# Esercizio 1

$H_1 =$ " La moneta dà testa" $\quad p(H_1) = \frac{1}{2}$

$H_2 = H_1^c =$ " La moneta dà croce" $\quad p(H_2) = \frac{1}{2}$

- $E =$ " Esce 6 almeno una volta"

$p(E) = 1 - p(E^c)$ con $E^c =$ " Il 6 non esce nemmeno una volta"

$p(E^c) = p(E^c|H_1) \cdot p(H_1) + p(E^c|H_2) \cdot p(H_2)$ (probabilità totale)

$p(E^c|H_1) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$p(E^c|H_2) = \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}$

per cui $p(E^c) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}\right]$

$p(E) = 1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}\right]$

- $F =$ " Il 6 esce n volte"

$p(F) = p(F|H_1) \cdot p(H_1) + p(F|H_2) \cdot p(H_2)$

$p(F|H_1) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$

$p(F|H_2) = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^n$ (della binomiale)

$p(F) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{6}\right)^n + \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^n\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left[1 + \binom{2n}{n}\left(\frac{5}{6}\right)^n\right]$

- $p(H_1|F) = \dfrac{p(F|H_1) \cdot p(H_1)}{p(F)} = \dfrac{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\left(\frac{1}{6}\right)^n}}{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\left(\frac{1}{6}\right)^n}\left[1 + \binom{2n}{n}\left(\frac{5}{6}\right)^n\right]} =$

$= \dfrac{1}{1 + \binom{2n}{n}\left(\frac{5}{6}\right)^n}$

# Esercizio 2

- la funzione $f(x;\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

prende valori maggiori o uguali a 0. Inoltre

$$\int_{\mathbb{R}} f(x;\theta)\,dx = \int_0^1 \theta x^{\theta-1}\,dx = \theta \int_0^1 x^{\theta-1}\,dx = \theta \left.\frac{x^\theta}{\theta}\right|_0^1 = \frac{\theta}{\theta} = 1$$

- $$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x;\theta)\,dx = \int_0^1 x\,\theta x^{\theta-1}\,dx = \theta \int_0^1 x^\theta\,dx = \theta \left.\frac{x^{\theta+1}}{\theta+1}\right|_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1}$$

- Da $E[X] = \frac{\theta}{\theta+1} \Rightarrow E[X]\cdot\theta + E[X] = \theta \Rightarrow$

$$\left(E[X] - 1\right)\theta = -E[X] \Rightarrow \theta = \frac{E[X]}{1-E[X]}$$

Lo stimatore dei momenti è allora $\hat{\theta} = \frac{\overline{X}_n}{1-\overline{X}_n}$

dove $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ (media campionaria)

- La densità congiunta è

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \begin{cases} \theta^n (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\theta-1} & 0 \le x_i \le 1 \ \forall i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\ln g(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = n \ln\theta + (\theta-1)\ln(x_1 \dots x_n)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln g(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \frac{n}{\theta} + \ln(x_1 x_2 \dots x_n) \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{n}{\theta} = -\sum_{i=1}^n \ln x_i \ ; \quad \frac{\theta}{n} = \frac{1}{-\sum_{i=1}^n \ln x_i}$$

$$\theta = \frac{1}{-\frac{1}{n}\sum_i \ln x_i} \ ; \quad \widehat{\theta}_n = \frac{1}{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln X_i}$$

- $Y = -\ln X$

dato che $X$ prende valori in $[0,1]$, $Y$
prende valori ~~tra~~ $[0,\infty)$

Detta $G(t) := P(Y \leq t)$, abbiamo $F(t) = 0 \ \forall t < 0$

se $t \geq 0$ si ha invece

$$P(Y \leq t) = P(-\ln X \leq t) = P(\ln X \geq -t) =$$
$$P(X \geq e^{-t}) = 1 - P(X < e^{-t})$$
$$= 1 - \int_0^{e^{-t}} \theta x^{\theta - 1} \, dx$$

La densità di $Y$ è $g(t) = G'(t)$
ed è nulla per $t < 0$

Per $t \geq 0$ è data da $g(t) = -\theta (e^{-t})^{\theta-1} (-e^{-t})$
$$= \theta e^{t} e^{-\theta t - t} = \theta e^{-\theta t}$$

(variabile esponenziale)

# Esercizio 3

- L'errore di prima specie consiste nel rifiutare l'ipotesi nulla quando è vera.
  L'errore di seconda specie consiste nell'accettare l'ipotesi nulla quando è falsa.

Nell'analogia "giudiziaria", l'errore di prima specie porta alla condanna di un innocente; quello di seconda specie all'assoluzione di un colpevole.

-

$\overline{X} = 180 \ m \qquad S_X^2 = 92 \ m^2 \qquad n = 12$

$\overline{Y} = 136 \ m \qquad S_Y^2 = 86 \ m^2 \qquad m = 10$

$n + m - 2 = 22 - 2 = 20$

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2} = \frac{11 \cdot 92 + 9 \cdot 86}{20} \ m^2 = 89.3 \ m^2$$

$S_p = 9.45$

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = \frac{180 - 136}{9.45 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{20}}} = 10.87$$

L'ipotesi nulla è $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

Si rifiuta $H_0$ se $|T| > t_{1-\alpha/2,\ n+m-2}$

Nel nostro caso: $\alpha = 5\%$ $\qquad t_{0.975,\ 20} = 2.0860$

$\Rightarrow$ si rifiuta $H_0$

$\alpha = 10\%$ $\qquad t_{0.95,\ 20} = 1.724 \Rightarrow$ si rifiuta $H_0$