Esame di *Calcolo delle Probabilità e Statistica* (per studenti di Informatica)

Università degli studi di Bari Aldo Moro

Docenti: Simone Del Vecchio, Stefano Rossi

22–09–2023

Esercizio 1. Si vuole effettuare un sondaggio per determinare la proporzione θ degli studenti che hanno copiato in un esame almeno una volta nella vita. Visto che gli studenti non sono inclini a rispondere in modo onesto al riguardo, si utilizza il seguente stratagemma. Ad ogni intervistato viene data una moneta truccata con probabilità che esca testa pari a p ed inoltre con scritto "SI" sul lato della testa e "NO" sul lato della croce. Viene chiesto all'intervistato di lanciare la moneta senza rivelarne il risultato e di dichiarare soltanto se il risultato ottenuto ("SI" o "NO") è concorde con la propria risposta alla domanda.

Sia ora X_i la variabile casuale che vale 1 se l'i-esimo intervistato dichiara che il risultato della moneta è concorde con la propria risposta, 0 altrimenti.

(1) Qual'è la probabilità che X_i sia pari ad 1?
(2) Determinare la distribuzione di $\sum_{i=1}^n X_i$ e il valore atteso $E(\sum_{i=1}^n X_i)$.
(3) Costruire uno stimatore corretto per il parametro θ che sia una funzione delle statistiche X_i, ovvero che tenga conto del sondaggio effettuato (suggerimento: usare il punto precedente.)
(4) Spiegare per quale motivo ai fini del sondaggio non è conveniente usare una moneta equilibrata ($p = \frac{1}{2}$).

Esercizio 2. Per ogni valore dei parametri $\tau, C \in \mathbb{R}$ con $\tau > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) := Ce^{-\frac{(x-2)^2}{2\tau^2}}\chi_{(-\infty,2)}(x)$$

per $x \in \mathbb{R}$, dove $\chi_{(-\infty,0)}$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $(-\infty, 0)$.

(1) Determinare il valore di C per il quale f è la densità di una certa variabile aleatoria X.
(2) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di τ relativo al campione $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ di rango n distribuito come X.
(3) Determinare la legge di $(X-2)^2$ quando $\tau = 1$ e dire se si tratta di una legge notevole.
(4) Determinare la legge della variabile aleatoria (quando $\tau = 1$)

$$Y := \sum_{i=1}^{n}(X_i - 2)^2.$$

Esercizio 3. Un ingegnere ha confrontato l'output di due differenti processi campionando indipendentemente da ciascuno di essi: ha estratto dal processo X un campione di numerosità $n = 64$, da cui ha ottenuto una media campionaria $\bar{x} = 12.5$; ha estratto dal processo Y un campione di numerosità $m = 100$, da cui ha ottenuto una media campionaria $\bar{y} = 11.9$. I due processi hanno deviazioni standard conosciute $\sigma_X = 2.1$ e $\sigma_Y = 2.2$.

Al livello di significatività $\alpha = 5\%$ l'ingegnere potrebbe concludere che i processi presentano output medi diversi? Calcolare anche il *p-value* del test usato per rispondere alla domanda precedente.