hw3

4.26

2200017789

楼翰涛

1、(1) $\theta(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$

且 $\dot\theta(0)=\dot\theta(t_f)=0$, $\theta(0)=\frac{2}{3}\pi$ $\theta(t_f)=\frac{1}{3}\pi$

故 $a_0=\frac{2}{3}\pi$ $a_1=0$ $a_2=-\pi$ $a_3=\frac{2}{3}\pi$, $\theta(t)=\frac{2}{3}\pi-\pi(\frac{t}{t_f})^2+\frac{2}{3}\pi(\frac{t}{t_f})^3$ (量纲为deg, s)

(2) $\theta(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4+a_5t^5$

且 $\dot\theta(0)=\ddot\theta(0)=\dot\theta(t_f)=\ddot\theta(t_f)=0$. $\theta(0)=\frac{2}{3}\pi$ $\theta(t_f)=\frac{1}{3}\pi$

由ppt公式, $a_0=\frac{2}{3}\pi$ $a_1=0$ $a_2=0$ $a_3=10\frac{(\theta_f-\theta_0)}{t_f^3}=-\frac{10}{3}\pi$

$a_4=15\frac{(\theta_0-\theta_f)}{t_f^4}=5\pi$ $a_5=6\frac{\theta_f-\theta_0}{t_f^5}=-2\pi$

故 $\theta(t)=\frac{2}{3}\pi-\frac{10}{3}\pi(\frac{t}{t_f})^3+5\pi(\frac{t}{t_f})^4-2\pi(\frac{t}{t_f})^5$ (量纲deg, s)

(3) 不妨设 第一段 $\theta(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$ 第二段 $\theta(t)=(a_0+a_1+a_2+a_3)+(a_1+2a_2+3a_3)(t-t_1)+(a_2+3a_3)(t-t_1)^2+b(t-t_1)^3$

那么,有: $a_0=\theta_0=\frac{1}{3}\pi$ $a_1=\dot\theta_0=0$

$a_0+a_1+a_2+a_3=\theta_v=\frac{2}{3}\pi$

$(a_0+a_1+a_2+a_3)+(a_1+2a_2+3a_3)+a_2+3a_3+b=\theta_f=\frac{1}{6}\pi$

$(a_1+2a_2+3a_3)+(2a_2+6a_3)+3b=\dot\theta_f=0$

联立, $\begin{cases} a_2+a_3=\frac{1}{3}\pi \\ 4a_2+7a_3+b=-\frac{1}{6}\pi \\ 4a_2+9a_3+3b=0 \end{cases}$ $\begin{cases} a_2=\frac{9}{8}\pi \\ a_3=-\frac{19}{24}\pi \\ b=\frac{7}{8}\pi \end{cases}$

故 $0\le t\le t_1$ $\theta(t)=\frac{1}{3}\pi+\frac{9}{8}\pi\cdot(\frac{t}{t_1})^2-\frac{19}{24}\pi(\frac{t}{t_1})^3$

$t_1\le t\le t_2$: $\theta(t)=\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{8}\pi\cdot\frac{t-t_1}{t_1}-\frac{5}{4}\pi(\frac{t-t_1}{t_1})^2+\frac{7}{8}\pi(\frac{t-t_1}{t_1})^3$

随时间变化:见代码包 hw3_other_code 文件夹中 plt 1-1 1-2 1-3.

4. 1、先推导任意的t^n: $L(t^n)=\int_{0^-}^{+\infty}t^ne^{-st}dt$ 由全微分, $fg=\int f'g+\int g'f$.

$\int t^{n+1}e^{-st}dt=-\frac{t^{n+1}}{s}e^{-st}+\frac{n+1}{s}\int t^ne^{-st}dt$

即 $L(t^n)=\frac{n}{s}L(t^{n-1})$ 而 $L(t^0)=L(1)=\frac{1}{s}$, 故 $L(t^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}$

那么 $L(t^2+3t+2)=L(t^2)+3L(t)+2L(1)=\frac{2}{s^3}+\frac{3}{s^2}+\frac{2}{s}$

2. 先推导 t^ne^{-at}: $L(t^ne^{-at})=\int_{0^-}^{+\infty}t^ne^{-(s+a)t}dt=\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$ (由1)

那么 $L(1-te^t)=L(1)-L(te^t)=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s-1)^2}$

3. $L((t^2-2t+1)e^t)=L(t^2e^t)-2L(te^t)+L(e^t)=\frac{2}{(s-1)^3}-\frac{2}{(s-1)^2}+\frac{1}{s-1}$

4.   4.   先推导任意的 $\sin wt$，$\cos wt$

$$L(\cos wt)+iL(\sin wt)=\int_{0^-}^{+\infty} e^{iwt}e^{-st}dt=\frac{1}{s-iw}$$

$$L(\cos wt)-iL(\sin wt)=\int_{0^-}^{\infty} e^{-iwt}e^{-st}dt=\frac{1}{s+iw}$$

故 $L(\sin wt)=\left(\frac{1}{s-iw}-\frac{1}{s+iw}\right)\cdot\frac{1}{2i}=\frac{2iw}{s^2+w^2}\cdot\frac{1}{2i}=\frac{w}{s^2+w^2}$

$L(\cos wt)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-iw}+\frac{1}{s+iw}\right)=\frac{s}{s^2+w^2}$

那么 $L(5\sin 2t-3\cos 2t)=5\cdot\frac{2}{s^2+4}-3\cdot\frac{s}{s^2+4}=\frac{10-3s}{s^2+4}$

5. 类似4，有 $L(t\cos wt)+iL(t\sin wt)=\int_{0^-}^{+\infty} te^{-(s-iw)t}dt=\frac{1}{(s-iw)^2}$

$L(t\cos wt)-iL(t\sin wt)=\int_{0^-}^{+\infty} te^{-(s+iw)t}dt=\frac{1}{(s+iw)^2}$

故 $L(t\sin wt)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(s-iw)^2}-\frac{1}{(s+iw)^2}\right)=\frac{1}{2i}\frac{4iws}{(s^2-w^2)^2+4w^2s^2}=\frac{2ws}{(s^2+w^2)^2}$

$L\left(\frac{t}{2\beta}\sin at\right)=\frac{1}{2\beta}\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}=\frac{as}{\beta(s^2+a^2)^2}$

6. 先推导 $L(e^{-at}\sin wt)$，类似地，$\int_{0^-}^{+\infty} e^{-(s+a-iw)t}dt=\frac{1}{s+a-iw}$

$L(e^{-at}\sin wt)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s+a-iw}-\frac{1}{s+a+iw}\right)=\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$

故 $L(e^{-2t}\sin 6t)=\frac{6}{(s+2)^2+36}$

5.   1. $\frac{1}{(s^2+4)^2}\overset{w=2}{=\!=}\frac{1}{4}\cdot\frac{2ws}{(s^2+w^2)^2}\cdot\frac{1}{s}$

$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right)=\frac{1}{4}L^{-1}\left(\frac{1}{s}\cdot\frac{2ws}{(s^2+w^2)^2}\right)=\frac{1}{4}\cdot\int t\sin 2t\,dt=\frac{1}{16}(\sin 2t-2t\cos 2t)$

2. $\frac{1}{s^4+5s^2+4}=\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$

$L^{-1}\left(\frac{1}{s^4+5s^2+4}\right)=\frac{1}{3}L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+4}\right)=\frac{1}{3}\left[L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)-L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)\right]=\frac{1}{3}\left(\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)$

3. $\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}=\frac{(s+2)}{((s+2)^2+1)^2}$

$L^{-1}\left(\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}\right)=\frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{2(s+2)}{((s+2)^2+1)^2}\right)=\frac{1}{2}e^{-2t}t\sin t$

4. $\frac{s^2+4s+4}{(s^2+4s+13)^2}=\frac{(s+2)^2}{((s+2)^2+3^2)^2}$

$L^{-1}\left(\frac{s^2+4s+4}{(s^2+4s+13)^2}\right)=\frac{1}{2}e^{-2t}L^{-1}\left(\frac{s^2}{(s^2+3^2)^2}\right)=\frac{1}{2}e^{-2t}L^{-1}\left(\frac{s^2-3^2}{(s^2+3^2)^2}+\frac{3^2}{(s^2+3^2)^2}\right)=\frac{1}{2}e^{-2t}\left(t\cos 3t+\frac{1}{3}\sin 3t\right)$

5. $\frac{2s^2+s+5}{s^3+6s^2+11s+6}=\frac{2s^2+s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{3}{s+1}-\frac{11}{s+2}+\frac{10}{s+3}$

故 $L^{-1}(F(s))=L^{-1}\left(\frac{3}{s+1}\right)-L^{-1}\left(\frac{11}{s+2}\right)+L^{-1}\left(\frac{10}{s+3}\right)$

$=3e^{-t}-11e^{-2t}+10e^{-3t}$

6. $\frac{2s^2+3s+3}{(s+1)(s+3)^2}=\frac{1}{2(s+1)}+\frac{3}{2(s+3)}-\frac{6}{(s+3)^2}$

故 $L^{-1}(F(s))=\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-3t}-6t\cdot e^{-3t}$