CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
CALCOLO NUMERICO
Primo esonero - 11 Aprile 2012 -

Traccia 1. [Punti: 1.a: 1; 1.b: 1; 1.c: 2; 1.d: 2; 1.e: 1; 1.f: 2]

Si considerino l'insieme dei numeri di macchina $\mathbb{F}_{(10,3,-3,4)}$ in base $\beta = 10$, quattro cifre significative, e range per l'esponente $(-3, 4)$, e la corrispondente aritmetica floating-point ottenuta con tecnica dell'arrotondamento. Dati i numeri reali $x = 3.2415$, $y = 1.0805$, risolvere i seguenti quesiti.

(1.a) Calcolare, in $\mathbb{F}$, il risultato dell'operazione $x + y$, determinandone l'errore totale.

(1.b) Calcolare, in $\mathbb{F}$, il risultato dell'operazione $x * y$, determinandone l'errore inerente e l'errore algoritmico.

(1.c) Calcolare, in $\mathbb{F}$, il risultato dell'operazione $x - y$ e dire, motivando la risposta, se si ha cancellazione numerica.

(1.d) Calcolare, in $\mathbb{F}$, il risultato dell'operazione $x - 3 * y$ e dire, motivando la risposta, se si ha cancellazione numerica.

(1.e) Determinare, in $\mathbb{F}$, il risultato delle seguenti espressioni: $realmax + 10 * realmin$, $realmax + 50 * realmin$.

(1.f) Determinare, in $\mathbb{F}$, il risultato della seguente espressione: $(\sqrt[4]{realmax})^4$.

Traccia 2. [Punti: 2.a: 1; 2.b: 2; 2.c: 1; 2.d: 2; 2.e: 3]
Si consideri la funzione

$$\Phi(x) = \frac{1 + a}{x^2 + a}$$

dove a è un parametro reale, $a \neq -1$. A partire da un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, si consideri la successione definita ricorsivamente da $x_n = \Phi(x_{n-1})$.

(2.a) Verificare che $\alpha = 1$ è punto fisso di Φ, indipendentemente dalla scelta del parametro a.

(2.b) Per quali valori del parametro a, il metodo associato a Φ risulta localmente convergente ad α?

(2.c) Esistono valori di a che rendono la convergenza quadratica?

(2.d) Si fissi $a = 3$. Provare che per ogni $x_0 \in [0, 2]$ risulta $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

(2.e) Si fissi $a = 3$. Determinare il più grande intervallo di convergenza ad α.

Traccia 3. [Punti 5]
Enunciare e dimostrare il teorema sull'ordine di convergenza di un metodo iterativo.

TRACCIA n° 2, APR 2012

(2.a)

$$\phi(1) = \frac{1+a}{1+a} = 1$$

quindi $\alpha = 1$ è punto fisso di ϕ

(2.b) La condizione per la convergenza locale è $|\phi'(\alpha)| < 1$. Dunque, dovremo imporre

$$-1 < \phi'(1) < 1$$

Da $\phi(x) = \dfrac{1+a}{x^2+a}$, ricavo

$$\phi'(x) = -\frac{(1+a)\cdot 2x}{(x^2+a)^2}, \quad \text{quindi}$$

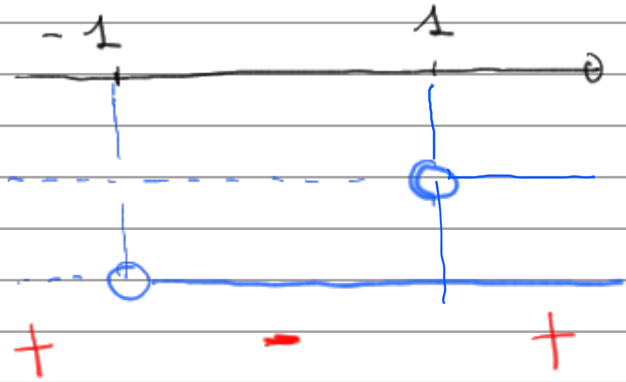
$$\phi'(1) = -\frac{2}{1+a}.$$

$$\begin{cases} -\dfrac{2}{1+a} > -1 \\ -\dfrac{2}{1+a} < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 - \dfrac{2}{1+a} > 0 \\ 1 + \dfrac{2}{1+a} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a-1}{a+1} > 0 \\[2ex] \dfrac{a+3}{a+1} > 0 \end{cases}$$

- $\dfrac{a-1}{a+1} > 0$ N: $a > 1$

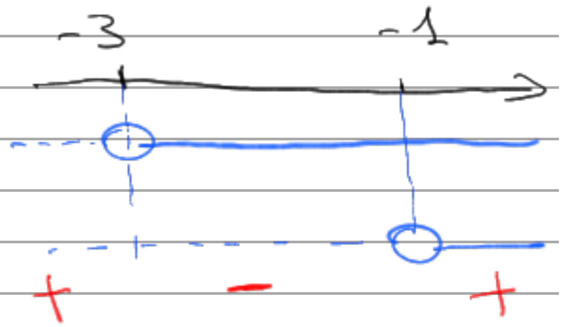
D: $a > -1$



$a < -1 \ \vee \ a > 1$

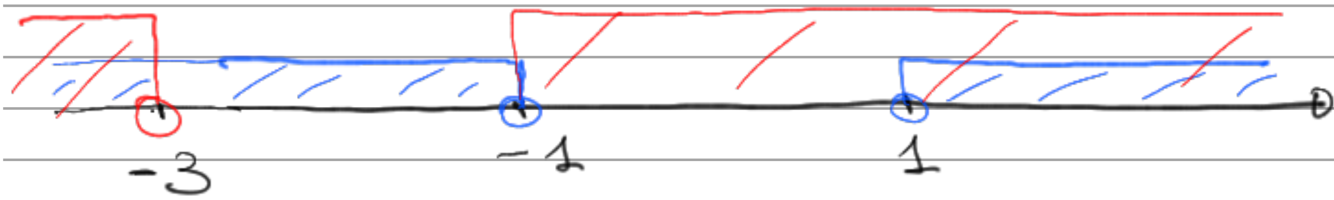
- $\dfrac{a+3}{a+1} > 0$ N: $a > -3$

D: $a > -1$



$a < -3 \ \vee \ a > -1$

Intersechiamo le due soluzioni :



Risultato :

$a < -3 \quad \vee \quad a > 1$

(2.c) Si ha convergenza quadratica se $\phi'(\alpha)=0$ (e $\phi''(\alpha)\neq 0$)

Nel nostro caso, $\alpha=1$ e

$\phi'(1) = -\frac{2}{1+a}$ quindi

$\phi'(1)\neq 0$ $\forall$ a reale $(\neq 1)$

CONCLUSIONE: Non si può ottenere convergenza quadratica.

(2.d) Dobbiamo provare che, per $a=3$, il metodo è globalmente convergente in $[0,2]$.

Per $a=3$, otteniamo:

$$\phi(x) = \frac{4}{x^2+3}, \qquad \phi'(x) = -\frac{8x}{(x^2+3)^2}$$

In base al teorema di convergenza globale, dobbiamo verificare che:

- $\phi([0,2]) \subseteq [0,2]$
- $|\phi'(x)|<1, \quad \forall x\in[0,2]$

Cominciamo dalla seconda. Osserviamo che

$$|\phi'(x)| = \frac{8x}{(x^2+3)^2} \quad \text{per } x \in [0,2]$$

STRADA CLASSICA: calcolare la derivata prima di $f(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2}$

e determinare il massimo di $f(x)$.

SCORCIATOIA:

osservare che nel sottointervallo $[0,1]$

$$|\phi'(x)| < \frac{\max(8x)}{\min(x^2+3)^2} = \frac{8}{9} < 1$$

Inoltre si osserva che per $x \in [1,2]$ la funzione è decrescente, quindi

$$\max_{1 \leq x \leq 2} |\phi'(x)| = |\phi'(1)| = \frac{8}{16}$$

In definitiva:

$$|\phi'(x)| < 1, \quad \forall x \in [0,2]$$

- Proviamo, infine, la condizione

$$0 \le x \le 2 \quad \Rightarrow \quad 0 \le \phi(x) \le 2$$

Osserviamo che in $[0,2]$ $\quad \phi'(x) < 0$
quindi $\phi(x)$ è strett. decrescente.
Possiamo scrivere

$$0 \le x \le 2 \quad \Rightarrow \quad \phi(2) \le \phi(x) \le \phi(0)$$

Risulta:

$$\phi(0) = \frac{4}{3}$$

$$\phi(2) = \frac{4}{7}$$

Abbiamo provato che

$$0 \le x \le 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} \frac{4}{3} & \le \phi(x) < & \frac{4}{3} \\ \vee & & \wedge \\ 0 & & 2 \end{array}$$

(2.e) La più grande regione di convergenza è $\mathbb{R}$. Infatti, basta osservare che:

- Se $x_0 > 2$, $x_1 = \dfrac{4}{x_0^2+3} \in [0, 2]$
  e quindi $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

- Se $x_0 < 0$, $x_1 = \dfrac{4}{x_0^2+3} > 0$
  e quindi, dal punto precedente, abbiamo ancora:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
CALCOLO NUMERICO
Primo esonero - 21 Novembre 2013 -

Traccia 1. [Punti: 1.a: 2; 1.b: 2; 1.c: 2; 1.d: 2; 1.e: 2]

Si considerino l'insieme dei numeri di macchina $\mathbb{F}_{(2,4,-6,5)}$ in base $\beta = 2$, cinque cifre significative ($t = 4$), range per l'esponente $p \in (-6, 5)$, e la corrispondente aritmetica floating-point ottenuta con tecnica dell'arrotondamento. Risolvere i seguenti quesiti.

(1.a) Determinare il più piccolo numero di macchina positivo ω, il più grande numero di macchina positivo Ω e la precisione di macchina u.

(1.b) Calcolare, in $\mathbb{F}$, il risultato delle seguenti operazioni:

$$\omega + 1, \qquad \Omega + \frac{1}{2}, \qquad u\Omega + \frac{1}{2}.$$

(1.c) Siano $x, y \in \mathbb{F}$, x, y consecutivi. Si consideri la distanza tra x e y: $d = |x - y|$. Qual è il più piccolo e più grande valore che d può assumere?

(1.d) Supponendo che $fl(x) = 0, \forall |x| < \omega$ (assenza di numeri denormali), provare, riportando un opportuno controesempio, che in questa aritmetica di macchina non è verificata la seguente proprietà valida in $\mathbb{R}$:

$$x - y = 0 \implies x = y. \tag{1}$$

(1.e) Rispondere al quesito precedente, considerando la presenza dei numeri non normalizzati.

Traccia 2. [Punti: 2.a: 2; 2.b: 2; 2.c: 2; 2.d: 2]

Si consideri l'equazione di terzo grado

$$x^3 + x - 2 = 0$$

che ammette, in $\mathbb{R}$ l'unica radice $\alpha = 1$. Per la sua approssimazione, si considerino le seguenti funzioni iteratrici

$$\Phi_1(x) = (2 - x)^{\frac{1}{3}}, \qquad \Phi_2(x) = \frac{1}{3}\left(x + 4 - 2x^3\right),$$

che, evidentemente, ammettono $\alpha = 1$ quale punto fisso. Siano $x_n = \Phi_1(x_{n-1})$ e $y_n = \Phi_2(y_{n-1})$ le successioni generate dai due metodi a partire da un punto iniziale $x_0 = y_0$. Risolvere i seguenti quesiti.

(2.a) Studiare la convergenza locale alla radice α dei due metodi.

(2.b) Studiare la convergenza globale dei due metodi nell'intervallo $[0, \frac{3}{2}]$.

(2.c) Dire, motivando la risposta, se il metodo definito dalla funzione iteratrice $\Phi(x) = \Phi_1(\Phi_2(x))$, ottenuto come composizione dei due metodi di partenza, risulta localmente convergente ad α.

(2.d) Siano Φ_1 e Φ_2 due generiche funzioni iteratrici che ammettono uno stesso punto fisso α. Siano p_1 e p_2 i corrispondenti ordini di convergenza. Determinare l'ordine del metodo composto $\Phi(x) = \Phi_1(\Phi_2(x))$ e la relativa costante asintotica di convergenza.

Traccia n° 2, Novembre 2013

(2.a)

- $\phi_1(x) = (2-x)^{\frac{1}{3}}$;

$\phi_1'(x) = \frac{1}{3}(2-x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-1) = -\frac{1}{3}(2-x)^{-\frac{2}{3}}$

$|\phi_1'(1)| = \frac{1}{3}$ $\rightarrow$ Localmente convergente a 1

- $\phi_2(x) = \frac{1}{3}(x+4-2x^3)$

$\phi_2'(x) = \frac{1}{3}(1-6x^2)$

$|\phi_2'(1)| = \frac{1}{3}|1-6| = \frac{5}{3} > 1$

$\rightarrow$ non converge localmente a 1

(2.b) Il metodo definito da $\phi_2(x)$ non è localmente convergente e quindi non può essere globalmente convergente. Studiamo $\phi_1(x)$.

Osserviamo che

$\phi_1'(x) < 0, \ \forall x \Rightarrow \phi_1$ è monotona decrescente.

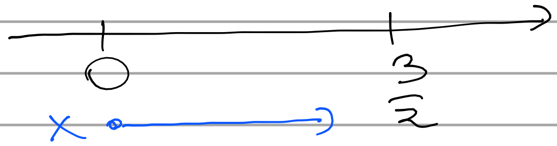
In base al teorema di convergenza globale esaminiamo le seguenti due condizioni sufficienti per la convergenza globale:

1) $\phi_1([a,b]) \subset [a,b]$

2) $|\phi_1'(x)| < 1, \quad \forall x \in [a,b]$

Partiamo dalla 2)

$$|\phi_1'(x)| = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(2-x)^2}}, \qquad x\in\left[0,\tfrac{3}{2}\right]$$



$$\max_{0\le x\le \frac{3}{2}} |\phi_1'(x)| = \left|\phi_1'\left(\tfrac{3}{2}\right)\right| = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 2^{\frac{2}{3}} < \frac{1}{3}\cdot 2^{1} < 1$$

Quindi la 2) è soddisfatta.

Per quanto riguarda la 1) occorre provare che

$$0 \le x \le \frac{3}{2} \Rightarrow 0 \le \phi_1(x) \le \frac{3}{2}$$

essendo $\phi_1(x)$ decrescente, se $0\le x\le \frac{3}{2}$

allora $\phi_1\left(\frac{3}{2}\right) \le \phi_1(x) \le \phi_1(0)$

$$\phi_1\left(\tfrac{3}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1/3} > 0, \qquad \phi_1(0) = \sqrt[3]{2} < \frac{3}{2}$$

la proprietà 1) è soddisfatta.

CONCLUSIONE: il metodo definito da ϕ_1 risulta globalmente convergente in $[0, \frac{3}{2}]$ allo zero $\alpha = 1$.

(2.c) $$\phi(x) = \phi_1(\phi_2(x))$$

$$\phi'(x) = \phi_1'(\phi_2(x)) \cdot \phi_2'(x)$$

$$\phi'(1) = \phi_1'(\phi_2(1)) \cdot \phi_2'(1)$$

$$= \phi_1'(1) \cdot \phi_2'(1)$$

Quindi, dal punto (2.a) otteniamo:

$$|\phi'(1)| = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{9} < 1$$

il metodo composto è localmente convergente.

(2.d) Dalla teoria, sappiamo che, in un intorno di α:

$$\phi_1(x) - \alpha = \frac{\phi_1^{(p_1)}(\alpha)}{p_1!} \cdot (x-\alpha)^{p_1} + o\left((x-\alpha)^{p_1}\right)$$

$$\underbrace{\phi_2(x) - \alpha} = \frac{\phi_2^{(p_2)}(\alpha)}{p_2!} (x-\alpha)^{p_2} + o\left((x-\alpha)^{p_2}\right)$$

Da cui:

$$\phi(x) - \alpha = \phi_1(\phi_2(x)) - \alpha$$

$$= \frac{\phi_1^{(p_1)}(\alpha)}{p_1!} \cdot \left(\phi_2(x) - \alpha \right)^{p_1} + \text{termini trascurabili}$$

$$= \frac{\phi_1^{(p_1)}(\alpha)}{p_1!} \left(\frac{\phi_2^{(p_2)}(\alpha)}{p_2!} (x - \alpha)^{p_2} \right)^{p_1} + \text{termini trascurabili}$$

$$= \frac{\phi_1^{(p_1)}(\alpha)}{p_1!} \cdot \left(\frac{\phi_2^{(p_2)}(\alpha)}{p_2!} \right)^{p_1} \cdot (x - \alpha)^{p_1 \cdot p_2} + t.t.$$

Quindi, in conclusione:

ORDINE DI ϕ_1: $\quad p = p_1 \cdot p_2$

COSTANTE ASINTOTICA DI ϕ_1: $\quad \frac{\phi_1^{(p_1)}(\alpha)}{p_1!} \cdot \left(\frac{\phi_2^{(p_2)}(\alpha)}{p_2!} \right)^{p_1}$

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
CALCOLO NUMERICO
Primo esonero - 04 Aprile 2013 -

Traccia 1. [Punti: 1.a: 1; 1.b: 3; 1.c: 2; 1.d: 1; 1.e: 1; 1.f: 2]

Si considerino l'insieme dei numeri di macchina $\mathbb{F}_{(10,3,-4,5)}$ in base $\beta = 10$, quattro cifre significative, range per l'esponente $p \in (-4, 5)$, e la corrispondente aritmetica floating-point ottenuta con tecnica dell'arrotondamento. Risolvere i seguenti quesiti.

(1.a) Determinare il più piccolo numero di macchina positivo ω, il più grande numero di macchina positivo Ω e la precisione di macchina u.

(1.b) Dati i numeri reali $x_1 = 1.23351 \cdot 10^1$ e $x_2 = 6.55047 \cdot 10^{-1}$, determinare, in $\mathbb{F}$, la somma $x_1 + x_2$ e la differenza $x_1 - x_2$.

(1.c) Denotati con s (somma) e d (differenza) i numeri di macchina ottenuti come risultati delle due operazioni al punto precedente, calcolare, in $\mathbb{F}$, $x_3 = \frac{s-d}{2}$. Ricavare quindi l'errore relativo $E = \frac{|x_3 - x_2|}{x_2}$ e dire se risulta più grande o più piccolo della precisione di macchina.

(1.e) Determinare il più piccolo numero di macchina positivo x_4 tale che $\Omega + x_4$ causi overflow.

(1.f) Determinare il più grande numero di macchina positivo x_5 tale che $\Omega + x_5 = \Omega$.

Traccia 2. [Punti: 2.a: 2; 2.b: 2; 2.c: 2; 2.d: 2]

Si consideri l'equazione di secondo grado

$$x^2 - (m-1)x - m = 0 \tag{1}$$

dove m è un parametro reale maggiore di 1: $m > 1$. Essa ammette sempre la radice $\alpha = -1$. Si consideri la funzione iteratrice

$$\Phi(x) = \frac{x^2 - m}{m - 1},$$

che si ottiene risolvendo la (2) rispetto a x. Sia $x_n = \Phi(x_{n-1})$ la successione generata dal metodo a partire da un punto iniziale x_0. Risolvere i seguenti quesiti.

(2.a) Per quali valori del parametro m, il metodo associato a Φ risulta localmente convergente ad α?

(2.b) Esistono valori di m che rendono la convergenza quadratica?

(2.c) Si fissi $m = 5$. Provare che per ogni $x_0 \in [-2, 0]$ risulta $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

(2.d) Determinare i valori di m in corrispondenza dei quali il metodo risulta globalmente convergente nell'intervallo $[-2, 0]$.

$$\phi(x) = \frac{x^2 - m}{m-1} \quad , \quad \alpha = -1$$

(2.a) Dovremo imporre, in base al teorema di convergenza locale:

$$|\phi'(\alpha)| < 1$$

$$\phi'(x) = \frac{2x}{m-1}$$ Quindi:

$$|\phi'(\alpha)| = \left| -\frac{2}{m-1} \right| = \frac{2}{m-1}$$

essendo $m>1$ dalla traccia

Imponiamo

$$\frac{2}{m-1} < 1$$

$$\Updownarrow \quad \text{essendo } m-1>0$$

$$2 < m-1$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{m > 3}$$

Il metodo risulta localmente convergente ad α per $m>3$

(2.b) Si ha convergenza quadratica se

$$\phi'(\alpha) = 0 \qquad (\text{e} \quad \phi''(\alpha) \neq 0)$$

Risulta

$$\phi'(\alpha) = \frac{2}{m-1} \neq 0 \qquad \forall\, m>1$$

Quindi, non esistono valori di m che rendono la convergenza quadratica.

(2.c) In base al teorema di convergenza globale possiamo verificare le seguenti condizioni sufficienti:

(a) $\phi([-2,0]) \subseteq [-2,0]$

(b) $|\phi'(x)| < 1, \quad \forall x \in [-2,0]$

Per $m=5$:

$$\phi(x) = \frac{x^2-5}{4}, \qquad \phi'(x) = \frac{x}{2}$$

$$-2 \leq x \leq 0 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{2} \leq 0 \Rightarrow -1 \leq \phi'(x) \leq 0$$

quindi $|\phi'(x)| < 1, \quad \forall x \in (-2, 0]$

Passiamo alla condizione (a):

$$-2 \leq x \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad -2 \leq \phi(x) \leq 0$$

Poiché $\phi'(x) \leq 0$ per $x \in [-2,0] \Longrightarrow$ $\phi(x)$ è decrescente in $[-2,0]$, quindi

$$-2 \leq x \leq 0 \Rightarrow \phi(0) \leq \phi(x) \leq \phi(-2)$$

$$\phi(0) = -\frac{5}{4}; \qquad \phi(-2) = -\frac{1}{4}$$

$$-\frac{5}{4} \leq \phi(x) \leq -\frac{1}{4} \Rightarrow -2 \leq \phi(x) \leq 0$$

In base ai calcoli effettuati, deduciamo la convergenza globale del metodo nell' intervallo

$$(-2, 0]$$

Tuttavia possiamo anche includere il punto -2.
Infatti, partendo da $x_0 = -2$, dopo un passo:

$$x_1 = \phi(x_0) = \phi(-2) = -\frac{1}{4} \in (-2, 0]$$

e quindi deduciamo la convergenza.

(2.d)

$$\phi(x) = \frac{x^2 - m}{m-1}, \qquad \phi'(x) = \frac{2x}{m-1}$$

Imponiamo: $|\phi'(x)| < 1, \quad \forall x \in [-2, 0]$

cioè: $\max\limits_{-2 \le x \le 0} |\phi'(x)| < 1$ (*)

$$|\phi'(x)| = \left|\frac{2x}{m-1}\right| = -\frac{2x}{m-1}$$ da cui:

essendo $m-1 > 0$
e $x \le 0$

$$\max_{-2 \le x \le 0} |\phi'(x)| = |\phi'(-2)| = \frac{4}{m-1}$$

Dunque (*) diventa: $\frac{4}{m-1} < 1 \iff m > 5$

Ora imponiamo: $\phi([-2,0]) \subseteq [-2,0]$

Osservando che $\phi'(x) < 0$, $\forall x \in [-2,0]$, otteniamo:

$$-2 \le x \le 0 \Rightarrow \phi(0) \le \phi(x) \le \phi(-2) \quad \text{cioè:}$$

$$-\frac{m}{m-1} \le \phi(x) \le \frac{4-m}{m-1}.$$

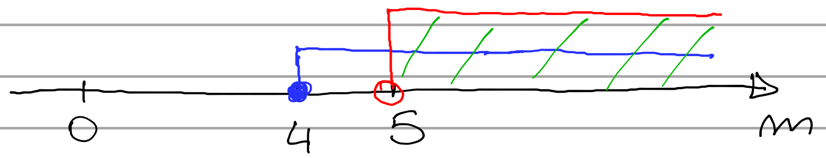
Dovremo quindi imporre:

essendo $m-1>0$

$$\begin{cases} -\dfrac{m}{m-1} \ge -2 \\[2ex] \dfrac{4-m}{m-1} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \ge -2(m-1) \\[2ex] 4-m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m \ge 2 \\ m \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 4$$

Intersecando questo insieme di soluzioni con quello ottenuto prima, otteniamo



$$m > 5$$

Osserviamo che possiamo anche includere il valore $m=5$ (vedi punto precedente). In conclusione, si avrà convergenza globale nell'intervallo $[-2,0]$ per $\boxed{m \ge 5}$