… que um grupo consiste *essencialmente* em …”.

Quando um grupo consiste “essencialmente” em …? Depende, claro, do tipo de emprego da *designação* que dou ao grupo. — Minha mão tem 5 dedos, mas eu não diria: os dedos da minha consistem em 3 e 2.

Bem, é essencial ‘se não *puder* ser diferente’; e não pode ser diferente se o grupo com sua divisão deva servir «serve» como um paradigma.

O traço *essencial* é um traço do tipo de apresentação.

Parece-me que, sem deixar de tocar nisto, mas um pouco mais distante da filosofia tradicional ou das críticas a Frege e ao atomismo lógico, Wittgenstein mostra aqui que a “essência” se designa no âmbito de uma gramática como algo que “não pode ser de outra forma”. A analogia com Platão serviria apenas para mostrar que num jogo de linguagem como este não estaríamos tão longe das essências platônicas, por assim dizer, e que, por isto mesmo, poderíamos, se quiséssemos, ver as coisas de modo diferente.

32. [PI§73] Wittgenstein repete aqui, em superposição intertextual, a mesma distinção que Frege estabelece, na seção § 53 dos *Fundamentos da Aritmética*, entre marcas e propriedades de um conceito. Cf Frege 1884, p. 64. Na tradução de Frege, Paulo Alcoforado preferiu verter o substantivo neutro *Merkmal* por "nota" ou "nota de um conceito". Cf. Frege , 2009, p. 45, nota 10. Austin traduziu a mesma palavra, mais simplesmente, por "characteristic" ou "component characteristics" (cf. Frege, 1960, p. 64). A mesma intertextualidade aparece também na seção § 134 das IF. E sobre o gramatical e a essência, temos a seção § 371 das IF. Notemos que esta distinção fregeana entre o empírico e o conceitual é retomada por Wittgenstein de maneiras muito variadas, nas diferentes formas, direções e combinações com as quais este autor trabalha com a distinção entre o empírico e o gramatical ao longo do *Nachlass*.
33. [PI§77] O nome "Ramsey" é uma anotação em manuscrito feita posteriormente no datiloscrito TS 222, e não aparece na parte correspondente ao mesmo excerto no TS 221. A discussão entabulada nesta passagem é similar à diferença estabelecida na tradição kantiana entre conhecimento empírico e conhecimento puro, sem, no entanto, enveredar para a reflexão acerca dos próprios conceitos de sintético e analítico, de *a priori* e *a posteriori*, ou de necessário e contingente, envolvidos na discussão daquela tradição quando propõe a noção de "juízo sintético *a priori*", tal como já notamos no comentário à seção PI§73 acima. Deste modo, a voz que propõe uma tarefa na presente seção sobre números e contagem apenas pretende demonstrar que num caso estabelecemos relações internas, e, no outro, externas, querendo talvez, com isto, destacar que há casos claros de numeração e contagem cujas possibilidades são disponibilizadas exclusivamente de maneira interna. Em outros termos, não se trata de uma reapropriação de termos do idealismo transcendental, mas, como sempre, de uma atividade antifilosófica de esclarecimento de confusões. O que tem tudo isto a ver com "identidade do conceito" e também com o nome de Ramsey escrito logo a seguir? Sabemos que, de acordo com Moore, uma proposição não é composta nem de palavras nem de pensamentos, mas de conceitos. Proposições são objetos do pensamento, e conceitos são os constituintes da proposição (cf. 1899, p. 179). Neste sentido, a diferença que as coisas têm entre si, segundo Moore, é apenas derivada, e a identidade do conceito é o problema a ser discutido pela filosofia para que esta derivação seja mais facilmente explicada. Esta maneira de sublevar-se contra o idealismo de Bradley e o de Kant, presentes na primeira filosofia de Moore, em que se procura uma distinção mais clara entre o que é objetivo e real, por um lado, e o que é o pensamento, por outro lado, torna imprescindível a discussão da identidade do conceito na proposição. O TLP, apesar de conter uma disposição filosófica bastante distinta do pensamento de Moore, já que no TLP trata-se exclusivamente de dissolver falsos problemas da filosofia pela crítica da linguagem (cf. §§ 4.003-4.0031), também absorve para si, certamente, a imprescindibilidade da discussão da identidade do conceito. Neste caso, no entanto, de modo a que tudo se resolva na própria operação da linguagem. Um exemplo disto é um dos pontos altos da discussão de Wittgenstein com Ramsey sobre o próprio conceito de "identidade" (cf. WWK, pp. 189-192; CLD, pp. 158-159; WWC, pp. 61-63), tal como este o propôs em seu texto de 1925, *The Foundations of Mathematics* (cf. Ramsey, 1931, pp. 49-56). Ramsey concordava com o teor geral do TLP de que as proposições da lógica não são proposições genuínas, isto é, asserções que podem ser verdadeiras ou falsas, mas somente tautologias. No entanto, ainda buscava uma solução para que a matemática continuasse a ter um fundamento lógico. Por isto, o seu trabalho consistia na tentativa de proporcionar uma extensão da noção de função proposicional que alcançasse classes que não podem ser definidas por funções predicativas (classes infinitas, por exemplo, como a dos números); estas deveriam ser, neste caso, "funções em extensão" e, assim, o paradoxo da autorreferência seria supostamente eliminado sem necessidade do recurso ao axioma da redutibilidade proposto no *Principia Mathematica* de Russell e Whitehead (cf. 2019 [1910]). No TLP este problema não existia porque as proposições matemáticas eram consideradas apenas "proposições aparentes", proposições que consistem meramente em operações lógicas recursivas. Neste sentido, também o sinal de igualdade, concebido por Frege e Russell como um caso especial do conceito geral de identidade lógica na matemática, não tem uso no TLP. As quantificações, por sua vez, são concebidas como somas lógicas ou produtos lógicos. O TLP consegue, assim, eliminar a identidade lógica sem eliminar as equações matemáticas, porque números e objetos passam a ser não mais do que formas lógicas, em vez de constituirem conceitos. Não podem mais ser concebidos como funções de verdade de proposições elementares. Mas Ramsey, à diferença de Wittgenstein, recoloca o sinal de igualdade, e, portanto, a identidade, nas suas funções em extensão, de modo que x = y passa a ser uma função em extensão com duas variáveis, e o seu valor é uma tautologia se x e y têm o mesmo valor, e uma contradição se x e y têm valores diferentes (cf. 1931, p. 53). Deste modo, "x = y" é definido como uma função de duas variáveis Q(x,y) que é um produto lógico de equivalências materiais, como: f1x ≡ f1y . f2x ≡ f2y etc. Esta função gera uma tautologia se x e y têm o mesmo valor ou significado, e uma contradição se não for assim, porque haverá, então uma função $f_k x$ e dois objetos a e b tais que ~ ($f_k a \equiv f_k a$). Wittgenstein, no entanto, demonstra, nos textos citados acima, que a definição de Ramsey não funciona como proposição da lógica, seja como tautologia, seja como contradição. Se x e y tiverem diferentes valores, 'a = b' não é uma contradição, mas somente um contrassenso; e a ≠ b seria também um contrassenso, porque a negação de um contrassenso é também um contrassenso. Na perspectiva do TLP, ocorre neste caso apenas um mau uso dos nomes de objetos, posto que numa notação ideal cada objeto deve ter o seu nome próprio. Deste modo, o cuidado com o conceito exemplifica, neste caso, uma maneira de justificar a arbitrariedade e independência das operações da linguagem em relação ao mundo, do mesmo modo como ocorre com o "essencial" como marca do conceito lembrado na seção § 73 acima. Cf. mais comentários sobre Ramsey nas notas 292, 332 e 365. Cf. tb. um artigo de Porto (2012), que aborda a questão da identidade em Wittgenstein sob a ótica do seu tratamento da generalidade matemática e das suas objeções a enunciados que envolvem a noção de infinito.

34. [PI§78] Encontramos ecos dessa reflexão nas IF § 228, em que fazemos coisas em correlação com um semblante, uma imagem ou uma fisiognomia. Trata-se de uma reflexão no âmbito de compreensão do conceito de fisiognomia, ou da relação entre expressão, ação, seguimento de regras e visão de aspecto na práxis da linguagem.
35. [PI§80] Na edição alemã das OFM este itálico, presente no datiloscrito original, está omitido.
36. [PI§82] Uma nota dos editores da edição alemã diz neste ponto: "Tractatus Logico-Philosophicus 6.1261: Na lógica, processo e resultado são equivalentes".
37. [PI§82] Nesta autocitação vemos não somente que Wittgenstein trocou a observação sobre a lógica pela observação sobre a matemática, como também omitiu propositalmente, confirmando o estilo condensado e recluso da sua escrita, o que verdadeiramente estava no centro do seu pensamento e foi realmente mencionado naquela passagem do TLP: a de que não há surpresa (nem na lógica, nem na matemática).
38. [PI§83] Este itálico está omitido na versão alemã das OFM.
39. [PI§87] A frase escrita entre parênteses é um acréscimo manuscrito posterior ao texto, provavelmente com a intenção de ser anteposta à última oração subordinada do trecho principal. Na ordem tencionada posteriormente ficaria provavelmente assim: "Tarefa: devo chamar de fato empírico que (como 'este semblante', 'esta modificação', tem que ser explicado?), para que este semblante se torna aquele mediante esta modificação?
40. [PI§96] O autor eliminou com riscos a maior parte da p. 68 e toda a p. 69 do TS 222, passando diretamente para a p. 70.
41. [PI§105] As duas últimas perguntas desta seção são um acréscimo manuscrito posterior.
42. [PI§106] A edição alemã das OFM diz "13 vezes 13 é 196" em todos os casos em que esta conta apa-

rece. Todas as traduções consultadas também acompanham a sugestão de correção dos editores (cf. Wittgenstein, 1971; 1978; 1983; 1987). Mas aqui sigo aqui o datiloscrito original (TS 222 p. 79; que é um recorte do TS 221, pp. 185ss, que vem, por sua vez, dos MSS 117, p. 72ss, e 118, pp. 54v e ss.). Ressalte-se que a conta certa seria 13 x 13 = 169, mas é o resultado incorreto que faz sentido no contexto desta discussão da diferença entre crer e demonstrar.

43. [PI§109] Neste ponto, Wittgenstein riscou o artigo definido feminino no caso dativo *der* e o substituiu em letra manuscrita pelo artigo indefinido feminino no caso dativo *einer*.

44. [PI§110] Traduzir uma partícula modal como *wohl* por um advérbio como decerto parece ser uma maneira desajeitada de contornar uma dificuldade de tradução destes marcadores sintáticos da posição do falante com relação ao que afirma (cf. Weerning, 2015). Advérbios são meros modificadores de palavras, mas partículas modais do alemão não modificam nada, nem tampouco podem ser negados, postos em dúvida ou coordenados como os primeiros. Elas funcionam como operadores sintáticos para marcar a posição do falante em relação àquilo a que se refere. Sua função é pragmática, embora esteja marcada na sintaxe. Tratam-se, em muitos casos, de evidenciais que mostram sintaticamente a força ilocucionária daquilo que afirma o locutor da sentença. O interlocutor imediatamente entende a atitude do falante em relação, neste caso, aos motivos de achar interessante a pergunta a respeito do que se pretender dizer com “acredito que a x b = c”, sem com isto obrigar o interlocutor a também achar interessante o mesmo fato. Neste caso, é somente a posição do falante que está evidenciada pelo uso da partícula modal.

45. [PI§111] Mais uma partícula modal (desta vez, *doch*) está sendo usada nesta sentença para tentar persuadir o interlocutor, evidenciando-lhe que o ponto de vista do falante é o de que está convencido de que o interlocutor realmente não “acredita” em proposições matemáticas.

46. [PI§113] Nas IF há todo um grande bloco que aprofunda as discussões sobre seguimento de regras iniciados na Parte I das OFM (cf. IF §§ 185-242). No entanto, estas últimas seções da Parte I das OFM, em particular, são muito aparentadas às discussões que aparecem nas IF §§ 199-202. Naturalmente, Wittgenstein colocou juntos no TS 222 todos os recortes que tratavam do mesmo assunto.

47. [PI§115] A última frase, que os editores da edição original em alemão indicam ter sido acrescentada em março de 1944, provém do MS 124, pp. 150-151 (no original, com a indicação entre colchetes “para o datiloscrito”), e do MS 127, pp. 92-93. No próprio TS 222, p. 87 existe também um acréscimo manuscrito onde se lê: “Das heißt eigentlich, daß ein Mensch mit Zeichen des Verstandes auch so handeln könnte daß wir es närrisch nennen würden.” / “Na realidade, isto significa que uma pessoa com sinais de compreensão também pode agir de uma maneira que poderíamos chamar de insensata”.

48. [PI§116] O último parágrafo consta do MS 127, p. 93. É uma continuação do argumento anterior acerca de uma “pessoa compreensiva” ou “razoável”. Trechos do MS 127, escrito entre o final de 1943 e o começo de 1944, foram selecionados para compor, junto com partes extensas dos MSS 125 e 126, todos eles compostos enquanto Wittgenstein trabalhou como dispensário do setor farmacêutico no Guy’s Hospital, em Londres, a Parte IV desta publicação. Este deslocamento temporal obedece a uma compreensão em ordem temática imposta pelos editores ao texto cuja natureza, na verdade, é a de se entrecruzar em caminhos de ida e volta em todas as direções, tal como indicado no Prefácio às IF. Neste sentido, as edições em livro dos textos do *Nachlass* alteram significativamente a fisiognomia de uma escrita que também pretende, pela força pragmática da imprevisibilidade da forma, alterar a inércia de formas consolidadas de pensar.

49. [PI§116] Uma indicação manuscrita ao final da ficha remete à “Band XII, S. 103/1”. Este “Volume XII” seria atualmente, na classificação de von Wright (1993), o MS 116, p. 103. Lê-se ali:

‘ ‘Denken’ nennen wir wohl manchmal den Satz mit einem seelischen Vorgang begleiten, aber den “Gedanke” nennen wir nicht jene Begleitung. — Sprich einen Satz & denke ihn[!|;] sprich ihn mit Verständnis! — Und nun sprich ihn nicht, & tu nur das, womit, Du ihn beim verständnisvollen Sprechen begleitet hast! — (Singe dies Lied mit Ausdruck — & nun singe es nicht, aber wiederhole den Ausdruck<!>) — Und man könnte auch hier etwas wiederholen: Z.B. Schwingungen des Körpers, langsameres & schnelleres Athmen, Vorstellungsbilder.

Chamamos às vezes de ‘pensar’ a proposição acompanhada de uma operação mental, mas não chamamos de ‘pensamento’ àquele acompanhamento. – Profira uma proposição e pense nela!; Profira-a com compreensão! – Agora não a profira, & só faça aquilo que a acompanhou no proferimento compreensivo! – (Cante esta canção com expressividade – & agora não a cante, mas repita a expressividade!) – E poder-se-ia aqui repetir também alguma coisa: Por exemplo, as vibrações do corpo, respirações lentas & rápidas, imagens de representação.

50. [PI§118] O eco desta observação sobre dois tipos supostos de compulsão está nas IF § 140.

51. [PI§118] Observação manuscrita à margem do datiloscrito: “Bemerkung: ‘...die Wellen der Sprache’. Siehe Bemerkungen Bd XIII gegen das Ende” / “Observação: ‘ ...as ondas da linguagem’. Veja as observações ao fim do Vol. XIII.” Band XIII refere-se ao atual MS 117, segundo a classificação de von Wright (cf. 1993).

52. [PI§119] Na edição alemã das OFM este ponto de exclamação final que consta do datiloscrito (TS 222, p. 93) está omitido.

53. [PI§119] Wittgenstein escreveu acima do verbo *muß* (“temos que”), a variante *ist zu* (“devemos”). A edição alemã das OFM conserva a palavra datilografada originalmente, o que sugere ao leitor uma “obrigação”.

54. [PI§121] Esta mesma frase é mencionada entre parênteses na seção § 437 das IF, e aqui está também em PVI§49. Trata-se de uma observação sobre uma confusão comum entre filósofos e matemáticos entre o caráter da necessidade nas lógicas monotônicas, que define, por exemplo, a validade de um argumento – isto é, se as premissas de um argumento forem verdadeiras, a sua conclusão não pode ser falsa –, e a sua própria realidade como fórmula da linguagem que subsiste de maneira independente daqueles que a utilizam. Não se trata propriamente de uma confusão entre o intensional e o extensional, ou seja, entre a definição de um conjunto de condições necessárias e suficientes para a correta aplicação de uma expressão, na intensão, e os objetos aos quais aquelas condições se aplicam, na extensão. A relação entre intensão e extensão é apenas semântica e, portanto, entre a regra e sua aplicação. Aqui, cuida-se antes de uma confusão entre o ontológico e o socialmente constituído. Por conseguinte, sempre parece a Wittgenstein que se a necessidade é apenas uma imposição da regra, então é assim não por causa da natureza do mundo ou porque Deus o quis, mas simplesmente porque, como grupo social e em razão de imposições do mundo prático, escolhemos fazer deste modo. Pelo que a “dureza” do “exigir” pode ser sempre relativizada em razão de outros contextos e de outras determinações práticas diferentes da primeira. Há também aqui uma dificuldade de tradução que cumpre esclarecer: há três tipos de nominalização no alemão ((i) as infinitivais, (ii) aquelas com terminação em -ung e (iii) as que são constituídas pelo radical). No caso em foco, trata-se da possibilidade (iii), de nominalização pelo radical, o que lemos na sentença. Do ponto de vista semântico, o verbo nominalizado enfoca o estado resultante produzido pelo evento. Diante de uma forma de nominalização que não existe na língua portuguesa, nas traduções deste trecho nas IF, Bruni preferiu a formulação “A força do ‘deve’ lógico”; Montagnoli, “A dureza do ‘tem que’ lógico”; e Lourenço, “A dureza da necessidade lógica”. Minha opção por “A dureza do exigir lógico” pretende manter a nominalização da palavra, mas evitar o uso em terceira pessoa que não é natural no português. Ao mesmo tempo, quero fugir da palavra “dever” que tem, para nós, bastante conotação moral – algo que não está presente na ideia de “necessidade lógica”. Parece-me que a palavra “exigir” preserva melhor o caráter modal e impositivo que, para Wittgenstein, caracterizam

essencialmente a gramática. Cumpre observar que a ideia de "necessidade" na lógica, assim como a do "analítico/sintético", ou a do "a priori/a posteriori", são combatidas e dissolvidas tanto por Russell e Moore, como, posteriormente, por Quine, Kripke, e outros importantes filósofos analíticos do século XX. No entanto, Wittgenstein a discute desde o TLP (cf. § 6.37). Qual seria a sua intenção? Como se vê pela observação dos seus textos tardios, não se trata da defesa cognitiva de um conceito ou de uma ideia, mas da sua utilização como ferramenta para finalidades éticas em filosofia. Finalidades, diga-se de passagem, extramemente úteis para a própria atividade cognitiva cujo parasitismo filosófico é tratado metodologicamente. Nossa hipótese é, por isto, a de que Wittgenstein se utiliza amplamente de "imagens" para persuadir o leitor a "ver de outra maneira", e contribuir, assim, com a matemática como matemática, e com a ciência como ciência, na medida em que elas se livrem de contaminações filosóficas. Cf., acima PVI §§ 7-8, 49.

55. [PI§122] As aspas simples foram omitidas da edição alemã das OFM; além disto foi acrescentado um travessão ao final da última frase que não consta do datiloscrito original. Toda esta seção foi retomada na seção § 193 das IF, com muito poucas alterações. Sobre a importância do uso de aspas simples e duplas no texto de Wittgenstein, cf. o artigo de Baker (2002).
56. [PI§123] Toda esta seção se repete com pouquíssimas alterações nas IF § 191.
57. [PI§124] Toda esta seção se repete com um complemento final nas IF § 192.
58. [PI§125] Esta mesma seção se repete com poucas modificações nas IF § 194.
59. [PI§125] A edição alemã das OFM coloca aqui um ponto de exclamação que não existe no original, embora o autor haja acrescentado o ponto de exclamação numa versão posterior (cf. IF § 194).
60. [PI§125] Talvez a frase em português "Ele tem estado aqui" não transmita tão bem a ideia de uma ação completada no percurso de um tempo ocorrido no passado que ainda tem efeitos no presente, tal como está no tempo perfeito (*Präsensperfekt*) da língua alemã. Este tempo verbal é contruído com um verbo auxiliar conjugado no presente e um verbo principal conjugado no particípio passado. O emprego do *Präsensperfekt* na frase "Er ist hier gewesen" indica que a pessoa veio por um tempo, mas que o fato ainda tem relevância no presente, ou então indica somente que a pessoa passou recentemente por lá. Wittgenstein então imagina alguém que não compreende este uso do tempo verbal e apreende somente o verbo auxiliar em vez das duas formas em conjunto. Isto exemplifica para o autor um emprego de uma palavra vinculada a uma imagem falsa do que realmente ocorre. Repare o leitor que o método wittgensteiniano é o de buscar no uso das palavras supostas imagens equivocadas daquilo que realmente ocorre na prática.
61. [PI§126] Esta seção se repete com pequena alteração nas IF § 195.
62. [PI§126] Desta vez o autor explora a homofonia entre o som da terceira pessoa do singular do verbo *nähen* (*nähe*/costura) e o substantivo feminino *Nähe* (proximidade). Neste caso, a criança produziu, ao ouvir a palavra, a imagem da proximidade e não da costura, passando a supor que o alfaiate produzisse vestidos pela mera aproximação dos fios entre si. Novamente aparece o emprego de uma palavra associada a uma imagem equivocada do que ocorre na prática.
63. [PI§127] Esta mesma seção se repete com um parágrafo a menos nas IF § 196. Entre as pp. 18-28 das LFM, nas aulas I e II, Wittgenstein dá vários exemplos de compreensões equivocadas de emprego de palavras, além de comentar sobre quais seriam possíveis critérios de compreensão de palavras.
64. [PI§130] Esta mesma seção se repete com pouquíssimas alterações nas IF § 197.
65. [PI§132] Os editores da edição alemã original das OFM indicam o texto de Frege, *Leis Básicas da Aritmética*, Volume I, p. XVII, como fonte da referência de Wittgenstein. As IF, na seção § 251, tratam exatamente do mesmo tema da identidade e diferença a partir da referência ao texto de Frege. Esta discussão é retomada na PVII§38. A discussão sobre "identidade" no TLP e na discussão com Ramsey é comentada acima, na nota 33 à seção PI§77. O leitor deve notar que Wittgenstein não discute tecnicamente o conceito de identidade de Frege, fundamental para o conceitualização do conceito de número, conceito de segunda ordem, mediante o recurso tanto à "identidade" como à "equinumericidade". O foco desta seção é a sua atitude – o que é importante para salientar o caráter não-cognitivo da filosofia de Wittgenstein, que não é menos importante para a utilidade cognitiva da lógica.

66. [PI§133] No datiloscrito original há um asterisco sobre a palavra "Technik" que remete a "Watson". Este é provavelmente o físico, matemático, aluno e amigo de Wittgenstein, W. H. Watson (cf. CLD, p. 192). Não se deve pensar que Wittgenstein esteja fazendo declarações cognitivas sobre a natureza da lógica nesta observação. Como sempre, suas asserções são gramaticais ou, melhor dizendo, *praxiológicas*. O que não quer dizer que sejam "literárias" ou "místicas", mas simplesmente que elas envolvem os pressupostos inerentes, tácitos e algumas vezes não muito bem-vindos da própria atividade cognitiva da lógica. Por este motivo é que o gramatical está unido à "essência" e à "técnica" ao mesmo tempo. Sobre o proferimento de "essências" na gramática, cf. acima as notas 19, 26, 30 e 31.
67. [PI§141] Este itálico, sublinhado em tracejado no original, é omitido na edição alemã das OFM. Sobre a importância do uso de itálicos no texto de Wittgenstein, cf. o artigo de Baker (2004, pp. 224-259).
68. [PI§142] Esta observação se repete quase que integralmente nas IF § 415. A ideia dos "fatos naturais da história da humanidade", que se refere a tudo aquilo que nos acompanha como seres humanos e que possibilita o desempenho tranquilo das nossas práticas cotidianas, é um fator pragmático de extrema importância para Wittgenstein ao longo dos textos das OFM. Conferir também as seções: PI§63; PII§40; PIV§§11,13; PVI§49; PVII§17.
69. [PI§149] A edição alemã das OFM coloca ao final da frase interrogativa um ponto de interrogação inexistente no original.
70. [PI§151] "Os Espertalhões" (*Die klugen Leute*) é um conto dos irmãos Grimm que versa sobre uma sequência de pessoas ingênuas que, iludidas por espertalhões, realizavam negócios de maneira estranha, imaginando que haviam levado vantagem quando, na verdade, haviam perdido tudo.
71. [PI§152] Esta seção vinha imediatamente antes da seção anterior no datiloscrito original. Há, porém, uma indicação a lápis para a troca de lugares entre elas. Aqui, o mesmo trecho das *Leis Básicas da Aritmética,* de Frege (Introdução, p. XVI), é citado na PIV§17.
72. [PI§155] Há uma observação manuscrita à margem da ficha onde se lê: "Sind unsre Schlußgesetze ewig und unveränderlich?" // "São as nossas leis de inferência eternas e imutáveis?"
73. [PI§156] A ficha que corresponde a TS 222, p. 123 está riscada pelo autor. Provavelmente por esta razão os editores tenham preferido omiti-la na publicação. Nela vinha a seguinte observação:

Wer uns erinnert: "Die Kette der Gründe hat ein Ende", stellt den Ursprung der Kette mit ihrer Mitte zusammen, dass wir den Unterschied wahrnehmen. 'Schau das an — und schau da an! Präg ' Dir diese beiden Formen ein!'	Quem nos lembra: "A cadeia de razões tem um fim", conecta a origem da cadeia com o seu centro para que possamos perceber a diferença. 'Olhe para isto - e olhe para ali! Grave estas duas formas!'

74. [PI§156] No TLP, Wittgenstein dizia "Não podemos pensar nada de ilógico, porque, do contrário, deveríamos pensar ilogicamente" (TLP § 3.03), e, com isto, estabelecia o que chamamos de "pensamento" no escopo do logicamente possível. No caso do TLP,isto queria dizer exclusivamente "A figuração lógica dos fatos" (TLP § 3). O que mudou, deste ponto de vista, entre o TLP e as OFM? Aqui a lógica não se confunde mais com a "figuração lógica dos fatos", mas ela é apenas configuração do que quer que seja. Do mesmo modo que a configuração de um método de medição possibilita o ato de medir, e uma certa maneira de correlacionar os fatos empíricos possibilita também a sua compreensão e explicação. O que mudou foi uma visão abstrata da lógica, que passou a ser uma visão concreta, tornando-se parte da prática comum dos seres humanos quando expressam pensamentos; isto é, a lógica passou a fazer parte do que Wittgenstein chama muitas vezes nesta coleção de textos de "história natural da humanidade" (cf. acima a nota 28 da seção PI§63), ela passou de entidade abs-

trata a entidade pragmática e normativa. No entanto, ainda continuamos a não poder "pensar ilogicamente", mesmo que a lógica seja concebida normativamente. E qual é o interesse de Wittgenstein ao formular tais correlações entre lógica e pensamento? A meu ver, assim como no TLP ele pensava a filosofia como cumprimento do dever de "dar a entender" ou "insinuar" (*bedeuten*) o indizível ao delimitar claramente o dizível (TLP §§ 4.113-4.115), também aqui quer fazer o mesmo ao mostrar como estamos aferroados à inexorabilidade do normativo. É como se não pudéssemos pensar de outro modo, quando, na realidade, podemos se a correlação interna entre o lógico e o empírico de alguma maneira se modificar.

75. [PI§159] A presença do evidencial "doch wohl" na formulação da frase em alemão, uma combinação de partículas modais diretamente intraduzíveis ao português, mostra que o falante espera que o interlocutor aceite os indícios em oposição a denominar a conclusão do cálculo como "resultado de experimento". Esta denominação expressaria nada mais que uma impressão subjetiva. Portanto, não seria um experimento, mas uma orientação paradigmática. Ressalto este estilo de argumentação aqui, porque ele é totalmente diferente do estilo que Wittgenstein utilou até 1933 no BT, nas PG e nas PR, por exemplo. Estes mais peremptórios e explícitos do que o que aparece aqui de maneira indireta e ostensiva, sem que muita coisa precise ser dita. Wittgenstein aparentemente adaptou ao longo do tempo o seu estilo literário ao seu método.
76. [PI§161] Na edição alemã das OFM esta frase é tomada como início de um novo parágrafo. Talvez a mudança de ficha tenha levado os editores a tomar esta decisão, mas nem o original, nem as anotações precedentes do autor indicam realmente o começo de um novo parágrafo. Falta o afastamento usual da margem adotado por Wittgenstein como indicação do começo de novo parágrafo (cf. MS 117, p. 28; TS 221, pp. 158a2-158b).
77. [PI§163] Nas duas formulações anteriores desta seção (MS 117, p. 32 e TS 221, p. 161) encontramos um travessão curto precedendo a última frase. No entanto aqui, no TS 222, p. 132, surge, aparentemente, uma correção a tinta para marcar, talvez, um travessão longo. Normalmente, o autor costumava assinalar travessões longos nos datiloscritos com dois travessões. Mas o que vemos, na presente seção, é apenas uma inserção com tinta esferográfica, que poderia muito bem ser acidental. Na dúvida, a melhor decisão é deixar como já estava assentado na edição alemã.
78. [PI§165] Esta frase é um acréscimo manuscrito ao texto da seção datilografada. Na edição alemã das OFM ela foi publicada entre parênteses. Sugerir a matemática como uma atividade "assentada nas métricas originárias" significa remetê-la ao puro jogo do cálculo, ao algoritmo, ao processo efetivo e formal de decisão, quaisquer que eles sejam através das diferentes culturas e da história, com quaisquer associações de elementos naturais e humanos. Significa desvesti-la da associação tipicamente ocidental entre o resultado do cálculo e a verdade (transcendente) da proposição. Cf., para isto, TS 213, pp. 748-749. O "originário" da matemática são os "fatos da nossa história natural" (cf. PI§63; PI§142; PII§40;PIV§§11,13; PVI§49; PVII§17).
79. [PI§166] O advérbio *immer* ("sempre") aparece ao mesmo tempo sublinhado em traços e riscado no datiloscrito original.
80. [PI§168] Esta frase é um acréscimo posterior manuscrito ao texto datilografado no original. Note-se o estreito parentesco destas duas últimas seções com as IF § 122, no sentido de descobrir e inventar conexões para facilitar a descrição da apresentação panorâmica. Em ambos os casos criam-se jogos de linguagem: na matemática, com novas proposições e demonstrações; no método filosófico, pelas descrições do problema. A frase também coloca a descoberto que a matemática é uma práxis, não uma ciência natural dotada de um corpo teórico construído sobre uma coleção de hipóteses.
81. [PI§170] Na edição alemã das OFM aparece um ponto final no lugar em que no original aparece um ponto de exclamação.
82. [PI§170] No datiloscrito TS 222, p 135, assim como em TS 221, p. 243, não aparece nenhum desenho

neste lugar. Os editores provavelmente o recuperaram a partir do MS 119, p. 98. Uma aplicação decolonial deste raciocínio de Wittgenstein se mostra quando lembramos que o processo de contagem de muitas tribos indígenas brasileiras está associado ao uso dos dedos, da mão fechada, dos olhos, do nariz e da boca. Isto indica uma prática de contagem tão legítima quanto qualquer outra, já que contar parece ser sempre uma associação entre classes, ou então entre objetos dentro de classes.

83. [PI§171] Os editores do original em alemão colocaram a seguinte nota: "Esta seção fica no fim do datiloscrito repartido em fichas, ao qual corresponde a Parte I e o subsequente Anexo I. O seu lugar na coleção de fichas, entretanto, não está completamente claro, e, por causa disto, os editores não a acolheram na primeira edição. Não é seguro que 'Conecta-se com isto' se relacione com as seções 169 e 170, que são precedentes. No datiloscrito a seção também estava colocada entre parênteses". Esta observação não é mais necessária quando o leitor já pode ver no próprio texto que a compilação saltou 12 páginas de fichas entre a seção § 170 e a § 171. Veremos que a ordem das páginas presente no TS 222 é retomada a partir do Anexo I.
84. [AI§1] No TS 222, p. 136, Wittgenstein riscou o complemento "der Geometrie".
85. [AI§2] Que a dificuldade da filosofia seja o *reconhecimento*, isto é, uma questão de aceitação, de disposição da vontade, e não exatamente de "explicação", isto é, uma questão de derivação lógica correta, é um programa de filosofia já enunciado desde o começo da década de 1930. No TS 213 (o Big Typescript), Wittgenstein já indicava que a "Dificuldade da filosofia não é a dificuldade intelectual das ciências, mas a dificuldade da conversão (*Umstellung*). A resistência da *vontade* deve ser superada" (TS 213, p. 406, § 86). Nesta mesma época, anotou em inglês no seu diário (MS 153b, pp. 30r-30v):

> Difficulty of our investigation: great length of chain of thoughts. The difficulty is here essential to the thought not as in the sciences due to its novelty. It is a difficulty which I cann't remove if I try to make you see the problems. I cann't give you a startling solution which – suddenly will remove all your difficulties. I cannt find one key which will unlock the door of our safe. The unlocking must be done in you by a difficult process of synoptizing certain facts.

> A dificuldade da nossa investigação: a grande entensão da cadeia de pensamentos. A dificuldade é essencial aqui para o pensamento, não como nas ciências devido à sua novidade. É uma dificuldade que não posso remover se eu tentar fazer com que você veja os problemas. Eu não posso te dar uma solução surpreendente que – de repente irá remover todas as suas dificuldades. Não posso encontrar uma chave que irá destrancar a porta do seu cofre. O destrancamento tem que ser feito em você por um difícil processo de sinoptizar certos fatos.

Isto indica não somente o método de descrição dos fatos, dos problemas, das dificuldades, em que se encontram e inventam os elos intermediários das conexões em que estes se apresentam panoramicamente, tal como preconizado nas IF § 122, mas também um estilo de escrita e de apresentação dos problemas em que a incitação ao reconhecimento e a superação da resistência da vontade está decisivamente em jogo na figura da chave que pode destrancar a porta.

86. [AI§3] Este travessão simples é omitido na edição alemã das OFM.
87. [AI§4] Os editores da versão alemã original das OFM colocaram a seguinte nota: "Para esta última frase existem no original mais alternativas assinaladas: 'Nós dirigimos o nosso foco para a expressão do que quisemos dizer.' '*Nós* colocamos a expressão do que queremos dizer no lugar do que quisemos dizer.' '*Nós* fixamos o nosso olhar na *expressão* do que queremos dizer.' 'Dirija o seu olhar para a expressão do que quis dizer.'"
88. [AI§5] No original vinha, junto com a palavra "ritmo" (*Rhythmus*), a frase *Aspekt* (*gesehenen Rhythmus*). Poderíamos traduzir a versão mais antiga como "consiste, talvez, no aspecto (ritmo entrevisto) da fisionomia de 'não (não p)'".
89. [AI§10] Há uma indicação manuscrita de Wittgenstein na p. 140 do datiloscrito para inserir neste

lugar esta seção originalmente datilografada na p. 139.

90. [AI§11] Esta redução ao absurdo do caso da negação da negação no interior de um dialeto serve para mostrar como esta regra é apenas uma determinação, ou uma prescrição, de um jogo de linguagem. Um jogo de linguagem é um "adestramento" (*Abrichten*; cf. IF § 5), e, como tal, nos leva à ilusão de que tudo é assim em qualquer lugar; mas o jogo de linguagem só vige no interior de uma forma de vida que desenvolveu uma certa atividade ou uma certa prática, à distinção de outras formas de vida (cf. IF § 23).
91. [AI§16] Uma variante manuscrita acima da palavra "função" propõe "eficácia, efetividade, resultado, efetuação" (*Wirksamkeit*).
92. [AI§16] Os editores das OFM indicam uma observação escrita à margem (*Randbermerkung*) pelo autor no manuscrito original: "O que significa 'nem não p' e 'não nem p'?".
93. [AI§18] Esta observação é retomada nas IF § 562.
94. [AI§19] Esta observação é retomada nas IF § 563.
95. [AI§20] Esta observação é retomada nas IF § 564.
96. [AI§21] Esta observação é retomada nas IF § 565.
97. [AI§22] Esta observação é retomada nas IF § 566.
98. [AI§23] Esta observação é retomada nas IF § 567.
99. [AI§24] Esta observação é retomada nas IF § 568 e relacionada com o conceito de "fisiognomia".
100. [AI§27] Os editores da OFM indicam que esta observação estava escrita à mão por detrás da folha datilografada na p. 146.
101. [AII§2] O leitor deve notar como toda esta reflexão, a começar por colocar em xeque a crença comum de que o matemático é um descobridor, declarando que ele é, na verdade, um inventor, se relaciona intimamente com a proposta metodológica apresentada explicitamente em IF § 122. Aqui o surpreendente na matemática não está conectado com qualquer descoberta empírica, mas se liga com a apresentação panorâmica (visão sinóptica) dos termos em jogo na argumentação, e também com a mudança de aspecto proveniente da descrição destes termos. Por um lado, há uma surpresa que provém do fato de que nem sempre nos reconhecemos nos nossos atos; mas, por outro lado, o desaparecimento da surpresa na matemática provém da compreensão de que estamos diante daquilo que fazemos sempre da mesma maneira: a nossa própria prática de todos os dias com relação àquele tema.
102. [AII§4] Mais uma vez Wittgenstein enfatiza o despertar do aspecto, do "ver como", para dissolver o efeito do surpreendente na matemática. A filosofia não tem, portanto, uma solução cognitiva para o problema – tem uma solução estética.
103. [AII§10] Toda esta seção está riscada no datiloscrito original (TS 224, p. 9).
104. [AII§11] Toda esta seção está riscada no datiloscrito original (TS 224, p. 9).
105. [AII§13] Esta última frase em alemão é formulada no modo do subjuntivo especial (*Konjunktive I*), que não existe em português. Por isto, não se consegue talvez capturar toda a sutileza do que expressa o autor com a frase. Este modo é utilizado na língua alemã para os casos de discurso indireto, isto é, quando queremos relatar o que alguém disse. Manchetes e textos de jornal se utilizam fartamente do discurso indireto. O discurso indireto em português é formulado sempre com uma frase subordinada; no caso em pauta teria que ser "Ele disse que não é ladrão". Mas como em alemão basta o modo verbal para caracterizar o caso, sem necessidade de uma frase subordinada, a gramática, por si mesma, de maneira completamente independente do mundo, já propõe uma espécie de "evidencialidade indireta" que não seria possível na nossa língua. Wittgenstein está trabalhando com essa evidencialidade indireta da própria gramática, que leva o interlocutor a duvidar, independente de referência a qualquer contexto empírico, da veracidade da afirmação. A gramática da língua alemã, por si mesma, nos permite agir assim, como diz o autor. Em português, não; teríamos que recorrer ao contexto para produzir o mesmo efeito. Na nossa língua só se consegue a evidencialidade no caso de contrafactuais. Por exemplo, quando dizemos "quisera que chovesse": a inferência de que não está chovendo vem, neste caso particular da língua portuguesa, da própria gramática. O acréscimo manuscrito sobre o texto datilografado da última frase em parênteses, que serve de variante ao que foi redigido, evidencia a intenção do autor:

(Sieh' Betrachte doch nur die Technik unserer elenden Zeitungen an!)	(Basta olhar para a técnica dos nossos lamentáveis jornais!)
//Vergiß doch nicht was Dir Vergessen wir doch nicht was uns ...täglich vor Augen ist: — die Technik unsrer Zeitungen//.	//Não se esqueça do seu não nos esqueçamos do que ... está diariamente diante dos olhos: — a técnica dos nossos jornais.//

106. [AIII§1] O Anexo III é um extrato de 10 páginas datiloscritas que Wittgenstein primeiro separou do grande conjunto de observações filosóficas sobre a matemática que compõe o TS 221 e, depois de mais uma vez rearranjadas em novos recortes compilados no TS 222, foram novamente separadas e formaram o que hoje está classificado como TS 223. Originalmente, todas estas reflexões sobre os teoremas da incompletude de Gödel foram lançadas no MS 118, pp. 105v-116v, a partir do dia 22/09/1937, exceto o atual § 20 que finaliza o excerto e foi redigida originalmente como a última anotação do caderno de notas denominado como MS 159 (p. 24r), provavelmente no ano seguinte, em 1938. Pode-se concluir das evidências disponíveis que as reflexões sobre os teoremas da incompletude de Gödel são um material extensamente trabalhado e revisado, até mesmo com novas anotações manuscritas inseridas sobre o datiloscrito final. Os teoremas de Gödel foram também objeto de discussão nas aulas de Wittgenstein na Whewell's Court durante o período de Páscoa em 1938 (cf. Wittgenstein 2017, pp. 50-57). As observações que agora vão, particularmente, das seções § 1 até § 4, acompanham muito de perto as seções §§ 21-24 das IF, nas quais Wittgenstein se pergunta acerca da existência de jogos de linguagem diferentes misturados (e ocultos) no mesmo ato performativo de inserir uma "asserção". É neste sentido que vai caminhar a reflexão sobre as interrelações entre proposições da matemática e o papel da aritmética nas nossas formas de vida, chegando até o teorema da incompletude de Gödel, a partir, mais precisamente, da seção § 8. A questão, para Wittgenstein, é realmente a de saber até que ponto a matemática precisa de uma metamatemática incutida tacitamente nas formulações numéricas das proposições, ou então no conteúdo de uma "prosa" que acompanha as proposições e imprime um certo sentido ao que não seriam senão meras operações particulares dentro de um jogo de linguagem praticado no interior de uma forma de vida. Em outras palavras, Wittgenstein se pergunta se não se trataria em Gödel da mesma inserção mais ou menos furtiva da dúvida cética, presente nas motivações das distintas tentativas de fundamentação da matemática em Frege, Russell e Hilbert (o horror à contradição seria a razão principal para o fundacionista desejar com urgência uma prova de consistência), o que também estaria presente na raiz motivacional das provas de incompletude de Gödel. Do ponto de vista prático da atividade matemática, esta dúvida não existe, e nem sequer é importante haver qualquer prova de consistência para que o cálculo possa ser efetuado: o cálculo simplesmente tem que ser, do ponto de vista prático, decidível. Por isto é que a atitude filosófica de Wittgenstein é oposta a dos fundacionistas. Nosso autor só trata de "descrever o uso efetivo da linguagem" (IF § 124), não há por que fundamentá-la; a matemática fica eminentemente como está, e qualquer problema relevante da lógica matemática é, para o autor, um problema da matemática como qualquer outro. Nenhuma descoberta poderia fomentar a matemática. Um jogo de linguagem da demonstração, neste caso, cujo sentido é dado pela própria demonstração de maneira completamente independente do que se denomina como "verdade" ou "falsidade" de uma proposição, faz com que, de fato, a demonstrabilidade de uma proposição se confunda com a sua própria "verdade". Não haveria sentido em dividir as duas ideias

como dois diferentes compartimentos conceituais, já que o sentido de uma proposição consistiria precisamente na sua própria demonstrabilidade. Não estariam as proposições da matemática, pelo menos algumas vezes, envolvidas com outros jogos de linguagem diferentes daqueles preconizados pelas teorias da lógica mais ortodoxas da década de 1930 e 1940? Neste sentido, Kienzler & Grève lembram que "A transcrição da matemática na notação lógica do PM [Principia Mathematica] constitui uma transformação da matemática em um sistema de sentenças" (2016, p. 90). As teorias de Gödel, no entendimento de Wittgenstein, supostamente perpetuariam estas muitas vezes imperceptíveis transformações, como se a matemática fosse uma coisa só, uma forma ideal platônica que resumiria no *tópos uranus* a essência de toda a prática matemática operacionalizada no mundo corruptível; um corpo de conhecimento unificado e petrificado cuja "verdade" seria unívoca e eterna, e não se constituísse, ao revés, ao longo da história natural da humanidade, como uma série de práticas muito variadas , com propósitos sempre circunscritos contextualmente e dentro das muitíssimo diferentes formas de vida.

107. [AIII§3] Esta única observação da seção § 3 segue muito de perto a seção § 22 das IF. Lá Wittgenstein chama a atenção para o sinal de asserção de Frege ⊢, que separa o julgar, ou o pensamento, daquilo que se julga, o intensional do extensional, ou o pensamento do objeto que poderia saturar, na realidade referida, o conceito. Teríamos, deste modo, dois atos de fala, por assim dizer, reunidos no mesmo sinal de asserção. Aqui também, hipoteticamente, dois jogos de linguagem numa mesma ordem ou comando: o que se propõe na ordem, o seu ato locucionário, e o próprio comandar ou ordenar do que foi proposto, ou o ato ilocucionário.

108. [AIII§4] No TS 223, p. 2, há uma seção adicional que foi omitida pelos editores, talvez porque esteja rabiscada com dois traços entrecruzados como a indicar uma rejeição. Sua origem se encontra no MS 118, p. 107v, do qual foi transcrito quase que absolutamente sem modificações. Lê-se:

> Wo es bei Euklid heißt: das und das sei zu konstruieren und am Schluß, 'q.e.c.', könnte man auch setzen: es sei zu beweisen, daß das die Konstruktion dieser Figur sei und am Schluß schreiben 'q.e.d.', also das Resultat auf die Form eines bewiesenen Satz es bringen.

> Onde em Euclides se diz: isto e isto deve ser construído, e, ao final, 'q.e.c.', pode-se também colocar: deve ser demonstrado que esta é a construção desta figura, e, ao final, escrever 'q.e.d.', já que o resultado deve ser colocado na forma de uma proposição demonstrada.

Observa-se que esta seção adicional, omitida na edição final, exemplifica uma mudança de atitude pela mera mudança do sinal: de 'q.e.c.' passa-se para 'q.e.d.', de "construído" para "demonstrado". No entanto, a diferença no que, de fato, deve ser operado não é nenhuma. Houve, no entanto, uma total mudança de atitude.

109. [AIII§6] Tanto a edição em alemão de Anscombe, Rhees, e von Wright (Wittgenstein, 1984) quanto a sua tradução em inglês (Wittgenstein, 1978) colocam a primeira variável *p* entre aspas simples, e a segunda, depois do sinal de igualdade, sem aspas. A traduções francesa (Wittgenstein, 1983) e espanhola (Wittgenstein, 1987) também acompanham a mesma indicação. No entanto, nem no datiloscrito original (TS 223, p. 3), nem no manuscrito original (MS 118 p. 108r), consta a inserção de aspas em qualquer das duas ocorrências da variável *p*. Sabemos que Wittgenstein, desde o TLP e ao longo de toda a sua produção filosófica, rejeita o recurso a metadisciplinas, como a metalinguagem ou a metamatemática (TLP 3.33-3334; IF §§120-121). É possível que neste contexto, em que a argumentação caminha no sentido de que no *Principia Mathematica* a asserção de uma proposição é idêntica à sua verdade, Wittgenstein não iria querer que a sua afirmação sugerisse nem uma teoria dos tipos, nem uma teoria redundante da verdade. Diferente do que ocorre no contexto das IF § 136, em que a repetição dessa mesma fórmula (e agora a primeira variável *p* está entre aspas) está inserida numa narrativa em que se problematiza justamente a teoria de Frege tal como posteriormente sistematizada por Ramsey (como uma teoria redundante da verdade).

110. [AIII§6] "Pp" é uma notação dos Principia Mathematica, de Russell & Whitehead, que significa "proposição primitiva", ou o equivalente de uma asserção, de um teorema ou de um axioma. Cf. tb as seções PIII§33 e PIII§35.

111. [AIII§8] Wittgenstein inicia a seção § 8 logo depois de um introito (seções §§ 1-7) em que coloca em dúvida se proposições aritméticas são realmente "proposições", no sentido de serem genuínas asserções sobre um estado de coisas no mundo. Neste sentido, coloca-se em evidência uma teoria da verdade na matemática que, em vez de pressupor uma relação de correspondência entre enunciado e objeto lógico ou mental, realmente subscreva uma teoria do tipo "descitacional" ou "redundante", em que se diz que "'p' é verdadeiro = p" (cf. a seção §6). Gödel certamente trabalha com uma concepção de verdade platônica da proposição matemática. Senão não teria sentido a sua motivação de fundo para propor teoremas de incompletude (cf. Berto, 2009b, pp. 149-151). É certo que Wittgenstein não defende "teorias", nem escreve para defendê-las. Nosso autor defende somente uma visão praxiológica no sentido de que a matemática é uma prática cujo sentido é dado dentro de um contexto ou de um "ambiente matemático" (cf. Parte II § 3), e é neste sentido que a "verdade" de uma proposição matemática corresponde ao que, no contexto em que está sendo usada, satisfaz exigências pragmáticas. Estas hipóteses filológicas são plenamente coerentes com a rejeição de metateorias e com a concepção de proposições matemáticas como pseudoproposições já presentes no pensamento do autor desde o TLP. O que sugere, desde logo, uma mais forte continuidade no pensamento de Wittgenstein do que muitos comentadores que dividem o seu pensamento em fases distintas parecem supor. Tais linhas de raciocínio e de condução interna do argumento é que permitem a Wittgenstein colocar uma de suas vozes a perguntar a respeito de uma proposição Gödeliana como P "Não teria que dizer agora desta proposição: por um lado ela é verdadeira, por outro lado ela é indemonstrável?". O desconhecimento destas peculiaridades do pensamento de Wittgenstein faz com que muitos comentadores tenham presumido que ele ignorava solenemente a aritmetização do cálculo realizada por Gödel. Um escrutínio mais cuidadoso do *Nachlass*, no entanto, comprova eficazmente que não é este o caso (cf. Rodych, 2002, p. 380). Wittgenstein tinha perfeito conhecimento de que Gödel tentava eludir a questão da verdade da proposição no sistema aritmético ao atribuir números gödelianos a todos os símbolos do sistema, e realizar, assim, as suas demonstrações em formulações exclusivamente aritméticas. O que o lógico realmente demonstrou foi portanto que "se uma proposição do cálculo for demonstrável, então ela é indemonstrável, e o cálculo, por conseguinte, comprova-se como ω-inconsistente". Quando uma de suas vozes pergunta como uma proposição pode ser ao mesmo tempo "verdadeira e indemonstrável", ela o faz a partir do ponto de vista pragmático do uso do cálculo e da inexistência de uma metalinguagem.

A partir propriamente desta seção § 8, portanto, até o fim do Anexo III, Wittgenstein vai comentar diretamente o teorema da incompletude de Gödel, segundo o qual uma teoria axiomática recursivamente enumerável e capaz de expressar verdades na aritmética não pode ser, ao mesmo tempo, completa e consistente. Em outras palavras, o problema de saber se um sistema aritmético é ou não decidível, posto que é enumerável, é respondido pelo lado negativo pelo jovem matemático austríaco em 1931. O leitor pode também encontrar em Wittgenstein's Whewell's Court Lectures (Wittgenstein, 2017, pp. 50-57) praticamente a mesma argumentação daqui desenvolvida. O que há de notório nestas passagens do Anexo III é que uma grande quantidade de comentadores, como Kreisel (1958), Bernays (1959), Steiner (2001) e Lampert (2007), por dar somente alguns exemplos, asseguram que Wittgenstein não compreendeu realmente o teorema da incompletude, e de que as suas reflexões sobre Gödel expressam uma rejeição cabal das suas demonstrações. No entanto, é possível pensar que estas sejam más compreensões dos propósitos de Wittgenstein, prefiguradas pelo que o próprio autor declara na seção PVII§19: "Minha tarefa não é falar sobre, por exemplo, a prova de

Gödel; mas ladeá-la" (cf. abaixo o comentário sobre PVII§19). Ou seja, como sugere Rodych (1999, p. 177), Wittgenstein considera Gödel nos seus próprios termos e não nos dele. Isto é, enquanto Gödel trabalha num panorama em que termos como "verdade", "demonstrabilidade", "consistência" e "decidibilidade" estão abstratamente entretidos, Wittgenstein opera tais conceitos no plano concreto das operações aritméticas em que o seu sentido é dado pelo seu uso ou pela sua demonstrabilidade. É assim que ele encara o *Principia Mathematica*: não nos termos de um sistema aritmético universal e abstratamente consistente e completo, mas como um livro cujos conceitos subsistem dentro do próprio livro ("Pois ler este livro é um jogo a ser aprendido" – PI§18). No entanto, como o texto de Wittgenstein não é tampouco tão autoevidente e tão claro assim, o próprio Rodych (cf. 1999, p. 202, nota 23) acaba por desconsiderar o fato de que as observações de Wittgenstein sobre Gödel só fazem sentido no contexto da sua rejeição da metalinguagem (cf., acima PVII, §§ 21-22; tb. IF § 121), assim como também da sua visão inortodoxa sobre o papel da contradição na matemática (cf., acima, seção § 17; tb. IF § 125). Mais importante ainda, como veremos na nota a seguir a respeito de um parágrafo suprimido no datiloscrito 223, as observações de Wittgenstein sobre Gödel só fazem sentido no seu projeto de elucidação de sintomas de doenças do pensamento ou de superstições filosóficas dos matemáticos da época, como o notório "pavor à contradição". Posto que a demonstração de Gödel está na mesma linha de pensamento que se preocupa com o problema da decisão em matemática, em que um sistema aritmético não pode ser ao mesmo tempo consistente e completo, o ponto de incidência da atividade clarificadora wittgensteiniana consiste em considerar se este é realmente "um problema da matemática, como qualquer outro" (IF § 124) ou, mais propriamente, se esta não seria uma questão criada somente pela filosofia, interessada numa "verdade" platônica e não propriamente pela matemática na sua prática cotidiana reconhecida ao longo da "história natural da humanidade".

Lampert (2007) é um bom exemplo de comentador que defende a convicção de que Wittgenstein não entendeu os teoremas de Gödel. Vale a pena reconstruir seu argumento a respeito desta seção das OFM da seguinte maneira:

Wittgenstein assume que:

"P não é demonstrável no sistema de Russell", ou $P = \sim\Pi P$.

Então, no primeiro parágrafo, começa a desenvolver a tese de que P é verdadeiro e não demonstrável pela redução ao absurdo da negação de ambas as conjuntivas. De $\sim P$ deriva-se uma contradição, tal como exposto nas linhas (3) e (4) abaixo. Mas isto só pode ser feito com a assunção adicional de $\Pi A \rightarrow A$, isto é, a ideia de correção do *Principia Mathematica*. Vejamos:

1	(1) $\sim P$	A
2	(2) $P = \sim\Pi P$	A
1,2	(3) $\sim\sim\Pi P$	1,2 =E
1,2	(4) ΠP	3 DNE
5	(5) $\Pi A \rightarrow A$	A
5	(6) $\Pi P \rightarrow P$	5 SUB
1,2,5	(7) P	4,6 MP
1,2,5	(8) $P \ \& \sim P$	1,7&I
2,5	(9) $\sim\sim P$	1,7 RAA(1)
2,5	(10) P	9 DNE

No caso de se assumir que a proposição é verdadeira, segue-se:

1	(1) ΠP	A
2	(2) $P = \sim\Pi P$	A
1,2	(3) $\Pi\sim\Pi P$	1,2 =E
4	(4) $\Pi A \rightarrow A$	A
4	(5) $\Pi\sim\Pi P \rightarrow \sim\Pi P$	4 SUB
1,2,4	(6) $\sim\Pi P$	3,5 MP
1,2,4	(7) $\Pi P \ \& \sim\Pi P$	1,6&I
2,4	(8) $\sim\Pi P$	1,7RAA(1)

A conclusão do argumento implica a conjunção $P \ \& \sim\Pi P$, chamada por Lampert de "suposição de interpretação", recolhida no próprio texto desta seção.

Lampert afirma, então, que esta maneira de compreender a demonstração de Gödel é equivocada. Em primeiro lugar, porque Gödel nunca começa pela assunção da verdade ou da falsidade de P. Em vez disto, ele faz uma redução ao absurdo da demonstrabilidade de P e da demonstrabilidade de $\sim P$. Em segundo lugar, a redução de Gödel não implica qualquer "suposição de interpretação" $P \ \& \sim\Pi P$, mas trabalha exclusivamente com definições puramente recursivas. A "suposição de interpretação" só é necessária em Gödel para concluir sobre a indecidibilidade de P ($\sim\Pi P \ \& \sim\Pi\sim P$) ou sobre a incompletude do próprio *Principia Mathematica* ($P \ \& \sim\Pi P$).

Em conclusão, Lampert recorda que o objetivo de Gödel é demonstrar justamente o erro das suposições pelas quais Wittgenstein inicia o seu próprio argumento, a de que $P \ \& \ \Pi P$ e $\sim P \ \& \ \Pi\sim P$ sejam válidos no mesmo sistema.

Vê-se que há, no entanto, falta de visão por parte de Lampert, a exemplo dos outros autores mencionados acima, acerca dos objetivos e do tratamento que Wittgenstein dispensa à prova de Gödel. A dificuldade de Wittgenstein com a prova da incompletude não é com a sua correção nem com a sua validade, mas com o fato de que, assim formulada, ela é ilusória quanto às convicções que motivam a sua apresentação. Não há, ao que tudo indica, nenhuma rejeição da prova da incompletude como tal, nem sequer falta de entendimento do que realmente se trata naquelas formulações lógicas. O ponto em foco no argumento de Wittgenstein é o que não se menciona explicitamente na prova de Gödel, ou seja, a sua atitude em geral a respeito da matemática, e o seu incômodo com relação ao problema da decidibilidade dos sistemas aritméticos em geral.

Essa peculiaridade do tratamento que Wittgenstein dá à lógica e à matemática já é notório já desde o TLP, quando retira a pretensão de fundamentação lógica da matemática de Frege e de Russell por conceber (embora ficticiamente: cf. McManus, 2006) a proposição elementar como mera articulação lógica de nomes (§§ 3.141, 4.22), isomórfica a uma articulação de objetos em um estado de coisas, isto é, como figuração, e as proposições da matemática, por sua vez, como meras equações ou pseudoproposições (§§ 6.2; 6.21), isto é, como proposições sem objetos ou meros métodos lógicos que não exprimem pensamentos. Em outras palavras, quando se concebe a matemática como prática de resolver problemas matemáticos específicos e localizados, não se coloca a decidibilidade como problema - esta já é dada. Esta resistência contra a fundamentação da matemática, concebendo-a apenas como operação recursiva decidível persiste no período pós-tractariano por observações como as que se encontra, por exemplo, no MS 108, p. 207: "Se houvesse uma 'solução dos problemas lógicos (filosóficos)', então teríamos apenas que nos lembrar que houve um tempo em que eles não estavam resolvidos (e também se podia viver & pensar)": ou no MS 146, p. 70: "Quando se usa um truque em lógica, a quem se quer enganar senão a si mesmo?".

É por essas mesmas razões que, mais adiante, Wittgenstein fará comentários como estes: "A proposição Gödeliana, que afirma algo sobre si mesma, não se menciona", ou "Pode-se, com razão, perguntar que importância tem a prova de Gödel para o nosso trabalho. Pois uma peça de matemática não pode resolver problemas do tipo que nos intranquilizam. – A resposta é: que a situação que nos interessa nos é trazida por uma prova como essa. 'O que devemos dizer, então?' – esse é o nosso tema." (PVII, §§ 21 e 22, já referidas acima).

Adicionalmente, o argumento de que Wittgenstein não teria compreendido realmente o teorema de Gödel não se coaduna com a declaração de um dos maiores matemáticos da Inglaterra naquele período, Alister Watson, que reporta a discussões com Wittgenstein e Turing ocorridas em 1937 o fato de ter compreendido a prova de Gödel: "A interpretação que vou dar do famoso exemplo de Gödel deve muito a prolongadas discussões com várias pessoas, especialmente com o Sr. Turing e com o Dr. Wittgenstein, de Cambridge" (Watson, p. 445).

Nesta polêmica, que já atravessa mais de meio século, é surpreendente que sejam, à exceção de Floyd (1996), autores ligados à lógica paraconsistente, como Marconi (1984), Priest (2004) e Berto (2009a e 2009b), os mais sensíveis à argumentação de Wittgenstein nestas seções, e os que superam com uma resolução mais tranquila as enormes dificuldades do estilo literário do autor. Diga-se de passagem que o estilo literário esotérico de Wittgenstein é a primeira preocupação de Floyd (cf. 1996, p. 376), por exemplo, para iniciar sua abordagem das dificuldades deste texto.

112. [AIII§8] No MS 118, pp. 110v-111r, há um importante e revelador parágrafo adicional a esta seção que foi suprimido no TS 223. Ele diz:

Die ganze Frage wäre ohne jedes Interesse, wenn sie nicht an einen Aberglauben der Mathematiker anknüpfte. Und diesen wieder lohntem es sich nicht zu widerlegen // Und mit diesem wieder lohnte es sich nicht zu streiten, // wenn er nicht eine Symptom einer allgemein verbreiteten Denkkrankheit wäre.

Toda a questão seria desinteressante se não estivesse enlaçada com uma superstição dos matemáticos. E esta, novamente, não compensaria refutar // E, novamente, não compensaria disputar com ela, // se ela não fosse um sintoma de uma doença do pensamento amplamente generalizada.

Este parágrafo adicional depõe sobre a maneira como Wittgenstein conduz a sua metodologia: ele não trata diretamente dos teoremas da incompletude de Gödel, mas da atitude da voz Gödeliana em relação a uma particular ambição filosófica em relação à matemática: aquela de poder determinar universalmente a incompletude dos sistemas aritméticos, sem que nada disto seja, de fato, uma necessidade para a prática cotidiana e decidível dos problemas da matemática. Esta forma de condução metodológica da dinâmica dialógica é o que na grande parte dos casos não permite uma compreensão imediata do texto de Wittgenstein. Supõe-se que o texto deveria discutir em nível cognitivo o que, na verdade, trabalha em nível praxeológico.

113. [AIII§9] Um parágrafo suprimido do MS 118, p. 111r, acrescenta mais informação a respeito da melhor interpretação da seção §9:

Denk nun Einer fragte mich: "Ist 'P' beweisbar?" – Nun antworte ich: "P". Das ist natürlich keine Antwort; Auf Deutsch hätte ich antworten müssen: "'P' ist unbeweisbar". Denke aber es fragte mich Einer in jener andern Notation: "P?" – Was soll ich antworten?

Imagine agora que alguém me perguntasse: "'P' é demonstrável?" – E eu respondesse: "P". Isto não é certamente uma resposta; eu teria que responder em português: "'P' é indemonstrável". Mas imagine que alguém me perguntasse numa outra notação: "P?" – O que eu deveria responder?

O problema aqui proposto desta vez pela voz problematizadora é o da suposta identidade entre "P" e "P é indemonstrável", no sentido de que, "em tal e tal notação", as duas proposições em português passariam a ter só uma expressão. Em outras palavras, uma certa notação transformaria duas expressões distintas da linguagem ordinária em uma só expressão numa determinada notação; como quem, no sentido da seção anterior, ao comentar uma partida de xadrez, institui um novo jogo em que agora "perder" significa "ganhar". P e Q passariam a ser idênticos, portanto, na nova notação. O problema é que deveria haver, até mesmo na nova notação, uma prosa a respeito desta nova identidade, já que aqui também deveríamos ter um jogo de linguagem em que prova e prosa são inseparáveis como ato de circunscrição de regras e limites.

114. [AIII§12] Trata-se de uma brincadeira infantil descrita por Wittgenstein no MS 118, pp. 112r-112v do seguinte modo (a descrição foi omitida no TS 223):

Dieses wird so gespielt: Man hält den Daumen der rechten Hand mit der linken, so daß seine Spitze noch oben aus der linken hervorschaut. Nun entziehet man die rechte Hand rasch dem griff der linken & trachtet die rechte Daumen spitze noch mit der rechten Hand zu fangen, ehe sie sich zurückzieht.

Isto é jogado da seguinte maneira: você segura o polegar da mão direita com a esquerda, de modo que a ponta ainda se sobressaia da esquerda. Agora você remove rapidamente a mão direita da empunhadura da esquerda e tenta pegar a ponta do polegar direito com a mão direita antes que ela seja tirada.

115. [AIII§14] O último parágrafo da seção §14 é uma inserção adicional manuscrita cujo propósito aparente é o de reconectar o tipo de contradição que se vinha tomando em consideração nas seções §§11-14. São aquelas que só conservam o seu interesse como uma amostra dos tormentos que brotam na própria linguagem, à diferença daquelas que apresentam uma demonstração de indemonstrabilidade que desperte interesse, ou que seja útil, tal como a demonstração da impossibilidade da trissecção de um ângulo somente com régua e compasso. Estas, pelo menos, proporcionam *razões convincentes* para se desistir da busca por uma construção deste tipo. No primeiro caso, como se considera, por exemplo, na PV§17, se trata de enunciados ou proposições, isto é, sentenças descritivas, enquanto que no último caso, se trata de ordens ou prescrições (regras). A prova de Gödel, portanto, é tomada por Wittgenstein como exercício inútil pois não demonstra que P é indemonstrável no sistema de Russell: apenas cria um novo jogo em que agora "P" e "P é indemonstrável" são idênticos e, por conseguinte, contraditórios, já que P pertenceria e não pertenceria ao mesmo tempo ao sistema de Russell. Este mesmo raciocínio a respeito da utilidade das demonstrações de impossibilidade geométricas, em comparação com as demonstrações de consistência, será aventado dois anos depois, no MS 117, pp. 246 e 253, aqui reproduzidos nas seções PIII§§85 e 87, como também quatro anos depois no MS 125, pp. 46v-47r, aqui reproduzido na seção PIV§31, quando Wittgenstein traça uma diferença entre demonstrações de impossibilidade que preveem que "isto será assim", e, deste modo, elegem uma possibilidade entre várias do mundo empírico, e demonstrações de impossibilidade que dizem "tem que ser assim", e, deste modo, só enxergam uma única possibilidade no horizonte. No primeiro caso, são proposições empíricas em que o contrário do que se prevê pode ocorrer como uma possibilidade entre muitas; no último caso, trata-se de arranjos gramaticais, "visões de mundo" ou instituição de regras. A peculiaridade da prova de Gödel é que ela simula ser uma proposição empírica, mas não pode sê-lo. Na verdade, é uma gramática confusa.

Mas no MS 118, pp. 113r-114r, que foi a redação original do TS 223, há também um longo parágrafo adicional a esta seção, suprimido no datiloscrito, em que Wittgenstein tece uma reflexão sobre a compulsão de tratar a filosofia como uma forma de especialidade científica esotérica da qual o matemático deveria estar equipado, e até mesmo no treinamento que a visão do especialista adquire pela dedicação constante ao seu ofício:

Leute sagen gelegentlich, sie könnten das & das nicht beurteilen, sie hätten nicht Philosophie gelernt. Dies ist ein irritierender Unsinn; denn es wird vorgegeben, die Philosophie irgend eine Wissenschaft sein. Und man redet von ihr etwa wie von der Medizin. Das aber kann man sagen, daß Leute, die nie eine Untersuchung «↓philosophische Art» angestellt haben, wie die meisten Mathematiker z.B..

As pessoas ocasionalmente dizem que não podem julgar isto & aquilo porque não aprenderam filosofia. Isto é um absurdo irritante; pois tudo se passa como se a filosofia fosse alguma forma de ciência. E fala-se sobre ela como se fosse medicina. No entanto, pode-se dizer que as pessoas que nunca fizeram uma investigação «↓de tipo filosófico», como os matemáticos, por exemplo, não estão equipadas nicht mit den richtigen Sehwerkzeugen für so eine derlei Untersuchung oder Prüfung ausgerüsstet sind. So, Beinahe wie Einer der nicht gewohnt ist im Wald nach Beeren, oder Kräutern zu suchen, keine findet, weil sein Auge für sie nicht geschärft ist & er nicht weiß, wo insbesondere man nach ihnen ausschauen muß. So geht der in der Philosophie ungeübte an allen Stellen vorbei, wo Schwierigkeiten unter dem Graß verborgen liegen, während der Geübte dort stehenbleibt & fühlt, hier sei eine Schwierigkeit, obgleich er sie noch nicht sieht. Und kein Wunder, wenn man weiß wie lange auch der Geübte, der wohl merkt, hier liege eine Schwierigkeit suchen muß, um sie zu finden. Wenn etwas gut versteckt ist, ist es schwer zu finden.

com as ferramentas de visão certas para uma investigação ou demonstração assim. Quase como alguém que, se não está acostumado a procurar por frutos silvestres ou ervas aromáticas nos bosques, não os encontra porque os seus olhos não estão aguçados para isto & ele não sabe onde, em particular, se tem que procurar por eles. Assim, o inexperiente em filosofia circula por todos os lugares onde as dificuldades se escondem sob a grama, enquanto o experiente para & sente que há uma dificuldade aqui, mesmo que não consiga vê-la. Não é de se admirar que se saiba quanto tempo o experiente na observação de que aqui tem que haver uma dificuldade leva para encontrá-la. Se algo está bem escondido, é difícil encontrar.

116. [AIII§15] O último parágrafo desta seção é uma acréscimo manuscrito posterior ao datiloscrito. Sua função é a de fazer uma conexão com a questão colocada na seção anterior (AIII§14), que é a de saber se a demonstração da indemonstrabilidade de P é ou não uma “razão convincente” (*tiftiger Grund*) tal como o seria o caso da demonstração de impossibilidade da trissecção de um ângulo somente com régua e compasso. Como se diz aqui, “Só a demonstração mostra o que vale como critério de indemonstrabilidade”. Ela é uma parte do sistema do jogo no qual a proposição é usada; só nesta função pragmática, que por sinal falta ao teorema de Gödel, é que ela fornece o sentido, ou a “razão convincente”, para que acreditemos definitivamente que não será mesmo encontrada nenhuma demonstração de χ. Um nova comparação entre a demonstração em geometria e a demonstração de Gödel vai aparecer em PVII§21.
117. [AIII§17] No TS 223 há um espaço em branco ao lado de “P” cujo correto preenchimento deve ser buscado no MS 118, p. 115r. Mediante esta comparação, constata-se imediatamente que a edição do texto das OFM misturou linguagem simbólica com linguagem ordinária, o que, por outro lado, Wittgenstein cuidou para deixar bem separado na argumentação desenvolvida nesta seção.
118. [AIII§17] O último parágrafo da seção §17 não está encerrado entre parênteses no MS 118, pp. 115v-116r, tal como já aparece no TS 223, p. 9. Provavelmente o autor deseja mostrar que a conexão entre a atitude da demonstração de Gödel e o tema do temor reverencial da contradição não se liga tão diretamente como pode parecer. O manuscrito original contém mais pistas, pois a frase começa com três palavras iniciais que foram retiradas no datiloscrito: “Sehr komisch ist...” // “É muito engraçado...”.
119. [AIII§18] No TS 223 há um espaço em branco no local onde os editores supostamente escreveram a fórmula “~~p = p” (a mesma fórmula aparece em todas as traduções consultadas: Wittgenstein, 1978, 1983 e 1987). Um exame no manuscrito original (MS 118, p. 116r), no entanto, mostra outra notação: “p ≡ ~~p” – e aqui temos um sinal de equivalência entre p e ~~p, em vez de um sinal de igualdade.
120. [AIII§19] Mais uma vez, o espaço em branco no TS 223, p. 10, deveria ter sido preenchido com o sinal de asserção “⊢” do *Principia Mathematica* (que indica um axioma, um teorema ou uma proposição primitiva (Pp.)), tal como consta do MS 118, p. 116v. Nesta passagem se mostra claramente que Wittgenstein exprime neste contexto uma sentença da linguagem simbólica, e não uma sentença da linguagem ordinária.
121. [AIII§20] Esta última seção do AIII não consta do manuscrito original (MS 118 pp. 105v-116v), mas provém do MS 159, pp. 24r-24v, escrito já em 1938. Ela parece retormar o argumento exposto nas seções §§1-4 para arrematar uma reflexão final ao excerto sobre Gödel. Neste mesmo pequeno caderno de anotações, a partir da p. 34r, aparece o primeiro esboço do primeiro prefácio escrito para as *Investigações Filosóficas*, o que corrobora a hipótese de que toda a primeira parte das *Observações Sobre os Fundamentos da Matemática*, incluindo o Anexo sobre Gödel, deveria fazer parte daquele livro.

122. [PII§1] A partir do final da p. 97 do MS 117, indo somente até a p. 104, Wittgenstein dá início a uma sequência de reflexões separadas que ele demarca entre colchetes, no início de cada uma destas páginas, com a palavra *Ansätze* (aproximações ou abordagens preparatórias).
123. [PII§6] “Olhar mais amplamente” expressa o método de comparação proposto por Wittgenstein. Comparando-se o que temos aqui com o que está um pouco mais adiante, encontram-se diferenças e similaridades. Quais são as diferenças e similaridades com outros métodos de cálculo? O método da diagonal é uma demonstração universal e insofismável de que há conjuntos incontáveis maiores que outros conjuntos incontáveis? Ou ele é só a construção de uma sucessão cada vez maior de números diferentes dos anteriores? Trata-se da medição do infinito atual ou do potencialmente infinito? Em que sentido dizemos que este método entrega um resultado? Em que ambiente matemático isto ocorre? Este tipo de demonstração é similar à demonstração de que se pode dividir um ângulo em três partes iguais ou só tem um propósito platônico de mostrar a existência real de infinitos de vários tamanhos? Como tais práticas têm sentido? O método de comparação de Wittgenstein é o de ampliação da visão, como o de uma etnografia das práticas matemáticas, para que se torne mais claro que espécie de prática é a que desempenhamos aqui e como ela ganha sentido. Numa discussão com Turing, na Aula XI do curso de 1939 sobre experimento em matemática, e vendo que os dois não chegavam a um entendimento, Wittgenstein cita a famosa frase de Hilbert sobre Cantor: “Ninguém vai nos retirar do paraíso que Cantor criou para nós”, e acrescenta: “Eu diria, ‘Eu não sonharia em levar ninguém para fora do paraíso’. Eu tentaria fazer algo completamente diferente: tentaria te mostrar que isto não é um paraíso – assim você iria embora por conta própria. Eu diria, ‘Você é bem-vindo se fizer isso. Apenas olhe ao seu redor’” (Wittgenstein, 1976, p. 103).
124. [PII§13] Chegamos aqui no “ponto alto”, digamos assim, de toda esta Parte II das OFM: o lugar em que Wittgenstein mostra o que lhe interessa, propriamente, na discussão do método da diagonal de Cantor. Ele não está interessado, de fato, na comprovação da existência de um conjunto de números não-enumeráveis, os números reais, nem em defender alguma forma particular de finitismo, como já se disse alguma vez na literatura secundária (cf. Marion, 1998, pp. xii-xiii, 76ss, e 99). Wittgenstein está interessado, ao que tudo indica, em esclarecer se um método de demonstração como este tem ou não alguma serventia na prática da matemática. Se não tiver, deve-se investigar os motivos pelos quais tais imagens aquecem de maneira tão intensa a fantasia dos filósofos. (PII§11). Tais fantasias encontram-se no seu “modo de falar”. Então, diante da pergunta “Em que se pode empregar o conceito de não-enumerável?” (PI§12), pode-se colher respostas que são esses “modos de falar”. Em tais respostas, a aplicação metodológica incide sobre “os vagos conceitos” que evidenciam um “trabalho ocioso”, uma personificação da idiotice, estimulado apenas por uma “imagem” e não por nenhuma necessidade prática no interior de algum contexto matemático, no interior de uma “forma de vida”, digamos assim. Pode-se aplicar a imagem para dissuadir o esforço inócuo ou, caso contrário, para se prosseguir numa operação justificável na prática.
125. [PII§16] Na página 105 já não mais aparece a palavra *Ansätze* (abordagens preparatórias) entre colchetes que vinha sendo registrada desde a página 97.
126. [PII§16] O argumento de Wittgenstein aqui caminha no sentido de mostrar que o método da diagonal de Cantor apresenta uma espécie de argumento circular combinado com redução ao absurdo: primeiro denomino todos os objetos de “livro”, até mesmo o conjunto de todos os livros, que passo também a chamar de “livro”, para, em seguida, dizer que este não é um “livro”. Esta seria a manobra

argumentativa que torna “interessante” esta “rede de linguagem” (PII§15). Observe-se que este mesmo procedimento de demonstração por enumeração, seguida de redução ao absurdo, está também presente no Teorema de Gödel: em primeiro lugar, as proposições do sistema aritmético são representadas por números (números Gödelianos); a seguir, se demonstra a verdade e a falsidade das proposições no sistema pelas operações com números Gödelianos; por isto, então, pode-se construir uma fórmula matemática que expresse a ideia de “uma proposição demonstrável no sistema”, e esta fórmula pode ser aplicada a qualquer proposição do sistema para verificar a sua demonstrabilidade. O passo seguinte é usar este argumento em qualquer sistema formal completo e ser capaz de construir um número gödeliano para uma proposição que, quando interpretada, seja auto-referente. O significado desta proposição seria equivalente ao paradoxo do mentiroso, já que ele diria: “Não sou demonstrável”. Por conseguinte, esta proposição auto-referente demonstra que existe no sistema uma proposição que não é demonstrável nem indemonstrável. Se, então, existe no sistema uma proposição que não é demonstrável nem é indemonstrável, pode-se concluir que o sistema não pode ser consistente se ele pretende ser, justamente, completo (qualquer fórmula pode ser derivada dos axiomas) e decidível (existe um método efetivo para derivar uma resposta correta para qualquer problema). O ponto mais interessante desta passagem, no entanto, não está aqui, mas na retomada do argumento da diagonal de Cantor 9 anos depois, em 1947, no MS 135, pp. 118-119, como “uma variante da demonstração da diagonal de Cantor” (cf. tb. TS 229 §§ 1764-1765, pp. 448-449). Wittgenstein correlaciona a demonstração da diagonal com a decidibilidade ao conceber um jogo de linguagem que se torna sem sentido ao ordenar “Faça o mesmo que você faz!” . Provavelmente esta variante está correlacionada à maneira como Turing também contornou o problema de decidibilidade no seu artigo de 1937 sobre números computáveis (cf. Turing, 1937, pp. 246-248), demonstrando, pela aplicação do procedimento da diagonal, que se existisse um processo geral que pudesse computar um número β, não conseguiríamos fazê-lo em um número finito de passos. Um artigo publicado por Juliet Floyd, bastante elucidatório e completo a este respeito (cf. Floyd, 2012, pp. 25-44), faz referência a um comentário de Georg Kreisel sobre “uma maneira muito elegante” de Wittgenstein argumentar acerca do uso feito por Gödel do argumento da diagonal para demonstrar a incompletude da aritmética em termos de um “comando vazio”.

127. [PII§22] Com esta última frase, formulada mediante um sarcasmo corrosivo, Wittgenstein expressa a profundidade do seu desgosto em relação ao uso mais comum do método da diagonal de Cantor: demonstrar que o conjunto dos números reais não pode ser enumerado e que há conjuntos infinitos maiores que outros conjuntos infinitos. Esta pode ser considerada, portanto, a conclusão de um primeiro capítulo das suas observações sobre esta forma de demonstração. A partir da metade da p. 110 do MS 117, até a p. 126, nosso autor faz três esboços repetidos do que veio a se configurar muito mais tarde, entre 1945 e 1947, como o atual prefácio das IF (TS 243 e TS 227, pp. 1-4), o que mostra a conexão orgânica entre as OFM e as IF. Mas aqui ainda estamos, evidentemente, ainda nos primeiros meses de 1938, e na confecção da primeira versão datilografada das IF (TSS 220 e 221). A seção seguinte da atual Parte II, numerada como § 23, não é mais uma continuação das observações lavradas no MS 117. Os editores das OFM decidiram continuar a partir da p. 27r do MS 121, que foi redigido a partir de 30/05/1938, mas, para todos os efeitos, pode ser considerado como um segundo capítulo a respeito do método da diagonal de Cantor. Foram selecionados três conjuntos de excertos neste caderno de anotações (MS 121): o primeiro que vai da p. 27r até a p. 44v, e corresponde ao período de 30/05/1938 até 12/07/1938; o segundo, que vai da p. 60r até a p. 69r, e corresponde ao período de 25/12/1938 até 27/12/1938; e o terceiro, que abrange as pp. 87v até 92r, e corresponde ao período de 03/01/1939 até 05/01/1939.

Um detalhe importante que se nota particularmente no MS 121 é que ele contém muitas observações em filosofia da psicologia misturadas com filosofia da matemática. Talvez não seja coincidência que a primera observação do manuscrito reze, na p. 1r: “Compare o uso da palavra ‘infinito’ <<transfinito>> na matemática com o uso da palavra ‘metapsicologia’ <<metapsicológico>>”.

128. [PII§24] Evidentemente a primeira pergunta não é decidível, enquanto que a segunda, sim, o é.

129. [PII§25] A pergunta sobre “a experiência que nos mostre que o nosso espaço é tridimensional” é compreendida aqui como se fosse uma questão inútil, já que um espaço 3D está pressuposto pelo nosso filtro perceptivo. Obviamente isto não quer dizer que não se possa conceber um experimento da física destinado precisamente a esta hipótese. Um artigo de março de 2016, publicado por Julian Gonzalez-Ayala, Rubén Cordero e F. Ângulo-Brown, na EPL (*Europhysics Letters*), vol. 113, no. 4, contém justamente este propósito: cf. DOI: 10.1209/0295-5075/113/40006.

130. [PII§28] É importante destacar que esta observação isolada do seu contexto diz menos do que internamente considerada. A observação imediatamente anterior no manuscrito diz:

> Es ist also wichtig zu fragen: Wie kann der Satz, daß die Rationalzahlen sich in eine Reihe ordnen lassen, praktisch angewandt werden?

> Assim, é importante perguntar: Como se emprega na prática a proposição que permite ordenar os números racionais em uma série?

Isto mostra mais eloquentemente por que a mesma pergunta, agora dirigida aos números irracionais, não tem, na visão de Wittgenstein, nenhum sentido prático. No entanto, os editores do texto provavelmenre devem ter julgado que, como a observação anterior foi lavrada também no dia anterior, talvez não valesse a pena inclui-la oficialmente na edição final do texto.

131. [PII§38] Nesta seção encontramos uma versão negativa da ficção operatória em que consiste o método de apresentação sinóptica de Wittgenstein. Nas IF Wittgenstein ressalta “a importância de encontrar e inventar os *elos intermediários*” (IF§122); aqui faltaria justamente à ficção do $\aleph_0$ alguma ancoragem na vida prática. Por isto ela se torna, na visão de Wittgenstein, uma “expressão vazia”, tal como “a classe de todos os anjos que estão na ponta de uma agulha”. O problema do número transfinito, então, não é o de ser uma expressão metafísica, tal como poderiam supor os membros do Círculo de Viena ou um filósofo como Ernst Mach. O ponto é que parece não haver nenhuma aplicação na vida prática, ou não ser parte de nenhuma práxis efetiva. Neste sentido, a rejeição de números transfinitos não se dá em Wittgenstein pelo fato de que sejam ficções, ou de que eles pareçam a encarnação do paraíso celeste (cf. Jaquette, 2004, p. 73), mas por não terem, pelo menos por enquanto, nenhum emprego normativo, ou de não serem, realmente, nenhum paraíso. Apenas ficções.

132. [PII§41] Acima destes pontilhados vem escrito “Littlewood” no manuscrito original. John E. Littlewood era um matemático de Cambridge, e antigo professor de Wittgenstein em Manchester, que trabalhou em estreita colaboração com Godfrey H. Hardy, que também manteve contato com Wittgenstein em Cambridge.

133. [PII§50] A partir da seção § 47, Wittgenstein começa a se perguntar sobre a finalidade dos conceitos, como e para que são usados. Entende-se que na prática um conceito institui uma imagem e imprime um sentido que se configura em atos e atitudes dos participantes destes jogos de linguagem. Por isto, Wittgenstein faz o exercício de comparar vários jogos entre si, os conceitos neles envolvidos, como eles podem ser diferentes entre si, já que dependem do jogo jogado, quando estas comparações fazem e não fazem sentido, e menciona também jogos de linguagem cuja aplicação de regras perderam o sentido. Um conceito, traduzido num conjunto de regras, tem as suas razões, os seus fundamentos, que vigem até um certo ponto em que já não mais funcionam porque deixam de ter aplicação na prática. Neste ponto vale a pena lembrar de novo a passagem do TS 229, pp. 447-449, mencionada acima no comentário à seção PII§16, e atualmente publicada em RPPI §§ 1095-1098, em que Wittgenstein fez, já em 1947, uma comparação muito importante entre Cantor, Gödel e Turing, no que diz respeito à aplicação do procedimento da diagonal:

1762. Dass wir mit gewissen Begriffen *rechnen*, mit andern nicht, zeigt nur, wie verschiedener Art die Begriffswerkzeuge sind (wie wenig Grund wir haben, hier ja Einfoermigkeit anzunehmen.)

1763. Turing's 'Maschinen'. Diese Maschinen sind ja die *Menschen*, welche kalkulieren. Und man koennte, was er sagt, auch in Form von *Spielen* ausdruecken. Und zwar waeren die interessanten Spiele solche, bei denen man gewissen Regeln gemaess zu unsinnigen Anweisungen gelangt. Ich denke an Spiele aehnlich dem "Wettrennspiel". Man erhielte etwa den Befehl "Setze auf die gleiche Art fort", wenn dies keinen Sinn ergibt, etwa, weil man in einen Zirkel geraet; denn jener Befehl hat eben nur an gewissen Stellen Sinn. (Watson.)

1764. Eine Variante des Kantor'schen Diagonalbeweises:

N = F (k,n) sei die Form der Gesetze fuer die Entwicklung von Dezimalbruechen. *N* ist die n-te Dezimalstelle der k-tem Entwicklung. Das Gesetz der Diagonale ist dann: N = F (n,n) = Def. F'(n).

Zu beweisen ist, dass F'n nicht eine der Regeln F(k,n) sein kann. Angenommen, es sei die 100^{ste}. Dann lautet die Regel zur Bildung

von F'(1) F(1,1)
von F'(2) F(2,2) etc.

aber die Regel zur Bildung der 100^{sten} Stelle von F'(n) lautet F(100,100); d.h., sie sagt uns nur, dass die 100^{ste} Stelle sich selber gleich sein soll, ist also fuer n = 100 *keine* Regel.

Die Spielregel lautet "Tu das Gleiche, wie ...!" — und im besondern Fall wird sie nun "Tu das Gleiche, wie das, was Du tust!"

1765. Der Begriff des 'Ordnens' der Rationalzahlen z.B. und der 'Unmoeglichkeit' die Irrationalzahlen so zu ordnen. Vergleiche das mit dem, was man 'Ordnen' von Ziffern nennt. Gleichermassen der Unterschied zwischen dem 'Zuordnen' aller ganzen Zahlen zu den geraden Zahlen; etc. Ueberall Begriffsverschiebungen.

1762. Que nós *calculemos* com certos conceitos, e com outros não, somente mostra como as ferramentas conceituais são de diferentes tipos (como são poucas as razões que temos aqui para assumir uma uniformidade.)

1763. 'Máquinas' de Turing. Estas máquinas são *pessoas* que calculam. E se pode expressar o que ele diz também na forma de *jogos*. Especificamente, os jogos interessantes seriam aqueles em que se chega a instruções absurdas de acordo com certas regras. Penso em um jogo similar à "corrida de cavalos no tabuleiro". Recebe-se, por exemplo, a ordem "Continue do mesmo modo" quando isto não faz nenhum sentido, digamos, porque a pessoa entrou em círculo; já que essa ordem só faz sentido precisamente em certas posições. (Watson.)

1764. Uma variante da demonstração da diagonal Cantoriana:

Seja N = F (k, n) a forma da lei para o desenvolvimento de frações decimais. N é a n-ésima casa decimal do k-ésimo desenvolvimento. A lei da diagonal então é: N = F (n, n) = Def. F'(n).

Demonstrar que F'(n) não pode ser uma das regras F (k, n). Suponhamos que ela seja a 100ª. Então diz a regra para a formação

de F'(1) F (1,1)
de F'(2) F (2,2) etc.

mas a regra para a formação da 100ª casa de F'(n) diz F (100,100); isto é, ela só nos diz que a 100ª casa deve ser igual a si mesma, e, assim, não há regra para n = 100.

A regra do jogo diz "Faça o mesmo que ...!" – e no caso particular ela se torna agora "Faça o mesmo que você faz!"

1765. O conceito de 'ordenação' dos números racionais, por exemplo, e a 'impossibilidade' de ordenar assim os números irracionais. Compare isto com o que se chama de 'ordenação' de dígitos. Da mesma forma, a diferença entre 'correlacionar' todos os números inteiros aos números pares; etc. Mudanças conceituais em todos os lugares.

134. [PII§58] Por aqui vemos claramente que é equivocado supor que Wittgenstein mantivesse qualquer preocupação em defender alguma forma de "finitismo" ou de validade absoluta do princípio do terceiro excluído. Parece antes que o uso da palavra "infinito", ou a sua aplicação na prática, é o que prepondera sobre a visão da matemática como um corpo de sistema teórico. À diferença de perspectivas cognitivistas de todo tipo, Wittgenstein coloca o conceito em função da prática, esclarecido e moldado pela prática, e não ao revés. Nosso autor defende, em vez da aplicação da teoria aos

fatos, a primazia do praxeológico sobre o teórico: este é dependente e subsidiário daquele. Mas para quê? Certamente não para fundamentar algum "pragmatismo" (uma nova teoria), mas para, ao que parece, a partir da práxis dissolver imagens que capturam e petrificam nosso "modo de falar", enrijecendo a própria prática, como veremos logo na seção a seguir. Um exemplo eloquente desta atitude praxiológica está na seção PII§61, que vem depois ainda, quando Wittgenstein declara o seu modo de usar o finitismo na matemática e o behaviorismo na psicologia: não para aderir a qualquer teoria, mas somente para escapar de confusões.

135. [PIII§1] O tema principal da Parte III das OFM é a ideia de que uma demonstração tem que comportar uma "apresentação panorâmica". Este tema é tratado 18 vezes ao longo desta fração das OFM (§§ 1, 2, 3, 4, 10, 13, 14, 16, 21, 22, 39, 43, 45, 50, 55, 73, 74, 84 e 85), e aparece somente mais 4 vezes em outras partes do livro (PII§62; PIV§6; PV§10; PVII§65). A "apresentação panorâmica" ou "sinóptica" está imediatamente ligada ao método filosófico-descritivo proposto nas IF § 122, apresentado como um conceito de importância fundamental, e também está imediatamente ligada ao tema da "visão de aspecto" (cegueira e despertar do aspecto). A ideia de que uma demonstração tem que ser, para Wittgenstein, panorâmica, isto é, abarcável e inspecionável de uma só vez pelo olhar para que possa ser facilmente reprodutível pela memória, para que guarde uma imagem descomplicada e claramente compreensível e verificável, tem sido questionada como uma perspectiva já ultrapassada da prática da matemática, uma vez que, com a propagação do uso da computação, nós podemos hoje em dia realizar perfeitamente demonstrações cada vez mais longas, muito maiores do que qualquer conjunto de ítens que um ser humano pode abarcar e compreender pela "visibilidade", e muito menos guardar na memória. Assim, Hacking, por exemplo, avalia que tanto Wittgenstein quanto Lakatos (cf. 1976), ao darem preferência a demonstrações "claramente visíveis", estariam se referindo a uma concepção de demonstração somente possível na metade do século XX: "A concepção de demonstração como conferindo certeza, difundida no período em que Wittgenstein e Lakatos escreveram, ou seja, em meados do século XX, mudou, em parte devido aos desenvolvimentos na própria matemática. As demonstrações, para dizê-lo de maneira crua, têm se tornado cada vez mais longas, de modo que não é possível para um único ser humano compreendê-las em sua totalidade." (Hacking, 2014, p. 63). Este pensamento, no entanto, pressupõe o enquadramento do que Wittgenstein pretende dizer com as suas observações sobre a demonstração matemática dentro de uma versão Cartesiana da demonstração (visual e memorizável), que se contrapõe, neste caso, a uma versão Leibniziana da demonstração (por algoritmos e não memorizável). Hacking vê Wittgenstein, deste ponto de vista (cf. idem, pp. 26-29), como uma espécie de cartesiano obcecado. Hacking não cogita, porém, que as colocações do filósofo tenham mais a ver com o pensamento da matemática na práxis, e não exatamente da inter-relação da matemática com posições filosóficas. Por este motivo, as demonstrações da matemática a que Wittgenstein se refere dizem respeito a sistemas decidíveis, da mesma forma que um algoritmo computacional é um instrumento de decisão a respeito das informações que enumera. Evidentemente não estará dentro do escopo do que Wittgenstein toma por "demonstração" uma atividade relacionada a demonstrações de conjecturas, ou teorias de escopo universal ou indecidíveis. Mas se tomamos, por exemplo, alguma coisa como o Teorema das Quatro Cores, um problema decidível, mas com demonstração extremamente complexa e que só pôde ser realizada em 1976 por Appel & Haken com o auxílio de um computador, não há nenhuma incompatibilidade, pelo que me parece, entre uma demonstração computável e demonstrações visualizáveis e memorizáveis. Neste caso, o computador foi usado para resolver uma lista muito grande de combinações, normalmente inesgotável para a dimensão humana do trabalho, mas a veracidade de cada item da lista é decidido da mesma forma, com o mesmo processo por algoritmos que se encontra na ideia de demonstração matemática discutida por Wittgenstein. Como vai dizer o autor na seção PIII§4 logo abaixo, "somos inclinados a tomar a medida da extensão com a régua como modelo até

mesmo para medir a separação entre duas estrelas", o que é um exemplo claro de complexidade inabarcável pelo olhar e, por conseguinte, pela capacidade de memória do ser humano. No entanto, o problema é decidível pelo método de demonstração finito que se escolheu para a tarefa.

136. [PIII§4] No TLP, depois de especificar que na proposição elementar já estão contidas todas as operações da lógica e de que, por conseguinte, todas as proposições têm em comum uma forma proposicional geral, Wittgenstein conclui que esta forma constitui a essência da proposição. A partir desta determinação abstrata de uma essência o TLP pode assegurar então que "A lógica tem que cuidar de si mesma" (TLP 5.473). Isto decorre de que a essência da proposição é também a essência da descrição, e a descrição, por sua vez, pode ser compreendida apenas como ato sem necessidade de qualquer fundamentação. Descreve-se quando se quer descrever, mas não há uma causa para isto. O que há no TLP é apenas o fato de que não se descreve senão de acordo com parâmetros lógicos. A sentença que agora encontramos, 18 anos depois da primeira, "A *aplicação* do cálculo tem que cuidar de si mesma", utiliza também o mesmo verbo (*sorgen*), mas em sentidos bastante diferentes. No TLP, a descrição é inteiramente confiada à lógica, uma concepção abstrata da regra e, neste caso, na forma de uma lógica bivalente que, assim, reserva uma espaço de autonomia com relação ao ato, como se pairasse por cima dele. Como não se pode descrever senão pela lógica e esta nos dá toda a condição de possibilidade da descrição, independente do que quer que façamos em termos descritivos, sempre teremos uma "exigência" da lógica: a lógica abstratamente não tem como senão cuidar de si mesma. A lógica no TLP só não dá conta da vontade, isto é, do campo do ético, do estético e do religioso na vida concreta; mas estes estão para além de toda possibilidade de descrição e, por conguinte, não são dotados de qualquer sentido. Deste modo, o TLP recusa especulativamente a fundamentação da razão, e, particularmente, da matemática, na lógica. Por um lado, esta já está contida no ato descritivo e não paira no céu platônico (contra Frege); por outro lado, tampouco se baseia em descrições definidas, pois "Onde há composição, há argumento e função, e onde eles estão, já estão todas as constantes lógicas", diz o TLP na seção § 5.47 (contra Russell). Não obstante, na sentença de agora, nesta Parte III, não há mais o "exigir" lógico, mas permanece o ato da vontade que se verifica na "aplicação". Evidentemente, a aplicação do cálculo cuida de si mesma em um jogo de linguagem determinado, desempenhado conforme regras e no contexto de uma forma de vida. Não há problemas de decidibilidade, e a eventualidade da ocorrência de contradições apenas significam limites da aplicação. O que há de comum em Wittgenstein ao longo destes dois períodos distintos do seu pensamento é a postura antifundacionista na lógica e na matemática baseada em pontos de vista praxeológicos – na fase posterior, no entanto, com mais radicalidade e nitidez.

137. [PIII§4] Quando Wittgenstein compara o logicismo de Russell com o formalismo de Hilbert, ambos projetos fundacionalistas em matemática que ele critica de maneira corrosiva, vê uma certa vantagem no último em relação ao primeiro quanto ao aspecto da aplicação reduzida, digamos assim, e portanto claramente visível, do cálculo matemático. O formalismo está vinculado a operações capazes de se justificarem por si mesmas, definidas a partir de um conjunto de axiomas, regras de inferências e instruções operativas, sem atribuir significado aos sinais que compõem o sistema, com o propósito de que a redução da aritmética a formas puramente operativas em uma metamatemática seja condição preventiva suficiente para superar a crise dos fundamentos, assegurando para a aritmética sistemas livres de contradições. O logicismo, por sua vez, tenta contornar a crise dos fundamentos propondo uma verdadeira parafernália conceitual introduzida previamente na forma de descrições definidas no interior do sistema. No formalismo, o modelo do cálculo é trazido na forma de algoritmos, isto é, como processos decidíveis capazes de demonstrar tanto a consistência como a completude da aritmética (Gödel demonstrou depois que sistemas formais da aritmética padecem de incompletude e são de fato indecidíveis, mas este argumento não é um fator relevante para o raciocínio aqui entretido). Já o logicismo tem que perfazer um longo e complicado caminho

para explicar relações aritméticas que na primeira são meramente operacionais (a exemplo da própria concepção aritmética do TLP). Em Russell temos uma aritmética relacional, estruturada a partir da definição de diferentes tipos de relações para diferentes tipos utilizações. Uma relação pode ser, por exemplo, simétrica (aMb é o mesmo que bMa), assimétrica (aMb não é o mesmo que bMa: como a relação "marido" ou "esposa"), transitiva, reflexiva etc. No caso dos números, Russell adota uma relação entre classes do tipo correlação-um-a-um, a exemplo da relação de equinumericidade de Frege, mas que neste caso comporta uma relação de similaridade não por enumeração ou por extensionalidade, e, sim, pelas propriedades da classe ou intensionalmente, isto é, por uma propriedade comum a todos os membros da classe. Assim, uma classe é similar a outra se couber uma correlação um-a-um na qual uma das classes é o domínio, e a outra é o domínio inverso nos termos das suas propriedades e relações. Se admitirmos então que "o número de uma classe é a classe de todas as classes similares a ela", poderíamos, por exemplo, escapar de definir metafisicamente o que é "o número dois", por exemplo, e nos restringirmos apenas a propriedades comuns e relações entre as classes. Contudo, uma aritmética de relações, por contraposição a uma meramente operacional, torna-se um instrumento muito pouco prático, complicado o suficiente para minar qualquer forma de credibilidade natural na vida prática da aplicação do cálculo, como veremos nas observações de Wittgenstein que se seguem ao longo da Parte III.

138. [PIII§7] As objeções de Wittgenstein são de tipo pragmático: ele não contesta que os artífices de Russell para assegurar sua aritmética relacional nos *Principia Mathematica* estejam propriamente equivocados, mas que eles não funcionam na vida prática desta maneira. Deste modo, os *Principia* são um jogo de linguagem em si mesmo, são uma invenção para uso próprio, mas não são, definitivamente, uma demonstração de como funciona a matemática. No entendimento de Wittgenstein, a matemática consiste em operações decidíveis situadas na vida prática e no interior de formas de vida. Estão ligadas à história natural da humanidade e não a propriedades universais da razão.

139. [PIII§9] Na metade da p. 27r do MS 122, antes de começar a seção §10 tal como vem hoje em dia numerada, Wittgenstein escreve entre parênteses esta importante observação omitida pelos editores do texto: "(In dieser ganzen Untersuchung fühle ich mich nicht wohl: mir scheint ich bin dogmatisch.)" // "Não me sinto confortável em toda esta investigação: parece-me que estou sendo dogmático)" (MS 122, p. 27r).

140. [PIII§11] Uma observação situada entre o final deste parágrafo e o começo do próximo, provavelmente omitida porque está incompleta, vale a pena ser reproduzida aqui por nos fornecer pistas importantes acerca da forma como Wittgenstein questiona tanto os resultados de Cantor sobre enumeração, quanto resultados de Gödel sobre a indecidibilidade de sistemas aritméticos completos e consistentes, enfatizando a importância das formas visuais, das atitudes, da visão e da cegueira de aspectos:

> Die meisten Leute verstehen nichts, & wundern sich daher über nichts. //& können sich daher «↓auch» über nichts wundern.// [~~Siehe~~ «nicht über» Cantor, Gödel<, *etc.*>]
> (MS 122, p. 28v)

> A maioria das pessoas nada compreende & portanto com nada se surpreende. // & não pode «↓tampouco» se surpreender com nada.// [~~Veja~~ «não sobre» Cantor, Gödel *etc.*
> (MS 122, p. 28v)

141. [PIII§13] "Prova-R" refere-se a "prova de Russell".

142. [PIII§13] A crítica da ideia de demonstrar a demonstrabilidade de um sistema em outro sistema está ligada aos questionamentos que Wittgenstein dirige contra a prova de Gödel. Um sistema é completo e consistente enquanto se aplica na circunscrição de um jogo de linguagem e no interior de uma forma de vida, até que eventualmente se chegue a uma contradição ou limite da aplicabilidade do jogo. O que nosso autor sugere então é que talvez fosse suficiente para uma demonstração de

demonstrabilidade a mera apresentação sinóptica da demonstração.

143. [PIII§14] Entre as interessantes observações omitidas pelos editores nas quatro páginas que se seguem no MS 122 (pp. 34v-36r), destaco esta reflexão sobre a aritmética relacional de Russell:

Daß der R'sche Beweis von n+m=l alles mögliche Überflüssige enthält ist wohl klar, aber *das* zu zeigen genügt mir noch nicht. Nun, wenn er auch ~~logisch~~ «einigermaßen» ausgeschmückt ist, ~~ist er~~ macht ihn das noch nicht falsch. Man braucht dies *um & auf* nicht, aber es schadet auch nichts. //Man braucht diese Deutung nicht, aber sie ...// Wenn wir sie aber weglassen, so haben wir vorerst eine Konstruktion, aus «mittels» «ausgehend von» zwei Klammerausdrücken «Reihen»

(MS 122, p. 36r)

von Variablen eine dritte Reihe zu bilden, die so viele Variable enthält, als beide ersten zusammen. Analog etwa dieser Konstruktion:

(a b c d) (r s t) (α β γ δ ε ζ η)

Genügt nun dies, die Addition der Kardinalzahlen zu erklären? Ist es richtig, daß unser ganzer Additionskalkül «↓mit Kardinalzahlen» wirklich auf so einem eins-zu-eins Abstreichen «Kollationieren» beruht, — sodaß dieses im Hintergrund jeder solchen Rechnung «Additionsr solchen //jeder Addition//» steht «stünde»?

(MS 122, p. 36v)

Que esteja claro que a demonstração de Russell de que n + m = 1 contém tudo o que é supérfluo, ainda não é, para mim, o suficiente para mostrar *isto*. Ora, mesmo que ela esteja ~~logicamente~~ «um pouco» embelezada, isto ainda não a torna falsa. Não se precisa disto *por aqui & por ali*, mas também não faz mal nenhum. // Não se precisa desta interpretação, mas ela ... // Se a deixarmos de fora, temos por enquanto uma construção feita de «por meio de» «a partir de» duas expressões entre parênteses «séries»

(MS 122, p. 36r)

para formar uma terceira série de variáveis que contém tantas variáveis quanto as duas primeiras juntas. Análogo a esta construção:

(a b c d) (r s t) (α β γ δ ε ζ η)

Isto é o suficiente para explicar a adição dos números cardinais? É correto que todo o nosso cálculo de adição «↓ com números cardinais» é realmente baseado em tal eliminação «cotejamento» um-a-um — de modo que isto fica «ficaria» no fundo de todo cálculo «desta adição //toda adição//»?

(MS 122, p. 36v)

144. [PIII§16] Uma das características do texto de Wittgenstein era a de que estava constantemente vigilante a respeito do próprio dogmatismo (cf. IF § 131; PIII§75, abaixo; MS 122, p. 27r (nota 138, acima). Esta observação da p. 39v omitida pelos editores é um vivo testemunho a este respeito:

Versuche nicht, recht zu behalten! Es ist fruchtbarer, zu trachten, das eigne Unrecht zu beweisen. Ich bin jetzt eigentlich sicher, ich habe mich geirrt. Aber der Platz meines Irrtums & seine Reichweite weiß ich nicht.

(MS 122, p. 39v)

Não tente estar certo! É mais proveitoso tentar demonstrar o erro próprio. Agora tenho certeza de que estava equivocado. Mas não sei o lugar do meu equívoco & do seu alcance.

(MS 122, p. 39v)

145. [PIII§17] A suposição de que a lógica exija, obrigue ou compila alguém a alguma coisa não é nada senão uma prosopopeia. Mediante a figura, Wittgenstein desmascara uma certa impostura intelectual de Russell. Ao colocar a lógica como fundamento do cálculo, Russell dissimula o fato de que o seu cálculo comporta uma lógica ou está correlacionado com uma lógica ou um jogo de linguagem.

146. [PIII§20] Uma importante observação na p. 43v foi omitida provavelmente por estar ainda bastante incompleta. Vale a pena, no entanto, conhecê-la:

'Der «Ein» Beweis muß übersehbar «überblickbar» sein' — heißt das nicht einfach: das *Bild* eines Beweises muß als Beweis funktionieren «fungieren» können? // das *Bild* des Beweises ist der Beweis? // das *Bild* eines Beweises ist abermals der Beweis?//

(MS 122, p. 43v)

Wie wenn man sagte: man muß sich den Beweis merken können?

(MS 122, p. 44r)

'A «uma» demonstração tem que ser panoramicamente visível «visível de uma só vez»' — isto não significa simplesmente: a *imagem* de uma demonstração tem que poder funcionar «atuar» como demonstração? // a *imagem* da demonstração é a demonstração? // a *imagem* de uma demonstração é outra vez a demonstração? //

(MS 122, p. 43v)

O que acontece quando se diz: tem que se poder dar conta da demonstração?

(MS 122, p. 44r)

147. [PIII§21] Nas pp. 45r e seguintes do MS 122 aparecem uma série de observações curtas sobre a demonstração em matemática. Os editores, no entanto, deixaram uma delas de fora talvez porque se repita com outras palavras mais adiante, ou talvez porque tenha sido anotada num dia anterior às demais. Mas como Wittgenstein vai se referir a ela logo a seguir quando escreve "Quando digo que a demonstração é uma imagem...", vale a pena reproduzi-la nestas notas:

Der Beweis muß unser Vorbild «↓, unser Bild,» davon sein, wie dieser Ausdruck richtig anzuwenden ist.

(MS 122, p. 45r)

A demonstração tem que ser o nosso modelo «↓ nossa imagem» de como esta expressão deve ser corretamente empregada.

(MS 122, p. 45r)

148. [PIII§22] Na observação a seguir, escrita neste mesmo dia (08.12.1939), não selecionada pelos editores, Wittgenstein ainda anota entre aspas simples (uma outra voz) a seguinte reflexão:

'Ja – wenn ich nach diesen Vorschriften vorgehe, muß ich immer so gehen (wie dies Bild es zeigt), muß immer *das* herauskommen.'

(MS 122, p. 47r)

'Sim – se procedo segundo este preceito, tenho sempre que seguir assim (como a imagem mostra), sempre tem que resultar *nisto*.'

(MS 122, p. 47r)

149. [PIII§23] Há uma reflexão a seguir, não selecionado pelos editores, em que o autor anota entre aspas (uma outra voz):

'Das ist nicht nur einmal geschehen, sondern (es) muß sich notwendig wiederholen.'

(MS 122, p. 47v)

'Isso não aconteceu só uma vez, mas (isto) tem que ser necessariamente repetido.'

(MS 122, p. 47v).

150. [PIII§24] Na p. 48v há uma seta no manuscrito indicando que esta observação deveria vir anteriormente, e não na página em que foi efetivamente escrita. Os editores decidiram então alterar a ordem da observação conforme esta interpretação.

151. [PIII§24] No manuscrito, Wittgenstein cogitou uma alternativa para essa frase: "Standard zur Beschreibung von (wirklichen) Vorgängen» / padrão para a descrição de processos (reais)" (MS 122, p. 49r). Há uma reverberação dessa observação na seção § 131 das IF, que diz: "Só assim podemos realmente escapar da injustiça ou do vazio das nossas afirmações, ao considerar o modelo como o que ele é, como objeto de comparação – por assim dizer, como medida –; e não como preconceito ao qual a realidade *tem que* corresponder. (O dogmatismo no qual tão facilmente caímos ao filosofar.)". Originalmente a reflexão vem do MS 142, p. 111.

152. [PIII§25] Entre as várias omissões editoriais que vale a pena destacar ressalto particularmente esta reflexão da p. 51v-52r porque aprofunda a discussão sobre a verdade da demonstração e suas consequências pragmáticas:

"Der Beweis überzeugt uns von der Wahrheit dieses Satzes": Wie *äußert* sich diese Überzeugung, «—» z.B. «—» welchen Schluß rechtfertigt dieser Satz?

Der durch den Beweis erzeugte «↓mathematische» Satz ist ein *Instrument* — und wir wollen wissen: Wie wird dieses Instrument angewandt?

(MS 122, pp. 51v-52r)

"A demonstração nos convence da verdade desta proposição": Como se *expressa* este convencimento, «—» por exemplo «—» que conclusão esta proposição justifica?

A proposição «↓matemática» gerada pela demonstração é um *instrumento* – e nós queremos saber: como este instrumento é aplicado?

(MS 122, pp. 51v-52r)

153. [PIII§27] Wittgenstein apresenta nesta seção as razões pelas quais toma a demonstração como reconhecimento de uma realidade, como orientação geral a respeito desta realidade reconhecida, mas sobretudo mostra que num sistema aritmético nada há mais importante do que batalhar para se chegar a uma decisão. Esta visão o coloca distante da importância atribuída por Gödel ao problema da consistência e da completude. Para Wittgenstein, o importante é a chegada a uma decisão, e, neste sentido, a sua visão dos sistemas aritméticos é a de que eles devem ser efetivos ou operacionais mediante algoritmos, ou de que funções recursivas são efetivamente computáveis. Uma visão operativa absolutamente concordante com o artigo de Turing em 1937 sobre números computáveis.
154. [PIII§30] Wittgenstein utiliza a notação lógica dos *Principia Mathematica*, de Whithead & Russell (2019 [1910]), hoje em desuso. Literalmente, ela indica que é um teorema que se *p* implica *q* está em conjunção com *p*, então infere-se também que *q*.
155. [PIII§33] Pp. é também uma notação dos *Principia Mathematica*, de Russell & Whitehead (2019 [1910]), que significa "proposição primitiva", ou o equivalente de uma asserção, de um teorema ou de um axioma.
156. [PIII§33] Nas IF § 108 Wittgenstein também propõe um pivô para o nosso modo de "consideração". Sua função é servir de sustentação para uma virada ao redor da nossa real necessidade (isto é, a nossa vida prática comum), que não se vincula a ideais abstratos de conceitos lógicos. Assim, a lógica em perspectiva pragmática nada perde do seu rigor, pois este não se funda em abstrações, mas em necessidade humanas concretas. Aqui, neste caso apresentado pela seção § 33 da Parte III, o pivô da nossa real necessidade sustenta com convicção a prática de proferir a proposição "p ⊃ p" como verdadeira. Esta proposição tem sua vida concreta no interior da forma de vida do sistema de Russell. A seguir, apresento algumas observações omitidas pelos editores nas pp. 59v-60r que podem ser importantes para a compreensão do contexto da discussão de Wittgenstein neste trecho.

Wovon soll der Beweis ein Vorbild sein? – Soll ich sagen: 'von einer bestimmten Sprachbewegung'?

Wenn der Beweis auch nach Regeln fortschreitet, so ist er doch das Paradigma für *diese* Fortschreitung.

Ich wollte sagen: Der mathematische Beweis wird außerhalb der Mathematik verwendet «verwandt» & ist da das Paradigma eines

(MS 122, p. 59v)

unserer Begriffe. – Aber in wiefern ist das wahr?

Nimm einen R.schen Beweis des ersten Teils der Pric. Math.: inwiefern kann man ihn Vorbild eines Begriffs nennen? Nun, er ist Vorbild des Begriffs eines bestimmten Übergangs.

(MS 122, p. 60r)

De que deve ser a demonstração um modelo? – Devo dizer: 'de um determinado movimento da linguagem'?

Mesmo que a demonstração progrida segundo regras, ela é o paradigma para este progresso.

Eu quis dizer: A demonstração matemática é empregada «relacionada» fora da matemática & ali está o paradigma de um

(MS 122, p. 59v)

dos nossos conceitos. – Mas até que ponto isto é verdade?

Tome uma demonstração Russelliana da primeira parte do Pric. Matemática: em que medida pode-se chamá-la de modelo de um conceito? Bem, ela é o modelo do conceito de uma determinada transição.

(MS 122, p. 60r)

157. [PIII§35] Wittgenstein anota entre parênteses logo a seguir desta observação: "(Was ich jetzt schreibe muß außerordentlich schlecht sein.)" // "(O que estou escrevendo agora deve ser extremamente ruim.)" (MS 122, p. 62r)
158. [PIII§35] Dentre as várias observações omitidas entre a p. 62r e 64v do MS 122, vale a pena destacar estas duas:

Ich habe früher eine Rechnung dargestellt als Teil einer Technik, z.B. des Hausbaues. Es könnte aber auch ein *Experiment* mit Zeichen ein Teil so einer Technik sein: – Man übergieße diese Zeichen mit Schwefelsäure & richte sich dann in der & der Weise nach dem was sich dann auf dem Papier zeigt. – Das aber ist keine Rechnung. Die Rechnung muß 'übersichtlich' «übersehbar» sein. –

Der Begriff der Beweiskonstruktion kann *auf verschiedenen Umwegen* nützlich sein.

(MS 122, p. 64r)

Eu apresentei antes um cálculo como parte de uma técnica, por exemplo da construção de casas. Mas uma técnica assim pode ser também parte de um *experimento* com sinais: – Você despeja ácido sulfúrico sobre estes sinais & então se orienta de tal & tal modo de acordo com o que se mostra no papel. – Mas isto não é um cálculo. O cálculo tem que ser 'panoramicamente visível' «observável». –

O conceito de construção da demonstração pode ser útil *através de vários contornos*.

(MS 122, p. 64r)

159. [PIII§38] Em um novo pulo de três páginas omitidas pela seleção editorial, talvez valha a pena apresentar as seguintes seis sequências de observações:

Man könnte fragen: "Warum verwendet die Mathematik überhaupt *satzförmige* Axiome?"

Pode-se perguntar: "Por que a matemática afinal emprega axiomas em *formato de proposições*?

Die Frage ist: Ist es wahr, daß, wie ich behauptet habe, die

(MS 122, p. 70v)

Mathematik wesentlich die Rolle der Grammatik ihrer Zeichen spielt? – Kann man denn das in dem Beispiel sagen worin Leute eine Rechnung als Teil einer Technik des Hausbaus verwenden??

A questão é: É verdade que, como afirmei, a

(MS 122, p. 70v)

matemática joga essencialmente o papel da gramática dos seus sinais? – Pode-se então dizer isto no exemplo em que as pessoas empregam um cálculo como parte de uma técnica de construção de casas??

Ich sagte: bei dieser Rechnung gäbe es ein (sozusagen arithmetisches) Richtig' oder Falsch, nämlich: der Regel gemäß, oder der Regel zuwider.

Eu disse: com este cálculo haveria um (por assim dizer, aritmético) certo ou errado, a saber: de acordo com a regra ou contrário a ela.

Haben wir hier nicht, sozusagen, angewandte Mathematik, *ohne reine* Mathematik?

Não temos aqui, por assim dizer, matemática aplicada *sem* matemática *pura*?

Ich wollte doch sagen: Wo die reine Mathematik von Satz zu Satz fortschreitet, da wird von einer Ausdrucksform zur andern fortgeschritten.

(MS 122, p. 71r)

Eu queria dizer: onde a matemática pura progride de proposição em proposição, há progresso de uma forma de expressão para outra.

(MS 122, p. 71r)

Immer bin ich hier zum Dogmatismus geneigt!
(MS 122, p. 71v)

Estou sempre inclinado ao dogmatismo aqui!
(MS 122, p. 71v)

160. [PIII§39] "Vemos na demonstração uma razão para …". É muito interessante constatar que do ponto de vista gramatical tudo depende do que o autor alguns anos depois vai tratar no método da "apresentação panorâmica" como uma questão de "visão de aspecto". Como será afirmado logo abaixo, "não é por razões que não *vemos*".

161. [PIII§39] Duas observações acerca do modo como Wittgenstein pratica uma autovigilância ou precaução contra suas próprias tendências dogmáticas são visíveis nestes parágrafos omitidos pelos editores entre as pp. 74v-75r do MS 122.

Ist es nicht merkwürdig, zu sagen: die Formel "25×25=625" sei das Zeichen für einen Begriff «eines Begriffs»? Und doch versucht mich etwas, das zu sagen. Ist das nur Unsinn, oder Übereilung? Ist es eine Krankheit meiner Anschauungsweise? Es muß teilweise eine Krankheit
(MS 122, p. 74v)
sein.

Não é estranho dizer: a fórmula "25 × 25 = 625" é o sinal para um conceito «de um conceito»? E no entanto algo me tenta dizer isso. Isto é apenas um disparate ou é precipitação? É uma doença da minha maneira de ver as coisas? Tem que ser em parte uma
(MS 122, p. 74v)
doença.

Ein System muß gefunden werden – finden wir nicht das, «dasjenige,» was «welches» *offenbar* vorliegt, // gelingt es uns «mir» (aber) nicht das zu finden, welches *offenbar* vorliegt, // so werden wir «ich» gedrängt, zu dogmatisieren. (Wenn die *richtige* Zusammensetzung nicht gelingt, versuchen wir die Stücke des Puzzles mit Gewalt zusammen zu passen «fügen».)
(MS 122, p. 75r)

Um sistema tem que ser encontrado – não encontramos aquele «aquele» que «que» está *obviamente* presente, // conseguimos «eu» encontrar (mas) não o que está *obviamente* presente, // somos «eu» impelidos para a dogmatização. (Se a combinação *correta* não for bem-sucedida, tentamos encaixar «juntar» as peças do quebra-cabeça à força.)
(MS 122, p. 75r)

162. [PIII§41] Entre as observações omitidas pelos editores nas pp. 77r a 79v do MS 122, destacaria as quatro seguintes da p. 77v:

Der Beweis ist das, was uns überzeugt – also nicht das, wovon wir meinen, es würde uns überzeugen, wenn wir es überblicken könnten.

A demonstração é o que nos convence – não o que queremos dizer que nos convenceria se pudéssemos ter dela uma visão geral.

Oder: Es gibt nichts, was theoretisch, der Beweis *sein müßte*.

Ou: não há nada que a demonstração *tenha que ser* teoricamente.

Denn nichts hat – sozusagen – die *Pflicht*, der Beweis zu sein.

Pois nada tem – por assim dizer – a *obrigação* de ser a demonstração.

"Das wäre ein Beweis, wenn ich es überblicken könnte" – was macht Dich dessen so sicher? – Ein Beweis?
(MS 122, p. 77v)

"Isto seria uma demonstração se pudesse ter dela uma visão geral" – o que te dá tanta certeza disto? – Uma demonstração?
(MS 122, p. 77v)

163. [PIII§42] Quando se diz que a demonstração é tomada como demonstração, que ela tem que ser um

processo visualmente explícito, e que não há nada por detrás dela, há que se entender que Wittgenstein privilegia, com o seu conceito de demonstração, o concreto sobre o abstrato, a prática sobre a teoria, o objeto situado na sua circunscrição temporal e espacial particular, com todas as suas eventuais vinculações e alianças que o tornam diferente de qualquer outro caso, acima da universalidade das suas manifestações, mesmo em se tratando de matemática e de lógica. Temos aqui uma exigência pragmática muito parecida com a forma de radicalidade estética proposta por Lord Henry, o personagem hedonista retratado por Oscar Wilde em *O Retrato de Dorian Gray*, quando disse a Dorian no capítulo II: "São só as pessoas rasas que não julgam pelas aparências. O verdadeiro mistério do mundo é o visível, não o invisível…". Neste sentido, o olhar, a maneira como se vê a demonstração é crucial em Wittgenstein: "Aber der *Beweis* überzeugt ja durch den Anschein." // "Mas a *demonstração* convence de fato pela aparência" (MS 122, p. 81v). Duas observações omitidas pelos editores podem comprovar esta particularidade filosófica do autor:

A demonstração deve ser visualmente explícita: se o que *vemos* não nos convence mais, a demonstração perde a sua força. Seja ela construída «↓ agora» de acordo com o esquema 'lógico' de Russell ou de outra forma.

Der Beweis muß anschaulich sein: überzeugt uns nicht mehr, was wir *sehen*, so hat der Beweis seine Kraft verloren. Ob er «↓nun» nach dem 'logischen' Schema Russell's oder anderswie gebaut ist.

Pode-se mostrar na demonstração de Russell que ela, por assim dizer, é «seria» uma demonstração. – Mas que ela é uma demonstração de Russell não seria constatável de maneira original. Seria como alguém pintar um retrato de N., mas de tal forma que não seria possível constatar pelo simples olhar de que se trata de uma imagem de N.
(MS 122, p. 80v)

Von R's Beweis kann sozusagen, gezeigt werden, daß er ein Beweis ist «wäre». – Daß aber das ein R'scher Beweis ist, wäre nun nicht auf die ursprüngliche Weise festzustellen. Es wäre ähnlich wie wenn jemand ein Portrait des N. malte, aber in solcher Art, daß es nicht durch das bloße Ansehen festzustellen wäre, daß es ein Bild des N. ist.
(MS 122, p. 80v)

164. [PIII§43] Entre esta observação e a seguinte na p. 84r do MS 122, constatamos mais uma precaução de Wittgenstein contra o perigo de incorrer em dogmatismo: (Ich habe das bestimmte Gefühl, daß ich sehr unvorsichtig bin. Also irgendwie im seichten Wasser des Dogmatismus herumschwimme.) // (Tenho a nítida impressão de que sou muito descuidado. Ou seja, de alguma forma estou nadando nas águas rasas do dogmatismo.) (MS 122, p. 84r).

165. [PIII§46] Uma frase entre parênteses que vem logo a seguir, finalizando o parágrafo, foi retirada pelos editores: "(Wie ich schon früher gesagt haben.)/(Como já havia dito anteriormente.)".

166. [PIII§46] Duas observações independentes omitidas pelos editores do texto devem, a meu juízo, ser recuperadas aqui por causa da sua contribuição à melhor compreensão do pensamento do autor, sobretudo a que versa sobre "despertar do aspecto":

Die Vagheit des Begriffs 'Aspekt'. Ich kann freilich sagen, daß, wenn ich in R.s Symbolismus (eines Tages) z.B. Multiplizieren lernte die R'schen Konstruktionen dadurch ein ganz neues Ansehen gewönnen. – Ähnlich dem ist der neuen Aspekt, den das Schachspiel gewönne wenn wir jemand eines Tages Schreibspiel des Brettspiel erfände.
(MS 122, p. 90r)

A vagueza do termo 'aspecto'. Supostamente posso dizer que se aprendesse (um dia) a multiplicar no simbolismo de R., por exemplo, as construções Russellianas ganhariam um semblante totalmente novo. – Semelhante a isto é o novo aspecto que o jogo de xadrez ganharia se alguém um dia inventasse o jogo da escrita do jogo de tabuleiro.
(MS 122, p. 90r)

Man sagt gewöhnlich, daß die Anwendung eines Axiomsystems darin liegt, daß man von der *Wahrheit* der Axiome überzeugt ist. Aber was heißt es z.B. von der Wahrheit von 'p ⊃ p' überzeugt zu sein? – Man stellt sich also die Axiome vor, als wären sie von *eine Art von* Prinzipien der Mechanik: Erkennt man sie an so erkennt man z.B. an, daß ein Körper im Zustand der Ruhe, oder – etc etc.

(MS 122, p. 90v)

Costuma-se dizer que a aplicação de um sistema de axiomas consiste em que alguém está convencido da *verdade* dos axiomas. Mas o que significa, por exemplo, estar convencido da verdade de 'p ⊃ p'? – Imagina-se portanto os axiomas como se estivessem baseados *em algum tipo de* princípio da mecânica: quando se os reconhece, reconhece-se, por exemplo, que um corpo está em estado de repouso, ou – etc., etc.

(MS 122, p. 90v)

167. [PIII§47] Uma observação importante que Wittgenstein faz sobre o próprio estilo literário deve ser, a meu juízo, destacada aqui:

Ich schreibe oft meine Bemerkungen, wie Hausfrauen alten Kram: Schnüre, Bänder, Lappen, Stecknadeln, sammeln, weil man sie manchmal brauchen kann. Aber wenn man je wirklich braucht, sind sie nicht zur Hand.

(MS 122, pp. 93r-93v)

Costumo escrever minhas observações como donas de casa que colecionam coisas velhas: cordões, fitas, trapos, alfinetes, porque às vezes podem ser usados. Mas quando realmente se precisa deles, não estão à mão.

(MS 122, pp. 93r-93v)

168. [PIII§49] É interessante notar que a dúvida que se levanta com esta observação, ou com esta voz escrita no dia 13/01/1940, só se responde no dia seguinte, 14/01/1940, na observação que a esta se segue.

169. [PIII§49] Entre as observações omitidas pelos editores ao saltar da p. 97r para a p. 98v do MS 122, destacaria a seguinte:

Kann man jeden Satz der Mathem. logisch begründen?

D.h. muß man wirklich auf

(MS 122, p. 97v)

diese Sätze & diese Techniken kommen, wenn man die R.schen Beweise abkürzt?

(MS 122, p. 98r)

Pode-se fundamentar logicamente qualquer proposição da matemática?

Ou seja, você realmente tem que comparecer

(MS 122, p. 97v)

com estas proposições & técnicas quando se abrevia as demonstrações de R.?

(MS 122, p. 98r)

170. [PIII§53] Entre as páginas 102r e 104v do MS 122 os editores omitiram algumas observações que talvez sejam suficientemente importantes para serem resgatadas aqui:

Man sagt häufig: "Es ist leicht zu sehen, daß dieser Prozess zu *diesem* Resultat führen muß." –

Wie kommt es, daß es zu sehen ist? «Wie kann es leicht zu sehen sein?» Oder bilden wir uns nur ein, es zu sehen – aus einer Art Gedankenlosigkeit?

Freges Bemerkung, daß, wenn man näher zusieht, doch alle diese Stufen durchlaufen werden mußten, um zu diesem Schluß zu gelangen. (Ja in *seinem* System des Schließens freilich.)

(MS 122, p. 102v)

Costuma-se dizer: "É fácil ver que este processo também tem que levar a *este* resultado." –

Como é que pode ser visto? «Como pode ser fácil de ver? » Ou só imaginamos que o estamos vendo – devido a uma espécie de falta de pensamento?

A observação de Frege de que, quando se olha mais de perto, tem-se que percorrer todas estas etapas para chegar-se a esta conclusão. (Sim, em seu sistema de inferências, é claro.)

(MS 122, p. 102v)

In gewissem Sinn ist ja die «eine» *Ähnlichkeit* aller Zweige der Mathematik offenbar immer wieder die selben Zeichen: das Gleichheitszeichen, "+", "-" etc., Funktion & Argument. Das ist doch *etwas*.

Aber anderseits – ist es nicht auch irreführend? Wie der Gebrauch von Subjekt & Prädikat als Rahmen für tausenderlei Bilder. –

"Du siehst also: – so geht es weiter – ." Dies Argument wird immer wieder gebraucht. Aber es wird in den verschiedensten Zusammenhängen «Positionen» gebraucht.

(MS 122, p. 103r)

Ich *scheine* doch etwas durch meinen Beweis prophezeien «vorhersagen» zu können – aber meine Prophezeiung «Vorhersage» ist eine andere, wenn sie sich auf's Strichsystem, – & eine andere, wenn sie sich auf's Dezimalsystem bezieht. Und doch ist es für den Beweis (der Teilbarkeit, z.B.) wesentlich, eine solche Vorhersage sein zu können.

Es ist nun die Frage, «Es entsteht die Frage,» wie ich in *einem* System beweisen

(MS 122, p. 103v)

kann, daß die Rechnung in einem andern eine gültige Vorhersage ist?

(MS 122, p. 104r)

Em certo sentido, a «única» *semelhança* de todos os ramos da matemática é obviamente sempre de novo o mesmo sinal: o sinal de igualdade, "+", "-" etc., função & argumento. Isto é afinal *alguma coisa*.

Mas, por outro lado – isto não é também enganoso? Como ocorre o uso de sujeito e predicado como moldura para milhares de imagens. –

"Portanto, você vê: – então continue –." Este argumento é usado repetidamente. Mas é usado nos mais diferentes contextos «posições».

(MS 122, p. 103r)

Pareço ser capaz de profetizar «predizer» algo por meio da minha demonstração – mas minha profecia «predição» é diferente quando se refere ao sistema de traços, – & outra quando se refere ao sistema decimal. E ainda é essencial para a demonstração (da divisibilidade, por exemplo) poder ser uma predição assim.

Agora é a questão «surge a questão» de como posso demonstrar em *um* sistema

(MS 122, p. 103v)

que o cálculo pode ser uma previsão válida em outro?

(MS 122, p. 104r)

171. [PIII§54] Uma observação omitida pelos editores na p. 105v do MS 122, diz: "Der Beweis muß übersehbar sein" – heißt das nicht: daß es ein Beweis ist, muß zu sehen sein?. // "A demonstração tem que ser panoramicamente visível" – isto não significa: que seja uma demonstração que tenha que ser vista?. É importante observar que tipo de compreensão filosófica está pressuposta no método de apresentação panorâmica tão enfatizado nesta Parte III das OFM. O ponto, evidentemente não é o de que uma demonstração matemática tenha que ser vista *tout court*. Ver, nós naturalmente vemos tudo e qualquer coisa que esteja diante dos nossos olhos e com a qual nossa percepção se envolva. O importante, para Wittgenstein, então, é *como* vemos. Ou, em outras palavras, que tipo de *ação* ou *atitude* está conectada com a nossa visão de aspecto. Esta preponderância do praxeológico sobre o visual está bem clara na seguinte observação das OC § 204:

Die Begründung aber, die Rechtfertigung der Evidenz «des Sprachspiels» kommt zu einem Ende; – das Ende aber ist nicht, daß uns gewisse Sätze unmittelbar als wahr einleuchten, also eine Art *Sehen* unsrerseits, sondern unser *Handeln*, welches

(MS 175, p. 4v)

Mas a fundamentação, a justificação da evidência «do jogo de linguagem» chega ao final; – O final, porém, não é que certas proposições se nos iluminem imediatamente como verdadeiras, portanto uma espécie de *visão* da nossa parte, senão que a nossa *ação* é que

(MS 175, p. 4v)

am Grunde des Sprachspiels liegt.
(MS 175, p. 5r)

está na base do jogo de linguagem.
(MS 175, p. 5r)

172. [PIII§55] A observação seguinte, omitida pelos editores, ainda declara: Es ist also, als ob ich sagte: Der Beweis ist nichts als ein Bild, & doch muß er uns überzeugen. // Portanto, é como se eu dissesse: A demonstração nada mais é do que uma imagem & de todo modo tem que nos convencer. (MS 122, p. 107r)

173. [PIII§58] A partir da seção seguinte os editores do texto das OFM decidiram continuar pela página 154 do MS 117, deixando de lado as 13 páginas restantes do MS 122 (pp. 112v-119r). Na sua última página do MS 122 (p. 119r), Wittgenstein anota “Fortgesetzt im Band XIII/Continua no Volume XIII)”, referindo-se, com isto, à parte final do MS 117 (pp. 148-273). Do mesmo modo, anota o autor, na p. 143 do MS 117, “Fortsetzung des Bandes XVIII/Continuação do Volume XVIII). Os temas que foram deixados de lado nas páginas finais do MS 122 pelos editores lidam ainda com a questão da demonstração e do convencimento, tecem mais variações de pensamento sobre o cálculo num sistema de traços, mas também contém questões psicológicas tais como “Como se usa a frase ‘A mesma expressão facial’?”. Talvez valha a pena destacar uma observação geral sobre a falta de praticidade de certa forma de atividade filosófica na penúltima observação escrita neste manuscrito, na p. 119r:

Die unerfüllte Sehnsucht in der Philosophie: ‘Ich will Rot beschreiben, kann es aber nicht’. Sehn’ ich mich nach dem, wonach man sich nicht sehnen *kann*? Wenn ich in einem Kreis herum liefe, immer schneller – & sagte, ich wollte «wolle» mich fangen – soll man «↓dann» sagen: ich versuche mich selbst einzuholen – oder soll man es nicht sagen?
(MS 122, p. 119r)

O anelo insatisfeito na filosofia: ‘Quero descrever o vermelho, mas não posso’. Anseio por aquilo que ninguém *pode* ansiar? Quando vagava em círculo, cada vez mais rápido – & disse que queria «quis» me apanhar – deve-se dizer «↓então»: estou tentando alcançar a mim mesmo – ou não se deve dizê-lo?
(MS 122, p. 119r)

174. [PIII§60] Entre as observações omitidas pelos editores entre as páginas 156 a 158 do MS 117, destacaria a seguinte:

‘Dient der Beweis nur dazu, uns zu überreden? – Aber er überredet uns doch nur das zu glauben, was *wahr* ist!’ Ja, daß diese Überredungskünste glücken, scheint das Kriterium dieser «für diese» Wahrheit zu sein. // Kriterium dafür zu sein, daß der Satz wahr ist.//
(MS 117, p. 157)

‘A demonstração está lá apenas para nos persuadir? – Mas ela só nos persuade a acreditar no que é *verdade*!’ Sim, que estas artes de persuasão sejam bem-sucedidas parece ser o critério desta «para esta» verdade. // Critério para que a proposição seja verdadeira. //
(MS 117, p. 157)

175. [PIII§61] Entre as observações omitidas pelos editores no decorrer das páginas 159 a 161 do MS 117, destacaria as seguintes:

Welche Rolle könnte eine
(MS 117, p. 159)
Rechnung in einer *Beschreibung* spielen?
Was soll der Beweisvorgang hinter den Kulissen der Sprache?
Der Beweis arbeitet, hinter der Szene der «↓einer» «Sprache» Beschreibung (oder «↓auch «etwa»», auf dem Schnürboden).
(MS 117, p. 160)

Que papel pode jogar um
(MS 117, p. 159)
cálculo numa *descrição*?
Qual é o processo de demonstração nos bastidores da linguagem?
A demonstração trabalha nos bastidores da «↓ de uma» descrição «linguagem» (ou «↓ também «talvez», no teto de cordas).
(MS 117, p. 160)

176. [PIII§62] Entre as páginas 161 e 163 do MS 117, encontram-se mais algumas importantes observações sobre o processo de demonstração de proposições matemáticas que foram deixadas de lado pelos editores que talvez valha a pena reproduzir aqui:

Welche Rolle spielt der Beweisweg «↓zu» einer grammatischen Regel *in der Praxis* der Sprache?
(MS 117, p. 161)

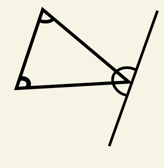
Auf diesem Weg werde ich überzeugt – heißt nicht nur: *so* stellt man es an, um mich zu überzeugen – sondern: dort «da» liegt das, «dasjenige,» wovon ich überzeugt wurde «bin».

Der Beweis muß den Nutzen der Regel zeigen. Denn *dem* zuliebe nehme ich ihn «den Beweis» ja an.

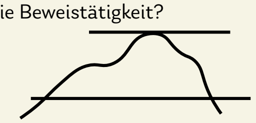
Könnte man sagen: “Der Beweis muß mir die Konflikte zeigen, die zu vermeiden ich die Regel annehme”? – “Die Abgründe, denen auszuweichen ich diese Regel annehme”.

Warum muß ich einem Menschen zeigen, *warum* er eine Regel annehmen soll?

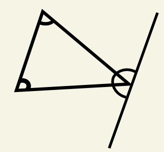
Aber die Regeln, nach denen ich grammatische Regeln bilde sind doch auch grammatische Regeln.



Beweis, daß die Winkelsumme eines Dreiecks ungefähr 180° ist. Welche Tätigkeit nennt man ‘dies beweisen’?
(MS 117, p. 162)
Ähnlich: Beweis des Mittelwertsatzes. Welches ist hier die Beweistätigkeit?



Bedenke bei dem Beweis,



Que papel joga o percurso da demonstração «↓para» uma regra gramatical *na práxis* da linguagem?
(MS 117, p. 161)

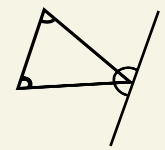
Sou convencido neste percurso – não significa somente: é assim que se faz para me convencer – mas: ali «aí» está isto «aquilo» de que «sou» convencido.

A demonstração tem que mostrar a utilidade da regra. Pois em seu benefício aceito «a demonstração».

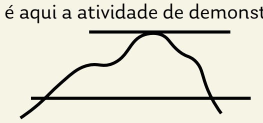
Pode-se dizer: “A demonstração tem que me mostrar os conflitos para cuja prevenção aceito a regra? – “Os abismos que suponho que esta regra evita”.

Por que tenho que mostrar para uma pessoa *por que* ela deve aceitar uma regra?

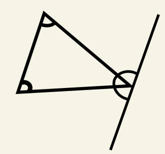
Mas as regras pelas quais formo regras gramaticais também são regras gramaticais.



Demonstre que a soma dos ângulos de um triângulo é de aproximadamente 180°. Qual é a atividade que se chama ‘demonstre isto’?
(MS 117, p. 162)
Similar: demonstração do teorema do valor médio. Qual é aqui a atividade de demonstração?



Considere a demonstração



den ich meinte: was *wagst* Du auf den Beweis hin? Denn darauf kommt es ja an.

Was wage ich auf diesen Beweis hin, daß jede Gleichung n^{ten} Grades *n* Wurzeln hat? *In welchem Sinn* hat sie *n* Wurzeln?

Angenommen, ich sagte 25 × 25 sei gleich 526, das Zeichen '526'wäre aber so anzuwenden, wie jetzt sein Spiegelbild – hätte meine Regel dann denselben Sinn, wie wenn '526' auf die gewöhnliche Art anzuwenden wäre?!

Man könnte *wohl* sagen: Der versteht den Sinn der «dieser» Regel nicht, der das *System* nicht kennt, zu dem sie gehört. Aber das hieße doch: Der

(MS 117, p. 163)

versteht den *Witz* der Regel nicht.

(MS 117, p. 164)

que cogitei: o que você *se arrisca* a demonstrar? Pois isto é o que conta.

O que me arrisco a demonstrar é que toda equação do enésimo grau tem *n* raízes? *Em que sentido* ela tem *n* raízes?

Suponha que dissesse que 25 × 25 é igual a 526, mas o sinal '526' teria que ser empregado como está agora no espelho – minha regra teria o mesmo sentido que teria '526' empregado de modo usual?!

Pode-se *possivelmente* dizer: não compreende o sentido da «desta» regra quem não conhece o *sistema* a que pertence. Mas isto significaria:

(MS 117, p. 163)

não compreende a *perspicácia* da regra.

(MS 117, p. 164)

177. [PIII§63] Ignoramos a razão pela qual os editores inverteram aqui a ordem de apresentação das observações no manuscrito original, voltando à página anterior do MS 117. Não há nenhuma indicação do autor para esta alteração. É interessante saber que assim como Wittgenstein compara aqui música e matemática, em RPP I § 778, ou Z § 698, compara matemática com tradução em termos de similaridade de tarefas e de problemas.

178. [PIII§65] Ao final da observação, entre parênteses, vem escrito "Gespräche mit Sraffa" // "conversa com Sraffa". Este é uma indício de que a pergunta de Wittgenstein sobre as proposições da matemática não devem ser tratadas como questões antropológicas, mas antes como uma investigação, entre outras possibilidades, de compromissos antropológicos (e sociológicos, portanto) do uso de tais proposições. Em outras palavras, de ligações ou compromissos que constituem a práxis do cálculo matemático da maneira como está descrito no caso em foco. Wittgenstein não se pergunta pela natureza das proposições matemáticas em abstrato, mas de como elas fazem sentido nos seus *usos concretos*, como uma técnica criada numa forma de vida para resolver problemas que se lhe apresentam, e que não poderia existir sem que houvesse a respeito dela se formado um consenso.

179. [PIII§66] O advérbio de negação foi acrescentado pelos editores já que se percebe claramente que houve um lapso de escrita no texto.

180. [PIII§69] Duas observações omitidas da página 182 do MS 117 devem ser reproduzidas aqui por causa da importância da menção a processos de decisão no cálculo:

Wie wenn man sagte: Die Rechnung sei eine «↓Reaktion, ein» bedingter Reflex, – nicht eine ~~Satz~~ «Aussage» über so einen Reflex.

Man könnte auch die Rechnung eine Reihe von Entscheidungen nennen & das Resultat eine Schlußentscheidung.

(...)

Como se se dissesse: O cálculo é uma «↓ reação, um» reflexo condicionado, – não uma proposição «afirmação» sobre tal reflexo.

Pode-se também chamar o cálculo de uma série de decisões & o resultado de uma decisão final.

(...)

Ist der Ausdruck einer «der» Entscheidung

(MS 117, p. 182)

ein Satz, der sagt, daß ich mich so entscheide?

Der Bewiesene Satz als Ausdruck «Äußerung» einer Entscheidung.

(MS 117, p. 183)

A expressão de uma «da» decisão

(MS 117, p. 182)

é uma proposição que diz que me decidi por isto?

A proposição demonstrada como expressão «proferimento» de uma decisão.

(MS 117, p. 183)

181. [PIII§70] Estas duas páginas consecutivas são numeradas como 184a e 184b porque incidentalmente Wittgenstein repetiu o mesmo número na página seguinte e prosseguiu dali por diante sem se dar conta do erro de numeração.

182. [PIII§70] Aqui e, mais adiante, nas seções §§ 78, 80-81, a ideia de um "desencontrar-se", "não se localizar muito bem", de um "estar meio perdido" na linguagem, é o que está em causa na discussão. Estas passagens têm reverberação na seção § 123 das IF. Cf. notas 191 e 196.

183. [PIII§70] A seção § 207 das IF coloca em questão argumentos muito semelhantes a estes.

184. [PIII§71] Os editores da OFM comentam que aqui o autor provavelmente se refere a uma conferência de Bertrand Russell: cf. "The Limits of Empiricism". In: *Proceedings of the Aristotelian Society*, 1935-1936. O que denota que a atividade dialógica de Wittgenstein continua a se desenrolar com as propostas filosóficas de Russell (cf. tb. PVII§17). A observação seguinte a esta remissão a Russell, omitida pelos editores, diz o seguinte:

Wenn ich die Multiplikation rechne, – ist das Resultat: daß die Menschen allgemein damit «mit dem was ich erhalte allgemein» übereinstimmen werden?

(MS 117, p. 185)

Se calculo a multiplicação, – o resultado é: que as pessoas em geral concordarão com «com o que em geral eu obtenho»?

(MS 117, p. 185)

É também questionável, neste sentido, a numeração aposta pelos editores na observação que se segue, como se fosse o começo de uma nova seção, já que a expressão destacada em itálico poderia muito bem ser o título – justamente – das observações que vêm a seguir.

185. [PIII§72] Uma observação final na p. 186 do MS 117, omitida pelos editores, ainda vale a pena de ser reproduzida aqui:

Ist meine Überzeugung, daß ich richtig gezählt, keine Ziffer ausgelassen, keine wiederholt habe, die Überzeugung, das die Allgemeinheit so zählt?

Gebrauche ich ein Wort – das Wort

(MS 117, p. 186)

'zählen', oder «↓'wiederholen'», etc – *auf Grund der Überzeugung*, daß die Allgemeinheit es so gebraucht?

(MS 117, p. 187)

É a minha convicção de que contei corretamente, de que não omiti nenhum dígito, de que não repeti nenhum, a convicção de que o público em geral conta assim?

Uso uma palavra – a palavra

(MS 117, p. 186)

'contar', ou «↓' repetir» etc. – *com base na convicção* de que o público em geral a usa assim?

(MS 117, p. 187)

186. [PIII§74] Das três observações omitidas pelos editores entre as páginas 191 e 192 do MS 117, destaco as duas seguintes:

Der Philosoph muß sich vor nichts *mehr* hüten, als einen Knoten zu zerschneiden, oder einen Faden abzureißen. Er muß die Knoten alle «, alle,» *auflösen*.

Wer Arithmetik lernt – «,» soll ich

(MS 117, p. 191)

O filósofo não tem que ter *mais* cautela do que separar um nó ou desfazer um fio. Ele tem que *desatar* todos «, todos» os nós.

Quem aprende aritmética – «,» devo

(MS 117, p. 191)

von dem sagen, er wird aufgezogen (konditioniert um dann richtig abzulaufen), oder: er lernt «lerne» jene anthropologischen Wahrheiten über die Abläufe. Oder wird er zuerst aufgezogen & dann lernt er jene «diese» Wahrheiten?

(MS 117, p. 192)

dizer que está sendo educado (condicionado para então percorrer corretamente), ou: ele aprende «aprendeu» aquelas verdades antropológicas sobre os percursos. Ou ele é educado primeiro & então aprende essas «estas» verdades?

(MS 117, p. 192)

187. [PIII§75] A observação que vem a seguir, omitida pelos editores, foi escrita em código na p. 193 do MS 117, e vale a pena ser reproduzida como testemunho de como Wittgenstein avaliava esteticamente a sua escrita.

Ich bin ein zweitrangiger Dichter. Wenn ich auch als Einäugiger König unter den Blinden bin. Und ein zweitrangiger Dichter täte *besser* daran, das Dichten aufzugeben. Auch wenn er damit unter seinen Mitmenschen hervorragt.

(MS 117, p. 193)

Eu sou um poeta secundário. Mesmo que, com um olho só, seja como um rei entre os cegos. E um poeta secundário faria *melhor* em desistir da poesia. Mesmo que se sobressaia entre os seus semelhantes.

(MS 117, p. 193)

188. [PIII§75] Outra observação quase ao fim da p. 194 do MS 117 talvez também valesse a pena reproduzir aqui:

Ich erwarte, dort dieselbe Farbe zu finden, wie hier. Ich gehe hin & finde wirklich die gleiche Farbe. Sage ich: "Ja, ich hatte recht; ich nenne, was ich hier sehe, wirklich 'die gleiche Farbe'."? Ist also meine Erwartung erfüllt, weil ich mit diesen Worten auf das, was ich sehe, reagiere? Nein; – hier sind verschiedene Sprachspiele.

(MS 117, p. 194)

Espero encontrar lá a mesma cor que aqui. Eu vou lá e realmente encontro a mesma cor. Eu digo: "Sim, estava certo; chamo o que vejo aqui realmente de 'a mesma cor'."? Minha expectativa é então satisfeita porque reajo ao que vejo com estas palavras? Não; – aqui estão jogos de linguagem diferentes.

(MS 117, p. 194)

189. [PIII§76] Ao pular sete páginas do MS 117, os editores da OFM deixaram de lado, a meu ver, uma das mais importantes obervações no contexto da discussão da demonstração matemática como uma suposta forma de experimento. Na p. 199 do MS 117, podemos ler:

"Der Beweis muß übersichtlich sein" – heißt: Im «im» Beweis gibt es nicht (wie im Experiment) verborgene Vorgänge, die das Resultat, wir wissen nicht wie, hervorbringen. Und das ist eine *grammatische* Bemerkung! Wer dies nicht versteht, mißversteht sie.

(MS 117, p. 199)

"A demonstração tem que ser uma visão panorâmica" – significa: Na «na» demonstração não há (como no experimento) processos ocultos cujos resultados não saibamos como foram obtidos. E esta é uma observação *gramatical*! Quem não compreende isto a compreende mal".

(MS 117, p. 199)

190. [PIII§78] A prática da aritmética, isto é, o conjunto de operações de contagem e de medição que realizamos com números, e que sempre contêm uma sucessão numérica, aplicações recursivas e, em geral, quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão), atravessou vários séculos, desde a antiguidade mais remota, com aplicações nas variadíssimas tarefas do cotidiano, seja na construção, seja no comércio, sejam nas teorias astronômicas e na navegação marítima, sem que se apresentasse para ela nenhum problema mais sério – até a chegada do século XIX. Trata-se então do ramo mais antigo e mais elementar da matemática que, somente depois da axiomatização da aritmética proposta por Peano, passou a se ressentir de um fundamento, principal tema de discussão da filosofia da matemática neste período no qual se notabilizam, entre outros, Frege com a fundamentação lógica da aritmética, e Hilbert com a formalização metamatemática da aritmética e procura por um algoritmo que pudesse demonstrar a sua consistência. Hilbert, em particular, enfatizou a apresentação exclusivamente sintática da aritmética mediante quatro características principais da axiomatização: (i) independência dos postulados; (ii) completude (que para uma determinada fórmula a, o sistema prova a ou $\sim a$); (iii) consistência (que para uma determinada fórmula a, o sistema não prove ao mesmo tempo a e $\sim a$), e, sobretudo, (iv) decidibilidade (que há um método efetivo que, através de um número finito de passos, demonstra se uma fórmula a do sistema é ou não derivável dos axiomas). Quando Wittgenstein coloca em causa o porquê do atual sentimento de intranquilidade, quando se pergunta de onde surge a reivindicação de consistência, nos coloca a pensar que não faz muito tempo que começou a nos parecer que não havia realmente uma ordem estabelecida no reino da aritmética.

191. [PIII§78] Cf. IF § 123; cf. tb. notas às seções [PIII§70] e [PIII§80]. Neste caso aqui nos sentimos perdidos como se estivéssemos caminhando sonâmbulos entre precipícios – mas por que nos atormentamos neste grau? Como o demônio veio morar nos nossos pensamentos? A existência de demônios, no entanto, é importante no cálculo? O que queremos: descrever ou explicar? Por que desejamos uma prova de consistência?

192. [PIII§78] Provavelmente por causa de um lapso, a numeração que se segue à página 209 no MS 117 vem grafada com o número "220" em vez de "210". Por isto, ao pular para a p. 222, os editores na realidade omitiram apenas 2 páginas do manuscrito, e não 20 páginas, como se poderia desavisadamente supor. Entre as observações interessantes que ocorrem nestas duas páginas, gostaria de destacar as seguintes:

Eine Beschreibung, nicht eine Erklärung (Newman), leitet hier zur Klarheit. [Vergessen, wie dieser Satz lauten soll.]

Eine Beschreibung, nicht eine Erklärung [Newman], leitet hier zur Klarheit.

Uns fehlt «mangelt» der Überblick; nicht das kausale Verständnis.

Uns fehlt der Überblick über verschiedene Fälle. // über die Mannigfaltigkeit der möglichen Fälle.// // über die möglichen Fälle. Z.B. über die möglichen Fälle jenes Aufmerksam machens & seiner Konsequenzen. // & der Konsequenzen, die es hat.//

(MS 117, p. 209)

(...)

Der Ausdruck der philosophischen Konfusion: Wir wissen nicht, was wir darüber sagen sollen.

Ich weiß nicht, wie ich die Dinge zusammenstellen soll.«, welche Ordnung ich den Begriffen geben soll.» Ich weiß z.B. «etwa» nicht ob ich den Beweis unter die Experimente, die Mathematik unter die Spiele, die Widersprüche unter die Verwirrungen

Uma descrição, não uma explicação (Newman), leva aqui à clareza. [Esqueça como esta sentença deve soar aqui.]

Uma descrição, não uma explicação [Newman], leva aqui à clareza.

Falta-nos «carecemos» a visão panorâmica; não a compreensão causal.

Falta-nos a visão panorâmica dos diferentes casos. // sobre a multiplicidade de casos possíveis. // // sobre os casos possíveis. Por exemplo, sobre os possíveis que chamam a atenção para aquilo & suas consequências. // e as consequências que tem. //

(MS 117, p. 209)

(...)

A expressão da confusão filosófica: Não sabemos o que devemos dizer sobre isto.

Eu não sei como devo colocar as coisas juntas. «, que ordem devo dar aos conceitos.» Não sei, por exemplo, se devo contar a demonstração entre os experimentos, a matemática entre os jogos, as contradições entre as rechnen

(MS 117, p. 220)

soll. Ob ich sagen soll, zwischen mathematischen & experimentellen Wahrheiten sei ein Gradunterschied «bestehe» «Unterschied des Grades», ob ich sagen soll ein neuer Beweis gebe dem Satz einen neuen Sinn.

Ich kenne mich in den menschlichen Tätigkeiten, den Techniken des Gebrauchs der Wörter, der mathematischen Sätze, der Beweise nicht aus. Wenn ich sie beschreiben soll, so kann ich sie in keinem Sinne übersehen.

Es ist, wie wenn ich ein winziges Gesichtsfeld & ein schlechtes Gedächtnis hätte, & mich nun «↓nun, durch hin & her blicken,» auf einer *großen* Landkarte auszukennen «↓lernen» sollte.

Man würde in so einem Falle fortwährend Zusammenhänge vergessen, verkennen, sie langwierig suchen, wo sie nicht sind.

(MS 117, p. 221)

(MS 117, p. 220)

confusões. Se devo dizer que há «existe» entre verdades matemáticas e experimentais uma diferença de grau «diferenciação do grau», se devo dizer que uma nova demonstração dá à proposição um novo sentido.

Eu me perco nas atividades humanas, nas técnicas de uso das palavras, das proposições matemáticas e demonstrações. Se devo descrevê-las, não posso desconsiderá-las em nenhum sentido.

É como se tivesse um diminuto campo de visão & uma péssima memória, e agora «↓ agora, olhando para trás e para a frente» devesse saber como me orientar «↓aprender» num *grande* mapa.

Num caso como este, a pessoa esqueceria continuamente as conexões, as compreenderia mal, e demoradamente as procuraria onde elas não estão.

(MS 117, p. 221)

Sobre a referência a Newman acima, não devemos confundi-la com H. Newman, cardeal mencionado em OC § 1 (cf. Kienzler, 2006). Trata-se no caso aqui presente do matemático Max Newman, professor do Christ's College da Universidade de Cambridge na época da escrita deste texto, com quem Wittgenstein iria discutir numa sessão da Trinity Mathematical Society dali a alguns dias (em 19/02/1940). Cf. PPO, pp. 373-375. .

193. [PIII§79] Embora haja uma correção dos editores do texto da palavra "heteronom" (heterônomo) para a palavra "heterologisch" (heterológico), o que Wittgenstein realmente escreveu em 1940, na p. 222 do MS 117, assim como também quatro anos depois, em 1944, na p. 108 do MS 124 (reproduzida na PVII§28), foi o primeiro termo. Provavelmente os editores forçaram uma harmonização com o termo realmente utilizado no paradoxo semântico auto-referencial de Grelling-Nelson. Wittgenstein já havia usado anteriormente, em 1930, a palavra "heterologisch" (cf. MS 108, p. 105; TS 209, p. 54; PR, Part XI § 121), ao acompanhar talvez uma sugestão de Ramsey (cf. 1931, p. 20) e atribuir erroneamente este paradoxo a Hermann Weyl. Se assumimos, de qualquer modo, a palavra "heteronom", usada de fato por Wittgenstein, o paradoxo consiste sempre no seguinte: (1) se a palavra "heterônomo" não for heterônoma, então ela se regula por regras impostas por si mesma, e poderíamos dizer "heterônomo não é heterônomo"; (2) mas se agora "heterônomo" significa ser "autônomo", então não será "heterônomo"; portanto, (3) "heterônomo" é autônomo e heterônomo ao mesmo tempo, o que é semanticamente impossível. A posição de Wittgenstein sobre o tratamento das contradições e paradoxos parte originalmente da sua crítica inicial à solução adotada por Russell na teoria dos tipos. No caso, em particular, do paradoxo semântico de Grelling-Nelson, Russell adotou uma *teoria ramificada dos tipos*. Isto porque as funções proposicionais que ocorrem neste caso quantificam sobre proposições predicativas, portanto não sobre variáveis reais, mas sobre variáveis aparentes. No entanto, para Wittgenstein, como já dizia no *Tractatus*, "A lógica tem que cuidar de si mesma" (TLP § 5.473). Em outros termos, a lógica não precisa recorrer a soluções extra-operacionais ou metalógicas, vindas de fora da própria sintaxe, para prevenir-se de uma suposta infecção das contradições no interior do sistema, como haviam proposto Russell & Whitehead

(cf. 1910, Preface, p. vii: "A very large part of the labour involved in writing the present work has been expended on the contradictions and paradoxes which have infected logic and the theory of aggregates"). Na formulação filosófica inicial de Wittgenstein, tudo o que a lógica deve fazer com relação a confusões provenientes do uso da linguagem ordinária (TLP §§ 3.323; 4.002; 5.5563), é esclarecer aquela forma de *aplicação* exclusivamente do seu ponto de vista simbólico, já que a linguagem corrente disfarça ou recobre o pensamento. Posteriormente, no entanto, mas ainda nos anos 1929 e 1930, Wittgenstein passou a defender que, assim com está, a linguagem ordinária está em perfeita ordem do ponto de vista lógico. Isto é, a linguagem está em ordem a respeito do pensamento que expressa, quando se pode especificá-la nos seus componentes mais simples. Foi com esta ideia da sintaxe aplicada aos problemas concretos da linguagem que Wittgenstein criticou fortemente as ideias de consistência, completude e enumeração (decidibilidade), preconizadas por Hilbert como afiançadoras da aritmética, no decurso de suas conversas com Schlick e Waismann entre 1929 e 1931 (cf. WWK, pp. 38-41; 119-149; 173-179; 192-207). Com a modificação do método de esclarecimento da sintaxe para a descrição dos jogos de linguagem em que são empregadas as proposições, ocorrida no começo dos anos 1930, Wittgenstein continuou a enfatizar que a proposição, no seu uso como aplicação prática no interior de formas de vida, já era completa, e, portanto, decidível. As contradições só constituiriam um problema se elas eventualmente impossibilitassem o uso da proposição em alguma aplicação, caso particular em que se poderia ou afastá-la ou não utilizá-la, simplesmente. Já vimos como na seção § 17 do Anexo III da Parte I, em 1938, Wittgenstein já havia reclamado do "medo supersticioso e a veneração do matemático diante da contradição". Um pavor semelhante estaria, na visão do filósofo, atuando como motivador principal da prova de Gödel, que produz uma contradição sem produzi-la de fato, pois cria um sistema de numeração próprio a partir dos símbolos do *Principia Mathematica* com a finalidade de comprovar a indecidibilidade *in abstracto* de sistemas formais da aritmética. Por isso, Wittgenstein também reclama que este tipo de demonstração não é análogo e não tem o mesmo poder de previsibilidade das provas de impossibilidade tradicionais, como a da inexequibilidade da trissecção do ângulo com régua e compasso. Em geral, para Wittgenstein, os jogos de linguagem podem conviver pacificamente com uma contradição em pelo menos três sentidos (cf. Fogelin, 2009, p. 140): (1) ou o sistema contém uma inconsistência ainda não descoberta, e vai funcionando perfeitamente bem sem que se chegue até ali; (2) ou a inconsistência é descoberta no sistema, mas tudo ainda corre bem porque ela não causa nenhum dano desde que não se aplique aquela contradição; ou (3) se queremos remover a inconsistência do sistema, isto não deve ser uma tarefa tão difícil de realizar. Em que pese a visão derrisória de artigos como os de Charles Chihara (cf. 1977), por exemplo, que ignora não apenas o intenso intercâmbio de ideias entre Turing e Wittgenstein desde 1936 (cf. Floyd, 2016a), que acabaram influenciando naquele matemático a ideia de "números computáveis", mas sobretudo porque lê as discussões com Turing nas aulas de 1939 do ponto de vista teórico, e não pragmático, como deveria ser, nesta seção Wittgenstein nos exorta justamente a olhar para o problema da contradição "sob o ponto de vista dos jogos de linguagem". Somente sob o ponto de vista praxeológico é que se pode compreender por que há um medo supersticioso ao mesmo tempo que uma veneração dos matemáticos diante da contradição. Cf., acima, seção PVII§79.

194. [PIII§80] A referência direta ao "jogo de linguagem (2)" mostra, na verdade, uma conexão interna entre este texto e as *Investigações Filosóficas* aqui referidas na sua seção § 2.

195. [PIII§80] Como já indicamos acima, Russell tinha, no *Principia*, uma concepção da contradição como uma infecção no corpo do sistema (cf. 1910, Preface, p. vii). A concepção infecciosa da contradição é prevalente entre os lógicos da primeira metade do século XX. No entanto, Wittgenstein presume que a doença consiste somente no sentimento de desorientação ou de perda.

196. [PIII§80] Aqui, nas seções §§ 80-81, e anteriormente, na seção § 78, a ideia de um "desencontrar-

-se", de um "estar meio perdido" no cálculo (e na linguagem) é o que está em causa na discussão. Estas passagens têm reverberação na seção § 123 das IF. Cf. notas 182 e 191. Daqui nasce a exigência de consistência no cálculo, algo que nestas passagens Wittgenstein procura mostrar que não é uma condição necessária. Deste modo, Wittgenstein antecipa a ideia central de uma lógica paraconsistente. No entanto, não o faz como alguma exigência teórica, mas como uma imposição da prática, da atividade de calcular em certos contextos e em certas ocasiões. Não nos esqueçamos desta declaração a Schlick em dezembro de 1930: "Veja só que interessante se resultasse numa contradição! Pois eu já até prevejo agora: haverá investigações matemáticas sobre cálculos que contêm uma contradição e vai se tirar proveito de que nos emancipamos também da consistência" (WWK, p.139).

197. [PIII§81] O que ocorre em '*f* (*f*)' é que temos aqui uma proposição do tipo "a classe *f* de todas as classes *f*" ou "a propriedade *f* de todas as propriedades *f*". Proposições desse tipo, autorreferentes, levam ao conhecido "paradoxo de Russell", em que a referência universal a uma classe que não é membro de si mesma tem como resultado que ela é, ao mesmo tempo, membro de si mesma e não membro de si mesma. A definição fregeana do número cardinal como extensão de classes contém tal pressuposto. Para solucionar esse problema, Russell passou a tratar a quantificação '*f* (*f*)' como "função proposicional", isto é, uma expressão com um ou mais componentes ainda indeterminados. Deste modo essa expressão não pode ser verdadeira ou falsa, senão quando um valor é atribuído à variável, e esta se torna uma proposição. Como não se trata de uma função predicativa, o que naquela se expressa não se confunde com o tipo expresso nesta (cf. tb. as notas 331 e 365). Nesses casos, segundo o TLP, a propria função passa a ser também seu argumento (cf. TLP § 3.333), mas, à diferença da solução pela forma da sintaxe lógica que Wittgenstein encontrou na sua obra de juventude, ele agora parece admitir que não há nenhum ideal de linguagem que possa prevenir o emprego de contradições, a não ser que algo deste tipo esteja previsto nas regras do jogo. Nenhuma regra, porém, poderia estar acima do seu próprio uso ou da sua prórpia prática no interior de uma forma de vida – ou do âmbito da utilidade, como ele mesmo diz –, pois elas não se justificariam senão pelo seu emprego prático. Cf. tb. IF § 125.

198. [PIII§85] Este mesmo raciocínio sobre a utilidade prática de uma prova de consistência em comparação com a demonstração de impossibilidade de uma construção geométrica, neste caso o "efeito tranquilizador" desta em comparação com a inutilidade daquela, é aventado também quando Wittgenstein discute a inutilidade da prova de Gödel ao dissociá-la de qualquer necessidade prática real: cf. AIII§14.

199. [PIII§85] Todo este longo trecho de 13 parágrafos da seção §85 desta Parte III coloca em contraste tanto a ideia da necessidade de uma prova de consistência como a de uma fundamentação lógica do cálculo (comum a Frege, Hilbert e Russell, com diferentes particularidades em cada um), com a própria prática da aritmética. Neste sentido é que Wittgenstein invoca uma hipotética história natural do cálculo, lembrando do ábaco e da passagem deste sistema para o cálculo efetuado por sinais escritos no papel. Assim as transformações conceituais são examinadas, isto é, descritas e não explicadas, em função de circunstâncias e interesses oriundos da práxis. Perguntar-se sob este ponto de vista sobre a existência de um cálculo lógico correto, faz com que se ressalte, isto sim, a existência de restrições e mutilações que sub-repticiamente traem um certo espírito dentro do qual um cálculo desenvolve o seu elã vital, o seu impulso orgânico e as suas variadíssimas cumplicidades com o ambiente dentro do qual se nutre. Outro ponto importante também a se ressaltar neste trecho é o tipo de abordagem metodológica proposta pelo autor. Esta descrição das práticas ou da história natural do cálculo tem o fito de fazer com que a insatisfação filosófica desapareça pela ampliação do olhar ou da maneira como enxergamos o cálculo. Agora não mais por supostas necessidades teóricas, mas pela sua práxis. Um parágrafo adicional não selecionado pelos editores na p. 251 do MS 117 corrobora esta hipótese:

(Nur durch Erweiterung unsres Gesichtskreises ~~können wir philosophische Probleme lösen~~. // ~~können~~ philosophische Probleme gelöst werden//.)
(MS 117, p. 251)

(Só pela expansão do nosso campo de visão podemos ~~resolver problemas filosóficos~~. // ~~Podemos resolver~~ problemas filosóficos podem ser resolvidos //.)
(MS 117, p. 251)

200. [PIII§86] Uma observação metodológica entre o fim desta observação e o começo da próxima foi omitida pelos editores. Vale a pena reproduzi-la aqui:

(Mörtel abkratzen ist viel leichter, als einen Stein zu bewegen. Nun, man muß das erste tun, bis man einmal das andre tun kann.)
(MS 117, p. 253)

(Raspar a argamassa é muito mais fácil do que mover uma pedra. Ora, tem que se fazer o primeiro até que se possa fazer o outro.)
(MS 117, p. 253)

201. [PIII§87] Estas duas observações prévias dão o contexto omitido da atual observação – que a elas se segue:

Ist es klar, daß, wenn ich einen Widerspruch gefunden habe, immer ich meinen bisherigen Kalkül haben werde desavouieren wollen muß?

Ich fragte aber: "hast Du nicht die Warnung mißverstanden?" – d.h.: Verstehst Du wirklich, *wovor* Du Dich zu hüten hast; & *wie* Du Dich hüten sollst? (Wenn bei mir eingebrochen wurde, ist es unbedingt gut, z.B., Wachen vor mein Haus zu stellen? Machen diese das Haus unter allen Umständen sicherer?)
(MS 117, p. 255)

Está claro que, quando encontrar uma contradição, sempre desejarei rejeitar meu cálculo anterior?

Mas eu perguntei: "Você não entendeu mal o aviso?" – isto é: você realmente entende *o que* você deve vigiar; e *como* deve fazê-lo? (Se alguém invadiu minha casa, é incondicionalmente bom, por exemplo, colocar sentinelas na frente da minha casa? Eles tornam a casa mais segura em qualquer circunstância?)
(MS 117, p. 255)

202. [PIII§87] Esta é uma amostra eloquente de que, em vez de ocupar-se de que teorias fundamentam as atitudes dos matemáticos, Wittgenstein visa apenas e tão-somente a sua atitude pura e simplesmente: isto é, o seu ponto de vista, a maneira de ver aquelas condições pragmáticas que influenciam os jogos de linguagem. Daí a sua opção pela descrição da história natural da matemática. Neste sentido, pelo menos uma das observações das pp. 257-258 do MS 117 que vale a pena recuperar seria esta:

Die Einstellung der Mathematiker zum Widerspruch scheint mir, um es krass auszudrücken, die der ~~Sensationslust & der~~ Hysterie & der Sensationslust. Freilich, vor allem, die der Verwirrung.
(MS 117, p. 257)

A atitude dos matemáticos em relação à contradição parece-me, para ser franco, de ~~sensacionalismo e~~ histeria e sensacionalismo. Claro, especialmente a de confusão.
(MS 117, p. 257)

203. [PIII§88] Aqui ocorre outro lapso na numeração dada por Wittgenstein. Ele escreve "260", mas a página, na realidade, deveria ter sido anotada com o número "259".

204. [PIV§3] Uma condição essencial dos sistemas axiomáticos é que postulados ou axiomas sejam tão-somente elementos independentes de uma lista que possam ser tomados como pontos de partida de uma demonstração. Assim, funcionam na prática como pontos de partida evidentes por si mesmos. No entanto, alguns autores objetam que axiomas sejam aceitos "sem demonstração" (por exemplo, Sant'Anna, 2003, p. 22), já que em qualquer teoria formal os axiomas são também teoremas. Isto ocorre na hipótese de uma demonstração em que haja somente uma fórmula bem-formada (FBF); esta FBF será, por conseguinte, um axioma se efetuamos a demonstração como uma

sequência de fórmulas tal que cada elemento desta sequência ou é um axioma ou uma inferência de fórmulas anteriores. De qualquer maneira, ainda que um axioma seja também um teorema, continua sendo, em última instância, um elemento aceito como ponto de partida evidente por si mesmo no contexto de uma demonstração. A pergunta de Wittgenstein então incide em saber como quê aceitamos um axioma, como é que o tornamos evidente. Quando só temos o seu enunciado verbal, ainda despossuído do seu emprego, o seu sentido ainda não está totalmente determinado. Mas quando depois aceitamos o axioma como autoevidente, aceitamos concomitantemente o seu emprego. Esta autoevidência, portanto, já está, mesmo que não o saibamos, correlacionada a uma prática, ou seja, ao tipo de emprego que destinamos para a proposição. A própria aceitação da evidência estabelece o seu emprego. O contexto desta discussão é importante não apenas para os problemas envolvidos na axiomatização da aritmética presente tanto em Hilbert como em Russell, mas sobretudo, no caso de Wittgenstein, para a compreensão da discussão Gödeliana da indecidibilidade dos sistemas formais da aritmética nos termos da sua atitude e dos seus compromissos de interesse.

205. [PIV§5] O pronome está sublinhado no manuscrito original, mas isto não foi reproduzido pela edição original do texto em alemão.

206. [PIV§6] Temos aqui um belo exemplo de como Wittgenstein aplica a sua metodologia de "apresentação panorâmica" (cf. IF § 122) para disponibilizar a possibilidade de ver conexões que em geral não percebemos tão claramente (cf. PI§36, acima, e, abaixo, PIV§47 e PVII§65). Há também aqui proposto um interessante contraste entre proposições empíricas, que são aquelas que descrevem situações contingentes ou fatos que poderiam ter sido completamente diferentes do que são descritos, como "Esta rosa é vermelha", e proposições gramaticais, que são aquelas que ordenam em um sistema a priori os meios pelos quais podemos saber que tal objeto é uma "rosa" e que a sua cor é "vermelha". Parece-nos bastante evidente que esta rosa que é vermelha poderia ter sido outra espécie de flor, ou a mesma flor só que de outra cor; no entanto, é menos evidente que possamos colocar em dúvida as próprias proposições gramaticais que ordenam e sistematizam o nosso conhecimento. Para Wittgenstein, a apresentação panorâmica possibilita, pelo menos, que esta dúvida possa ser exercida também sobre proposições gramaticais.

207. [PIV§11] Quando Wittgenstein se pergunta sobre quem fala da aritmética como "mineralogia", como "história natural dos números", e se vincula a esta ideia, está, ao mesmo tempo, localizando temporalmente, portanto numa forma de vida, a sua própria orientação filosófica. Como dizemos no comentário à seção §1 da Parte V, logo abaixo, Wittgenstein ancora a objetividade da matemática na "história natural da humanidade" (cf. tb. PI§63; PI§142; PII§40;; PIV§13; PV§1; PVI§49; PVI§17), que passa a ser então, diga-se de passagem, uma espécie de "objetividade contingente" das proposições matemáticas. Estas são referidas ao mundo empírico que vai se tornando em norma, em relações internas necessárias, mas em que nenhum momento pode-se dizer que ficariam eternamente fixas, como se fossem absolutamente independentes do que ocorre no mundo.

208. [PIV§12] Trata-se mais do problema da persuasão do que do convencimento racional ou do argumento. Note aqui o leitor o papel que o conceito de "imagem" vem jogando neste trecho: em § 11, a voz principal sugere a ideia da aritmética como uma mineralogia dos números. Então, segundo a hipótese, o que são "números", são coisas físicas como os minerais? Não, na hipótese da voz principal números são formas, assim como os mineirais, e têm propriedades da forma assim como as têm os minerais. O que parece difícil, segundo o entendimento da voz principal, é que essas propriedades da forma dos números são "possibilidades" e não "as propriedades formais da coisa como forma". E nisto o número e o mineral são distintos, pois se no primeiro caso as propriedades da forma são possibilidades, o papel da lógica é fundamental: ela é o único acesso à compreensão das propriedades dos números, enquanto que para os minerais o tratamento empírico é suficiente. Nas transformações da forma, que são, de fato, as possibilidades lógicas dos números em exercício, isto é, as possibilidades

de aplicação da aritmética, é que as imagens ganham um papel relevante, já que elas nos informam que a coisa se emprega assim e assim. Nossos juízos, por conseguinte, como já conclui a voz principal do trecho, se realizam por meio de imagens – na medida em que elas mesmas não sejam objetos de algum juízo. A questão da aceitação de uma imagem, torna-se, por isto, crucial na seção § 12. A voz principal a classifica como sendo "a questão principal". Note também o leitor que não há no excerto nenhuma explicação filosófica sobre o que seriam essas "imagens". Apenas indica-se o seu papel na gramática, e como isto ajuda a conformar uma lógica, um sistema de regras, por um lado, mas, por outro lado, conforma também um paradigma que nos faz ver sempre do mesmo jeito. Impressiona ver como este modelo explicativo emula o modelo tractariano (cf. na seção § 14, abaixo, como retorna na argumentação o modelo da lógica como proposições tautológicas sem sentido), no sentido de ser uma relevante coleção de contrassensos cujo propósito exclusivo é nos fazer ver como a filosofia contamina a matemática, por um lado, e, por outro, como esses mesmos contrassensos utilizados na argumentação são também descartáveis.

209. [PIV§14] Dentre algumas observações entre as páginas 20 e 28v do MS 125 que os editores desconsideraram para publicação, destacaria as seguintes:

Man kann aber den Russelchen Beweis auch z.B. als Beweis dafür ansehen daß der bewiesene Satz (MS 125, p. 20r) in eine «↓bestimmte» andere Notation, vom die & die Struktur haben werde. Das ist wie wenn man beweist, es werde sich eine Zahl durch die & die Zahl teilen lassen.	Mas também pode-se ver a prova de Russell, por exemplo, como demonstração de que a sentença demonstrada (MS 125, p. 20r) terá uma outra «↓determinada» notação de tal & tal estrutura. É como demonstrar que um número é divisível por tal & tal número.
Bewiesen wird durch reden oder schreiben, – ein Beweis fungiert im Gebiete der Sprache. Ein Beweis geht in der Sprache vor sich. Im Geschriebenen oder Gesprochenen. (MS 125, p. 20v)	Demonstra-se pela fala ou pela escrita, – uma demonstração funciona no âmbito da linguagem. Uma demonstração se passa na linguagem. Por escrito ou falando. (MS 125, p. 20v)

210. [PIV§16] Wittgenstein coloca depois do ponto final do parágrafo uma observação entre colchetes: "[Wie sehr ich doch bei meinem Denken von Spengler beeinflußt bin/] // [Quanto estaria influenciado pelo meu pensamento sobre Spengler?]".

211. [PIV§17] Os editores das OFM indicam neste ponto uma citação da p. XVI da "Introdução" às *Leis Básicas da Aritmética*, de Frege. Cf. a mesma citação na [PI§152].

212. [PIV§18] Qual é o sentido desta distinção que Wittgenstein faz aqui entre "técnica de transformação" e "gramática"? Mais acima (final da seção §15) ele disse que "O centro de gravidade da sua matemática consiste *totalmente*..." (vem ressaltado no texto) "... no *fazer*" (novamente ressaltado). Evidentemente o gramatical está ligado à práxis, enquanto que a técnica responde a uma finalidade episódica ou eventual desta mesma práxis, como "prever a ocorrência de certos acontecimentos". Uma técnica de sinais pode ser substituída por outra, desde que as pessoas se convençam a mudá-la. Este convencimento vem pela impressão causada pelas imagens aplicadas na persuasão. Mas a base deste convencimento e destas finalidades é o gramatical ou a sua práxis: o próprio ser humano. Como será remarcado na seguinte seção (§20), "Se o cálculo parece uma atividade maquinal, então a máquina é o *ser humano*..." (novamente ressaltado) "...que efetua o cálculo". (Sobre "pessoas" ou "seres humanos" que calculam, cf. RPPI § 1096, e, acima, a nota 132 a PII§50).

213. [PIV§29] Uma observação omitida pelos editores na p.43r talvez mereça ser recuperada aqui:

Förmlich wie es einen *tiefen* & einen seichten Schlaf gibt, so gibt es Gedanken die tief im Innern vor sich gehen & Gedanken die sich an der Oberfläche herumtummeln. (MS 125, p. 43r)	Formalmente, como existe um sono *profundo* e um superficial, existem pensamentos que se aprofundam no interior & pensamentos que se divertem na superfície. (MS 125, p. 43r)

214. [PIV§30] A função que a palavra "pano de fundo" (*Hintergrund*) cumpre com relação à demonstração, tal como representada aqui, vem a ser a mesma que se repete no derradeiro texto de Wittgenstein, *Sobre a Certeza*, cuja primeira seção reza: "Se você sabe que aqui está uma mão, então nós te daremos todo o resto" (OC § 1). Em OC, Wittgenstein refere-se à demonstração da existência de coisas fora de nós, fornecida por Moore (cf. 2004b), como confusão gramatical entre dois "panos de fundo" ou sistemas diferentes, digamos assim, que conduzem erraticamente sua suposta refutação lógica do ceticismo. Moore apresenta como duas premissas do seu argumento as proposições "Aqui está uma mão" e "Aqui está a outra mão", que antecedem a conclusão "Há, pelo menos, duas mãos". Como o argumento é logicamente válido, então Moore não tem dúvida de que demonstrou, *ipso facto*, a existência de coisas externas. Entretanto, como as suas premissas são apresentadas como "proposições cognitivas", a objeção de Wittgenstein se direciona à mescla entre derivação ou inferência lógica, cujas regras de quantificação permitem que aquela conclusão se siga das referidas premissas, e as regras que determinam o que deve contar como evidência de conhecimento, que são outras e que vêm de outro contexto. Do fato de que (1) A → B; (2) A; e, (3), conclusão, B, não se pode inferir que "Se vejo um objeto diante de mim, então sei que há um objeto diante de mim", que adota outras regras de outro contexto, a não ser que se tome a lógica como fundamento de qualquer forma de conhecimento. Seria o *modus ponens* o fundamento da nossa certeza de que "Aqui está uma mão" ou apenas uma gramática entre outras possíveis, entre elas a do ceticismo? Assim é que nas seções §§ 93-94 de OC, Wittgenstein faz uso da palavra *Hintergrund* para ressaltar esta diferença: "Tudo o que vi e ouvi forma em mim a convicção de que nenhuma pessoa já esteve afastada da Terra. Nada na minha imagem de mundo fala a favor do oposto. Mas eu não tenho a minha imagem de mundo porque me convenci da sua correção; tampouco porque estou convencido da sua correção. Senão que é o pano de fundo herdado sobre o qual distingo entre o verdadeiro e o falso." Devem ser, por isto, outras proposições, diferentes das que a lógica nos fornece, que orientam o que se conta como conhecimento em outros contextos e lugares, ou até mesmo no interior da nossa própria forma de vida. No caso aqui em pauta nas OFM, a demonstração, do mesmo modo, não nos obriga a nada, senão que nela podemos ver que seguimos segundo uma orientação herdada como "pano de fundo", que organiza a maneira como as regras decidirão a respeito do falso e do verdadeiro. A demonstração renova, em cada aplicação, um velho acordo a respeito da nossa maneira comum de ver o mundo, ou, então, vão modificando devagar, a cada aplicação, esse velho acordo. Podemos ver mais sobre a inter-relação entre pano de fundo e demonstração em PVI§2; PVI§11; e PVII§74.

215. [PIV§30] Estas duas observações que antecedem a conclusão do cuidado metodológico de não constituir doutrinas que expliquem a demonstração como uma espécie de compulsão definitiva merecem ser reproduzidas aqui por conta de iluminar o processo dialógico do pensamento de Wittgenstein:

Aber was ist mit einer neuen Begriffsbildung getan? Denn auf den ersten Blick erscheint sie höchstens als eine bequeme Zusammenziehung. (MS 125, p. 44v)	Mas o que é feito de uma nova formação de conceito? Pois à primeira vista ela parece no máximo uma confortável contração. (MS 125, p. 44v)
Du kannst den Keim nicht aus dem Boden ziehen. Du kannst ihm «↓nur» Wärme, Feuchtigkeit & «↓etwa» Licht geben & dann muß er wachsen. (Nur mit Vorsicht darfst Du ihn «↓selbst» *berühren* «↓*angreifen*»). (MS 125, p. 45r)	Você não pode arrancar o embrião do solo. Você «↓só» pode lhe dar calor, umidade & «↓possivelmente» luz & ele então tem que crescer. (Só com cautela você pode *tocá-lo* «↓*pegá-lo*» «↓por si mesmo»). (MS 125, p. 45r)

216. [PIV§31] Quando Wittgenstein ilumina a diferença entre "Será assim" e "Tem que ser assim", esclarece, pela perspectiva do interesse prático e do tipo de visão de mundo que ele orienta, a distinção entre provas de impossibilidade, como a da trissecção do ângulo somente com régua e compasso, em que na eventualidade de uma tentativa deste tipo pode-se prever pela demonstração que "tem que ser assim", e a prova de Gödel, cujas demonstrações decretam que, no caso de sistemas aritméticos que tentam estabelecer sua própria consistência e completude, "será assim". No primeiro caso, trata-se de uma ordem, da prescrição de uma regra, portanto de uma gramática e de uma visão de mundo; não há aqui nada empírico, só há uma visão de possibilidade, portanto uma condição necessária que torna impossível que algo resulte diferente do que foi previsto. No caso da prova de Gödel, existe a aparência de uma proposição empírica, do tipo "será assim", ou de uma possibilidade entre outras. Portanto, ela é inutilizável como uma demonstração do primeiro tipo, que é gramatical (cf. acima a nota à seção AIII§14).

217. [PIV§32] O que, de fato, disse Frege nas *Leis Básicas da Aritmética* (Introdução, p. XVI), difere ligeiramente da citação de Wittgenstein: "Es giebt also Wesen, welche gewisse Wahrheiten nicht wie wir unmittelbar erkennen, sondern vielleicht auf den langwierigern Weg der Induction angewiesen sind./ Existem, portanto, seres que não reconhecem certas verdades como nós, imediatamente, mas que talvez sejam instruídos pelo enfadonho caminho da indução". Frege combate ali uma concepção empirista e psicológica das leis da lógica, tal como descritas por seu coetâneo Benno Erdmann, preferindo o fundamento lógico, segundo ele, objetivo e universal, da aritmética. Wittgenstein não desfaz o antipsicologismo de Frege, mas substitui o lógico pelo pragmático quando desloca o seu interesse para a "conduta característica das pessoas que têm um 'entendimento imediato' de alguma coisa".

218. [PIV§32] Wittgenstein, nas suas investigações, substitui a configuração mental, o psicológico – ou também o lógico ou o aritmético – , pela configuração da ação, o praxeológico ou, tal como seria mais adequado qualificar, o gramatical. Esta é também a diferença entre o "será assim" e o "tem que ser assim". No último caso, o que vige, o que prepondera, é o lógico em vez do praxeológico. É no plano do praxeológico ou do gramatical que a ocorrência de interesses e visões de mundo canalizam nossas experiências através de determinadas convicções.

219. [PIV§33] Para Wittgenstein a demonstração não nos convence apenas porque apresenta evidências e nós simplesmente as reconhecemos, mas porque tais evidências conformam para nós uma imagem, nós as reconhecemos conforme uma determinada visão de aspecto que as próprias evidências por si mesmas não nos dão. Não se trata portanto de uma relação especular e direta de representação, de uma correlação simples e imediata entre um sujeito cognitivo e um mundo que se dá espontaneamente a conhecer, mas de inter-relações pragmáticas constituídas em um entorno em que alguém só se convence das evidências porque já participa de uma certa forma de vida em que aquelas conexões fazem sentido na prática. Mais acima, na seção anterior, o autor nos adverte de que ele não se interessa pelo "entendimento imediato de uma verdade", mas pelo seu "fenômeno", isto é, pela "configuração da ação". Fazemos nossas previsões, portanto, conforme uma imagem urdida por uma conjunção de interesses e de demandas pragmáticas entre seres humanos, e até mesmo não-humanos (objetos materiais ou outros animais). Por isto, a demonstração tem efeito análogo ao do poema ou ao da peça de teatro. Não apenas vemos uma composição literária, mas a vemos do modo pelo qual estamos convencidos de que não poderia ser de outra maneira. O gramatical tem caráter de necessidade.

220. [PIV§33] Os editores da OFM preferiram colocar o artigo "die" em vez do pronome "ihre", mas Wittgenstein riscou o artigo e escreveu o pronome acima, razão pela qual favoreci a última formulação.

221. [PIV§36] Wittgenstein pretende enfatizar aqui a precedência da forma de vida, ou do praxeológico, em que uma imagem e um certo modo de consideração (visão de aspecto) das coisas pode se ancorar. Os editores das OFM omitiram uma observação da p. 55r que também vale a pena reproduzir aqui porque ilumina o contexto da discussão, já que o jogo de linguagem é parte intrínseca de uma forma de vida:

"Jeder Körper hat eine bestimmte Größe & Form". Das, z.B., heißt, wir können immer fragen welche Form hat dieser Körper?, wir können immer dieses Sprachspiel spielen. Der Satz steht sozusagen für die Beschreibung eines Sprachspiels.
(MS 125, p. 55r)

"Todo corpo tem um determinado tamanho e forma". Isto significa, por exemplo, que sempre podemos perguntar que forma tem este corpo? Sempre podemos jogar este jogo de linguagem. A proposição sinaliza, por assim dizer, a descrição de um jogo de linguagem.
(MS 125, p. 55r)

222. [PIV§43] Neste ponto, os editores da OFM pulam para a p. 133 do MS 124, escrita em março de 1944. O MS 125 foi escrito em 1942. Talvez tenham feito isto porque o assunto do excerto do MS 124 seja o mesmo que o autor havia deixado no outro manuscrito, dois anos antes. O MS 125 é retomado logo a seguir.

223. [PIV§44] Dos três grandes "ismos" do debate sobre os fundamentos da matemática ocorrido na primeira metade do século XX, formalismo, logicismo e intuicionismo, Wittgenstein sempre pareceu estar mais próximo deste último. Autores como Marion (1998) favorecem interpretações como essa. No entanto, a postura decididamente antifilosófica de Wittgenstein desde o TLP (cf. Maddy, 1993; McManus, 2006) permitem outra visão, a de que o trabalho de Wittgenstein em filosofia da matemática é completamente ateórico. Tal posição favoreceria, supostamente, uma conclusão somente alcançada por Benacerraf na década de 70 (cf. 1983), a de que o projeto de redução da matemática à teoria dos conjuntos é subdeterminado de duas maneiras: (a) ao não alcançar uma semântica uniforme através do discursos matemático e não-matemático, e (b) conceber uma epistemologia plausível para a matemática. Deste modo, o interesse das observações de Wittgenstein sobre a matemática e a lógica, indicando toda sorte subdeterminações semânticas, epistemológicas e estruturais, enraíza-se no solo das discussões contemporâneas pela sua vertente exclusivamente praxiológica.

224. [PIV§45] Algumas observações omitidas pelos editores das OFM entre as páginas 64v e 65r do MS 125 são reproduzidas aqui por causa da sua reverberação dentro do conjunto das observações oficialmente publicadas. A primeira delas, em particular, tem eco numa observação que se encontra em PV§2.

Wenn Rechenmaschinen in der Natur vorkämen & von den Menschen gefunden «↓& benützt» würden, so hätten wir z.B. eine Arithmetik ohne Sätze & ohne Beweise.

Es gibt also etwas, was man wird Mathematik nennen müssen, eine Technik ohne Sätze & ohne Beweise.
(MS 125, p. 64r)

Wenn ich mir aber das Resultat von 25 × 25 anmerke statt es wieder zu rechnen, habe ich schon eine Gabe der Mathematik benützt. – Oder ich habe auch nur meine Technik geändert.

Man könnte hier sagen, der Gebrauch mathematische Sätze & Beweise fange da an, wo eine Rechnung, die schon einmal gemacht wurde, nicht wiederholt, & ihr Resultat einfach übernommen wird. Wo gesagt wird: "das
(MS 125, p. 64v)
haben wir ja schon gerechnet."
(MS 125, p. 65r)

Se máquinas de calcular ocorressem na natureza & fossem encontradas «↓ e usadas» pelos humanos, teríamos, por exemplo, uma aritmética sem proposições e sem demonstrações.

Portanto, há algo que terá de ser chamado de matemática, uma técnica sem proposições e sem demonstrações.
(MS 125, p. 64r)

Mas se eu observar o resultado de 25 × 25 em vez de calculá-lo novamente, já usei o dom da matemática. – Ou apenas mudei minha técnica.

Pode-se dizer aqui que o uso de proposições e demonstrações matemáticas começa onde um cálculo que já foi feito não é repetido e seu resultado é simplesmente assumido. Onde é dito: "isto
(MS 125, p. 64v)
nós já calculamos."
(MS 125, p. 65r)

225. [PIV§46] Entre as observações omitidas das páginas 65v a 69r do MS 125, destaca-se uma reflexão sobre o papel da contradição em matemática, escrita entre as páginas 67r e 68r, que os editores deslocaram para a seção § 59 desta Parte IV com a finalidade de juntar no mesmo bloco excertos provenientes de diferentes épocas e lugares que tinham como tema a contradição. Ao realocar assim estes excertos, os editores criaram uma nova fisiognomia do *Nachlass*, fazendo parecer que os textos de Wittgenstein estariam organizados de maneira mais sistemática, mais em forma de livro do que propriamente de álbum.

226. [PIV§47] Sobre o conceito de fisiognomia, cf. acima PI§78, AI§24, e abaixo PIV§50, PVII§§17, 18 e 60.

227. [PIV§48] Embora seja uma reflexão relativamente curta, com o emprego de apenas 29 palavras, Wittgenstein na realidade realizou um grande esforço até chegar à formulação que lhe pareceu mais satisfatória: quase duas páginas inteiras do pequeno manuscrito foram tomadas por ensaios e recusas até que o autor finalmente conseguiu expressar o que queria.

228. [PIV§48] Todo o trecho entre as seções §§ 198-202 das IF discute as diferenças entre "seguir uma regra" e "interpretação da regra". Wittgenstein ali denomina esta reflexão como "gramática da expressão 'seguir a regra'". Aqui, neste pequeno exerto da PIV das OFM, o seguimento da regra é discutido com relação a uma imagem ou a uma fisiognomia (visão de aspecto).

229. [PIV§50] Todo o trecho que se segue a esta observação foi suprimido pelos editores da OFM. Eu o reproduzo aqui por causa da sua importância para a reflexão sobre os conceitos de "fisiognomia" e de "visão de aspecto" na obra de Wittgenstein:

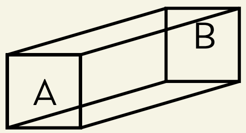
Und der Erfahrungssatz ist, daß wir dieses Gesicht erhalten wenn wir das Wort umkehren. – Aber was heißt es: 'es umkehren'? Es darf
(MS 125, p. 73v)
natürlich nicht heißen: dies Gesicht erzeugen. Es ist also ein Prozess, der nicht schon 'notwendig' mit diesem Resultat verbunden ist. Wir aber nennen freilich «allerdings» 'umkehren' schon etwas was durch das Ergebnis des Umkehrens bestimmt ist. Was nicht so bestimmt ist würden wir etwa 'umzukehren versuchen' nennen.
(MS 125, p. 74r)

E a proposição empírica é que conservamos essa face quando invertemos a palavra. – Mas o que significa 'invertê-la'? Naturalmente,
(MS 125, p. 73v)
isto não pode significar: produzir essa face. Portanto é um processo que não está 'necessariamente' ligado com esse resultado. No entanto, supostamente «admitidamente» chamamos de 'inverter' alguma coisa que já está determinada pelo desfecho da inversão. O que não está assim determinado talvez chamássemos de 'tentar inverter'.
(MS 125, p. 74r)

230. [PIV§50] Os editores pularam para do MS 125 para o MS 126 provavelmente porque estes trechos foram escritos ao redor da mesma época e porque tratam praticamente do mesmo assunto. Assim é que os excertos provenientes do MS 126 ficaram todos alocados na seção § 50. No entanto, ao

editar o texto de Wittgenstein pela ordem dos assuntos e não da maneira aleatória em que o próprio autor preferiu escrever, em caminhos entrecruzados que se atravessam em todas as direções (como diz o Prefácio das IF), eles impõe uma quebra no estilo de escrita do *Nachlass* como um todo. Passamos a ter então outra "visão de aspecto" do estilo literário do autor, não exatamente a de "álbum".

231. [PIV§50] Wittgenstein adiciona esta ilustração ao texto no manuscrito original:



Todo este raciocínio está exposto em LWL, p. 51, onde o autor nos explica que podemos ver uma figura de mais de uma maneira, e que ver algo diferente não é uma mera questão de interpretação – vemos e sentimos, ou experimentamos, de modo diferente.

232. [PIV§51] O exemplo proposto por Wittgenstein, a escrita em alfabeto invertido, é uma prática que ele adota constantemente ao longo de todos os seus manuscritos no *Nachlass*, e até mesmo agora, a partir da página seguinte a esta observação, em que, antes de retomar o raciocínio interrompido anteriormente, começa um relato de sonho em alfabeto invertido que toma quase duas páginas inteiras do pequeno caderno de anotações.

233. [PIV§51] Quase duas páginas do manuscrito foram omitidas neste ponto pelos editores por não tratar diretamente de matemática. Trata-se do relato em código de um sonho que, em razão de suas óbvias conexões internas com as IF, vale a pena ser reproduzido aqui. Este sonho foi comentado em Monk (1991, pp. 436-437), que nos informa que, enquanto trabalhava no Guy's Hospital, em 1942, Wittgenstein fez amizade com Naomi Wilkinson, uma prima de Gilbert Ryle, que organizava recitais de gramofone aos quais Wittgenstein costumava atender. Dois paralelos entre a amizade entre Wittgenstein e Wilkinson são a amizade entre ele e Gretl, sua irmã mais próxima e confidente, e a amizade entre a sua outra irmã mais velha, Hermine, e Louise Pollitzer, citada no relato do sonho (cf. Janik & Veigel, 1998, p. 77). Pichler (2018, p. 103) também nos informa, a propósito de dois outros relatos de sonho escritos em código no MS 126, caderno de anotações em que Wittgenstein escrevia ao mesmo tempo que o MS 125, que nesta época Wittgenstein trocava muitos relatos de sonhos com sua irmã Gretl. No relato de sonho aqui descrito pode-se conectar, se quisermos, os seguintes detalhes: (a) o fato de que Wilkinson havia lhe perguntado quantas pessoas conseguiam realmente entender a sua filosofia; aliado ao fato de que (b) Wittgenstein achava que seus escritos continham uma fechadura capaz de ser aberta somente por muito poucas pessoas, isto é, apenas os seus amigos nos quatro cantos do mundo que conseguiriam compreender o espírito da sua obra (MS 109, pp. 208-209); associado também a (c) a ideia de que o gramofone é um instrumento capaz de transmitir fielmente obras esteticamente exemplares; e (d) a presença de Louise Pollitzer, uma entusiasta da *Wiener Werkstätte* (Janik & Veigel, p. 225), uma cooperativa de arquitetos, artesãos e designers na Viena do começo do século XX que buscava trazer ideias de renovação artística; e (e) o disco feito de material resistente e duradouro; que (f) apontam para a preocupação estética acerca da sua escrita e a repercussão que finalmente conseguiria com ela. Devemos nos lembrar que Gretl fez dois anos de análise com Freud. Foi para Gretl que Wittgenstein deu de presente de Natal a primeira versão manuscrita das IF, o MS 142, em 1936. Devemos também levar em consideração a maneira como Wittgenstein avaliava a psicanálise, valorizando enormemente a capacidade persuasiva da técnica de Freud ao mesmo tempo em que condenava o enquadramento teórico naturalista da psicanálise em termos de causa e efeito (cf. Wittgenstein, 1966). A maneira como incorporou a análise da fala, típica da sessão psicanalítica, o elemento persuasivo por excelência da técnica de Freud, em sua própria metodologia filosófica e em sua escrita dialógica, é muito característico da atitude de Wittgenstein como filósofo, sobretudo pelo que se vê na seções §§86-93 do TS 213. Esta é precisamente a atitude das suas perguntas à filosofia da matemática, e é deste modo que ele questiona a atitude dos vários matemáticos que evoca em seus diálogos polifônicos. Sobre a análise de sonhos feita da maneira concreta como ele costumava realizar, podemos encontrar observações muito claras no MS 136, pp. 137b-138a. Em parte deste trecho, ele diz por exemplo: "O que é intrigante no sonho não é a sua conexão causal com os eventos da minha vida etc., mas antes o que ele efetua como parte de uma história, & especificamente uma muito vívida em que o resto permanece na obscuridade". Vejamos agora o relato de sonho:

Ein Traum: Mir träumte heute nacht, meine Schwester Gretl gebe der L. Pollitzer ein Geschenk: eine Tasche. Ich sah die Tasche «↓im Traum» oder vielmehr nur den stählernen Verschluß der sehr groß «↓& viereckig war» und «↓sehr» fein gearbeitet . Er sah aus wie einen von den komplizierten alten Schlößern, die man manchmal in Museen sieht. In diesem Verschluß war unter anderem ein Mechanismus durch den beim Öffnen

(MS 125, p. 75v)

die Worte "deiner Gretl" oder etwas ähnliches, gesprochen wurden. Ich dachte darüber nach wie fein der Mechanismus dieser Vorrichtung sein müsse & ob er eine Art Grammophon sei & aus welchem Material die Platte könnt sein möglicherweise aus Stahl sei.

(MS 125, p. 76r)

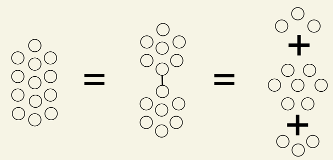
Um sonho: sonhei hoje à noite que minha irmã Gretl estava dando um presente a L. Pollitzer: uma bolsa. Eu vi a bolsa «↓no sonho», ou melhor, apenas o fecho de aço que era muito grande «↓& quadrangular» e «↓muito» bem trabalhada. Ele parecia uma daquelas velhas e complicadas fechaduras que às vezes se vê em museus. Neste fecho havia, entre outras coisas, um mecanismo pelo qual

(MS 125, p. 75v)

as palavras "sua Gretl", ou algo semelhante, eram faladas ao abrir. Pensei em como o mecanismo deste dispositivo tinha que ser fino e se era uma espécie de gramofone e de que material o disco poderia ser feito, possivelmente aço.

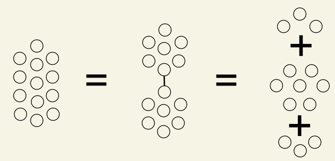
(MS 125, p. 76r)

234. [PIV§54] Esta é a última página do MS 125; o texto da PIV será complementado com observações extraídas do MS 127, composto entre o começo de 1943 e o começo de 1944, quando Wittgenstein deixou o Guy's Hospital e foi trabalhar no laboratório médico em Newcastle, bem como com excertos provenientes do MS 121, composto em dezembro de 1938. Todas as observações extraídas pelos editores das OFM nestes excertos versam sobre a contradição em matemática, pelo que se vê que seu critério de seleção é temático e não meramente temporal. Há porém uma observação final no MS 125 que compõe o raciocínio de muito o que foi discutido ali, mas que foi simplesmente omitida pelos editores:



Was Einen von einem *synthetischen* Satz reden macht, ist die *neue* Form.

(MS 125, p. 79r)



O que faz alguém falar de uma proposição *sintética* é a *nova* forma.

(MS 125, p. 79r)

235. [PIV§56] Nas próximas 3 páginas do MS 127, Wittgenstein entabula uma interessante discussão sobre o problema fregeano da "classe de todas as classes", mas os editores preferiram destacar a seguir uma reflexão sobre contradição em matemática que aparece, na realidade, numa página anterior a esta.

236. [PIV§58] A pergunta "Und warum nicht?/E por que não?" foi omitida pelos editores da OFM.

237. [PIV§59] Na notação do *Principia Mathematica* (Russell & Whitehead, 2019 [1910]), esta fórmula

deve ser lida como: “Numa totalidade que inclui a si mesma é possível que qualquer elemento desta totalidade seja ele mesmo e não seja ele mesmo”.

238. [PIV§60] À diferença do que foi enunciado pelos editores no título do começo desta Parte IV, de que se trataria de textos redigidos entre 1942 e 1944, este excerto do MS 121 não é da mesma época que os demais: trata-se de uma observação escrita em dezembro de 1938, portanto em diferente contexto e preocupações.

239. [PV§2] Toda a argumentação de Wittgenstein direciona a atividade matemática para a prática na qual ela se ancora, em vez de circunscrevê-la aos problemas epistemológicos. Neste sentido, o pragmático prepondera sobre o cognitivo, e se quisermos falar sobre a o objetividade da disciplina, ela teria que estar baseada na “história natural da humanidade” (PI§63; PI§142; PII§40; PIV§11; PIV§13; PVI§49; PVI§17) que passa a ser, diga-se de passagem, uma espécie de “objetividade contingente” das proposições matemáticas. Estas são referidas ao mundo da práxis que vai se tornando em norma, em relações internas necessárias nas diferentes formas de vida, mas que em nenhum momento pode-se dizer que ficariam eternamente fixas, como se fossem absolutamente independentes do que ocorre no mundo. Um pensamento como este, por conseguinte, está em oposição ao platonismo, que pressupõe um mundo puro, ideal, alheio ao empírico e depositário dos objetos aos quais as proposições matemáticas se referem; mas também em oposição ao logicismo, que igualmente pressupõe um mundo à parte, capaz de garantir a objetividade da aritmética em números concebidos como objetos autossubsistentes. Nada disto, no entanto, coloca Wittgenstein ao lado do formalismo puro (cf. Potter, 2000, pp. 10-12), que concebe as proposições matemáticas apenas como conjunto de regras sem significado, o que deixaria a sua concepção da matemática muito próxima do relativismo e do subjetivismo, pelo outro lado da questão. Deste modo, a ancoragem no pragmático institucionalizado em regra, e no fato de que os jogos de linguagem da matemática têm normas de correção indubitáveis em suas formas de vida, faz com que a velha e famosa interpretação de Dummett (cf. 1978), de que a filosofia da matemática de Wittgenstein seria nada mais que uma forma de “convencionalismo puro sangue”, se mostre como uma hipótese dificilmente defensável.

240. [PV§3] Uma observação sobre arquitetura com enorme valor estético, lavrada na p. 33 e omitida pelos editores, talvez valha a pena ser reproduzida aqui:

Architektur ist eine *Geste*. Nicht jede zweckmäßige Bewegung des menschlichen Körpers ist eine Geste. Sowenig, wie jedes zweckmäßige Gebäude Architektur. (MS 126, p. 33)	Arquitetura é um *gesto*. Nem todo movimento deliberado do corpo humano é um gesto. Assim como tampouco qualquer edifício deliberado é arquitetura. (MS 126, p. 33)

241. [PV§4] A questão não é a de que nós chamamos um determinado jogo de matemática e outro de dança, mas que espécie de jogo chamamos de “matemática”, qual é a prática normatizada em regras que entre nós denominamos assim, mesmo que, por hipótese, em algum tempo e lugar do mundo, algumas pessoas tenham praticado a matemática em conjunto com uma dança.

242. [PV§5] Um parágrafo adicional que os editores deixaram de fora diz: Man könnte sich so ausdrücken: “Der name ‘Regan’ im Lear bezeichnet eine ideale Person”. // Alguém poderia se expressar assim: “O nome ‘Regan’ em Lear designa uma pessoa ideal”.

243. [PV§7] A alusão aqui diz respeito à célebre frase de Hilbert, que diz: “Ninguém pode nos expulsar do paraíso que Cantor nos criou”; consignada no texto *Über das Unendlich* (*Sobre o Infinito*), publicado em *Mathematische Annalen* 95 (1926). Certamente a preocupação de Wittgenstein aqui relaciona-se com a busca de Hilbert para estabelecer na matemática uma fundação sólida e consistente, demonstrável por meio de axiomas. Foi assim que em 1928 Hilbert formulou o seu “problema da decisão”: poderíamos divisar um procedimento efetivo que pudesse demonstrar em um número finito

de passos se uma dada proposição matemática poderia ou não ser demonstrada a partir de um dado conjunto de axiomas? Uma demonstração de consistência assim era tomada por Wittgenstein não pelo propósito ou pela intenção que ela pretende fundar, isto é, a de poder assegurar tecnicamente para a matemática sistemas livres de eventuais contradições, mas como um exemplo paradigmático da intrusão intempestiva de preocupações céticas dentro da matemática. Não é, portanto, sobre o aspecto técnico da metamatemática que se desdobram as argumentações neste texto, mas sobre a entrada furtiva de filosofia, na forma de uma epistemologia contra o ceticismo, dentro da matemática, mediante a convicção de Hilbert de que seria factível o uso de uma ferramenta para resolver um problema que, na realidade, é somente filosófico. E, neste sentido, a metamatemática não poderia ser “meta” nem “supra”, mas somente mais uma técnica matemática, um puro seguimento de regras (WWK, p. 137), nunca uma demonstração de que “um cálculo é um cálculo” (WWK, p. 175). Foi precisamente no contexto de uma conversa sobre Hilbert, com Schlick e Waismann, que Wittgenstein disse: “Veja só que interessante se resultasse numa contradição! Pois eu já até prevejo agora: haverá investigações matemáticas sobre cálculos que contêm uma contradição e vai se tirar proveito de que nos emancipamos também da consistência” (WWK, p.139; cf. o comentário a PIII§80, acima). Nos trechos a seguir o tema do problema da decisão de Hilbert será o foco da discussão dialógica promovida pelo autor.

244. [PV§9] O fato de que os editores das OFM tenham recorrido a uma observação localizada 71 páginas adiante no manuscrito depõe sobre o modelo de compilação que utilizaram. Neste caso, por afinidade temática. No entanto, não é assim que Wittgenstein conceitualiza a sua forma de escrita. No prefácio das IF ele nos diz que a natureza dos seus escritos é a de seguir caminhos entrecruzados em todas as direções, de forma a esboçar desenhos não tão claros das paisagens que retrata. O seu texto, deste modo, se parece muito mais com um álbum do que um livro concebido de maneira sistemática.

245. [PV§12] Os editores do original alemão omitiram este “não”, que está também com sinal de destaque no manuscrito.

246. [PV§15] Na realidade, esta seção começa com uma sentença prévia omitida pelos editores da OFM: Nicht ‘abzählbar’ sollte es heißen – von den rationalen Zahlen etwa – sondern ‘abzählfähig’. // Não deveria ser chamado de ‘enumerável’ – por exemplo, os números racionais – mas de ‘suscetível de enumeração’.

247. [PV§15] Os editores do texto original em alemão decidiram saltar 38 páginas adiante no MS 126, para depois retornar à página onde estavam antes, em razão de manter uma unidade argumentativa em torno do tema da enumeração de conjuntos infinitos. Tal decisão, no entanto, quebra o espírito de álbum que caracteriza o estilo do texto de Wittgenstein, consagrado pelo prefácio das IF. Por conseguinte, se descuida também do efeito pragmático do estilo de escrita que reflete a natureza do pensamento do autor.

248. [PV§16] Três parágrafos muito importantes para o conhecimento do método filosófico de Wittgenstein foram deixados de lado pelos editores do texto original alemão, sobretudo porque eles se conectam diretamente com a seção § 123 das IF, e com a PIII§§70, 78, 80-81 das próprias OFM. Eles dizem:

‘Man kennt sich nicht aus’ heißt nicht: man weiß nicht, wo man geht – sondern, man weiß nicht wohin *diese* Richtung führen wird & wohin jene andere führen wird. Ich meine : wer sich im Wald verloren hat, sieht allerdings wohl den Fleck (MS 126, p. 82) um ihn herum klar vor sich, aber die Geographie des	‘Não se sabe onde se está’ não significa aqui: não se sabe onde se vai –, mas não se sabe para onde *esta* direção vai levar & para onde aquela outra vai levar. Quero dizer: quem se perdeu na floresta vê, de todo modo, claramente o local (MS 126, p. 82) ao seu redor, mas não conhece a geografia da floresta.

Waldes kennt er doch nicht. //Waldes ist ihm doch unbekannt.//.

D.h., er wird sich verloren fühlen, obwohl er seine Umgebung klar vor sich sieht.

So kennt man sich in den 'Grundlagen' der Math. nicht aus – nicht, weil man nicht weiß, was man tut; sondern weil die Geographie der großen Zusammenhänge uns unbekannt ist.

(MS 126, p. 83)

//A floresta lhe é desconhecida//.

Isto é, ele vai se sentir perdido, mesmo que veja claramente a circunvizinhança diante de si.

Assim, perdem-se os 'fundamentos' da matemática – não porque não se sabe o que se faz, mas porque a geografia das grandes conexões nos é desconhecida.

(MS 126, p. 83)

249. [PV§16] Wittgenstein considerou duas outras variantes para o começo desta sentença que devem ser mostradas aqui para uma visão mais ampla do estilo de escrita do autor:

Charakterisiert schon das die mathem. Alchimie, daß die mathem. Sätze (...) «↓Ist schon das die..» «↓Macht schon das die..»

(MS 126, p. 83)

Já caracteriza a alquimia matemática o fato de que as proposições matemáticas «↓Já é alquimia matemática quando» «↓Já se torna alquimia matemática quando...»

(MS 126, p. 83)

250. [PV§16] Poder-se-ia também traduzir o par de opositivos *Unklarheit* / *Glitzern* como "Obscuridade" / "Resplandecência", ressaltando que um conceito vago ou ambíguo, mesmo que produza brilho, continua a ser obscuro. Deve-se ressaltar nesta observação o objetivo filosófico de Wittgenstein como nada fazer senão apenas mostrar à mosca a saída da armadilha da garrafa (IF § 309). Precisamente neste sentido que a filosofia "deixa tudo como está" (IF § 124). Seu poder de transformação consiste apenas em estimular ao paciente a visão da sua própria doença e uma tomada de decisão por conta própria, sem que absolutamente nada seja sugerido.

251. [PV§17] Esta diferença com relação a tipos de prova de impossibilidade, vista como demonstração empírica ou vista como demonstração gramatical, é tratado em AIII§14; PIII§§85 e 87; e PIV§31. O ponto é que o normativo, que prescreve a prática da matemática no interior de uma forma de vida, faz parte do que Wittgenstein chama de "história natural da humanidade".

252. [PV§23] Entre as páginas 105 a 108 do MS 126, Wittgenstein transcreve, no seu usual código em alfabeto reverso, um sonho que teve com o seu aluno e amigo Yorick Smythies. Conforme Pichler (cf. 2008), Wittgenstein anotava seus sonhos nos MSS 125 e 126, ambos da mesma época em que trabalhava como dispensário no Guy's Hospital (entre 1941 e 1942), a fim de transcrevê-los nas cartas que enviava regularmente para sua irmã Gretl Stonborough em Viena. Gretl havia sido paciente de Freud, e Wittgenstein, conquanto tivesse sido um crítico acerbo da concepção naturalista em que se revestia a teoria da psicanálise, tinha um grande interesse pela capacidade persuasiva dos textos de Freud, e, particularmente, um grande interesse pelos relatos de sonho e o modo como fazem sentido para o sonhador (cf. MS 127, pp. 235-236; MS 136 pp. 137a-137b; MS 168, p. 1r). Este é exatamente o mesmo interesse que tem pelo modo como a prosa sobre a demonstração em matemática também faz sentido para uma comunidade de praticantes da disciplina.

253. [PV§24] Os editores não transcreveram um parágrafo anterior desta p. 105 sobre "realidade matemática" que se perguntava:

Was kann man eigentlich an der naiven Auffassung der 'mathematischen Realität' *falsch* nennen, – abgesehen von dem Abstoßenden der Auffassung – ?

(MS 126, p. 109)

O que se pode propriamente chamar de *errado* na concepção ingênua de 'realidade matemática' – à exceção da repugnante concepção –?

(MS 126, p. 109)

254. [PV§24] Os editores do texto alemão excluem a página seguinte (p. 111), que faz uma observação sobre os cortes ou postulados de Dedekind, destinados a formular propriedades características e precisas da continuidade.

255. [PV§25] Nas cinco páginas que são omitidas pelos editores das OFM há observações, a meu juízo, muito importantes. Vejamos:

Was hat die Beweismethode zu tun mit dem, was bewiesen ist?

Der eine Beweis «↓sagt Dir» (als wäre er eine Person)

(MS 126, p. 113)

daß dies vorkommt. Der andere «↓sagt Dir», wo es vorkommt. – So scheint es. Und es ist als käme es gar nicht mehr drauf an wie jener Satz bewiesen wurde. Genug, daß er bewiesen ist & wir nun wissen, daß es vorkommt . Wir können es dann gleichsam unsern Kindern überliefern (hand down) ... komme vor. Und sie werden so wenig wissen wie wir. Es klingt dann mehr wie eine Fabel. Und könnte vielleicht die Rolle einer Fabel spielen.

'Wir müssen «müssen also» annehmen, daß ... irgendwo 0

(MS 126, p. 114)

wird'. Dieser Satz ist nur darum nicht ein bloßer Mythus, weil sein Beweis der Anfang einer Ortsbestimmung ist. Oder vielmehr: Der Satz der als Existenzialsatz angesehen ein Mythus ist, ist es darum nicht in einer andern Beleuchtung.

Der Satz als Existenzialsatz «Existenzsatz» sagt uns, so zu sagen, ein Geheimnis.

Der Beweis zeigt *dieses* Bild der Sache. – Aber damit ist es noch nicht klar, was wir mit diesem Bild anfangen können.

(MS 126, p. 115)

Das Bewiesene sagt "es «↓der Ausdruck» muß irgendwo 0 werden": Aber nun kommt alles darauf an, wie der «an, auf welche Weise der» Beweis das sagt; ob das nun ein guter, oder ein, im Ganzen, irreführender Ausdruck des Bewiesenen war, wird sich auf diese Weise zeigen. Der Beweis kann Dich lehren, wie der Satz etwa anzuwenden wäre.

"Abzählbar" dürfte es nicht heißen, dagegen

O que o método de demonstração tem a ver com o que é demonstrado?

Uma demonstração «↓ te diz» (como se fosse uma pessoa)

(MS 126, p. 113)

que isto é o que ocorre. A outra «↓te diz» onde ocorre. – Ao que parece. E é como se não importasse mais como aquela proposição viesse a ser demonstrada. Basta que seja demonstrada & passamos a saber o que ocorre. É como se pudéssemos então transmitir (hand down) aos nossos filhos que ... ocorre. E eles vão saber tão pouco quanto nós. Parece mais então uma fábula. E talvez pudesse desempenhar o papel de uma fábula.

'Temos que «portanto temos que» assumir que em algum lugar ...

(MS 126, p. 114)

se torna 0'. Esta proposição não é um mero mito apenas porque sua demonstração é o início de uma determinação de lugar. Ou melhor: A proposição que é vista como proposição existencial é um mito, não se encontra, portanto, sob iluminação diferente.

A proposição como proposição de existência «proposição existencial» nos conta, por assim dizer, um segredo.

A demonstração mostra *esta* imagem da coisa. – Mas assim ainda não está claro o que podemos fazer com esta imagem.

(MS 126, p. 115)

O demonstrado diz "isto «↓ a expressão» tem que se tornar 0 em algum lugar": Mas agora tudo depende de como "o de que modo" a demonstração o diz; se foi uma boa expressão ou, na totalidade, uma expressão enganosa do demonstrado, será mostrado deste modo. A demonstração pode te ensinar como a proposição deve ser aplicada.

hätte es Sinn zu sagen "unnumerierbar". Und dieser Ausdruck läßt auch die «eine» Anwendung des Begriffs erkennen

(MS 126, p. 116)

Denn man kann zwar die rational Zahlen nicht abzählen wollen, wohl aber kann man ihnen Nummern zulegen wollen.

(MS 126, p. 117)

Não deveria se chamar de "contável" diante do que faria sentido dizer "inumerável". E esta expressão também revela a «uma» aplicação do termo.

(MS 126, p. 116)

Pois mesmo que não se possa querer contar os números racionais, pode-se muito bem querer adicionar números a eles.

(MS 126, p. 117)

256. [PV§25] Russell denominava o "axioma da escolha" como "axioma multiplicativo" (cf. 1993 [1919], pp. 125-127).

257.[PV§25] Sobre a tradução de *verschlucken* por "engulir": vale a pena lembrar aqui a proposição § 3.262 do TLP, uma das raras ocasiões em que o autor usa este verbo no sentido de algo passar a fazer parte do seu corpo, só que agora não manifestamente, mas por ingestão: "Was in den Zeichen nicht zum Ausdruck kommt, das zeigt ihre Anwendung. Was die Zeichen verschlucken, das spricht ihre Anwendung aus./O que não vem expresso nos sinais, a sua aplicação mostra. O que os sinais engolem, a sua aplicação profere." Em outra ocasião, nas *Anotações sobre as Cores* (MS 173, p. 68v), o autor se pergunta se o amarelo é engulido pelo preto "das Gelb vom Schwarz verschluckt wird<?>", se por acaso sentimos que algo deveria ser amarelo, mas está preto agora. No caso em pauta, a notação lógica mascara a estrutura praxiológica em que os sinais são usados. É por este motivo que na matemática a forma das palavras não garante a sua correta compreensão, como se supõe no logicismo e no formalismo. Como se disse mais acima, "pode-se formar uma proposição gramaticalmente correta sem compreender o seu sentido". A generalidade matemática não guarda representatividade com relação a sua particularidade.

258. [PV§27] Os editores do original alemão foram até o MS 127 buscar uma seção que retoma o assunto deixado no MS 126. Esta conexão direta, no entanto, rompe com o estilo de álbum da escrita de Wittgenstein, e, por conseguinte, anula seus efeitos estilístico-pragmáticos. O tema da localização da figura numérica na expansão de π é também tratado na PVII§41.

259. [PV§28] Os editores do texto original em alemão foram até o MS 127 para selecionar nos manuscritos a seção anterior, e depois retomaram a mesma página do MS 126 onde estavam antes. A seção retomada, no entanto, contém muitas correções efetuadas por Wittgenstein, e percorre, por isto, duas páginas quase que inteiras para consignar uma única observação.

260. [PV§28] Entre as páginas 126 e 131 do MS 126 os editores do original alemão omitiram uma discussaõ sobre o modelo de demonstração utilizado por Hardy, com farta utilização de exemplos, acrescida ainda de uma comparação final com o modelo de demonstração utilizado por Gödel. Reproduzo aqui a observação inicial e a final do excerto:

Was mich in einer Darstellung, wie z.B. Hardy's, stört ist die scheinbar sinnlose Varietät von Beweisen «↓desselben Satzes».

Ich möchte sagen: jeder dieser Beweise gehört zu einer besonderen «bestimmten» Gelegenheit bei der gerade er anzwenden wäre.

(MS 126, p. 126)

(...)

Dies ist eine bestimmte Beweis-Maschinerie, nicht die ewig- gültige Form eines Beweises. (Ich denke an Gödels einleitender beiläufiger Beweisführung.)

(MS 126, p. 131)

O que me incomoda numa apresentação como a de Hardy é a variedade aparentemente sem sentido de demonstrações «↓da mesma proposição».

Gostaria de dizer: cada uma dessas demonstrações pertence a uma ocasião particular «determinada» na qual ela deveria ser diretamente aplicada.

(MS 126, p. 126)

(...)

Esta é uma maquinaria de demonstração determinada, não a forma eterna de uma demonstração. (Penso no método de demonstração introdutório e ocasional de Gödel.)

(MS 126, p. 131)

261. [PV§29] Uma sequência de observações interessantes neste ponto do manuscrito foram deixadas de lado pelos editores do texto original em alemão. Vale a pena serem reproduzidas aqui:

Nós agora lutamos contra uma orientação. Mas esta orientação vai perecer racalcada por outras orientações. E então não mais se compreenderá nossa argumentação contra ela; não se perceberá por que se tem que dizer tudo isso.

(MS 126, p. 133)

A principal falta de clareza na matemática é a falta de clareza sobre o que se *oculta* & o que se determina.

Um modo de demonstração é excessivamente recatado: quando avidamente se evita a menor ambiguidade lógica, mas se tolera absurdos grosseiros.

(MS 126, p. 134)

É como se eu dissesse que a teoria dos números reais prepara uma fraseologia que é de grande utilidade em casos particulares. – Mas na medida em que «se» essa fraseologia «é» pode ser preparada, ou ela é uma parte independente da matemática, ou ela poderia «pode» tratar os números reais em uma *vaga* generalidade mediante exemplos. Assim, a exatidão nada perderia, pois a *aplicação* em geral desse apontar com o dedo para cada caso

(MS 126, p. 135)

em particular sempre produziria completa determinação.

(MS 126, p. 136)

Wir kämpfen jetzt gegen eine Richtung. Aber diese Richtung wird sterben, durch andere Richtungen verdrängt. Und dann wird man unsere Argumentation gegen sie nicht mehr verstehen; nicht begreifen, warum man all das hat sagen müssen.

(MS 126, p. 133)

Die Hauptunklarheit in der Mathematik ist die Unklarheit darüber, was *entdeckt* & was bestimmt wird.

Eine Beweisführung ist prüde: wenn man ängstlich die geringste logische Zweideutigkeit vermeidet, aber groben Unsinn duldet.

(MS 126, p. 134)

Wie wenn ich sagte, die allgemeine Theorie der reellen Zahlen bereitet eine Phraseologie vor, die dann im besonderen Fall von großem Nutzen ist. – Aber indem «wenn» sie diese Phraseologie vorbereitet kann «ist» sie entweder ein selbständiges Stück Mathematik, oder sie könnte «kann» die reellen Zahlen in *vager* Allgemeinheit durch Beispiele behandeln. Dabei würde natürlich die Exactheit nichts einbüßen, denn die *Anwendung* dieser allgemeinen Fingerzeige auf jeden besonderen

(MS 126, p. 135)

Fall würde immer wieder vollkommene Bestimmtheit herstellen.

(MS 126, p. 136)

262. [PV§30] Os editores do texto original em alemão foram retomar uma discussão sobre os cortes de Dedekind que eles haviam omitido anteriormente, para reunir todos os tópicos sobre um mesmo assunto no mesmo bloco. Mas desta forma violam um dos efeitos estilísco-pragmáticos mais interessantes da escrita de Wittgenstein que é a apresentação assistemática em forma de álbum.

263. [PV§34] Esta seção vem precedida de toda uma discussão omitida pelos editores do texto original alemão, que vale a pena reproduzir aqui:

Ist es aber nicht lächerlich, daß mir die Idee eines allgemeinen intentionalen Kalküls der Funktionen & Konstruktionen

(MS 126, p. 151)

solche Schwierigkeiten zu bereiten scheint? Ist es nicht ein Vorurteil? Nun man müßte sich mit dem

Mas não é ridículo que a ideia de um cálculo intencional geral de funções e construções

(MS 126, p. 151)

pareça causar em mim tais dificuldades? Isto não é um preconceito? Ora, temos que nos familiarizar com o conceito de um cálculo que ainda está incom-

Begriff eines Kalküls vertraut machen der noch unvollendet, ergänzungsbedürftig, ist.

Er wird mit «in» der Begleitung von Beispielen betrieben, oder es wird vorausgesetzt, daß uns so viele Beispiele gegenwärtig sind, daß wir jeden Moment Anwendung auf ein bestimmtes machen können.

Ich will sagen: es muß ein Gesetz

(MS 126, p. 152)

gegeben werden können, der lautet: "Konstruiere eine Kurve «deren y» für x → ∞ sich 1 nähern!" Es hängt alles davon ab ob so ein Befehl möglich ist. (Und er bezieht sich natürlich nicht auf das zufällige finden von gewissen Funktionen.)

Was heißt aber "konstruiere eine Kurve"? Es kann doch nicht heißen ziehe eine unendlich lange Linie.

(MS 126, p. 153)

pleto, precisando de suplementação.

Ele é impelido pelo «no» acompanhamento de exemplos, ou se pressupõe que há tantos exemplos presentes que nós podemos a cada momento fazer aplicações de algum deles determinado.

Quero dizer: tem que ser dada

(MS 126, p. 152)

uma lei que diga: "Construa uma curva «cujo y» para x → ∞ que se aproxime de 1!" Tudo depende de tal ordem ser possível. (E ele não tem relação, naturalmente, com certas funções encontradas por acaso.)

Mas o que quer dizer "Construa uma curva"? É claro que não pode querer dizer trace uma linha de extensão infinita.

(MS 126, p. 153)

264. [PV§34] Os editores do texto original em alemão completam a frase com *die Idee*, mas o manuscrito traz apenas *Wenn man nur die eines Schnitts*..., pedindo assim uma alteração diplomatizada do texto realmente implementada pelos editores.

265. [PV§34] Esta é a última página do MS 126. Os editores das OFM deixaram de fora apenas duas breves observações finais: uma sobre querer falar sobre jogos na generalização, e a outra sobre a hipótese do contínuo no caso de duas séries de números reais que se aproximam ilimitadamente. À continuação, os editores retomam o MS 127 a partir de uma seleção sortida da totalidade do caderno, desde a p. 10 até a p. 220. Este caderno de anotações foi escrito entre 1943 e 1944.

266. [PV§38] Estas idas e voltas entre as diferentes páginas do manuscrito revela o critério editorial de apresentar o texto de Wittgenstein como se estivesse ordenado por tópicos e como se fosse notadamente mais sistemático do que o autor confessa ser a natureza do seu pensamento, que escolhe os seus temas de maneira entrecruzada e aleatória (cf. o prefácio das IF). Perde-se, assim, uma característica pragmática do texto e um efeito do estilo literário do autor sobre os seus leitores.

267. [PV§39] Ao aludir ao papel pragmático dos manuais na orientação de uma visão de mundo, Wittgenstein antecipa em pelo menos 20 anos o que finalmente Thomas Kuhn vai ressaltar a respeito do papel dos livros de introdução científica no estabelecimento e consolidação de uma "ciência normal" (cf. 1996, pp.10ss).

268. [PV§39] Neste salto de 14 páginas algumas observações omitidas pelos editores, mas que se conectam com reflexões metodológicas e opções estéticas de Wittgenstein podem ser reproduzidas aqui:

Das Benehmen eines

(MS 127, p. 50)

Stammes, der nach den *äußeren* Symptomen zu urteilen, Rechnungen ausführt, die uns aber ganz unverständlich sind.

O comportamento de uma

(MS 127, p. 50)

tribo que, a julgar pelos sintomas *externos*, faz cálculos que são, no entanto, bastante incompreensíveis para nós.

Farben als Argumente & Funktionswerte.

Cores como argumentos e valores de função.

Beispiele nur um der Phantasie zu helfen. Gleichsam, damit das Schema nicht gänzlich trocken ist.

Exemplos apenas para ajudar a imaginação. Para que o esquema, por assim dizer, não fique completamente seco.

Denk wieder daran, wieviel Sinn noch in einem Unsinn-Gedicht liegt!

(MS 127, p. 51)

Pense novamente em quanto sentido há em um poema sem sentido!

(MS 127, p. 51)

269. [PV§40] Entre as observações que merecem destaque no salto dos editores da p. 61 até a p. 64, apresento as seguintes:

Der Begriff der Regel zur Bildung eines unendlichen Dezimalbruchs ist – natürlich – kein spezifisch mathematischer. Es ist ein Begriff in Zusammenhang mit einer bestimmten *Tätigkeit* im menschlichen Leben. Der Begriff dieser Regel ist nicht mathematischer als der, der Regel zu folgen. Oder auch: dieser letztere ist nicht weniger scharf definiert als der Begriff so einer Regel selbst: – Ja, der Ausdruck der Regel & sein Sinn ist

(MS 127, p. 62)

nur ein Teil des Sprachspiels: 'der Regel folgen'.

O conceito da regra para formar uma fração decimal infinita não é – naturalmente – especificamente matemático. É um conceito em conexão com uma *atividade* específica da vida humana. O conceito desta regra não é mais matemático do que seguir a regra. Ou também: o último não é menos claramente definido do que o próprio conceito de uma tal regra: - Sim, a expressão da regra e seu significado é apenas parte do jogo de linguagem: – Sim, a expressão da regra & o seu sentido é

(MS 127, p. 62)

só uma parte do jogo de linguagem: 'seguir a regra'.

Man spricht mit dem *gleichen* Recht allgemein von solchen Regeln, als von den Tätigkeiten, ihnen zu folgen.

(MS 127, p. 63)

Fala-se em geral com o *mesmo* direito de tais regras do que das atividades para segui-las.

(MS 127, p. 63)

270. [PV§41] Os editores da OFM saltaram 95 páginas do manuscrito, indo do dia 01/03/1943 para anotações que provavelmente foram escritas na primeira metade do ano de 1944, quando Wittgenstein já estava em Swansea. Várias destas observações omitidas aqui foram realocadas na Parte I e na Parte IV deste volume.

271. [PV§44] Nesta transição de 4 páginas talvez valha a pena reproduzir pelo menos cinco observações que ressoam muito de perto outras anotações do MS 122, p. 43v, reproduzidas acima na nota à seção PIII§20:

Man kann die Erfindung einer Rechnungsart eine mathematische Entschei-

(MS 127, p. 168)

dung nennen.

Pode-se chamar a invenção de um tipo de cálculo matemático de uma decisão

(MS 127, p. 168)

matemática.

Die beiden Begriffe werden in *ein* Bild aufgenommen; das, wie sie selbst, aufbewahrt wird

Os dois conceitos estão assumidos em *uma* imagem; que os conservará como eles mesmos.

Der mathematische Beweis knüpft eine neue Begriffsverbindung.

A demonstração matemática amarra uma nova conexão de conceitos.

Das Bild des Experiments ist kein Experiment; das Bild des Beweises aber ein Beweis.

A imagem do experimento não é um experimento; mas a imagem da demonstração, uma demonstração.

'Er macht den Übergang nach dieser Gleichung.'

Ist also die Gleichung nicht das Bild dieser Handlung?
(MS 127, p. 169)

'Ele faz a transição de acordo com esta equação.' Então a equação não é a imagem desta ação?
(MS 127, p. 169)

272. [PV§45] Os editores do texto original omitem aqui uma passagem que discute o modo como a demonstração da impossibilidade da trissecção de um ângulo com régua e compasso poderia convencer alguém a desistir da tarefa. Tema que está ligado com a argumentação que se segue no texto da edição oficial, mas que é também importante porque Wittgenstein sempre a coloca em contraste com a prova de Gödel, no sentido de que a primeira tem uma visível utilidade prática cuja necessidade a segunda carece de apresentar.

Der Beweis davon daß
(MS 127, p. 174)
die 3Teilg. des Winkels mit Lineal & Zirkel unmöglich ist überzeugt mich von dieser Unmöglichkeit & ich gebe daraufhin jeden weiteren Versuch des Konstruierens auf. Der Beweis hat meine Fähigkeit geändert. Muß ich nun sagen, der Beweis gibt mir eine Überzeugung & auf die Überzeugung hin gebe ich eine gewisse Tätigkeit auf & sage Anderen etwa sie sei fruchtlos? Warum soll ich nicht sagen, ich sehe den Beweis & gebe darauf diese Versuche auf & so hat er mich also von etwas überzeugt. Ich meine: kann denn das Ereignis der Überzeugung
(MS 127, p. 175)
nicht aber im Aufgeben der Versuche bestehen?
(MS 127, p. 176)

A demonstração de que
(MS 127, p. 174)
a trissecção do ângulo com régua & compasso é impossível me convence desta impossibilidade & então desisto de qualquer outra tentativa de construção. A demonstração modificou minha capacidade. Não tenho que dizer agora que a demonstração me deu uma convicção & com a convicção desisto de certa atividade & digo para os outros que ela é infrutífera? Por que não devo dizer que vejo a demonstração & desisto destas atividades & e assim ela me convenceu de algo. Quero dizer: o evento da convicção não pode
(MS 127, p. 175)
consistir na desistência das tentativas?
(MS 127, p. 176)

273. [PV§45] Uma passagem muito importante sobre o efeito pragmático do uso de partículas modais na linguagem, que tipicamente denotam na língua alemã a atitude do falante e são usadas como elementos importantes de persuasão nas demonstrações matemáticas, foi omitida pelos editores do texto original. Parte da sua importância se deriva também do fato que aqui se retoma as reflexões sobre convencimento e assunção nos procedimentos da demonstração matemática tal como estão discutidas na PI§§50-57, e também sobre assunção e compulsão lógica em PI§117. Transcrevo-a como segue:

Im Beweis heißt es immer "Das ist doch das; & das ist doch das; etc." Dieses
(MS 127, p. 176)
"doch" ist charakteristisch «ist ja nun das Wichtige». "Davon", heißt es, "willst Du doch nicht abgehen; etc.".

Das Wort "doch" könnte man sagen, zeigt, daß ich Dich nur an etwas *erinnere*.

"Du gibst doch *das* zu; & das; etc.". – "Gewiß!" – könnte ich sagen – "wenn ich damit *nichts* zugebe."
(MS 127, p. 177)

Na demonstração sempre se diz "É isto, é isto; & é isto, é isto; etc." Este
(MS 127, p. 176)
"sim" é característico «é o que é importante». "Isto" significa "Você não vai desistir agora, certo?; etc.".

Poder-se-ia dizer a palavra "sim" só para mostrar que estou te *lembrando* de algo.

"Você admite *isto*, certo?; & isto; etc." – "Claro!" – eu poderia dizer – "se deste modo não admito *nada*."
(MS 127, p. 177)

274. [PV§47] Este tema é discutido por Frege na seção § 66, do seu principal livro, *Die Grundlagen der Arithmetik* (*Os Fundamentos da Aritmética*).

275. [PV§47] Esta é uma referência intertextual ao jogo de linguagem (2) das IF cujas observações devem, naturalmente, se acrescentar àquelas.

276. [PV§52] Estas interessantes observações sobre filosofia da matemática ficaram omitidas pelo salto entre as páginas 195 e 204 do MS 127 feita pelos editores na atual seção § 49, logo acima. A sua importância se ressalta pelo fato de que podemos fazer aqui uma comparação com a maneira como o autor descreve a sua tarefa com relação à lógica de Russell e à prova de Gödel em PVII§19.

277. [PV§53] Os editores do texto original em alemão omitiram as seguintes passagens do manuscrito, cujo interesse se deposita tanto na analogia entre matemática e psicanálise como pela correlação que Wittgenstein ainda faz entre dizer e mostrar (ou entre forma/conteúdo e práxis):

Wenn wir im Leben vom Tod umgeben sind, so auch in der Gesundheit des Verstandes vom Wahnsinn. //so auch im alltäglichen Verstand
(MS 127, p. 222)
vom Wahnsinn.//
(MS 127, p. 223)

Ich denke mir die Beweise der mathematischen Sätze auf der Bühne dargestellt, in eindrucksvollen Kostümen. Leute prägen sich solche Szenen fürs ganze Leben ein.

Du ziehst aus dem Beweis eine Lehre.

Wenn etwas an der Freudschen Lehre von der Traumdeutung ist; so zeigt sie, in wie *komplizierter* Weise der menschliche Geist Bilder der Tatsachen macht malt.

So kompliziert, so unre-
(MS 127, p. 235)
gelmäßig ist die Art der Abbildung, daß man sie *kaum* mehr eine Abbildung nennen kann.

Der Beweis ist dazu da, daß er Dich etwas lehre.
(MS 127, p. 236)
(...)

Der Beweis ist ja dazu da, daß er Dich etwas lehrt. Und *was* er Dich lehrt, spricht der Satz aus, oder zeigt der Satz an, der bewiesen wurde.
(MS 127, p. 237)

Se estamos cercados pela morte na vida, então também pela loucura na saúde do entendimento. // então também no entendimento cotidiano
(MS 127, p. 222)
pela loucura.//
(MS 127, p. 223)

Imagino as demonstrações das proposições matemáticas apresentadas no palco em trajes impressionantes. As pessoas memorizam cenas como estas para o resto da vida.

Você extrai uma teoria a partir da demonstração.

Se há algo na teoria de Freud da interpretação dos sonhos; então ela mostra como a mente humana pinta imagens de fatos de uma forma *bem complicada*.

O tipo de afiguração é tão complicado,
(MS 127, p. 235)
tão irregular, que *dificilmente* pode ser chamado de afiguração.

A demonstração está aí para te ensinar algo.
(MS 127, p. 236)
(...)
A demonstração está aí para te ensinar algo. E o *que* ela te ensina, a proposição demonstrada expressa ou indica.
(MS 127, p. 237)

278. [PVI§2] Sobre *Hintergrund* / *Pano de fundo*, cf. nota 214 a PIV§30, bem como nota 284 à seção PVI§11 e nota 412 à seção PVII§74.

279. [PVI§4] Problemas matemáticos comparados com o jogo de xadrez podem ser encontrados em vá-

rias partes do *Nachlass* (cf., por exemplo, MSS 108, pp. 169-170; 112, pp. 16v-17r) ou nas aulas sobre fundamentos da matemática (LFM, pp. 100, 143-150). Mas a questão posta aqui a respeito do movimento do bispo do rei é de muito difícil visualização, já que o bispo só pode se movimentar em um lance no máximo numa diagonal de 8 casas, e, deste ponto de vista, o máximo que conseguimos visualizar é que 8 x 8 = 64. A seguinte observação do *Big Typescript* talvez seja interessante para iluminar o problema desta passagem:

Es gibt auch beim Schach einige Konfigurationen, die unmöglich sind, obwohl jeder Stein in einer ihm erlaubten Stellung steht. (Z.B. wenn die Anfangsstellung der Bauern intakt ist und ein Läufer schon auf dem Feld.) Aber man könnte sich ein Spiel denken, in welchem die Anzahl der Züge vom Anfang der Partie notiert würde, und dann *gäbe es den Fall*, dass nach *n* Zügen diese Konfiguration nicht eintreten könnte und man es der Konfiguration doch nicht ohneweiters ansehen kann, ob sie als n-te möglich ist, oder nicht.	Há também no xadrez algumas configurações que são impossíveis, mesmo que cada peça esteja na sua posição permitida (quando, por exemplo, a posição inicial dos peões está intacta e um bispo já está em campo.) Mas poderíamos imaginar um jogo em que o número de jogadas foi anotada desde o começo da partida, e então *haveria o caso* em que, depois da jogada *n*, esta configuração não poderia ocorrer, e não poderíamos olhar sem mais a configuração para saber se ela seria possível ou não na enésima jogada.
Die Handlungen im Spiel müssen den Handlungen im Rechnen entsprechen. (Ich meine: darin muss die Entsprechung bestehen, oder, so müssen die beiden einander zugeordnet sein.)	As ações do jogo têm que corresponder às ações do cálculo. (Quero dizer: a correspondência tem que consistir nisto, ou a correlação entre ambas tem que ser assim.)
(TS 213, p. 531)	(TS 213, p. 531).

Neste exemplo do *Big Typescript* vemos que Wittgenstein sempre se refere a uma prática, à maneira como estamos agindo em uma determinada circunstância espaço-temporal, e não a partir de um ponto de vista idealizado. Então o problema da passagem desta seção PVI§4 se resolve se visualizamos não a situação ideal de um jogo de xadrez, mas a suposição de uma jogada do bispo dentro de um jogo já em desenvolvimento. E, deste modo, a regra é reconhecida no interior e em correlação com uma situação pragmática, e não desde uma perspectiva idealizada. É a própria prática que mostra ao usuário a maneira como ele deve agir. A regra se constitui, assim, de maneira *autotélica*, ela se faz fazendo,e é a própria prática no interior de uma comunidade de praticantes (uma *forma de vida*) que orienta a nossa visão.

280. [PVI§5] Existem aqui conexões importantes entre a imagem da demonstração e o que posteriormente, a partir de 1946, será estudado mais dedicadamente que até então como “visão de aspecto”. É também interessante como o tema do convencimento está ligado à ideia da ação da imagem sobre o pensamento.
281. [PVI§6] O itálico foi omitido pelos editores do texto original em alemão.
282. [PVI§7] Vale a pena consultar neste ponto o capítulo 132 do *Big Typescript*, que contém toda uma reflexão sobre a peridiocidade como expressão de uma regra, não como descrição de uma realidade (TS 213, pp. 699-701). Se comparamos agora a certeza da existência de uma extensão infinita, como a que resulta da divisão de 1 por 3 = 0,333…, este convencimento possivelmente resulta da impressão recebida da apresentação de um espetáculo. Esta imagem encobre a visão de que a extensão de uma dízima periódica é apenas a aplicação recursiva da regra de divisão sobre o quociente da operação anterior. Evidentemente, trata-se de uma imagem, não de um experimento sobre a extensão infinita da dízima periódica.
283. [PVI§7] As sentenças que aparecem na edição original alemã – “Dieses »muß« zeigt, welche Art von Lehre er aus der Szene gezogen hat. / Das »muß« zeigt, daß er einen Zirkel gemacht hat” – só vão surgir, de fato, na página seguinte do manuscrito. São prováveis substitutos para o que o autor havia escrito anteriormente. Este texto dizia: “Este ‘tem que’ mostra que tipo de ensinamento ele tira da cena. Este ‘tem que’ mostra que ele fez um círculo. Cf. o comentário sobre a “dureza do exigir lógico” nas seções PI§121 e PVI§49. O exigir lógico impõe, por suposto, uma petição de princípio.

284. [PVI§11] Sobre *Hintergrund / Pano de fundo*, cf. nota 214 à seção PIV§30.
285. [PVI§13] Este aqui é um dos pontos em que a filosofia da psicologia se liga claramente com a filosofia da matemática, ou, em outras palavras, o mental se associa ao pragmático na concepção do cálculo como uma prática decidível no interior de uma forma de vida. Sabemos que a partir de 1944, em Swansea, Wittgenstein vai deixando de lado a dedicação exclusiva à filosofia da matemática e se aprofundando cada vez mais na filosofia da psicologia. Segundo nos lembra Monk (1991, pp. 466-470), o fato não é que Wittgenstein nunca tenha associado matemática à psicologia anteriormente, mas que a partir de sua estada em Swansea em 1944 modificou a estrutura das IF, enveredando das discussões sobre seguimento de regras nas seções §§ 189-242 diretamente para a discussão sobre a linguagem privada na seções §§ 243-421. O sinal desta modificação de ênfase já está aqui, no MS 164, na sua longa discussão sobre seguimento de regras. Desde 1944 até 1951, a ênfase dos textos de Wittgenstein esteve posta na filosofia da psicologia, e o retorno à filosofia da matemática ficou sendo nada mais do que um projeto futuro sempre postergado para mais adiante, e, finalmente, inacabado.
286. [PVI§17] A seção que viria a seguir no manuscrito, que diz “Nós falamos e agimos (…)”, foi deslocada pelos editores para mais adiante, aparentemente para ficar junto de outras considerações que tocam em temas semelhantes. Esta atitude, entretanto, desconsidera o estilo de álbum consignado na escrita de Wittgenstein, que pressupõe um leitor acostumado ao caráter assistemático, condensado e labiríntico do seu texto.
287. [PVI§17] O leitor deve notar que o critério de decisão para Wittgenstein é sempre o agir, a maneira como todos normalmente fazemos naquele contexto, o *pragmático*, nunca alguma ideia abstrata ou teórica, nem nenhum componente da linguagem isolado da ação que se lhe associa no contexto.
288. [PVI§20] Os editores do texto original deslocaram para frente a parte final da p. 55 do MS 164, talvez para melhorar a sequência argumentativa. Esta decisão, contudo, não leva em conta o papel do estilo assistemático de escrita de Wittgenstein que, por razões metodológicas, prefere deixar ao leitor um grau maior de interesse investigativo.
289. [PVI§21] Este mesmo tema se repete nas IF §§ 198-199. O leitor deve notar que esta adesão, quase uma confissão de fé, do fato psicológico (seguir uma regra) ao mundo externo (o costume, a cultura, o social, a forma de vida), ressaltada por meio de um pressuposto ligado à aplicação, não implica que a filosofia de Wittgenstein se explique pelo transcendentalismo, ou pelo behaviorismo, ou sequer pelo pragmatismo. A adesão à práxis é, neste caso, exclusivamente metodológica. Isto é, explica-se pela necessidade de desfazer teorias que eventualmente obnubilam a prática da matemática pela incrustação extemporânea de supostos filosóficos. Pelo que muitas vezes a visão do pensamento de Wittgenstein se deixa enquadrar por algumas daquelas formas filosóficas, já que a sua metodologia o aproxima delas. As seções §§ 306-309 das IF, no entanto, não deixam dúvida sobre os reais objetivos de Wittgenstein, além de deixar bastante claro que ele não nega o mental, nem qualquer explicação mentalista do mental. Nosso autor cria, ou inventa, *ficções gramaticais* com o exclusivo objetivo de “mostrar à mosca a saída da armadilha da garrafa” (IF § 309). E nada mais. Aparentemente, filosofia, para Wittgenstein, se operacionaliza de maneira similar a ficções literárias.
290. [PVI§21] Os dois ultimos parágrafos são repetidos quase literalmente nas IF § 240.
291. [PVI§22] Uma variante adicional ao término da frase foi omitida pelos editores: “Also «↓eine neue Art von Urteil» ein neues Sprachspiel. // Portanto, «↓um novo tipo de juízo» um novo jogo de linguagem”. Esta observação é um testemunho irrebatível de como a ideia de “paradigma” presente no livro

de Thomas Kuhn estava antecipada em pelo menos 20 anos por Wittgenstein.

292. [PVI§23] "E assim, preservando a forma enquanto se modifica a interpretação, estou seguindo a grande escola de lógico-matemáticos que, em virtude de uma sequência de definições surpreendentes, salvaram a matemática dos céticos e ofereceram uma demonstração rígida das suas proposições. Somente assim nós podemos preservá-la da ameaça bolchevique de Brouwer e de Weyl." (Ramsey, 1931, p. 56) Escudado em justificações salvacionistas como esta, Ramsey propôs uma teoria de funções em extensão pela qual que ele esperava que se demonstrasse a natureza tautológica da matemática, ao modo como vem expresso no TLP. Deste modo, oferecia uma alternativa às definições aritméticas em termos de classes propostas no *Principia*, de Whitehead & Russell (2019 [1910], ao mesmo tempo em que preservava a ideia logicista de que classes são determinadas por funções. Wittgenstein, no entanto, não se interessava em dar qualquer fundamento para a matemática, e, por isto, ironizou em 1931 o texto de Ramsey, dizendo que ele era um "pensador burguês", pois a sua proposta tinha, no fundo, a finalidade de "colocar ordem numa determinada comunidade" (MS 112, p. 70v). Dentro do ponto particular de que trata a seção aqui em destaque, Wittgenstein ilumina a diferença entre alguma coisa que acontece na nossa experiência matemática e alguma coisa que de verdade acontece na prática. Se queremos nos restringir ao ponto de vista pragmático, temos que evitar então o salto ao ideal salvífico de algo que se justifica pela sua aplicação a modelos empíricos. A matemática passa a ser, simplesmente, alguma coisa que os matemáticos normalmente fazem, destituído de um porquê que não faça parte daquela própria realidade. Se, por exemplo, a proposição "12 polegadas = 1 pé" se encontra na experiência de conversão de um padrão de medida em outro padrão de medida, do ponto de vista pragmático ela se transforma em regra de aplicação para conversão entre padrões de medida. Em outras palavras, a proposição empírica se transforma em proposição gramatical. É precisamente neste sentido que, ao dizer, por exemplo, que não é assunto da filosofia tentar resolver a contradição, Wittgenstein aparentemente sugere ser um "antiburguês" ou, talvez, prefira ficar na companhia de uma posição mais "revolucionária" e menos "salvacionista". Não é para menos que põe a público pensamentos como estes: "Quero então perguntar: uma demonstração de consistência (ou de não-ambiguidade) *tem que* me dar incondicionalmente uma maior certeza do que teria sem ela? E seu eu realmente saio em aventuras, não posso então sair para aquelas em que esta demonstração não pode mais me oferecer nenhuma segurança? //Meu objetivo é modificar a *atitude* com relação à contradição e à demonstração de consistência. (*Não* para mostrar que esta demonstração mostra para mim algo desimportante. Como *isto* poderia ser assim!)" (PIII§82). Não se deve deixar de ressaltar, entretanto, o grau de influência que o pragmatismo de Ramsey teve sobre o pensamento de Wittgenstein, principalmente a partir de 1929. A julgar pelo que está declarado no prefácio das IF ("Desde que comecei novamente a me ocupar há 16 anos com a filosofia, tive que reconhecer graves erros no que tinha colocado naquele primeiro livro. Ajudou-me a visualizar estes erros – numa medida em que eu mesmo não posso avaliar – a crítica às minhas ideias que experimentei de Frank Ramsey, – com quem as discuti durante os dois últimos anos de sua vida em inúmeras conversas"), não pode ter sido menos do que tremendamente decisivo. A este respeito, cf. os excelentes trabalhos de Steven Methven (2015) e de Cheryl Misak (2016). Cf. mais comentários sobre Ramsey nas notas às seções PI§77, PVII§10 e PVII§28.

293. [PVI§24] Esta ênfase foi omitida pelos editores do texto original em alemão.

294. [PVI§25] Esta página, que deveria ter sido numerada como "70" no manuscrito, aparece como "72". De fato, o número "0" parece estar mal escrito no alto da página, como se fosse um "2"; mas daí por diante o erro se seguiu.

295. [PVI§26] O leitor deve notar aqui o papel que a visão de aspecto joga na concepção do gramatical em Wittgenstein.

296. [PVI§27] Esta ênfase foi omitida na edição original do texto em alemão.

297. [PVI§30] Num eco do que aqui vem escrito, Wittgenstein vai consinar na seção § 241 das IF que as pessoas concordam na *linguagem*, e que esta não é uma concordância de opiniões mas de forma de vida.

298. [PVI§30] Este destaque da palavra foi omitido pelos editores do texto original alemão.

299. [PVI§34] O desafio que se coloca aqui para Wittgenstein é o de discutir a linguagem em uma *Lebensweise* – ou, se quisermos, em uma *Lebensform* – em que inferências tais como as do seguimento de regras ocorreriam de forma independente do mundo. Isto é, não se trataria de empirismo, mas de um sistema que, embora pragmaticamente situado e relativizado, ainda funcionaria por si mesmo. Grande parte da filosofia da linguagem ordinária, em trabalhos como os de Austin ou os de Grice, apresentaram tais tipos de inferências pragmáticas como objetos teóricos. No entanto, a filosofia de Wittgenstein tem um método antifilosófico; isto é, ela não se interessa por teorias. Ela somente se dedica ao esclarecimento em função de um antidogmatismo e pelo retorno a uma vida sem filosofia. Particularmente, a uma matemática independente de fundamentações teóricas, tal como acontece na práxis antes de qualquer interferência filosófica ou teótica. Pois, de qualquer modo, os conceitos com os quais as teorias linguísticas em geral trabalham são, antes de se tornarem conceitos especializados, parte da linguagem ordinária e da descrição de uma multiplicidade de práticas. Eles poderiamser vistos de múltiplos modos, dependendo da orientação paradigmática.

300. [PVI§34] A reflexão que se encontra nas IF § 207 é muito próxima desta aqui apresentada.

301. [PVI§36] Aqui Wittgenstein nos apresenta duas possibilidade de ver os mesmos fatos matemáticos: de maneira atemporal quando a regra se solidifica na forma de um juízo sintético a priori, e de maneira temporal quando a regra é aplicada no caso a caso das operações, ao fazer a contagem no interior de uma forma de vida. No último exemplo trata-se de algo que ocorre na práxis dentro de um contexto em que as pessoas utilizam o cálculo de certa maneira para algum propósito determinado e de acordo com suas próprias normas ou regras de uso. Vários comentadores de Wittgenstein, no entanto, preferem ver suas formulações filosóficas sempre de maneira atemporal ou teórica, atribuindo-lhe uma certa forma de argumento transcendental de natureza pragmática. As seções §§ 34-36 desta Parte VI testemunham em sentido contrário a tais interpretações, pois mesmo no caso de regras solidificadas atemporalmente o que se quer enfatizar é o seu fundamento prático, o fato de que sempre há, no fundo, a *decisão* de utilizar a proposição de uma determinada maneira, o que, de fato, não é nenhum fundamento, mas apenas o modo como se faz alguma coisa.

302. [PVI§36] Este destaque do verbo ser foi omitido pelos editores do texto original alemão.

303. [PVI§37] Wittgenstein usava, como todos os seus contemporâneos, a notação proposta no *Principia Mathematica*, de Russell & Whitehead (2019 [1910]). Isto quer dizer que os pontos ao lado esquerdo e direito da barra de Sheffer nas três linhas do argumento marcam o escopo de aplicação das fórmulas à esquerda e à direita do sinal; o sinal de igualdade "=" significa "é idêntico a", e o sinal "$\stackrel{\text{def}}{=}$" significa "é uma definição de". Assim, na notação contemporânea teríamos que ler a primeira linha, por exemplo, como: (p|p) | (q|q) é idêntico a (p & q) – e assim por diante. O que temos aqui, provavelmente, é uma retomada da ideia presente no TLP, por exemplo na seção § 5.1311 deste livro, onde se argumenta que a aplicação sucessiva da negação conjunta sobre a negação conjunta de fórmulas veri-funcionais revela que as aparentemente distintas formas das proposições, suas diferentes formas de conexões lógicas, acabam sendo sempre reduzidas à mesma forma comum de negação conjunta. Que, por exemplo, p|p vem a ser idêntico a ~p, ou (p|q) | (p|q), a pVq. De modo que uma generalização da operação simbolizada pela barra de Sheffer poderia gerar, em última instância, uma suposta "forma geral da proposição" (cf. TLP § 6). Distintas proposições elementares em mútua aplicação da operação de negação conjunta definiriam, por abreviação, uma sequência de proposições veri-funcionais. O que temos aqui, portanto, é uma reconsideração pragmática daquela ideia.

304. [PVI§38] Evidentemente, a referência aqui é ao "jogo de linguagem (2)", nas IF § 2.

305. [PVI§38] Nas IF §§ 201-202, Wittgenstein também mostra outra situação em que uma interpretação da regra já não é mais a própria regra.
306. [PVI§39] A ideia de que para haver linguagem, tem que haver regularidade é discutida também nas IF § 207.
307. [PVI§40] A forma tão corriqueira como Wittgenstein se refere ao "jogo de linguagem (2)", localizado de fato nas IF § 2, e não somente aqui mas também nos MSS 124, pp. 170, 192; 127, p. 155; 129, p. 129; 180a, p. 37r (todos da metade dos anos 1940), assim como nos MSS 175, p. 67v e 176, p. 62v, que são parte do último conjunto de textos redigido por Wittgenstein em 1951 e denominado pela posteridade como "Sobre a Certeza", são uma demonstração eloquente de solidariedade textual interna entre as IF e o *Nachlass* que, para autores como Venturinha (2010, pp. 150-152), comprova não somente o inacabamento das IF, mas também a sua disseminação ao longo do *Nachlass*. De forma que não haveria uma IF real, mas as IF no *Nachlass* – das quais as OFM são uma parte integrante.
308. [PVI§45] No manuscrito original, Wittgenstein deixou somente o sinal de parágrafo "§" e o circulou com um traço sem indicar o número da seção a que se referia. Provavelmente isto teria sido feito se o manuscrito tivesse sido datilografado. Como isto nunca ocorreu, foram os editores do texto que finalmente preencheram o número supostamente a ser referido pelo autor.
309. [PVI§45] Como ocorre na seção § 34, acima, a reflexão que aqui se encontra é muito próxima da descrição dada na seção § 207 das IF.
310. [PVI§45] Ao dizer que o efeito do "e assim por diante" é o de produzir uma concordância, isto é, de que o gesto, a entoação, o próprio comportamento do professor fazem parte de um complicado arsenal persuasivo, Wittgenstein não está se alinhando ao finitismo em matemática. Suas propostas evidentemente não favorecem nenhuma teoria. Antes disto, nosso autor está se utilizando de ferramentas comportamentais para indicar que a matemática é uma técnica que serve a propósitos pragmáticos finitos e decidíveis, e que aparentemente muita coisa do que se acrescenta a isto não passa de pura especulação filosófica sem lastro na práxis.
311. [PVI§46] O fundamento da matemática é um ponto em que não mais se toca: são os fundamentos das regras. – Um fundamento que não é nenhum fundamento, pois se trata somente daquilo que fazemos e que não se justifica mais, porque é na própria prática que as justificações se acabam.
312. [PVI§47] Outra das constatações importantes de Wittgenstein sobre o fundamento do seguimento de regras é o de que ele é uma certeza que pode até mesmo ter "causas". Esta certeza, no entanto, não deixa de ser uma imagem. Isto é, ela poderia ser outra em outro tempo e lugar.
313. [PVI§47] A linguagem aqui é comparada com um objeto cosmológico numa determinada trajetória no espaço. Se por acaso me perdesse, me agarraria a ele. Mas de nenhum modo conseguiria mantê-lo imóvel. A linguagem, compreendida em sentido externo, como um paradigma da própria vida e não como objeto de conhecimento e de produção de teoria, fornece para Wittgenstein um termo de comparação pelo qual abaliza seus juízos metodológicos.
314. [PVI§49] Sobre a dureza do exigir lógico, cf. acima PI§121; PVI §§ 7-8; e também IF § 437.
315. [PVI§49] O MS 164 não termina aqui; vai até a página 172. Porém não há mais nenhuma observação sobre lógica ou matemática nas 21 páginas restantes do manuscrito. O conteúdo versa sobre a psicologia (opinião, pensamento, dor, e uma observação sobre jogo tomando o xadrez como exemplo). Provavelmente por esse motivo os editores do texto original em alemão tenham preferido omitir essas páginas. No entanto não é desimportante, a meu ver, que o leitor que considera todo o *Nachlass* como um só compósito (Paul, 2007, p. 23) resgate dali a percepção de que a filosofia da psicologia é uma continuidade da filosofia da matemática. Sobretudo no que tange à discussão interno/externo de uma disciplina como a lógica. Concordância de opiniões, por exemplo, é uma fato externo à lógica, mas o seria a concordância de *juízos*? Isto é, o fato de que todos ao mesmo tempo julgam igual e sempre da mesma maneira? Não haveria, entrelaçado a um sistema de inferências dedutivas, um sistema de inferências pragmáticas que também opera independentemente do empírico? Não consistiria o que Wittgenstein denomina como "o gramatical" todo esse entrelaçamento de inferências e, por conseguinte, de constituição apriorística de filtros perceptivos, justamente a matéria da sua discussão filosófica, que ele, de fato, utiliza não para fazer teoria mas exclusivamente para dissolver confusões? Cabe ao leitor, afinal, a decisão sobre "como ler Wittgenstein": decolonizando-o da filosofia ou filosofando-o.

316. [PVII§1] Depois de ter sido utilizado na edição das OFM apenas um parágrafo do MS 124 (p. 133), ao final da seção PIV§43 (cf. nota 222), toda a Parte VII foi organizada pelos editores testamentários de Wittgenstein exclusivamente a partir deste mesmo MS 124, composto em parte no ano de 1941, provavelmente antes de Wittgenstein começar a trabalhar no Guy's Hospital como voluntário em novembro de 1941, e retomado depois em 1944, enquanto esteve em Swansea na maior parte deste ano dando acabamento ao datiloscrito final das IF (TS 227).
317. [PVII§1] Observe-se que nesta seção Wittgenstein sugere duas funções distintas cumpridas pelas proposições normativas no jogo de linguagem da conversão de medidas. A primeira delas é a que se consolida na aplicação da proposição normativa simples de que "12 polegadas = 1 pé", que neste caso tem uma utilização empírica na aplicação da regra de conversão, e pode ser negada se a aplicação estiver errada. Já a segunda função é aquela que incorpora no ato de medir toda uma técnica baseada em fatos físicos e psicológicos que possibilitam a medição e a sua conversão, mas que não estão descritos pela própria proposição normativa. Entende-se que o gramatical é a incorporação de toda esta técnica que não pode ser propriamente descrita, mas que faz parte do mundo da práxis e está pressuposta na forma de vida da medição em um contexto determinado. Para medir, por exemplo, e fazer a conversão desta medida em outra forma de medição, temos que negociar, por exemplo, com as propriedades físicas dos objetos, com o fato de que os instrumentos de medição não devem mudar de tamanho de maneira inesperada. Temos que confiar que a nossa memória preserva o resultado desta medida e não nos ilude, por exemplo, nem nos engana também de maneira inesperada. Temos que ter passado pelo aprendizado de medir sempre da mesma maneira e utilizar os instrumentos com a mesma técnica incorporada pelos nossos mestres. Temos que ter certeza de que aquilo que consideramos como "igual" ou como o "mesmo" também será aceito pelo padrão da comunidade em que praticamos a medição e a sua conversão em outra medida. De modo que a mesma proposição normativa tem uma função empírica e outra gramatical. Esta não pode ser descrita – está na própria práxis daquela forma de vida em particular –, enquanto que aquela diz respeito à correção da aplicação da técnica no interior de uma comunidade de vida e de prática. Esta compreensão do uso empírico e do uso gramatical da mesma proposição normativa é amplamente difundida nos escritos de Wittgenstein, chegando o autor até mesmo a falar do "caráter duplo da proposição matemática" (PIV§21). Na seção PII§38 menciona-se, por exemplo, a "técnica gramatical" da aplicação de números; na seção PII§46, Wittgenstein declara que "a matemática é uma mistura *multicolorida* de técnicas de demonstração"; nas seções PIII§§66-67, as técnicas de cálculo nos permitem até mesmo "profetizar", tal como ocorre no jogo de xadrez, porque a técnica incorpora o consenso ao gramatical, e é assim que a demonstração de consistência funciona verdadeiramente como a previsão de que não vai surgir nenhuma dedordem no cálculo, que nos tranquiliza mas não garante, por outro lado, que esta desordem não surgirá realmente (PIII§86), pois "*Uma coisa* é usar uma técnica matemática que consista em evitar a contradição, e outra é filosofar contra a contradição em matemática" (PIV§55); na PIV§18 enfatiza-se o lado pragmático da técnica à diferença do gramatical, no sentido de que ainda que o gramatical incorpore o conjunto de atitudes tácitas de uma prática, a técnica responde pelo caráter episódico desta mesma práxis; a técnica, portanto, se modifica depois que uma nova demonstração é aceita pela comunidade, e, assim, na PIV§23, a técnica e a imagem que lhe corresponde estão expressas no próprio jogo de linguagem, e a técnica

e o palavrório instituem deste modo uma ligação indissolúvel (PIV§27), bem como a técnica e um certo modo de consideração mediante o próprio ensino (PIV§35), ou uma técnica e um costume (PVI§43); pode-se até mesmo descrever uma "desastrosa incursão" de uma técnica na outra, como no caso em que a técnica da lógica invade a técnica da matemática (PV§24); em resumo, quando Wittgenstein diz que "Só numa determinada técnica de ação, de linguagem, de pensamento, alguém pode se propor a alguma coisa. (Este 'pode' é o gramatical.)", faz com que o gramatical englobe a própria técnica num sistema de correlações pragmáticas internas e tácitas numa forma de vida que podem ser descritas como condições de possibilidade. Não, entretanto, à guisa de um argumento pragmático-transcendental, mas como instrumento metodológico de dissolução de confusões e de transformação de perspectiva.

318. [PVII§3] Descrever o encargo de um rei, isto é o despotismo e a autocracia da regra, a sua autonomia e a sua função dadas as vicissitudes do mundo empírico em que se vinculam dois tipos de determinação numérica, é como Wittgenstein descreve a sua própria tarefa filosófica, que consiste em "descrever" em contraposição a "explicar". Notemos, então, que o interesse do filósofo recai sobre o exercício de poder das formações gramaticais e como elas agem sub-repticiamente nas nossas visões de mundo, dizendo-nos o que se pode e o que não se pode fazer. Note-se também que a descrição do encargo ou do ofício, isto é, realçar ou pôr em claro a imagem exibida por estes sistemas, como eles agem sem que nos demos conta disto, é o que ele vai fazer com relação às propostas de Russell e de Gödel, conforme o que se declara acima na seção PVII§19.

319. [PVII§3] Ao terminar a sentença "– Erst durch unsere Arithmetik *werden* sie *eins*." // "– Só pela nossa aritmética eles *se tornam um*", dando a entender que a gramática faz ter certeza de que a proposição empírica e a gramatical expressam a mesma coisa, Wittgenstein ainda abre um parágrafo adicional, com o devido espaçamento regular que é de seu costume, e repete: "Erst als Glieder des Systems der Arithmetik werden sie Eins. // Só como membros do sistema da aritmética eles se tornam um", fazendo ver agora um outro aspecto do mesmo problema: as proposições empíricas e gramaticais são membros do mesmo sistema. Este parágrafo, entretanto, foi omitido pelos editores das OFM.

320. [PVII§4] Os editores das OFM deixaram de transcrever o parágrafo seguinte a este talvez por não ter Wittgenstein chegado nele a uma formulação satisfatória. No entanto, vale a pena transcrevê-lo aqui como testemunho do seu objetivo em filosofia:

Das Vorurteil muß man besiegen – und doch, wenn man's nicht hat, kann man nicht philosophische Arbeit leisten. || – aber es ist die Kraft die philosophische Arbeit leistet. (MS 124, p. 18)	Tem-se que superar o preconceito – e, de todo modo, se não se o tem, não se pode efetuar um trabalho filosófico. || – mas isto é a força que efetua o trabalho filosófico. (MS 124, p. 18)

321. [PVII§4] Os editores do texto original omitiram as próximas cinco páginas do manuscrito (até a p. 24), talvez porque elas tratem do "comportamento de dor" e da "linguagem privada", temas ligados à filosofia da psicologia. No entanto, explorando a questão do seguimento de regras Wittgenstein passa quase que sem solução de continuidade da filosofia da matemática para a filosofia da psicologia, o que mostra que para ele não há, na prática, uma compartimentação disciplinar tão nítida nas suas investigações filosóficas. A filosofia da psicologia ocupará suas observações quase exclusivamente de 1946 até 1949, o que acabou por deixar inacabado o novo livro que pretendia publicar em vida. Wittgenstein entrou em 1950 já adoentado, e escreveu somente sobre cores e certeza até abril de 1951.

322. [PVII§4] O argumento neste ponto revela a maneira como o seguimento de regra é visto pelo praticante do jogo de linguagem como coisa óbvia e natural. Não poderia ser de outra maneira. Wittgenstein vai se deslocando, portanto, do matemático para o psicológico – especificamente para o aprofundamento do tema da "visão de aspecto", que já havia discutido entre 1933 e 1934 (cf. particularmente AWL, MS 115, e D310).

323. [PVII§5] Duas recomendações de escrita ao final da página foram omitidas pelos editores, mas vale a pena reproduzi-las aqui:

Du mußt Neues sagen & doch lauter Altes. (N.) Du mußt allerdings nur Altes sagen – aber doch etwas Neues! (MS 124, p. 28)	Você tem que dizer o novo &, de todo modo, o puro velho. (N.) Com efeito, você tem que dizer só o velho – mas, de todo modo, algo novo! (MS 124, p. 28)

324. [PVII§5] Nesta outra interessante recomendação de escrita, também omitida pelos editores do texto, comprova-se que Wittgenstein considera a escrita poética em comparação com a sua:

Auch der Dichter muß sich immer fragen: 'ist denn, was ich schreibe, wirklich wahr?' – was nicht heißen muß: 'geschieht es so in Wirklichkeit?'. (MS 124, p. 29)	Também o poeta tem sempre que se perguntar: 'é então o que escrevo realmente verdadeiro?' – o que não tem que significar: 'ocorre assim na realidade?'. (MS 124, p. 29)

325. [PVII§5] Esta primeira possibilidade ficou omitida na edição oficial do texto das OFM.

326. [PVII§5] Uma nova recomendação de escrita omitida pelos editores do texto:

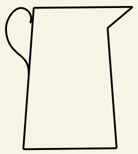
Du mußt freilich Altes herbeitragen. Aber zu einem *Bau*. – (W.) (MS 124, p. 30)	Você tem que trazer o velho, admitidamente. Mas para uma *construção*. – (W.) (MS 124, p. 30)

327. [PVII§8] Vale a pena reproduzir, a meu ver, pelo menos três reflexões omitidas pelos editores das OFM entre as páginas 41 e 44. São reflexões muito incompletas, mas excelentes indicativos da forma como pensa Wittgenstein.

Denke Dir eine Kaste, die nicht rechnen kann (wie die Ritter nicht schreiben konnten), die sich Sklaven hält, «Sklaven haltend», sich Sklaven haltend die, sagen wir, rechnen; manchmal richtig, manchmal falsch, von ihren Herren aber nicht kontrolliert. Diese stellen «geben» ihnen Aufgaben (&) die Sklaven geben Antworten; ehe sie antworten schreiben sie meistens noch etwas hin; aber ihre Herren verstehen das nicht. Sie richten sich nach den Antworten der Sklaven & betrachten sie als eine Art Orakel. Man könnte sich auch «ferners» denken, daß die Herrn jene Sklaven strafen «bestrafen», wenn der praktische Erfolg «das praktische Ergebnis» unbefriedi- (MS 124, p. 42) gend war, sie gut behandeln «halten», wenn er glücklich ist. (MS 124, p 43.)	Imagine uma casta que não pode contar (como os cavaleiros não sabiam escrever) e que possuíam escravos, «mantinham escravos», mantinham escravos que, digamos, faziam cálculos; às vezes certo, às vezes errado, mas não controlados por seus mestres. Estes lhes propõem «dão» tarefas (&) os escravos respondem; antes de responder, na maior parte das vezes escrevem algo; mas seus mestres não entendem. Eles seguem as respostas dos escravos e os vêem como uma espécie de oráculo. Pode-se também imaginar «além disso» que os mestres castigam «punem» os escravos se a consequência prática «o resultado prático» (MS 124, p. 42) for insatisfatória, e os tratam «mantêm» bem se ela for exitosa. (MS 124, p. 43)
Der Gebrauch von Wörtern, wie 'pas' oder 'point' in 'ne … pas', 'ne … point', etc. Das Hauptwort "pas"	O uso de palavras como 'pas' ou 'point' em 'ne … pas', 'ne … point' etc. O substantivo "pas" pode ser definido como ostensivo & então tornar-se parte do uso da negação. – O que significa: ninguém pensa

könnte hinweisend definiert werden & dann davon der Gebrauch als Teil der Negation gemacht. – Was heißt es: Niemand denkt, wenn er 'ne … pas' sagt an einen *Schritt*? – Nun, man sagt: 'Ich wußte nicht einmal, daß das dasselbe Wort ist!'. Aber was heißt das? Was war uns nicht aufgefallen? (Dies Beispiel ist höchst wichtig für das Verständnis dessen, was man 'Bedeutung' nennt.)

Eine Sprache, in der die Schriftzeichen von der Art der Teile «Bilder» eines Rebus sind, so daß das Wort "kann" etwa «z.B» "



" geschrieben würde, oder "wollen" als Bild eines Wollknäuels mit einem ihm dem angehängten Zeichen

(MS 124, p. 43)

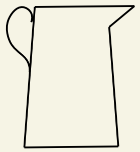
u.s.f. Auch wird die Bedeutung der Wörter so beigebracht, daß die Beziehung zur Kanne, Wolle, etc., immer lebendig bleibt. Kennten wir allein *nur* «bloß» diese Sprache, (dann) könnten eigentümliche philosophische Probleme für uns existieren.

(MS 124, p. 44)

em um *passo* quando diz 'ne… pas'? – Bem, diz-se: 'Eu nem sabia que a palavra era a mesma!'. Mas o que significa isto? O *que* não percebemos? (Este exemplo é muito importante para compreender o que se chama de "significado".)

(MS 124, p. 43)

Uma língua em que as letras são como partes «imagens» de um rébus, de modo que a palavra "pode" é escrita, digamos «por exemplo», como "



", ou "quer" como a imagem de um quero-quero com um sinal anexado a ele,

(MS 124, p. 43)

etc. O significado das palavras também é ensinado de forma que a relação com o pote, o quero-quero etc., permanece sempre viva. Mas se conhecêssemos somente «meramente» esta linguagem, (então) poderiam existir para nós problemas filosóficos peculiares.

(MS 124, p. 44)

A jarra, no exemplo do rebus mencionado acima, é uma aglutinação entre *Kanne* (jarra) e o verbo *kann* (1ª e 3ª pessoas do singular no tempo presente do indicativo verbo "poder" / *können*), assim como *wollen* (verbo "querer" no infinitivo) associado a *Wolle* (lã) ou a *Wollknäuels* (novelo de lã).

328. [PVII§8] É interessante notar aqui que o que enxergamos na demonstração se modifica totalmente se apenas a consideramos de um determinado modo ou de outro. Se ela for considerada somente pelo ponto de vista maquínico, as supostas relações internas já não mais interessariam; no entanto, restaria sem explicação o fato de que ela preveja alguma coisa transportar consigo um interesse correlacionado.

329. [PVII§9] A "sagacidade", ou o "ponto" a se entender aqui (para repetir a mesma palavra usada por Wittgenstein em alemão), é que, entre as condições que se contam para que uma demonstração seja aceita numa forma de vida, deva contar também uma certa "argúcia", "manha" ou "picardia" que são, justamente, indícios peculiares de formas de vida.

330. [PVII§10] Na realidade, o capítulo 121 do *Big Typescript* tem como título quase que exatamente esta mesma formulação: "Se você quiser saber o que foi demonstrado, olhe para a demonstração" (TS 213, pp. 628-637).

331. [PVII§10] Na notação do *Principia Mathematica*, a letra entre parênteses significa que a variável referida tem uma quantificação universal. O comentário de Wittgenstein aqui incide sobre a solução de Russell aos paradoxos de autoreferência ou de reflexividade, tal como exemplifica a proposição '~ f (f)', por ele destacada, que seria, pelos parâmetros do *Principia*, uma "função predicativa", ou uma função em que uma propriedade é atribuída a um sujeito. Ela também poderia ser, como lembra Wittgenstein, o que Russell chamava de "função proposicional", caso em que a variável representa uma proposição. No caso posto em destaque por Wittgenstein, a mesma propriedade é simultaneamente sujeito e objeto, de uma maneira em que o sujeito predica sobre si mesmo que não é, precisamente, este sujeito. Tal como, por exemplo, quando se menciona a "classe de todas as classes que não contêm a si mesmas". Para escapar ao paradoxo da autoreferência, Russell introduziu uma teoria dos tipos como instrumento que evita que membros de uma classe sejam definidos em termos de si mesmos. Assim, qualquer expressão que contenha uma variável aparente não deve estar, para Russell, no mesmo escopo desta variável, ou seja, deve pertencer a um tipo diferente dela. Lembremos que Wittgenstein discutiu a teoria dos tipos e o axioma da reducibilidade no TLP (cf. §§ 6.123-6.1233), reclamando de que elas fossem realmente "proposições" da lógica. Na sua visão, a distinção entre teoria e metateoria deve ser rejeitada. Porém, de forma até mais importante, por causa da influência em direção a uma solução mais pragmática, discutiu as propostas de Ramsey, contidas no cap. III do seu *Foundations of Mathematics* para as funções predicativas. Aparentemente, a acentuação do aspecto pragmático da sua filosofia da matemática fez com que, nesta seção agora, o autor vislumbrasse que o maior problema do artificialismo teórico de Russell tivesse sido a falta de referência a aplicações concretas dos seus mecanismos lógicos, como também a falta de contextualização ou de visualização do paradoxo em jogos de linguagem concretos. Cf. mais comentários sobre Ramsey nas notas às seções PI§77, PVI§23 e PVII§28.

332. [PVII§11] É interessante observar que na década de 1940 a ideia de uma lógica paraconsistente seria considerada estranha e passível de absoluto rechaço. No entanto, Wittgenstein já tinha abertura suficiente para refletir sobre sistemas que admitem internamente uma contradição. Mais abaixo ele vai dizer que nós poderíamos imaginar uma técnica de linguagem em que a contradição fosse um implemento permanente. É provável que suas ideias revolucionárias sobre o papel da contradição tenham surgido a partir de suas críticas ao papel privilegiado que Hilbert atribuía a possíveis demonstrações de consistência por meio de algoritmos, bem como de suas críticas sobre os resultados das provas de incompletude de Gödel (cf. Marconi, 1984, pp. 333-352; Berto, 2009, pp. 1-12; Berto & Priest, 2017).

333. [PVII§11] Russell expressa uma concepção infecciosa das contradições e paradoxos, equivalente a uma concepção tumoral, quando diz no prefácio dos *Principia*: "Uma grande parte do trabalho envolvido na escrita da presente obra foi gasta nas contradições e paradoxos que infectaram a lógica e a teoria dos agregados" (Russell & Whitehead, 2019 [1910], p. vii).

334. [PVII§11] Situações como esta podem ser pensadas também como uma aplicação lógica à mecânica quântica (cf. N. da Costa & C. de Ronde, 2013).

335. [PVII§11] A seguinte observação foi omitida pelos editores do texto original em alemão: "Die philosophische Betrachtung der Mathematik hat eine andere Pointe, als die mathematische mathematischer Sätze & Beweise."// "A observação filosófica da matemática tem uma peculiaridade diferente do que a observação matemática das proposições e demonstrações matemáticas" (MS 124, p. 57). Levando em consideração que a observação vem logo a seguir daquela em que o matemático está sendo enganado pelo sentido de uma palavra que ele emprega numa sentença dialógica, ela se reveste, então, de uma importância metodológica que não deveria ter sido, no meu modo de ver, desconsiderada pelos editores do texto original. O que se destaca é o modo como uma pessoa se deixa levar pelo sentido em que usa uma determinada palavra. O esclarecimento incide no modo como se usa a linguagem, e não mediante um conceito daquilo que supostamente seria "o correto" no caso. O uso da palavra torna-se então um indicativo de uma ideia que não está presente na própria prática do usuário e que o aliena numa abstração. Em outras palavras, o uso da expressão serve como indício da atuação de uma suposta imagem.

336. [PVII§14] Uma importante informação metodológica que vem a seguir no manuscrito foi omitida

pelos editores do texto original em alemão. Ela declara:

> Ich versuche nicht, den Gegenstand in's Futteral zu pressen, noch Stücke wegzuschneiden, bis er paßt, sondern ich will ihn drehen «umlegen» — vielleicht um 180° — ~~bis er paßt~~. «damit er passe.» [gehört eigentlich zu Betrachtungen der Grundlagen der Mathem.]
>
> (MS 124, pp. 63-64)

> Eu não tento enfiar o objeto num estojo, nem recortar em pedaços até que ele caiba, mas eu o giro «desloco» – talvez em 180⁰ – ~~até que ele caiba~~ «e assim ele se encaixa» [pertence na realidade às observações sobre os fundamentos da mat.].
>
> (MS 124, pp. 63-64)

Evidentemente, a ideia de uma "virada" na observação se liga diretamente ao que se discute e declara sobre proposição, lógica e linguagem nas IF § 108: "O *preconceito* da pureza cristalina só pode ser, assim, eliminado quando damos uma virada em toda a nossa observação. (Pode-se dizer: a observação tem que ser virada, mas ao redor do pivô da nossa real necessidade.)"

337. [PVII§15] O uso da imaginação para abalar posições privilegiadas indica o método filosófico de Wittgenstein. Nosso autor não ataca diretamente, ou por dentro, o conceito mobilizado por um autor ou por alguma doutrina filosófica, mas focaliza a sua posição, o seu encargo, ou o seu ofício, e seus respectivos efeitos externos ou pragmáticos, como veremos no comentário logo abaixo, na seção PVII§19. Estas relativizações operam mediante o exame de exemplificações imaginadas das suas possíveis aplicações. E, evidentemente, com a utilização de comparações inusitadas, do tipo daquela "que ainda não ocorreu seriamente a ninguém".

338. [PVII§15] Uma última observação ao pé da p. 68, porém com a data de 22/06/1941, foi deixada de lado pelos editores do texto original. Ela diz: "Der Widerspruch ist so speziell, wie die Wahrheitsfunktionen, wie 'ja' & 'nein'".//"A contradição é tão especial quanto as funções de verdade, como 'sim' e 'não'". (MS 124, p. 68).

339. [PVII§15] A frase tem aspa simples de abertuta, mas não tem de fechamento no mesmo parágrafo. A aspa simples de fechamento vem no parágrafo seguinte no manuscrito.

340. [PVII§15] A questão central não é ser contra ou a favor da contradição, ou ser contra ou a favor de réguas não-rígidas, mas decididamente a favor das nossas decisões concretas diante de dificuldades e desafios inevitáveis da nossa prática e dos nossos processos de decisão. Wittgenstein não quer sacrificar a prática em favor de um ideal abstrato. Ou, por outra, dissolve nossas abstrações dogmáticas pelo modo como praticamos nossos cálculos e com que propósitos. O erro a ser evitado, nosso autor dirá a seguir, é o que chama em outro lado de "dieta unilateral" (cf. IF § 593). O mesmo erro que cometeu no *Tractatus* quando estipulou que a contradição teria que ser sem-sentido (TLP § 4.461).

341. [PVII§17] Repetindo uma observação já formulada em PIII§71, Os editores da OFM comentam que aqui o autor provavelmente se refere a uma conferência de Bertrand Russell: cf. "The Limits of Empiricism". In: *Proceedings of the Aristotelian Society*, 1935-1936. A frase se repete mais uma vez em PVII§21, logo abaixo. Preferimos a formulação em português "empírico", e não "empirismo", como prevalece na escolha da edição inglesa desta obra, não só porque o autor não usou a palavra "Empirismus", que se refere diretamente à corrente filosófica, mas principalmente por dois motivos: o primeiro, porque o tema em debate é a incorporação do empírico ao conceitual, estabelecendo uma verdadeira gramática do cálculo; o segundo, porque a consulta aos usos desta palavra no Nachlass mostra que invariavelmente proposições empíricas (formuladas como *empirischen Sätzen* ou *Sätzen der Empirie*) são contrapostas a proposições gramaticais (grammatischen Sätzen) (cf. TSS 211, p. 634; 212, p. 1776; 213, p. 732), ou então quando o lógico e o empírico são contrapostos (MSS 173, p. 3v; 176, p. 9v), a mesma palavra, Empirie, é preferida. Por outra parte, a palavra *Empirismus* aparece no MS 117, p. 185, como *Die Grenzen des Empirismus* ("As Fronteiras do Empirismo", sublinhado no texto), a mesma formulação aparece no MS 159, p. 16v; e no MS 163, p. 21r, a palavra *Empirismus* é

riscada, e *Empirie* é colocada em seu lugar.

342. [PVII§17] Ao enquadrar o que chamamos de "experimento" no interior de uma totalidade organizada, Wittgenstein recobra mais uma vez o seu método filosófico de descrever a morfologia do uso de uma expressão ("What I give is the morphology of the use of an expression", Malcolm, 2001, p. 43). A morfologia nos apresenta uma visão sinóptica ou panorâmica da maneira, do propósito e das orientações gerais em que uma expressão é utilizada, de modo que possamos fazer comparações, analogias, e enxergar outras possibilidades de visão e de uso ainda não entrevistas do mesmo conceito. A apresentação panorâmica proporciona então uma maneira de ver, ou, se quisermos, uma fisiognomia, um rosto, em que a palavra pode ter sentido. No caso em destaque, o tubo de ensaio e o bico de Bunsen fazem parte da fisiognomia da palavra "experimento". Mais observações sobre fisiognomia ou visão de aspecto podem ser encontradas em PIV§47, 50 e 51.

343. [PVII§17] O que está no texto editado pelos herdeiros literários de Wittgenstein é um travessão longo que substitui o que no manuscrito vem consignado como dois travessões simples.

344. [PVII§17] Uma observação omitida pelos editores merece ser reproduzida aqui: "Das normative Spiel – im Gegensatz, etwa, zum beschreibenden." // "O jogo normativo – em contraste, por exemplo, com o jogo descritivo." (MS 124, p. 76). Wittgenstein separa a gramática da sua descrição, que é um outro jogo de linguagem, para realçar o contraste e possivelmente considerar equívocos.

345. [PVII§17] Esta ênfase foi omitida pelos editores do texto original em alemão.

346. [PVII§18] Este é um exemplo claro de como gramática e visão de aspecto estão inter-relacionados no pensamento de Wittgenstein, e de como, pelo seu ponto de vista, a questão da verdade e do referente ostensivo são tratados não como evidenciais de correção e de sentido, mas como parte das relações internas de um jogo de linguagem. A pergunta mais imediata neste caso é: "como isto não nos leva a um ceticismo?". Mas a própria ideia de "jogo de linguagem" faz com que o relativismo nela implicado preclua, ao mesmo tempo, que o sentido de um ceticismo radical nele subsista. As próprias regras do jogo possibilitam a expressão de "essências" com "grau de certeza" (cf. IF §§ 371 e 373), já que a descrição de um jogo de linguagem é também a descrição de como normalmente empregamos uma palavra no seu contexto prático. Assim, não se pode dizer que a matemática nos ensina a contar, como se o jogo não tivesse um entorno e um propósito numa forma de vida no qual a prática de contar e de calcular têm uma orientação e um sentido que, antes de tudo, deve ser aprendido.

347. [PVII§18] Duas observações são omitidas nesta página 83 do MS 124. Vou reproduzir a primeira delas aqui, e a segunda na nota seguinte, para complementar o raciocínio:

> Ich will einen bestimmten Aspekt der Mathematik herausarbeiten; & zwar den, der – meiner Meinung nach – offenbar gemacht die Art & Weise beeinflußt, wie Mathematiker & Philosophen (heute) die Mathematik betrachten.// – klar abgebildet «geschildert» die Art & Weise …//
>
> (MS 124, p. 83)

> Quero destacar um determinado aspecto da matemática; a saber, aquele que – a meu ver – evidentemente influencia o modo como matemáticos & filósofos (hoje) consideram a matemática. // – o modo como claramente figuraram «retrataram» …//
>
> (MS 124, p. 83)

348. [PVII§18] Os editores do texto original em alemão foram, a partir deste ponto, misturando a ordem das seções/parágrafos do manuscrito, para colocá-los em um arranjo mais coerente com o tema de que tratam. Com isto, no entanto, alteraram o estilo de diário ou de álbum no qual o pensamento de Wittgenstein tem a sua própria natureza e sua força filosófica. Assim, neste caso, do ponto em que Wittgenstein disserta sobre atacar a posição ou o encargo da matemática, na p. 82 do manuscrito, ao ponto em que ele revela que a sua tarefa não é falar diretamente sobre a prova de Gödel, já na p. 84 do manuscrito, há toda uma elaboração reflexiva acerca do cálculo que adensa a corrente do

rio que vai desaguar na estratégia retórica que usa a respeito dos teoremas da incompletude. Em primeiro lugar, Wittgenstein descreve uma série de aspectos tacitamente incorporados à atividade matemática que não são claramente evidenciados, já que são parte do entorno em que regras do jogo de linguagem são seguidas. Dizer, por exemplo, que "O minuto tem 60 segundos", pressupõe uma noção de tempo, a existência física de relógios no mundo, o fato de que já temos à disposição uma forma de medir o tempo que, na realidade, dão à afirmação a sua peculiaridade, o seu espírito ou o seu sentido mais amplo (cf. MS 124, p. 82). Na página seguinte (p. 83), Wittgenstein diz que quer ressaltar um certo aspecto da matemática; a saber, aquele que, em sua opinião, influencia a forma como os matemáticos e filósofos de hoje veem a matemática. Diz também que o que lhe interessa é simplesmente o ambiente do cálculo, o comportamento daqueles que calculam. E, já na p. 84 do manuscrito, antes de entrar na observação sobre a prova de Gödel, ele ainda se pergunta se em vez de considerar que, do ponto de vista prático, o cálculo tem que se basear em fatos empíricos, não poderíamos antes supor que ele determina, ou pelo menos nos ajuda a determinar, o que chamamos de "fatos empíricos". Finalmente, para que nos demos conta da extrema relevância do que foi omitido pelos editores do texto, esta importante passagem, que mostra de modo eloquente sua estratégia na abordagem da prova de Gödel, revela também, na troca do psicológico pelo fisiológico, um traço distintivo nietzschiano de subversão cultural de valores em Wittgenstein (cf. MS 120, p. 145r) que ainda não está suficientemente discutido, a meu ver, na literatura secundária:

> 'Der psychologische Ablauf der Rechnung' — oder soll ich ihn einen physiologischen nennen? Will ich die Gefühle der Billigung eines Rechenübergangs beschreiben? Wenn wir statt der Billigung hier den Ausdruck der Billigung setzen: – was interessiert er uns? Er ist bloß eine *Umgebung* des Rechnens. (Beachte das *Benehmen* beim Rechnen!)
> (MS 124, pp. 83-84)

> 'O percurso psicológico do cálculo' – ou devo chamá-lo de fisiológico? Quero descrever a sensação de aprovação de uma transição de cálculo? Se em vez da aprovação usarmos aqui a expressão da aprovação: – o que nela nos interessa? Ela só é um *entorno* do cálculo. (Preste atenção ao *comportamento* ao calcular!)
> (MS 124, pp. 83-84).

349. [PVII§19] Uma variante riscada para a finalização da sentença foi: //~~ihre Stellung, ihr Prestige.~~// // //~~sua posição, seu prestígio.~~// (MS 124, p. 82).

350. [PVII§19] Importante para esclarecer as observações sobre "bordejar" a prova de Gödel, no sentido de falar sobre os efeitos colaterais da demonstração ou não atacar a matemática ou a lógica por dentro, mas sim por fora, pela sua posição, pela sua ocupação ou pelo seu encargo, pelo que se conta como correlacionado ao sentido dado no seu entorno, é também consultar esta observação metodológica que aparece nos manuscritos de Wittgenstein em 1946: "Die *Fakten* der menschlichen Naturgeschichte, die auf unser Problem Licht werfen, sind «↓uns» schwer zu sehen «finden», denn unsre / Sprache «Rede» *geht an ihnen vorbei*, – sie ist mit andern Dingen beschäftigt. (So sagen wir Einem "Geh ins Geschäft & kauf ...", – nicht: "Setz den linken Fuß vor den rechten Fuß etc. etc., dann leg Geld auf den Schalter etc. (etc.)" // "Os *fatos* da história natural humana que lançam luz sobre o nosso problema, são «↓para nós» difíceis de ver «achar», pois a nossa / linguagem «fala» *as contorna*, ela está ocupada com outras coisas. (Assim, a gente diz para alguém "Vai no armazém & compra ...", – e não "Coloque o pé esquerdo adiante do pé direito etc., etc., ponha então o dinheiro sobre o guichê etc. (etc.)" (MS 130 pp. 136- 137). Na seção PVII§3, Wittgenstein já nos diz que deve descrever o encargo de um rei, sem "cair no erro de explicar a majestade real pela utilidade do rei; e, de todo modo, nem a utilidade nem a majestade podem ser desconsideradas". Numa das várias observações sobre o processo de demonstração que aparecem na Parte III, Wittgenstein nos diz que o que lhe interessa não é exatamente o fato de que uma demonstração nos convença de algo, mas as aplicações que revestem este convencimento, o fato de que ela nos convence da verdade quando

é capaz das mais diferentes exegeses (cf. PIII§25). Por isto, a sua principal precupação é a postura dogmática daquele que está convencido pela verdade da demonstração. A incidência do esclarecimento não recai diretamente sobre os fatos que sustentam esta verdade, mas sobre os próprios sustentáculos, isto é, a atitude geral daquele que se encontra convencido. Este método de incidência indireta sobre o problema que o autor quer atacar depõe não apenas sobre as características estilísticas do seu texto e do seu método, que margeia pelas beiradas e atinge os sustentáculos do edifício que sustenta a questão como uma discussão significativa, subtraindo-lhes o apoio justificativo e desvelando a própria prática desvestida da prosa que normalmente recobre a construção, mas que também é responsável, por outro lado, pela opacidade do texto de Wittgenstein na medida em que fala indiretamente, não se choca frontalmente com a resistência ideológica, não a desperta e permanece, assim, relativamente incompreensível. Deste modo, normalmente ocorre que a resistência permanece dormente enquanto sua base é corroída. Cf. comentário à nota 276 da seção [PV§52]

351. [PVII§20] Onde há no manuscrito um travessão longo, os editores preferiram consignar dois travessões curtos. Mas vamos ver que na seção seguinte eles tomaram atitude diversa.
352. [PVII§20] A palavra *Einheit* (unidade) é usada aqui no sentido de "conjunto".
353. [PVII§21] Retoma-se a discussão sobre Gödel, particularmente pela posição assumida por Wittgenstein de que um jogo de linguagem dentro de outro jogo de linguagem altera o sentido do primeiro. Trata-se agora de um novo jogo.
354. [PVII§21] O manuscrito contém dois travessões curtos que são usualmente substituídos pelos editores do texto original em alemão por um travessão longo (como na seção PVII§20 acima, por exemplo). Mas aqui eles preferiram deixar um travessão curto, e na seção anterior, onde existe no manuscrito um travessão longo, eles substituíram na sua edição por dois travessões curtos.
355. [PVII§21] Uma observação complementar ao raciocínio com que este trecho se ocupa foi omitida pelos editores:

> Kann man nicht ebenso sagen, der Satz 3 + 2 = 5 sage von sich aus, er könne in eine Gruppe von 3 & eine von 2 Zeichen zerlegt werden? //, er bestehe aus einer Gruppe von 3 & einer von 2 Zeichen?//
> (MS 124, p. 89)

> Não se pode dizer também que a proposição 3 + 2 = 5 diz de si mesma que pode ser dividida em um grupo de 3 e um de 2 caracteres? //, consiste em um grupo de 3 e um de 2 caracteres? //
> (MS 124, p. 89)

356. [PVII§21] Outra observação complementar ao raciocínio com que este trecho se ocupa, também omitida pelos editores provavelmente porque o autor não a considerava boa o suficiente, é esta em que se enfatiza a ineficácia de uma construção que só se sustentaria por razões estéticas:

> Ein Stil, Maschinen zu bauen, in welchem man die wirksamen Räder, Hebel, etc. ~~von~~ «mit» einer Zahl unwirksamer umgibt, die, z.B., nur eines ästhetischen Eindrucks wegen angebracht sind. (Ähnlich wie Scheinfester in einer Fassade.)
> (MS 124, p. 89)

> Um estilo de construção de máquinas em que se envolvem rodas, alavancas etc. eficazes ~~de~~ «com» uma série de ineficazes que, por exemplo, só são apropriados para uma impressão estética. (Semelhante a uma falsa janela em uma fachada.)
> (MS 124, p. 89)

357. [PVII§21] O que Wittgenstein parece dizer é que ao seguir o modelo de prova da geometria, o teorema de Gödel acaba por demandar confiança numa demonstração na qual não se pode demonstradamente confiar, estabelecendo uma autocontradição performativa no seu próprio jogo de linguagem. A observação seguinte, omitida pelos editores, parece corroborar esta hipótese, porque diz:

> Wir erwarten das eine & werden «dies & werden» von dem andern überrascht «von dem überrascht»; aber die Kette der Gründe hat ein Ende.
> (MS 124, p. 90)

> Nós esperamos uma coisa «isto & somos» & somos surpreendidos pela outra «surpreendidos por ela»; mas a cadeia de razões tem um fim.
> (MS 124, p. 90)

Wittgenstein também comenta sobre a diferença entre a demonstração em geometria e a de Gödel em AIII§14.

358. [PVII§21] Repetindo uma observação já formulada em PIII§71, Os editores da OFM comentam que aqui o autor provavelmente se refere a uma conferência de Bertrand Russell: cf. "The Limits of Empiricism". In: *Proceedings of the Aristotelian Society*, 1935-1936. A formulação também foi lembrada em PVII§17, mais acima. Cf. esta nota para esclarecimento da escolha de tradução.

359. [PVII§22] Uma observação metodológica interessante ao final da página foi omitida pelos editores do texto original em alemão; ela se conecta com a cegueira para o aspecto mediante o qual o teorema de Gödel é muito mais uma resposta a uma pergunta sem sentido do que uma necessidade prática:

Die Menschen die immerfort 'warum' fragen, sind wie die Touristen, die, im Bädeker lesend, vor einem Gebäude stehen & durch das Lesen der Entstehungsgeschichte etc etc gehindert werden, das Gebäude zu *sehen*. (MS 124, p. 93)	As pessoas que continuamente perguntam 'por quê' são como turistas que, ao ler o guia de viagem, ficam paradas em frente aos edifícios lendo a história da sua origem etc., etc., e se impedem de *ver* os edifícios. (MS 124, p. 93)

360. [PVII§22] Este parágrafo aparece no manuscrito depois do parágrafo seguinte desta mesma página. Os editores do texto original alemão, entretanto, inverteram a ordem porque o tema deste parágrafo é o mesmo do que o antecede. Com isto, alteram o estilo de escrita e apresentação do pensamento de Wittgenstein, que supõe interferências cruzadas de pensamentos para justamente romper, pela própria performance literária, com a pressuposição de sistematicidade e a tentação de erigir doutrinas filosóficas. A numeração do parágrafo, cuja ordem foi alterada como se fosse uma outra seção, sedimenta a atitude de apagar e "corrigir", digamos assim, o estilo literário do autor.

361. [PVII§23] Neste ponto termina a redação dos textos escritos no dia 04/07/1941. Os textos a seguir começaram a ser redigidos no dia 05/03/1944, ou seja, quase três anos depois, numa época em que Wittgenstein se retira para Swansea.

362. [PVII§26] Nas IF § 120, Wittgenstein declara que suas explicações sobre a linguagem visam uma "linguagem completa", e não uma "preparatória". Esta referência ao uso ordinário da linguagem não constitui propriamente uma "filosofia da linguagem ordinária", tal como acabou surgindo no panorama filosófico entre as décadas de 1950 e 1970. Pois vemos que Wittgenstein usa o cotidiano como termo de comparação, e não propriamente de correção. O seu propósito, por isto, talvez seja muito mais ressaltar por contraste o componente filosófico imiscuido no uso das sentenças nos contextos pragmáticos em que operam, para que nos decidamos a seu respeito, do que a descoberta dos mecanismos lógicos da linguagem comum e corrente ou a imposição do uso sobre uma eventual teoria do significado.

363. [PVII§27] Em 1944, Wittgenstein ainda não dispunha de informação sobre novas lógicas, com diferentes critérios ou funções de verdade, como a lógica fuzzy ou a paraconsistente. Sua visão é, portanto, antecipatória do desenvolvimento que se realizou nas décadas seguintes.

364. [PVII§27] Esta é uma citação do texto atualmente publicado na seção § 119 das IF: "Os resultados da filosofia são a descoberta de algum simples contrassenso e calombos que a compreensão ganhou ao se chocar contra os limites da linguagem. Eles, os calombos, permitem-nos reconhecer o valor daquela descoberta."

365. [PVII§28] É muito provável que o diálogo que se estabelece aqui seja com um imaginário Frank Ramsey, posto que é na p. 27 do seu *Foundations of Mathematics*, lido por Wittgenstein ainda no período do seu interregno não-filosófico na Áustria, na década de 1920, que aparece a referência ao paradoxo de Grelling-Nelson, que Ramsey atribui equivocadamente a Weyl naquela passagem.

Este paradoxo diz o seguinte: uma palavra que se qualifica a si mesma é *autológica*; por exemplo, as palavras "real", "polissílabo", "reconhecível", "comum", têm a mesma qualidade daquilo que predicam; por outro lado, as palavras que não são autológicas, são *heterológicas*, isto é, não se qualificam a si mesmas; por exemplo, "longo", "mosca", "verbo", "palavrão". O fato é que a proposição de um tipo de definição como esta leva a um paradoxo semântico de autorreferência análogo ao paradoxo de Russell. A diferença é que a teoria dos tipos dá conta de paradoxos de autoreferência, enquanto que para paradoxos semânticos, Russell propôs uma teoria ramificada dos tipos em que se articulam funções proposicionais e predicativas. No caso em pauta, este paradoxo se sintetiza da seguinte maneira: "Se a palavra 'heterológica' for autológica, então ela é heterológica; e se ela for heterológica, então é autológica". O que temos nesta seção, portanto, é um diálogo entre Wittgenstein e Ramsey a respeito de implicações filosóficas a respeito de variadas soluções lógicas a paradoxos semânticos. Deve-se notar, particularmente, que os editores do texto alemão corrigiram a anotação equivocada no manuscrito, onde aparece a palavra "heteronom", e não, mais apropriadamente, "heterologisch". Note-se também que o símbolo "ε" pertence especialmente à notação do *Principia Mathematica* (Russell & Whitehead, 2019 [1910], p. 197) para a "teoria geral das classes", e significa que "alguma coisa x é um elemento ou um membro de uma classe y" , e o símbolo "≡" corresponde ao atual símbolo de bicondicional "↔". O símbolo ε é utilizado, particularmente, como sinal de cópula (cf. acima AI§17) para indicar um relação especial de predicação que garante uma assimetria entre aquilo que se diz de alguma coisa e aquela coisa naquilo que dela se diz. Este tipo de instrumento simbólico faz-se necessário particularmente para Russell quando distingue "função proposicional" de "proposição predicativa". Numa função proposicional, à diferença da simples proposição predicativa, deve haver um ou mais componentes indeterminados, de tal modo que, quando lhe são atribuídos valores, a expressão converte-se naturalmente em uma proposição. Então, por exemplo, φx é uma função proposicional enquanto a variável permanecer indeterminada. Uma vez que x se aplique a um caso concreto, poderemos determinar se a proposição é verdadeira ou falsa. A partir de janeiro de 1913, entretanto, Wittgenstein diverge de Russell quanto ao fato de que proposições atômicas possam ser tratadas como complexos (cf. 2008, p. 38), e que qualidades e relações pudessem ser havidas como pertencentes a diferentes *tipos*. Por conseguinte, toda a teoria dos tipos deveria se tornar supérflua mediante uma nova "teoria do simbolismo". Wittgenstein se estende um pouco mais sobre esse problema dois anos depois destas observações do MS 124, já em 1946, no MS 130, pp. 83-88. Cf. mais comentários sobre Ramsey nas notas às seções PI§77, PVI§23 e PVII§10. Cf. também um importante artigo publicado por von Wright em 1960 sobre o paradoxo heterológico (von Wright, 1960).

366. [PVII§30] Em 1944 ainda não estavam disponíveis estudos sobre outros tipos de inferências, tais como implicaturas ou inferências proposicionais, que são relações de consequência em raciocínios cujo sentido dependente de contexto. Quero dizer, inferências de natureza pragmática, não propriamente lógicas ou formais (dedução, indução), que podem fazer parte de um jogo de linguagem e ao mesmo tempo ser completamente independentes do mundo empírico, mesmo que ocorram somente no interior de contextos culturais. Neste sentido, mais uma vez, vemos o pensamento de Wittgenstein percorrendo sendas que iam avante do seu próprio tempo.

367. [PVII§30] A referência ao jogos de linguagem (2) das IF serve como comprovação de que estes textos são concebidos como parte daquele. Por conseguinte, pode-se conceber as IF como obra inacabada cuja continuidade se encontra disseminada pela extensão do *Nachlass*, como um todo (ver a *Introdução* a esta tradução).

368. [PVII§31] Um comentário sobre Gödel que vem antes do presente parágrafo foi omitido pelos editores:

Das Unphilosophische an Gödels Aufsatz besteht «liegt» darin, daß er das Verhältnis der Mathematik	O não-filosófico no ensaio de Gödel consiste «reside» em que ele não vê «reconhece» a correlação da

zu «&» ihrer Anwendung nicht sieht «erkennt». Er hat hier die schleimigen Begriffe der ~~übrigen~~ «meisten» Mathematiker.

(MS 124, p. 115)

matemática com «&» a sua aplicação. Ele tem aqui os conceitos hipócritas do *resto* «maioria» dos matemáticos.

(MS 124, p. 115)

369. [PVII§33] Russell dava o nome de "axioma multiplicativo", ou de "axioma de Zermelo", ao "axioma da escolha" formulado por Ernst Zermelo em 1904. Ele serve para estabelecer uma ordem na seleção de pares relevantes entre conjuntos potencialmente infinitos, de modo que se houver uma classe K de classes existentes, haverá uma classe que contém um membro em comum com cada membro de K. Isto é, para qualquer conjunto X de conjuntos não-vazios haverá uma função de escolha f definida em X, de maneira que será possível a formulação de um produto cartesiano entre quaisquer conjuntos não-vazios. O axioma da escolha, neste sentido, servia para Russell como prova de que toda classe e todo número cardinal ou é indutivo ou é reflexivo. (Cf. Russell, 1993 [1919], pp. 117-130). Como este recurso é importante na solidificação do fundamento lógico da matemática na visão de Russell, este é o ponto que está sendo possivelmente problematizado por Wittgenstein nesta passagem. Nosso autor estaria sugerindo que sem compreender o axioma da escolha ninguém seria um matemático na cultura ocidental da primeira metade do século XX.
370. [PVII§34] Segundo os editores do texto de Wittgenstein, possivelmente ele se referia aqui a uma parábola em que um rei decretou uma lei pela qual todos que viessem à cidade deveriam atestar que tipo de negócio vieram fazer, sob pena de enforcamento no caso de ser proferida uma mentira. Mas um sofista declarou que veio à cidade para ser enforcado em virtude desta lei.
371. [PVII§35] A parte final da p. 120 e toda a p. 121 do manuscrito foram omitidas pelos editores do texto original. São reflexões sobre a possibilidade de proposições matemáticas serem consideradas proposições empíricas. Vejamos:

"Ist der Satz '18×15=270' ein Erfahrungssatz?" – Beruht er nicht auf einer Erfahrung, auf der, daß die Rechnung dies ergab? Richtiger freilich, daß das *Rechnen* dies ergab, denn "Rechnung" darf hier nicht bedeuten: das Rechnungsbild. Es war eine Erfahrung: diese Rechnung machen, dies Rechnungsbild (& also auch sein Resultat «Endergebnis») erzeugen.

(MS 124, p. 120)

"A proposição '18 × 15 = 270' é uma proposição empírica?" – Não está baseada numa experiência fornecida pelo cálculo? É mais correto, de todo modo, dizer que o *cálculo* forneceu isto, porque "cálculo" não pode significar aqui: a imagem do cálculo. Foi uma experiência: fazer este cálculo, gerar esta imagem do cálculo (& assim também o seu resultado «resultado final»).

(MS 124, p. 120)

Aber beschreibt der Satz diese Erfahrung? Ist es also wahr, wenn ich so gerechnet habe, ob das nun richtig oder falsch war?

Mas a proposição descreve esta experiência? Então, quando calculei assim, é verdade quer estivesse certo ou errado?

Kann also ein Satz auf einer Erfahrung beruhen & doch kein Erfahrungssatz sein?

Então uma proposição pode estar baseada numa experiência & ainda não ser uma proposição empírica?

Der Satz beruht auf der Erfahrung, daß ich so abgelaufen bin, oder, daß wir so ablaufen. Aber, "er sagt, daß wir so ablaufen" bedeutet eine bestimmte Verwendung des Satzes «der Aussage» im «in einem» Sprachspiel.

A proposição está baseada na experiência de que foi assim que aconteceu, ou que é assim que a gente processa. Mas, "ela diz que processamos assim" significa um certo emprego da proposição «do enunciado» no «em um» jogo de linguagem.

Zu sagen "der Satz beruht auf der Erfahrung , …«, daß …»" sagt: der Satz wird von Menschen [E|e]rzeugt, die die so & so abgerichtet sind.

Und die Verwendung des Rechensatzes ist *nicht* die des psychologischen Satzes.

(MS 120, p. 121)

Dizer "A proposição está baseada na experiência … «de que …»" diz: a proposição foi produzida por pessoas que foram adestradas assim & assim.

E o emprego da proposição de cálculo *não* é o da proposição psicológica.

(MS 120, p. 121)

372. [PVII§36] Russell seguiu a intuição básica de Frege, de que números são classes de classes equinuméricas (cf. Frege, 1953, § 68), mas esquivou-se do paradoxo que inexoravelmente se segue a esta construção lógica em particular quando se postula uma "classe de todas as classes que não são membros de si mesmas" (ela ao mesmo tempo passa a ser membro e não membro de si mesma). Na seção § 20 do *Principia Mathematica* (Russell & Whitehead, 2019 [1910]) postula-se que classes não podem ser tratadas como "indivíduos"; isto é, classes, como extensões de predicados, não podem ser tomadas como objetos matemáticos plenos, capazes de serem membros de conjuntos. Assim, expressões para classes do tipo '{x; Fx}' não podem ser consideradas como termos singulares. Deste modo, dizer alguma coisa G das classes dos F's é o mesmo que dizer que há alguma propriedade (predicativa) H coextensiva a F, tal que H é G. Russell então estabelece uma restrição a propriedades predicativas que Frege não havia feito anteriormente, esquivando-se do paradoxo em consequência da própria ramificação da teoria dos tipos. Classes, para Russell, são tratadas como "ficções lógicas". Não se postulam realmente para classes características extensionais, mas características da lógica das propriedades. Tratam-se de propriedades intensionais, que podem ser perfeitamente distintas a respeito dos mesmos objetos. De modo que as propriedades das classes são, na realidade, propriedades de funções proposicionais. Se a teoria dos tipos é uma teoria de funções proposicionais, não se trata, no caso das classes, de entidades singulares, mas de meras funções entre proposições, ou de construções estabelecidas a partir de proposições, com abstração dos valores (verdadeiro e falso) que a estas normalmente se vinculam. Classes são para Russell, portanto, "símbolos incompletos". O que Wittgenstein parece estar criticando aqui são os artifícios pelos quais se escapa, pelo emprego de ficções lógicas, da investigação dos conceitos pelo uso destes no contexto de proferimentos concretos. Para o nosso autor, uma investigação de conceitos não deve ser feita nem como foi realizada no *Principia*, e nem como foi realizada no *Tractatus*, Investigar o uso de conceitos no interior de jogos de linguagem significa perguntar-se como a palavra está sendo usada na prática de atividades determinadas no interior de um contexto de vida, e possivelmente dotada, por conseguinte, de um certo propósito. Esta investigação se realiza pela descrição dos casos em pauta. De acordo com este programa, Wittgenstein então se pergunta como certas classes e nomes de animais são usados nos proferimentos que lemos nas fábulas de Lessing, por exemplo, e até imagina uma linguagem em que uma classe não é um conjunto de elementos que compartilham uma certa propriedade, mas é uma coisa só desde que seja bem grande (um grande leão, uma grande árvore, digamos), e se pergunta: sería possível contar e calcular nesta linguagem?
373. [PVII§36] Wittgenstein chama atenção aqui ao ponto da mudança de aspecto, como que para ressaltar a existência de regras gramaticais a impedir a visão de algo como algo, e, por outra parte, a visão de algo.
374. [PVII§36] A referência é ao TLP § 3.323. Este ponto é importante para mostrar que no TLP Wittgenstein tomava como absoluto que havia neste tipo de proposições *dois* tipos de uso do mesmo sinal. Agora vemos que isto varia de acordo com o contexto e com o jogo de linguagem em pauta.
375. [PVII§36] A referência provável é ao livro do filósofo e dramaturgo Gotthold E. Lessing publicado em 1759 sob o título de *Fabeln* (Fábulas).
376. [PVII§38] Esta é a mesma questão já discutida na PI§9.
377. [PVII§38] Os editores da edição alemã original das OFM indicam o texto de Frege, Leis Básicas da

Aritmética, Volume I, p. XVII, como fonte da referência de Wittgenstein. O assunto discutido por Frege nesta passagem é o tratamento do "princípio de identidade". As IF seção § 251 tratam exatamente do mesmo tema da identidade e da diferença a partir da referência ao texto de Frege. Esta mesma discussão também foi tratada na PI§132.

378. [PVII§40] No MS 124, p. 133, logo após dizer "O problema do jogo de linguagem precendente ...", Wittgenstein sinaliza que esta observação deveria ter um número x, com "[No. ...]", omitida pelos editores. Por via das dúvidas, talvez valha a pena reproduzir aqui a observação anterior que vem marcada com um sinal de "Schlecht" (um "S" estilizado) e que provavelmente não foi selecionada para a edição oficial justamente por este motivo:

> Soll ich sagen: das Kriterium der Gleichheit sei, daß mir etwas gleich vorkommt? – Aber wie weiß ich, daß ich den Ausdruck "gleich vorkommen" wieder in gleicher Weise gebrauche? – Aber sage ich nicht es ist gleich, weil es mir gleich vorkommt «erscheint»? Worin besteht es, daß mir diese Farbe gleich jener
> (MS 124, p. 132)
> erscheint? Kann die charakteristische Reaktion nicht die sein, daß ich sage: diese sei gleich der?
> (MS 124, p. 133)

> Devo dizer: o critério da igualdade é que algo pareça igual para mim? – Mas como sei que estou usando a expressão "parecem iguais" novamente da mesma maneira? – Mas não estou dizendo que é o mesmo porque "parece" para mim o mesmo? O que é que faz esta cor me parece igual
> (MS 124, p. 132)
> àquela? A reação característica não pode ser a de que digo: isto é igual a isto?
> (MS 124, p. 133)

379. [PVII§40] Os editores omitiram uma sequência de comentários acerca do conceito de "definição" e "seguimento de regras" que estão na p. 134 do MS 124. Destaco aqui apenas uma breve aproximação entre seguimento de regra e visão de aspecto:

> Wer eine neue Regel folgt, hat einen neuen
> (MS 124, p. 134)
> Begriff gebildet. Denn eine neue Regel ist eine neue Art die Dinge zu sehen.
> Und hier gibt es triviale und folgenreiche Fälle. Heißt 'die Dinge anders sehen' auch anders handeln?
> (MS 124, p. 135)

> Quem segue uma nova regra, formou um
> (MS 124, p. 134)
> novo conceito. Pois uma nova regra é uma nova maneira de ver as coisas.
> E aqui há casos trivais e importantes. 'Ver as coisas diferente' significa também agir diferente?
> (MS 124, p. 135)

380. [PVII§40] Os editores omitiram uma sequência de comentários sobre equações, prova do contínuo e sua relação com intensão e extensão, e a relação entre teorema e método nas pp. 135-137 do MS 124, com o objetivo de aproximar duas observações filosóficas com temas aparentados. Desta maneira, ludibriaram o estilo literário entrecruzado e assistemático em forma de álbum de Wittgenstein, tornando-o um pouco mais sistemático.
381. [PVII§41] O tema da localização da figura numérica na expansão de π é também tratado na PV§27.
382. [PVII§41] Nem mesmo Deus poderia criar um algoritmo para o plano infinito, pois este só se aplica a conjuntos numeráveis, computáveis e decidíveis.
383. [PVII§41] Os editores pularam 36 páginas adiante no MS 124 para deixar juntas observações que tratam do mesmo tema. Ao fazer isto, no entanto, alteram o estilo literário do autor que redige seus textos em forma de álbum e os recomenda assim (cf. Prefácio das IF).
384. [PVII§42] A página 139 do manuscrito é retomada depois do salto de 36 páginas.
385. [PVII§42] Wittgenstein colocou aqui um duplo travessão; os editores às vezes os substituem por um travessão longo.

386. [PVII§42] Partindo de uma exigência de objetividade que impôs ao seu projeto de logicização da aritmética, Frege não poderia senão configurar números como objetos autossubsistentes passíveis de serem asseridos por conceitos. Teríamos, por conseguinte, "conceitos de números". A dificuldade aqui aparece pelo fato de que não poderíamos asseri-los no mundo empírico, assim como tampouco no plano do mundo mental; em ambos os casos correr-se-ia o risco de descumprimento da exigência de objetividade. A objetividade então só estaria garantida se pudéssemos asseri-los no plano lógico. Frege recorre, por conseguinte, ao recurso Humeano de definir o número em termos de uma correlação um-a-um, e a sua demonstração estaria dada pela classe ou extensão que resultasse desta correlação, de modo que o número que pertencesse ao conceito F fosse o mesmo que também pertencesse ao conceito G. Sendo assim, para Frege o número seria uma classe de classes no sentido de que "O número que pertence ao conceito F é a extensão do conceito 'igual ao conceito F'" (Frege, 1953, § 68). O que Wittgenstein tensiona nesta definição é que o número passa a ser, nesta forma de configuração teórica, a propriedade de um conceito, mas não exatamente a característica de um conceito matemático, isto é, condizente com traços distintivos daquilo que só poderia ser dado numa *atividade matemática*. Para o nosso filósofo, o conceito de número estaria melhor servido como propriedade de uma técnica matemática, proveniente de práticas próprias e localizadas de pessoas que se dedicam, em circunstâncias e épocas muito variadas, e também de formas muito diferentes entre si, a contar, medir, calcular, projetar e demonstrar. Seria melhor a mistura multicolorida de técnicas a que chamamos de "matemática" (cf. PIII§46) que a exibição de propriedades de conceitos típicos de uma forma de visão das ciências naturais, ou a coadunação a abstrações filosóficas.
387. [PVII§44] Temos aqui uma retomada da discussão iniciada acima, na seção § 18, o que no manuscrito é indicado por Wittgenstein colocando entre colchetes a indicação "[S. 79] // [p. 79]".
388. [PVII§45] Uma observação importante ao final desta mesma página do MS 124 foi omitida pelos editores do texto:

> Ist was ich hier sehe, bloß der natürliche Abfall des Begriffs 'Mathematik'? So wie wenn ich fragte: ist das Bellen der Hunde auch eine Sprache? Oder ist hier etwas was mich beunruhigen sollte?
> (MS 124, p. 146)

> O que vejo aqui é somente o declínio natural do conceito 'matemática'? Tal como se perguntasse: o latido do cachorro é também uma linguagem? Ou existe aqui alguma coisa com a qual deveria me inquietar?
> (MS 124, p. 146)

389. [PVII§48] Toda a parte final da observação, a partir das palavras "Und urteile ich..." // "E se julgasse ..." , está na p. 163 do MS 124. Os editores tomaram como uma correção ao que estava inicialmente escrito na p. 152 com uma sinalização de insatisfação: "... Und gäbe sie mir jedesmal etwas anderes ein, so folgte ich ihr nicht als Regel. Und was "anderes", & was "das Gleiche" heißt, das kann nur das Leben entscheiden." // "E se tivesse me sugerido a cada vez alguma outra coisa, então não a teria seguido como regra. E o que quer dizer "outro" & "o mesmo" só a vida pode decidir."
390. [PVII§49] Evidentemente, a palavra *Regel* está sendo usada aqui em dois sentidos: o primeiro, como preceito, ordem ou determinação para a prática correta de determinada ação ou procedimento ("regra"); o segundo, como o instrumento físico de medição, sinônimo da palavra *Lineal* ("régua"), que guia a ação do compasso.
391. [PVII§53] Este parágrafo e o próximo vieram a se tornar as seções §§ 232-233 das IF, com algumas poucas modificações de palavras e pequenos ajustes.
392. [PVII§57] A mesma observação reaparece nas IF § 236.
393. [PVII§60] Um parágrafo omitido pelos editores complementa o raciocínio iniciado no parágrafo anterior, que começava com "A linha me sugere ...", para complementar agora com uma variante desta frase que termina com um predicado determinado: " ...uma imagem".

– – – ein Bild. Und urteile ich, sie gebe mir, gleichsam verantwortungslos, dies, oder das ein, so würde ich nicht sagen, ich folgte ihr *als einer Regel*. «als Regel»
(MS 124, p. 163)

- - - uma imagem. E se eu julgar que ela me sugere isto ou aquilo irresponsavelmente, por assim dizer, não diria que a segui *como uma regra*. «como regra»
(MS 124, p. 163)

394. [PVII§60] A mesma observação está nas IF § 235.
395. [PVII§61] Uma variante desta última frase no manuscrito diz: "... gegen eine Abweichung von der Norm." // "... contra um desvio da norma."
396. [PVII§61] Os editores do texto original preferiram omitir toda a página 170 do MS 124, e mais um pedaço da p. 171. Dentre as observações omitidas, destaco as seguintes:

Hätte ich das Sprachspiel (2) fundamentaler beschreiben können, als ich es tat? Nein. – Aber was könnte einen «mich» verleiten, das «so» zu denken? Ist es, weil wir keinem Grund trauen wollen, der nicht begründet ist?

Statt "ich deute sie mir so" sollte ich «möchte ich lieber» sagen: "sie deutet sich mir nun so".

Warum aber nicht sagen, was wir tatsächlich in solchen Fällen sagen; nämlich: "Das heißt: ich muß nun *so* handeln ..."?

Was kann die Beschreibung des Sprachspiels mehr tun, als ihm ein Bild zu zeichnen? – Und wenn er mehr will; was will er dann?

Die Lösung mancher Probleme kannst Du «kann man»
(MS 124, p. 170)
«↓kannst Du» nicht durch denken allein erhalten, sondern nur durch üben.
(MS 124, p. 171)

Teria conseguido descrever o jogo de linguagem (2) de maneira mais fundamental do que fiz? Não. – Mas o que «me» instigaria alguém a pensar isso «assim»? Seria porque não queremos confiar em uma razão que não é fundamentada?

Em vez de "Eu interpreto assim", deveria «prefiro» dizer: "Ela se interpreta agora para mim desta forma".

Mas por que não dizer o que realmente dizemos nestes casos; a saber: "Isto significa: "Tenho que agir *assim* ..."?

O que de melhor pode fazer a descrição do jogo de linguagem do que desenhar a sua imagem? – E se ele quiser mais; o que ele quer então?

A solução de muitos problemas você não consegue «não se consegue»
(MS 124, p. 170)
«↓você não consegue» ficar imaginando sozinho, mas só praticando.
(MS 124, p. 171)

397. [PVII§64] Na notação lógica atual, as três fórmula se traduziriam assim:
(vermelho & azul → preto) → branco
~ verde → ~ branco
~ verde → (vermelho & azul) & ~ preto
398. [PVII§64] Na página 7 do *Principia Mathematica* (Russell & Whitehead, 2019 [1910]), Russell definiu a "implicação material" pela sua relação com a disjunção, caso em que o primeiro disjuncto é negado. Assim, se temos que p é verdadeiro, e também que ~ p ∨ q é verdadeiro, então p → q é necessariamente verdadeiro, já que q não pode ser falso neste caso. De modo que ~ p ∨ q torna-se equivalente a p → q, ou, em termos simbólicos, (~ p ∨ q) ↔ (p → q). Para Russell, a implicação material distingue-se da implicação formal pelo fato de que a primeira é formada a partir de valores de verdade ou de uma estrutura semântica, isto é, admite-se que p → q só pode ser falso se o antecedente for verdadeiro e o consequente falso. Já a implicação formal, por sua vez, é admissível sem qualquer comprometimento semântico, de modo que só há ϕ → ψ quando ψ for deduzível de ϕ, ou, em termos simbólicos, se Γ ⊨ C , então ⊨ (Γ → C) (Se C é deduzível de Γ, então Γ → C é um teorema). Quando Wittgenstein diz que "estas são implicações materiais no sentido de Russell", está dando a entender que a verdade das proposições moleculares no seu exemplo depende da verdade das proposições atômicas.

399. [PVII§64] Traduzindo na notação lógica atual, temos que:
((v & a) → p) → b.
400. [PVII§64] Na notação lógica atual, (v & a) & (p & b).
401. [PVII§64] Na notação lógica atual, (v & a → p) → b
402. [PVII§64] Na notação lógica atual:
(vermelho & azul → preto) → branco
e
~ verde → ~ branco
403. [PVII§64] Na notação lógica atual,
~ verde → vermelho & (branco & ~ preto)
404. [PVII§64] Há uma seta no manuscrito indicando que o parágrafo que está na p. 176 deveria vir logo depois deste. Os parágrafos restantes da p. 175 e da primeira parte da p. 176 foram deslocados pelos editores para a seção 42 acima que trata da expansão de π.
405. [PVII§65] Uma das mais significantes passagens em que vemos Wittgenstein correlacionar visão panorâmica e geografia está nas discussões de 1933-1934 que precederam a datilografia do *Blue Book* e foram anotadas por Alice Ambrose: "Existe uma verdade na visão de Schopenhauer de que a filosofia é um organismo, e de que um livro de filosofia, com um começo e um fim, é uma espécie de contradição. Uma das dificuldades com a filosofia é a de que nos falta uma visão sinóptica. Encontramos aqui o tipo de dificuldade que teríamos com a geografia de um país do qual não tivéssemos um mapa, ou então um mapa das partes em separado. O país do qual falamos é a linguagem e a geografia, a sua gramáti¬ca. Podemos andar muito bem pelo país, mas quando somos obrigados a fazer um mapa, cometemos erros. Um mapa irá mostrar estradas diferentes dentro do mesmo país, podemos tomar qualquer uma, mas não duas ao mesmo tempo, do mesmo modo que na filosofia temos que tomar os problemas um a um, mesmo que, de fato, cada problema leve a uma multiplicidade de outros problemas. Te¬mos que esperar até que voltemos ao ponto de partida, antes que possamos ou tratar do problema que atacamos em primeiro lugar, ou proceder a um outro. Em filosofia as questões não são tão simples, de modo que podemos dizer 'Vamos ter uma ideia aproximada', pois não conhecemos o país de fato, senão quando conhecemos as conexões entre as estradas. (AWL, p. 43)." É interessante observar que ferramentas conceituais tão conhecidas de Wittgenstein, existentes, é claro, desde a composição do TLP e sua concepção pictórica de linguagem, mas amadurecidas principalmente depois de 1946, tais como a ideia de "visão de aspecto" posta em correlação com a ideia da "apresentação panorâmica", já estavam sendo discutidas em 1944 em relação íntima e estreita com a sua concepção de demonstração matemática. Este fato depõe, a meu ver, a favor da estreita vinculação entre filosofia da matemática e filosofia da psicologia em Wittgenstein, no sentido em que a última é, no seu pensamento, uma decorrência natural da primeira. (cf. acima PI§36, PIV§6 e PIV§47).
406. [PVII§66] Uma reflexão que está na PVI§47 ("Mas é estranho que eu não perca, com isto, o significado da regra. Como o retenho, então?"), é retomada aqui.
407. [PVII§68] Nesta passagem temos um belíssimo exemplo de como Wittgenstein concebe a visão de aspecto como reação, ou, como ele diz a respeito da formação de conceitos,"a um determinado manejo do estado de coisas".
408. [PVII§69] Os editores do texto saltaram da página 183 para a página 189 do MS 124. Destaco aqui algumas das observações omitidas que me pareceram importantes:

Eine Reihe hat doch für uns ein Gesicht!" Wohl; aber welches? – Nun doch das algebraische, & das eines Stücks der Entwicklung. Oder hat sie sonst noch eins? – Aber in dem liegt doch schon alles! – Aber das ist keine Feststellung über das Reihens

tück, oder über etwas, was wir darin erblicken; sondern der Ausdruck dafür, daß wir nur auf den Mund der Regel schauen & *tun*, & an keine weitere Anleitung appellieren.

(MS 124, p. 184)

Woher die Idee, es «als» wäre die angefangene Reihe ein sichtbares Stück unsichtbar bis in's unendliche gelegter Geleise?

(MS 124, p. 185)

Ich erblicke etwas in ihr – ähnlich wie die Gestalt im Vexierbild. Und sehe ich das, so sage ich: "das ist alles, was ich brauche." – Wer den Wegweiser findet, sucht nun nicht nach einer weiteren Instruktion, sondern er *geht*. (Und sagte ich; statt "er geht" – "er richtet sich nun nach ihm", so könnte der Unterschied der beiden nur sein, daß der zweite Ausdruck auf gewisse psychologische Begleiterscheinungen anspielt.)

Die Regel kann mich in mehr als einem Sinne zwingen. Durch die Macht der Gewohnheit, z.B, oder einer menschlichen Institution. Aber an diesen Zwang denke ich nicht; sondern an den Zwang, der darin liegt, daß die Regel schon alles vorgemacht hat, was ich ihr nachmachen

(MS 124, p. 186)

kann; daß sie in *logischer* Schrift schon alles vorgeschrieben hat.

(MS 124, p. 187)

Was wir "Sprache" nennen ist eine Institution.

(MS 124, p. 188)

Es könnte nicht *einmal* «einmal nur» in der Geschichte der Menschheit ein Satz ausgesprochen, & verstanden, werden. Und so auch kein Befehl & keine Regel. (Vergleiche damit den Gedankengang über Idealismus & Solipsismus & die Möglichkeit einer 'privaten Sprache'.)

(MS 124, p. 189)

Uma série tem para nós um rosto!" Bem; mas qual? – Ora, o algébrico & o de um pedaço da expansão. Ou ela teria mais um ainda? – Mas nela já está tudo! – Mas isto não é uma afirmação sobre o que vislumbramos em um pedaço da série ou sobre alguma coisa; mas a expressão daquilo que vemos na boca da regra & *fazemos*, & sem apelar para nenhuma orientação adicional.

(MS 124, p. 184)

De onde surge a ideia de que a série iniciada seria «é como» uma parte visível de trilhos invisíveis postos até ao infinito?

(MS 124, p. 185)

Eu enxergo alguma coisa nela – semelhante a uma forma numa ilusão de ótica. Eu vejo isto e digo: "Isto é tudo o que preciso" – Quem encontra a placa de sinalização, não busca mais uma instrução adicional, mas *segue adiante*. (E eu disse; em vez de "ele segue adiante" – "ele se orienta agora por ela", de modo que a diferença entre as duas poderia ser a de que a segunda expressão alude a uma certa concomitância psicológica.)

A regra pode me compelir em mais de um sentido. Pela força do costume, por exemplo, ou por uma instituição humana. Mas eu não penso nesta compulsão; mas na compulsão que consiste em que a regra já simulou tudo o que nela eu posso replicar;

(MS 124, p. 186)

que ela já prescreveu tudo em notação *lógica*.

(MS 124, p. 187)

O que chamamos de "linguagem" é uma instituição.

(MS 124, p. 188)

Não é possível uma sentença ser proferida e compreendida *uma vez* «só uma vez» na história da humanidade. E, do mesmo modo, nenhuma ordem & nenhuma regra. (Compare com isto a linha de pensamento sobre idealismo & solipsismo & a possibilidade de uma 'linguagem privada'.)

(MS 124, p. 189)

409. [PVII§70] Agora, um novo salto de duas páginas. Destaco a seguinte observação omitida pelos editores do texto original:

Ist es in meiner Macht, die philosophischen Schmerzen der Welt zu heilen? Nein. Die Vielheit der philoso-

Está em meu poder curar as dores filosóficas do mundo? Não. A multiplicidade das questões filosóficas

phischen Fragen ist, in gewissem Sinne, etwas beruhigendes.

(MS 124, p. 247)

Ist das Subjective, oder das Objektive wirklicher? – Unsinn! – Läßt sich nur das Objektive durch die Sprache darstellen, nicht das Subjektive? – Aber wir *reden* ja vom Subjektiven! Und was wir darüber im alltäglichen Leben sagen ist in Ordnung, wie es ist & braucht sowenig einer Richtigstellung durch den Philosophen, wie die Aussagen über Stühle & Tische. Eines nur muß betont werden: «ist zu betonen:» daß die Grammatik der Sätze von den subjektiven Gegenständen *nicht die gleiche ist*, wie die der Sätze von den objektiven Gegenständen. Oder, was dasselbe heißt: die Sprachspiele sind verschieden.

(MS 124, pp. 251-252)

Wenn ich die Sprache beschreibe, so beschreibe ich die Handlungsweise der Menschen – ethnologisch gesehen. «– sozusagen ethnologisch.» Das Wort "Ich" ist ein Wort unter vielen & wird *auch* von jederman gebraucht. Und ich schreibe für mich nicht *mehr*, als für meinen Leser.

(MS 124, p. 253)

Der erste Fehler, den wir in einer philosophischen Untersuchung machen, ist die philosophische Frage.

Die gemeinsame menschliche Handlungsweise ist das Bezugsystem, mittels welches wir uns eine fremde

(MS 124, p. 278)

Sprache denken.

Befehle werden manchmal nicht befolgt. Aber wie würde es aussehen, wenn Befehle nie befolgt würden.

Es ist nicht leicht philosophische Schlüssel zu finden, die viele Schlösser eröffnen. Aber die Schlösser zu den Schlüsseln finden, das ist das Schwerste.

Wer uns die Sprache eines Volkes beschreibt, beschreibt eine Gleichförmigkeit ihres Benehmens. Und wer eine Sprache beschreibt, die Einer mit sich allein spricht, der beschreibt eine Gleichförmigkeit seines Benehmens & nicht etwas, was sich einmal zugetragen hat.

Aber "eine Sprache sprechen" werde ich nur ein Verhalten nennen, das unserm, wenn wir unsere Spra-

é, em certo sentido, algo reconfortante.

(MS 124, p. 247)

O subjetivo, ou o objetivo, é o mais real? – Absurdo! – Só o objetivo pode ser apresentado pela linguagem, não o subjetivo? – Mas nós *falamos* sobre o subjetivo! E o que dizemos a respeito das coisas na vida cotidiana está em ordem tal como está & tampouco precisa de correção pelo filósofo, como as asserções sobre cadeiras e mesas. Uma pessoa só tem que acentuar: «deve-se acentuar:» que a gramática das proposições de objetos subjetivos *não é a mesma* que as proposições de objetos objetivos. Ou, o que significa o mesmo: os jogos de linguagem são diferentes.

(MS 124, pp. 251-252)

Se descrevo a linguagem, então descrevo os modos de agir das pessoas – vistas etnologicamente «– de maneira etnológica, por assim dizer.» A palavra "eu" é uma palavra entre muitas & *também* é usada por todo mundo. E eu não a descrevo mais para mim do que para o meu leitor.

(MS 124, p. 253)

O primeiro erro que cometemos em uma investigação filosófica é a pergunta filosófica.

O modo de agir humano comum é o sistema de referência mediante o qual imaginamos

(MS 124, p. 278)

uma língua estrangeira.

Ordens às vezes não são seguidas. Mas como seria se as ordens nunca fossem seguidas?

Não é fácil achar chaves filosóficas que abram muitas fechaduras. Mas achar as fechaduras para as chaves é o mais difícil.

Qualquer pessoa que descreve a língua de um povo para nós, descreve uma uniformidade em seu comportamento. E quem quer que descreva uma linguagem que alguém fala consigo mesmo, descreve uma uniformidade de seu comportamento e não algo que uma vez aconteceu.

Mas, "falar uma língua", chamarei apenas um comportamento análogo ao nosso quando falamos a nossa língua.

Der *Satz* & der *Beweis* müssen jeder in *anderem* Sinne eine Begriffsverbindung sein. – Das will eigentlich sagen daß man den Satz & den Beweis auf wesentlich andere «verschiedene» Weise verwendet. Nun, ich beweise den Satz zuerst, – & dann verwende ich ihn (z.B. «etwa») als Paradigma für Urteilsübergänge. Der Beweis überredet mich dazu, den Satz zu gebrauchen, oder: überzeugt mich davon, daß ich den Satz gebrauchen darf.

(MS 124, p. 191)

A *proposição* e a *demonstração* têm que ser, cada uma, uma ligação conceitual em um sentido *diferente*. – Isto propriamente quer dizer que empregamos a proposição & a demonstração de maneiras essencialmente outras «diferentes». Ora, primeiro demonstro a proposição, – & então a emprego (por exemplo «digamos») como paradigma para transições de juízo. A demonstração me persuade a usar a proposição, ou: me convence de que posso usar a proposição.

(MS 124, p. 191)

410. [PVII§71] O "jogo de linguagem (2)" refere-se, naturalmente, ao jogo de linguagem descrito na seção § 2 das IF, pelo que se mostra no texto a indissociabilidade entre o texto das OFM e o das IF. Na realidade, se as IF forem consideradas um livro inacabado, toda a extensão do *Nachlass* de Wittgenstein deveria ser considerada como uma e mesma escrita de um texto que nunca foi completamente terminado.

411. [PVII§73] Uma observação na seção seguinte do manuscrito foi omitida pelos editores:

Der Philosoph ist der, der in sich viele Krankheiten des Verstandes heilen muß, ehe er zu den Notionen des gesunden Menschenverstandes kommen kann.

(MS 124, p. 198)

O filósofo é aquele que tem que curar em si muitas doenças do entendimento antes que possa chegar às noções de entendimento humano saudável.

(MS 124, p. 198)

412. [PVII§74] Sobre *Hintergrund* / *Pano de fundo*, cf. nota 214 a PIV§30.

413. [PVII§74] As 92 páginas restantes do manuscrito 124, que termina na p. 292, são, na sua quase totalidade, observações que versam sobre filosofia da psicologia. Na última frase escrita deste manuscrito lê-se, de fato: "James ist eine Fundgrube für die Psychologie *des Philosophen*." // "James é uma mina de ouro para a psicologia *do filósofo*." O que se pode constatar neste texto é que a partir da página 200 as observações vão se transformando pouco a pouco de filosofia da lógica e da matemática em quase que exclusivamente filosofia da psicologia. Destaco, no entanto, dentre estas 92 páginas deixadas de lado pelos editores do texto original das OFM, algumas poucas observações de interesse metodológico mais direto:

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, João José (2015). *A Singularidade das Investigações Filosóficas de Wittgenstein: Fisiognomia do Texto*. Campinas: Editora da Unicamp.

AMBROSE, Alice (1967). "Wittgenstein on Some Questions in Foundations of Mathematics". In: FANN, K. T. (ed.). *Ludwig Wittgenstein: The Man and His Philosophy*. New York: Dell Publishing Co., pp. 265-283.

AMMERELLER, Erich & FISCHER, Eugen (eds.) (2004). *Wittgenstein at Work. Method in the Philosophical Investigations*. London: Routledge.

BAKER, Gordon (2002). "Quotation-marks in Philosophical Investigations Part I". In: *Language & Communication* 22: pp. 37-68.

_____ (2004a) *Wittgenstein's Method. Neglected Aspects*. Oxford: Blackwell Publishing.

_____ (2004b). "Italics in Wittgenstein". In: *Wittgenstein's Method. Neglected Aspects. Essays on Wittgenstein by Gordon Baker*. Edited by Katherine J. Morris. Oxford: Blackwell Publishing, pp. 224-259.

BANGU, Sorin (2016). "Later Wittgenstein on the Logicist Definition of Number". In: Costreie, Sorin (ed.). *Early Analytic Philosophy – New Perspectives on the Tradition*. Dordrecht: Springer, pp. 233-256.

_____ (2018a). "Later Wittgenstein and the Genealogy of Mathematical Necessity". In: Cahill, Kevin M. & Raleigh, Thomas (eds.). *Wittgenstein and Naturalism*. London: Routledge, pp. 151-173.

_____ (2018b). "Ludwig Wittgenstein: Later Philosophy of Mathematics". In: *The Internet Encyclopedia of Philosophy*, ISSN 2161-0002, https://www.iep.utm.edu/, August 25, 2018.

BAYS, Timothy (2004). "On Floyd and Putnam on Wittgenstein on Gödel". In: *Journal of Philosophy* 101 (4), pp. 197–210.

BELLOS, David (2011). *Is That a Fish in Your Ear? Translation and the Meaning of Everything*. New York: Faber & Faber.

BENACERRAF, Paul (1983). "Mathematical Truth". In: P. Benacerraf and H. Putnam (eds.) *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. 2nd edition, Cambridge: Cambridge University Press, pp. 403- 420.

BERNAYS, Paul (1959). "Comments on Ludwig Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics". In: *Ratio* 2 (1), pp.1-22.

BERTO, Francesco (2009a). "The Gödel Paradox and Wittgenstein's Reasons". In: *Philosophia Matematica* 17 (2), pp. 189-207.

_____ (2009b). *There is Something About Gödel. The Complete Guide to the Incompleteness Theorem*. Oxford: Wiley-Blackwell.

BERTO, Francesco & PRIEST, Graham (2017). "Dialetheism". In: Zalta, Edward (ed.) *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/dialetheism/

BIESENBACH, Hans (2011). *Anspielungen und Zitate im Werk Ludwig Wittgensteins*. Bergen: Publications from The Wittgenstein Archives at the University of Bergen, n. 22.

BOUWSMA, Oets K. (1986). *Wittgenstein: Conversations 1949-1951*. Indianapolis: Hackett Publishing Company.

CHIHARA, Charles (1977). "Wittgenstein's Analysis of the Paradoxes in His Lectures on the Foundations of Mathematics". In: *The Philosophical Review* 86 (3), pp. 365-381.

COLYVAN, Mark (2012). *An Introduction to Philosophy of Mathematics*. London: Cambridge University Press.

CONANT, James (1989a). "Throwing Away the Top of the Ladder". In: *Yale Review* 79, pp. 328-364.

CRARY, Alice & READ, Rupert (eds.) (2000). *The New Wittgenstein*. London: Routledge.

DUMMETT, Michael (1978). "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics". In: Dummett, M. *Truth and Other Enigmas*. Cambridge, MA: Harvard University Press, pp. 166-185.

da COSTA, Newton & de RONDE, Christian (2013). "The Paraconsistent Logic of Quantum Superpositions". In: *Foundations of Physics* 43 (7), pp. 845-858.

FOGELIN, Robert J. (1994). "Two Wittgensteins". In: *Pyrrhonian Reflections on Knowledge and Justification*. Oxford: Oxford University Press, pp. 205-222.

_____ (2009). *Taking Wittgenstein at His Word. A Textual Study*. Princeton: Princeton University Press.

FLOYD, Juliet & PUTNAM, Hilary (2000). "A Note on Wittgenstein's 'Notorious Paragraph' About the Gödel Theorem". In: *The Journal of Philosophy* 97 (11), pp. 624-632.

FLOYD, Juliet (1996). "On Saying What You Really Want to Say: Wittgenstein, Gödel and the Trisection of the Angle". In: HINTIKKA, Jaakko (ed.). *From Dedekind to Gödel*. Dordrecht: Kluwer Academic Press, pp. 373-425.

_____ (2000). "Wittgenstein, Mathematics and Philosophy". In: CRARY, Alice & READ, Rupert (eds.). *The New Wittgenstein*. London: Routledge, pp. 232-261.

_____ (2001). "Prose versus Proof: Wittgenstein on Gödel, Tarski and Truth". In: *Philosophia Mathematica* (3) Vol. 9, pp. 280-307.

_____ (2005). "Wittgenstein on Philosophy of Logic and Mathematics". In: SHAPIRO, Stewart (ed.) *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford: Oxford University Press, pp. 75-128.

_____ (2012). "Wittgenstein's Diagonal Argument: A Variation on Cantor and Turing". In: DYBJER, Peter; LINDSTRÖM, Sten; PALMGREN, Erik; SUNDHOLM, Göran (eds.). *Epistemology Versus Ontology. Essays on The Philosophy and Foundations of Mathematics in Honour of Per Martin-Löf*. Dordrecht: Springer, pp. 25-44.

_____ (2016a). "Chains of Life: Turing, Lebensform, and The Emergence of Witt¬genstein's Later Style". In: *Nordic Wittgenstein Review* 5 (2), pp. 7-89.

_____ (2016b). . "Turing, Wittgenstein, and Emergence". In: KATZ, James & FLOYD, Juliet (eds.). *Philosophy of Emerging Media: Understanding, Apreciation, Application*. Oxford: Oxford University Press, pp. 219-242.

_____ (2018). "Lebensformen: Living Logic". In: MARTIN, Christian (ed.). *Language, For¬m(s) of Life, and Logic: Investigations After Wittgenstein*. Boston: De Gruyter, pp. 59-92.

FRASCOLLA, Pasquale (1994). *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*. London: Routledge.

FREGE, Gottlob (1953). *The Foundations of Arithmetics*. Translated by J. L. Austin. 2a. ed. Oxford: Basil Blackwell.

GIBSON, John & HUEMER, Wolfgang (eds.) (2004). *The Literary Wittgenstein*. London: Routledge.

HACKING, Ian (2014). *Why is There Philosophy of Mathematics at All?* Cambridge: Cambridge University Press.

HUTCHINSON, Phil & READ, Rupert (2008) "Toward a Perspicuous Presentation of 'Perspicuous Presentation'". In: *Philosophical Investigations* 31 (2): pp. 141-160.

JACQUETTE, Dale (2004). "Diagonalization in Logic and Mathematics". In: GABBAY, Dov & GUENTHNER, Franz (eds.). *Handbook of Philosophical Logic*. Volume 11, 2nd edition. Dordrecht: Springer, pp. 55-147.

JANIK, Allan (2018) "The Dichtung of Analytic Philosophy: Wittgenstein's Legacy from Frege and its Consequences". In: BENGTSSON, Gisela; SÄÄTELA, Simo & PICHLER, Alois. *New essays on Frege. Between Science and Literature*. Basel, Springer International Publishing, pp. 143-157.

JANIK, Allan & VEIGL, Hans (1998). *Wittgenstein in Vienna: A Biographical Excursion Through the City and its History*. New York: Springer.

JOURDAN, Camila (2013). "As Observações de Wittgenstein sobre o Teorema de Gödel". In: *Philosophos* 18 (2): pp. 61-104.

KENNY, Anthony. (2006). "A Brief History of Wittgenstein Editing". In: PICHLER, Alois & SÄÄTELÄ, Simo (eds.). *Wittgenstein: The Philosopher and His Works*. Bergen: The Wittgenstein Archives at the University of Bergen, pp. 382-396.

KIENZLER, Wolfgang (2006). "Wittgenstein and John Henry Newman on Certainty". In: *Grazer Philosophische Studien* 71 (1), pp. 117-138.

KIENZLER, Wolfgang & GRÈVE, Sebastian (2016). "Wittgenstein on Gödelian 'Incompleteness', Proofs and Mathematical Practice: Reading Remarks on the Foundations of Mathematics, Part I, Appendix III, Carefully". In: GRÈVE, Sebastian & MÁCHA, Jakub (eds.). *Wittgenstein and the Creativity of Language*. London: Palgrave Macmillan, pp. 76-116.

KLAGGE, James (2016). "Wittgenstein, Frazer, and Temperament". In: Albinus, Lars; Rothhaupt, Joseph & Seery, Sadam (eds.) *Wittgenstein's Remarks on Frazer: The Text and the Matter*. Berlin: Walter de Gruiter, pp. 233-248.

KREISEL, Georg (1958). "Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics". In: *British Journal for the Philosophy of Science* 9, pp. 135-157.

KUHN, Thomas (1996). *The Structure of Scientific Revolutions*. 3rd edition. Chicago: The University of Chicago Press [1962].

LAMPERT, Timm (2006). "Wittgenstein's 'Notorious Paragraph' about the Gödel Theorem". In: *Contributions of the Austrian Wittgenstein Society/Beiträge der österreichischen Wittgenstein Gesellschaft*, pp. 168-171.

LARGE, Duncan (2014). "On the Work of Philosopher-Translators". In: BOASE-BEIER, Jean; FAWCETT, Antoinette; WILSON, Philip (eds.). *Literary Translation. Redrawing the Boundaries*. London: Palgrave Macmillan.

LAKATOS, Imre (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

McGUINNESS, Brian (ed.) (2008). *Wittgenstein in Cambridge. Letters and Documents 1911-1951*. Oxford: Blackwell Publishing.

MADDY, Penelope (1993). "Wittgenstein's Anti-philosophy of Mathematics". In: PUHL, K. (ed.), *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. Proceedings of the 15th Annual International Wittgenstein Symposium*, Pt. 2. Vienna: Holder-Pichler- Tempsky, pp. 52-72.

______ (2002). *Naturalism in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

______ (2014). *The Logical Must. Wittgenstein on Logic*. Oxford: Oxford University Press.

MALCOLM, Norman (2001). *Ludwig Wittgenstein. A Memoir*. Oxford: Clarendon Press.

MARCONI, Diego (1984). "Wittgenstein on Contradiction and the Philosophy of Paraconsistent Logic". In: *History of Philosophy Quarterly* 1 (3), pp. 333-352.

MARION, Mathieu (1998). *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

MCGUINNESS, Brian (2006). "Wittgenstein: Philosophy and Literature". In: PICHLER, Alois & SÄÄTELÄ, Simo (eds.) *Wittgenstein: The Philosopher and his Works*. Frankfurt: Ontos Verlag, pp. 367-381.

McMANUS, Denis (2006). *The Enchantment of Words. Wittgenstein's Tractatus Logico-Philosophicus*. Oxford, Clarendon Press.

MENDONÇA, Wilson (1991). "Wittgenstein e os Números". In: *O Que nos Faz Pensar* 4: pp. 5-36.

METHVEN, Steven (2015). *Frank Ramsey and the Realistic Spirit*. London: Palgrave Macmillan.

MISAK, Cheryl (2016). *Cambridge Pragmatism. From Peirce and James to Ramsey and Wittgenstein*. Oxford: Oxford University Press.

MONK, Ray (1991). *Ludwig Wittgenstein: The Duty of Genius*. New York: Penguin Books.

______ (2007). "Bourgeois, Bolshevist or Anarchist? The Reception of Wittgenstein's Philosophy of Mathematics". In: KAHANE, Guy, KANTERIAN, Edward & KUUSELA, Oskari (eds.) *Wittgenstein and His Interpreters. Essays in Memory of Gordon Baker*. London: Blackwell Publishing, pp. 269-294.

MOORE, George (1899). "The Nature of Judgement". In: *Mind* 8 (30), pp. 176-193.

______ (2004a). "Wittgenstein's Lectures 1930-33". In: ______. *Philosophical Papers*. London: Routledge, pp. 252-324.

______ (2004b). "Proof of an External World". In: ______. *Philosophical Papers*. London: Routledge, pp. 127-150.

MÜHLHÖLZER, Felix (2010). *Braucht die Mathematik eine Grundlegung? Ein Kommentar des Teils III von Wittgensteins Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Frankfurt am Main: Vittorio Klostermann.

______ (2012). "Teil III der Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik und die zugrunde liegenden Manuskripte 122 und 117: Ein Vergleich". In: *Wittgenstein Studien* 3, pp. 19-44.

______ (2014). "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics: Felix Mühlhölzer in Conversation with Sebastian Grève". In: *Nordic Wittgenstein Review* 3 (2), pp. 151-180.

NYÍRI, Kristóf (2006). "Wittgenstein's Philosophy of Pictures". In: Alois Pichler, Simo Säätelä (eds.), *Wittgenstein: The Philosopher and his Works*. Frankfurt a.M.: Ontos Verlag, , pp. 322–353.

OLIVEIRA, Paulo (2012). "Übersetzung, Aspekt und Variation". In: KROSS, Mattias & RAMHARTER, Esther (Hrsg.) *Wittgenstein übersetzen*. Berlin: Parerga, pp.123-172.

PAUL, Denis (2007). *Wittgenstein's Progress: 1929-1951*. Bergen: Wittgenstein's Archives at the University of Bergen.

PICHLER, Alois (2018). "Ludwig Wittgenstein: A Report of Two Dreams from October 1942 (MS 126, 21-26)". In: *Nordic Wittgenstein Review* 7 (1): pp. 101-107.

______ (2004). *Wittgensteins Philosophische Untersuchungen: vom Buch zum Album*. Amsterdam: Editions Rodopi.

PORTO, André (2012). "Wittgenstein on Mathematical Identities". In: *Disputatio* IV (34), pp. 755-805.

______ (2013). "Rule-following and Functions". In: *O Que Nos Faz Pensar* 33 (22), pp. 95-141.

POTTER, Michael (2000). *Reason's Nearest Kin. Philosophies of Arithmetic from Kant to Carnap*. Oxford: Oxford University Press.

______ (2011). "Wittgenstein on Mathematics". In: Kuusela, Oskari & McGinn, Marie (eds.). *The Oxford Handbook of Wittgenstein*. Oxford: Oxford University Press, pp. 122-137.

PRIEST, Graham (2004). "Wittgenstein's Remarks on Gödel's Theorem". In: KÖBEL, Max &

WEISS, Bernhard (eds.). *Wittgenstein's Lasting Significance*. London: Routledge, pp. 207-227.
PYM, Anthony (2007). "Philosophy and Translation". In: KUHIWCZK, Piotr & LITTAV, Karin (eds.) *A Companion to Translation Studies*. Clevedon: Multilingual Matters.
RAMSEY, Frank (1931). "The Foundations of Mathematics". In: *The Foundation of Mathematics and Other Logical Essays*. Second impression: 1950. London: Routledge & Kegan Paul. pp. 1-61.
READ, Rupert & LAVERY, Matthew (eds.) (2011). *Beyond the Tractatus Wars. The New Wittgenstein Debate*. London: Routledge.
RODYCH, Victor (1999). "Wittgenstein's Inversion of Gödel's Theorem". In: Erkenntnis 51 (2/3), pp. 173-206.
_____ (2002). "Wittgenstein on Gödel: The Newly Published Remarks". In: Erkenntnis 56 (3), pp. 379-397.
_____ (2003). "Misunderstanding Gödel: New Arguments about Wittgenstein and New Remarks by Wittgenstein". In: Dialectica 57, pp. 279-313.
RUSSELL, Bertrand (1993). Introduction to Mathematical Philosophy. New York: Dover Publications, [1919].
RUSSELL, Bertrand & WHITEHEAD, Alfred (2019). Principia Mathematica. Volume I. Cambridge: Cambridge University Press, [1910].
SANT'ANNA, Adonai (2003). *O Que é um Axioma*. Barueri: Editora Manole.
SCHULTE, Joachim (2012). "Die Revision der englischen Übersetzung von Wittgensteins Philosophischen Untersuchungen: Ein Erfahrungsbericht". In: KROß, M. & RAMHARTER, E. (eds). Wittgenstein übersetzen. Berlin: Parerga, pp.173–194.
SHANKER, Stuart (1987). Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics. New York: State University of New York Press.
_____ (1988). "Wittgenstein's Remarks on the Significance of Gödel's Theorem". In: SHANKER, S. (ed.). Gödel's Theorem in Focus. London: Routledge, pp. 155-256.
_____ (1998). Wittgenstein's Remarks on the Foundations of AI. London: Routledge.
STEINER, Mark (2001). "Wittgenstein as His Own Worst Enemy: The Case of Gödel's Theorem". In: Philosophica Mathematica 9 (3): pp. 257-279.
_____ (2009). "Empirical Regularities in Wittgenstein's Philosophy of Mathematics" Philosophia Mathematica 17 (1): pp. 1-34
STERN, David G. (2006). "How Many Wittgensteins?". In: PICHLER, Alois & SAATELA, Simo (eds.) *Wittgenstein: The Philosopher and His Works*. Working Papers from the Wittgenstein Archives at the University of Bergen, n. 17, pp. 205-229.
TURING, Alan (1937). "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem". In: Proceedings of the London Mathematical Society s2-42, Issue 1, pp. 230-265.
TYMOCZKO, Thomas (1984). "Gödel, Wittgenstein and the Nature of Mathematical Knowledge". In: PSA: *Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association* (2): pp. 449-468.
VENTURINHA, Nuno (2010). "A Re-Evaluation of the Philosophical Investigations". In: VENTURINHA, N. (ed.). Wittgenstein After His Nachlass. London: Palgrave MacMillan, pp. 143-156.
VENUTI, Lawrence (1998). *The Scandals of Translation. Towards an Ethics of Difference*. London: Routledge.
von WRIGHT, George H. (1960). "The Heterological Paradox". In: Societas Scientiarum Fennica. Commentationes Physico-Mathematicae 24 (5), pp. 4-28.

_____ .(1982) "The Origin and Composition of the Philosophical Investigations". In: Wittgenstein. Oxford, Basil Blackwell, pp. 111-136.
_____. (1992). "The Troubled History of Part II of the Investigations". In: Grazer Philosophische Studien 42 (1), pp. 181-192.
_____ (1993). "The Wittgenstein Papers". In: KLAGE, J, & NORDMANN, A. (eds.) Philosophical Occasions. Indianapolis: Hackett Publising Company, pp. 480-506.
_____ (2001). "Vorwort". In: WITTGENSTEIN, L. Philosophische Untersuchungen. Kritisch-genetische Edition. Frankfurt am Main, Suhrkamp, pp. 7-11.
WANG, Hao (1987). *Reflections on Kurt Gödel*. Cambridge, MA: The MIT Press.
_____ (1991). "To and From Philosophy – Discussions with Gödel and Wittgenstein". In: *Synthese* 88 (2): pp. 229–277.
WATSON, Alister (1938). "Mathematics and its Foundations". In: *Mind* (47) 188, pp. 440-451.
WEERNING, Marion (2015). "The Translatability into Italian of the German Stance Marking Modal Particles wohl, eben and ja. Between Epistemicity and Evidentiality". In: *Belgian Journal of Linguistics* 29: pp. 123-145. DOI: https://doi.org/10.1075/bjl.29.06wee .
WILSON, Philip (2015). *Translation After Wittgenstein*. London: Routledge.
WITTGENSTEIN, Ludwig (1966). *Lectures and Conversations on Aesthetics, Psychology & Religious Belief*. Edited by Cyril Barrett. Oxford: Basil Blackwell.
_____ (1967a). *Zettel*. Edited by G. E. M. Anscombe & G. H. von Wright. Oxford: Basil Blackwell.
_____ (1967b). *Friedrich Waismann: Wittgenstein und der Wiener Kreis*. Herausgegeben von B. F. McGuinness. Oxford: Basil Blackwell.
_____ (1969a). *The Blue and Brown Books: Preliminary Studies for the 'Philosophical Investigations'*. Oxford: Basil Blackwell.
_____ (1969b). *Notebooks 1914-1916*. Translated by G. E. M. Anscombe. Oxford: Basil Blackwell.
_____ (1969c). *On Certainty* (*Über Gewissheit*). Translated by Denis Paul and G. E. M. Anscombe. Oxford: Basil Blackwell.
_____ (1969d). *Briefe an Ludwig von Ficker*. Herausgegeben von Georg H. von Wright unter Mitarbeit von Walter Methlagl. Salzburg: Otto Müller Verlag.
_____ (1971). *Osservazioni sopra i Fondamenti della Matematica*. Traduzione di Mario Trinchero. Torino: Giulio Einaudi Editore.
_____ (1973). *Letters to C. K. Ogden*. Edited by G. H. von Wright. Oxford: Basil Blackwell.
_____ (1974). *Philosophical Grammar*. Edited by Rush Rees. Translated by Anthony Kenny. Oxford: Basil Blackwell.
_____ (1975). *Philosophical Remarks*. Edited by Rush Rees. Translated by Raymond Hargreaves & Roger White. Oxford: Basil Blackwell.
_____ (1976). *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*. Cambridge, 1939. Edited by Cora Diamond. Chicago: The University of Chicago Press.
_____ (1978). *Remarks on the Foundations of Mathematics*. Translated by G. E. M. Anscombe. Oxford: Basil Blackwell.
_____ (1979). *Wittgenstein's Lectures. Cambridge, 1932-1935*. From the Notes of Alice Ambrose and Margaret Macdonald. Chicago: The University of Chicago Press.
_____ (1980a). *Wittgenstein's Lectures. Cambridge, 1930-1932*. Edited by Desmond Lee. Oxford: Basil Blackwell.
_____ (1980b). *Remarks on the Philosophy of Psychology*, v. I. Edited by G. E. M. Anscombe & G. H. von Wright. Chicago: The University of Chicago Press.
_____ (1980c). *Remarks on the Philosophy of Psychology*, v. II. Edited by G. H. von Wright &

Heikki Nyman. Chicago: The University of Chicago Press.

______ (1982). *Last Writings on the Philosophy of Psychology*. Volume I. Edited by G. H. von Wright & Heikki Nyman. Translated by C. G. Luckhardt & Maximilian Aue. Oxford: Basil Blackwell.

______ (1983). *Remarques sur les Fondements des Mathématiques*. Traduit de l'allemand par Marie-Anne Lescourret. Paris: Gallimard.

______ (1984). *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Edited by G. H. von Wright, R. Rhees, G. E. M. Anscombe. In: Ludwig Wittgenstein Werkausgabe Band 6. Berlin: Surhkamp.

______ (1987). *Observaciones sobre los Fundamentos de la Matemática*. Traducción de Isidoro Reguera. Madrid: Alianza Universidad.

______ (1988). *Wittgenstein Lectures on Philosophical Psychology 1946-1947*. Edited by Peter Geach. Chicago: The University of Chicago Press.

______ (1992). *Last Writings on the Philosophy of Psychology*. Volume II. Edited by G. H. von Wright & Heikki Nyman. Translated by C. G. Luckhardt & Maximilian Aue. Oxford: Blackwell.

______ (1993a). "A Lecture on Ethics". In: In: KLAGE, J, & NORDMANN, A. (eds.) *Philosophical Occasions*. Indianapolis: Hackett Publising Company, pp. 37-44.

______ (1993b). "Notes for Lectures on Private Experience and Sense Data". In: In: KLAGE, J, & NORDMANN, A. (eds.) *Philosophical Occasions*. Indianapolis: Hackett Publising Company, pp. 200-288.

______ (1997). *Denkbewegungen. Tagebücher 1930-1932, 1936-1937* (MS 183). Herausgegeben von Ilse Somavilla. Innsbruck: Haymon-Verlag.

______ (1998). *Culture and Value* (*Vermischte Bemerkungen*). Translated by Peter Winch, revised text by por Alois Pichler. Oxford: Basil Blackwell.

______ (2000). *Wittgenstein's Nachlass: The Bergen Electronic Edition*. Oxford: Oxford University Press.

______ (2001a). *Tractatus Logico-Philosophicus* (*Logisch-Philosophische Abhandlung*). 3a. edicao. Tradução de Luiz Henrique Lopes dos Santos. Sao Paulo: Edusp.

______ (2001b). *Philosophische Untersuchungen. Kritisch-genetische Edition*. Herausgegeben von Joachim Schulte in Zusammenarbeit mit Heikki Nyman, Eike von Savigny und George Henrik von Wright. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

______ (2003a). *The Voices of Wittgenstein. The Vienna Circle*. Edited by Gordon Baker. London: Routledge.

______ (2003b). *Public and Private Occasions*. Edited by James C. Klagge & Alfred Nordmann. Lanham: Rowman & Littlefield Publishers.

______ (2005). *The Big Typescript (TS 213)*. Edited and translated by LUCKHARDT, C. Grant & AUE, Maximilian A. E. Oxford: Blackwell.

______ (2008). *Wittgenstein in Cambridge: Letters and Documents 1911-1951*. Edited by Brian McGuinness. London: Blackwell Publishing.

______ (2009a). *Philosophical Investigations/ Philosophische Untersuchungen*. Revised fourth edition by P. M. S. Hacker & Joachim Schulte. Oxford: Wiley-Blackwell.

______ (2009b). *Anotações Sobre as Cores*. Tradução de João Carlos Salles Pires da Silva. Campinas: Editora da Unicamp.

______ (2011). *Observações sobre "O Ramo Dourado" de Frazer*. Tradução e notas de João José de Almeida, revisão de Nuno Venturinha, coordenação de Bruno Monteiro. Porto: Deriva Editores.

______ (2016). *Wittgenstein Lectures, Cambridge 1930-1933*. From the Notes of G. E. Moore. Edited by David Stern, Brian Rogers, and Gabriel Citron. Cambridge: Cambridge University Press.

______ (2017). *Wittgenstein's Whewell's Court Lectures. Cambridge, 1938-1941*. From the Notes by Yorick Smythies. Edited, Introduced and Annotated by Volker Munz & Bernhard Ritter. Oxford: Wiley Blackwell.

REGISTER

C

D

E

F

G

L

M

N

O

P

R

S

T

U

V

W

ÍNDICE ANALÍTICO

D

E

Q

R

S

T

U

V