CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
CALCOLO NUMERICO
Secondo esonero - 16 Gennaio 2018 -

Traccia 1. [Punti: (1.a): 3; (1.b): 3; (1.c): 2; (1.d): 2; (1.e): 3]

Siano dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^5$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Sia $S = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_5\}$ il sottospazio generato dai cinque vettori.

(1.a) Qual è la dimensione di S? Determinarne una base.

(1.b) Determinare la dimensione e una base del sottospazio ortogonale $S^\perp$.

(1.c) Il vettore $x = [1, 0, 0, -1, -1]^\top$ appartiene a S, a $S^\perp$ o a nessuno dei due?

(1.d) Il vettore $y = [0, -1, 3, -1, 1]^\top$ appartiene a S, a $S^\perp$ o a nessuno dei due?

(1.e) Decomporre il vettore $z = [2, 0, 4, -2, 0]^\top$ come somma di due vettori $z = z_1 + z_2$, con $z_1 \in S$ e $z_2 \in S^\perp$.

Traccia 2. [Punti: (2.a): 3; (2.b): 3; (2.c): 3]

Si consideri la funzione di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad x \in [-1,\ 1].$$

(2.a) Calcolare il polinomio $p(x)$ che interpola la funzione f nei nodi $[-1,\ 0,\ 1]$.

(2.b) Approssimare l'integrale di $f(x)$ nell'intervallo $[-1,\ 1]$ mediante l'integrale di $p(x)$ nello stesso intervallo:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \simeq \int_{-1}^{1} p(x)\mathrm{d}x$$

Calcolare l'errore relativo.[1]

(2.c) Ripetere i calcoli del punto precedente considerando il polinomio di Taylor di secondo grado, sviluppato in un intorno di 0. Quale delle due approssimazioni risulta migliore?

[1] Ricordiamo che una primitiva di $f(x)$ è $F(x) = \arctan(x)$ e dunque $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \pi/2$.

Traccia 3. (Python) [Punti 8]

Data una matrice rettangolare $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, la norma uno di A è il numero reale (non negativo) definito dalla seguente espressione:

$$||A||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

<u>ESEMPI</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \max\{(1+2),\ (6+8),\ (5+3)\} = \max\{3,\ 14,\ 8\} = 14;$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \max\{(1+3+1),\ (2+2+3)\} = \max\{5,\ 7\} = 7.$$

Si scriva una function Python che abbia:

INPUT: A matrice;

OUTPUT: $norma1$, norma uno della matrice A.