FUNDAMENTOS DE ENERGIA ELÉCTRICA

CONCEITOS BÁSICOS

ENERGIA E POTÊNCIA

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$W = \int P\,dt$$

W - energia,
P - potência
t - tempo.

Unidades do Sistema Internacional

Potência – watt (W)

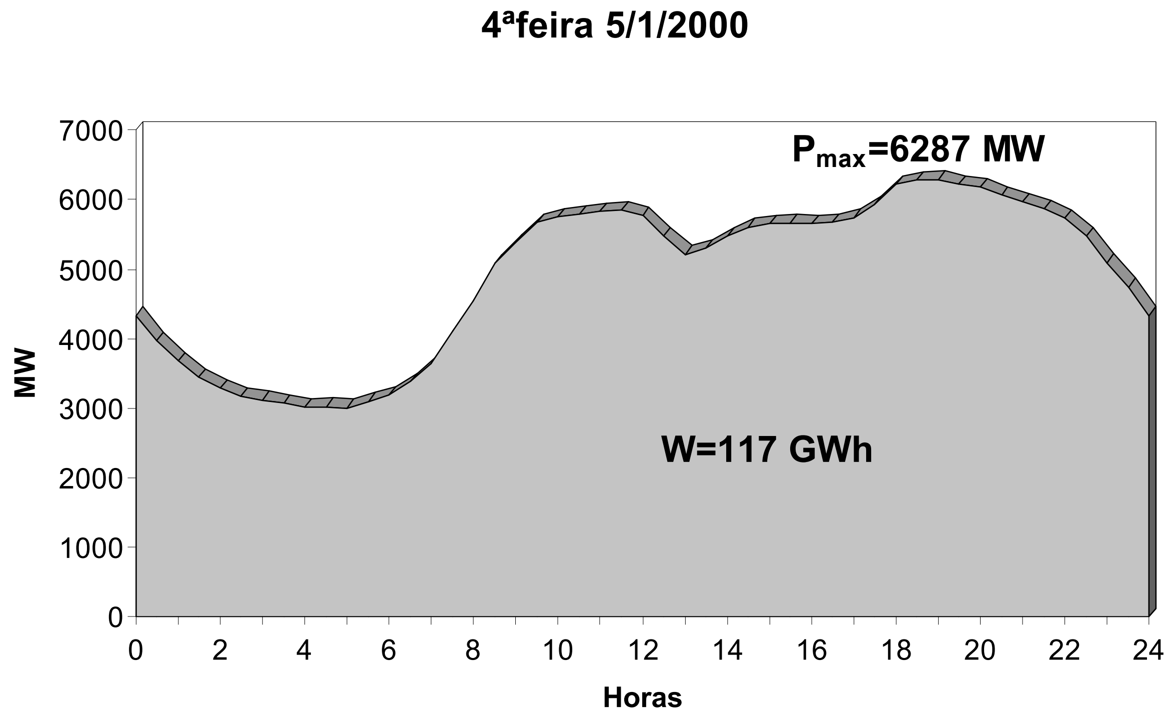
Energia – joule (J)

Unidades usadas na prática

Potência – quilowatt (kW), megawatt (MW), gigawatt (GW), terawatt (TW)

Energia – quilowatt.hora (kWh)=3,6x10^6 J, megawatt.hora (MWh), gigawatt.hora (GWh), terawatt.hora (TWh)

DIAGRAMA DE CARGA



UTILIZAÇÃO DA PONTA
FACTOR DE CARGA

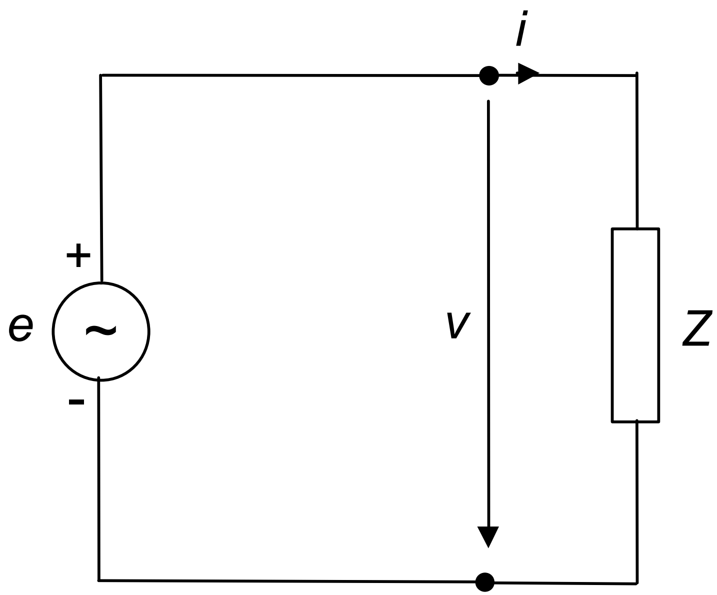
Para um diagrama de carga, define-se:

Utilização diária da ponta: relação entre a energia e a potência máxima

***Factor de carga diário**:* relação entre a potência média e a potência máxima.

Estas grandezas também podem ser definidas para outros períodos de tempo, por exemplo, o ano: ***utilização anual da ponta*** e ***factor de carga anual***.

SISTEMA MONOFÁSICO EM CORRENTE ALTERNADA (1)



Tensão $v = \sqrt{2}\, V \sin w\, t$

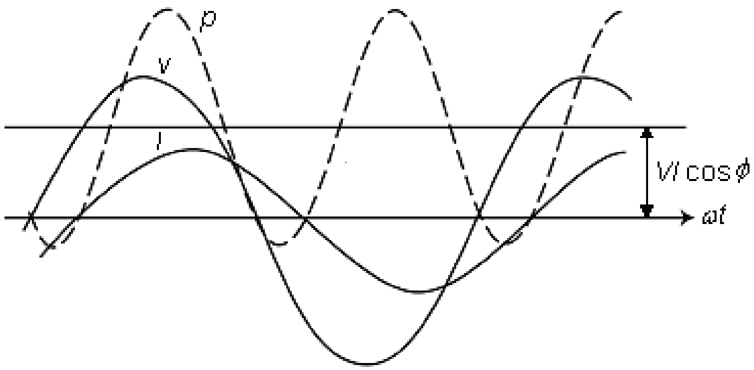
Corrente $i = \sqrt{2}\, I \sin\left(w\, t - f\right)$

$$w = 2p\, f$$

Potência

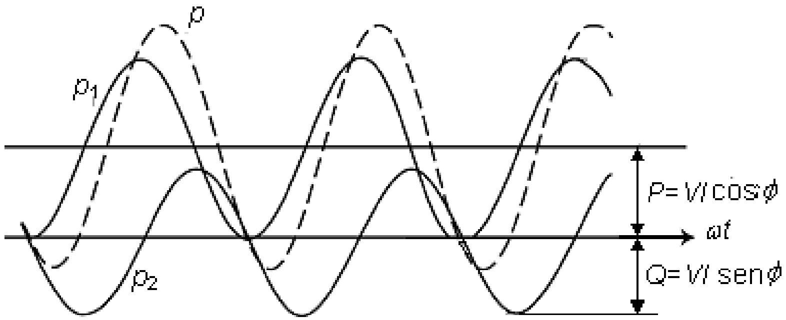
$$p = v\, i = 2\, V\, I \sin w\, t\, \sin\left(w\, t - f\right)$$
$$= V\, I \cos f - V\, I \cos\left(2wt - f\right)$$

SISTEMA MONOFÁSICO EM CORRENTE ALTERNADA (2)



a

$$p = v\ i = 2\,V\ I \sin w\ t\ \sin\left(w\,t - f\right)$$
$$= V\ I \cos f - V\ I \cos\left(2wt - f\right)$$



b

$$p = \underbrace{V\ I \cos f\ \left(1 - \cos 2w\,t\right)}_{p_1} - \underbrace{V\ I \sin f\ \sin 2w\,t}_{p_2}$$

POTÊNCIA ACTIVA E REACTIVA

Potência activa (W, kW, MW) $P = V\ I \cos f$

Potência reactiva (var, kvar, Mvar) $Q = V\ I \sin f$

Factor de potência $\cos f$

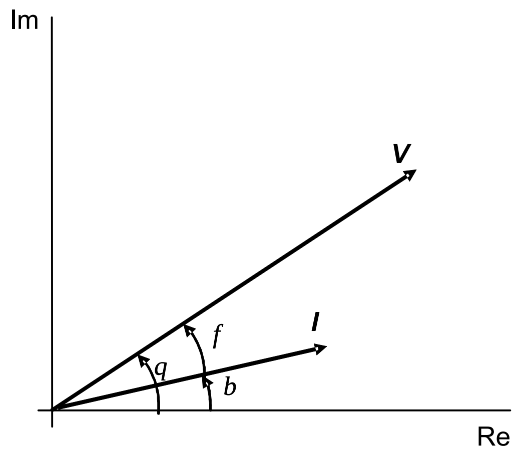
A potência instantânea escreve-se então:

$$p = P\ (1 - \cos 2w\, t) - Q\ \sin\ 2w\, t$$

POTÊNCIA COMPLEXA E APARENTE

Em notação simbólica: $\boldsymbol{V} = V\, e^{jq} \qquad \boldsymbol{I} = I\, e^{jb}$

Potência complexa:



$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{V}\, \boldsymbol{I}^*$$

$$\boldsymbol{S} = V\, e^{jq} \;\; I\, e^{-jb} = V\, I\, e^{j(q-b)} = V\, I\, e^{jf}$$

$$= V\, I \cos f + j V\, I \sin f$$

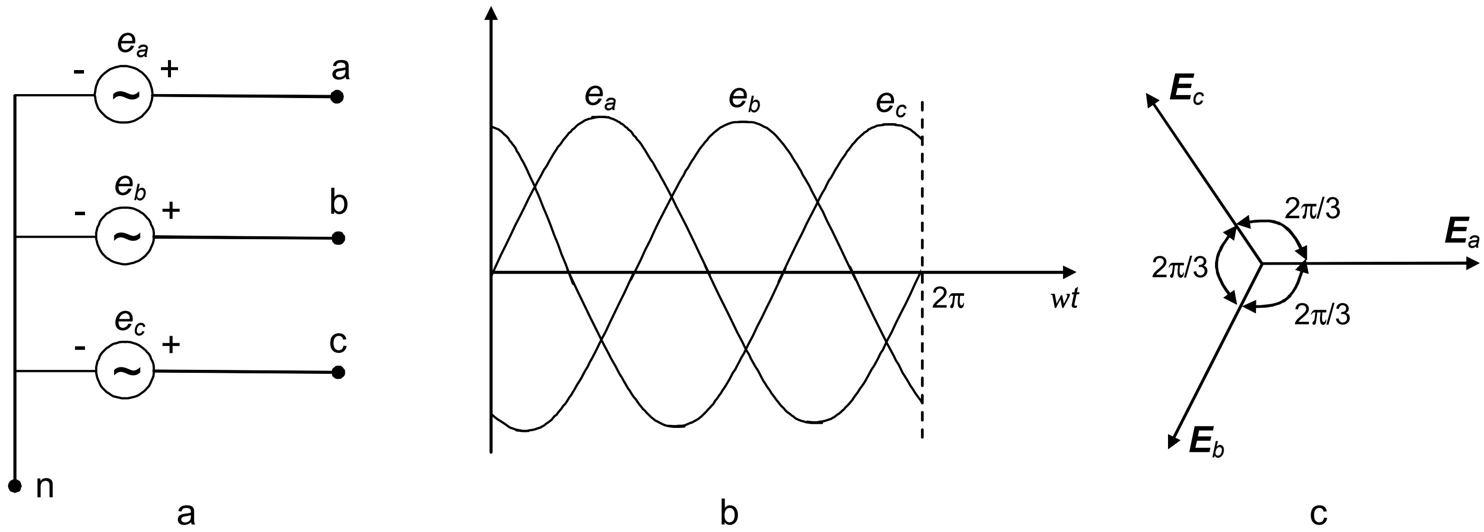
$$\boldsymbol{S} = P + j\, Q$$

Potência aparente (VA, kVA, MVA):

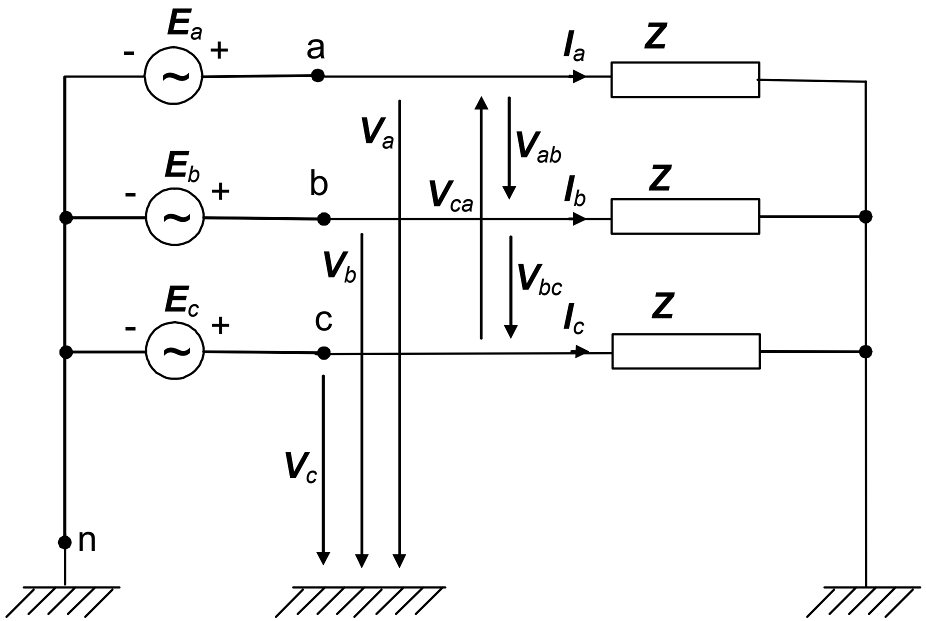
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = V\, I$$

GERADOR TRIFÁSICO

a) Esquema equivalente.
b) Variação no tempo das f.e.m..
c) Diagrama de fasores.



SISTEMA TRIFÁSICO SIMÉTRICO



$$v_a = \sqrt{2}\, V \sin w\, t$$

$$v_b = \sqrt{2}\, V \sin (w\, t - 2p/3)$$

$$v_c = \sqrt{2}\, V \sin (w\, t + 2p/3)$$

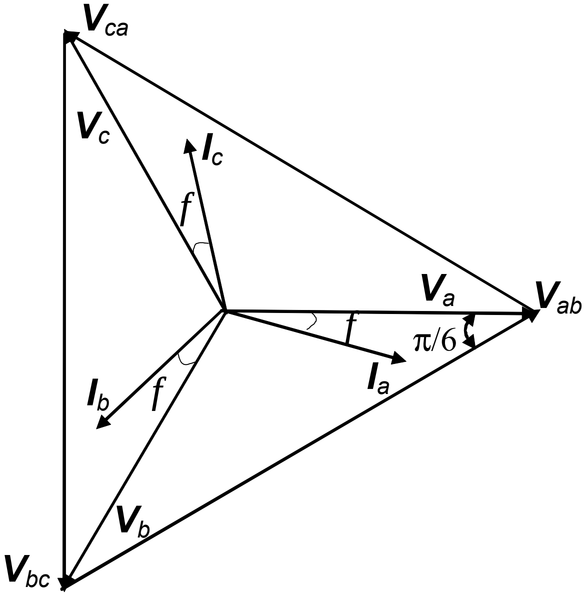
Em notação simbólica

$$\boldsymbol{V}_a = V\, e^{j0}$$

$$\boldsymbol{V}_b = V\, e^{-j2p/3}$$

$$\boldsymbol{V}_c = V\, e^{j2p/3}$$

TENSÕES FASE-NEUTRO E FASE-FASE



$$\boldsymbol{V}_{ab} = \boldsymbol{V}_a - \boldsymbol{V}_b$$
$$\boldsymbol{V}_{bc} = \boldsymbol{V}_b - \boldsymbol{V}_c$$
$$\boldsymbol{V}_{ca} = \boldsymbol{V}_c - \boldsymbol{V}_a$$

$$V_L = V_{ab} = V_{bc} = V_{ca} = 2V\cos p/6$$
$$= \sqrt{3}\,V$$

$$\boldsymbol{I}_a = I\,e^{-jf}$$
$$\boldsymbol{I}_b = I\,e^{-j(2p/3+f)}$$
$$\boldsymbol{I}_c = I\,e^{-j(-2p/3+f)}$$

POTÊNCIA ACTIVA E REACTIVA

Potência instantânea:

$$p = v_a\, i_a + v_b\, i_b + v_c\, i_c = 3VI \cos f = P$$

A potência instantânea é igual à potência activa!

Usando a tensão fase-fase:

$$P = \sqrt{3}\, V_L\, I \cos f$$

Potência reactiva:

$$Q = 3\, V\, I \,\text{sen}\, f$$
$$= \sqrt{3}\, V_L\, I \sin f$$

POTÊNCIA COMPLEXA E APARENTE

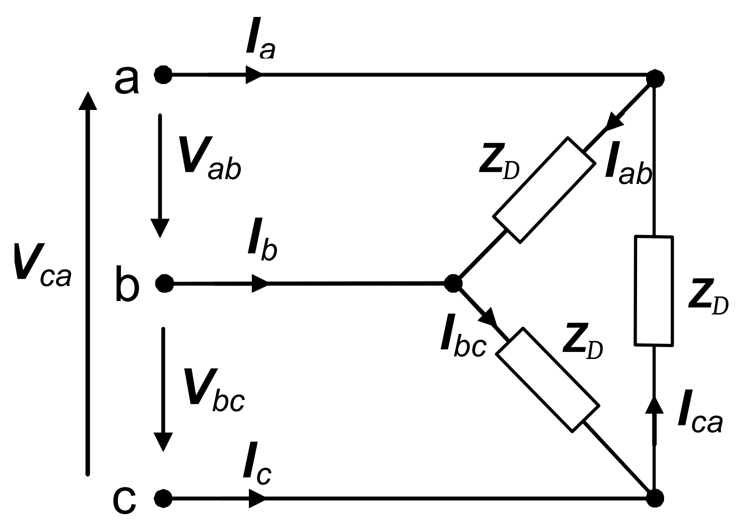
Potência complexa:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} &= 3\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{I}^* \\ &= \sqrt{3}\,V_L\,I\cos f + j\sqrt{3}\,V_L\,I\,\mathrm{sen}\,f \\ &= P + jQ \end{aligned}$$

Potência aparente:

$$\mathrm{S} = \sqrt{3}\,V_L\,I = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

CARGA LIGADA EM TRIÂNGULO



$$I_{ab} = \frac{V_{ab}}{Z_D}$$

$$I_{ca} = \frac{V_{ca}}{Z_D}$$

$$I_a = \frac{V_{ab} - V_{ca}}{Z_D} = \frac{3V_a}{Z_D}$$

VALORES POR UNIDADE (1)

- Os SEE contêm numerosos transformadores, que complicam apreciavelmente a análise. Os valores p.u. permitem eliminar do modelo do transformador a parte referente à relação de transformação (ou seja, o transformador ideal).

- A existência de transformadores implica a partição do SEE em áreas com diferentes níveis de tensão. Uma tensão expressa em valores por unidade – por exemplo 0,95 p.u. ou 1,08 p.u. – indica imediatamente que ela está 5% abaixo ou 8% acima do valor nominal (tomado como referência), que é 1,0 p.u.

VALORES POR UNIDADE (2)

- Os parâmetros característicos dos componentes do SEE, que variam substancialmente em dimensão, expressos em p.u., caem dentro de determinadas gamas de valores, que se podem identificar como normais, o que facilita a detecção de erros.
- O uso do factor $\sqrt{3}$ em sistemas trifásicos é consideravelmente reduzido.
- Os valores p.u. situam-se frequentemente em torno da unidade, valor próximo do óptimo para o cálculo digital e para a apresentação de dados.

VALORES POR UNIDADE (3)

$$\text{valor p.u.} = \frac{\text{valor da grandeza}}{\text{valor de base}}$$

- O valor de base é um número real, escolhido de forma a obter as vantagens do sistema p.u. O valor por unidade é uma quantidade adimensional, um fasor ou número complexo, ou um valor instantâneo.

VALORES POR UNIDADE
Sistema Monofásico (1)

Base postulada:

- Tensão (kV) V_b
- Potência (MVA) S_b

Base derivada:

- Corrente (kA) $I_b = \dfrac{S_b}{V_b}$
- Impedância (Ω) $Z_b = \dfrac{V_b}{I_b} = \dfrac{V_b^2}{S_b}$
- Admitância (S) $Y_b = \dfrac{I_b}{V_b} = \dfrac{S_b}{V_b^2}$

VALORES POR UNIDADE
Sistema Monofásico (2)

$$\boldsymbol{V}_{pu} = \frac{\boldsymbol{V}}{V_{\mathrm{b}}} \qquad \boldsymbol{I}_{pu} = \frac{\boldsymbol{I}}{I_b}$$

$$\boldsymbol{S}_{pu} = \frac{\boldsymbol{S}}{S_b} = \frac{\boldsymbol{V}\ \boldsymbol{I}^*}{V_b\ I_b} = \boldsymbol{V}_{pu}\ \boldsymbol{I}_{pu}^*$$

$$\boldsymbol{Z}_{pu} = \frac{\boldsymbol{Z}}{Z_b} = \boldsymbol{Z}\ \frac{S_b}{V_b^2} \qquad \boldsymbol{Y}_{pu} = \frac{\boldsymbol{Y}}{Y_b} = \boldsymbol{Y}\ \frac{V_b^2}{S_b}$$

Conversão de base:

$$\boldsymbol{Z}''_{pu} = \boldsymbol{Z}'_{pu}\ \frac{S''_b}{S'_b}\ \frac{V'^2_b}{V''^2_b} \qquad \boldsymbol{Y}''_{pu} = \boldsymbol{Y}'_{pu}\ \frac{S'_b}{S''_b}\ \frac{V''^2_b}{V'^2_b}$$

VALORES POR UNIDADE
Sistema Trifásico (1)

Para sistemas trifásicos, toma-se para base a potência aparente trifásica S_b e a tensão entre fases V_b.

$$S_b = \sqrt{3}\, V_b\, I_b \qquad\qquad I_b = \frac{S_b}{\sqrt{3}\, V_b}$$

Impedância de base:

$$Z_b = \frac{V_b}{\sqrt{3}\, I_b} = \frac{V_b}{\sqrt{3}\, \dfrac{S_b}{\sqrt{3}\, V_b}} = \frac{V_b^2}{S_b}$$

VALORES POR UNIDADE
Sistema Trifásico (2)

Tensão e corrente:

$$\boldsymbol{V}_{pu} = \frac{\sqrt{3}\,\boldsymbol{V}}{V_b} \qquad\qquad \boldsymbol{I}_{pu} = \frac{\boldsymbol{I}}{I_b}$$

Potência complexa:

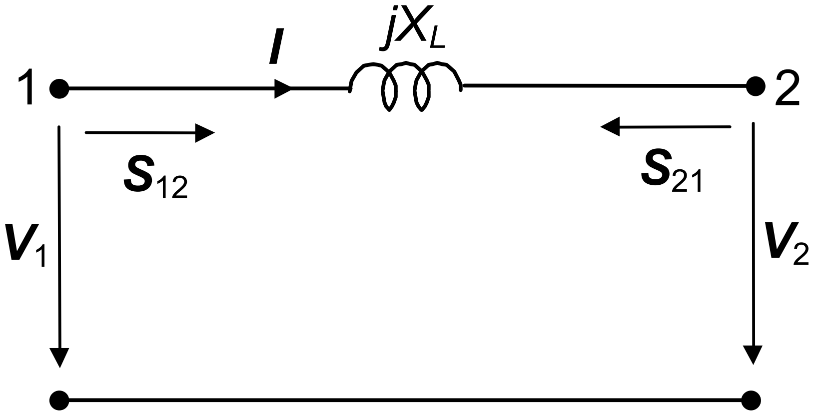
$$\boldsymbol{S}_{pu} = \frac{\boldsymbol{S}}{S_b} = \frac{3\,\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{I}^*}{\sqrt{3}\;V_b\;I_b} = \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{3}\,\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{I}^*}{\sqrt{3}\;V_b\;I_b} = \boldsymbol{V}_{pu}\;\boldsymbol{I}^*_{pu}$$

Impedância e admitância:

$$\boldsymbol{Z}_{pu} = \frac{\boldsymbol{Z}}{Z_b} = \boldsymbol{Z}\;\frac{S_b}{V_b^2} \qquad\qquad \boldsymbol{Y}_{pu} = \frac{\boldsymbol{Y}}{Y_b} = \boldsymbol{Y}\;\frac{V_b^2}{S_b}$$

As expressões da corrente, potência, impedância e admitância são iguais às de um sistema monofásico.

TRANSMISSÃO DE ENERGIA EM CORRENTE ALTERNADA (1)



$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2}{j\,X_L}$$

$$\boldsymbol{S}_{12} = \boldsymbol{V}_1\,\boldsymbol{I}^* = \boldsymbol{V}_1\,\frac{\boldsymbol{V}_1^* - \boldsymbol{V}_2^*}{-\,j\,X_L} = \frac{V_1^2 - \boldsymbol{V}_1\boldsymbol{V}_2^*}{-\,j\,X_L}$$

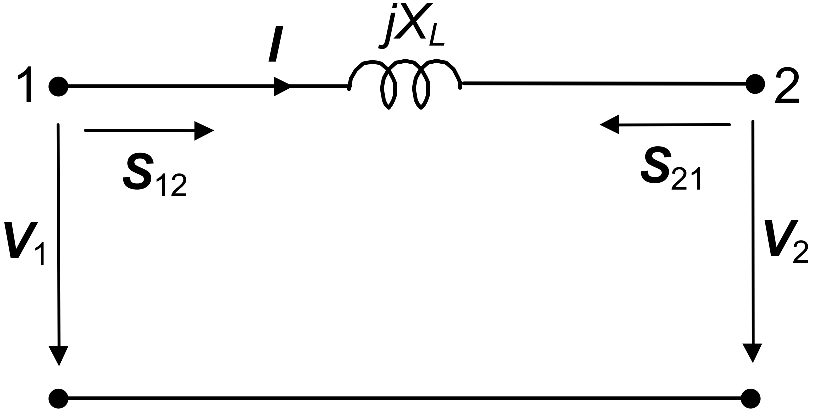
$$\boldsymbol{V}_1 = V_1\;e^{jq_1}$$

$$\boldsymbol{V}_2 = V_2\;e^{jq_2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V}_1\;\boldsymbol{V}_2^* = V_1\;V_2\;e^{j(q_1 - q_2)}$$
$$= V_1\;V_2\;e^{jq}$$

TRANSMISSÃO DE ENERGIA EM CORRENTE ALTERNADA (2)



$$\boldsymbol{S}_{12} = j\,\frac{V_1^2 - V_1\,V_2\,(\cos q + j\,\sin q\,)}{X_L}$$

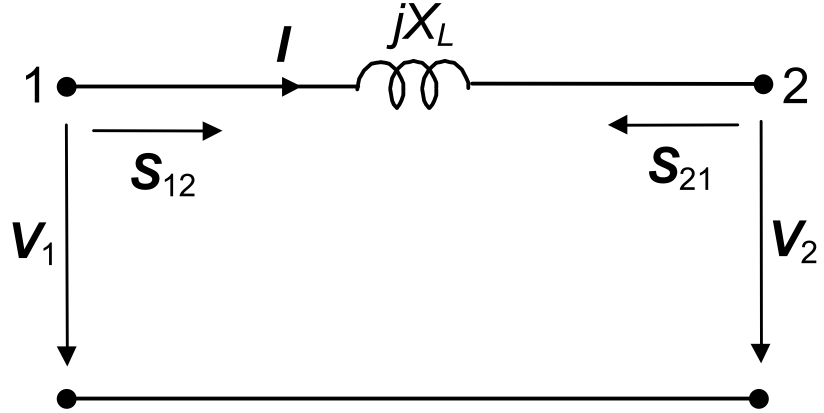
$$= \frac{V_1\,V_2\,\sin q}{X_L} + j\,\frac{V_1^2 - V_1\,V_2\,\cos q}{X_L}$$

$$\Rightarrow$$

$$P_{12} = \frac{V_1\,V_2}{X_L}\sin q$$

$$Q_{12} = \frac{V_1^2 - V_1\,V_2\,\cos q}{X_L}$$

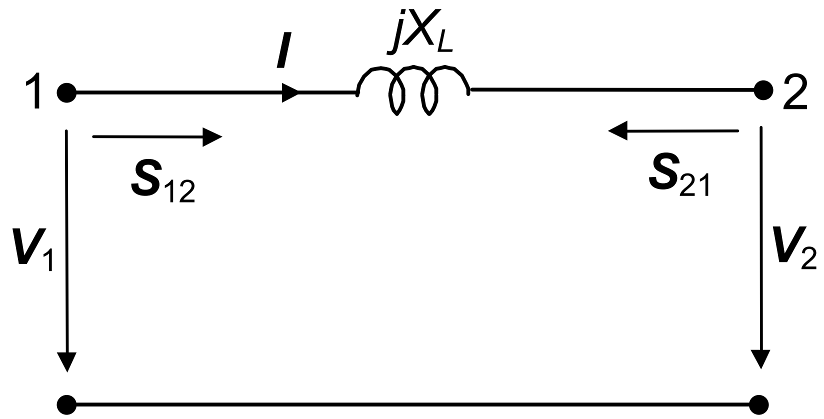
TRANSMISSÃO DE ENERGIA EM CORRENTE ALTERNADA (3)



$$P_{12} = \frac{V_1\, V_2}{X_L} \sin q \qquad P_{21} = -\frac{V_1\, V_2}{X_L} \sin q$$

$$Q_{12} = \frac{V_1^2 - V_1\, V_2\, \cos q}{X_L} \qquad Q_{21} = \frac{V_2^2 - V_1\, V_2\, \cos q}{X_L}$$

TRANSMISSÃO DE ENERGIA EM CORRENTE ALTERNADA (4)



$$P_{12} = \frac{V_1 V_2}{X_L} \sin q$$

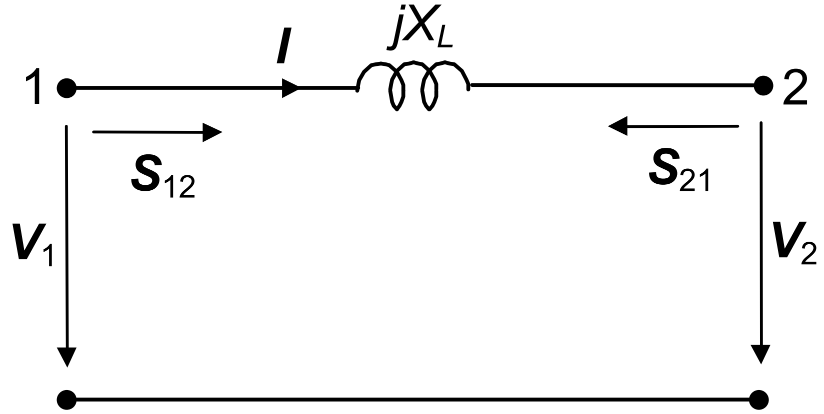
$$P_{21} = -\frac{V_1 V_2}{X_L} \sin q$$

$\Rightarrow$

$$P_L = P_{12} + P_{21} = 0$$

Perdas de potência activa são nulas porque não há resistência

TRANSMISSÃO DE ENERGIA EM CORRENTE ALTERNADA (5)



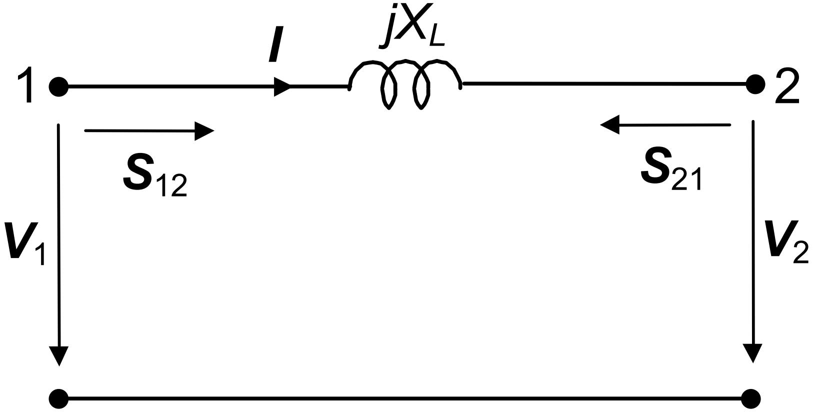
$$Q_{12} = \frac{V_1^2 - V_1 V_2 \cos q}{X_L}$$

$$Q_{12} = \frac{V_1^2 - V_1 V_2 \cos q}{X_L}$$

$$\Rightarrow \quad Q_L = Q_{12} + Q_{21} = \frac{V_1^2 + V_2^2 - 2 V_1 V_2 \cos q}{X_L}$$

Perdas de potência reactiva são não nulas

TRANSMISSÃO DE ENERGIA EM CORRENTE ALTERNADA (6)



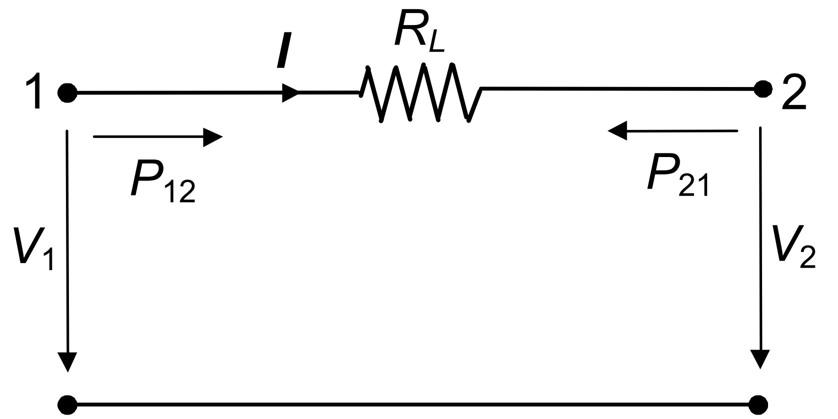
Sendo $V_1 = V_2 = V_n$ (tensão nominal):

$$Q_L = \frac{2V_n^2(1-\cos\theta)}{X_L}$$

Em alternativa:

$$I = \frac{|\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2|}{X_L} = \frac{V_n}{X_L}\left|e^{j\theta_1} - e^{j\theta_2}\right| = \frac{V_n}{X_L}\left[2(1-\cos\theta)\right]^{1/2} \qquad Q_L = I^2 X_L = \frac{2V_n^2(1-\cos\theta)}{X_L}$$

TRANSMISSÃO DE ENERGIA EM CORRENTE CONTÍNUA



$$I = \frac{V_1 - V_2}{R_L}$$

$$P_{12} = V_1 \, I = \frac{V_1^2 - V_1 V_2}{R_L}$$

$$P_{21} = -V_2 \, I = \frac{V_2^2 - V_1 V_2}{R_L}$$

$$\Rightarrow$$

$$P_L = P_{12} + P_{21} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R_L} = R_L I^2$$

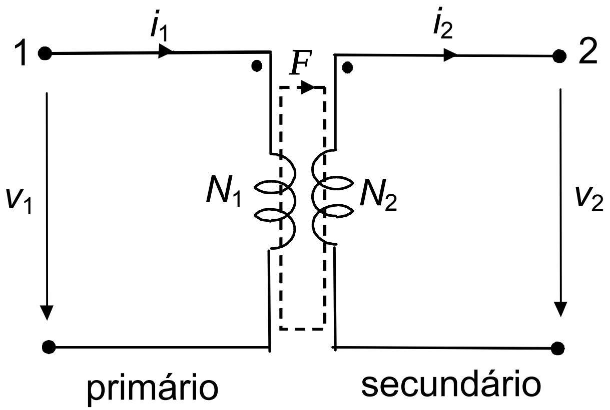
$$P_{med} = \frac{P_{12} - P_{21}}{2} = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2 R_L}$$

FUNDAMENTOS DE ENERGIA ELÉCTRICA

TRANSFORMADOR

TRANSFORMADOR IDEAL (1)

Transformador ideal : não há perdas nem fluxo de dispersão

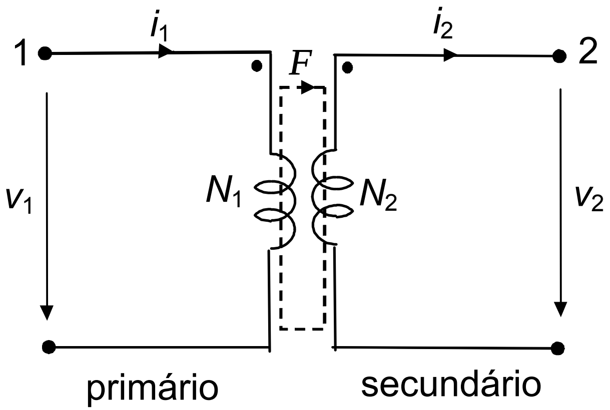


$$v_1 = \frac{d\, l_1}{dt}$$ Lei de Faraday

$$l_1 = N_1 F \Longrightarrow v_1 = N_1 \frac{dF}{dt}$$

$$l_2 = N_2 F \Longrightarrow v_2 = \frac{d\, l_2}{dt} = N_2 \frac{dF}{d\,t}$$

TRANSFORMADOR IDEAL (2)



Em regime permanente (50 Hz), usando a notação simbólica

$$\boldsymbol{V}_1 = jw\,N_1 F$$

$$\boldsymbol{V}_2 = jw\,N_2 F$$

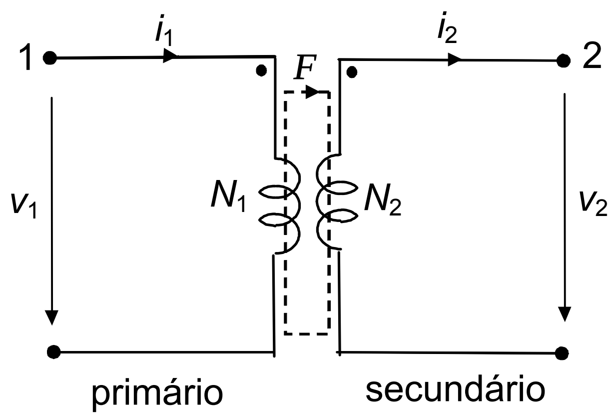
$$\Longrightarrow \quad \frac{\boldsymbol{V}_1}{\boldsymbol{V}_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Transformador em carga

$$\boldsymbol{V}_1\,\boldsymbol{I}_1^* = \boldsymbol{V}_2\,\boldsymbol{I}_2^* \quad \Longrightarrow \quad \frac{\boldsymbol{I}_1^*}{\boldsymbol{I}_2^*} = \frac{\boldsymbol{V}_2}{\boldsymbol{V}_1}$$

$$\frac{\boldsymbol{I}_1}{\boldsymbol{I}_2} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

TRANSFORMADOR IDEAL (3)



Relação de transformação

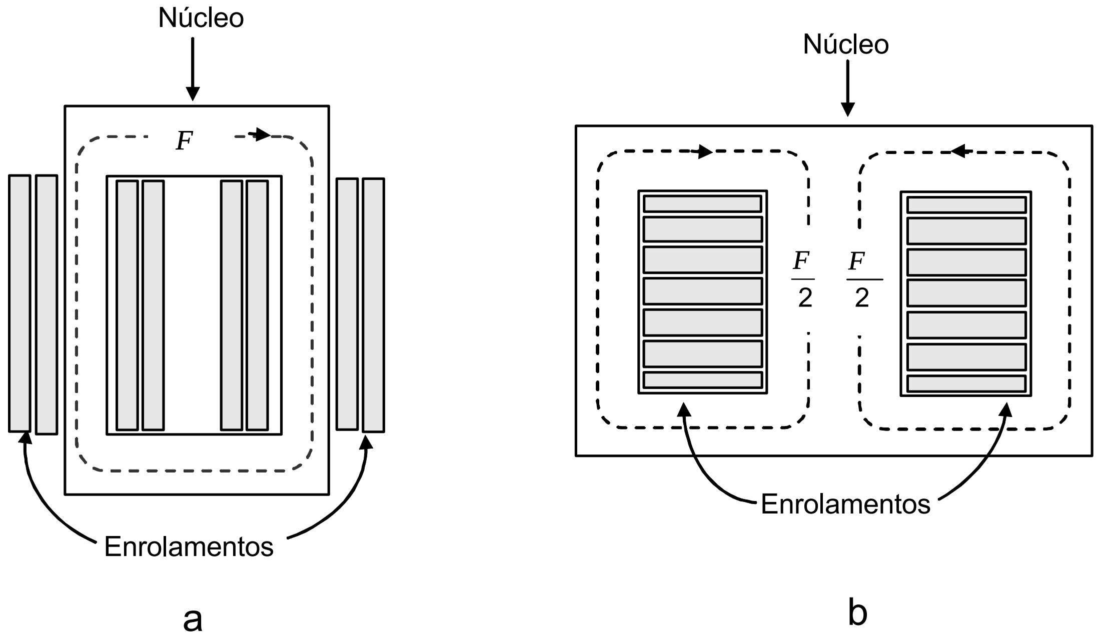
$$m = \frac{N_1}{N_2} = \frac{V_{n1}}{V_{n2}} \qquad \text{kV/kV}$$

Em p.u., tomando para tensões de base, do lado primário e do secundário, as respectivas tensões nominais

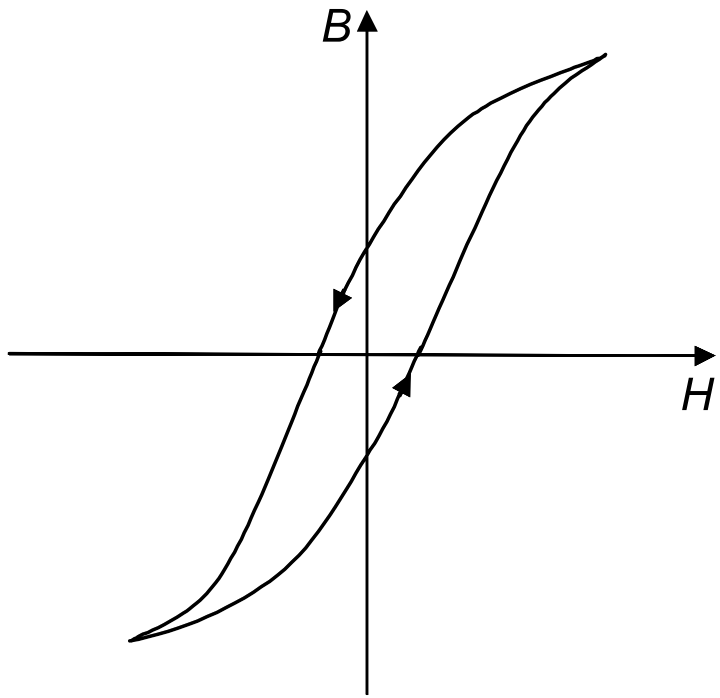
$$m = \frac{V_{n1_{pu}}}{V_{n2_{pu}}} = \frac{V_{n1}}{V_{b1}} \frac{V_{b2}}{V_{n2}} = 1{,}0 \ \text{ p.u.}$$

TIPOS CONSTRUTIVOS DO TRANSFORMADOR (Monofásico):

a) Tipo *core* b) Tipo *shell*

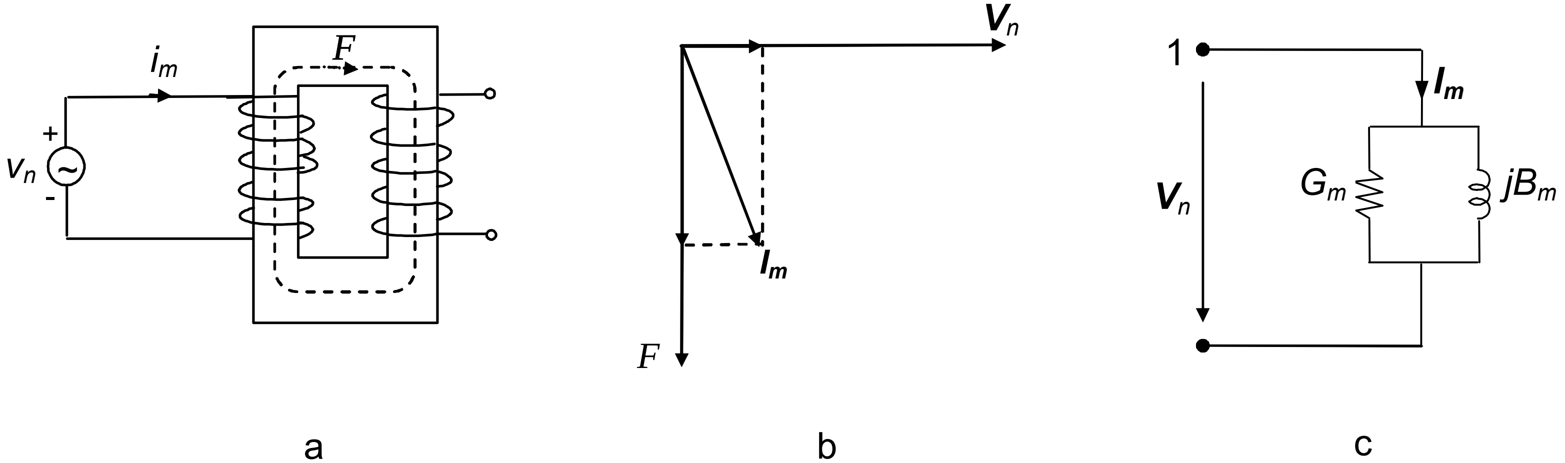


CARACTERÍSTICA MAGNÉTICA DO NÚCLEO DO TRANSFORMADOR



TRANSFORMADOR EM VAZIO:

a) Esquema de ligações
b) Diagrama de fasores da tensão e corrente
c) Esquema equivalente

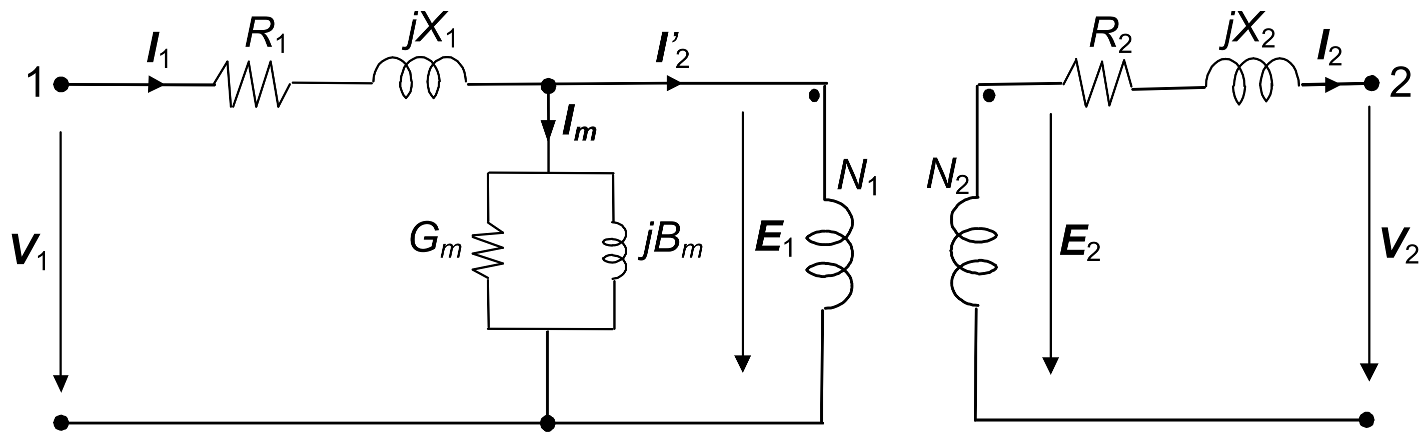


Parâmetros do esquema equivalente

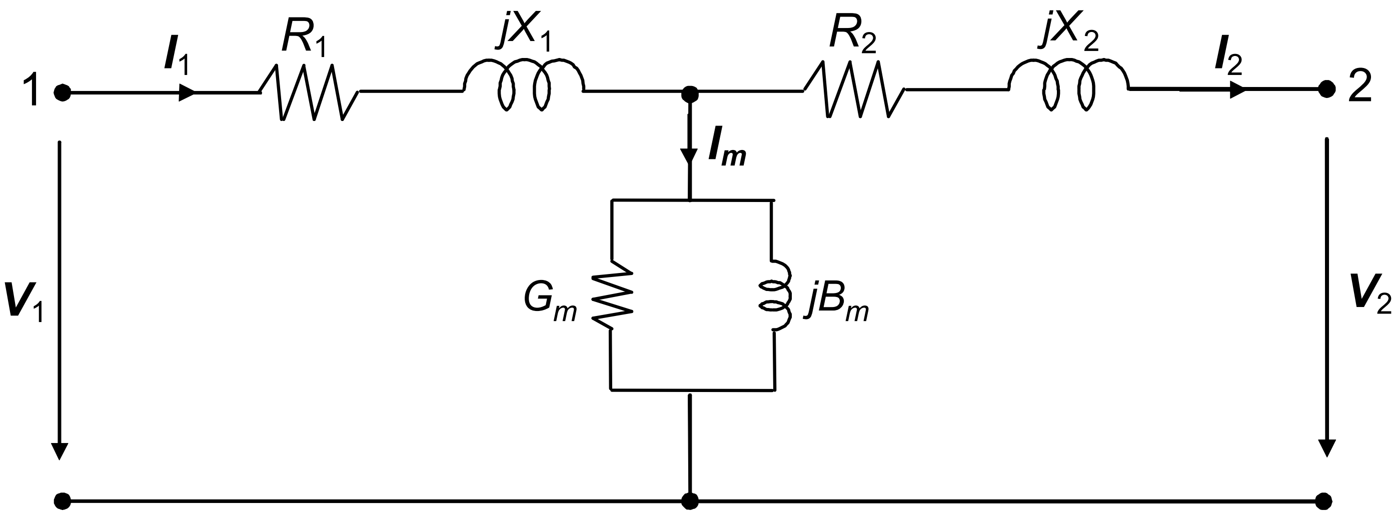
$$G_m = \frac{P_0}{V_n^2} \qquad \sqrt{G_m^2 + B_m^2} = \frac{I_m}{V_n} \Longrightarrow B_m = -\sqrt{\frac{I_m^2}{V_n^2} - G_m^2}$$

Corrente de magnetização: 0,5-3% da corrente nominal
Perdas em vazio: 0,1-0,5% da potência nominal

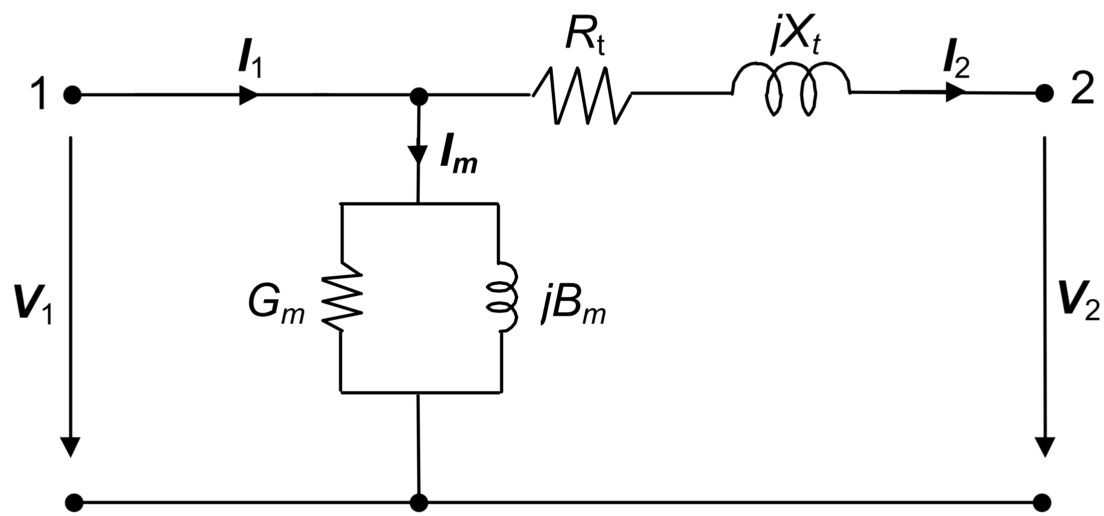
PRIMEIRO ESQUEMA EQUIVALENTE DO TRANSFORMADOR



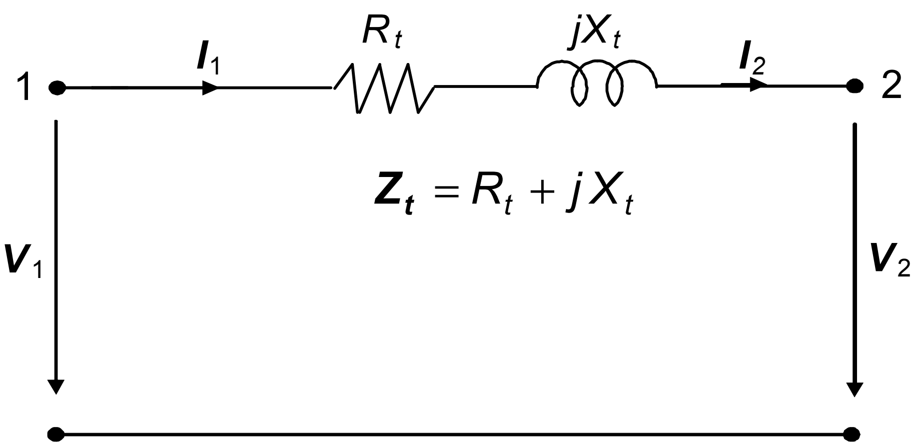
ESQUEMAS EQUIVALENTES EM *T* DO TRANSFORMADOR (Valores p.u.)



ESQUEMA EQUIVALENTE EM *L* DO TRANSFORMADOR



ESQUEMA EQUIVALENTE APROXIMADO DO TRANSFORMADOR

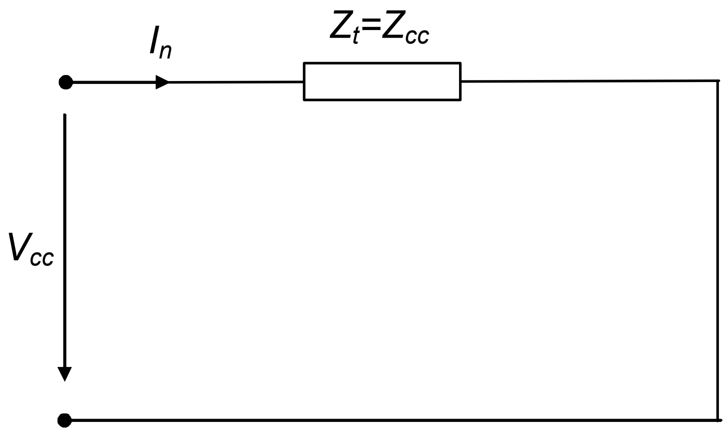


$$\boldsymbol{Z_t} = R_t + jX_t$$

$$\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_2 + \boldsymbol{Z_t}\,\boldsymbol{I}$$

TRANSFORMADOR EM CURTO-CIRCUITO



$$V_{cc} = Z_{cc} I_n$$

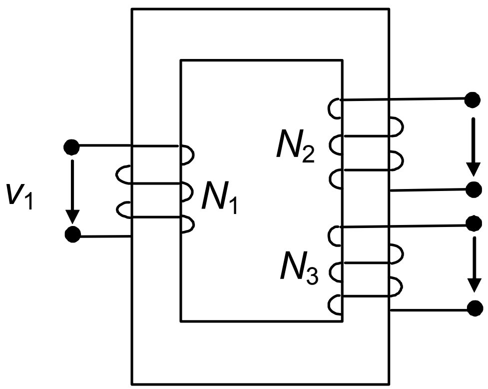
$$I_n = 1{,}0$$

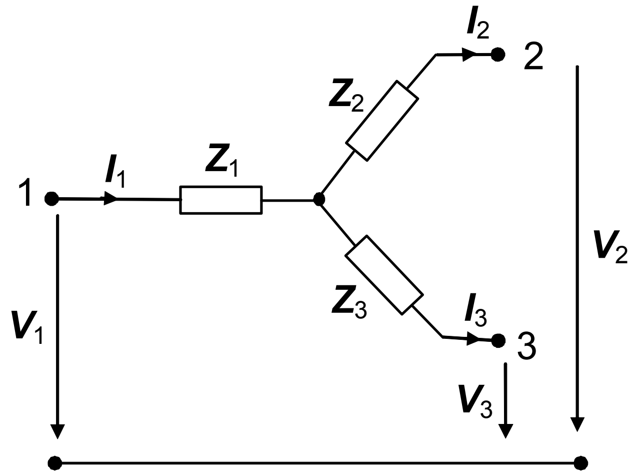
$$\Rightarrow \quad Z_{cc} = V_{cc}$$

Em valores p.u., a tensão e a impedância de curto-circuito do transformador têm o mesmo valor

$$Z_{cc} = \sqrt{R_t^2 + X_t^2} = \frac{V_{cc}}{I_n} \qquad R_t = \frac{P_{cc}}{I_n^2} \qquad X_t = \sqrt{Z_{cc}^2 - R_t^2}$$

TRANSFORMADOR COM 3 ENROLAMENTOS





$$\begin{cases} Z_{12} = Z_1 + Z_2 \\ Z_{13} = Z_1 + Z_3 \\ Z_{23} = Z_2 + Z_3 \end{cases}$$

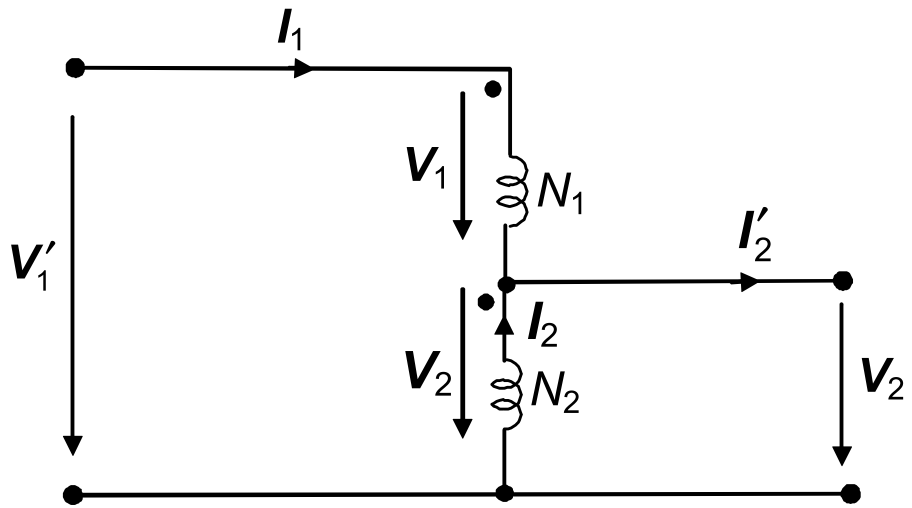
$$Z_1 = \frac{Z_{12} + Z_{13} - Z_{23}}{2}$$

$$Z_2 = \frac{Z_{12} + Z_{23} - Z_{13}}{2}$$

$$Z_3 = \frac{Z_{13} + Z_{23} - Z_{12}}{2}$$

AUTOTRANSFORMADOR

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = m \qquad \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{m}$$



$$\frac{V_1'}{V_2} = \frac{V_1 + V_2}{V_2} = \frac{V_1}{V_2} + 1 = m + 1$$

$$\frac{I_1}{I_2'} = \frac{I_1}{I_2 + I_2} = \frac{1}{1 + \frac{I_2}{I_1}} \frac{V_1}{I_2} = \frac{1}{m+1}$$

$$S_1' = V_1' I_1 = (V_1 + V_2) I_1 = V_1 \, I_1 \, \frac{m+1}{m}$$

$$= S_1 \frac{m+1}{m}$$

$$S_2' = V_2 \, I_2' = V_2 (I_1 + I_2) = V_2 \, I_2 \, \frac{m+1}{m}$$

$$= S_2 \frac{m+1}{m}$$

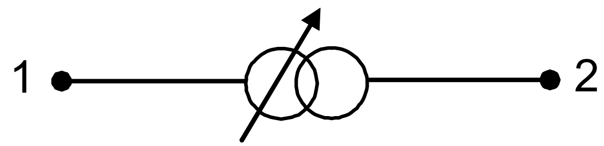
TRANSFORMADOR COM REGULAÇÃO DE TENSÃO
a) Esquema unifilar
b) Esquema monofásico equivalente

$$m = \frac{V_{1n} \pm DV_1}{V_{2n}}$$ Relação de transformação variável

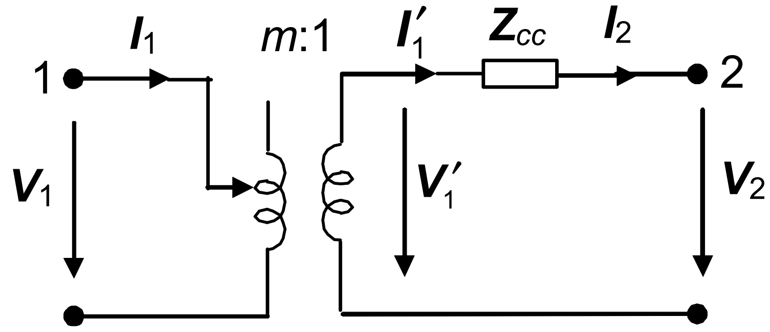
Em valores p.u. $m = 1 \pm DV_1$

$$\frac{\boldsymbol{V}_1}{\boldsymbol{V}_1'} = m \qquad \frac{\boldsymbol{I}_1}{\boldsymbol{I}_1'} = \frac{1}{m}$$

$$\boldsymbol{I}_1' = \boldsymbol{I}_2$$



a



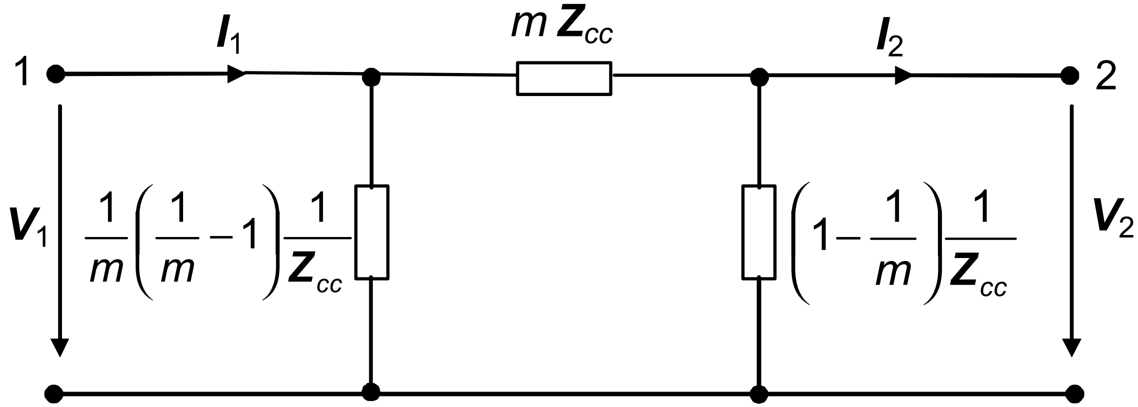
b

$$\boldsymbol{V}_1' = \boldsymbol{V}_2 + \boldsymbol{Z}_{cc}\boldsymbol{I}_2$$

$$\boldsymbol{V}_1 = m\left(\boldsymbol{V}_2 + \boldsymbol{Z}_{cc}\boldsymbol{I}_2\right)$$

$$\boldsymbol{I}_1 = \frac{\boldsymbol{I}_2}{m}$$

ESQUEMA EQUIVALENTE EM p DO TRANSFORMADOR COM REGULAÇÃO DE TENSÃO



$$V_1 = \left[V_2 \left(1 - \frac{1}{m}\right)\frac{1}{Z_{cc}} + I_2 \right] m Z_{cc} + V_2$$

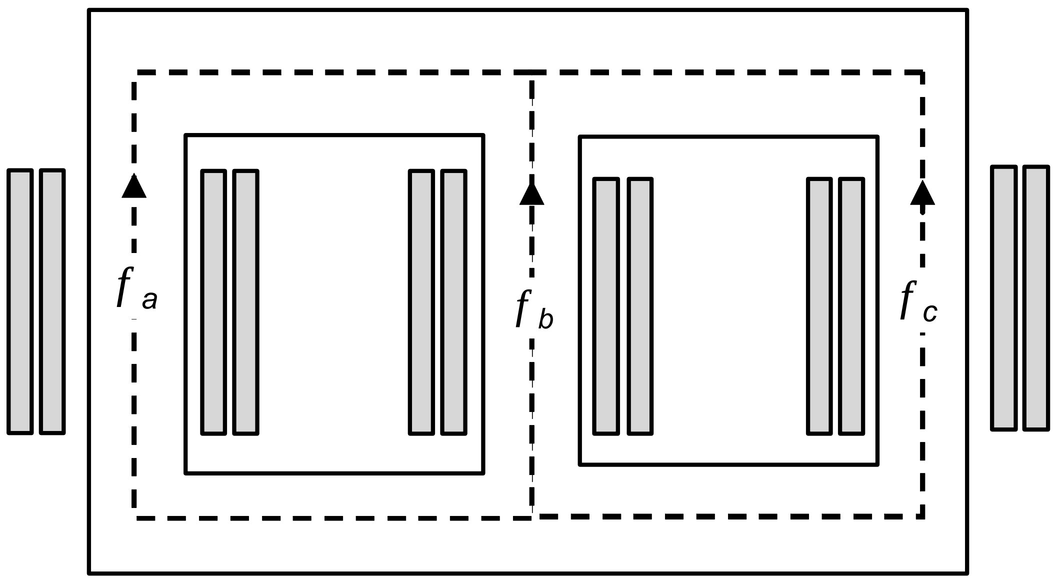
$$I_1 = V_1 \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\frac{1}{Z_{cc}} + V_2 \left(1 - \frac{1}{m}\right)\frac{1}{Z_{cc}} + I_2$$

$$\Longrightarrow$$

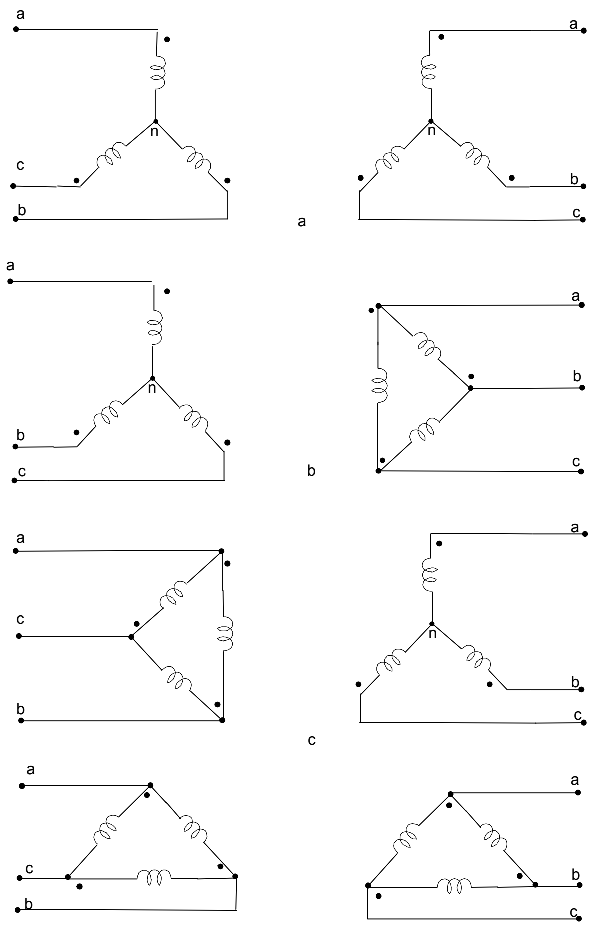
$$V_1 = m\left(V_2 + Z_{cc} I_2\right)$$

$$I_1 = \frac{I_2}{m}$$

TRANSFORMADOR TRIFÁSICO
(Tipo *core*)



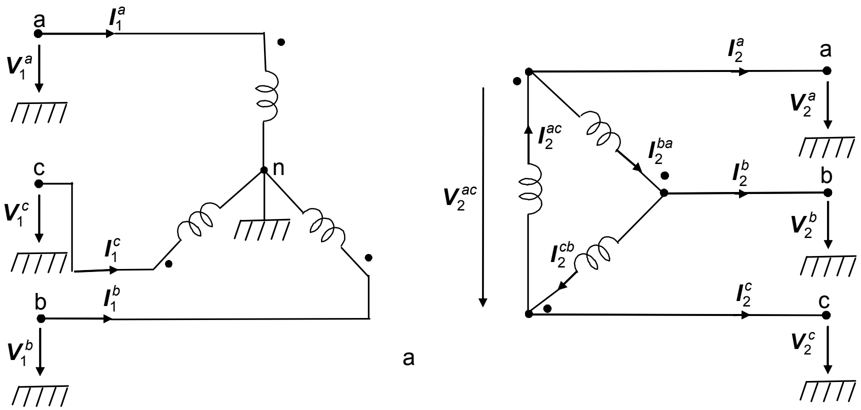
TIPOS DE LIGAÇÃO DE TRANSFORMADORES TRIFÁSICOS



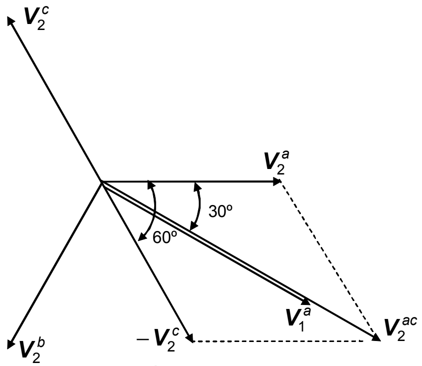
TRANSFORMADOR Y/D

a) Esquema de ligações

b) Diagrama de fasores



a



b

$$\boldsymbol{V}_2^{ac} = \boldsymbol{V}_2^{a} - \boldsymbol{V}_2^{c}$$

$$\boldsymbol{V}_2^{c} = \boldsymbol{V}_2^{a}\, e^{120º}$$

$$\boldsymbol{V}_2^{ac} = \boldsymbol{V}_2^{a}\left(1 - e^{j120º}\right) = \sqrt{3}\,\boldsymbol{V}_2^{a}\, e^{-j30º}$$

$$\boldsymbol{V}_1^{a} = \frac{N_1}{N_2}\,\boldsymbol{V}_2^{ac} = \sqrt{3}\,\frac{N_1}{N_2}\boldsymbol{V}_2^{a}\, e^{-j30º}$$

$$\boldsymbol{m} = \sqrt{3}\,\frac{N_1}{N_2} e^{-j30º}$$

$$\boldsymbol{V}_1^{a} = \boldsymbol{m}\boldsymbol{V}_2^{a}$$

MÁQUINA ASSÍNCRONA

MÁQUINA ASSÍNCRONA

MÁQUINA ASSÍNCRONA

Escorregamento

$$n_s = \frac{60f}{p}$$

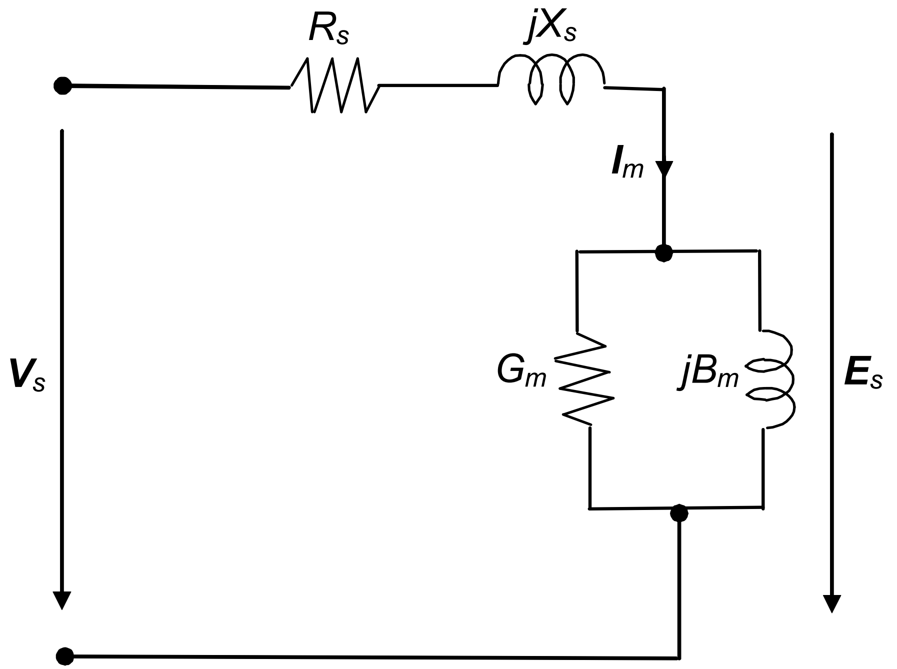
n_s – velocidade de rotação síncrona (r.p.m.)
f – frequência da tensão aplicada (Hz)
p – número de pares de pólos

$$s = \frac{n_s - n_r}{n_s} = \frac{w_s - w_r}{w_s}$$

n_r – velocidade de rotação do rotor
s – escorregamento

MÁQUINA ASSÍNCRONA

Esquema equivalente em vazio



Desprezando R_s e X_s em face de $1/G_m$ e $1/B_m$

$$G_m = \frac{P_0}{V_n^2}$$

$$\sqrt{G_m^2 + B_m^2} = \frac{I_m}{V_n}$$

$$B_m = -\sqrt{\frac{I_m^2}{V_n^2} - G_m^2}$$

MÁQUINA ASSÍNCRONA
Modelo Matemático

No referencial do estator $\boldsymbol{E}_s = jw N_s \boldsymbol{F} = j p w_s N_s \boldsymbol{F}$

No referencial do rotor $\boldsymbol{E}'_r = j p (w_s - w_r) N_r F = j p s w_s N_r F$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{E}'_r = s \frac{N_r}{N_s} \boldsymbol{E}_s$$

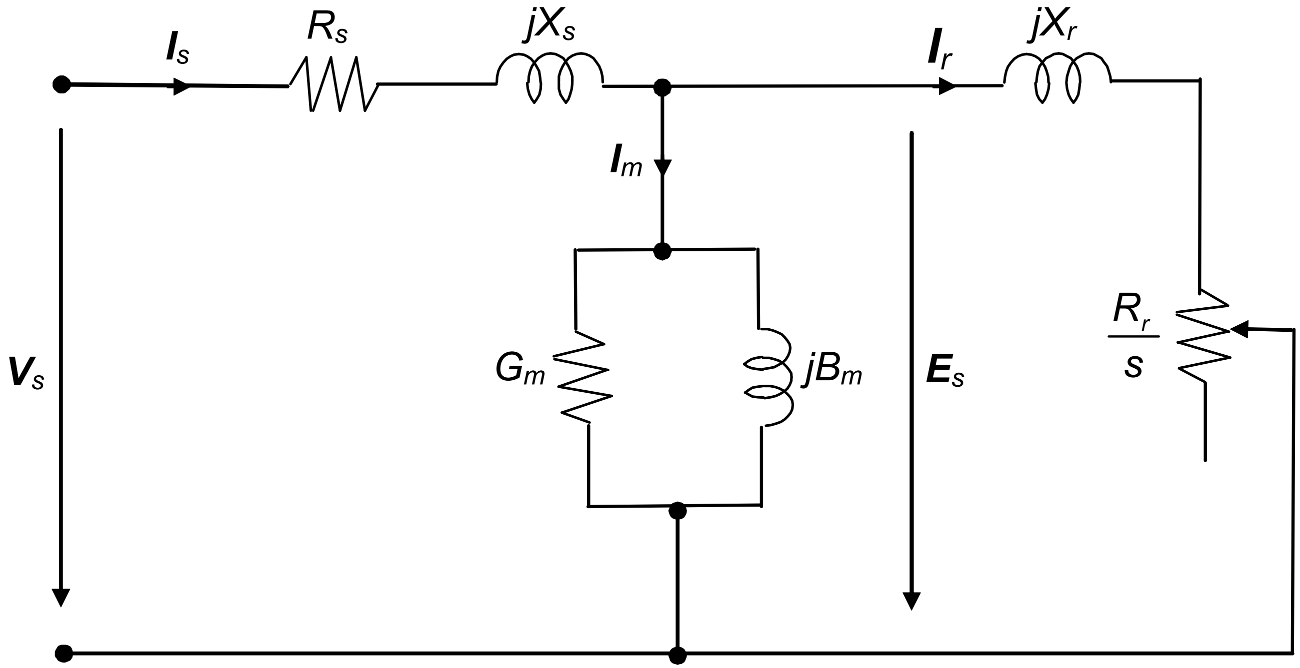
No referencial do estator $\boldsymbol{E}_r = \dfrac{N_s}{N_r} \boldsymbol{E}'_r = s \boldsymbol{E}_s$

$$\boldsymbol{E}_r = R_r \boldsymbol{I}_r + j(sX_r)\, \boldsymbol{I}_r$$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{E}_s = \left(\frac{R_r}{s} + j X_r \right) \boldsymbol{I}_r$$

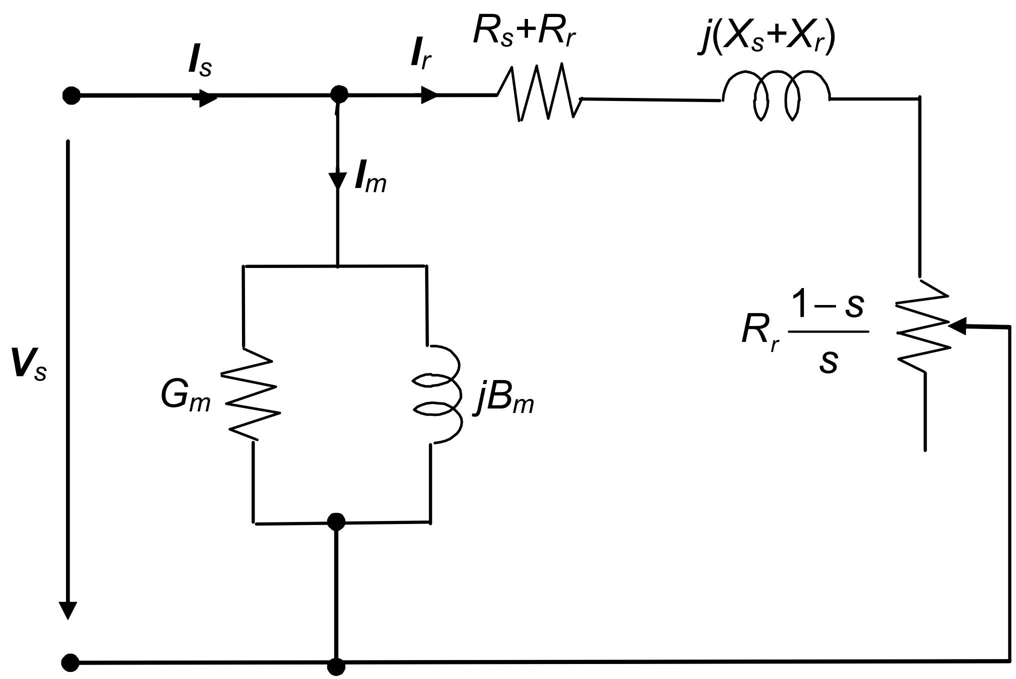
MÁQUINA ASSÍNCRONA

Esquema Equivalente em *T*



MÁQUINA ASSÍNCRONA

Esquema Equivalente em *L*



Potência transferida para o rotor

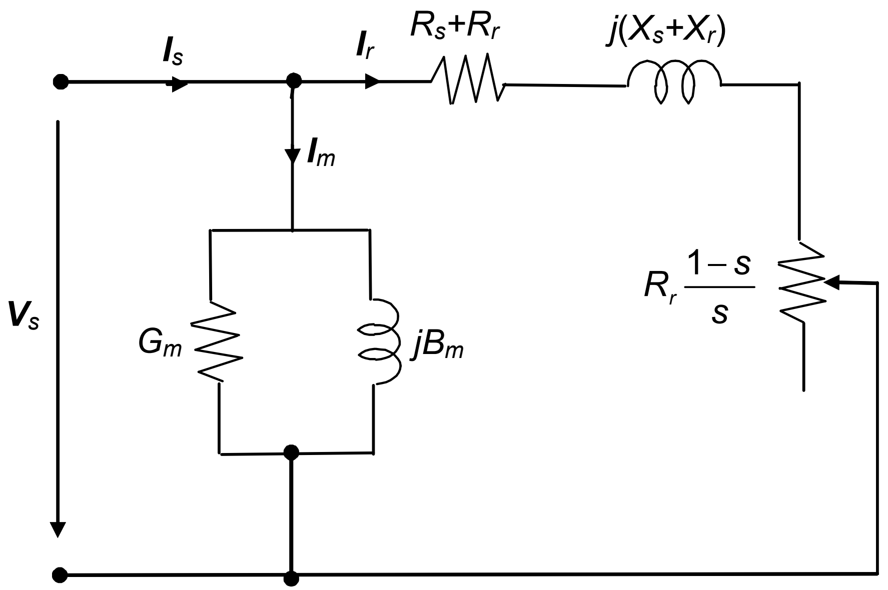
$$P_r = 3\,\frac{R_r}{s}\,I_r^2$$

Potência mecânica

$$P_M = P_r - 3\,R_r\,I_r^2$$
$$= 3\,\frac{1-s}{s}\,R_r\,I_r^2$$

MÁQUINA ASSÍNCRONA

Rendimento



$$\boldsymbol{I}_m = (G_m + jB_m)\boldsymbol{V}_s$$

$$\boldsymbol{I}_r = \frac{\boldsymbol{V}_s}{R_s + \frac{R_r}{s} + j(X_s + X_r)}$$

$$\boldsymbol{I}_s = \boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{I}_r$$

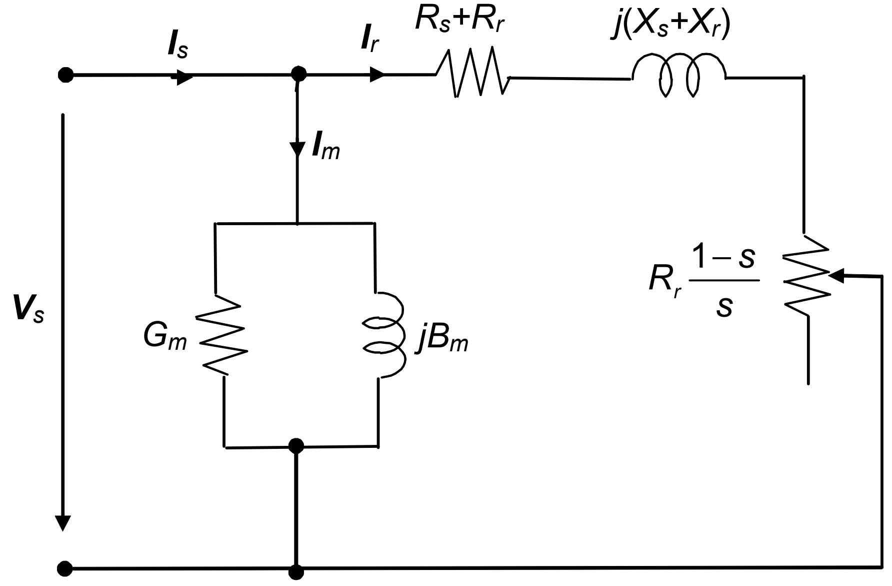
$$P_s = 3G_mV_s^2 + 3\left(R_s + \frac{R_r}{s}\right)I_r^2$$

$$Q_s = -3B_mV_s^2 + 3(X_s + X_r)I_r^2$$

$$h = \frac{P_M}{P_s} = \frac{\frac{1-s}{s}R_r\,I_r^2}{G_mV_s^2 + \left(R_s + \frac{R_r}{s}\right)I_r^2}$$

MÁQUINA ASSÍNCRONA

Binário



$$T = \frac{P_M}{w_r} = \frac{P_M}{w_s(1-s)}$$

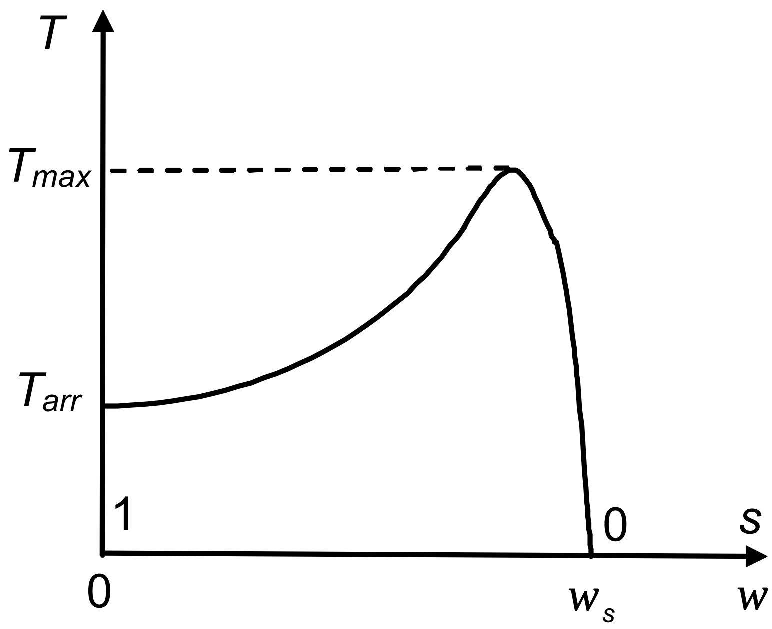
$$= \frac{3R_r I_r^2}{s\,w_s}$$

$$I_r^2 = \frac{V_s^2}{\left(R_s + \dfrac{R_r}{s}\right)^2 + (X_s + X_r)^2}$$

$$T = \frac{3V_s^2}{w_s}\,\frac{\dfrac{R_r}{s}}{\left(R_s + \dfrac{R_r}{s}\right)^2 + (X_s + X_r)^2}$$

MÁQUINA ASSÍNCRONA

Característica binário-velocidade



Binário de arranque ($s = 1$)

$$T_{arr} = \frac{3V_s^2}{w_s} \frac{R_r}{\left(R_s + R_r\right)^2 + \left(X_s + X_r\right)^2}$$

Corrente de arranque ($s = 1$)

$$I_s^{arr} = \frac{V_s}{\sqrt{\left(R_s + R_r\right)^2 + \left(X_s + X_r\right)^2}}$$

Binário máximo

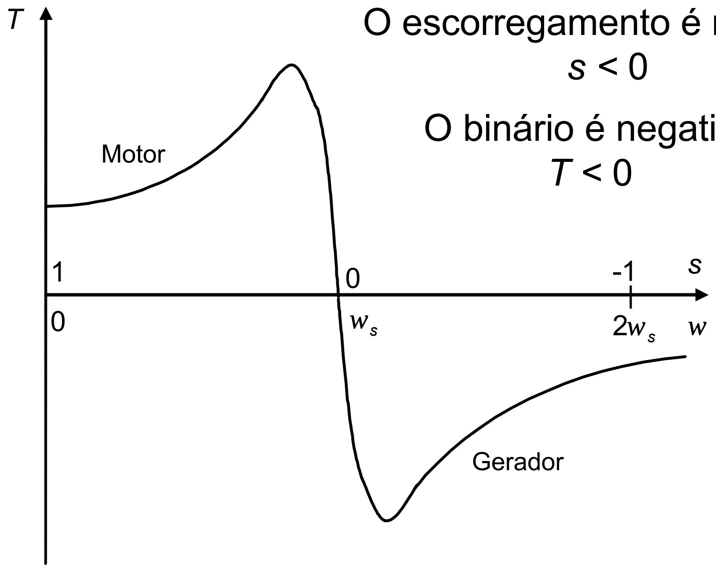
$$s_{Tmax} = \frac{R_r}{\sqrt{R_s^2 + \left(X_s + X_r\right)^2}}$$

$$T_{max} = \frac{3V_s^2}{2w_s} \frac{1}{R_s + \sqrt{R_s^2 + \left(X_s + X_r\right)^2}}$$

MÁQUINA ASSÍNCRONA

Funcionamento como gerador

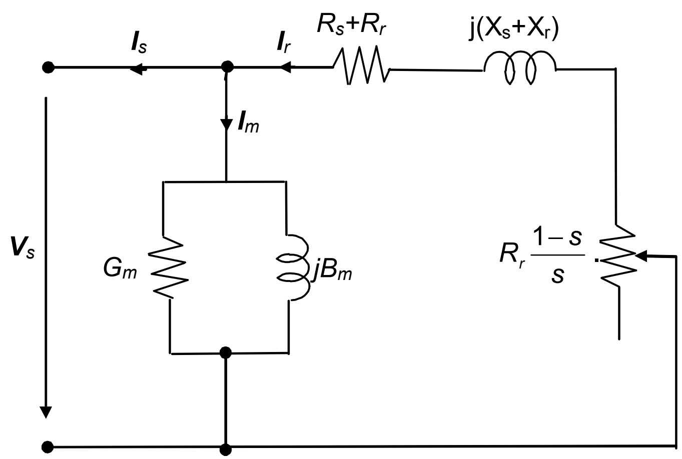
Característica binário-velocidade completa



O escorregamento é negativo
$s < 0$

O binário é negativo
$T < 0$

Esquema equivalente
convenção de gerador



LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Resistência

$$R = \frac{\rho}{S} \times 10^{-6} \;\; \Omega/\text{m}$$

ρ – resistividade do material (Ω.m)

S – secção do condutor (mm^2)

$$R_2 = R_1\left[1 + \alpha\left(T_2 - T_1\right)\right]$$

α – coeficiente de temperatura

Material	*Resistividade* (μΩ.cm)	*Coef. Temperatura*
Aço	12-88	0,001-0,005
Alumínio	2,83	0,0039
Bronze	13-18	0,0005
Cobre	1,77	0,00382
Prata	1,59	0,0050

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Reactância Longitudinal

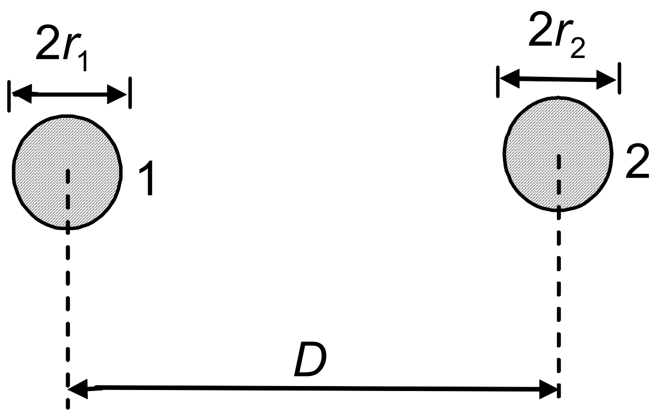
$X = \omega L \quad \Omega/\text{m}$

X – reactância longitudinal
L – indutância
$\omega = 2\pi f$

$L = \dfrac{\lambda}{I} \quad \text{H/m}$

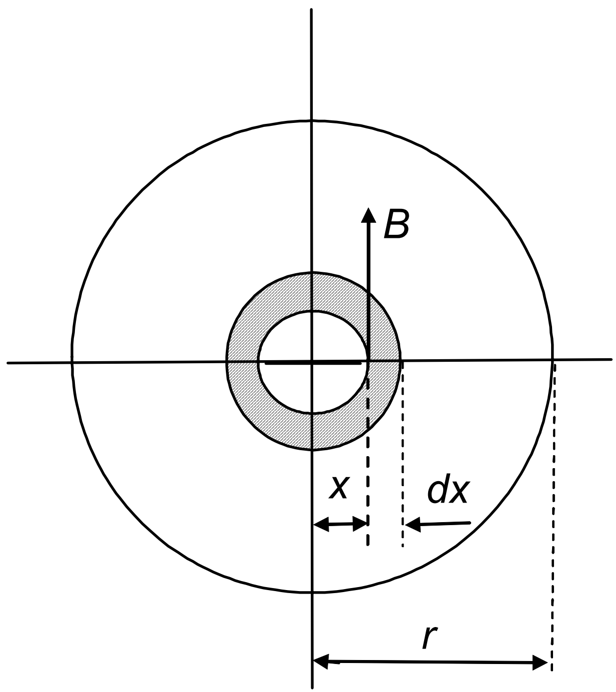
λ – fluxo ligado (Wb/m)
I – corrente (A)

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Linha monofásica bifilar



LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA

Indutância devida ao fluxo no interior do condutor (1)



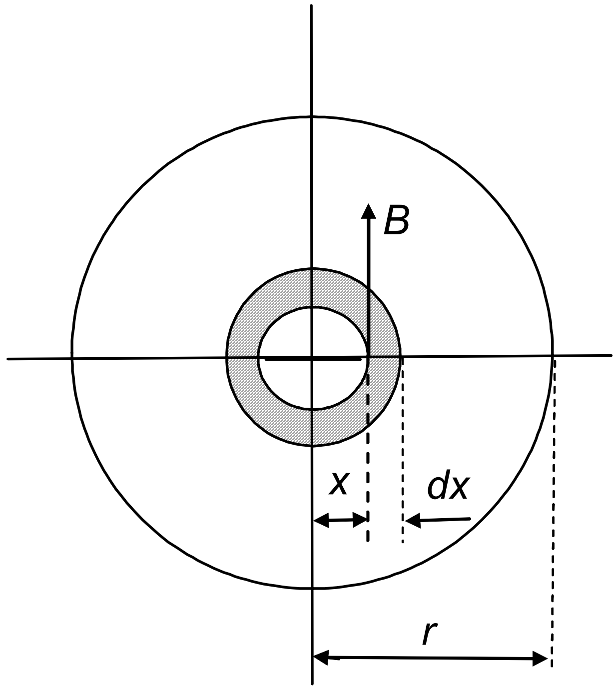
$$I(x) = \frac{x^2}{r^2} I$$

$$H(x) = \frac{1}{2\pi x} I(x) = \frac{x}{2\pi r^2} I$$

$$B(x) = \frac{\mu \mu_0 x}{2\pi r^2} I \quad \text{T}$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA

Indutância devida ao fluxo no interior do condutor (2)



$$B(x) = \frac{\mu\mu_0 x}{2\pi r^2} I$$

$$d\Phi = \frac{\mu\mu_0 x}{2\pi r^2} I\, dx$$

$$d\lambda = \frac{x^2}{r^2} d\Phi = \frac{\mu\mu_0 x^3}{2\pi r^4} I\, dx$$

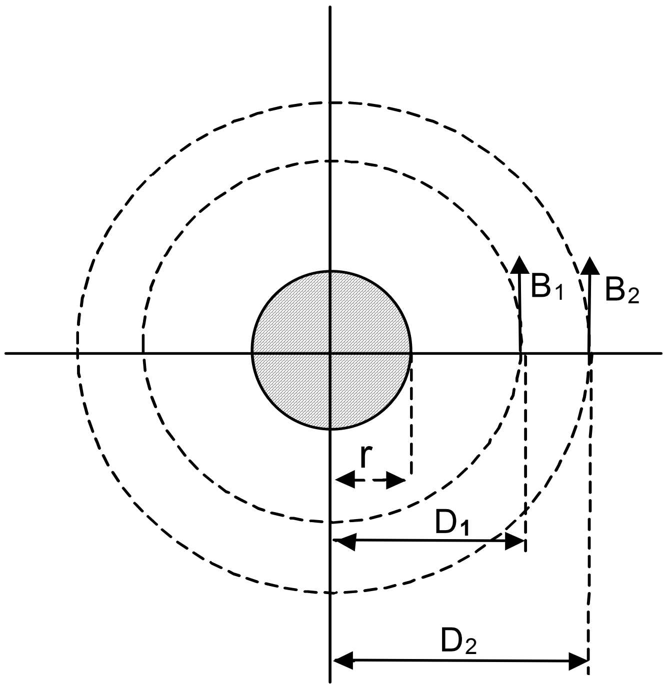
$$\lambda = \int_0^r \frac{\mu\mu_0 x^3}{2\pi r^4} I\, dx = \frac{\mu\mu_0}{8\pi} I \quad \text{Wb/m}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad \text{H/m} \qquad \mu = 1$$

$$L_{int} = \frac{1}{2} \times 10^{-7} \quad \text{H/m}$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA

Indutância devida ao fluxo no exterior do condutor (1)



$$H(x) = \frac{1}{2\pi x} I$$

$$d\lambda = \frac{\mu\mu_0}{2\pi x} I\,dx$$

$$\lambda = \int_{D_1}^{D_2} \frac{\mu\mu_0}{2\pi x} I\,dx = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \ln\frac{D_2}{D_1} I$$

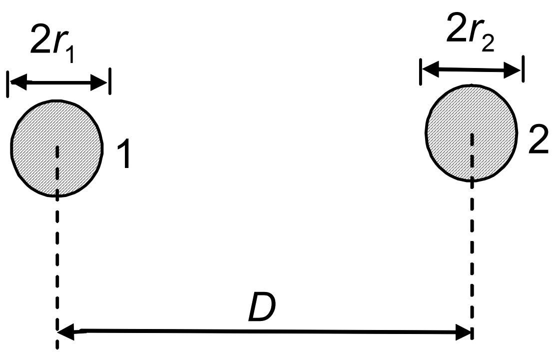
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \qquad \mu = 1$$

$$L_{ext} = \left(2 \times 10^{-7}\right) \ln\frac{D_2}{D_1}$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA

Indutância devida ao fluxo no exterior do condutor (2)

$$D_1 = r \quad D_2 = D \quad \Longrightarrow \quad L_{1ext} = \left(2\times 10^{-7}\right) \ln \frac{D}{r_1}$$



Indutância total do condutor 1

$$L_1 = \left(2\times 10^{-7}\right)\left(\frac{1}{4} + \ln \frac{D}{r_1}\right)$$

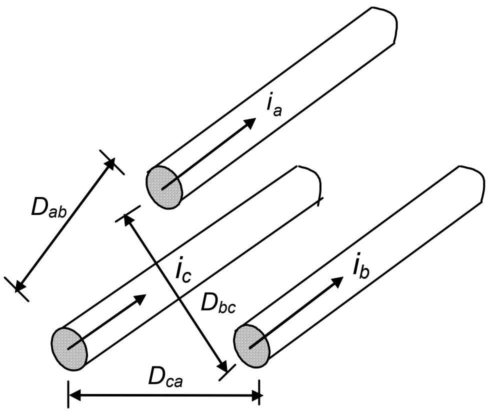
Indutância total do condutor 2

$$L_2 = \left(2\times 10^{-7}\right)\left(\frac{1}{4} + \ln \frac{D}{r_2}\right)$$

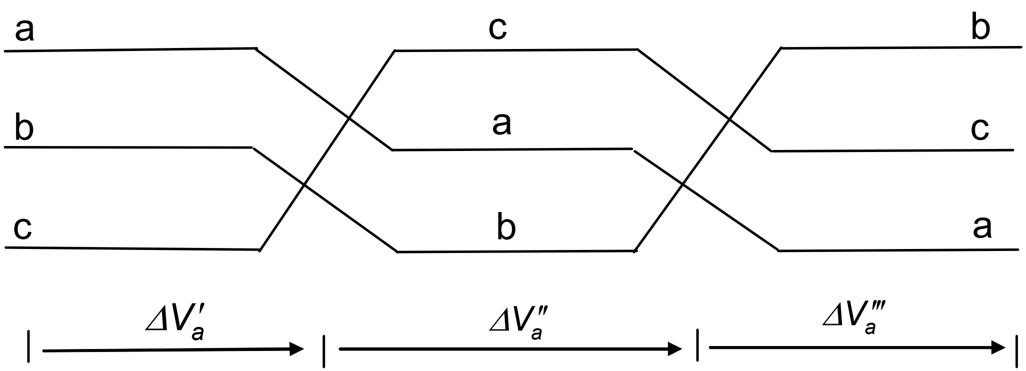
Indutância total da linha (r_1=r_2=r)

$$L = L_1 + L_2 = \left(4\times 10^{-7}\right)\left(\frac{1}{4} + \ln \frac{D}{r}\right) = \left(4\times 10^{-7}\right) \ln \frac{D}{r'} \text{ H/m} \qquad r' = e^{-1/4}\, r = 0{,}778\, r$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Linha trifásica (1)



Condutores em triângulo (MT, AT)

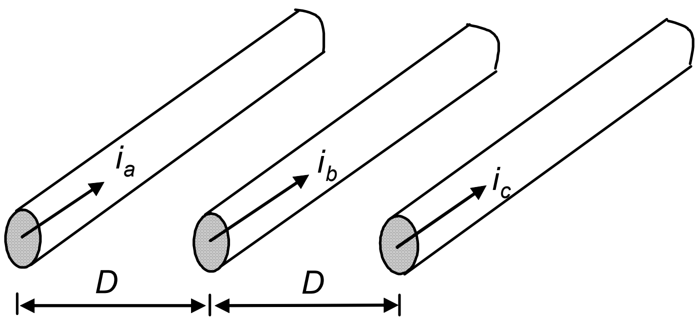


Linha transposta

$$L = \left(2 \times 10^{-7}\right) \ln \frac{\sqrt[3]{D_{ab} D_{bc} D_{ac}}}{r'} \quad \text{H/m}$$

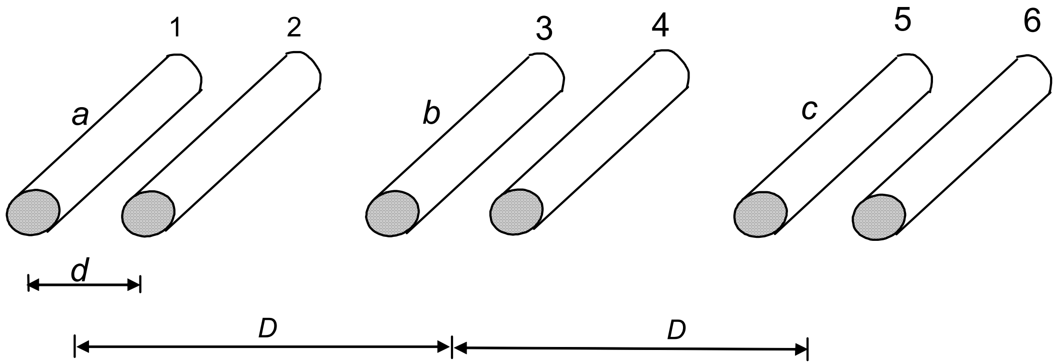
LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Linha trifásica (2)

Condutores em esteira (MAT)



$$L = \left(2 \times 10^{-7}\right) \ln \frac{\sqrt[3]{2}D}{r'} \text{ H/m}$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Linha trifásica (3)



Linha em esteira com 2 condutores por fase (MAT-400 kV)

$$L = \left(2 \times 10^{-7}\right) \ln \frac{\sqrt[3]{2}D}{\sqrt{r'd}} \quad \text{H/m}$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Admitância Transversal (1)

$$Y = G + jB \approx jB = j\omega C \qquad C \text{ – capacitância (F/m)}$$

Linha bifilar

$$C = \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln \frac{D}{r}} = \frac{1}{36} \times 10^{-9} \frac{1}{\ln \frac{D}{r}}$$

Considerando a influência da terra (H – distância ao solo)

$$C = \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{D}{r}\frac{2H}{D'}\right)} = \frac{1}{36} \times 10^{-9} \frac{1}{\ln\left(\frac{D}{r}\frac{2H}{D'}\right)}$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Admitância Transversal (2)

Linha trifásica
$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{\sqrt[3]{D_{ab}D_{bc}D_{ac}}}{r}} = \frac{1}{18}\times 10^{-9}\frac{1}{\ln\frac{\sqrt[3]{D_{ab}D_{bc}D_{ac}}}{r}}$$

Condutores em esteira à distância *D*

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{\sqrt[3]{2}\,D}{r}} = \frac{1}{18}x10^{-9}\frac{1}{\ln\frac{\sqrt[3]{2}\,D}{r}}$$

Considerando a influência da terra

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left[\frac{D}{r}\frac{2H}{\sqrt[6]{\left(D^2+4H^2\right)^2\left(D^2+H^2\right)}}\right]} = \frac{1}{18}\times 10^{-9}\frac{1}{\ln\left[\frac{D}{r}\frac{2H}{\sqrt[6]{\left(D^2+4H^2\right)^2\left(D^2+H^2\right)}}\right]}$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Admitância Transversal (3)

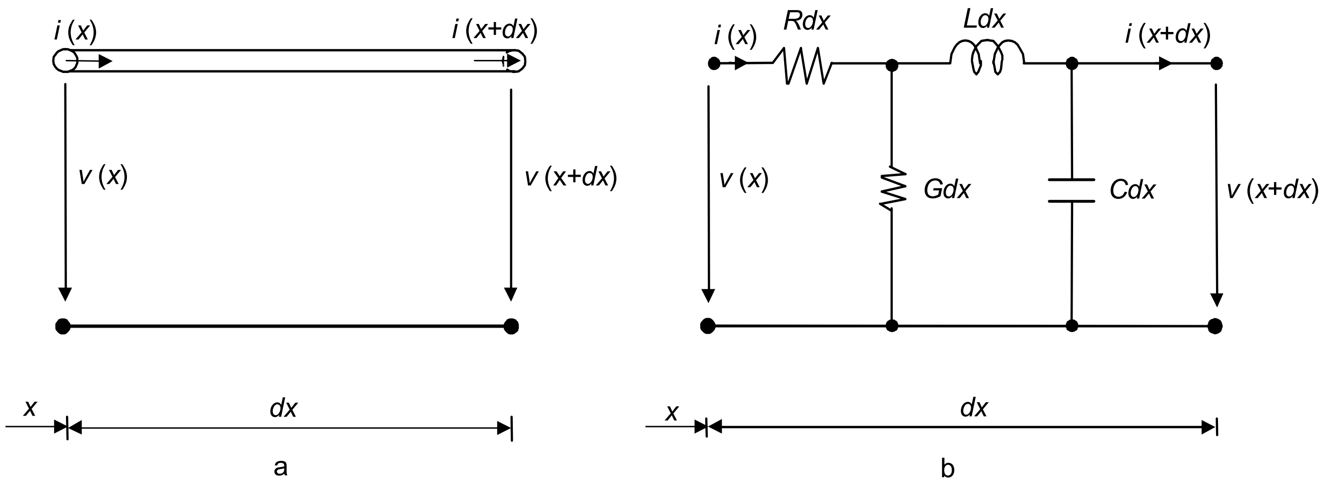
Linha trifásica com dois condutores por fase

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{\sqrt[3]{2}\,D}{\sqrt{r\,d}}} = \frac{1}{18}\times 10^{-9}\,\frac{1}{\ln\frac{\sqrt[3]{2}\,D}{\sqrt{r\,d}}}$$

Cabo subterrâneo monofásico com bainha

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\frac{R}{r}} = \frac{1}{18}\times 10^{-9}\,\frac{\varepsilon_r}{\ln\frac{R}{r}} \qquad \varepsilon_r = 3 - 3{,}5$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Modelo em regime estacionário (1)



$$v(x) - v(x+dx) = R\,dx\,i + L\,dx\,\frac{\partial i}{\partial t}$$

$$i(x) - i(x+dx) = G\,dx\,v + C\,dx\,\frac{\partial v}{\partial t}$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Modelo em regime estacionário (2)

$$v(x+dx)-v(x)=\frac{\partial v(x)}{\partial x}dx$$

$$i(x+dx)-i(x)=\frac{\partial i(x)}{\partial x}dx$$

$$\Rightarrow$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x}=R\,i+L\frac{\partial i}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x}=G\,v+C\frac{\partial v}{\partial t}$$

Em regime estacionário

$$-\frac{d\,\boldsymbol{V}}{d\,x}=(R+j\omega L)\boldsymbol{I}$$

$$-\frac{d\,\boldsymbol{I}}{d\,x}=(G+j\omega C)\boldsymbol{V}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{d^2\,\boldsymbol{V}}{d\,x^2}=(R+j\omega L)(G+j\omega C)\boldsymbol{V}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{I}}{d\,x^2}=(R+j\omega L)(G+j\omega C)\,\boldsymbol{I}$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Modelo em regime estacionário (3)

Impedância de onda

$$\boldsymbol{Z}_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{R + jX}{G + jB}} \quad \Omega$$

Constante de propagação

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{(R + jX)(G + jB)} \quad \mathrm{m}^{-1}$$

As equações da linha rescrevem-se

$$\frac{d^2 \boldsymbol{V}}{d\,x^2} = \gamma^2 \boldsymbol{V} \qquad \frac{d^{\,2}\boldsymbol{I}}{d\,x^2} = \gamma^2\, \boldsymbol{I}$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Modelo em regime estacionário (4)

Solução destas equações

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{C}_1 e^{-\gamma x} + \boldsymbol{C}_2 e^{\gamma x} \qquad \boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{C}_1 e^{-\gamma x} - \boldsymbol{C}_2 e^{\gamma x}}{\boldsymbol{Z}_0}$$

Condições iniciais x = 0 (emissão)

$$\boldsymbol{V}_e = \boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2 \qquad \boldsymbol{I}_e = \frac{\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{C}_2}{\boldsymbol{Z}_0} \Rightarrow \boldsymbol{C}_1 = \frac{\boldsymbol{V}_e + \boldsymbol{Z}_0 \boldsymbol{I}_e}{2} \qquad \boldsymbol{C}_2 = \frac{\boldsymbol{V}_e - \boldsymbol{Z}_0 \boldsymbol{I}_e}{2}$$

Donde

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_e \cosh \gamma x - \boldsymbol{Z}_0 \boldsymbol{I}_e \sinh \gamma x$$

$$\boldsymbol{I} = -\frac{\boldsymbol{V}_e}{\boldsymbol{Z}_0} \sinh \gamma x + \boldsymbol{I}_e \cosh \gamma x$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Modelo em regime estacionário (5)

Na recepção $x = \ell$

$$\boldsymbol{V}_r = \boldsymbol{V}_e \cosh\gamma\,\ell - \boldsymbol{Z}_0 \boldsymbol{I}_e \sinh\gamma\,\ell$$

$$\boldsymbol{I}_r = -\frac{\boldsymbol{V}_e}{\boldsymbol{Z}_0}\sinh\gamma\,\ell + \boldsymbol{I}_e \cosh\gamma\,\ell$$

Em forma matricial

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_r \\ \boldsymbol{I}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\gamma\,\ell & -\boldsymbol{Z}_0 \sinh\gamma\,\ell \\ -1/\boldsymbol{Z}_0 \sinh\gamma\,\ell & \cosh\gamma\,\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_e \\ \boldsymbol{I}_e \end{bmatrix}$$

Invertendo a matriz

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_e \\ \boldsymbol{I}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\gamma\ell & \boldsymbol{Z}_0 \sinh\gamma\,\ell \\ 1/\boldsymbol{Z}_0 \sinh\gamma\,\ell & \cosh\gamma\,\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_r \\ \boldsymbol{I}_r \end{bmatrix}$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Modelo exacto da linha

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{V_e} \\ \boldsymbol{I_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V_r} \\ \boldsymbol{I_r} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} = \cosh \gamma \ell = \cosh \sqrt{\boldsymbol{Z}_L \, \boldsymbol{Y}_T}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Z}_0 \sinh \gamma \ell = \frac{\boldsymbol{Z}_L \sinh \sqrt{\boldsymbol{Z}_L \, \boldsymbol{Y}_T}}{\sqrt{\boldsymbol{Z}_L \boldsymbol{Y}_T}}$$

$$\boldsymbol{C} = \frac{\sinh \gamma \ell}{\boldsymbol{Z}_0} = \frac{\boldsymbol{Y}_T \sinh \sqrt{\boldsymbol{Z}_L \boldsymbol{Y}_T}}{\sqrt{\boldsymbol{Z}_L \boldsymbol{Y}_T}}$$

$$\boldsymbol{Z}_L = (R + jX)\ell$$

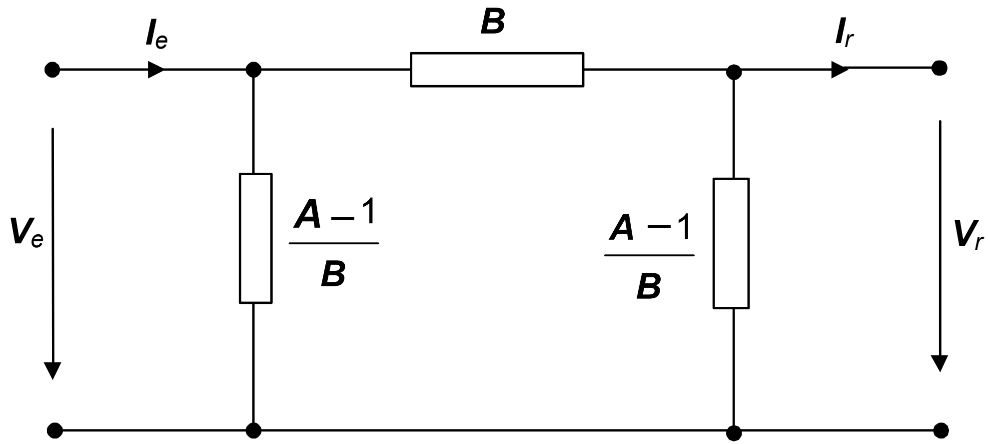
impedância longitudinal total

$$\boldsymbol{Y}_T = (G + jB)\ell$$

admitância transversal total

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA

Esquema equivalente em π exacto



$$I_r = \frac{V_e - V_r}{B} - \frac{A-1}{B} V_r = \frac{V_e - AV_r}{B}$$

$$I_e = \frac{A-1}{B} V_e + \frac{V_e - V_r}{B} = \frac{AV_e - V_r}{B}$$

$$\Rightarrow$$

$$V_e = AV_r + BI_r$$

$$I_e = CV_r + DI_r$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Esquema equivalente em π nominal (1)

Desenvolvendo em série

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} = 1 + \frac{\boldsymbol{Z}_L\,\boldsymbol{Y}_T}{2} + \frac{\boldsymbol{Z}_L^2\,\boldsymbol{Y}_T^2}{24} + \frac{\boldsymbol{Z}_L^3\,\boldsymbol{Y}_T^3}{720} + \cdots$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Z}_L\left(1 + \frac{\boldsymbol{Z}_L\,\boldsymbol{Y}_T}{6} + \frac{\boldsymbol{Z}_L^2\,\boldsymbol{Y}_T^2}{120} + \frac{\boldsymbol{Z}_L^3\,\boldsymbol{Y}_T^3}{5040} + \cdots\right)$$

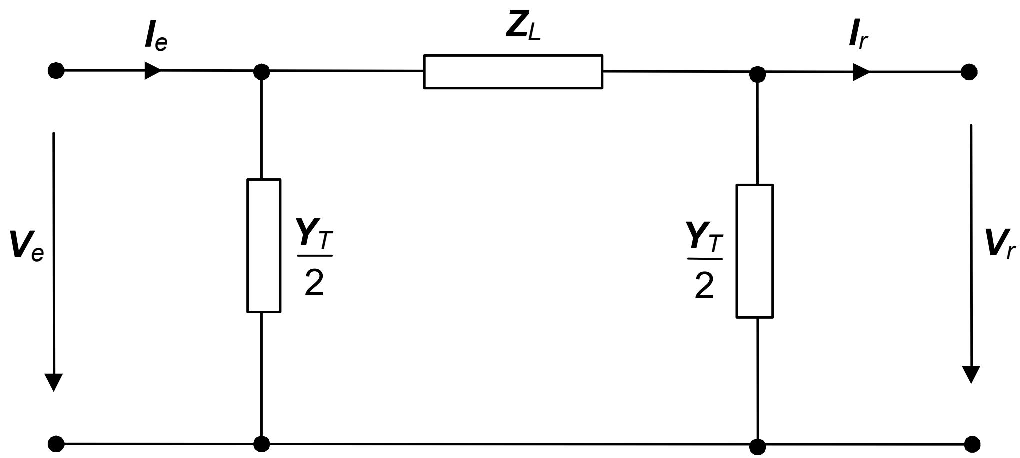
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Y}_T\left(1 + \frac{\boldsymbol{Z}_L\,\boldsymbol{Y}_T}{6} + \frac{\boldsymbol{Z}_L^2\,\boldsymbol{Y}_T^2}{120} + \frac{\boldsymbol{Z}_L^3\,\boldsymbol{Y}_T^3}{5040} + \cdots\right)$$

Para linhas até 250 km, é suficiente a aproximação

$$\boldsymbol{A} = 1 + \frac{\boldsymbol{Z}_L\,\boldsymbol{Y}_T}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\boldsymbol{A} - 1}{\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{Y}_T}{2}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Z}_L$$

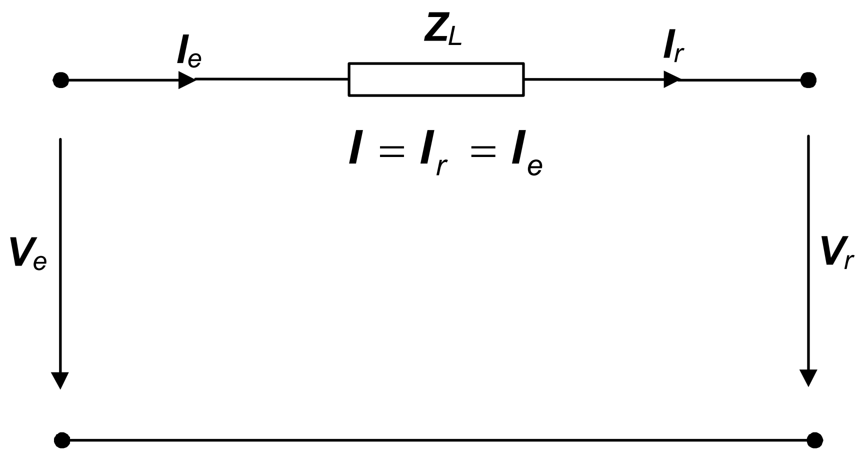
LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Esquema equivalente em π nominal (2)



$$\begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + Z_L Y_T/2 & Z_L \\ Y_T\left(1 + Z_L Y_T/4\right) & 1 + Z_L Y_T/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix}$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Linha curta (1)

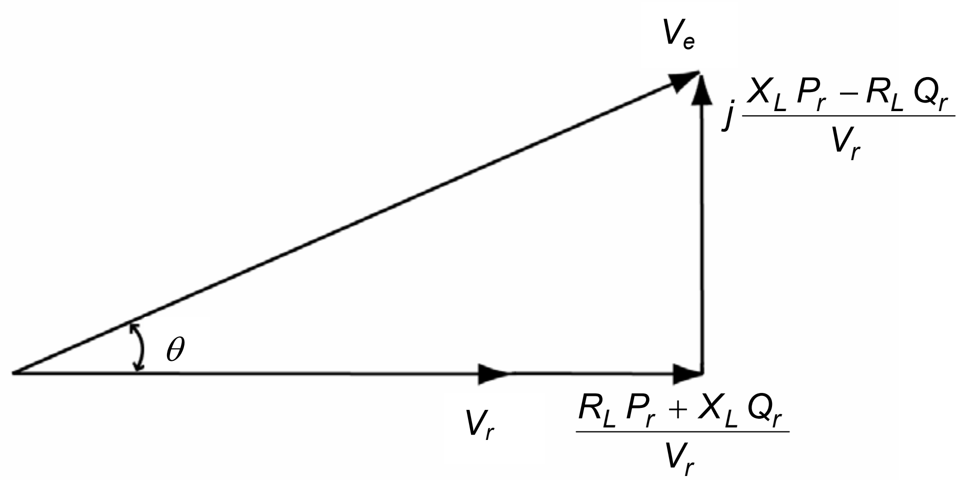
Para linhas até 80 km



$$\boldsymbol{V}_e = V_r + Z_L\ \boldsymbol{I} = V_r + \left(R_L + j\,X_L\right)\boldsymbol{I}$$

$$= V_r + \frac{R_L\,P_r + X_L\,Q_r}{V_r} + j\,\frac{X_L\,P_r - R_L\,Q_r}{V_r}$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Linha curta (2)



Queda de tensão (p.u.)

$$\Delta V = V_e - V_r \approx \frac{R_L\,P_r + X_L\,Q_r}{V_r}$$

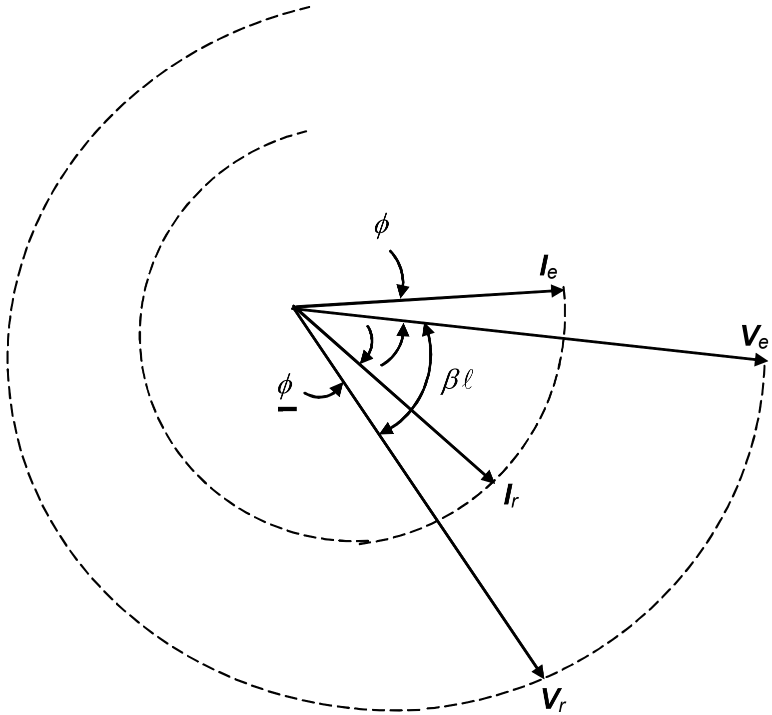
LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Linha terminada pela impedância de onda (1)

$$\boldsymbol{V}_r = \boldsymbol{Z}_0\, \boldsymbol{I}_r \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \boldsymbol{V}_e &= \left(\cosh\gamma\,\ell + \sinh\gamma\,\ell\right)\boldsymbol{V}_r = e^{\gamma\,\ell}\,\boldsymbol{V}_r \\ \boldsymbol{I}_e &= \left(\sinh\gamma\,\ell + \cosh\gamma\,\ell\right)\boldsymbol{I}_r = e^{\gamma\,\ell}\,\boldsymbol{I}_r \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\boldsymbol{V}_e}{\boldsymbol{I}_e} = \frac{\boldsymbol{V}_r}{\boldsymbol{I}_r} = \boldsymbol{Z}_0$$

$$\frac{\boldsymbol{V}_r}{\boldsymbol{V}_e} = \frac{\boldsymbol{I}_r}{\boldsymbol{I}_e} = e^{-\gamma\,\ell}$$

$$\gamma = \alpha + j\,\beta \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &\frac{V_r}{V_e} = \frac{I_r}{I_e} = e^{-\alpha\,\ell} \\ &\arg\left(\boldsymbol{V}_e\right) - \arg\left(\boldsymbol{V}_r\right) = \arg\left(\boldsymbol{I}_e\right) - \arg\left(\boldsymbol{I}_r\right) = \beta\,\ell \end{aligned}$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Linha terminada pela impedância de onda (2)



LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Linha sem perdas

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$ impedância de onda é resistiva pura

$$\gamma = j\beta = j\,\omega\sqrt{LC}$$

Velocidade da luz no vazio $$\nu = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Longrightarrow \beta = \frac{\omega}{\nu}$$

Comprimento de onda $$\lambda = \frac{\nu}{f} = 2\pi\frac{\nu}{\omega}$$ 6000 km para f = 50 Hz

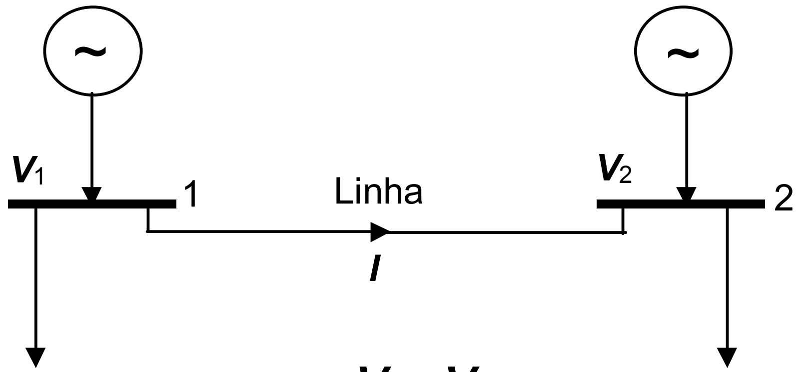
Potência natural $$P_n = \frac{V_n^2}{Z_0} \Longrightarrow \omega C \ell V^2 = \omega L \ell I^2$$

potência reactiva gerada pela capacitância da linha iguala a absorvida pela reactância

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Capacidade de transporte

- Limite térmico
- Limite de estabilidade estática
- Limite de estabilidade de tensão

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Limite de estabilidade estática (1)



$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2}{R_L + jX_L}$$

$$\boldsymbol{S}_{12} = \boldsymbol{V}_1 \boldsymbol{I}^* = \frac{V_1^2 - V_1 V_2 \, e^{j\theta}}{R_L - jX_L}$$

$$\boldsymbol{S}_{21} = -\boldsymbol{V}_2 \boldsymbol{I}^* = \frac{V_2^2 - V_1 V_2 \, e^{-j\theta}}{R_L - jX_L}$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Limite de estabilidade estática (2)

$$P_{12} = V_1^2 \frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} + V_1 V_2 \frac{X_L \sin\theta - R_L \cos\theta}{R_L^2 + X_L^2}$$

$$P_{21} = V_2^2 \frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} - V_1 V_2 \frac{X_L \sin\theta + R_L \cos\theta}{R_L^2 + X_L^2}$$

Perdas

$$P_L = P_{12} + P_{21} = \frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2}\left(V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2 \cos\theta\right)$$

Potência activa média

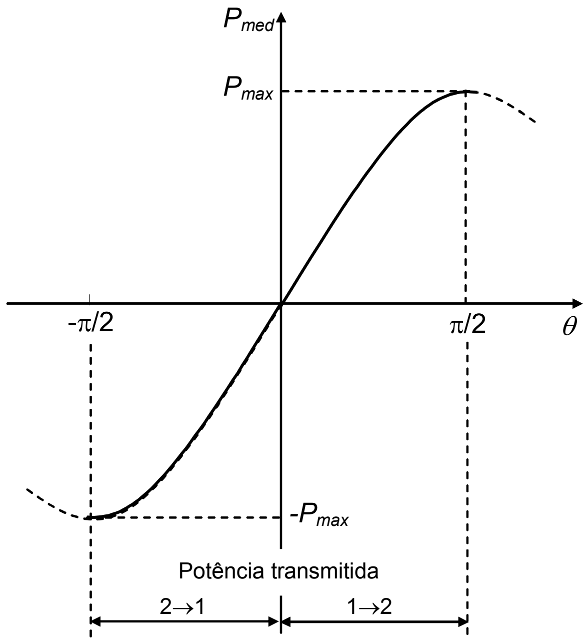
$$P_{med} = \frac{P_{12} - P_{21}}{2} = \frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2}\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} + \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} V_1 V_2 \sin\theta$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Limite de estabilidade estática (3)

$$V_1 = V_2 = V_n$$

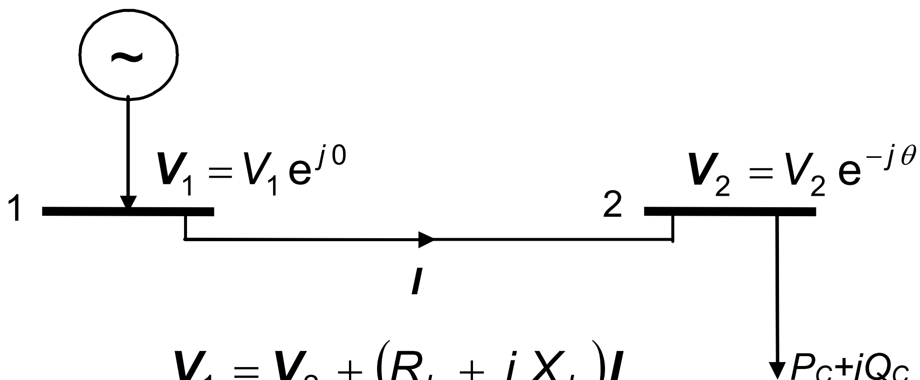
$$P_{med} = \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} V_n^2 \sin\theta$$
$$= P_{max} \sin\theta$$

$$P_{max} = \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} V_n^2 \approx \frac{V_n^2}{X_L}$$



LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA

Limite de estabilidade de tensão (1)



$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_2 + \left(R_L + j\,X_L\right)\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{S}_C^*}{\boldsymbol{V}_2^*} = \frac{P_C - j\,Q_C}{V_2\,e^{j\theta}} \quad \Longrightarrow \quad V_1 = V_2\,e^{-j\theta} + \left(R_L + j\,X_L\right)\frac{P_C - j\,Q_C}{V_2\,e^{j\theta}}$$

$$V_1 V_2\,e^{j\theta} = V_2^2 + \left(R_L + j\,X_L\right)\left(P_C - j\,Q_C\right)$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA

Limite de estabilidade de tensão (2)

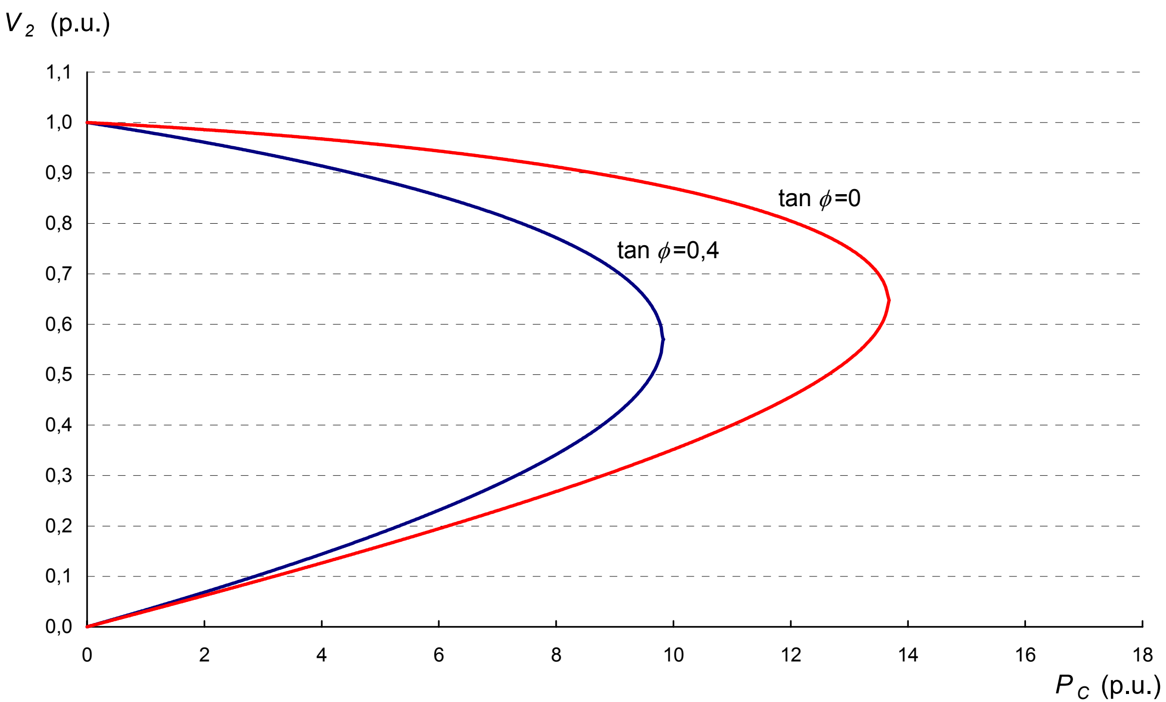
$$V_1 V_2\, e^{j\theta} = V_2^2 + \left(R_L + j\,X_L\right)\left(P_C - j\,Q_C\right) \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} V_1 V_2 \cos\theta &= V_2^2 + R_L\,P_C + X_L\,Q_C \\ V_1 V_2 \sin\theta &= X_L\,P_C - R_L Q_C \end{aligned}$$

$$V_2^4 + \underbrace{\left[2\left(R_L P_C + X_L Q_C\right) - V_1^2\right]}_{b} V_2^2 + \underbrace{\left(R_L^2 + X_L^2\right)\left(P_C^2 + Q_C^2\right)}_{c} = 0$$

Equação bi-quadrada $\qquad V_2 = \sqrt{\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}}$

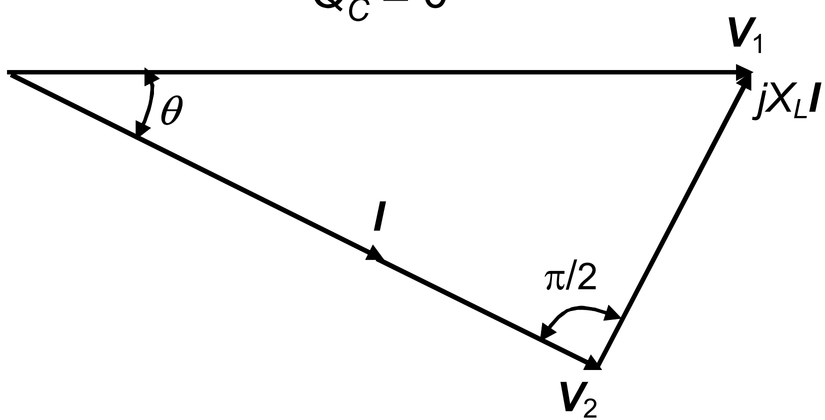
$$\theta = \operatorname{asin}\left(\frac{X_L\,P_C - R_L\,Q_C}{V_1 V_2}\right)$$

LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Colapso de tensão



LINHA ELÉCTRICA DE ENERGIA
Limite de estabilidade de tensão

$Q_C = 0$



$$V_2 = V_1 \cos\theta$$

$$P_{12} = \frac{V_1^2}{X_L}\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{V_1^2}{2X_L}\sin 2\theta$$

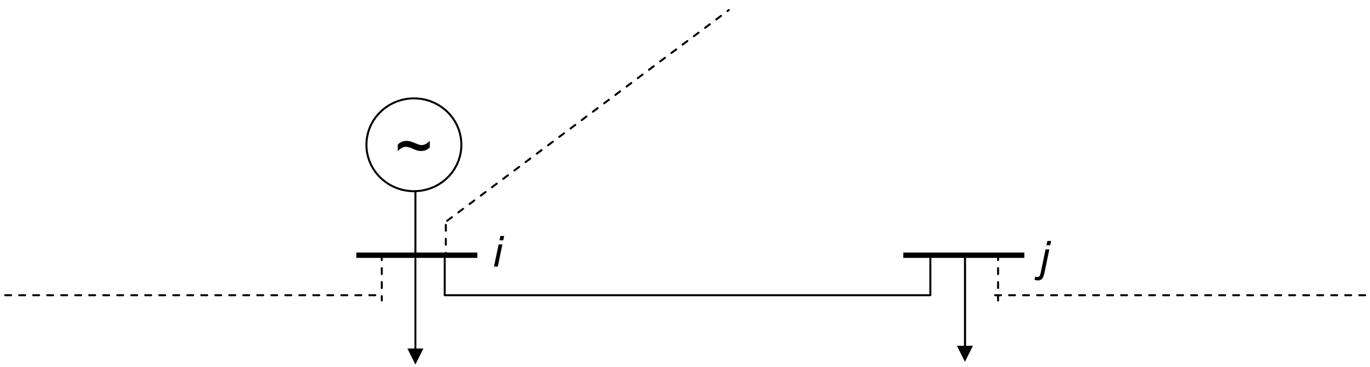
$R_L = 0$

$$P_{max} = \frac{V_n^2}{2X_L} \qquad \theta = \pi/4$$

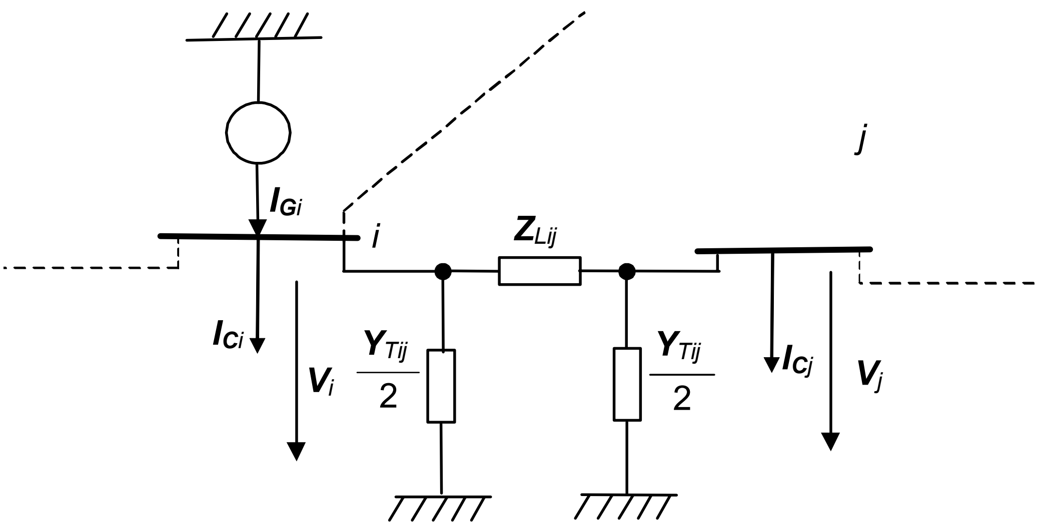
FUNDAMENTOS DE ENERGIA ELÉCTRICA

TRÂNSITO DE ENERGIA

SISTEMA DE ENERGIA ELÉCTRICA



EQUAÇÕES NODAIS (1)



$$\boldsymbol{I}_i = \boldsymbol{I}_{Gi} - \boldsymbol{I}_{Ci} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\boldsymbol{Y}_{T_{ij}}}{2} \boldsymbol{V}_i + $$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{\boldsymbol{Z}_{L_{ij}}} \left(\boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{V}_j \right)$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{1}{\boldsymbol{Z}_{L_{ij}}} + \frac{\boldsymbol{Y}_{T_{ij}}}{2} \right) \boldsymbol{V}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(-\frac{1}{\boldsymbol{Z}_{L_{ij}}} \right) \boldsymbol{V}_j$$

EQUAÇÕES NODAIS (2)

Definindo

$$\boldsymbol{y}_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{1}{\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{L}_{ij}}} + \frac{\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{T}_{ij}}}{2} \right)$$

$$\boldsymbol{y}_{ij} = \boldsymbol{y}_{ji} = -\frac{1}{\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{L}_{ij}}}$$

resulta

$$\boldsymbol{I}_i = \boldsymbol{y}_{ii}\boldsymbol{V}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \boldsymbol{y}_{ij}\,\boldsymbol{V}_j$$

Equações nodais

$$= \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{y}_{ij}\,\boldsymbol{V}_j$$

EQUAÇÕES NODAIS (3)

Equações nodais em forma matricial $$[\boldsymbol{I}] = [\boldsymbol{Y}][\boldsymbol{V}]$$

Matriz das admitâncias nodais $$[\boldsymbol{Y}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_{11} & \cdots & \boldsymbol{y}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{y}_{n1} & \cdots & \boldsymbol{y}_{nn} \end{bmatrix}$$

Vector das correntes injectadas $$[\boldsymbol{I}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}$$

Vector das tensões nodais $$[\boldsymbol{V}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{V}_n \end{bmatrix}$$

EQUAÇÕES NODAIS EXPRESSAS EM TERMOS DA POTÊNCIA COMPLEXA

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{S}^*}{\boldsymbol{V}^*} = \frac{P - jQ}{\boldsymbol{V}^*}$$

Donde

$$\left[\frac{\boldsymbol{S}^*}{\boldsymbol{V}^*}\right] = [\boldsymbol{Y}][\boldsymbol{V}]$$

ou

$$P_i - jQ_i = \boldsymbol{V}_i^* \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{y}_{ij} \boldsymbol{V}_j$$

$$\boldsymbol{i} = 1, \cdots, n$$

Equações do trânsito de energia (não-lineares)

EQUAÇÕES DO TRÂNSITO DE ENERGIA

$$P_i - j\,Q_i = \boldsymbol{V}_i^* \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{y}_{ij}\,\boldsymbol{V}_j$$

$$\boldsymbol{i} = 1,\cdots,n$$

$$\boldsymbol{V_i} = V_i e^{j\theta_i}$$

$$\boldsymbol{y_{ij}} = G_{ij} + jB_{ij}$$

Decompondo em parte real e imaginária

$$P_i = P_{Gi} - P_{Ci} = \sum_{j=1}^{n} V_i V_j \left[G_{ij}\cos\left(\theta_i - \theta_j\right) + B_{ij}\sin\left(\theta_i - \theta_j\right)\right]$$

$$Q_i = Q_{Gi} - Q_{Ci} = \sum_{j=1}^{n} V_i V_j \left[G_{ij}\sin\left(\theta_i - \theta_j\right) - B_{ij}\cos\left(\theta_i - \theta_j\right)\right]$$

$$\boldsymbol{i} = 1,\cdots,n$$

SOLUÇÃO DO TRÂNSITO DE ENERGIA
Modelo de Corrente Contínua (1)

Trata-se de um modelo linearizado que permite calcular um valor aproximado dos trânsitos de potência activa na rede, baseando-se nas seguintes hipóteses simplificativas:

1. Toma-se a amplitude da tensão igual a 1,0 p.u. em todos os barramentos.
2. Não se considera o trânsito de potência reactiva.
3. Consideram-se nulas a resistência e a admitância transversal das linhas.
4. Admite-se que a diferença entre os argumentos das tensões é pequena, isto é:

$$\cos\left(\theta_i - \theta_j\right) \approx 1 \qquad \sin\left(\theta_i - \theta_j\right) \approx \theta_i - \theta_j$$

SOLUÇÃO DO TRÂNSITO DE ENERGIA
Modelo de Corrente Contínua (2)

As equações do trânsito de energia escrevem-se então:

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} V_i V_j \left[G_{ij} \cos\left(\theta_i - \theta_j\right) + B_{ij} \sin\left(\theta_i - \theta_j\right) \right]$$

$$\approx \sum_{j=1}^{n} B_{ij} \left(\theta_i - \theta_j\right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} B_{ij} \left(\theta_i - \theta_j\right)$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} V_i V_j \left[G_{ij} \sin\left(\theta_i - \theta_j\right) - B_{ij} \cos\left(\theta_i - \theta_j\right) \right]$$

$$\approx -\sum_{j=1}^{n} B_{ij} = -\left(B_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} B_{ij} \right)$$

SOLUÇÃO DO TRÂNSITO DE ENERGIA
Modelo de Corrente Contínua (3)

Desprezando a resistência e a admitância transversal das linhas

$$B_{ij} = \frac{1}{X_{ij}} \quad (i \neq j)$$

$$B_{ii} = -\left(\frac{1}{X_{i1}} + \cdots + \frac{1}{X_{in}} \right) \quad \Rightarrow \quad B_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} B_{ij} = 0$$

Donde

$$P_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} B_{ij} \left(\theta_i - \theta_j \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} B_{ij} \theta_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} B_{ij} \theta_j = \qquad Q_i = 0$$

$$= -B_{ii} \theta_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} B_{ij} \theta_j = -\sum_{j=1}^{n} B_{ij} \theta_j$$

SOLUÇÃO DO TRÂNSITO DE ENERGIA
Modelo de Corrente Contínua (4)

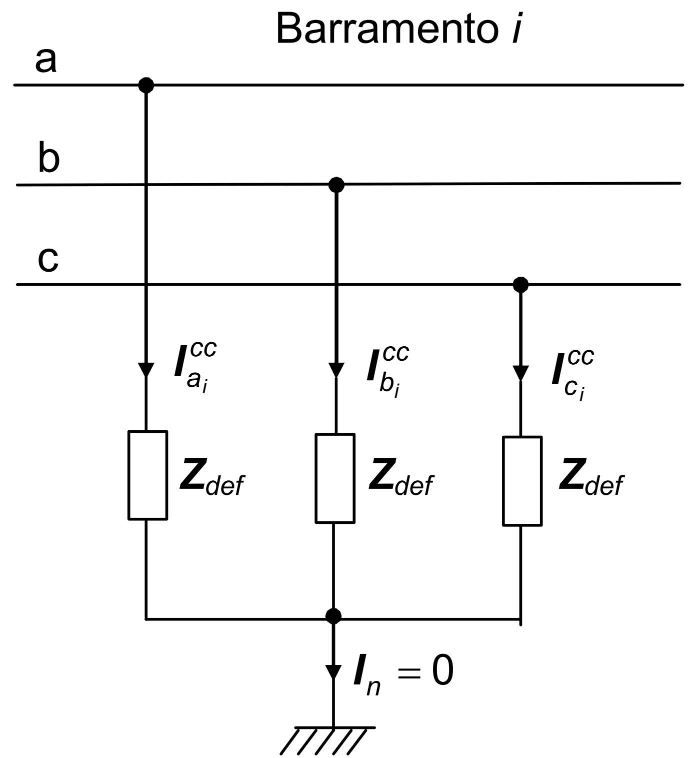
Em forma matricial:

$$[P] = -[B][\theta] \quad \Longrightarrow \quad [\theta] = -[B]^{-1}[P]$$

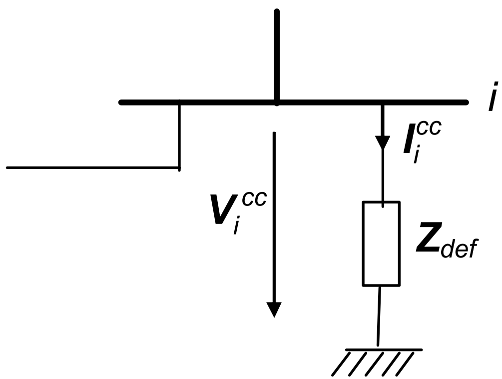
A potência transitada no ramo *i-j* é:

$$P_{ij} = \frac{V_i V_j}{X_{ij}} \sin(\theta_i - \theta_j) \approx B_{ij}(\theta_i - \theta_j)$$

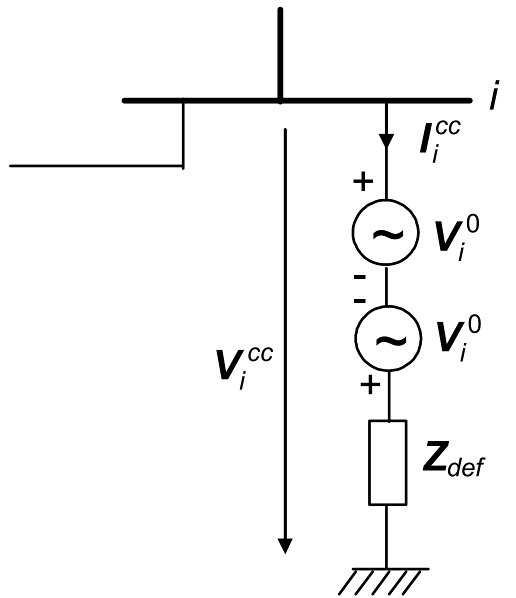
CURTO-CIRCUITO TRIFÁSICO SIMÉTRICO NO BARRAMENTO *i*



CURTO-CIRCUITO TRIFÁSICO SIMÉTRICO NO BARRAMENTO *i*
Esquema Monofásico Equivalente

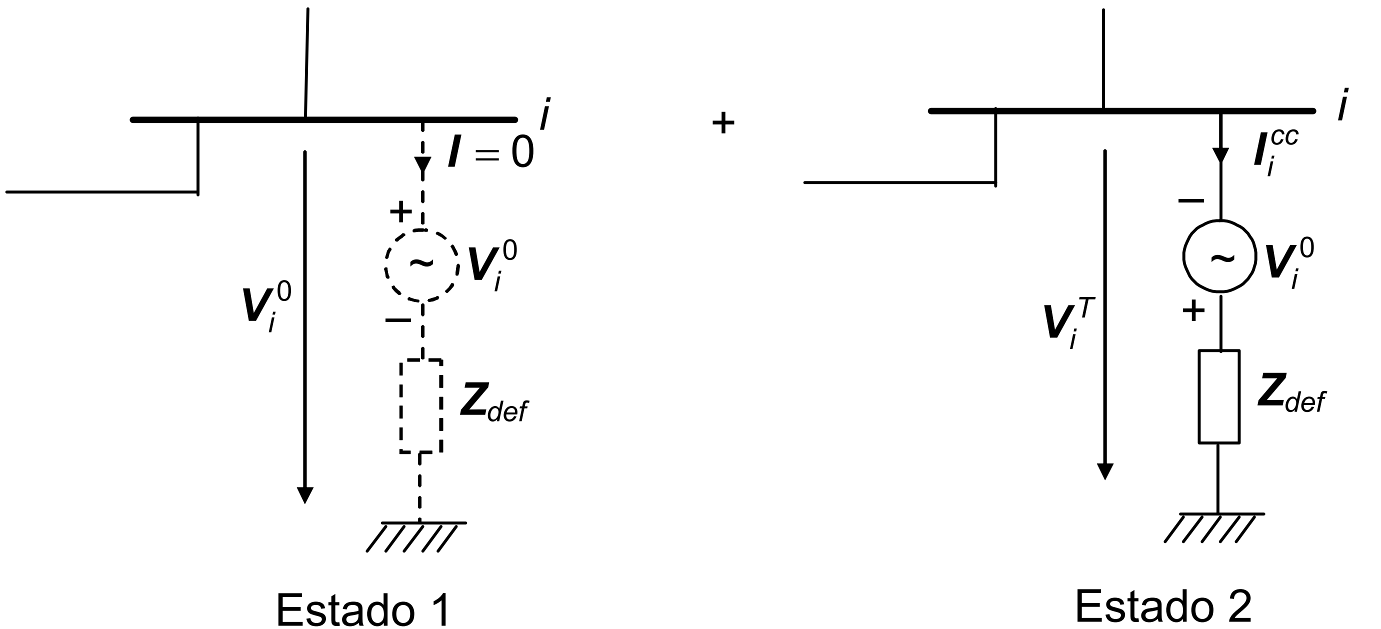


a

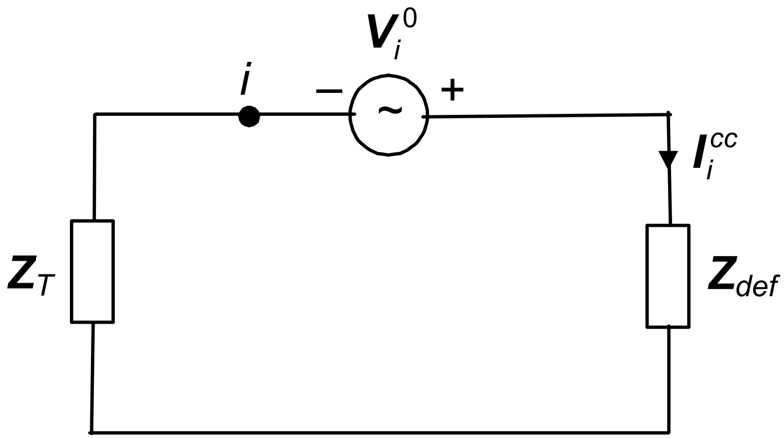


b

CURTO-CIRCUITO TRIFÁSICO SIMÉTRICO NO BARRAMENTO *i*
Teorema da Sobreposição



CURTO-CIRCUITO TRIFÁSICO SIMÉTRICO NO BARRAMENTO *i*
Esquema Equivalente de Thévenin



Corrente de curto-circuito

$$I_i^{cc} = \frac{V_i^0}{Z_{def} + Z_T}$$

Para um sistema trifásico

$$I_i^{cc} = \frac{V_i^0}{\sqrt{3}\left(Z_{def} + Z_T\right)}$$

$$Z_{def}=0 \quad \Longrightarrow \quad I_i^{cc} = \frac{V_i^0}{Z_T}$$

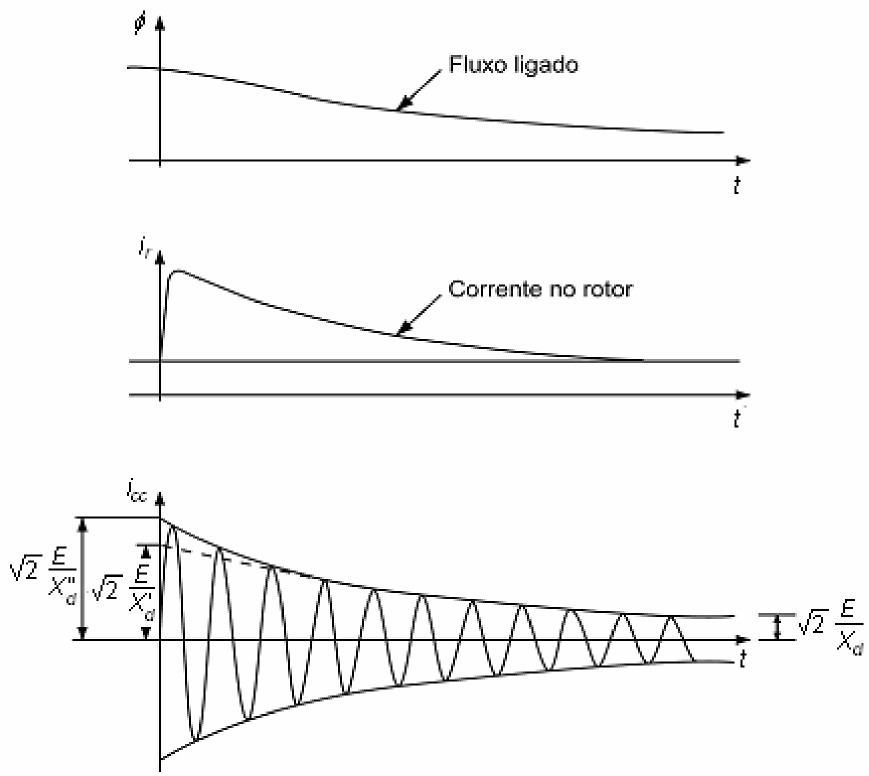
Potência de curto-circuito

$$S_i^{cc} = \sqrt{3}\, V_i^0\, I_i^{cc} = \frac{{V_i^0}^2}{Z_T}$$

Para a tensão nominal $V_i^0 = V_n$

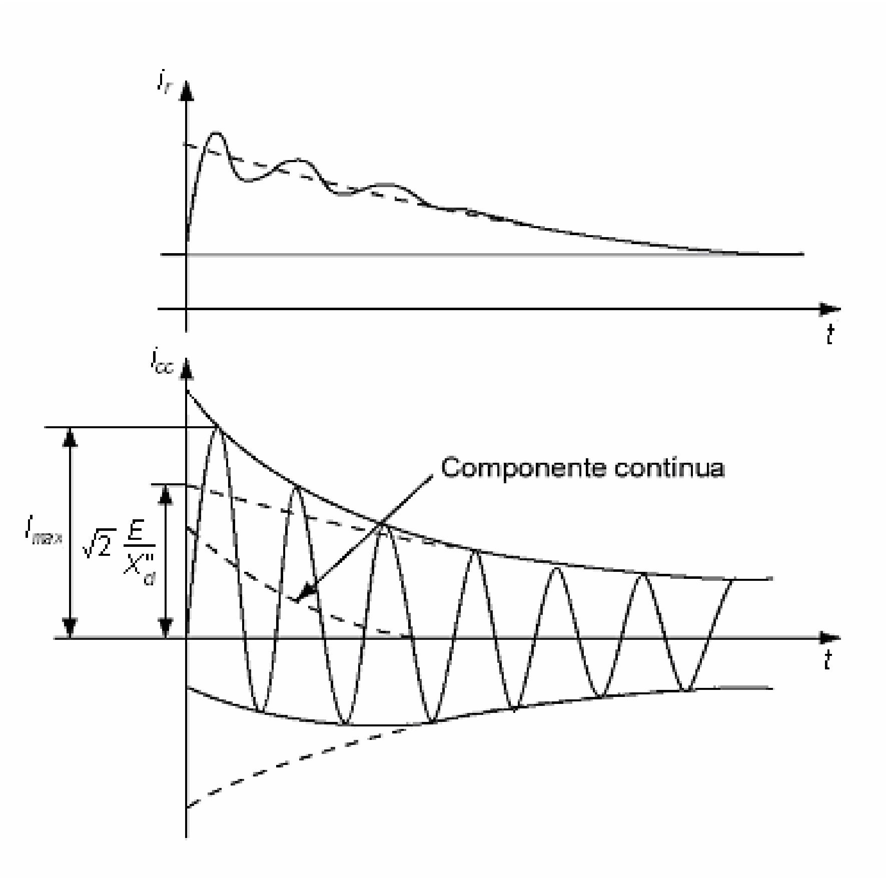
$$S_i^{cc} = I_i^{cc} = \frac{1}{Z_T} \text{ p.u.} \quad \Longleftarrow$$

CURTO-CIRCUITO DE UM GERADOR SÍNCRONO (1)



$$i_{cc} = \sqrt{2}\,\frac{E}{X_d^{'}}\cos\,(\omega t + \alpha_o)$$
$$-\frac{E}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{X_d^{'}} + \frac{1}{X_q}\right)\cos\alpha_o$$
$$-\frac{E}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{X_d^{'}} - \frac{1}{X_q}\right)\cos(2\omega t + \alpha_o)$$

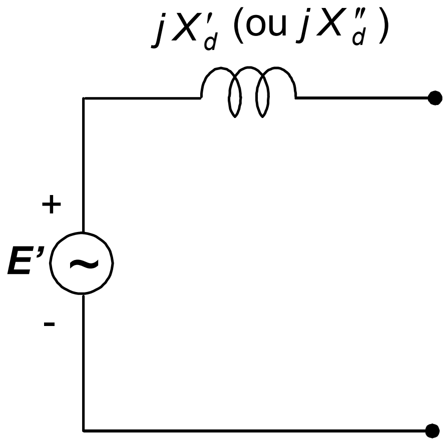
CURTO-CIRCUITO DE UM GERADOR SÍNCRONO (2)



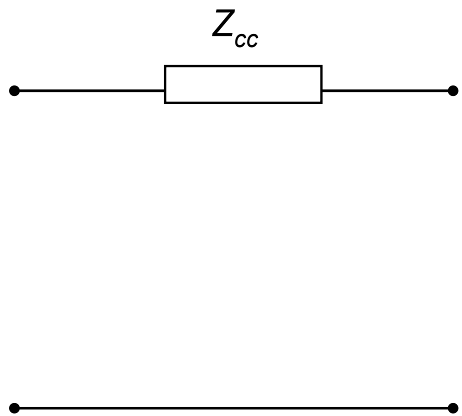
$$I_{max} = 1{,}8 \times \sqrt{2}\, I_{cc} = 2{,}55\, I_{cc}$$

MODELO DOS ELEMENTOS DA REDE

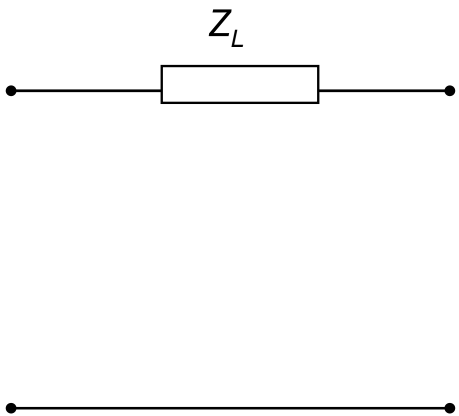
Gerador



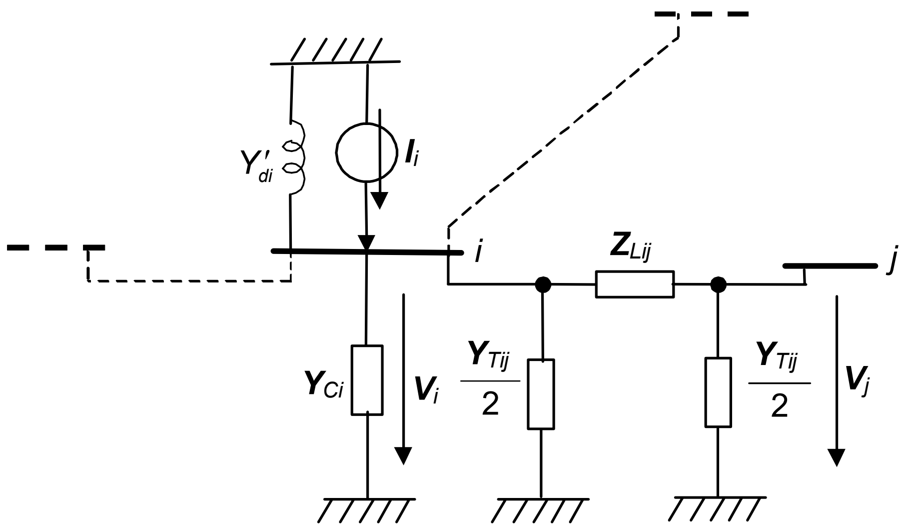
Transformador



Linha



MATRIZ DE ADMITÂNCIAS NODAIS



$$y_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(Y_{Gi} + Y_{Ci} + \frac{Y_{T_{ij}}}{2} + \frac{1}{Z_{L_{ij}}} \right)$$

$$y_{ij} = y_{ji} = -\frac{1}{Z_{L_{ij}}}$$

$$I_i = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} V_j$$

Equações nodais

$$[I] = [Y][V]$$

MATRIZ DE IMPEDÂNCIAS NODAIS

É a inversa da matriz das admitâncias nodais $\left[\boldsymbol{Z}\right]=\left[\boldsymbol{Y}\right]^{-1}$

Forma alternativa das equações nodais $\left[\boldsymbol{V}\right]=\left[\boldsymbol{Z}\right]\left[\boldsymbol{I}\right]$

Teorema da sobreposição

$$\begin{aligned}\left[\boldsymbol{V}^{cc}\right]&=\left[\boldsymbol{V}^{0}\right]+\left[\boldsymbol{V}^{T}\right]=\\&=\left[\boldsymbol{V}^{0}\right]+\left[\boldsymbol{Z}\right]\left[\boldsymbol{I}_{cc}\right]\end{aligned}$$

$$\left[\boldsymbol{I}^{cc}\right]=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ -I_i^{cc}\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}V_1^{cc}=V_1^0-z_{1i}\,I_i^{cc}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ V_i^{cc}=V_i^0-z_{ii}\,I_i^{cc}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ V_n^{cc}=V_n^0-z_{ni}\,I_i^{cc}\end{cases}$$

CORRENTE DE CURTO-CIRCUITO NO BARRAMENTO *i*

$$V_i^{cc} = Z_{def} I_i^{cc} \quad \Rightarrow \quad I_i^{cc} = \frac{V_i^0}{z_{ii} + Z_{def}}$$

$$Z_{def} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_i^{cc} = \frac{V_i^0}{z_{ii}} \qquad V_i^{cc} = 0$$

Sendo a tensão pré-defeito igual à nominal

$$I_i^{cc} = \frac{1}{z_{ii}} \qquad V_i^{cc} = 0 \qquad V_j^{cc} = 1 - \frac{z_{ji}}{z_{ii}} \qquad \text{p.u.}$$

Fundamentos de Energia Eléctrica

2º Exame — 1 de Fevereiro de 2018

Duração: 2 h

NOME: ______________________________ NÚMERO: | | | | | |

PARTE I. TEORIA (8 valores)

Nota: nas perguntas de escolha múltipla, cada resposta errada desconta 25% da cotação.

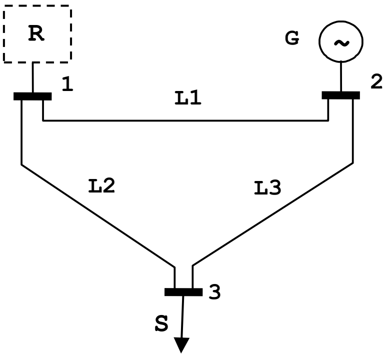
(não reproduzida)

Fundamentos de Energia Eléctrica

2º Exame —1 de Fevereiro de 2018

PARTE II. PROBLEMA 1 (2 + 1 + 2 = 5 valores)

Nota: na resposta aos problemas deve incluir a solução — a apresentar na moldura de cada alínea—, e a justificação da solução — a apresentar resumidamente por baixo da moldura.



Considere a rede de transporte a 150kV representada na figura sobre a qual é conhecido o seguinte:

Rede R: $S_{cc} = \infty$

Gerador G: S_N = 100MVA, X'_d=0,2pu

Linhas L1 e L3: V_N =150kV, $d_1 = d_3 = 100km$, $r \approx 0$; l=1,2 mH/km

Linha L2: V_N =150kV,$d_2 = 200km$, $r \approx 0$; l=1,2 mH/km

Carga S: P = 90MW, Q = 0Mvar

(valores pu na base da potência nominal de cada máquina)

a). Considere as linhas curtas e calcule o trânsito de energia na rede quando o gerador G está a gerar uma potência activa de 90MW. Indique as potências activas nas linhas (em MW). Considere as aproximações do modelo DC (Trânsito de Energia Linearizado).

P_{12} = -22.50	P_{23} = 67.50	P_{31} = -22.50

Fundamentos de Energia Eléctrica

2º Exame — 1 de Fevereiro de 2018

Duração: 2 h

NOME: ____________________ NÚMERO: | | | | | |

b) Admita que se perde a ligação do barramento 1 à rede R e calcule a potência de curto circuito no barramento 3 (em MVA).

S_{cc} = 307.07

c) Na situação da alínea anterior, i.e., sem ligação do barramento 1 à rede R, admita que o gerador G injecta a potência reactiva necessária para manter a tensão igual à nominal no barramento 2. Nesta situação, calcule a tensão composta (em kV) no barramento 3 e a potência reactiva gerada (em Mvar) pelo gerador G. Mantenha a representação das linhas como electricamente curtas.

V_3 = 149	Q_{G2} = 10.3

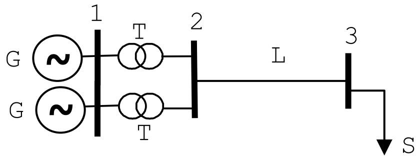
Fundamentos de Energia Eléctrica

2º Exame —1 de Fevereiro de 2018

PARTE II. PROBLEMA 2 (1 + 2 + 2 + 2 = 7 valores)

Nota: na resposta aos problemas deve incluir a solução — a apresentar na moldura de cada alínea—, e a justificação da solução — a apresentar resumidamente por baixo da moldura.

Considere um sistema de energia eléctrica constituído por dois grupos gerador/transformador ligados por uma linha L a uma carga S.



Geradores G:	10kV, S_N=200MVA, X_s = 1,0pu
Transformadores T:	10/220kV, S_N=200MVA;
[Ensaios]	Curto circuito: V_{cc} = 5%, P_{cc}=1000kW;
	Vazio: I_0 =100A (do lado dos 10kV), P_0=500kW.
Linha L:	V_N=220kV, d = 200 km, r=0, l = 0,97 mH/km, c =12 nF/km
Carga S:	P = 300MW, f.p.≈1

a) Represente a linha L pelo equivalente em Π Nominal e calcule os parâmetros $\mathbf{Z}_L$ e $\mathbf{Y}_T$ (em Ω e S) para este equivalente. Calcule também a potência natural P_n da linha (em MW).

Z_L = j60	Y_T = j75.4e-3	P_n = 170.2

b) Suponha que quer obter no barramento 3 uma tensão próxima da tensão nominal, i.e. v_3=1pu, quando está ligada a carga S nesse barramento. Calcule o valor eficaz da tensão composta (em kV) que é necessário garantir no barramento 2.

V_2 = 230.5

Fundamentos de Energia Eléctrica

2º Exame — 1 de Fevereiro de 2018

Duração: 2 h

NOME: ______________________ NÚMERO: | | | | | |

c) Nas condições da alínea b), calcule as perdas no ferro e as perdas no cobre em cada um dos transformadores (em MW) [se não fez a alínea b), considere a potência pedida em 2 como aproximadamente igual a S e a q.d.t. na linha L como aproximadamente 10%].

ΔP_{FE} = 0.549	ΔP_{CU}= 0.545

d) Suponha que a carga S varia ao longo do tempo entre 170MW e 300MW, i.e. S∈[170, 300] MW, com f.p.≈1. Determine a variação (em %) da corrente de excitação necessária para manter a tensão nominal na carga durante todo o tempo. Refira a variação ao valor para S = 300MW e considere que os geradores são actuados pelo mesmo controlador.

Δi_x = 24.3

Fundamentos de Energia Eléctrica

2º Exame —1 de Fevereiro de 2018

FORMULÁRIO

$$\mathbf{S}_{12} = \frac{V_1 V_2 \sin\delta}{X} + j\,\frac{V_1^2 - V_1 V_2 \cos\delta}{X}$$

$$\mathrm{f} = \mathrm{p}\frac{\mathrm{n}}{60}$$

$$\mathrm{P_M} = \mathrm{T}\omega_\mathrm{r}$$

$$\mathrm{P_M} = 3\frac{1-\mathrm{s}}{\mathrm{s}}\mathrm{R_r I_r^2}$$

$$s = \frac{\omega_s - \omega_r}{\omega_s} \qquad \mathrm{s}_{\mathrm{T_{max}}} = \frac{\mathrm{R_r}}{\sqrt{\mathrm{R_s^2} + (\mathrm{X_s} + \mathrm{X_r})^2}}$$

$$\begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\boldsymbol{\gamma}\lambda & \mathbf{Z_0}\sinh\boldsymbol{\gamma}\lambda \\ \mathbf{1}/\mathbf{Z_0}\sinh\boldsymbol{\gamma}\lambda & \cosh\boldsymbol{\gamma}\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z_0} = \sqrt{\frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Y}}} \quad ; \quad \boldsymbol{\gamma} = \sqrt{\mathbf{ZY}}$$

$$P_n = \frac{(V_n)^2}{Z_0}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\mathbf{Z_1} = \frac{\mathbf{Z_{12}Z_{13}}}{\mathbf{Z_{12}} + \mathbf{Z_{13}} + \mathbf{Z_{23}}} \quad ; \quad \mathbf{Z_2} = \frac{\mathbf{Z_{12}Z_{23}}}{\mathbf{Z_{12}} + \mathbf{Z_{13}} + \mathbf{Z_{23}}} \quad ; \quad \mathbf{Z_3} = \frac{\mathbf{Z_{13}Z_{23}}}{\mathbf{Z_{12}} + \mathbf{Z_{13}} + \mathbf{Z_{23}}}$$

$$Z_\Delta = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_{\lambda(\mathrm{oposto})}}$$

$$[P] = -[B][\theta]$$

$$[\mathbf{V^{cc}}] = [\mathbf{V^0}] + [\mathbf{Z}][\mathbf{I^{cc}}]$$