CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
CALCOLO NUMERICO
Primo esonero - 21 Novembre 2013 -

Traccia 1. [Punti: 1.a: 2; 1.b: 2; 1.c: 2; 1.d: 2; 1.e: 2]

Si considerino l'insieme dei numeri di macchina $\mathbb{F}_{(2,4,-6,5)}$ in base $\beta = 2$, cinque cifre significative $(t = 4)$, range per l'esponente $p \in (-6, 5)$, e la corrispondente aritmetica floating-point ottenuta con tecnica dell'arrotondamento. Risolvere i seguenti quesiti.

(1.a) Determinare il più piccolo numero di macchina positivo ω, il più grande numero di macchina positivo Ω e la precisione di macchina u.

(1.b) Calcolare, in $\mathbb{F}$, il risultato delle seguenti operazioni:

$$\omega + 1, \qquad \Omega + \frac{1}{2}, \qquad u\Omega + \frac{1}{2}.$$

(1.c) Siano $x, y \in \mathbb{F}$, x, y consecutivi. Si consideri la distanza tra x e y: $d = |x - y|$. Qual è il più piccolo e più grande valore che d può assumere?

(1.d) Supponendo che $fl(x) = 0, \forall |x| < \omega$ (assenza di numeri denormali), provare, riportando un opportuno controesempio, che in questa aritmetica di macchina non è verificata la seguente proprietà valida in $\mathbb{R}$:

$$x - y = 0 \implies x = y. \tag{1}$$

(1.e) Rispondere al quesito precedente, considerando la presenza dei numeri non normalizzati.

Traccia 2. [Punti: 2.a: 2; 2.b: 2; 2.c: 2; 2.d: 2]

Si consideri l'equazione di terzo grado

$$x^3 + x - 2 = 0$$

che ammette, in $\mathbb{R}$ l'unica radice $\alpha = 1$. Per la sua approssimazione, si considerino le seguenti funzioni iteratrici

$$\Phi_1(x) = (2 - x)^{\frac{1}{3}}, \qquad \Phi_2(x) = \frac{1}{3}\left(x + 4 - 2x^3\right),$$

che, evidentemente, ammettono $\alpha = 1$ quale punto fisso. Siano $x_n = \Phi_1(x_{n-1})$ e $y_n = \Phi_2(y_{n-1})$ le successioni generate dai due metodi a partire da un punto iniziale $x_0 = y_0$. Risolvere i seguenti quesiti.

(2.a) Studiare la convergenza locale alla radice α dei due metodi.

(2.b) Studiare la convergenza globale dei due metodi nell'intervallo $[0, \frac{3}{2}]$.

(2.c) Dire, motivando la risposta, se il metodo definito dalla funzione iteratrice $\Phi(x) = \Phi_1(\Phi_2(x))$, ottenuto come composizione dei due metodi di partenza, risulta localmente convergente ad α.

(2.d) Siano Φ_1 e Φ_2 due generiche funzioni iteratrici che ammettono uno stesso punto fisso α. Siano p_1 e p_2 i corrispondenti ordini di convergenza. Determinare l'ordine del metodo composto $\Phi(x) = \Phi_1(\Phi_2(x))$ e la relativa costante asintotica di convergenza.

TRACCIA n° 1, NOVEMBRE 2013

(1.a) $\omega = \beta^{m_1+1} = 2^{-5}\, 1.0000$

$\Omega = 2^{4}\, 1.1111$

$u = \frac{1}{2}\beta^{-t} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-4} = 2^{-5}$

(1.b) $\omega \oplus 1 =$

$$\begin{array}{r} 1.0000|\ \cdot 2^{0} \oplus \\ 0.0000|1\ \ 2^{0} = \\ \hline fl(1.0000|1 \cdot 2^{0}) = 1.0000\ 2^{0} = 1 \end{array}$$

$\Omega \oplus \frac{1}{2} =$

$$\begin{array}{r} 1.1111|\ \cdot 2^{4} \oplus \\ 0.0000|1\ \ 2^{4} = \\ \hline fl(1.1111|1 \cdot 2^{4}) \end{array}$$

$2^{-1} \cdot 2^{-4} \cdot 2^{4} = 2^{-5} \cdot 2^{4}$

$= fl(10.0000 \cdot 2^{4})$

$= fl(1.0000 \cdot 2^{5}) = +\mathrm{Inf}$

OVERFLOW: $p > 4$

$u \circledast \Omega \oplus \frac{1}{2}$

$$u \circledast \Omega = 1.0000 \cdot 2^{-5} \circledast 1.1111 \cdot 2^{4}$$

$$= fl(1.1111 \cdot 2^{-1}) = 1.1111 \cdot 2^{-1}$$

$$1.1111 \cdot 2^{-1} \oplus 1.0000 \cdot 2^{-1} = \begin{array}{r} 1.1111 \quad 2^{-1} \oplus \\ 1.0000 \quad 2^{-1} = \\ \hline fl(10.1111 \cdot 2^{-1}) \end{array}$$

$$= fl(1.0111|1 \cdot 2^{0})$$

$$= 1.1000 \cdot 2^{0}$$

(1.c) Ricordiamo che la distanza tra due numeri di macchina consecutivi è:

$$d = \beta^{p-t}$$

Infatti:

se $x = 1.d_1 d_2 d_3 d_4 \cdot 2^{p}$

il consecutivo di x, chiamiamolo y, lo si ottiene incrementando di una unità l'ultima cifra d_4, cioè aggiungendo a x la quantità:

$$y = x + 0.0001 \cdot 2^{p} = x + 2^{p-t}$$

Quindi:

$$d = 2^{p-4}$$

Dunque:

$$d_{min} = 2^{-5-4} = 2^{-9} \quad (\text{scegliendo } p = -5)$$

$$d_{max} = 2^{4-4} = 2^{0} = 1 \quad (\text{scegliendo } p = 4)$$

(1.d) Il punto precedente suggerisce di scegliere due numeri di macchina consecutivi la cui distanza è piccola, ad esempio

$$x = \omega = 1.0000 \cdot 2^{-5}$$

$$y = \omega + d_{min} = \omega + 2^{-9} = 1.0001 \cdot 2^{-5}$$

$x \neq y$ tuttavia:

$$|x \ominus y| = y \ominus x = fl(2^{-9}) = 0$$

$$\downarrow$$

$$p < -5$$

(1.e) In presenza di numeri subnormali:

$$fl(2^{-9}) = fl(2^{-5} \cdot 0.0001) = 2^{-5} \cdot 0.0001$$

VALE LA PROPRIETÁ (1)

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
CALCOLO NUMERICO
Primo esonero - 20 Novembre 2014 -

Traccia 1. [Punti: 1.a: 3; 1.b: 3; 1.c: 3; 1.d: 3]

Si consideri la funzione

$$f(x) = x^3 - 1, \qquad x \in [0, 2],$$

che, evidentemente, ammette l'unico zero $\alpha = 1$ nell'intervallo indicato. Per l'approssimazione di α si consideri il metodo one-step definito dalla seguente funzione iteratrice:

$$\Phi_c(x) = x - f(x)\frac{x - c}{f(x) - f(c)},$$

dove c è un parametro reale.[1] Risolvere i seguenti quesiti, motivando le risposte.

(1.a) Si fissi $c = 0$. Dire se il metodo converge localmente a α.

(1.b) Si fissi $c = 2$. Dire se il metodo converge localmente a α.

(1.c) Determinare gli eventuali valori di c che rendono la convergenza quadratica.

(1.d) Si fissi ancora $c = 2$. Dire se il metodo risulta globalmente convergente nell'intervallo $[0, +\infty)$.

Traccia 2. [Punti: 2.a: 2; 2.b: 2; 2.c: 2; 2.d: 2; 2.e: 2; 2.f: 2]

Si consideri l'insieme dei numeri di macchina $\mathbb{F}_{(2,3,-3,5)}$ in base $\beta = 2$ con 4 cifre significative e range per l'esponente $p \in (-3, 5)$. Supponiamo che la relativa aritmetica di macchina sia quella definita dall'arrotondamento (sia per la rappresentazione che per le operazioni elementari). Discutere i seguenti quesiti.

(2.a) Determinare la precisione di macchina u, il più piccolo e il più grande numero di macchina positivi ω e Ω.

(2.b) Determinare la più grande distanza tra due numeri di macchina consecutivi.

(2.c) Determinare l'intervallo S dei numeri reali che vengono rappresentati mediante il numero di macchina Ω:

$$S = \big\{x \in \mathbb{R} \mid fl(x) = \Omega\big\}.$$

Scrivere gli estremi di questo intervallo nella forma $\Omega - r_1$ e $\Omega + r_2$.

(2.d) Dire, motivando le risposte, qual è, in $\mathbb{F}$, il risultato delle seguenti espressioni:

$$\Omega + (1 - 2^{-4}), \qquad\qquad \Omega + (1 - 2^{-5}).$$

(2.e) Dire, motivando la risposta, qual è il più grande intero positivo k rappresentabile in $\mathbb{F}$, tale che ogni altro intero positivo minore di k sia anche rappresentato correttamente.

[1] Questo metodo è noto in letteratura come metodo della *falsa posizione* o *regala falsi*.

TRACCIA n° 2, NOVEMBRE 2014

$$x \in \mathbb{F} \iff x = \pm 1.d_1 d_2 d_3 \; 2^p$$

con $p = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$

(2.a) $$u = \frac{1}{2}\beta^{-t} = \frac{1}{2} 2^{-3} = 2^{-4}$$

$$\omega = 1.000 \cdot 2^{-2} \; ; \quad \Omega = 1.111 \cdot 2^{4}$$

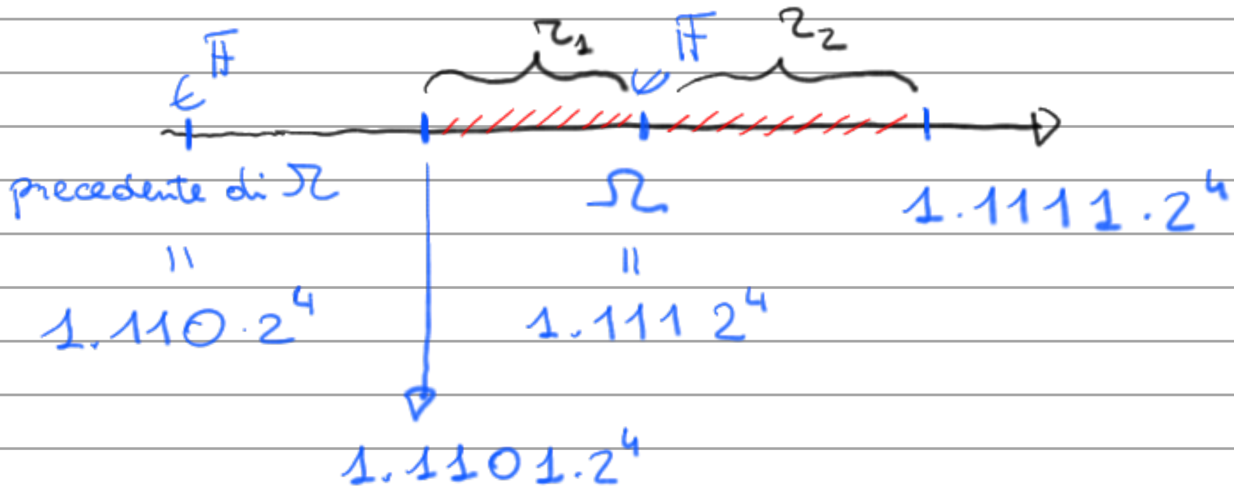
(2.b)

La distanza tra due numeri di macchina consecutivi è:

$$d = \beta^{p-t} = 2^{p-3}$$

$$d_{max} = 2^{4-3} = 2$$

(2.c)



$$r_1 = 1 \quad \left(= \frac{d_{max}}{2}\right) \quad \text{oppure} \quad \begin{array}{r} 1.1110 \; 2^4 \; - \\ 1.1101 \; 2^4 \\ \hline 0.0001 \cdot 2^4 = 1 \end{array}$$

$$r_2 = 1 \rightarrow \begin{array}{r} 1.1111 \cdot 2^4 \; - \\ 1.1110 \cdot 2^4 \\ \hline 0.0001 \cdot 2^4 = 1 \end{array}$$

Quindi: $S = (\Omega - 1, \Omega + 1)$

(2.d)

- $\Omega + (1 - 2^{-4})$

In aritmetica di macchina dobbiamo calcolare:

$$\Omega \oplus (1 \ominus 2^{-4})$$

$$\downarrow$$

$2^{-2} \cdot 0.010$ ← numero subnormale

$$\begin{array}{rl} 1 \ominus 2^{-4} = & 1.000| \cdot 2^0 \; - \\ & 0.000|1 \cdot 2^0 \\ \hline & fl(0.111|1 \; 2^0) \\ & fl(1.111 \cdot 2^{-1}) \\ & = 1.111 \cdot 2^{-1} < 1 \end{array}$$

$$\Omega \oplus 1.111 \, 2^{-1} = fl(\Omega + 1.111 \, 2^{-1}) = \Omega$$

dal punto precedente

- $\Omega \oplus (1 \ominus 2^{-5})$

$$\begin{array}{rl} 1 \ominus 2^{-5} = & 1.000|00 \; 2^0 \; \ominus \\ & 0.000|01 \; 2^0 \\ \hline & fl(0.111|11 \cdot 2^0) \\ & = fl(1.1111 \cdot 2^{-1}) = 1 \end{array}$$

Quindi: $\Omega \oplus 1 = +\mathrm{Inf}$

(2.e) Osservazione preliminare:

$\Omega = 1.111 \cdot 2^4 = 11110$ è un intero

l'intero precedente è $11101 \notin \mathbb{F}$

infatti $11101 = 1.1101 \cdot 2^4 \notin \mathbb{F}$

Osserviamo che:

$1.d_1 d_2 d_3 \; 2^3$ è un intero per ogni scelta di d_1, d_2, d_3

massimo valore

$$\downarrow$$

$$1.111 \cdot 2^3$$

$$\downarrow \text{ il successivo}$$

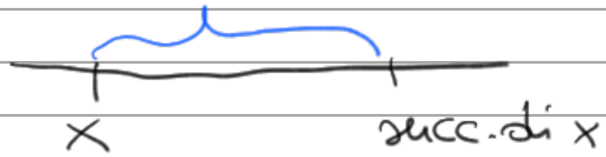
$\boxed{1.000 \cdot 2^4}$ è intero

$10000 \xrightarrow[\text{succ.}]{} 10001 \notin \mathbb{F}$

In alternativa, ragionare sulla distanza tra due numeri di macchina consecutivi

$$\beta^{p-t} = 2^{p-3}$$

Se tale distanza supera 1 ci sarebbero interi non rappresentabili.



Quindi p può essere al più 3.

(2.f) In assenza di numeri non normalizzati

d_{min} = è la distanza tra ω e il suo successivo

$$= 2^{-5}$$

In presenza di numeri denormali

Il più piccolo numero non normalizzato è

$$x = 2^{-2} \cdot 0.001$$

il successivo è $y = 2^{-2} \cdot 0.010$

$$d_{min} = y - x = \begin{array}{r} 2^{-2}\ 0.010\ - \\ 2^{-2}\ 0.001 \\ \hline 2^{-2}\ 0.001 \end{array} = 2^{-5}$$