

TRACCIA #1, ESONERO 2015

$$\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \underline{s}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \underline{s}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

(1.a) Poniamo $A = [\underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3, \underline{s}_4]$ e riduciamolo a scalini.

$$A_1 = \left[\begin{array}{cccc} \textcircled{-1} & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & -6 \end{array} \right] \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$$

$$A_2 = \left[\begin{array}{cccc} -1 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & \textcircled{3} & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ -1 \end{matrix}$$

$$A_3 = \left[\begin{array}{cccc} -1 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

\uparrow \uparrow
colonne pivotali

Dunque si sono $s=2$ vettori linearmente indipendenti tra $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3, \underline{s}_4$. Ad esempio, poniamo scegliere quelli corrispondenti alle colonne pivotali: $\underline{s}_1, \underline{s}_3$

(1.b) Sappiamo che

$$\dim(\text{Im}(A)) = \text{rank}(A) = 2$$

e che

$$\text{Im}(A) = \text{Span} \left\{ \underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3, \underline{s}_n \right\}$$

Possiamo scegliere, come base di $\text{Im}(A)$,
 $\{\underline{s}_1, \underline{s}_3\}$

(1.c) Sappiamo che

$$V^\perp = \text{ker}(A^T)$$

dunque, dovranno ricercare l'insieme
delle soluzioni del sistema lineare

$$A^T x = \underline{0} . \quad \text{Poniamo } B_1 = A_1^T$$

$$[B_1 | \underline{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[-3]{2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right]$$

$$[B_2 | \underline{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{3R_3 + R_4} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$[\beta_2 \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right]$$

$$[\beta_3 \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

↓ ↑
 colonne pivotali colonna libera

Il sistema triangolare superiore da risolvere è:

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Parametrizziamo l'incognita corrispondente
alla colonna libera:

$$x_3 = h \quad (h \in \mathbb{R})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 = h \\ 3x_2 = -3h \end{array} \right.$$

$$x_2 = -h, \quad x_1 = x_2 - h = -2h$$

Le soluzioni del sistema sono ∞^1 :

$$(*) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2h \\ -h \\ h \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}$$

Da $\dim(V) + \dim(V^\perp) = 3$

osserviamo che

$$\dim V^\perp = 1$$

Questo lo deduciamo anche da (*) .

che base di V^\perp è l'insieme formato
al setteore $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$(1.d) \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Posto $\underline{w}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, base di \mathcal{V}^\perp ,

dalle teoria seppiamo che $\{\underline{s}_1, \underline{s}_3, \underline{w}_1\}$ risulta ne base di \mathbb{R}^3 . Sviluppiamo \underline{b} lungo queste base. Posto

$$\mathcal{C} = [\underline{s}_1, \underline{s}_3, \underline{w}_1]$$

occorre risolvere il sistema lineare $Cx = \underline{b}$

$$[C_1 | b_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$$

$$[C_2 | b_2] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ -1 \end{matrix}$$

$$[C_3 | b_3] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array} \right]$$

Abbiamo ottenuto il seguente sistema lineare triangolare superiore

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = 6 \\ 6x_3 = -6 \end{cases}$$

$$x_3 = -1$$

$$x_2 = x_3 + 2 = 1$$

$$x_1 = 2x_2 - 2x_3 = 2 + 2 = 4$$

La soluzione è $\underline{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Quindi:

$$\underline{b} = \underbrace{4\underline{s}_1}_{\text{V}} + \underbrace{\underline{s}_3}_{\text{V}^\perp} - \underline{w}_1$$

Risulta quindi:

$$\underline{b}_1 = 4\underline{s}_1 + \underline{s}_3 = 4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+2 \\ 4+1 \\ -4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_2 = -\underline{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Abbiamo ottenuto

$$\underline{b} = \underline{b}_1 + \underline{b}_2, \quad \underline{b}_1 \in V, \quad \underline{b}_2 \in V^\perp$$

TRACCIA #2

ESONERO 2012

$$f(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

(2.a)

| x_i | y_i |
|-------|--------------------------------------|
| 0 | 0 |
| 1 | $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2$ |

Utilizzando le base di Lagrange:

$$L_0(x) = \frac{x-1}{0-1} = 1-x$$

$$L_1(x) = \frac{x-0}{1-0} = x$$

$$P_1(x) = L_0(x) \cdot 0 + L_1(x) \cdot y_1 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \right) x$$

(2.b) Dalle teorie sappiamo che

$$f(x) - P_1(x) = \omega_1(x) \cdot \frac{f''(\gamma_x)}{2!}$$

dove γ_x è un opportuno punto di $[0,1]$

$$\text{e } \omega_1(x) = x(x-1)$$

$$f'(x) = \operatorname{arctan} x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x$$

$$= \operatorname{arctan} x$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

Quindi

$$\|f - P_1\|_\infty \leq \underbrace{\max_{0 \leq x \leq 1} |\omega_1(x)|}_{2} \cdot \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(\gamma_x)|$$

↑
1

$$\leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq x \leq 1} |x(x-1)|$$

$$= \frac{1}{2} \max_{0 \leq x \leq 1} x(1-x)$$

→ il max
lo si ottiene
per $x = \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2} \max_{0 \leq x \leq 1} (x-x^2)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8}$$

(1.a) Riduciamo a scalini le matrici complete

$$[A_1 \mid b_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{-2}$$

$$[A_2 \mid b_2] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \end{array} \right]$$

↑ ↑ ↑
 colonne
pivotali colonne libere

le soluzioni sono

$$\infty^{3-2} = \infty^1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ -3y - 2z = -4 \end{array} \right.$$

infinite soluzioni
di pendenti da
1 parametro

Parametrizziamo l'incognita z : $z = h$, $h \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 - h \\ -3y = -4 + 2h \end{array} \right.$$

$$y = \frac{h}{3} - \frac{2}{3}h$$

$$x = 3 - h - \frac{4}{3} + \frac{2}{3}h = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}h$$

L'insieme delle soluzioni è:

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} h, \quad h \in \mathbb{R}$$

(1.b) La terza equazione può essere scelta
come una qualsiasi combinazione lineare delle
prime due. Ad esempio, sommando le
prime due equazioni otteniamo:

$$3x + z = 5$$

(1.c) Basta scegliere, ad esempio:

$$3x + z = a, \quad a \neq 5$$

oppure, la terza equazione potrebbe
essere:

$$0 = 1$$

TRACCIA #2

ESONERO: GIUGNO 2013

(2.a) In termini algebrici, occorre determinare gli eventuali valori del parametro α affinché il seguente sistema sia compatibile:

$$A \underline{x} = \underline{b}, \text{ con } A = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$$

Riduciamo a scalini le matrice complete:

$$[A_1 | \underline{b}_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & \alpha + 2 \\ 0 & -1 & 2 & \alpha + 1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & 2\alpha \end{array} \right] \quad \begin{matrix} \textcircled{-2} \\ \textcircled{0} \\ \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \textcircled{\alpha+2} \\ \textcircled{\alpha+1} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{1} \end{matrix}$$

$$[A_2 | \underline{b}_2] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & \alpha + 2 \\ 0 & -1 & 2 & \alpha + 1 \\ 0 & 3/2 & -1 & \alpha/2 + 4 \\ 0 & -3 & 0 & 3\alpha + 2 \end{array} \right] \quad \begin{matrix} \textcircled{-1} \\ \textcircled{3/2} \\ \textcircled{-3} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \textcircled{\alpha+2} \\ \textcircled{\alpha+1} \\ \textcircled{\alpha/2+4} \\ \textcircled{-3} \end{matrix}$$

$$[A_3 | \underline{b}_3] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & \alpha + 2 \\ 0 & -1 & 2 & \alpha + 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2\alpha + 11/2 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{array} \right] \quad \begin{matrix} \textcircled{2} \\ \textcircled{-6} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \textcircled{\alpha+2} \\ \textcircled{\alpha+1} \\ \textcircled{2\alpha+11/2} \\ \textcircled{-1} \end{matrix}$$

$$[A_4 | b_4] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & \alpha + 2 \\ 0 & -1 & 2 & \alpha + 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2\alpha + 11/2 \\ 0 & 0 & 0 & 6\alpha + 31/2 \end{array} \right]$$

Affinché il sistema sia compatibile, dovrà essere:

$$6\alpha + \frac{31}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{31}{12}}$$

Infatti, in questo caso,

$$\text{rank}(A) = \text{rank}([A | b]) (= 3)$$

(2.b) Osserviamo che

$$V^\perp = \text{Ker}(A^T)$$

essendo A le matrice definita al punto precedente.

$$\underline{b} \in \text{ker}(A^T) \Leftrightarrow A^T \underline{b} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha+2 \\ \alpha+1 \\ 3 \\ 2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3×4

4×1

3×1

$$\begin{cases} -2\alpha - 4 + 3 + 4\alpha = 0 \\ -\alpha - 2 - \alpha - 1 + 6 - 4\alpha = 0 \\ 2\alpha + 4 + 2\alpha + 2 - 6 - 4\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha = 1 \\ -6\alpha = -3 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{1}{2} \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$

L'insieme ammette un'unica soluzione:

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

In conclusione:

$$b \in \bar{V}^\perp \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

(2.c) Si procede come nel punto (2.a),
 con le differenze che non dovranno prendere
 in considerazione il rettore \underline{s}_3 .

Quindi dovranno determinare gli eventuali
 valori del parametro α affinché il sistema

$$B \underline{x} = \underline{b}, \quad B = [\underline{s}_1, \underline{s}_2]$$

sia compatibile. I primi paragoni sono
 identici a quelli fatti nel punto (2.a) :

$$[B_1 | b_1] \quad \dots \dots$$

$$[B_3 | b_3] = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & \alpha + 2 \\ 0 & -1 & \alpha + 1 \\ 0 & 0 & 2\alpha + 11/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Osservando l'ultima equazione $0 = -1$,
 deduciamo che \underline{b} non può essere
 combinazione lineare di \underline{s}_1 e \underline{s}_2
 per nessun valore di α .

(2.d) Essendo $\text{rank}(A)=3$, il problema

dei minimi quadrati rispetto al sistema

$$A \underline{x} = \underline{b}, \quad A = [\underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3]$$

ammette un'unica soluzione da determinare
risolvendo il sistema normale

$$\underline{A}^T A \underline{x} = \underline{A}^T \underline{b}$$

Rispondiamo ai due quesiti

- $\underline{x}^* = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{A}^T \underline{b} = \underline{0}$

Questo è la medesima condizione imposto
nel quesito (2.b). Quindi:

$$\alpha = 1/2$$

- Essendo $\underline{r}^* = \underline{b} - A \underline{x}^*$, si ha:

$$\underline{r}^* = \underline{0} \Leftrightarrow A \underline{x}^* = \underline{b}, \text{ quindi}$$

\underline{x}^* è soluzione del sistema lineare $A \underline{x} = \underline{b}$.

Questo ci ricorda al quesito (2.e). Tentiamo
la soluzione è:

$$d = -\frac{31}{12}$$

TRACCIA #1

ESONERO: GIVANO 2011

Riduciamo a scelmi le metrree complete.

$$[A_1 \mid b_1] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 2-2 & 2 \end{array} \right] \quad \text{1}$$

$$[A_2 \mid b_2] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2-3 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 2-2 & 1 \end{array} \right]$$

OSSERVAZIONE: come distinguere due casi:

(a) $2-3 \neq 0$: in tal caso l'elemento pivotale è $2-3$

(b) $2-3 = 0$: in tal caso, poiché al di sotto di $2-3$ c'è un elemento nullo, il nuovo elemento pivotale è il 2 che compare in terza colonna.

(b)

$$[A_2 | \underline{b}_2] = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right] \quad -\frac{3}{2}$$

$$[A_3 | \underline{b}_3] = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 17/2 \end{array} \right]$$


colonne pivotali

Il sistema è compatibile, in pronto:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}([A, b]) = 3$$

Possiamo parametrizzare x_2 : $x_2 = h$, $h \in \mathbb{R}$

Mentre si sente:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -x_1 & = & -1 + h \\ 2x_3 - x_4 & = & -5 \\ \frac{1}{2}x_4 & = & \frac{17}{2} \end{array} \right.$$

$x_4 = 17$; $x_3 = 6$; $x_1 = 1 - h$. le ∞^1 soluzioni

sono $\underline{x} = \begin{bmatrix} 1-h \\ h \\ 6 \\ 17 \end{bmatrix}, h \in \mathbb{R}$

(2).

$$[A_2 | \underline{b}_2] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha-3 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 2-\alpha & 1 \end{array} \right]$$

\uparrow \uparrow \uparrow
colonne pivotali

È ridotta a scdm. Gli zeri sono comprensibili
in quanto

$$\text{rank}(A) = \text{rank}([A, \underline{b}]) = 3$$

Parametrizziamo l'incognita x_4 : $x_4 = h$, $h \in \mathbb{R}$.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -x_1 - x_2 & = & -1 \\ (\alpha-3)x_2 + 2x_3 & = & -5 + h \\ 3x_3 & = & 1 - (2-\alpha)h \end{array} \right.$$

Si procede con l'algoritmo di sostituzione
all'inoltro.

TRACCIA # 3

ESONERO: GIUGNO 2011

Se $\text{rank}(A)$ sono meno (quindi 3),
 per risolvere più velocemente l'esercizio
 si determinerebbe la soluzione \underline{x}^* del
 problema dei minimi quadrati associato
 al sistema $A \underline{x} = \underline{b}$.

La teoria ci dice che:

$$\underline{b}_1 = A \underline{x}^*$$

Di conseguenza $\underline{b}_2 = \underline{b} - \underline{b}_1$
 e avremmo terminato.

Vediamo se il range di A è meno,
 riducendo le matrici a scalini

$$A_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$A_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$A_3 = \left[\begin{array}{ccc} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\text{rank}(A) = 2$$

Non poniamo seguire le sue brevi discuse
im precedente. Dovremo invece

(1) • determinare una base di $\text{Im}(A)$

(2) • determinare una base di $\text{Im}(A)^\perp$

(3) • unire le due basi per ottenere
una base di \mathbb{R}^5

(4) • esprimere \underline{x} come combinazione
lineare delle basi di \mathbb{R}^5 definite
al punto precedente. Ciò richiede
la risoluzione di un sistema lineare
di 5 equazioni in 5 incognite.

(5) • Determinate la soluzione del
sistema lineare, si proceste con il
decomponere \underline{x} nei due vettori

$$\underline{v} \in \text{Im}(A) \quad \text{e} \quad \underline{w} \in \text{Im}(A)^\perp$$

(1) Dal punto precedente segue che ne basta
che $\text{Im}(A)$ è, per esempio,

$$\{\underline{v}_1, \underline{v}_3\} \quad (\text{colonne pivotali})$$

(2) $\text{Im}(A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$

Ora bisogna risolvere il sistema lineare $A^T \underline{x} = \underline{0}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

L'insieme delle soluzioni è costituito

da ∞^3 settori. Parametrizziamo

$$x_3, x_4, x_5 : x_3 = h, x_4 = k, x_5 = q, \frac{h}{k} \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -h + k - q \\ 2x_2 = -2k \end{cases}$$

$$x_2 = -k; \quad x_1 = -h - q$$

$$x = \begin{bmatrix} -h - q \\ -k \\ h \\ k \\ q \end{bmatrix} = h \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{w}_1} + k \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{w}_2} + q \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{w}_3}$$

$\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ rappresentano una base di
 $\overline{\text{Im}(A)}$

OSSERVAZIONE : dalle teorese seppiamo che

$$\dim(\text{Im}(A)) + \dim(\text{Im}(A)^\perp) = \dim(\mathbb{R}^5)$$

11

2

11

5

quindi potremo già aspettarci che

$$\dim(\text{Im}(A)^\perp) = 5 - 2 = 3$$

(3), (4) che base di \mathbb{R}^5 è

$$\{\underline{s}_1, \underline{s}_3, \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$$

Ora si risolve il sistema lineare

$$[\underline{s}_1, \underline{s}_3, \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3] \underline{z} = \underline{x}$$

sistema di 5 equazioni in 5 incognite.

Si procede con la classica eliminazione di Gauß.

(5) Se la soluzione è $\underline{z} = [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5]^T$

o sono ottenuti

$$\underline{x} = \underbrace{z_1 \cdot \underline{s}_1 + z_2 \cdot \underline{s}_3}_{\text{II}} + \underbrace{z_3 \underline{w}_1 + z_4 \underline{w}_2 + z_5 \underline{w}_3}_{\text{III}}$$

$$\underline{v} \in \text{Im}(A) \quad \underline{w} \in \text{Im}(A)^{\perp}$$