PROBABILITÀ: studio dei fenomeni casuali (o aleatori) → i risultati sono gli elementi dell'insieme 25/09/2023

↓ experimento casuale (o aleatorio)

↓ da luogo ad almeno 2 esiti (risultato)

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ lancio dadi

$\Omega = \{T, C\}$ lancio moneta

evento: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ E = "esce un numero pari" → $E = \{2,4,6\}$

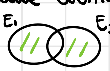
Spazio di probabilità

definizione di spazio di probabilità: è una terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dove

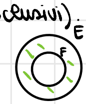
1. Ω è un insieme non vuoto (spazio dei campioni ⇝ sample space). Un elemento $\omega \in \Omega$ è uno dei possibili risultati. $|\Omega|$ (cardinalità) è il numero di esiti possibili (outcome).
2. $\mathcal{F} \subset P(\Omega)$ (sottoinsieme). $P(\Omega)$ è l'insieme delle parti. $\mathcal{F}$ è la collezione degli "eventi" ed è una σ-algebra (sigma), cioè:
   1. $\emptyset \in \mathcal{F}$ (evento impossibile)
   2. $E \in \mathcal{F} \Rightarrow E^c = \Omega / E$ (evento complementare) è un evento Oss: $\Omega = \emptyset^c \in \mathcal{F}$
   3. Se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ è una successione di eventi ⇒ allora $\bigcup_n E_n$ è un evento

   ↳ esempio: $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$ $E_1 \cup E_2$ è l'evento che si verifica se si verifica almeno uno tra E_1 e E_2.

Conseguenze:

- Se $E_1, E_2 \in \mathcal{F} \overset{\text{allora}}{\Rightarrow} E_1 \cap E_2 \in \mathcal{F}$. Infatti $(E_1 \cap E_2)^c = E_1^c \cup E_2^c$. Se $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ allora si dice che E_1 e E_2 sono due eventi incompatibili (o mutuamente esclusivi).
- 

  $E_1 \Delta E_2 = (E_1 \cup E_2) / E_1 \cap E_2$ (differenza simmetrica)

  $F \subset E$ eventi

  $E \setminus F = E \cap F^c$ è ancora un evento

3. P è una funzione di probabilità, cioè una funzione $P: \mathcal{F} \mapsto [0,1]$ $\mathcal{F} \ni E \mapsto P(E) \in [0,1]$.

proprietà: i. $P(\Omega) = 1$

ii. Se $\{E_n\} \subset \mathcal{F}$ con $E_n \cap E_m = \emptyset$ allora $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$

$E_1 \cap E_2 = \emptyset$

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

→ conseguenze: • $E \in \mathcal{F}$ $P(E^c) = 1 - P(E)$

Verifica: $E \cup E^c = \Omega$ $1 = P(\Omega) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$

$P(\emptyset) = P(\Omega^c) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

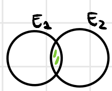
monotonia: $E, F \in \mathcal{F}$ $E \subseteq F$

allora $P(E) \leq P(F)$

Verifica: $F = E \cup (F / E)$ $P(F) = P(E) + P(F/E) \geq P(E)$

→ trasforma l'inclusione in disuguaglianze

$P(E_1 \cup E_2)$



$E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1)$ $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2 \setminus E_1 \cap E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \Rightarrow P(E_1 \cup E_2) \leq P(E_1) + P(E_2)$

vale per collezione di eventi

Caso: $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m) \le P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_m)$ subadditività finita (per induzione su m).

Esempi di spazi

spazio finito

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con Ω finito $\quad \mathcal{F} = P(\Omega)$ perchè Ω è un insieme finito

$\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_m\} \quad m = |\Omega| \quad (m \ge 2)$

Dare $\mathbb{P}$ è equivalente a scegliere $p_1, p_2 \dots p_m \in \mathbb{R}$ con $p_i \ge 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$ con $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$

Se parto con $\mathbb{P}$ $\quad p_i = \mathbb{P}(\{w_i\}) \ge 0 \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^{m} \{w_i\} \quad 1 = P(\Omega) = \sum_{i=1}^{m} P(\{w_i\}) = \sum_{i=1}^{m} p_i$

Viceversa, se ho $p_1, p_2, \dots, p_m$ con $p_i \ge 0 \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \quad E \subseteq \Omega \quad P(E) \overset{def}{=} \sum p_i \quad i : w_i \in E$

$E = \{w_3, w_5\} \quad P(E) = p_3 + p_5 \qquad \Omega = \{w_1, w_2\} \quad p_1 + p_2 = 1$

spazio finito uniforme hanno stessa probabilità

$p_1 = p_2 = \dots = p_m = \frac{1}{m} \quad P(E) = \sum_{i: w_i \in E} \frac{1}{m} = \frac{|E|}{m} = \frac{|E|}{|\Omega|}$

numeratore: casi favorevoli
denominatore: casi possibili

spazi discreti $\quad \Omega$ è infinito numerabile (countable) $\qquad$ (non c'è la cardinalità)

$\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_m, \dots\}$

Prendiamo come evento l'insieme delle parti cioè: $\mathcal{F} = P(\Omega)$

Assegnare $P \iff$ dare una successione $\{p_m\}_{m \in \mathbb{N}} \quad p_m \ge 0 \quad \sum_{m=1}^{\infty} p_m = 1 \quad p_m = \mathbb{P}(\{w_m\})$

Oss: nel modello discreto non c'è il caso uniforme.

spazi continui $\quad \Omega$ è infinito non numerabile

$P(\{w\}) = 0$ vuol dire che i possibili esiti hanno probabilità zero $\forall w \in \Omega$.

esperimento: scelgo un numero reale tra 0 e 1. In questo caso $\Omega = [0, 1]$. $\mathcal{F} \not\subset P([0,1])$.

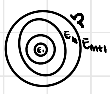
$0 \quad a \quad b \quad 1 \qquad \mathcal{F} = \mathcal{B} =$ è la σ-algebra generata dagli intervalli. $P(I_{a,b}) \overset{def}{=} b - a$

⚠ perchè hanno probabilità zero? In questo spazio, $\forall x \in [0,1] \quad \mathbb{P}(\{x\}) = 0$

27/09/2023

prop: $P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\right) \le \sum_{m=1}^{\infty} P(E_m) \quad \forall \{E_m : m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$.

continuità di $\mathbb{P}$: (proprietà)



- Se $\{E_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F} \quad E_m \subset E_{m+1} \qquad P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\right) = \lim_{m \to \infty} P(E_m)$
- Se $\{E_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F} \quad E_{m+1} \subseteq E \qquad P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m\right) = \lim_{m \to \infty} P(E_m)$
- Se $\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m = \emptyset$ allora $\lim_{m \to \infty} P(E_m) = 0$

introduco una nuova famiglia di eventi cioè
Verifica 1ª proprietà: definisco F_1 e pongo $F_1 = E_1$ $F_2 = E_2 \setminus E_1$ in generale $F_n = E_n \setminus E_{n-1}$ $F_n \cap F_m = \emptyset$
$\forall n \neq m$ quindi $\bigcup_n E_n = \bigcup_n E_n$ $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} P(F_n)$.

Sviluppiamo $\sum_{n=1}^{N} P(F_n)$ $P(F_1) + P(F_2) + \dots + P(F_N)$

$\cancel{P(E_1)} + \cancel{P(E_2)} - \cancel{P(E_1)} + \cancel{P(E_3)} - \cancel{P(E_2)} + \dots + \cancel{P(E_{N-1})} - \cancel{P(E_{N-2})} + P(E_N) - \cancel{P(E_{N-1})} = P(E_N)$

dimostriamo che $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$

$F_1 = E_1$ $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_n \subseteq F_{n+1} \subseteq \dots$

$F_2 = E_1 \cup E_2$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$

$\vdots$

$F_n = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$ $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \lim_{n\to\infty} P(F_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$

$P(F_n) \leq P(E_1) + \dots + P(E_N)$

$P(E_n) = 0 \quad \forall n \Rightarrow P(\bigcup_n E_n) = 0$

nell'intervallo da 0 a 1 la probabilità di un numero razionale è 0.

Ripasso Matematica

fattoriale: $n!$ $0! = 1$ $n! = n \cdot (n-1)!$ $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$
conta il numero di permutazioni (semplici) di un insieme con n-elementi

esempio: CANE
quanti anagrammi posso fare? 4!
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

coefficienti binomiali:

$n \in \mathbb{N}$ $k \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n$ $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$ $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

dim: $\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n-k+1)+k}{k!(n-k+1)} n! = \frac{(n+1)n!}{k!(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$

$\binom{n}{k}$ è il numero di sottoinsiemi di k elementi che posso estrarre da uno che ne ha n.

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ $a = b = 1$ $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

esercizio: Ho un associazione con 50 membri. Devo formare una commissione di 5 membri. Quante scelte possibili ci sono?
È $\binom{50}{5} = \frac{50!}{5!45!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 2\,118\,760$

esercizio: Ho a disposizione 2 paia di scarpe, 3 paia di pantaloni e 5 magliette.
In quanti modi distinti posso vestirmi? $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

esercizio: Quanti sono i numeri di 6 cifre che non contengono 0 e hanno le cifre 1 e 2 che appaiono perchè restano due posti liberi dove posso inserire 7 cifre perchè 1 e 2 non posso più metterli.

ciascuno 2 volte?

1 _ 2 2 _ 1 $\quad \binom{6}{2}\binom{4}{2}\, 7\times 7 = \frac{6!}{2!\,4!}\cdot\frac{4!}{2!\,2!}\cdot 49 = \frac{6\cdot 5}{2}\cdot\frac{4\cdot 3\cdot 2}{4}\cdot 49 = 4410$

esercizio: uno studente deve rispondere a 5 domande su 10. Quante scelte ha? $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,5!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 252$

E se ne deve scegliere almeno due tra le prime 5?

$252 - \left(1 + 5\cdot\binom{5}{4}\right) =$ $\quad$ prova $\binom{5}{2}\cdot\binom{8}{3}$

$252 - (1 + 5\cdot 5) = 256 - 26 = 226$

suggerisce di utilizzare lo spazio uniforme

esercizio: Una scarpiera contiene 8 paia di scarpe. (In totale 16 scarpe). Si scelgono a caso 4 scarpe (non paio).
Qual è la probabilità di non formare nessun paio di scarpe?

usiamo i casi favorevoli e possibili

$\binom{16}{4} = \frac{16!}{4!\,12!} = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{4\cdot 3\cdot 2} = 1820$

SX	DX
1	1
2	2
3	3
⋮	⋮
8	8

ho solo 4 pescate

$\frac{16\cdot 14\cdot 12\cdot 10}{4!} = 1120$

$\frac{\text{casi fav}}{\text{casi poss}} = \frac{1120}{1820} = 0.61$

E qual è la prob. di formare esattamente 1 paio?

SX	DX
1	1
2	2
3	3
⋮	⋮
8	8

$8\cdot\frac{\cancel{14}^{7}\cdot 12}{\cancel{2}} = 672 \Rightarrow \frac{672}{1820} = 0{,}37$

esercizio: Un comune ha 5 alberghi. Tre persone scelgono a caso uno degli alberghi.
che le persone finiscano in alberghi diversi?

casi possibili: $5^3 = 125$

casi favorevoli: $5\cdot 4\cdot 3 = 60$

$\frac{5\cdot 4\cdot 3}{125} = \frac{\cancel{5}\cdot 4\cdot 3}{\cancel{5}\cdot 5\cdot 5} = \frac{12}{25}$

Casa: 2 persone nello stesso albergo e uno in un altro

esercizio: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad P(E) = 0.9 \quad P(F) = 0.9 \quad$ Verificare che $P(E\cap F) \geq 0.8$

$P(E\cup F) = P(E) + P(F) - P(E\cap F) \Rightarrow P(E\cap F) = P(E) + P(F) - P(E\cup F) = 0.9 + 0.9 - P(E\cup F)$

$1.8 - \underbrace{P(E\cup F)}_{\text{non supera mai 1 la probabilità}} \geq \underbrace{1.8 - 1}_{0.8}$ ✓

esercizio: $P(E \Delta F) = P(E)+P(F)-2P(E\cap F)$. Verifica la formula.

per def. $E \Delta F = (E\cup F) \setminus (E\cap F)$

$$P(E\Delta F) = \underbrace{P(E\cup F)}_{P(E)+P(F)-P(E\cap F)} - P(E\cap F)$$

$$P(E)+P(F)-P(E\cap F)-P(E\cap F) = P(E)+P(F)-2P(E\cap F) \quad \checkmark$$

esercizio: quanti anagrammi ha la parola PANNA? Attenzione alle ripetizioni.

$n=5$ $\quad k_1 = 1$ (n di P)

$k_2 = 2$ (n di A)

$k_3 = 2$ (n di N)

$$\frac{5!}{2!\,2!} = \frac{5\cdot4\cdot3}{2} = 30$$

$$\boxed{k_1+k_2+\dots+k_r = n} \qquad \boxed{\frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_r!}}$$

Probabilità condizionata

02/10/2023

esempio: lancio del dado $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad H = \{2,4,6\}$ $\quad E = \{2\}$ = "Esce il numero 2" $\quad P(E) = \frac{1}{6}$

evento = "è uscito un num. pari"

$P(E/H) = \frac{1}{3}$

↳ sapere che prima si è verificato l'evento H, si va a dimezzare lo spazio di probabilità.

definizione: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ evento $H\in\mathcal{F}$ con $P(H)>0$ $\quad E\in\mathcal{F}$ $\quad P(E|H) := \dfrac{P(E\cap H)}{P(H)}$ ecco perché deve essere >0 perché sta al denominatore

facendo riferimento all'esempio precedente: $H=\{2,4,6\}$ $\quad E=\{2\}$ $\quad E\cap H = \{2\}$ $\quad P(H) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad P(E\cap H) = \frac{1}{6}$

$$P(E|F) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{ok}$$

dim: $(\Omega,\mathcal{F},P)$ $\quad P(E|F) = \dfrac{P(E\cap F)}{P(H)}$ $\quad P(H)>0$ $\quad P(\cdot\,|H) : \mathcal{F} \to [0,1]$ è una probabilità.

i) $P(\Omega|H) = \dfrac{P(\Omega\cap H)}{P(H)} = \dfrac{P(H)}{P(H)} = 1$

ii) se $\{E_n : n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{F}$ $\quad P(\bigcup_n E_n | H) = \sum_n P(E_n|H)$ se $E_n\cap E_m = \emptyset$ con $n\neq m$ $\quad P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n|H) = \dfrac{P((\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)\cap H)}{P(H)} = \dfrac{P(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cap H))}{P(H)} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(E_n\cap H)}{P(H)} = \emptyset$$

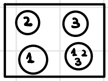
Indipendenza (stocastica)

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ $\quad E,F\in\mathcal{F}$

definizione: E, F sono indipendenti se $P(E\cap F) = P(E)\cdot P(F)$.

$$P(E|F) = P(E) \implies \underbrace{P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)} = P(E)}_{\text{moltiplico entrambi i membri per } P(F) \text{ cioè}}$$

$$\frac{P(E\cap F)}{\cancel{P(F)}}\cdot\cancel{P(F)} = P(E)\cdot P(F) \to P(E\cap F) = P(E)\cdot P(F)$$

esempio: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $E_1, E_2, \dots, E_m \in \mathcal{F}$  E_i = "La pallina contiene i" $i = 1,2,3$ E_1, E_2, E_3

$P(E_i) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{4} = P(E_1 \cap E_2)$ $P(E_1 \cap E_3) = \frac{1}{4}$ $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ attenzione!

definizione: questi eventi sono indipendenti se $\forall k = 1, 2, \dots, m$ (k mi dice quanti eventi sto considerando)
$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_k}) = P(E_{i_1}) \cdot P(E_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(E_{i_k})$

proprietà della definizione di indipendenza: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $E, F \in \mathcal{F}$ indipendenti

1. E^c, F^c sono indipendenti $\longrightarrow$ dim: dobbiamo verificare $P(E^c \cap F^c) = P(E^c)\,P(F^c)$
2. E, F^c sono indipendenti
3. E^c, F sono indipendenti

$P(E^c \cap F^c) = P((E \cup F)^c) = 1 - P(E \cup F) = 1 - [P(E) + P(F) - P(E \cap F)] = 1 - P(E) - P(F) + P(E)P(F) =$
$= \underbrace{(1 - P(E))(1 - P(F))}_{\text{scomposizione}} = P(E^c)P(F^c)$

* vedere dimostrazione Luca

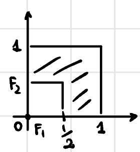
Spazio prodotto

$(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ sono due spazi di probabilità. Vogliamo costruirne un terzo ma indipendente.
obiettivo: costruire $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ in modo tale che corrisponda all'esperimento composto mettendo insieme i due spazi di probabilità ma devono essere indipendenti.

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ (prod. cartesiano)

$\mathcal{F}$

$\left.\begin{array}{l} E_1 \in \mathcal{F}_1 \\ E_2 \in \mathcal{F}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow E_1 \times E_2 \in \mathcal{F}$ problema: gli eventi del tipo $E_1 \times E_2$ non mi danno una σ-algebra.



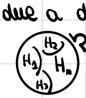
$\mathcal{F}$ è la σ-algebra generata dai rettangoli

$P(E_1 \times E_2) \overset{def}{=} P_1(E_1)\,P_2(E_2)$

Oss: $E_1 \in \mathcal{F}_1$ $\tilde{E}_1 = E_1 \times \Omega_2$ $\tilde{E}_2 = \Omega \times E_2$ $P(\tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2) = P((E_1 \times \Omega) \cap (\Omega \times E_2)) = P(E_1 \times E_2) = P_1(E_1)\,P_2(E_2) = P(\tilde{E}_1)P(\tilde{E}_2)$
~ indica l'evento complessivo dell'esperimento.

Partizione di uno spazio di probabilità

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Una partizione è una collezione $\{H_1, H_2, \dots, H_m\} \subset \mathcal{F}$ con $H_i \cap H_j = \emptyset$ (a due a due disgiunti - mut. esc) $\forall i \neq j$ $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} H_i$ (non si possono verificare contemp. ma almeno uno si verifica).



Abbiamo fissato la partizione $\{H_i : i = 1, 2, \dots, m\}$ con $P(H_i) > 0$ $\forall i = 1, 2, \dots, m$
fissiamo l'evento $E \in \mathcal{F}$ $E = \bigcup_{i=1}^{m} E \cap H_i$ $P(E) = \sum_{i=1}^{m} P(E \cap H_i) = \sum_{i=1}^{m} P(E/H_i)\,P(H_i)$
formula della probabilità totale

Ricordiamo che $P(E/H_i) \overset{def}{=} \frac{P(E \cap H_i)}{P(H_i)}$

esperimento: ho due monete (a 2 facce). 1 è equa e 1 è truccata e fa uscire testa con probabilità $\frac{2}{3}$.
Prendo una moneta a caso (uniforme) e lancio.
H_1 = "Moneta equa" H_2 = "Moneta truccata" (complementare di H_1) $P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}$ E = "Esce testa" $P(E)=?$
$P(E)=P(E|H_1)P(H_1)+P(E|H_2)P(H_2)$
$P(E|H_1)=\frac{1}{2}$ $P(E|H_2)=\frac{2}{3}$ (dato dal problema) $\Rightarrow$ sostituisco i dati nella formula $\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)=$
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3+4}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{6}=\underbrace{\frac{7}{12}>\frac{1}{2}}$ ci dice che la probabilità che esca testa, pescando una moneta a caso, è più alta poichè c'è una moneta truccata.
$P(E^c)=P(E^c|H_1)\cdot P(H_1)+P(E^c|H_2)\cdot P(H_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3+2}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{12}$ $P(E^c)=1-P(E)=\frac{5}{12}$
prob. che esca croce

obiettivo: esprimere $P(H_i|E)$ $P(H_i|E)=\frac{P(H_i\cap E)}{P(E)}=\boxed{\frac{P(E|H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^{m}P(E|H_j)P(H_j)}}$ formula di Bayes
probabilità a posteriori

$P(H_2|E)=?$ $P(H_2|E)=\frac{P(E|H_2)P(H_2)}{P(H_2)}=\frac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{12}^{2}}{7}=\frac{4}{7}$

Prendo una moneta a caso ma la lancio due volte. I due lanci sono indipendenti?
E_1 = "Esce testa al primo lancio" E_2 = "Esce testa al secondo lancio".
$P(E_1)=\frac{7}{12}$ $P(E_2)=\frac{7}{12}$ $P(E_1\cap E_2)=P(E_1\cap E_2|H_1)P(H_1)+P(E_1\cap E_2|H_2)P(H_2)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{4}{9}\right]=\frac{25}{72}$
non sono indipendenti
Qual è la probabilità che al secondo lancio esca testa se so che al primo è già uscito testa?
$P(E_2|E_1)=\frac{P(E_2\cap E_1)}{P(E_1)}=\frac{25}{72}\cdot\frac{7}{12}$

Casa: CALCOLA LA PROBABILITÀ DI OTTENERE TESTA AL LANCIO n-ESIMO SAPENDO CHE I PRIMI (n-1) LANCI HANNO DATO TESTA.
CALCOLARNE POI IL LIMITE PER $n\to\infty$

Variabile aleatoria/casuale/stocastica

esperimento: lancio dadi $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ $\mathcal{F}=P(\Omega)$
definizione: Una variabile aleatoria (v.a) su $(\Omega,\mathcal{F},P)$ è una funzione $X:\Omega\to\mathbb{R}$ tale che $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\{\omega\in\Omega\,|\,X(\omega)>\alpha\}\in\mathcal{F}$.
proposizione: $(\Omega,\mathcal{F},P)$ $X:\Omega\to\mathbb{R}$ una funzione. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:
1. $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\{\omega\in\Omega\,|\,X(\omega)>\alpha\}\in\mathcal{F}$
2. $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\{\omega\in\Omega\,|\,X(\omega)\geq\alpha\}\in\mathcal{F}$
3. $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\{\omega\in\Omega\,|\,X(\omega)<\alpha\}\in\mathcal{F}$
4. $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\{\omega\in\Omega\,|\,X(\omega)\leq\alpha\}\in\mathcal{F}$

variabili aleatorie

proposizione: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità. $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$ variab. aleatoria.
$\Rightarrow aX + bY$ è una v.a. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ XY è una v.a.

implica
① $\Rightarrow$ ② $x \quad \alpha \quad \mathbb{R}$ $\quad \{\omega \in \Omega \mid x(\omega) \leq \alpha\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega \mid x(\omega) < \alpha - \frac{1}{m}\} \in \mathcal{F}$ quale intersezione numerabile di eventi $\qquad$ 04/10/2023

$x < \alpha - \frac{1}{m} \ \forall m$

è un numero (come α) $\forall t \in \mathbb{R}$

dim proposizione: Basta far vedere che $X+Y$ è una v.a. $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) + Y(\omega) < t\}$ è un evento.

$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) + Y(\omega) < t\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{\omega : X(\omega) \leq q\} \cap \{\omega \in \Omega : Y(\omega) < t - q\}$

$x + y < t$ vuol dire che $x < t - y$ cioè $x \quad q \quad t-y$ cioè per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ $\exists q \in \mathbb{Q}$ t.c. $x < q < t - y$.

$(X+Y)^2 = X^2 + Y^2 + 2XY \qquad XY = \frac{1}{2}\left[(X+Y)^2 - X^2 - Y^2\right]$

la formula mi permette di ricondurmi a dimostrare che se X è una v.a. $\overset{\text{allora}}{\Rightarrow}$ X^2 è una v.a.

$\{\omega \in \Omega \mid X^2(\omega) < \alpha\} = \begin{cases} \emptyset \text{ se } \alpha \leq 0 \\ \{\omega \in \Omega \mid -\sqrt{\alpha} < X(\omega) < \sqrt{\alpha}\} \text{ è un evento (perché è un'intersezione di eventi)} \end{cases}$

$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < \sqrt{\alpha}\} \cap \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > -\sqrt{\alpha}\}$

ho finito perché $(X+Y)^2, X^2, Y^2$ sono tutte v.a.

Esercizi di riepilogo

① Si tirano 2 dadi non truccati. Sia E l'evento "la somma dei punteggi è 7". Dimostrare che E è indipendente sia dall'evento che il primo dado realizzi 1 sia dall'evento che il secondo dado realizzi 3.

F_1 = "Il primo dado da 1"

F_2 = "Il secondo dado da 3"

$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, \dots, 6\} \qquad |\Omega| = 36$

$E = \{(i, j) : i + j = 7\} = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} \qquad P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Devo verificare che $P(E \cap F_1) = P(E) P(F_1)$

$F_1 = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6)\} = \{1\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \qquad P(F_1) = \frac{1}{6}$

Individuiamo $P(E \cap F_1) = \{\underbrace{(1,6)}_{1 \text{ coppia}}\} \qquad P(E \cap F_1) = \frac{1}{36}$ — casi possibili $\quad$ è indipendente perché $P(E \cap F_1) = \frac{1}{36}$ $\quad$ OK secondo la def

$P(E \cap F_1) = P(E) P(F_1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

dimostrare che E è indipendente da F_2.

② Hai chiesto ad un vicino di innaffiare una piantina delicata mentre sei in vacanza.
Pensi che senza acq la piantina muoia con probabilità 0.8 (80%).
Mentre se viene innaffiata, questa probabilità si ridurrebbe a 0.15. La tua fiducia che il vicino si ricordi di innaffiarla è del 90%.

- Qual è la probabilità che la piantina sia ancora viva al tuo rientro?
- Se fosse morta, quale sarebbe la probabilità che il vicino si sia dimenticato di innaffiarla?

M="La piantina è morta" V="La piantina è viva"

H_1="Il vicino si ricorda" H_2="Il vicino si ricorda"

$P(M)=P(M/H_1)P(H_1)+P(M/H_2)P(H_2)=0.9\times0.15+0.8\times0.1=0.215$ $P(V)=1-P(M)=0.785$

$$P(H_2|M)=\frac{P(M|H_2)\cdot P(H_2)}{P(M)}=\frac{0.8\times0.1}{0.215}=0.372$$

3 Tre urne numerate 1,2,3 sono inizialmente vuote. Esse vengono poi riempite con m palline che vengono messe una dopo l'altra in una delle urne scelta a caso ogni volta.

- costruire lo spazio di probabilità che corrisponde a questo esperimento aleatorio.

$\Omega=\{(\omega_1,\omega_2,\dots\omega_m): \omega_i\in\{1,2,3\}\}$. $|\Omega|=3^m$ $\mathcal{F}=P(\Omega)$ spazio uniforme

- qual è la probabilità che l'urna 1 resti vuota?

E="Urna 1 vuota" $=\{(\omega_1,\dots,\omega_m):\omega_i\in\{2,3\}\ \forall i=1,2,\dots,m\}$

$$P(E)=\frac{|E|}{|\Omega|}=\frac{2^m}{3^m}=\left(\frac{2}{3}\right)^m$$

- qual è la probabilità che le urne 1 e 2 restano vuote?

F="Urne 1 e 2 vuote" $=\{(\omega_1,\omega_2,\dots\omega_m):\omega_i=3\ \forall i\}=\{(3,3,\dots,3)\}$ $|F|=1$

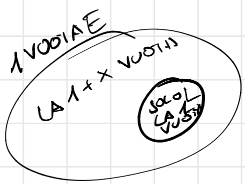
$$P(F)=\frac{|F|}{|\Omega|}=\left(\frac{1}{3}\right)^m$$

- qual è la probabilità che solo una delle urne resti vuota?

E_1="Solo la urna 1 resta vuota"

E_2="Solo la urna 2 resta vuota" $P(E_1\cap E_2\cap E_3)=P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)=3\,P(E_1)$ Oss: $E_1\subset E$

E_3="Solo la urna 3 resta vuota"



$$P(E_1)=\frac{|E_1|}{|\Omega|}=\frac{\overbrace{|E|}^{2^m}-|E\setminus E_1|}{3^m}=\frac{2^m-|E\setminus E_1|}{3^m}=\frac{2^m-2}{3^m}\Rightarrow 3\cdot\frac{2^m-2}{3^m}\ ?$$

$E\setminus E_1$="ci sono due urne vuote di cui una è la 1" = urne 1 e 2 vuote

$E\setminus E_1=\{(3,3,\dots,3),(2,2,\dots,2)\}$

- qual è la probabilità che l'urna 1 sia vuota se l'urna 2 è vuota?

E="Urna 1 vuota" G="Urna 2 vuota"

$$P(E\setminus G)=\frac{P(E\cap G)}{P(G)}=\frac{\frac{1}{3^m}}{\left(\frac{2}{3}\right)^m}=\frac{1}{\cancel{3^m}}\cdot\frac{\cancel{3^m}}{2^m}=\left(\frac{1}{2}\right)^m\xrightarrow[m\to\infty]{}0$$

$(\Omega,\mathcal{F},P)$, $E\in\mathcal{F}$, $\mathbb{1}_E(\omega)=\begin{cases}1 & \text{se } \omega\in E\\ 0 & \text{se } \omega\notin E\end{cases}$ 1° esempio di v.a. 09/10/2023

funzione indicatrice

Variabile aleatoria semplice

definizione: Una v.a. $X:\Omega\to\mathbb{R}$ si dice semplice se assume un numero finito di valori.

$\{H_j: j=1,2,\dots,m\}\subset\mathcal{F}$ è una partizione ($H_i\cap H_j=\emptyset$ se $i\neq j$ $\bigcup_{i=1}^m H_i=\Omega$) $X=\sum_{i=1}^m\lambda_i\mathbb{1}_{H_i}$ $X(\omega)=\lambda_i$ se $\omega\in H_i$.

$X = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbb{1}_{H_i}$

Definiamo un'operazione chiamata aspettazione | media | speranza matematica. Il simbolo è $E[X]$ cioè

$E[X] \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P[H_i] \in \mathbb{R}$ media ponderata

proprietà di E:

✓ linearità: $E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y]$

✓ monotonia: se $X \geq 0$ (cioè $P[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq 0\}] = 1$) $\overset{allora}{\Rightarrow} E[X] \geq 0$ $\quad X \geq 0$ e $E[X] = 0 \Rightarrow X = 0$

verifica: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

- $E[\alpha X] = \alpha E[X]$ $\quad X = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbb{1}_{H_i}$ $\quad \alpha X = \sum_{i=1}^{m} \alpha \lambda_i \mathbb{1}_{H_i}$ $\quad E[X] = \sum_{i=1}^{m} \alpha \lambda_i P[H_i] = \alpha \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P[H_i] = \alpha E[X]$
- $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$ $\quad \left. \begin{array}{l} X = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbb{1}_{H_i} \\ Y = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbb{1}_{G_j} \end{array} \right\}$ $\quad X+Y = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}} (\lambda_i + \mu_j) \mathbb{1}_{H_i \cap G_j}$ → calcoliamo l'aspettazione cioè la media ponderata

$$E[X+Y] = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}} (\lambda_i + \mu_j) P(H_i \cap G_j) = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}} \lambda_i P(H_i \cap G_j) + \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}} \mu_j P(H_i \cap G_j)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{m} \lambda_i P(H_i \cap G_j) \right] = \bigcup_{j=1}^{m} G_j = \Omega = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P[H_i] = E[X] \qquad \bigcup_{j=1}^{m} (H_i \cap G_j) = H_i$$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad X \geq 0$ $\quad X = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbb{1}_{H_i}$ $\quad \lambda_i \geq 0 \ \forall i$ $\quad E[X] = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P(H_i) \geq 0$

$X \geq Y \Rightarrow E[X] \geq E[Y]$ infatti $X - Y \geq 0 \Rightarrow E[X-Y] \geq 0$ $\quad E[X] - E[Y] \geq 0$ $\quad E[X] \geq E[Y]$

$X \geq 0$ $\quad E[X] = 0$ $\quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P(H_i) = 0 \Rightarrow \lambda_i P(H_i) = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$ o $P(H_i) = 0$.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad E \in \mathcal{F}$ $\quad \mathbb{1}_E$ $\quad P(E) = p$ con $0 < p < 1$ $\quad E[X] = 1 \cdot p + 0(1-p) = p$ variabili di Bernoulli

Varianza

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. La varianza si indica con Var. $\mathrm{Var}[X] := E[\underbrace{(X-\mu)^2}_{\text{scarto quadratico}}]$ $\quad \mu = E[X]$

proprietà:

✓ $\mathrm{Var}[X] \geq 0$

✓ $\mathrm{Var}[X] = 0$ vuol dire che $(X-\mu)^2 = 0$ $\quad X = \mu$ cioè X assume il valore μ con certezza

✓ $\mathrm{Var}[\alpha X] = \alpha^2 \mathrm{Var}[X]$ $\quad$ ▲ $\mathrm{Var}[-X] = \mathrm{Var}[X]$

verifica: $\mathrm{Var}[\alpha X] = E[(\alpha X - \alpha\mu)^2] = E[\alpha^2 (X-\mu)^2] = \alpha^2 E[(X-\mu)^2] = \alpha^2 \mathrm{Var}[X]$.

$\mathrm{Var}[X+c] = \mathrm{Var}[X]$ la varianza è invariante per traslazione

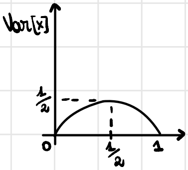
- $\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$.

In particolare, $E[X^2] \geq E[X]^2$. $\quad \mathrm{Var}[X] = E[(X-\mu)^2]$ $\quad \mu = E[X] \cdot E[X^2 + \mu^2 - 2\mu X] = E[X^2] + E[\mu^2] - 2\mu E[X] =$

$= E[X^2] + \mu^2 - 2\mu^2 = E[X^2] - \mu^2$

$X = \mathbb{1}_E \quad P(E)=p \quad E[X]=p \quad Var[X]=E[X^2]-E[X]^2=E[X^2]-p^2=E[X]-p^2=p-p^2=p(1-p)=p\cdot q$ con $q=1-p$

Oss: $X = X^2$



la varianza è massima in corrispondenza di $p=\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{La varianza non è additiva}}$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ In generale, $Var[X+Y] \neq Var[X]+Var[Y]$

$X = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbb{1}_{H_i} \quad \{H_i : i=1,2,\dots,n\} \subset \mathcal{F}$

$Y = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbb{1}_{G_j} \quad \{G_j : j=1,\dots,m\} \subset \mathcal{F}$

X e Y sono stocasticamente indipendenti se $\forall i,j$ H_i e G_j sono indipendenti
$P(H_i\cap G_j)=P(H_i)P(G_j)$

$E,F\in\mathcal{F}$ indipendenti
$P(E\cap F)=P(E)\cdot P(F)$

proposizione: Se $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ sono v.a. semplici indipendenti allora $E[XY]=E[X]E[Y]$

$X = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbb{1}_{H_i} \quad Y=\sum_{j=1}^{m}\mu_j \mathbb{1}_{G_j} \quad XY=\sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} \lambda_i\mu_j \mathbb{1}_{H_i}\mathbb{1}_{G_j} = \sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} \lambda_i\mu_j \mathbb{1}_{H_i\cap G_j}$

$$E[XY]=\sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} \lambda_i\mu_j P[H_i\cap G_j]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P[H_i]P[G_j] \quad \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P[H_i]\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\mu_j P[G_j]\right)=E[X]E[Y]$$

Teorema

in generale, la varianza non è additiva.
se le variabili sono però indipendenti, si può fare la somma.

Se X,Y sono v.a. semplici e indipendenti, allora $Var[X+Y]=Var[X]+Var[Y]$

dim: $\mu=E[X] \quad \nu=E[Y] \quad E[E+Y]=\mu+\nu \quad Var[X+Y]=E[(X+Y-\mu-\nu)^2]=E[(X-\mu+Y-\nu)^2]=E[(X-\mu)^2+(Y-\nu)^2+2(X-\mu)(Y-\nu)]$

$$= Var[X]+Var[Y]+2\underbrace{E[(X-\mu)(Y-\nu)]}_{=E[(X-\mu)]E[(Y-\nu)]=0 \text{ perché } E[(X-\mu)]=0}$$

Variabile binomiale

Ripeto n volte un esperimento Bernoulliano (2 esiti: 0 e 1) con ripetizioni indipendenti. (es. moneta)

Introduco una variabile aleatoria X che mi conta il numero di successi, cioè X vale K se in n prove ho K successi.

Chiamo X_i la variabile aleatoria di Bernoulli che vale 1 se all'i-esima prova ho un successo, 0 altrimenti.

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

Chiamo p la probabilità di successo in un singolo esperimento (ripetizione).

binomiale di parametri n e p

$E[X]=n\cdot p \qquad Var[X]=n\cdot p(1-p)$

X prende come valori $n+1$ e sono $\{0, 1, 2, \dots, n\}$

Qual è la probabilità di avere k successi? $\boxed{P[X=k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$ formula importante

esempio: lancio la moneta 10 volte equa. Qual è la probabilità di ottenere 4 volte testa?

Applico la formula: $n = 10$ $p = \frac{1}{2}$ $P[X=4] = \binom{10}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} =$

$$\frac{10!}{4!\,6!} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2^{10}} = 0.205 \sim 20{,}5\%$$

5 volte testa: $P[X=5] = \binom{10}{5} \frac{1}{2^{10}} = \left(\frac{10!}{5!\,5!}\right) \frac{1}{2^{10}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2^{10}}$

Esercizi

11/10/2023

1) Un calcolatore è collegato ad una rete che permette l'accesso ad un max di 20 persone.

Collegati a questa rete ci sono collegati i terminali di 24 operatori ognuno dei quali richiede con $p = 0.6$ di essere connesso al calcolatore centrale.

Qual è la probabilità che la rete sia satura? $\rightarrow X > 20$

X la variabile aleatoria che conta il numero di richieste.

X binomiale di parametri $n = 24$ $p = 0.6$

$P[X>20] = P[X=21] + P[X=22] + P[X=23] + P[X=24]$

$P[X=k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \longrightarrow P[X=21] = \binom{24}{21} 0.6^{21} 0.4^3 = \frac{24!}{21!\,3!} 0.6^{21} 0.4^3 = \dots$

$P[X=22] = \dots$

$\dots$

$P[X=24] = \dots$

bisogna farlo per tre volte e poi sommare
risultato $= 3{,}5 \cdot 10^{-3} = \boxed{0.35\%}$

2) Una fabbrica produce componenti elettronici. Questi escono da due linee di produzione A e B, A = 30% e B = 70%. La linea A ha una percentuale di pezzi difettosi del 10% contro il 17% della linea B.

a) Qual è la probabilità che un pezzo scelto a caso sia difettoso?

utilizziamo la formula della p. totale.

D = "pezzo difettoso" $P(A) = 0.3$ $P(D|A) = 0.1$

A = "pezzo proviene da A" $P(B) = 0.7$ $P(D|B) = 0.17$

B = "pezzo proviene da B"

$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) =$

$= 0.1 \cdot 0.3 + 0.17 \cdot 0.7 = 0{,}149 \simeq \boxed{15\%}$

b) I chip vengono venduti in confezioni che ne contengono 10 tutti prodotti dalla stessa linea.

Una di queste confezioni viene ispezionata e risulta contenere pezzo difettoso.

Qual è la probabilità che la confezione provenga da A? E da B?

Utilizziamo la formula di Bayes.

X una v.a che conta i pezzi (il numero) difettosi contenuti nella scatola da 10.

$$P[A|X=1] = \frac{P[X=1|A]\cdot P[A]}{P[X=1|A]\cdot P[A] + P[X=1|B]\, P[B]}$$

$$\| $$

$$\frac{0.387\cdot 0.3}{0.387\cdot 0.3 + 0.317\cdot 0.7} = \boxed{0,34}$$

$P[A] = 0.3$ $\quad P[X=1|A] = \binom{10}{1} 0.1\cdot 0.9^9 = 0.387$

$P[B] = 0.7$ $\quad P[X=1|B] = \binom{10}{1} 0.17\cdot 0.83^9 = 0.317$

$P[B|X=1] = 1 - 0.34 = 0.66$

Variabili discrete

variabili semplici: assumono un numero finito di valori

variabili discrete: prendono una quantità numerabile di valori.
infinito numerabile

$X = \sum_i^\infty \lambda_i \mathbb{1}_{H_i}$ con $\{H_i : i\in\mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$ partizione

$E[X] = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i P[H_i]$ purché la serie sia assolutamente convergente.

Variabili di Poisson

definizione: È una v.a. X che prende i valori 0, 1, 2, ... $\boxed{P[X=k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}$ con $\lambda \geq 0$

verifica: È vero che $\sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$

proposizione: $E[X] = \lambda$ se X è di poisson di parametro λ

$Var[X] = \lambda$

Distribuzione di Poisson come limite binomiale

$P[X=k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ binomiale n, p

Voglio mandare $n\to\infty$ e $n\cdot p = \lambda$

$p = \frac{\lambda}{n}$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^k(n-k)}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$\boxed{P[X=k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}$

$n, p \quad n\cdot p = \lambda \quad n\cdot p\cdot q = n\cdot\frac{\lambda}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) = \lambda - \frac{\lambda^n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$

esercizio: Il numero medio di errori tipografici per pagine di una certa rivista è 0.2.
Qual è la probabilità che la pagina che ti accingi a leggere contenga
1) nessun refuso (errore tipografico)
2) due o più refusi

N v.a. conta il numero di errori nella pagina che sto per leggere
↳ distribuzione di Poisson perché la probabilità è bassa (?)
N è di Poisson con $\lambda = 0.2$

1) nessun refuso vuol dire $n=0 \longrightarrow P[N=0] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-0.2} = \boxed{0.81}$

2) $n \geq 2 \rightarrow P[N\geq 2] = 1 - \underbrace{P[N\leq 1]}_{\text{invece di farlo per tutti i numeri} \geq 2 \text{, considero l'evento contrario}} = 1 - P[N=0] - P[N=1]$

$P[N=1] = e^{-\lambda}\frac{\lambda}{1!} = 0.2\, e^{-0.2} = 0.162$

$P[N\geq 2] = 1.081 - 0.162 = \boxed{0.03}$

---

dimostrazione: ???

$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

$e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} \qquad e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad e^{\lambda} = (e^{\lambda})' \overset{\text{derivata}}{=} \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k\lambda^{k-1}}{k!}$

$e^{-\lambda}\sum^{\infty}$

$P[N\geq 2] = 1 - P[N \geq 2] = 1 - (P[N \leq 1]) = 1 - P[N=0] - P[N=1] = 1 - 0{,}81 - 0{,}162 = 0{,}028 \simeq$

$\hookrightarrow 2)$

$\simeq 3\%$

$P[N=1] = e^{-\lambda} \frac{\lambda}{1!} = 0{,}2\, e^{-0{,}2} = 0{,}162$

$E[X] = \lambda \qquad P[X=k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$Var[X] = \lambda$

$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \lambda^k}{k!} = \cancel{e^{-\lambda}} \cdot \lambda \cancel{e^{\lambda}} = \lambda$

$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$

$(e^{\lambda})' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\right)' \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \lambda^{k-1}}{k!} \Rightarrow \lambda e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \lambda^k}{k!}$

* derivo rispetto a λ

$\parallel$

e^{λ}

moltiplico per λ e sostituisco.

ok

$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] - \lambda^2 = \lambda + \cancel{\lambda^2} - \cancel{\lambda^2} = \lambda$

$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \;=\!=\!= \; \cancel{e^{-\lambda}} \cdot \cancel{e^{\lambda}} (\lambda + \lambda^2) = \lambda + \lambda^2$

sostituiamo

* $\lambda e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 \lambda^{k-1}}{k!}$

$e^{x}(1+\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 \lambda^{k-1}}{k!}$

moltiplichiamo per λ entrambi i membri.

$e^{\lambda}(\lambda + \lambda^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 \lambda^k}{k!}$

Riproducibilità

X è una v.a. di Poisson di parametro λ

Y è una v.a. di Poisson di parametro λ

Se X e Y sono indipendenti $\Rightarrow X+Y$ è di Poisson di parametro $\lambda + \mu$.

Esercizio / Esempio

Due centralini, tra loro indipendenti, ricevono nell'unità di tempo un numero di telefonate X e Y v.a. di Poisson di parametri λ e μ.

Qual è la probabilità che i 2 centralini ricevano complessivamente non più di 3 telefonate se $\lambda = 2$ e $\mu = 4$.

Il numero complessivo di chiamate è descritto dalla v.a $X+Y$.

$X+Y = \mu + \lambda = 2+4 = 6$

$P[X+Y] \leq 3 \Rightarrow P[X+Y=0] + P[X+Y=1] + P[X+Y=2] + P[X+Y=3]$.

$P[X+Y=k] = \dfrac{e^{-(\lambda+\mu)} \cdot (\lambda+\mu)^k}{k!} = e^{-6} \cdot \dfrac{6^k}{k!} =$

$P[X+Y=0] = e^{-6}$

$P[X+Y=1] = e^{-6} \cdot 6$

$P[X+Y=2] = e^{-6} \dfrac{36}{2} = e^{-6} \cdot 18.$

$P[X+Y=3] = e^{-6} \cdot \dfrac{6^3}{6} = e^{-6} \cdot 36.$

$P[X+Y \leq 3] = e^{-6}(1+6+18+36) = 0{,}15 \simeq 15\%$

Calcolare la legge condizionale di X dato X+Y

$$P[X=k \mid X+Y=n] = \begin{cases} 0 \\ \dots \end{cases} = \frac{\cancel{k \cdot \lambda \cdot e^{-\mu}}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \quad k \leq n$$

$$P[X=k \mid X+Y=n] = \frac{P[X=k \text{ e } X+Y=n]}{P[X+Y=n]} = \frac{P[X=k \text{ e } Y=n-k]}{P[X+K=n]} = \frac{P[X=k] \cdot P[Y=n-k]}{P[X+K=n]}$$

$$P[X+Y=k] = \frac{\cancel{e^{-\lambda}} \dfrac{\lambda^k}{k!} \cancel{e^{-\mu}} \dfrac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{\cancel{e^{-(\lambda+\mu)}} \dfrac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \frac{\lambda^k \cdot \mu^{n-k}}{(\mu+\lambda)^n} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot \frac{\lambda^k}{(\lambda+\mu)^k} \cdot \frac{\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^{n-k}} =$$

$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

$= \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ $\quad \left[\text{se } p = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \text{, allora } (1-p) = 1 - \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} = \dfrac{\cancel{\lambda}+\mu-\cancel{\lambda}}{\lambda+\mu} = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} \right]$

$X \rightarrow \lambda$

$Y \rightarrow \mu$

X e Y indipendenti

$$P[X+Y=n] = \sum_{k=0}^{n} P[X=k \mid Y=n-k]$$

$$\sum_{k=0}^{n} P[X=k] \cdot P[Y=n-k] = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^{n-k}}{(n-k)!} \cdot n! =$$

[moltiplico e divido per n!, per trovare la formula del binomiale]

$$= \frac{e^{-\lambda}\cdot e^{-\mu}}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \cdot \mu^{n-k} \cdot \binom{n}{k} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \cdot (\lambda+\mu)^n \cdot \binom{n}{k}$$

Distribuzione geometrica

16/10/2023

X è una v.a. che prende tutti i valori dell'insieme $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ cioè tranne lo zero. $\mathbb{N}\setminus\{0\}=\{1,2,3,4,5,\dots\}$.

$P[X=k]=p\,q^{k-1}$ $\quad q=1-p \quad 0<p<1$ $\quad$ (p = probabilità di successo $\quad q=1-p \rightarrow$ probabilità di insuccesso)

X conta il numero di tentativi necessari per ottenere un successo nella ripetizione di esperimenti Bernoulliani indipendenti.

↳ non può assumere valore 0 perché devo averci almeno un successo.

$\bullet \sum_{k=1}^{\infty} p\,q^{k-1}=1 \rightarrow$ verifica: $p \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}}_{\text{togliamo ciò che non fa parte della sommatoria}} = p\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} q^k}_{\text{serie geometrica}}\right)=p\cdot\frac{1}{1-q}=\frac{p}{p}=1$

$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \text{ se } |q|<1}$ formula serie geometrica

$\bullet \; E[X]=\sum_{k=1}^{\infty} k\,p\,q^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k\,q^{k-1} = \frac{p}{p^2}=\frac{1}{p} \qquad E[X]=\frac{1}{p}$

$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} k\,q^{k-1}=\frac{1}{(1-q)^2}}$

media / aspettazione

$\bullet \; Var[X]=E[X^2]-E[X]^2=E[X^2]-\frac{1}{p^2}$

$E[X^2]=\sum_{k=1}^{\infty} k^2 p\,q^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = \frac{p(1+q)}{p^3} = \frac{1+q}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}$ se vogliamo esprimerla in p sarebbe $\frac{1-p}{p^2}$ $\qquad$ varianza

$\sum_{k=1}^{\infty} k\,q^k=\frac{q}{(1-q)^2}$

$\downarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = \frac{1(1-q)^2+q\,2(1-q)}{(1-q)^4} = \frac{(1-q)(1-q+2q)}{(1-q)^{4\,3}} = \frac{1+q}{(1-q)^3}$

proprietà valida solo per questa v.a. → (geometrica)

assenza di memoria

$P[X>k+\ell \mid X>k]=P[k>\ell]$

verifica: $P[k>\ell]=\underbrace{1-P[X\le \ell]}_{\text{complem.}} = 1-\sum_{k=1}^{\ell} p\,q^{k-1} = 1-p\sum_{k=0}^{\ell-1} q^k = 1-\cancel{p}\cdot\frac{1-q^\ell}{\cancel{1-q}} = 1-(1-q^\ell)=q^\ell \qquad P[X>\ell]=q^\ell$

$\boxed{\text{somme parz. serie geom. } \sum_{k=0}^{n} q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

$P[X>k+\ell \mid X>k]=\frac{P[X>k+\ell \mid X>k]}{P[X>k]}=\frac{P[X>k+\ell]}{P[X>k]}=\frac{q^{k+\ell}}{q^k}=q^\ell$ OK!

La distribuzione geometrica è la sola distribuzione su $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ a godere della proprietà "assenza di memoria".

Sia X una v.a. $\quad P[X>k+\ell \mid X>k]=P[X>\ell] \quad \forall k,\ell=1,2,3,\dots$

$g(\ell):=P[X>\ell] \qquad g:\mathbb{N}/\{0\}\rightarrow[0,1]$ $\qquad$ g trasforma somme in prodotti

$\frac{g(k+\ell)}{g(k)}=g(\ell) \qquad g(k+\ell)=g(k)\,g(\ell) \qquad g(1)=q$

$g(2)=g(1+1)=g(1)^2=g^2 \qquad g(k)=q^k$

$P[X>\ell]=q^\ell$

Quant'è la probabilità che X sia $=\ell$ cioè assuma un certo valore?

$P[X\le\ell]=1-q^\ell \qquad P[X>\ell]=q^\ell$

$P[X=\ell]=P[X>\ell-1 \cap X<\ell+1]$

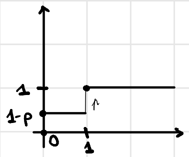
$E=$"$X>\ell$" $\quad F=$"$X>\ell-1$" $\quad E\subseteq F$ $\qquad$ Calcoliamo $P[F|E]=P[F]-P[E]=1-q^{\ell-1}-(1-q^\ell)=q^{\ell-1}+q^\ell=\boxed{q^{\ell-1}\cdot p}$

eventi

Funzione di ripartizione della v.a.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. $F_X: \mathbb{R} \to [0,1]$ $F_X(t) = P[X \le t] = P \cdot \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le t\}$ t è un numero qualsiasi

$X = 1_E$ $P(E) = p$
↓
prende solo valori 0 e 1



$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-p & 0 \le t < 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}$$

PROPRIETÀ:

1. F_X prende valori in $[0,1]$
2. F_X è monotona non decrescente se $t \le s \Rightarrow F_X(t) \le F_X(s)$
3. $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$. $\lim_{t \to \infty} F_X(t) = 1$
4. F_X è continua da destra in ogni punto
5. $\lim_{t \to t_0^+} F_X(t) = F_X(t_0)$
6. Se F_X ha una discontinuità in $t_0 \overset{\text{allora}}{\Rightarrow} P[X = t_0] = F_X(t_0) - \lim_{t \to t_0^-} F_X(t)$

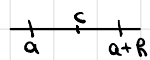
definizione: X si dice continua se F_X è continua per ogni t in $\mathbb{R}$.
Equivalentemente, $P[X = t] = 0$ $\forall t$

importante

Variabili assolutamente continue

Una v.a. X continua si dice assolutamente continue se $\exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) \ge 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, integrabile e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ tale $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(v)\,dv$. f è la densità di probabilità.

$P[a \le X \le b] = \int_a^b f(v)\,dv$ $P[a \le X \le a+h] = \int_a^{a+h} f(v)\,du = f(c) \cdot h$

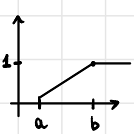


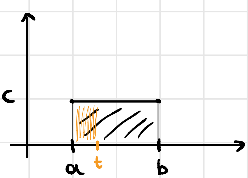
Oss: Se F_X è $C^1 \Rightarrow F_X' = f$.

Distribuzione uniforme

$f_{a,b}(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$ densità uniforme

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_{a,b}(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } t \le a \\ \frac{t}{b-a} & \text{se } a \le t \le b \\ 1 & \text{se } t \ge b \end{cases}$$





$a < b$
$c = \frac{1}{b-a}$

$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$ purché l'integrale sia convergente assolutamente, cioè $\int_{-\infty}^{+\infty} x|f(x)|\,dx < \infty$.

$$Var[X] = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx \quad \text{con } \mu = E[X]$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(x) \qquad E[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$E[X^2] = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{\cancel{(b-a)}(a^2+ab+b^2)}{3\cancel{(b-a)}}$$

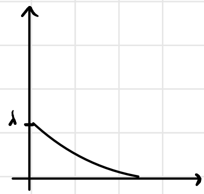
$$Var[X] = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2) - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-3b^2-6ab}{12} = \frac{a^2+b^2-2ab}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$Var[X] = \frac{1}{12}(b-a)^2$$
$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

Distribuzione esponenziale

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \quad \lambda > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = 1$$



$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1-e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

$$P[X \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}$$
$$P[X > t] = 1 - (1-e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$
$$E[X] = \int_0^{\infty} \underbrace{x}_{g}\,\underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{f'}\,dx = -e^{-\lambda x}x\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} te^{-\lambda x}\,dx = \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var[X] = E[X^2] - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$E[x^2] = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = e^{-\lambda x}x^2\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} +2e^{-\lambda x}x\,dx = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda}$$

$$P[X > t+s \mid X > t] = P[X > s]$$

$$\parallel$$

$$P[X > s] = e^{-\lambda s} \qquad P[X > t] = e^{-\lambda t}$$

$$\frac{P[X > t+s \text{ e } X > t]}{P[X > t]} = \frac{P[X > t+s]}{P[X > t]} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{\cancel{e^{-\lambda t}}\,e^{-\lambda s}}{\cancel{e^{-\lambda t}}}$$

Problema: 18/10/2023

Una moneta equa viene lanciata n volte, dove N è una v.a con distribuzione di Poisson di parametro λ.
Siano X e Y le v.a che danno il numero di teste e di croci ottenute.

1) trovare le distribuzioni di X e Y
2) dimostrare che X e Y sono indipendenti

$P[N=n] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$

$P[X=k] = ?$ dove $k, l \in \{0,1,2,\dots\}$

$P[Y=l] = ?$

$$P[X=k] = \sum_{n=0}^{\infty} P[X=k|N=n]\,P[N=n] = \sum_{n=k}^{\infty} P[X=k|N=n]\cdot P[N=n] = \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} =$$

legge prob. totale

$$= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{\cancel{n!}}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^n (1-p)^{-k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{\cancel{n!}} = \frac{e^{-\lambda}}{k!} p^k \sum_{n=k}^{\infty}\frac{(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}\cdot\lambda^{n-k}\cdot\lambda^k = \frac{e^{-\lambda}}{k!}(p\lambda)^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{[(1-p)\lambda]^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda}}{k!}(p\lambda)^k e^{(1-p)\lambda} =$$

porto fuori ciò che non dipende da n

$$= \frac{(p\lambda)^k e^{-p\lambda}}{k!} \Rightarrow \boxed{P[X=k] = \frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-p\lambda}}$$

$$P[Y=l] = \boxed{\frac{(1-p)^l\lambda^l}{l!}e^{-(1-p)\lambda}}$$

X e Y sono stocasticamente indipendenti cioè $P[X=k \cap Y=l] = P[X=k]\,P[Y=l]$

$$= \frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-p\lambda}\,\frac{[(1-p)\lambda]^l}{l!}e^{-(1-p)\lambda}$$

$$P[X=k\cap Y=l] = \sum_{n=0}^{\infty} P[X=k \text{ e } Y=l\,|\,N=n]\cdot P[N=n] = P[X=k \text{ e } Y=l\,|\,N=k+l]\cdot P[N=k+l] =$$

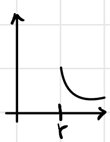
$$= P[X=k\,|\,N=k+l]\cdot P[N=k+l]$$

$$\binom{k+l}{k} p^k (1-p)^l \qquad \frac{e^{-\lambda(k+l)}}{(k+l)!}\lambda^{k+l}$$

$$\frac{\cancel{(k+l)!}}{k!\,l!} p^k (1-p)^l \cdot \frac{e^{-\lambda k}e^{-\lambda l}\lambda^k\lambda^l}{\cancel{(k+l)!}}$$

Problema: per $r>0$, $\lambda>0$

$$f(x) = \begin{cases} c\,x^{-(\lambda+1)} & x>r \\ 0 & x\le r \end{cases}$$



a) determinare $c>0$ in modo che f sia una densità.

- $f(x)\ge 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \qquad \int_{r}^{+\infty} c\, x^{-(\lambda+1)}\,dx = 1 \qquad c = \frac{1}{\int_r^{\infty} x^{-(\lambda+1)}\,dx} \Rightarrow \frac{1}{\lambda r^{-\lambda}}$$

b) Sia X una v.a. che ha f come densità.
Per quali valori di λ, $E[X]$ è finito?
Per quali valori di λ, $Var[X]$ è finito?

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx < \infty$$
finito se $\alpha > 1$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \lambda r^{\lambda} \int_r^{\infty} x^{-\lambda}\,dx < \infty \qquad \lambda > 1$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \int_r^{\infty} x^2 x^{-\lambda-1}\,dx = \lambda r^{\lambda} \int_r^{\infty} x^{-\lambda+1}\,dx = \int_r^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda-1}} \quad \dots ?$$

c) Qual è la legge di $Y = \ln\left(\frac{X}{r}\right)$ (legge di distribuzione)

$$P[Y \le t] = P\left[\ln\left(\tfrac{X}{r}\right) \le t\right] = P\left[\tfrac{X}{r} \le e^t\right] = P[X \le re^t]$$

2 casi: $re^t \le r \Leftrightarrow e^t \le 1 \Leftrightarrow t \le 0 \qquad P[Y \le t] = 0$

$$P[Y \le t] = \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases}$$

$$P[X \le re^t] = \int_r^{re^t} \lambda r^{\lambda} x^{-(\lambda+1)}\,dx$$

$$\frac{d}{dt}\left[\lambda r^{\lambda} \int_r^{re^t} x^{-(\lambda+1)}\,dx\right] = \lambda r^{\lambda} (re^t)^{-\lambda-1} re^t = \lambda \cancel{r^{\lambda}}\, \cancel{r^{-\lambda}}\, \cancel{r^{-1}}\, \cancel{r}\, e^{-\lambda t} \cancel{e^{-t}}\, \cancel{e^{t}} = \lambda e^{-\lambda t}$$

- $X_1, X_2, \dots, X_n$ sono n variabili esponenziali di parametri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (rispettivamente).

Qual è la legge di $X = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ se le X_i sono tra loro indipendenti?

- Risposta: X è ancora esponenziale di parametro $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.

<u>verifica</u>: $P[X \le t] = 1 - P[X < t] = 1 - P[\min_{1 \le i \le n} \{X_i\} > t]$

$$1 - P[X_1 > t \text{ e } X_2 > t \dots \text{ e } X_n > t] = 1 - P[X_1 > t] \cdot P[X_2 > t] \dots P[X_n > t] = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} \dots e^{-\lambda_n t} & \text{quando } t \ge 0 \\ 0 & \text{quando } t < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)t} \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

<u>OK verificato</u>

---

problema: un componente viene prodotto da una fabbrica che utilizza due linee di lavorazione da cui escono elementi esteriormente indistinguibili.

Si può supporre che i pezzi prodotti dalla prima linea abbiano un tempo di vita esponenziale di parametro λ; quelli della seconda di parametro μ. $(\mu > \lambda)$

Inoltre, è noto che le proporzioni di pezzi prodotti dalle due linee sono rispettivamente p, q. $(p+q=1)$

1) un pezzo viene scelto a caso. Indichiamo con T il suo tempo di vita.
Qual è la legge di T (v.a)? Quanto vale l'aspettazione $E[T]$?

Risoluzione:

H_i = "il pezzo proviene dalla linea i" $i=1,2$

$P(H_1)=p$

$P(H_2)=q$

Calcoliamo che $P[T\le x]=P[T\le x|H_1]\cdot P[H_1]+P[T\le x|H_2]\cdot P[H_2]=p\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt+q\int_0^x \mu e^{-\mu t}dt=$
$=\int_0^x (p\lambda e^{-\lambda t}+q\mu e^{-\mu t})dt \leftarrow$ legge

$E[T]=\frac{p}{\lambda}+\frac{q}{\mu}$

2) Sapendo che il pezzo è ancora in funzione al tempo $s>0$, quale la probabilità che provenga dalla prima linea? Quanto vale questa probabilità per s grande?

$$P[H_1|T>s]=\frac{P[T>s|H_1]\cdot P[H_1]}{P[T>s]}$$

$P[H_1]=p$

$P[T>s|H_1]=e^{-\lambda s}$

$P[T>s]=\int_s^\infty (\lambda p e^{-\lambda t}+\mu q e^{-\mu t})dt=pe^{-\lambda s}+qe^{-\mu s}$

$$P[H_1|T>s]=\frac{P[T>s|H_1]\cdot P[H_1]}{P[T>s]}=\frac{e^{-\lambda s}\cdot p}{pe^{-\lambda s}+qe^{-\mu s}}=\frac{1}{1+\frac{q}{p}e^{-\mu s}e^{\lambda s}}=\frac{1}{1+\frac{q}{p}e^{(\lambda-\mu)s}}\xrightarrow[s\to\infty]{}1$$

Disuglianze di Markov

23/10/2023

Sia X una v.a. con $X\ge 0$ (cioè $P(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\ge 0\})=1$).
Se X ha media $E[X]<\infty$ cioè finita, allora $P[X>k]\le\frac{E[X]}{k}$

dim: supponiamo X assolutamente continua. Quindi la $P[X\le t]=\int_0^t f(v)dv$. $(k>0)$
Ricordiamo che l'aspettazione è $E[X]=\int_0^{+\infty} v f(v)\,dv \ge \int_k^\infty v f(v)\,dv \ge \int_k^\infty k f(v)\,dv = k\int_k^\infty f(v)\,dv = kP[X\ge k]$.

conseguenze: $P[X>k]\le\frac{E[X]}{k} \longrightarrow P[|X|>k]\le\frac{E[|X|]}{k}$

Se $E[|X|^2]<\infty$ allora $P[|X|>k]=P[|X|^2>k^2]\le\frac{E[|X^2|]}{k^2}$

Disuguaglianza di Chebyshev

Sia X v.a. con varianza finita. Allora la prob. che X scarti dalla media per qualcosa che è grande K volte di sigma è minore uguale di $\frac{1}{K^2}$.

In formule: $P[|X-\mu| > K\sigma] \leq \frac{1}{K^2}$ con $\mu = E[X]$ $\sigma^2 = \text{Var}\,E[X]$ $\sigma = \sqrt{\text{Var}\,E[X]}$ (ha le stesse dim. di X).

dim: $P[|X-\mu| > K\sigma] = P[|X-\mu|^2 > K^2\sigma^2] \leq \underbrace{\frac{\cancel{\sigma^2}}{K^2\cancel{\sigma^2}}}_{\frac{1}{K^2}}$ ok

esempio: X v.a. statura media (in una certa nazione) $E[X] = 172$ cm con varianza $\sigma^2 = 100\ \text{cm}^2$ $\sigma = 10$ cm. statura standard

$? = P[X > 180]$

$P[X > 180] < \frac{172}{180}$

$P[|X-\mu| > \underbrace{15}_{K=15}] \leq \frac{1}{\sigma^2 K^2} = \frac{1}{100 \cdot 15^2}$

Convergenza di successioni di v. a. (definizione I)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una succ. di v.a su Ω.

definizione (convergenza quasi certa): X_n converge quasi certamente a X. (X una v.a).

se $P[\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \xrightarrow[n]{} X(\omega)\}] = 1$.

Convergenza in probabilità (definizione II)

definizione: X_n converge in probabilità a X se: $\forall \delta > 0$ $P[|X_n - X| > \delta] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. In tal caso $X_n \xrightarrow{P} X$.

proposizione: Se $X_n \to X$ quasi certamente, allora $X_n \to X$ in probabilità ($X_n \xrightarrow{P} X$).

dim: $E_0 = \{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega)$ <u>non</u> converge a $X(\omega)\}$ $P[E_0] = 0$.

Fissiamo $\delta > 0$. $E_n = \{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| > \delta\}$ abbiamo fissato due eventi

$F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$

$F_{n+1} \subset F$. $\lim_{n\to\infty} P(F_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right)$.

Dico che $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subset E_0$.

$\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \in)$ $\forall n \exists k(n)$ tc $|X_{k(n)}(\omega) - X(\omega)| > \delta$

$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = 0$ quindi $\lim_{n\to\infty} P(F_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = 0 \to \lim_{n\to\infty} P(E_n) = 0$.

Legge dei grandi numeri (formulazione debole)

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di v.a. indipendenti tra di loro dotate di media μ e varianza σ^2 (comuni alle X_n) finite. La legge dei grandi numeri dice che $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu$.

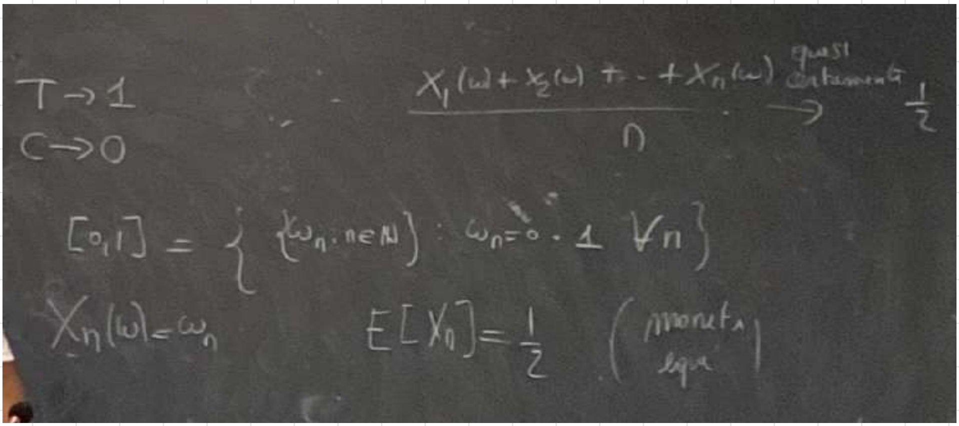
esempio: X_n sono di tipo Bernoulli di parametro p. $E[X_n]=p$ $Var[X_n]=p(1-p)$ $\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n} \xrightarrow{P} p$

$$P\left[\left|\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}-p\right|>\delta\right]\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

dim: $P\left[\left|\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}-\mu\right|>\delta\right] \le \frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{1}{\delta^2}$

con $\delta>0$ fissato

$$\begin{cases} Y_n=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\dots+X_n) \\ E[Y_n]=\frac{1}{n}(E[X_1]+E[X_2]+\dots+E[X_n])=\frac{1}{n}(\mu+\mu+\dots+\mu)=\frac{1}{\cancel{n}}\cancel{n}\mu=\mu \\ Var[Y_n]=\frac{1}{n^2}[Var[X_1+X_2+\dots+X_n]]=\frac{1}{n^2}[Var[X_1]+Var[X_2]+\dots+Var[X_n]]=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n} \end{cases}$$



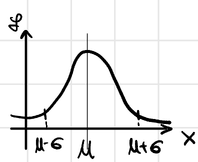
Distribuzione normale gaussiana

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ è la media $\mu=E[X]$ $\sigma^2=Var[X]$

Per fare ciò bisogna sapere una cosa importante cioè l'integrale gaussiano: $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$

warning!



Se $\mu=0$ e $\sigma^2=1$ allora $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \longrightarrow \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$.

densità normale standard

funzioni degli errori

Convergenza in legge (definizione)

Una successione $\{X_n : n\in\mathbb{N}\}$ di v.a. converge in legge a X se $\forall t\in\mathbb{R}$ tale che F_X è continua:

$$\lim_{n\to\infty}P[X_n\le t]=P[X\le t].$$

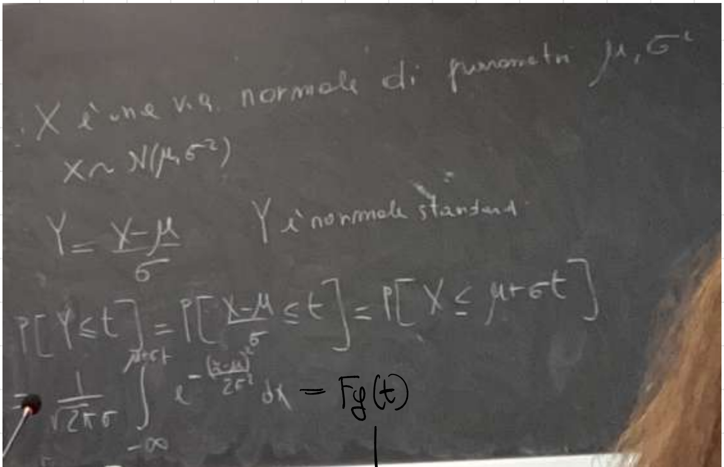
Proposizione: $X_n\xrightarrow{P}X \Rightarrow X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$. In tal caso si scrive $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$

Teorema del limite centrale

enunciato di Levy = $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di v.a. indipendenti, identicamente distribuite con media μ e varianza σ^2 finite. Allora $\dfrac{X_1+X_2+\dots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} N(0,1)$.

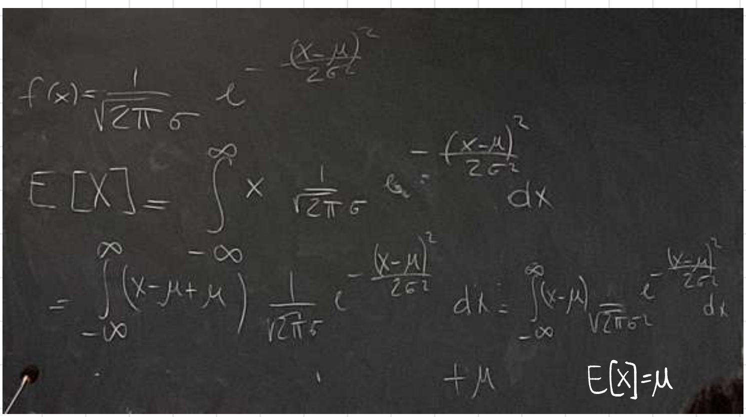
N normale (distribuzione normale)

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{X_1+X_2+\dots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\le t\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$



faccio derivata

$$F'_Y(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\cancel{\sigma}}\,e^{-\frac{(\cancel{\mu}+\sigma t-\cancel{\mu})^2}{2\sigma^2}}\cdot\cancel{\sigma}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-t^2}{t}}$$



25|10|2023

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$E[X] = \mu$ ✓

$Var[X] = \sigma^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

$$t = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\,\sigma}$$

$$x = \mu + \sqrt{2}\,\sigma t$$

$$dx = \sqrt{2}\,\sigma\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cancel{2}}\sqrt{\pi}\,\cancel{\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,\cancel{\sqrt{2}}\,\cancel{\sigma}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$E[X] = \mu$ ✓

$Var[X] = \sigma^2$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}}$$

$$Var[X] = E[X^2] - \mu^2$$

$$E[X^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{2}}\,\cancel{\sigma}}{\sqrt{\cancel{2}\pi}\,\cancel{\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sqrt{2}\,\sigma t)^2 e^{-t^2}\,dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 e^{-t^2}\,dt + 2\mu\sqrt{2}\,\sigma\int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} + 2\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt\right]$$

$x =$

$dx =$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$E[X] = \mu$ ✓

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}}$$

$Var[X] = \sigma^2$ ✓

$$= \mu^2 + \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt = \mu^2 + \sigma^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} t\,(-2t)\,e^{-t^2} =$$

$$-\frac{1}{2}\left[\cancel{e^{-t^2}\,t\,\Big|_{-\infty}^{\infty}} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\right] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Problema:

Un dado equilibrato viene lanciato 900 volte. Indichiamo con X il numero di volte in cui compare il 6.

a) quanto vale l'aspettazione di questa variabile $E[X]$? Quanto vale la probabilità che X sia ≥ 180 cioè $P[X \geq 180]$?

Risoluzione: X_i vale 1 se il lancio i-esimo da 6, 0 altrimenti $i = 1, 2, \dots, 900$ $\quad X = \sum_{i=1}^{900} x_i$

x_i bernoulli di parametro $p = \frac{1}{6}$ ‖ perché il dado è equilibrato

L'aspettazione di una v. binomiale $\overset{900}{n} \cdot p$ cioè $E[X] = n \cdot p = \frac{\cancel{900}^{3}}{\cancel{6}_{2}} = \boxed{150}$

La varianza di una v. binomiale $Var[X] = n \cdot p \cdot \underset{1-p}{q} = 900 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \boxed{125}$

La radice della varianza è $\sigma = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{125} = \boxed{11.18}$

↳ deviazione standard

$P[X \geq 180] = P\left[\underbrace{\frac{X-150}{11,18}}_{\text{sottraggo la media e divido per la d. standard}} \geq \frac{180-150}{11.18}\right] = P\left[Z \geq \frac{30}{11.18}\right] = P[Z \geq 2.68] = 1 - P[Z \leq 2.68] \Rightarrow P[X \geq 180] = 1 - \Phi(2.68) =$

controllare tabella "continui gaussiani"

con $Z \sim N(0,1)$

$= 1 - 0.9963 =$ va verso lo zero

b) Supponiamo di sapere dell'esistenza di una partita (gruppo) di dadi truccati che producono il 6 con probabilità $\frac{2}{9}$. Per decidere se un dado è truccato usiamo la seguente procedura: esso viene lanciato 900 volte e decidiamo che è truccato se si ottiene il 6 più di 180 volte.

Qual è la probabilità che un dado truccato venga effettivamente individuato e consegnato alle autorità?

risoluzione: bisogna calcolare la probabilità che X sia ≥ 180 con i nuovi parametri.

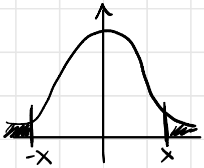
$P[X \geq 180 \mid T]$ dove T = "dado truccato"

$X = \sum_{i=1}^{900} x_i$ $\quad x_i$ bernoulli con $p = \frac{2}{9}$

$E[X] = n \cdot p = 900 \cdot \frac{2}{9} = \boxed{200}$ $\qquad Var[X] = n \cdot p \cdot q = 900 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{9} = \frac{200 \cdot 7}{9} = \frac{1400}{9} = \boxed{155.6}$

$\sigma = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{155.6} = \boxed{12,47}$

$P[X \geq 180] = P\left[\frac{X-200}{12,47} \geq \frac{180-200}{12,47}\right] = P\left[Z \geq \frac{-20}{12.47}\right] = P[Z \geq -1.603] = 1 - P[\underbrace{Z \leq -1.603}_{\text{i valori negativi nella tabella non ci sono}}] =$ ⊛



$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$= 1 - [1 - \Phi(1.603)] = \Phi(1.603) = \boxed{0.9454}$

Problema: Si lancia una moneta equa finché non si ottengono 200 teste.

a) Qual è la probabilità che siano necessari più di 430 lanci?

b) Qual è la probabilità che bastino meno di 390 lanci?

risoluzione: X_i bernoulli che vale 1 se il lancio i-esimo della moneta mi dà testa, 0 altrimenti.
Poiché la moneta è equa, x vale $\frac{1}{2}$.

(*) se nei 430 lanci ottengo meno di 200 teste, servono altri lanci

$\sum_{i=1}^{430} X_i < 200$ (*) (applico il teorema del limite centrale) $X = \sum_{i=1}^{430} X_i$

$E[X] = n \cdot p = \frac{430}{2} = \boxed{215}$ $\quad Var[X] = n \cdot p \cdot q = \frac{430}{4} = \frac{215}{2} = \boxed{107.5}$ $\quad \sigma = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{107.5} = \boxed{10.37}$

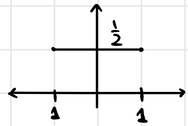
$P[X < 200] = P\left[\frac{X-215}{10.37} \leq \frac{200-215}{10.37}\right] = P\left[Z \leq -\frac{15}{10.37}\right] = P[Z \leq -1.45] = 1 - \Phi(1.45) = 1 - 0.9265 = \boxed{0.0735}$ a)

b) $P\left[\sum_{i=1}^{390} X_i \geq 200\right]$ fare calcoli ......

Esercizio: Sia X una v.a. con distribuzione uniforme tra -1 e 1 e $Z = \ln|X|$

a) Calcolare la funzione di ripartizione e la densità di Z.
b) Calcolare $E[Z]$ e $Var[Z]$.
c) $P[Z < -\frac{1}{2} \mid X > -\frac{1}{2}]$

risoluzione: la densità f di X è la funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x: |x| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

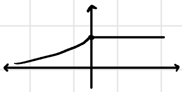


$P[Z \leq t] = P[\ln|X| \leq t]$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$P[|X| \leq e^t] = 2P[0 \leq X \leq e^t] = 2\int_0^{e^t} f(n)\, dn$

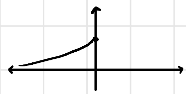
$$G(t) = P[Z \leq t] = \begin{cases} \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} e^t & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } e^t > 1 \Leftrightarrow t > 0 \end{cases}$$

funzione di ripartizione



$$g(t) = \begin{cases} e^t & t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

funzione di densità



b) $$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} t\, g(t)\, dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \underset{g}{t}\, \underset{f'}{e^t}\, dt = e^t t \Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^t\, dt}_{\text{risoluzione per parti}} = -e^t \Big|_{-\infty}^{0} = \boxed{-1}$$

$Z = -Z'$ $\quad Z' \sim exp(1)$

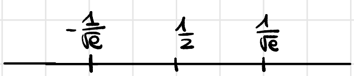
$Z' \sim exp(\lambda)$

$E[Z'] = \frac{1}{\lambda}$ $\quad Var[Z'] = \frac{1}{\lambda^2}$ $\quad Var[Z] = \boxed{1}$

c) $P[Z = -\frac{1}{2} \mid X > -\frac{1}{2}] = P[Z < -\frac{1}{2} \text{ e } X > \frac{1}{2}] = P[X > \frac{1}{2}]$ $\quad Z = \ln|X|$

$P[X > -\frac{1}{2}] = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow P[X > -\frac{1}{2}] = \frac{3}{4}$

$\begin{cases} X > -\frac{1}{2} \\ \ln|X| < -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} X = -\frac{1}{2} \\ |X| < e^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} X > -\frac{1}{2} \\ -e^{-\frac{1}{2}} < X < e^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$



$P[-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\cancel{4}^{2}}{3} =$ fare calcolo

Problema: $X \sim N(0,1)$ $\quad \mu = 0$ $\quad \sigma^2 = 1$ $\quad E[X^n] = ?$ $\quad E[X^n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$

2 casi $\begin{cases} n \text{ pari} \\ n \text{ dispari} \end{cases}$ $\quad E[X^n] = 0$ se $n = 2k+1$ (dispari) $\quad E[X^{2n}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$

$I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$ $\qquad I_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1$

$$E[X^n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x^{2n-1}}_{g}\, \underbrace{(-x)e^{-\frac{x^2}{2}}}_{f'}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\cancel{e^{-\frac{x^2}{2}} x^{2n-1}\Big|_{\infty}^{-\infty}} + (2n-1)\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} e^{-\frac{x^2}{2}}\right] =$$

$I_n = (2n-1)\, I_{n-1}$ $\qquad$ $I_1 = I_0 = 1$

$I_0 = 1$ $\qquad$ $I_n = E[X^{2n}]$ $\qquad$ $I_2 = 3 I_1 = 3$

$I_3 = 5 \cdot 3$

$I_4 = 7 \cdot 5 \cdot 3$ $\qquad$ $\boxed{I_n = (2n-1)}$

$$\boxed{E[X^{2n}] = (2n-1)}$$

<u>proprietà della funzione di ripartizione</u> $\qquad$ 30/10/2023

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad \forall t \in \mathbb{R}$ $\quad \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}$ $\qquad F_X(t) \overset{def}{=} P[X \leq t]$

<u>proprietà</u>:

- $0 \leq F_X(t) \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- $t \leq s \Rightarrow F_X(t) \leq F_X(s) \longrightarrow$ verifico: se $t \leq s$ allora $E_t = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq t\}$ $\quad E_s = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq s\}$ $\quad E_t \subseteq E_s \Rightarrow$
$\Rightarrow P(E_t) \leq P(E_s)$ <u>monotonia</u>
- <u>continua verso dx</u>: F_X è continua da dx (destra) $\qquad \lim_{t \to t_0^+} F_X(t) = F_X(t_0)$

Sia $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ con $t_{n+1} \leq t_n$ e $t_n > 0$.

Devo verificare che $\lim_{n \to \infty} F_X(t_n) = F_X(t_0)$.

$F_X(t_n) = P(E_{t_n})$

$\lim_{n \to \infty} P(E_{t_n}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{t_n}\right)$ $\qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{t_n} = E_0$ $\qquad X(\omega) \leq t_n \ \forall n \Rightarrow X(\omega) \leq t_0.$

Variabili aleatorie multi-dimensionali (vettori aleatori)

È una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $\quad X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ con $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ con le X_i v.a. nel senso usuale.

$n = 2$ (punti nel piano aleatori) $Z = (X, Y)$.

<u>Funzione di ripartizione per Z.</u>

$F(x,y) = P[X \leq x \text{ e } Y \leq y] = P[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x \text{ e } Y(\omega) \leq y\}].$

$F_X(x) = P[X \leq x]$

$F_Y(y) = P[Y \leq y]$ $\quad$ marginali

<u>Osservazione</u>: la conoscenza di F è un'informazione peggiore della conoscenza di F_X e F_Y.

<u>Proposizione</u>: $F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F(x,y)$ $\quad$ (1)

$F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F(x,y)$ $\quad$ (2)

dim ①: $F(x,y) = P[X \le x \text{ e } Y \le y]$

$$\lim_{y \to \infty} F(x,y) = \lim_{y_n \to \infty} P[X \le x \text{ e } Y \le y_m\} = P(\bigcup_m E_m) = P(\bigcup_n F_m) = F_X(x)$$

$F_m = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x \text{ e } Y(\omega) \le y_m\}$ $\quad F_m \subseteq F_{m+1}$ $\quad y_m \quad y_{m+1}$ $\quad y_m \le y_{m+1}$

$\bigcup_m F_m = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\}$.

Oss: Se conosco F_X e F_Y non ho modo di risalire a F.
Se X e Y sono indipendenti, $F(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$.

$$F(x,y) = P[X \le x \text{ e } Y \le y] = P[X \le x] P[Y \le y] = F_X(x) F_Y(y).$$

Variabili assolutamente continue

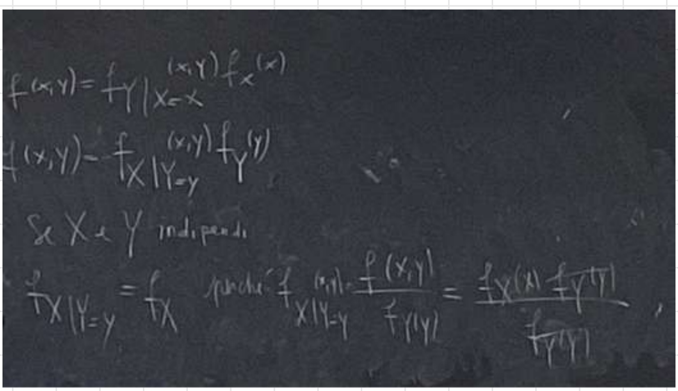
$Z = (X,Y)$ è assolutamente continua se $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} dt = \int_{-\infty}^{y} f(t,s)\, ds$ per qualche $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è integrale $f \ge 0$
$\int_{-\infty}^{\infty} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,s)\, ds = 1$.

- Se $Z = (X,Y)$ è assolutamente continua, allora X e Y sono assolutamente continue.
  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$
  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$

- Se X e Y sono indipendenti $\Rightarrow f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

E se X e Y sono indipendenti? Si definiscono le densità condizionali $f_{X|Y=y}(x,y) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} & \text{se } f_Y(y) \neq 0. \\ 0 \end{cases}$

<u>Osservazione</u>: $f_{X|Y=y}$ è una densità! Cioè $\forall y: \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y=y}(x,y)\, dx = 1$.



Esercizi:

① Il tempo di vita di un componente elettronico dipende dalla concentrazione di silicio di cui è fatto; più precisamente X ha legge esponenziale di parametro λ dove λ è il valore di tale concentrazione.
Una macchina produce questi componenti, ma nel processo produttivo non è possibile controllare la concentrazione di silicio che si può considerare una v.a. Λ (lambda maiuscolo) che ha distribuzione uniforme su un intervallo $[0,1]$. Qual è la legge di X?

<u>risoluzione</u>: (X,Λ) variabile multi-dimensionale

$$f_\Lambda(\lambda) = \begin{cases} 1 & 0 \le \lambda \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \text{densità } f_{X|\Lambda=\lambda}(x,\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad f_X\,?$$

avendo una densità condizionata e una marginale,
posso risalire alla <u>densità congiunta</u>: $f(x,\lambda) = f_{X|\Lambda=\lambda}(x,\lambda)\, f_\Lambda(\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \quad 0 \le \lambda \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

la ricavo da una condizionata e una marginale } prodotto

$$f_X(x) = \int_0^1 f(x,y)\,d\lambda = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x}\,d\lambda = \int_0^1 \underbrace{\lambda}_{g}\, \underbrace{e^{-\lambda x}}_{f'}\,d\lambda \underset{\text{per parti}}{=} \frac{e^{-x\lambda}}{-x}\lambda\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=1} - \int_0^1 \frac{e^{-x\lambda}}{-x}\,d\lambda = \frac{e^{-x}}{-x} + \frac{1}{x}\cdot\frac{e^{-x\lambda}}{-x}\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=1} =$$

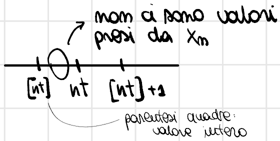
ci siamo ricondotti a risolvere questo integrale

$$= -\frac{1}{x}e^{x} + \frac{1}{x}\left(\frac{e^{-x}}{-x} + \frac{1}{x}\right) = -\frac{e^{x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{-xe^{-x} - e^{-x} + 1}{x^2}$$

② Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. di legge geometrica di parametro $p_n = \frac{\lambda}{n}$.
Consideriamo $\frac{X_n}{n}$. Dire se $\frac{X_n}{n}$ converge in legge e, in caso affermativo, determinare la legge limite.

<u>risoluzione</u>: dobbiamo vedere se il limite $\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{X_n}{n} \le t\right]$ converge.

Esprimiamo meglio questa probabilità: $P\left[\frac{X_n}{n} \le t\right] = P\left[X_n \le nt\right] =$



$$= P\left[X_n < [nt]\right] = \sum_{k=1}^{[nt]} \frac{\lambda}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{k-1} = \frac{\lambda}{n}\sum_{k=1}^{[nt]}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{k-1} = \frac{\lambda}{n}\sum_{k'=0}^{[nt]-1}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{k'} =$$

ciò che non dipende da k si porta fuori dalla sommatoria

$$= \frac{\lambda}{n}\,\frac{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{[nt]}}{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)} = \cancel{\frac{\lambda}{n}}\,\frac{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{[nt]}}{\cancel{\frac{\lambda}{n}}} = 1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{[nt]} \quad \text{cioè} \quad P\left[\frac{X_n}{n} \le t\right] = 1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{[nt]}$$

se $[nt]$ non fosse intero $\rightarrow \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{nt} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda t}$ cioè $\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\right]^t \rightarrow e^{-\lambda t}$

Poiché $[nt]$ è intero, lo considero come $nt = [nt] + \alpha_n$ con $0 \leq \alpha_n \leq 1$ $\quad [nt] = nt - \alpha_n$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{[nt]} = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{nt}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\alpha_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda t}\cdot 1$$

$$P\left[\frac{X_n}{n} \leq t\right] = 1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{[nt]}$$
$$= 1-e^{-\lambda t}$$

③ Siano $X_1, X_2, \dots, X_n \dots$ v.a. di Poisson fra di loro indipendenti di parametro λ (ind. ed equamente distrib.).
Calcola il limite di x che tende all'∞ cioè $\lim_{n\to\infty} P[X_1+X_2+\dots+X_n \leq n]$?

risoluzione: per utilizzare il teorema del limite centrale, dobbiamo standardizzare le variabili.

$E[X_1+X_2+\dots+X_n] = n\lambda$

$Var[X_1+X_2+\dots+X_n] = n\lambda$

Il teorema del limite centrale mi dice che $\dfrac{X_1+X_2+\dots+X_n - n\lambda}{\sqrt{n}\sqrt{\lambda}} \xrightarrow[n\to\infty]{} N(0,1)$.

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{\sqrt{n\lambda}} \leq t\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

Se $\lambda = 1$ allora $\lim_{n\to\infty} P\left[\dfrac{X_1+X_2+\dots+X_n}{\sqrt{n\lambda}} \leq 0\right] = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} P[X_1+X_2+\dots+X_n \leq n] = \dfrac{1}{2}$

$$X_1+X_2+\dots+X_n \leq n = \frac{X_1+X_2+\dots+X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq \frac{n-n\lambda}{\sqrt{n}\sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{n}(1-\lambda)}{\sqrt{\lambda}}$$

$\lim_{n\to\infty} P\left[\dfrac{X_1+X_2+\dots+X_n-n\lambda}{\sqrt{n}\sqrt{\lambda}} \leq \dfrac{\sqrt{n}(1-\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right] \Rightarrow 1-\lambda > 0$; $\lambda < 1$ ci aspettiamo che

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{X_1+X_2+\dots+X_n-n\lambda}{\sqrt{n}\sqrt{\lambda}} \leq \frac{\sqrt{n}(1-\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right] = 1$$

Se $\lambda > 1$ allora il limite è $= 0$.

Ci aspetti che $\lim\limits_{n\to\infty} P\left[\frac{X_1+X_2+\dots+X_n-n\lambda}{\sqrt{n}\sqrt{\lambda}} \le \frac{\sqrt{n}\,(1-\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right] = P[N<+\infty] = 1$

Dato $M>0$ (grande a piacere) $\Rightarrow \exists\, n_0 : \frac{\sqrt{n_0}\,(1-\lambda)}{\sqrt{\lambda}} > M \quad (\forall n \ge n_0)$

$$P\left[\frac{X_1+\dots+X_n-n\lambda}{\sqrt{n}\sqrt{\lambda}} \le \frac{\sqrt{n}(1-\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right] \geq P\left[\frac{X_1+\dots+X_n-n\lambda}{\sqrt{n}\sqrt{\lambda}} \le M\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} P[\quad] \ge \lim_{n\to\infty} P\left[\frac{X_1+\dots+X_n-n\lambda}{\sqrt{n}\sqrt{\lambda}} \le M\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{M} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

$$\lim_{n\to\infty} \text{"} \quad \text{"} \ge \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{M} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \quad \forall M>0$$ Passo al limite per $M\to\infty$

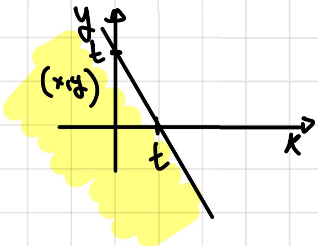
$$\lim_{n\to\infty} P[X_1+\dots+X_n \le n] \ge 1$$

6/11

X, Y due v.a.

Sono assolutamente continue con densità F_1 ed F_2.

Dobbiamo ricavare la densità di $X+Y$. (nel caso in cui X e Y siano indipendenti)



$x+y=t$
$y=t-x$

Funzione di ripartizione $\Rightarrow P[X+Y\le t]$ con $t\in\mathbb{R}$.

$P[(x,y)\in H_t] \qquad H_t = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y \le t\}$

Se f è la densità congiunta di (X,Y)

$H_t = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\le t\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R} \text{ e } y\le t-x\}$

$$P[(x,y)\in H_t] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{t-x} f(x,y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{t-x} f_1(x) f_2(y)\, dy$$; se $y' = y+x$, $y = y'-x$

$f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$ per indipendenza. $= *$

$$* = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{t} f_1(x) f_2(y'-x)\, dy' =$$ (togli il " ' ")

$$= \int_{-\infty}^{t} dy \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(y-x)\, dx$$, quindi la densità di $X+Y$ è:

$$\boxed{f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(y-x)\, dx}$$ (Integrale di convoluzione)

Teorema

La distribuzione normale è riproducibile.

Più esplicitamente, se $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ con X e Y indipendenti, allora $X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

Dimostrazione

Non è restrittivo supporre che $\mu_1 = \mu_2 = 0$ e $\sigma_1^2 = 1$ e $\sigma_2^2 = \sigma^2$

Perché? $\dfrac{X+Y}{\sigma_1} = \dfrac{(X-\mu_1)}{\sigma_1} + \dfrac{(Y-\mu_2)}{\sigma_1} + \dfrac{\mu_1+\mu_2}{\sigma_1}$

$X \sim N(0,1)$.

$Y \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow X+Y \sim N(0, 1+\sigma^2)$

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow$$

f la densità di $X+Y$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1+\sigma^2}} e^{\frac{-x^2}{2(1+\sigma^2)}}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(y-x)\,dx = \frac{1}{2\pi\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} e^{\frac{-y^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{xy}{\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{2\pi\sigma}\cdot e^{\frac{-y^2}{2\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sigma^2}\right)x^2} e^{\frac{xy}{\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma}\cdot e^{\frac{-y^2}{2\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\sigma^2+1}{2\sigma^2}x^2 - \frac{xy}{\sigma^2}\right)}\,dx =$$

$\left[\text{con } \int e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}\right]$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma}\cdot e^{\frac{-y^2}{2\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\left(\sqrt{\frac{\sigma^2+1}{2\sigma^2}}x\right)^2 - \frac{xy}{\sigma^2}\right)}\,dx =$$

$$\left(\sqrt{\frac{\sigma^2+1}{2\sigma^2}}\,x - \frac{1}{2\sigma^2}\sqrt{\frac{2\sigma^2}{\sigma^2+1}}\,y\right)^2 - \frac{1}{4}\,\frac{2\sigma^2}{\sigma^2+1}\,y^2$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\frac{\sigma^2+1}{2\sigma^2}}x - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sigma^2}{\sigma^2+1}}y\right)^2}\,dx\right] e^{-\frac{\sigma^2}{2(\sigma^2+1)}y^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma}\, e^{\frac{-y^2}{2\sigma^2} - \frac{\sigma^2}{2(\sigma^2+1)}y^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\frac{\sigma^2+1}{2\sigma^2}}x - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sigma^2}{\sigma^2+1}}y\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma}\, e^{-\frac{(\sigma^2+1)y^2 - \sigma^4 y^2}{2\sigma^2(\sigma^2+1)}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\frac{\sigma^2+1}{2\sigma^2}}x\right)^2}\,dx \qquad \int e^{-\alpha v^2}\,dv.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\frac{6^2+1}{26^2}}\, x\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi 26^2}{6^2+1}} \qquad \alpha = \frac{6^2+1}{26^2}$$

se $x = \sqrt{\alpha}\, v$
$x^2 = \alpha v^2$
$dx = \sqrt{\alpha}\, dv$

$$\int e^{-x^2} \frac{dx}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\cancel{6}} e^{\frac{-(6^2+1)y^2 - 6^4 y^2}{26^2(6^2+1)}} \frac{\sqrt{\pi}\, 2\cancel{6}}{\sqrt{6^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{6^2+1}} e^{-\frac{y^2}{2(6^2+1)}}$$ (dopo vari errori...)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{6^2+1}} e^{-\frac{y^2}{2(6^2+1)}}$$ Ok.

Statistica matematica (o inferenziale)

Statistica parametrica

L'obiettivo è fornire stime di parametri incogniti.

Spazio di probabilità parametrico.

Famiglia di spazi di probabilità $\Rightarrow$ $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{P_\theta\}_{\theta \in H}\right)$

spazio campionario

6-algebra degli eventi

spazio parametro

per ogni $\theta \in H$ (è una corrispondente funzione di prob.)

Esperimento

Lancio 1 volta una moneta che fa uscire testa con probabilità p, con $0 \le p \le 1$

$\Omega = \{0, 1\}$, con 0 insuccesso e 1 successo.

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) \qquad P_p(\{1\}) = p.$

$\downarrow \downarrow$

$\Omega = \{ w = \{w_n : n \in N \mid w_n \in \{0,1\}\}\}$

$\mathcal{F}$ è la 6-algebra dei cilindri

$$C^{e_1, e_2, \dots, e_k}_{i_1, i_2, \dots, i_k} = \{ w \in \Omega \mid w(i_j) = e_j \ \text{ per } j = \{1, 2, \dots, k\}\}$$

dove $k \in N$, $i_1, i_2, \dots, i_k \in N$ e $e_j \in \{0,1\}$

$$P_p\left(C^{e_1, e_2, \dots, e_k}_{i_1, i_2, \dots, i_k}\right) = p^{e_1+e_2+\dots+e_k} (1-p)^{k-(e_1+e_2+\dots+e_k)} = p^{e}(1-k)^{k-e} \quad \text{con } e = \sum_{j=1}^{k} e_j$$

$\left(\Omega, \mathcal{F}, \{P_\theta : \theta \in H\}\right) \qquad H \in \mathbb{R}^d \quad (d=1)$

[v.a] Un' osservazione è una famiglia $X_1, X_2, \dots, X_n$ di v.a.

Es: Nello spazio di prima $X_i(\omega) = \omega(i)$

Conoscere l'osservazione vuol dire avere a disposizione la legge congiunta $f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ di $(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Campione statistico

È un' osservazione $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ t.c. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sono indipendenti e identicamente distribuite (con legge comune).

In questo caso $f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = h(x_1; \theta)\, h(x_2, \theta) \cdots h(x_n, \theta)$

n è la numerosità del campione o "rango"

Esempio

$$P[X_1 = k_1 ; X_2 = k_2, \dots, X_n = k_n] = p^{(k_1 + \dots + k_n)} \cdot (1-p)^{n-(k_1+k_2+\dots+k_n)}$$

Una statistica è una v.a. $T = t(X_1, X_2, \dots, X_n)$ [nell' espressione il parametro non deve comparire]

$T = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ è una statistica

$S = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + pX_n)$ NON È una statistica

Una statistica $T = t(X_1, \dots, X_n)$ quindi è (per fissare l'idea), con $\Theta \subseteq \mathbb{R}$, uno stimatore corretto di θ se $\boxed{E_\theta[T] = 0}$ $\forall \theta \in \Theta$

Se $E_\theta[T] \neq 0$ per ogni θ $\Rightarrow$ lo stimatore è distorto.

T è uno stimatore corretto di $\Psi(\theta)$, $E_\theta[T] = \Psi(\theta)$

Se lo stimatore non è corretto, si definisce $\boxed{b_\theta[T] = |E_\theta[T] - \theta|}$

distorsione/bias

Media campionaria

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ campione di rango n

$\boxed{\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$ la media campionaria è uno stimatore corretto della media (comune) del campione

$$E_\theta[\overline{X_n}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n}\, \mu(\theta)$$

Varianza campionaria

Per def. $\boxed{S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2}$ è una statistica

Proposizione

$E_\theta[S_n^2] = \sigma^2(\theta) \ \forall \theta \in \Theta$, cioè S_n^2 è uno stimatore corretto della varianza.

$$(n-1)S_n^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \Rightarrow (n-1)S_n^2 = \sum_{i=1}^n (X_i^2 + \bar{X}_n^2 - 2X_i\bar{X}_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^n X_i^2 + n\bar{X}_n^2 - 2\bar{X}_n \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}_n^2$$

$$(n-1)E[S_n^2] = \sum_{i=1}^n E[X_i^2] - nE[\bar{X}_n^2] = nE[X_i^2] - nE[\bar{X}_n^2]$$

$\mu(\theta) = E_\theta X_i$

$\sigma^2(\theta) = Var_\theta[X_i]$

$$(n-1)E[S_n^2] = n\mu^2 - nE[\bar{X}_n^2]$$

$$E[Y^2] - E[Y]^2 = \sigma_Y^2$$

$$E[Y^2] = E[Y]^2 + \sigma_Y^2$$

$$= n(\sigma^2+\mu^2) - n\left(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}\right) = \cancel{n\mu^2} + n\sigma^2 - \cancel{n\mu^2} - \sigma^2 =$$
$$= (n-1)\sigma^2.$$

Calcola la distorsione x CASA.

$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X}_n)^2$ è uno stimatore corretto.

Esercizio

$T_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ Calcola la distorsione $b_\theta(T_n)^2 = |E[T_n^2] - \sigma^2|$

Confronto tra stimatori

T_1, T_2 due stimatori della stessa $\psi(\theta)$ e che siano entrambi corretti.

T_1 è preferibile a T_2 se ha varianza più piccola e cioè se $\boxed{Var_\theta[T_1] \leq Var_\theta[T_2]}$ $\forall \theta \in \Theta$

Esempio

$X_1, X_2, \dots, X_n$

$T_1 = X_1 \longrightarrow$ non è ammissibile

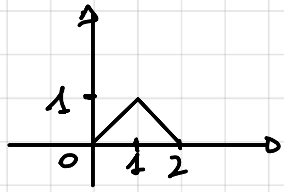
$T_2 = \bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1, X_2, \dots, X_n)$

8/11

Problema

Siano X e Y v.a indipendente con distribuzione uniforme tra 0 e 1 $(X, Y \sim \underset{\text{distrib. unif}}{U}(0,1))$

Qual è la distribuzione della loro somma $X+Y$?

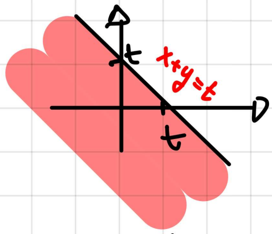


Soluzione

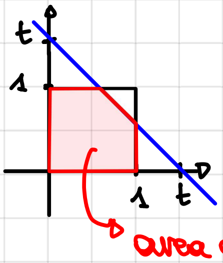
$$f(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le 1\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

La densità di $X+Y$ è la funzione $g(x)=\int f(x)\,f(y-x)\,dy$

$P[X+Y\le t]$ $\qquad H_t=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\le t\}$



$P[(x,y)\in H_t]=A(Q\cap H_t)$

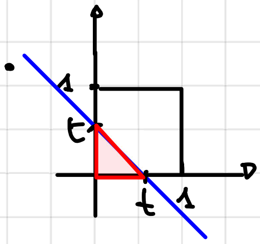


$Q=[0,1]\times[0,1]$

area che calcoliamo

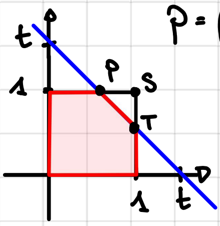
$$g(x,y)=\begin{cases}1 & \text{se }(x,y)\in Q\\ 0 & \text{se }(x,y)\notin Q\end{cases}$$

2 CASI:

- 

$$G(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{t^2}{2} & 0\le t\le 1\\ 0 & t>2\end{cases}$$

- $A=1-A(t)=1-\frac{(2-t)^2}{2}$



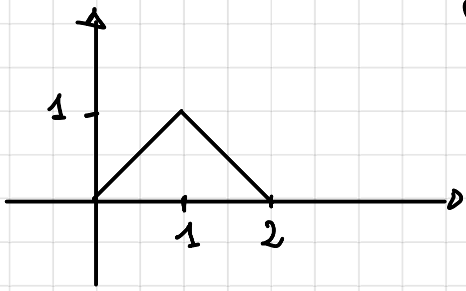
$P=(t-1,1)$

$$\begin{cases}x+y=t\\ y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=t-y\\ y=1\end{cases}$$

$\overline{PS}=1-(t-1)=2-t$

"$h(t)=G'(t)$"

$$h(t)=\begin{cases}0 & \text{se } t<0\\ t & \text{se } 0\le t\le 1\\ t(2-t) & \text{se } 1\le t\le 2\\ 0 & \text{se } t>2\end{cases}$$



distribuzione non uniforme.

Qual è la probabilità che $X+Y>\frac{1}{2}$?

$$P[X+Y>\tfrac{1}{2}]=1-P[X+Y\le\tfrac{1}{2}]=1-G(\tfrac{1}{2})=1-\frac{(\frac{1}{2})^2}{2}=1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

Esercizio

$X,Y\sim U(0,1)$ indipendenti.

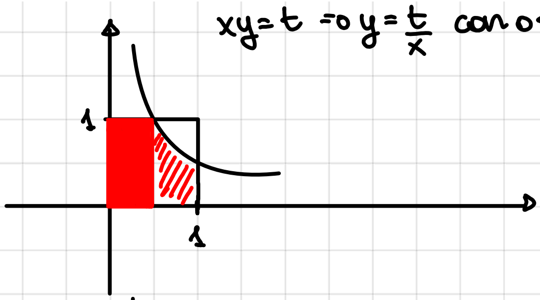
Calcolare la distribuzione di XY.

$F(t) = P[XY \le t] =$

$$\begin{cases} xy = t \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases}$$

$= A = t + \int_t^1 \frac{t}{x}\,dx$

$xy = t \Rightarrow y = \frac{t}{x}$ con $0<t<1$

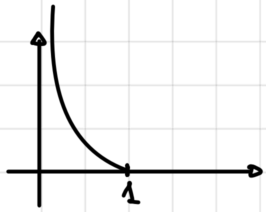


$xy < t$ quando si trova nel semipiano inferiore

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t + \int_t^1 \frac{t}{x}\,dx & 0 \le t \le 1 \\ 1 & t>1 \end{cases}$$

$$t\int_t^1 \frac{dx}{x} = t \ln x \Big|_{x=t}^{x=1} = -t\ln t \Rightarrow F(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ -t\ln t & 0\le t\le 1 \\ 1 & t>1 \end{cases}$$

$$f(t) = F'(t) = \begin{cases} 0 & t\le 0 \\ 1 - [\ln t + 1] = \cancel{1} - \ln t - \cancel{1} = -\ln t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & t>1 \end{cases}$$



Qual è la probabilità che $XY \le \frac{1}{2}$?

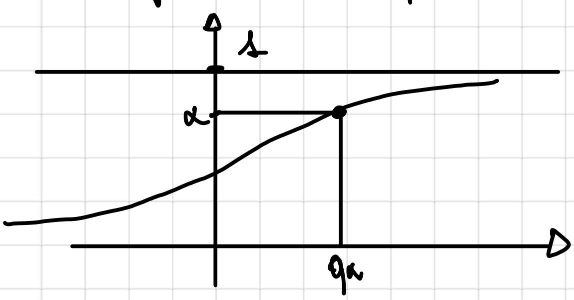
$P[XY \le \frac{1}{2}] =$

$$= \int_0^{1/2} -\ln t\,dt = \int_0^{1/2} t - \ln t\,dt = F\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2-1) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}(1 + \ln 2) = 0{,}85 = 85\%$$

Quantili di una distribuzione a c.

X con funzione di ripartizione $F_X(t) = P[X \le t]$

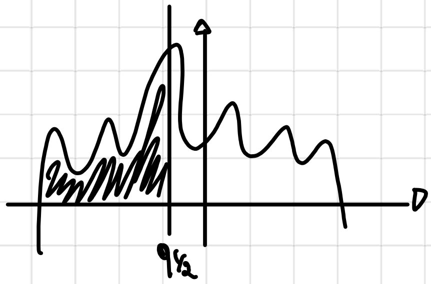


Assumiamo F strettamente crescente ($1 \Rightarrow f' > 0$ ovunque)

Fissato $0<\alpha<1$, il quantile q_α è individuato univocamente $F_X(q_\alpha) = \alpha$

$P[X \le q_\alpha] = \alpha$

$q_{1/2}$ mediana $\quad P[X \le q_{1/2}] = P[X > q_{1/2}] = 1/2$



$q_{1/4}, q_{2/4}, q_{3/4}$ Quantili

Stimatori di massima verosimiglianza.

Ho un campione $(X_1, X_2, \dots, X_n)$

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f(x_1, \theta), f(x_2, \theta), \dots, f(x_n, \theta).$$

La stima di massima verosimiglianza per θ corrispondente alle osservazioni $x_1, \dots, x_n$ è quel valore di θ (se esiste) che rende massima la densità congiunta (che in Statistica è chiamata verosimiglianza)

Modello Bernoulli

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ campione Bernoulli

Determinare la stima (numero) e lo stimatore (v.a.) di max verosimiglianza per p.

$$P[X_1 = k_1; \dots; X_n = k_n] = p^{k_1+k_2+\dots+k_n} (1-p)^{n-(k_1+k_2+\dots+k_n)} = \quad k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

$$= p^k (1-p)^{n-k} = g(p) \quad , \text{con } 0 \le p \le 1$$

Passiamo al ln di questa funzione.

$$\ln g(p) = k \ln p + (n-k) \ln(1-p) = h(p) \; ; \; h'(p) = \frac{k}{p} + \frac{(n-k)}{1-p}(-1) =$$

$$= \frac{k}{p} + \frac{k-n}{1-p} = \frac{k(1-p) + p(k-n)}{p(1-p)} = \frac{k - \cancel{kp} + \cancel{pk} - pn}{p(1-p)} = \frac{k-pn}{p(1-p)}$$

$$h'(p) \ge 0 \Rightarrow \frac{k-pn}{p(1-p)} \ge 0 \qquad p \ne 0 \text{ e } p \ne 1$$

(N) $k - pn \ge 0 \qquad p \le \frac{k}{n}$

$0 \quad + \quad \frac{k}{n} \quad - \quad 1$

$$p = \frac{k}{n} = \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_n}{n}$$

$$\hat{p}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \equiv \text{MEDIA CAMPIONARIA} = \overline{X_n}$$

Distribuzione di Poisson

$X_1, X_2, \dots, X_n$ campione poissoniano $\qquad P[X=k] = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

$$P[X_1 = k_1; X_2 = k_2; \dots; X_n = k_n] = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{k_1! \, k_2! \cdot \dots \cdot k_n!} = \quad , k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

$$= \frac{e^{-n\lambda} \lambda^k}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!} = g(\lambda)$$

$$\ln g(\lambda) = -n\lambda \cdot k \ln\lambda - \ln(k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!)$$

derivando $\Rightarrow \frac{d}{d\lambda} \ln g(\lambda) = -n + \frac{k}{\lambda} = 0 \Rightarrow n = \frac{k}{\lambda} \qquad \lambda = \frac{k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n}{n}$

$\hat{\lambda}_n = \frac{X_1+\dots+X_n}{n} = \overline{X_n}$ MEDIA CAMPIONARIA.

$\lambda = E[X]$

Modello esponenziale.

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ campione esponenziale.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+\dots+x_n)} & x_i \geq 0 \ \forall i = 1,\dots,n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$g(\lambda) = \ln h(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$g'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow \frac{n}{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

$\hat{\lambda}_n = \frac{1}{\overline{X_n}}$ Inverso della MEDIA CAMPIONARIA.

N.B.: questo non è uno stimatore corretto.

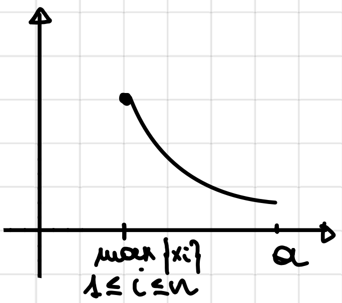
Modello uniforme

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ campione uniforme $U(0,a)$

Stima e stimatore di max verosimiglianza per a.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n; a) = \begin{cases} \frac{1}{a^n} & a \geq x_i \ \forall i \Leftrightarrow a \geq \max\{x_i\} \ 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$a = \max_{1 \leq i \leq n}\{x_i\} \Rightarrow \hat{a}_n := \max_{1 \leq i \leq n}\{X_i\}$$

Osservazione $E[X] = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2E[X] = 2\,\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n} = \hat{T}_n$

Modello Gaussiano

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ campione gaussiano σ, μ^2

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{1}{\sigma^n} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$k(\mu, \sigma^2) = -n \ln \sigma - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2}$$

$$\frac{d}{d\mu}K = +\frac{1}{\cancel{2}\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\cancel{2}(x_i-\mu)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \hat{\mu}_n := \overline{X_n}$$ MEDIA CAMPIONARIA.

$$\frac{d}{d\sigma}K = -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(+\cancel{2})\frac{1}{\sigma^3} = 0$$

$$\frac{n}{\cancel{\sigma}} = \frac{1}{\sigma^{\cancel{3}2}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X}) \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \Rightarrow \hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2 = \frac{n-1}{n}\cdot S_n^2$$

Esercizio

X è una v.a geometrica di parametro incognito p;

$Y = \min\{X, 3\}$, Per Y si osservano i valori $\{1,1,3,1,1,2\}$ (si ripete 6 volte l'esperimento aleatorio)

Dare la stima di max verosimiglianza sulla scorta di queste 6 osservazioni.

$P[X=k] = q^{k-1}p = (1-p)^{k-1}\cdot p$ [quindi con $q = 1-p$] $\quad k = 1,2,3\ldots$

$P[Y=1] = P[X=1] = p$

$P[Y=2] = P[X=2] = (1-p)\cdot p$

$P[Y=3] = P[X=3] = 1 - p - (1-p)p = 1 - p - p + p^2) = 1 - 2p + p^2 = (1-p^2)$

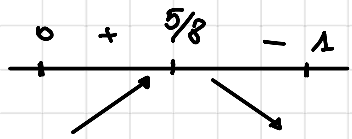
$g(p) = p^4(1-p)\cdot p(1-p)^2 = p^5(1-p)^3 \qquad 0 \le p \le 1$

$\ln g(p) = 5\ln p + 3\ln(1-p)$

$h'(p) = \frac{5}{p} - \frac{3}{1-p} = \frac{5(1-p)-3p}{p(1-p)} = \frac{5-5p-3p}{p(1-p)} = \frac{5-8p}{p(1-p)}$

$h'(p) \ge 0$

$5 - 8p \ge 0 \Rightarrow -8p \ge -5 \Rightarrow p \le \frac{5}{8}$



20/11

$T = t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

T stimatore corretto di $\psi(\theta)$ se $E_\theta[T] = \psi(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta$

Se lo stimatore non è corretto, l'aspettazione è distorta.

$b_\theta[T] = |E_\theta[T] - \psi(\theta)|$

Uno stimatore con distorsione / bias

$r_\theta(T) = E[|T - \psi(\theta)|^2]$ → rischio quadratico medio

Proposizione

$r_\theta(T) = Var_\theta[T] + b_\theta^2[T]$ per lo stimatore MASCHIO? = varianza

Verifica

$r_\theta(T) \stackrel{?}{=} E_\theta[[T] - \psi(\theta)^2]$ ⇒ definizione

l'aspettazione

$= E_\theta[(T - \mu + \mu - \psi(\theta))^2] =$ $\mu = E_\theta[T]$

$= E_\theta[\underbrace{(T-\mu)^2}_{1° add} + \underbrace{(\mu - \psi(\theta))^2}_{2°} + \underbrace{2(T-\mu)(\mu-\psi(\theta))}_{3° \; "0?}] = Var_\theta[T] + b_\theta^2[T] + 0 =$ 3 addendi

Sia $T_n = t(X_1, X_2, \dots, X_n) \to \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

T_n è asintoticamente corretto se $\lim_{n\to\infty} E_\theta[T_n] = \psi(\theta)$ $\forall \theta \in \Theta$

$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ $E_\theta[S_n^2] = \sigma^2(\theta)$ $\forall n$

$T_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{n-1}{n} S_n^2$

$E[T_n^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$ ⇒ ASINTOTICO = vale per il $\lim_{n\to\infty}$ an

Nota

Sia T_n una successione consistente se

$T_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \psi(\theta)$, cioè se $\forall \delta \stackrel{?}{>} 0$ $P_\theta[(|T_n - \psi(\theta)| > \delta)] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

vediamo la media:

$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ $\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu$ ⇒ media campionaria per la legge dei grandi nume n.

Consistenza

Proprietà della successione dello stimatore: se ho due stimatori, T_1 e T_2, stimatori di $\psi(\theta)$ CORRETTI, T_1 è preferibile a T_2 se $r_\theta(T_1) \leq r_\theta(T_2)$

Ricorda: Fra i 2 stimatori si sceglie quello con varianza minore.

Teoria Mini-concetto.

Abbiamo dato stime numeriche puntuali (precise) o variabili, adesso introduciamo stime ad intervalli.

Stime per intervalli.

Intervallo di fiducia (confidenza) per $\Psi(\theta)$ è un intervallo aleatorio $[T_1, T_2]$ con T_1 e T_2 v.a (con $T_1 \leq T_2$) t.c.

Sup ? $\quad P_\theta[T_i \leq \Psi(\theta) \leq T_2] \geq i ?$ $-\alpha \to$ livello di fiducia dell'intervallo

$\theta ? \in pi$

$1-\alpha = 0{,}9 = 90\%$
$1-\alpha = 0{,}95 = 95\%$
$1-\alpha = 0{,}99 = 99\%$

Obiettivo: costruire intervalli di confidenza per μ, σ^2 di una proiezione normale.

campione gaussiano $(X_1, X_2 .., X_n)$ n? v.a (I.I.d) Indipendenti Identicamente distribuite:

con LEGGE COMUNE $N(\mu, \sigma^2)$

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \to$$ 1° prop. CAMPIONE GAUSSIANO.

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X_n})^2 \quad \frac{(n-1)}{\sigma^2} S_n^2 \to$$ 2° prop. è distribuita sulla legge del "chi-quadrato" con $(n-1)$ grado di libertà.

3° prop $\Rightarrow$ X_n e S_n^2 sono indipendenti (perché il campione è NORMALE)

Sia: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X = campione $X_1, \dots, X_n$

Obiettivo: intervallo di confidenza per μ

2 casi. σ^2 noto [1] e σ^2 NON noto [2]

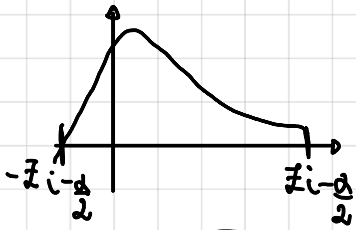
$$T_n = \frac{\overline{X_n} - \mu}{\frac{\sigma^2}{n}} \sim N(1,0)$$

Osservazione μ non appare nella distribuzione. T_n è una quantità pivotale.

$$P\left[-z_{i-\frac{\alpha}{2}} \leq T_n \leq z_{i-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[-z_{i-\frac{\alpha}{2}} \leq N \leq z_{i-\frac{\alpha}{2}}\right] = 2P\left[0 \leq N \leq z_{i-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

??



$$z\left[1-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right]=2-\alpha-1=1-\alpha$$

$$\frac{6}{\sqrt{n}}=z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad ??$$

$$P\left[-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\overline{X_n}-\mu}{\frac{6^2}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]=1-\alpha$$

$$P\left[\overline{X_n}-\frac{6}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \mu \le \overline{X_n}+\frac{6}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]=1-\alpha.$$

Allora: $\left[\overline{X_n}-\frac{6}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; \overline{X_n}+\frac{6}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ $\quad 6^2$ noto.

intervallo di confidenza di livello di fiducia $1-\alpha$ per μ (media della popolazione normale)

Distribuzione (o legge) GAMMA.

↳ funzione Γ, $\alpha>0$

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx \qquad \alpha=n \text{ intero } \Gamma(n)=(n-1)!$$

?? ??(on'? ooh)

Verifica:

$$\Gamma(\alpha+1) \overset{??}{=} \int_0^\infty \underset{g}{x^\alpha}\, \underset{f'}{e^{-x}}\,dx = -e^{-x}/x^\alpha\Big|_0^\infty + \int_0^\infty +e^{-x}\alpha x^{\alpha-1}\,dx = \alpha\,\Gamma(\alpha) \; ??$$

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma^{??}(\alpha)$$

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=1 \qquad \alpha=n \text{ intero.}$$

$\Gamma ??(2)=1 \quad \Gamma^{??}(1)=1 \quad \Gamma^{??}(5)=4\cdot3!=4!$

$\Gamma^{??}_{3}{}^{??}(3)=2\cdot1=2 \quad \Gamma^{?}(4)=3\cdot2=3!$

$\Gamma^{??}(n)=(n-1)!$

$$\alpha=1/2 \quad \Gamma(1/2)=\int_0^\infty x^{1/2}e^{-x}\,dx= \qquad \sqrt{x}=t$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-x}\,dx= \qquad x=t^2 \quad dx=2t\,dt$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{\cancel{t}}e^{-t^2}\,2\cancel{t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi} \; ??$$

Distribuzione di gamma

$\Gamma(\alpha, \lambda)$ con $\alpha, \lambda > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} ?? \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} = \int_0^{\infty} \frac{\mu^{\alpha-1}}{\lambda^{\alpha-1}} e^{\mu} \frac{du}{\lambda} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\int_0^{\infty} \mu^{\alpha-1} du = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu)} \qquad \lambda x = \mu \qquad x = \frac{\mu}{\lambda} \quad dx = \frac{du}{\lambda}$$

Prendiamo:

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1/2} e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Osservazione: $N^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, dove N è v.a. con densità normale standard.

Esercizio

Calcolare la densità di N^2

Si vede la funzione di ripartizione $P[N^2 \leq t]$ con $t \geq 0$

$P[-\sqrt{t} \leq N \leq \sqrt{t}]$

$$2P[0 \leq N \leq \sqrt{t}] = 2 \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$N^2 \text{ ha } G(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$\text{densità } g(t) = G'(t) = \frac{\cancel{2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-t/2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{t}}$$

Teorema (riproducibilità della legge Γ??)

$X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$ con le X_i indipendenti

$X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$

$X_n \sim \Gamma(\alpha_n, \lambda)$

$\Rightarrow X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \lambda)$

Distribuzione del chi-quadro χ^2

$\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(n)$ gradi di libertà.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}^{n/2} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \quad e^{-x/2} & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

$$\Gamma^{??}\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)=\underbrace{\Gamma^{??}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+\dots+\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}_{n\text{ volte}}$$

$X^2(n)$ è la distribuzione di v.a. $X_1^2+X_2^2+\dots+X_n^2$, dove $X_i \sim N(0,1)$ con le X_i indipend.

Osservazione

$X \sim X^2(n)$ e $Y \sim X^2(m)$ e X e Y sono indipendenti $\Rightarrow X+Y^2 \sim X^2(n+m)$

Sia $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$

$$E[X]=\int_0^\infty x\, f(x)\,dx=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x\, x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\,dx=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^\alpha e^{-\lambda x}\,dx=\frac{\lambda^\alpha}{??\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{u^\alpha}{\lambda^\alpha}e^{-u}\,\frac{du}{\lambda}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda}\cdot\Gamma(\alpha+1)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{1}{\lambda}=\frac{\alpha}{\lambda}$$

$\lambda x = u$

$x=\frac{u}{\lambda} \quad dx=\frac{du}{\lambda}$

$X \sim X^2(n)$

$\alpha=\frac{n}{2}$ e $\lambda=1/2$ e quindi $E[X]=n$

Sia: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $\quad X_1, X_2, \dots, X_n$

Obiettivo: costruire l'intervallo di fiducia per σ^2

$$\frac{(n-1)}{\sigma^2}\cdot S_n^2 \sim (X^2(n-1)) \quad \text{con } S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X}_n)^2$$

Notazione: $\quad X_\alpha^2(n) \quad$ con $\quad \chi=\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$

quantili due?? X^2-quadro

Ha $P[X^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\leq \chi \leq X^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)] < 1-\alpha$

$$P\left[X^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\leq \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}\leq X^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]=1-\alpha$$

$$P\left[\frac{1}{X^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}(n-1)\leq \frac{\sigma^2}{(n-1)S_n^2}\leq \frac{1}{X^2(n-1}\right]=\left[\frac{(n-1)S_n^2}{X^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\leq \sigma^2\leq \frac{(n-1)S_n^2}{X^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$$

quantili della distribuzione del Chi-quadrato.

$$=\left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}};\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$$

intervalli di confidenza (con livello di fiducia $1-\alpha$) per σ^2 (di una popolazione normale)

22/11

$X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$
$X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$ $\Rightarrow X_1 + Y_2 \sim \Gamma(\alpha_1+\alpha_2, \lambda)$ (ipotesi di indipendenza)

$$f_1(x) = \frac{\lambda^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1 - 1} e^{-\lambda x} \qquad \text{con } x \geq 0$$

$$f_2(y) = \frac{\lambda^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_2 - 1} e^{-\lambda y} \qquad \text{con } y \geq 0$$

Chiamo f la densità di $X_1 + X_2$.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(x-y)\,dy = \int_0^x f_1(y) f_2(x-y)\,dy = \qquad x-y \geq 0 \quad y = x$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^x y^{\alpha_1-1} e^{-\lambda y} (x-y)^{\alpha_2-1} e^{-\lambda(x-y)}\,dy =$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\lambda x} \underbrace{\int_0^x y^{\alpha_1-1}(x-y)^{\alpha_2-1}\,dy}_{I} \overset{*}{=} \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2} C_1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\lambda x}$$

$$I = \int_0^x y^{\alpha_1-1} x^{\alpha_2-1}\left(1-\frac{y}{x}\right)^{\alpha_2-1} dy = x^{\alpha_2-1}\int_0^x y^{\alpha_1-1}\left(1-\frac{y}{x}\right)^{\alpha_2-1} dy =$$

$\frac{y}{x} = t \Rightarrow y = tx \Rightarrow dy = x\,dt$ SOSTITUZIONE

$$= x^{\alpha_2-1}\int_0^1 t^{\alpha_1-1} x^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1} x\,dt = x^{\alpha_1+\alpha_2-1} \underbrace{\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\,dt}_{C_1} \; *$$

$$\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2} C}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} = \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \Rightarrow C = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

Problema

Siano X e Y v.a. esponenziali di parametro $\frac{1}{2}$ e λ rispettivamente. (indipendenti)
Se $\{1, 2, 1, 3, 1, 2\}$ è un campione di osservazioni di $Z = \min\{X, Y\}$, determinare la corrispondente stima di massima verosimiglianza per λ

- Osservazione Z è esponenziale di parametro $1/2 + \lambda$.

La densità di Z, f, $f(x) = \begin{cases} (\lambda + \frac{1}{2}) e^{-(\lambda+\frac{1}{2})x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$$h(\lambda) = \left(\lambda + \tfrac{1}{2}\right)^3 e^{-(\lambda+\frac{1}{2})3} \cdot \left(\lambda+\tfrac{1}{2}\right)^2 e^{-(\lambda+\frac{1}{2})\cdot 4} \cdot \left(\lambda+\tfrac{1}{2}\right) e^{-(\lambda+\frac{1}{2})3} =$$

$$= \left(\lambda+\tfrac{1}{2}\right)^6 e^{-(\lambda+1/2)10}$$

$$h(\lambda) = \left(\lambda+\tfrac{1}{2}\right)^6 e^{-(\lambda+1/2)\cdot 10}$$

$$\log h(\lambda) = 6\ln\left(\lambda+\tfrac{1}{2}\right) - 10\left(\lambda+\tfrac{1}{2}\right) = g(\lambda)$$

$$g'(\lambda) = \frac{6}{\lambda+1/2} - 10 = 0$$

$$6 - 10\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \lambda+1/2 = \frac{6}{10} \Rightarrow \lambda = \frac{6}{10} - \frac{1}{2} = \frac{6-5}{10} = \frac{1}{10}.$$

- Se avessimo ricordato la teoria...

$Z \sim \exp(\lambda + 1/2)$ $\qquad$ $X \sim \exp(\mu)$

$\lambda + 1/2 = \dfrac{1}{\frac{10}{6}}$ $\qquad$ $\hat{\mu}_n = \dfrac{1}{\bar{X}_n} = \dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$

$\lambda + 1/2 = \dfrac{6}{10} \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{10}$

Problema

Siano X e Y v.a. di Poisson di parametro λ e 2λ rispettivamente.

Assumiamo X e Y indipendenti. Sia $Z = X+Y$

a) determinare la legge di Z.

Z è di poisson e i parametri si sommano, $\lambda + 2\lambda = 3\lambda$

b) Calcolare $E[Z^2 - X^2]$

$Z \sim \text{poisson}(3\lambda)$

$X \sim \text{poisson}(\lambda)$

$E[Z^2 - X^2] = E[Z^2] - E[X^2] =$ $\qquad$ $Var[U] = E[U^2] - E[U]^2$

$E[Z^2] = Var[Z] + E[Z]^2 =$ $\qquad$ $\Rightarrow E[U^2] = Var[U] + E[U]^2$

$= 3\lambda + (3\lambda)^2 = 9\lambda^2 + 3\lambda$

$E[X]^2 = Var[X] + E[X]^2 = \lambda^2 + \lambda$

$= 9\lambda^2 + 3\lambda - \lambda^2 - \lambda = 8\lambda^2 + 2\lambda = 2\lambda[4\lambda + 1]$

c) Verificare la probabilità che $P[Z=0 \text{ e } X=0] = P[X=0]P[Y=0]$

$Z = X+Y$ $\qquad$ $Z=0$ e $Y=0 \Leftrightarrow X=0$ e $Y=0$

$P[Z=0] = P[Z=0 \text{ e } Y=0] = P[X=0 \cap Y=0] = P[X=0]\cdot P[Y=0] = e^{-\lambda}e^{-2\lambda} = e^{-3\lambda}$

$P[U=k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \Rightarrow P[U=0] = e^{-\lambda}$

d) Per Z si osserva un campione di osservazione $\{0,1,3,4,2,5\}$. Stimare λ.

Per la teoria:

$Z \sim poisson(3\lambda)$

$$3\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{6}(0+1+3+4+2+5) \Rightarrow 3\lambda = \frac{1}{6}(15) \Rightarrow \cancel{3}\lambda = \frac{\cancel{15}^{5}}{6} \Rightarrow \lambda = \frac{5}{6}.$$

Problema

Il peso misurato da una bilancia elettronica è quello reale più un errore casuale normale di media 0 e deviazione standard $\sigma = 0{,}01$ mg.

Supponiamo che i risultati di 5 pesate successive dello stesso oggetto abbiano dato i valori 3,142 , 3,163 , 3,155 , 3,150 , 3,141.

Calcolare l'intervallo di confidenza per il peso $1-\alpha = 95\%$

$1-\alpha = 99\%$

$$\left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$\bar{X} = 3{,}1502$

$1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}975.$

$z_{0{,}975} = 1{,}96$

$$\left[3{,}1502 - \frac{0{,}01}{\sqrt{5}} \cdot 1{,}96 ; 3{,}1502 + \frac{0{,}01}{\sqrt{5}} \cdot 1{,}96\right] = [3{,}14143; 3{,}15897] = [3{,}14; 3{,}16]$$

$1-\alpha = 0{,}99 \Rightarrow \alpha = 0{,}01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}005 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}0095.$

$z_{0{,}0095} = 2.58$

$[3{,}13866 ; 3{,}16174] = [3{,}139; 3{,}162]$

Problema

Una certa procedura automatizzata deve produrre rondelle con una variabilità di spessore ridotta. Si scelgono a caso 10 rondelle. Si misura lo spessore (in pollici) e risulta: 0,123; 0,133; 0,124; 0,125; 0,126; 0,128; 0,120; 0,124; 0,130; 0,126.

Intervallo di confidenza per σ^2 (e per σ) al 90% $(1-\alpha = 0{,}90)$

$$\left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} ; \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$$

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = \frac{n}{n-1}\left(\overline{X^2}-(\bar{X})^2\right).$$

$\bar{X} = 0{,}1259.$

$\overline{X^2} = 0{,}01586$

$S_n^2 = \frac{10}{9}(0{,}01586 - 0{,}1259^2) = 0{,}000176$

$\chi^2_{0{,}05}(9) = 3{,}3251$ (dalla tabella)

$\chi^2_{0{,}95}(9) = 16{,}919$

$$\left[\frac{9}{16{,}919}\cdot 0{,}00177 ; \frac{9}{3{,}3251}\cdot 0{,}00177\right] = [0{,}00094151; 0{,}0047\ldots] = [0{,}00094 ; 0{,}0048].$$

Problema

$X \sim N(\overset{\text{media}}{3}, \overset{\text{var.}}{1})$

$Y \sim N(1,3)$ con X, Y indipendenti. $N(\mu, \sigma^2)$

a) $E[X^2(Y-3)+1]$

$= E[X^2(Y-3)] + \underbrace{E[1]}_{1} = E[X^2(Y-3)] + 1 = E[X^2]\cdot E[Y-3] + 1 \overset{*}{=} 10\cdot(-2)+1 = -19$

$E[Y-3] = E[Y] - 3 = 1 - 3 = -2$

$E[X^2] =$ (dalla formula della varianza) $Var[X] + E[X]^2 = 1 + 3^2 = 10$ *

b) Calcolare la legge di $x^2-6x+9+\frac{1}{3}(y-1)^2$.

$\underbrace{(x-3)^2}_{N_1} + \underbrace{\frac{1}{3}(y-1)^2}_{N_2} \Rightarrow$ Distribuzione di "chi" quadrato

$N_1 \sim N(0,1) \quad N_2 \sim (0,1) \Rightarrow N_1^2 + N_2^2 \sim \chi^2(2)$

c) $Var\left[\left(\frac{Y-1}{\sqrt{3}}\right)^2\right] = ?$

$Var[N^2] = E[N^4] - E[N^2]^4$ $\qquad E[N^{2k}] = (2k-1)!!$

$N = \frac{Y-1}{\sqrt{3}}$ $\qquad E[N^4] = 3!! = 3 \qquad E[N^2] = 1$

27/11

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\left[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ $1-\alpha$ = livello di confidenza (fiducia)

$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

2° caso: σ^2 <u>non</u> noto.

idea: sostituire σ^2 con $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$

Con σ noto: $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

rimpiazzo σ con S_n: $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ è una quantità pivotale.

Parentesi: $N \sim N(0,1)$ indipendenti

$X \sim \chi^2(n)$

$\boxed{T = \frac{N}{\sqrt{X}} \cdot \sqrt{n}}$ ⇒ variabile che segue la distribuzione T di Student, con n gradi di libertà.

$t_\alpha(n)$ ⇒ quantile della T student con n gradi di libertà di livello α.

$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ divido per $\sigma/\sqrt{n}$

$$\frac{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n}}{\frac{S\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\sigma}} = \frac{N\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1}\,\frac{S}{\sigma}} = \frac{N\sqrt{n-1}}{\sqrt{X}}$$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

$$\left[\bar{X}_n - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) ; \bar{X}_n + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]$$

Il $\lim_{n\to\infty} t_\alpha(n-1) = Z_\alpha$.

$T = \frac{N\sqrt{n}}{\sqrt{X}}$ $E[T] = 0$ ⇒ T è centrata.

<u>Intervallo di confidenza per p della distribuzione di Bernoulli.</u>

Per il teor. del limite centrale.

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ campione Bernoulliano.

Se n è sufficientemente grande, $\frac{X_1, X_2, \dots, X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \simeq N(0,1)$ ("$n \geq 30$")

$$\frac{n}{\sqrt{n}} \frac{(\bar{X}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}} = \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \Rightarrow P\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X} - p)}{p(1-p)} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

$$\left[\bar{X} - \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq p \leq \bar{X} + \sqrt{p(1-p)}\, \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right]$$

Osservazione: $p(1-p)$ è max per $p = \frac{1}{2}$

$$\left[\bar{X} - \frac{1}{2\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; \bar{X} + \frac{1}{2\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

intervallo di confidenza approssimato

$$\left[\bar{X} - \frac{1}{2\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; \bar{X} + \frac{1}{2\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$\sqrt{\cancel{p(1-p)}} \to \frac{1}{2} \qquad p \to \bar{X} \Rightarrow \left[\bar{X} - \frac{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; \bar{X} + \frac{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

restituisce intervallo più stretto.

Esempio

2 popolazioni normali

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ — campione di rango n_1

indipendenti

$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ — campione di rango n_2

Vorremmo l'intervallo di fiducia per $\mu_1 - \mu_2$.

1° caso: σ_1^2 e σ_2^2 note per entrambe le popolazioni

Chiamiamo $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ medie campionarie rispettive.

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$$Var[\bar{X}_1 - \bar{X}_2] = Var[\bar{X}_1] + Var[-\bar{X}_2] = Var[\bar{X}_1] + Var[\bar{X}_2] = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

$$P\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

$$\left[\bar{X}_1-\bar{X}_2-\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\,z_{1-\frac{\alpha}{2}}\,;\ \bar{X}_1-\bar{X}_2+\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\,z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$
intervallo di confidenza di $\mu_1-\mu_2$ al livello di fiducia $1-\alpha$

2° caso: varianze non note.

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ non è noto

$$\frac{\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\cancel{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}}{\frac{1}{\cancel{\sigma}}\sqrt{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}}$$

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1-1)$$
$$\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_2-1)$$
$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2)$$

Se chiamiamo:

$$\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-1}}=S_p$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$
$$\Downarrow$$
$$\left[\bar{X}_1-\bar{X}_2-S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\,t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2);\ \bar{X}_1-\bar{X}_2+S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\,t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right]$$

Problema

Vogliamo stimare $\psi(\theta)$ con

1. Esibire uno stimatore corretto $T=t(X_1,X_2,\dots,X_n)$, $E_\theta[T]=\psi(\theta)\ \forall\theta\in\Theta$
2. Fra tutti gli stimatori corretti, esibirne uno con $r_\theta(T)=Var_\theta[T]$ più piccolo possibile.

Per affrontare il problema 2 torna utile conoscere una stima, un limite dal basso a $r_\theta(T)$ per T uno stimatore qualsiasi

$\boxed{r_\theta(T)\geq C}$ → limite di Cramer-Rao

Informazione di Fisher.

$(X_1,X_2,\dots,X_n)$ campione di rango n. $\psi(\theta)$, $\theta\in I\subset\mathbb{R}$

$h(X_1,X_2,\dots,X_n;\theta)=f(x_1,\theta)\cdot f(x_2,\theta)\cdots f(x_n;\theta)$
densità congiunta

$\ln h(x_1,x_2,\dots,x_n;\theta)\Rightarrow\frac{\partial}{\partial\theta}\ln h(X_1,X_2,\dots,X_n;\theta)$

$T = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln h(X_1, X_2, \dots, X_n ; \theta)$

$I_n(\theta) = Var_\theta[T]$ informazione di Fisher

Si dimostra che $E_\theta[T] = 0$ (si può verificare)

$I_n(\theta) = Var_\theta[T] = E_\theta[T^2]$

Proposizione

$I_n(\theta) = n I_1(\theta)$

Verifica

$I_n(\theta) = Var[T]$, $T = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln h(X_1, X_2, \dots, X_n ; \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln (f(x_1,\theta), f(x_2,\theta), \dots, f(x_n,\theta)) =$

$= \frac{\partial}{\partial(\theta)} \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i, \theta) =$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x_i, \theta) = \sum_{i=1}^{n} T_i$, $T_i = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x_i, \theta)$ le T_i sono indipendenti.

$Var_\theta[T] = \sum_{i=1}^{n} Var_\theta[T_i] = n Var_\theta[T_i] = n I_1(\theta)$

$$\boxed{C = \frac{|\varphi'(\theta)|^2}{I_n(\theta)} = \frac{|\varphi'(\theta)|^2}{n I_1(\theta)}}$$

Informazione di Fisher nei modelli specifici.

Bernoulli

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ $\quad P[X_1 = k] = p^k (1-p)^{1-k}$ $\quad k \in \{0, 1\}$.

$P[X_1 = k_1, \dots, k_n] = p^{(k_1+k_2+\dots+k_n)} (1-p)^{n-(k_1+k_2+\dots+k_n)} = p^k (1-p)^2$ con $k = k_1, k_2, \dots, k_n$.

$\ln p^k (1-p)^{n-k} = k \ln p + (n-k) \ln (1-p)$

$\frac{\partial}{\partial p} \ln p^k (1-p)^{n-k} = \frac{k}{p} - \frac{(n-k)}{1-p} = \frac{k - \cancel{kp} - np + \cancel{kp}}{p(1-p)}$. $\quad k \Rightarrow X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$T = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - np}{p(1-p)}$ $\quad E[T] = np$

$Var_p[T] = \frac{1}{p^2(1-p)^2} n \cancel{p(1-p)} = \frac{n}{p(1-p)} = I_n(p)$

Il limite di Cramer-Rao in generale:

$C = \frac{|\varphi'(\theta)|^2}{I_n \theta}$ $\quad \varphi(p) = p \Rightarrow$ $\boxed{C = \frac{p(1-p)}{n}} = Var\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right]$ stimatore efficiente.

Definizione

Uno stimatore corretto T di $\psi(\theta)$ si dice **efficiente** se $r_\theta(T)$ è pari al limite di Cramer-Rao (cioè è il più piccolo possibile).

Poisson

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ $\quad P[X_1 = k] = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, \dots, n$

$I_n(\lambda) = \underline{n I_1(\lambda)}$

$\ln P[X_1 = k] = -\lambda + k \ln \lambda + \ln\left(\dfrac{1}{k!}\right)$

$\dfrac{\partial}{\partial \lambda} \ln P[X_1 = k] = -1 + \dfrac{k}{\lambda} \Rightarrow T = -1 + \dfrac{X}{\lambda}$ è centrata perché $E[T] = 0$ (segue da $E[X] = \lambda$)

$I_1(\lambda) = Var_\lambda[T] = Var_\lambda\left[1 - \dfrac{X}{\lambda}\right] = \dfrac{1}{\lambda^2} Var[X] = \dfrac{1}{\lambda^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda} \cdot n = \dfrac{n}{\lambda}$

Corrispondente di Cramer-Rao.

$$\boxed{C = \frac{[\psi'(\theta)]^2}{I_n(\lambda)} = \frac{1}{\frac{n}{\lambda}} = \frac{\lambda}{n}} \qquad \psi(\lambda) = \lambda$$

$\bar{X}_n = \dfrac{1}{n}(X_1, X_2, \dots, X_n) \Rightarrow Var\left[\dfrac{\lambda}{n}\right] \longrightarrow$ stimatore corretto ed efficiente per λ.

Esponenziale

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ $\quad f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad \psi(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} \qquad E[\bar{X}_n] = \dfrac{1}{\lambda}$

$I_n(\lambda) = n I_1(\lambda)$

$\ln f(x) = \begin{cases} \ln \lambda - \lambda x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad \dfrac{\partial}{\partial \lambda} \ln f(x) = \dfrac{1}{\lambda} - x \Rightarrow T = \dfrac{1}{\lambda} - X$ è ancora centrata

$I_1(\lambda) = Var[T] = Var\left[\dfrac{1}{\lambda} - X\right] = Var[-X] = Var[X] = \dfrac{1}{\lambda^2} \Rightarrow I_n(\lambda) = \dfrac{n}{\lambda^2}$

Cramer-Rao:

$$\boxed{C = \frac{[\psi'(\theta)]^2}{I_n(\lambda)} = \frac{\frac{1}{\lambda^4}}{\frac{n}{\lambda^{\cancel{2}}}} = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n\lambda^2}} \longrightarrow Var[\bar{X}_n] = Var\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)\right] =$$

$$= \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{n} \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{n\lambda^2}$$

$\bar{X}_n = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ è uno stimatore efficiente di $\dfrac{1}{\lambda}$

29/11

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ campione esponenziale di parametro λ.

$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\overline{X_n}$ è uno stimatore efficiente di $\frac{1}{\lambda}$

$E\left[\frac{1}{\overline{X_n}}\right] \overset{?}{=} \lambda$ (stimatore di λ) NO!!

Non è vero che $E\left[\frac{1}{X}\right] = \frac{1}{E[X]}$

Obiettivo: calcolare $E\left[\frac{1}{\overline{X_n}}\right] =$

Per fare questo calcolo ci serve la legge di $\overline{X_n}$

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ $X_i \sim exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$

$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \Gamma(n, \lambda)$

h la densità della somma delle x_i

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$P\left[\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \leq t\right] = P[X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq nt] = \int_0^{nt} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx$$

g la densità di $\overline{X_n}$, $g(t) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} (nt)^{n-1} e^{-\lambda nt} n = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} n^n t^{n-1} e^{-\lambda nt}$.

$$E\left[\frac{1}{\overline{X_n}}\right] = \int_0^\infty \frac{1}{t} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} n^n t^{n-1} e^{-\lambda nt} dt = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} n^n \int_0^\infty t^{n-2} e^{-\lambda nt} dt \Rightarrow \approx \text{definizione gamma.}$$

$$u = \lambda nt \Rightarrow \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} n^n \int_0^\infty \left(\frac{u}{\lambda n}\right)^{n-2} e^{-u} \frac{du}{\lambda n} = \frac{\lambda^{\cancel{n}}}{\Gamma(n)} \cdot n^{\cancel{n}} \cdot \frac{1}{\cancel{\lambda^{n-1}} \cancel{n^{n-1}}} \int_0^\infty u^{n-2} e^{-u} du = \frac{\lambda n \, \Gamma(n-1)}{\Gamma(n)} = \frac{\lambda n}{n-1}.$$

Conclusione: $E\left[\frac{1}{\overline{X_n}}\right] = \frac{\lambda n}{n-1}$ $\Rightarrow$ $E\left[\frac{n-1}{n} \frac{1}{\overline{X_n}}\right] = \lambda$

$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{\overline{X_n}}$ $\Rightarrow$ stimatore corretto di λ

campione uniforme

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ $X_i \sim U(0, a)$ (distrib unif.) $a > 0$ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$E[X] = \frac{a}{2}$ $\Rightarrow a = E[2X]$

$2\overline{X_n} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ $\Rightarrow$ stimatore corretto per a. $\Rightarrow E\left[2\overline{X_n}\right] = a$

Obiettivo: calcolare il rischio quadratico medio di $2\bar{X}_n$.

rischio = varianza in questo caso $\Rightarrow r(2\bar{X}_n) = \underset{\|}{Var}(2\bar{X}_n) \Rightarrow$ vale perché è uno stimatore corretto.

$4\,Var[\bar{X}_n] = \frac{4}{n} Var[X] = \frac{\cancel{4}}{n} \cdot \frac{a^2}{\cancel{12}} = \frac{a^2}{3n}.$

$Var[\bar{X}_n] = Var\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\right] = \frac{1}{n^2}\left(Var[X_1] + \ldots + Var[X_n]\right) = \frac{n}{n^2} Var[X] = \frac{1}{n} Var[X]$

$Var[X] = E[X^2] - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - 3a^2}{12} = \frac{1}{12}a^2$

$E[X^2] = \int_0^a \frac{x^2}{a}\,dx = \frac{x^3}{3a}\Big|_0^a = \frac{a^2}{3}$

$\hat{a}_n = \max_{1 \le i \le n} \{X_i\}$ * Dire se lo stimat. di max veros. $\hat{a}_n$ è uno stimatore corretto

* Calcolare $E[\hat{a}_n] = ?$

eventi indip.

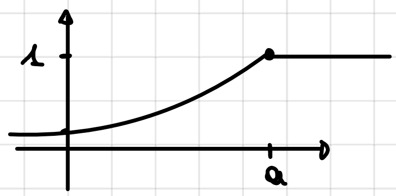
$P[\hat{a}_n \le t] = P[\max_{1 \le i \le n}\{X_i\} \le t] = P[X_1 \le t \text{ e } X_2 \le t \text{ e} \ldots \text{e } X_n \le t] = P[X_1 \le t] \cdot P[X_2 \le t] \cdot \ldots$

$\cdot P[X_n \le t]$. sono anche ident. distribuite tra 0 ed a per cui:

$= P[X \le t]^n$.

$$P[X \le t] = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t/a & 0 \le t \le a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

$$P[\hat{a}_n \le t] = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^n/a^n & 0 \le t \le a \\ 1 & t \ge a \end{cases} \Rightarrow$$



g la densità di $\hat{a}_n$.

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{n t^{n-1}}{a^n} & 0 \le t \le a \\ 0 & t > a \end{cases}$$

$E[\hat{a}_n] = \int_0^a \frac{t\, n t^{n-1}}{a^n}\,dt = \frac{n}{a^n}\int_0^a t^n\,dt = \frac{n}{a^n}\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^a =$

$= \frac{n}{n+1}\frac{a^{n+1}}{a^n} = \frac{na}{n+1}$, quindi:

$E[\hat{a}_n] = \frac{n}{n+1}a$

$E\left[\frac{n+1}{n}\hat{a}_n\right] = a$

$T_n = \frac{n+1}{n}\hat{a}_n$ e $2\bar{X}_n$. Quant'è la $Var[T_n]$? Quale è meglio usare?

$$Var[T_n] = Var\left[\frac{n+1}{n}\hat{a}_n\right] = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot Var[\hat{a}_n]$$

$$Var[\hat{a}_n] = E[\hat{a}_n^2] - \frac{n^2}{(n+1)^2}a^2 = \frac{n}{n+2}a^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}a^2 \; *$$

$$E[\hat{a}_n^2] = \int_0^a t^2 \frac{nt^{n-1}}{a^n}\,dt = \frac{n}{a^n}\frac{t^{n+2}}{n+2}\Big|_0^a = \frac{n}{n+2}a^2$$

$$* = \frac{(n+1)^2}{n^2}\left[\frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2}\right]a^2 = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} \cdot a^2 = \frac{\cancel{(n+1)^2}}{n^{\cancel{2}}} \frac{\cancel{n^3} + \cancel{2n^2} + n - \cancel{n^3} - \cancel{2n^2}}{(n+2)\cancel{(n+1)^2}} \cdot a^2 =$$

$$= \frac{a^2}{n(n+2)}$$

Ricapitolando: $Var[2\bar{X}_n] = \frac{a^2}{3n}$, $Var[T_n] = \frac{a^2}{n(n+2)}$, è + conveniente T_n.

$\Vert$ anche questa va a 0.

T_n è più efficiente

ESERCIZIO: SU 100 CASI DI TUMORE SELEZIONATI A CASO, 67 PAZIENTI SONO DECEDUTI ENTRO 5 ANNI DALLA DIAGNOSI

a) STIMA LA PROBABILITÀ CHE UNA PERSONA AFFETTA DA QUEL TUMORE MUOIA ENTRO 5 ANNI

p = PROBABILITÀ DI INSUCCESSO $\quad p = \frac{67}{100} = 0,67$

b) QUANTO DOVREBBE ESSERE GRANDE UN ULTERIORE CAMPIONE PER ACQUISIRE AL 95% DI CONFIDENZA CHE LA PROBABILITÀ STIMATA IN (a) NON SIA SBAGLIATA PER PIÙ DI 0,02?

$$\left[\bar{X} - \frac{1}{2\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; \bar{X} + \frac{1}{2\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \quad \text{OPPURE} \quad \left[\bar{X} - \frac{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; \bar{X} + \frac{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$\frac{2\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \delta$$

$\delta = 0,02$ $\quad 1-\frac{\alpha}{2} = 0,975$

$1-\alpha = 0,95$

$\alpha = 0,05$ $\quad z_{0,975} = 1,96$

$\frac{\alpha}{2} = 0,025$

$$\frac{4\bar{x}(1-\bar{x})}{n}(1,96)^2 \leq (0,02)^2$$

$$\frac{n}{4\bar{x}(1-\bar{x})(1,96)^2} \geq \frac{1}{(0,02)^2} \longrightarrow n \geq \frac{4\bar{x}(1-\bar{x})(1,96)^2}{(0,02)^2} = n \geq \frac{4 \cdot 0,67 \cdot 0,33 \cdot (1,96)^2}{(0,02)^2} = 8494$$

ESERCIZIO: VENGONO EFFETTUATE 20 MISURAZIONI DELLA CONCENTRAZIONE DI UN CERTO ENZIMA NEL SANGUE DI INDIVIDUI DIVERSI, OSSERVANDO UNA MEDIA $\bar{X} = 1.23$ CON UNA VARIANZA CAMPIONARIA $S^2 = 0,4$.

a) SUPPONENDO CHE I VALORI DI QUESTA CONCENTRAZIONE SEGUANO UNA DISTRIBUZIONE NORMALE, QUAL'È UN INTERVALLO DI FIDUCIA AL 95% PER LA MEDIA DELLA CONCENTRAZIONE?

$$\left[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \; ; \; \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \quad \text{CON } \sigma \text{ NOTA}$$

$$\left[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \; ; \; \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right] \quad \text{CON } \sigma \text{ NON NOTA}$$

$n = 20$

$1-\alpha = 0,95$ $\quad 1-\frac{\alpha}{2} = 0,975$ $\quad t_{0,975}(19) = 2,0930$

$$\frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(19) = \frac{\sqrt{0,4}}{\sqrt{20}} \cdot 2,0930 \cong 0,29$$

$$[1,23 - 0,29 \; ; \; 1,23 + 0,29] = [0,94 \; ; \; 1,52]$$

b) INTERVALLO DI CONFIDENZA AL 95% PER σ^2

$\chi^2_{0,025}(19) = 8,9065$

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \; ; \; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right] = \left[\frac{19(0,4)}{32,852} \; ; \; \frac{19(0,4)}{8,9065}\right] = [0,23 \; ; \; 0,85] \quad \chi^2_{0,975}(19) = 32,852$$

ESERCIZIO

$X \sim N(1,1)$

$Y \sim N(2,3)$

INDIPENDENTI

a) DETERMINARE LA LEGGE DI $Z = 2X + 1$

$$E[Z] = E[2X+1] = 2E[X] + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$VAR[Z] = VAR[2X+1] = VAR[2X] + VAR[1] = 4VAR[X] + 0 = 4$$

$$Z \sim N(3,4)$$

b) QUANTO VALE $E[(Z-Y)^2]$

Z E Y INDIPENDENTI

$E[Z-Y] = E[Z] - E[Y] = 3-2=1$

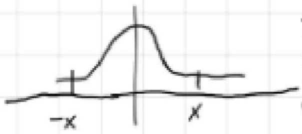
$Z-Y \sim N(1,7)$

$VAR[Z-Y] = VAR[Z] + VAR[Y] = 4+3=7$

$N = Z-Y$

$E[N^2] = E[N]^2 + VAR[N] = 1+7=8$

c) $P[Z<2] = ? = P\left[\frac{Z-3}{\sqrt{4}} < \frac{2-3}{\sqrt{4}}\right] = P\left[\frac{Z-3}{2} < -0,5\right] = \phi(-0,5) = 1-\phi(0,5) = 1-0,69146 \cong 0,31$



Dato che nella tabella ci sono per phi i valori >=0 consideriamo il valore positivo dentro phi e il risultato sarà 1-phi(|x|)

04/12

TEST STATISTICI (DI VERIFICA DELLE IPOTESI)

$(\Omega, \mathcal{F}, \{P_\theta\}_{\theta \in \Theta})$ Θ SPAZIO DEL PARAMETRO $\Theta \subseteq \mathbb{R}^d$ $(d=1)$

FORMULARE UN'IPOTESI SU θ:

$\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ CON $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$

$H_0: \theta \in \Theta_0$ IPOTESI NULLA

$H_1: \theta \in \Theta_1$ IPOTESI ALTERNATIVA

ERRORE DI PRIMA SPECIE: RIFIUTO H_0 NONOSTANTE H_0 SIA VERA

ERRORE DI SECONDA SPECIE: ACCETTO H_0 NONOSTANTE H_0 SIA FALSA

PRINCIPIO: SI CONSIDERA L'ERRORE DI PRIMA SPECIE PIU' GRAVE

METAFORA GIURIDICA
H_0: "IMPUTATO INNOCENTE"
H_1: "IMPUTATO COLPEVOLE"

SPERIMENTAZIONE FARMACOLOGICA H_0: IL FARMACO È INEFFICACE
H_1: IL FARMACO È EFFICACE

$$\underset{\text{STATISTICA}}{T} = t(\underbrace{X_1, X_2, \dots, X_n}_{\text{OSSERVAZIONI}}) \qquad \underset{\text{ZONA DI RIFIUTO}}{D} \subset \mathbb{R}$$

REGOLA RIFIUTO H_0 SE $T \in D$
ACCETTO H_0 SE $T \notin D$

IPOTESI NULLA SEMPLICE SE $\Theta_0 = \{\theta_0\}$

SIGNIFICATIVITÀ DEL TEST = PROBABILITÀ α DI COMMETTERE ERRORE DI PRIMA SPECIE

VALORI TIPICI PER α: 10%, 5%, 1%.

$T = t(X_1, X_2, \dots, X_n)$ $D \subseteq \mathbb{R}$ ZONA DI RIFIUTO $H_0: \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$

$\pi_D(\theta) = P_\theta[T \in D]$ → POTENZA DI TEST

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta[T \in D] = \sup_{\theta \in \Theta_0} \pi_D(\theta)$$

OSSERVAZIONE: SE $\Theta_0 = \{\theta_0\}$: $\alpha = \pi_D(\theta_0)$

TEST SULLA MEDIA μ DI UNA POPOLAZIONE NORMALE

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$H_0: \mu = \mu_0$ (IPOTESI NULLA)

$H_1: \mu \neq \mu_0$

2 CASI: 1) σ^2 NOTO

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

RIFIUTO H_0 SE $\dfrac{|\bar{X} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

ACCETTO H_0 SE " $\leq$ "

IL TEST HA SIGNIFICATIVITÀ α. VOGLIAMO STIMARE LA PROBABILITÀ DI COMMETTERE L'ERRORE DI PRIMA SPECIE.

$$P\left[|N| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = \alpha$$

2° CASO) σ^2 NON NOTO. $T = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$. RIFIUTO H_0 SE: $\dfrac{|\bar{X}-\mu_0|}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

ACCETTO H_0 SE " $\leq$ "

$H_0 = \mu = \mu_0$

$H_1 = \mu \neq \mu_0$

$\mu = \mu_0 \iff \begin{cases} \mu \geq \mu_0 \\ \mu \leq \mu_0 \end{cases}$ IPOTESI NULLA SEMPLICE BILATERALE O A "DUE CODE"

$H_0: \mu \geq \mu_0$ IPOTESI NULLA UNILATERALE $\rightsquigarrow$ TEST A UNA CODA

$H_1: \mu < \mu_0$

1° CASO) σ^2 NOTA $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$. RIFIUTO H_0 SE $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -z_{1-\alpha}$ $\qquad \sup_{\mu \geq \mu_0} P_\mu\left[\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -z_{1-\alpha}\right] \leq \alpha$

ACCETTO H_0 SE " $\geq$ "

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}-\mu+\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

SE $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -z_{1-\alpha} \Rightarrow \dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -z_{1-\alpha} \rightsquigarrow P_\mu\left[\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -z_{1-\alpha}\right] \leq P_\mu\left[\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -z_{1-\alpha}\right] = \alpha \sim N(0,1)$

$$\sup_{\mu \geq \mu_0} P_\mu\left[\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -z_{1-\alpha}\right] = \alpha$$

2° CASO) σ^2 NON NOTO

$H_0: \mu \geq \mu_0$

$H_1: \mu < \mu_0$

RIFIUTO H_0 SE $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < -t_{1-\alpha}(n-1)$

ACCETTO H_0 SE " $\geq$ "

$H_0: \mu \le \mu_0$ 1° caso) σ^2 noto rifiuto H_0 se $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha}$

$H_1: \mu > \mu_0$

accetto H_0 se " $\le$ "

2° caso) σ^2 non noto rifiuto H_0 se $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > t_{1-\alpha}(n-1)$

accetto H_0 se " $\le$ "

Test sulla varianza

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ se H_0 è vero: $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

$H_1: \sigma^2 \ne \sigma_0^2$

rifiuto H_0 se $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ oppure $> \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

$H_0: \sigma^2 \ge \sigma_0^2$ $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \cdot \dfrac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \ge \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ se H_0 è vera

$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

rifiuto ~~H_0 se~~ $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha}(n-1)$ $\sup_{\sigma^2 \ge \sigma_0^2} P_{\sigma^2}\left[\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_\alpha(n-1)\right] \le \alpha$

$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ se $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_\alpha(n-1) \Rightarrow \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_\alpha(n-1)$

$P_{\sigma^2}\left[\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_\alpha(n-1)\right] \le P_{\sigma^2}\left[\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_\alpha(n-1)\right] = \alpha$

$H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2$ rifiuto H_0 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \cdot \dfrac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \le \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

se $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\alpha}(n-1) \Rightarrow \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

$P_{\sigma^2}\left[\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right] \le P_{\sigma^2}\left[\dfrac{(n-1)}{\sigma^2} > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right] = \alpha$

DEFINIZIONE (p VALORE) DI UN TEST

È IL PIÙ PICCOLO LIVELLO DI SIGNIFICATIVITÀ p AL DI SOPRA DEL QUALE C'È RIFIUTO DI H_0

- VALORI ALTI DI p SONO UNA CONFERMA FORTE PER H_0
- VALORI BASSI DI p SONO UNA PROVA FORTE CONTRARIA AD H_0

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

RIFIUTO H_0 SE $\dfrac{|\bar{X} - \mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{|\bar{X} - \mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = z_{1-\frac{p}{2}} \qquad 1 - \frac{p}{2} = \Phi\left(\frac{|\bar{X} - \mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \qquad p = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{|\bar{X} - \mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)\right)$$

$$\bar{X} = \mu_0 \qquad \Phi(0) = P[N \leq 0] = \frac{1}{2} \qquad p = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$$

$H_0: \mu \geq \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

1°) σ^2 NOTO RIFIUTO H_0 SE $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -z_{1-\alpha}$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = -z_{1-p} \implies -\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = z_{1-p} = 0 \qquad 1 - p = \Phi\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$p = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

Confronto tra medie

06/12/23

$X_1 \sim N(\mu, \sigma_1^2)$

$X_2 \sim N(\mu, \sigma_2^2)$

X_1 e X_2 indipendenti

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

<u>Caso</u>: σ_1^2, σ_2^2 sono note

$$\frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - \cancel{(\mu_1 - \mu_2)}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

rifiuto H_0 se

$$\frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Confronto tra varianze

$X_1 \sim N(\mu, \sigma_1^2)$

$X_2 \sim N(\mu, \sigma_2^2)$

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$\frac{(n-1) S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{(m-1) S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(m-1)$$

n numerosità del campione estratto dalla prima popolazione

m ..... seconda popolaz.

distribuzione Fisher

$$F = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}}$$

$X \sim \chi^2(n)$

$Y \sim \chi^2(m)$

X, Y indipendenti

F segue una distribuzione di Fisher $F(n, m)$

$F_\alpha(n, m) \rightarrow$ quantili di Fisher continua confronto varianze...

$$\frac{\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2(n-1)}}{\frac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2(m-1)}} \sim F(n-1, m-1)$$

rifiuto H_0 se $\frac{S_1}{S_2} \leq F_{\alpha/2}(n-1, m-1)$ o $\frac{S_1}{S_2} \geq F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)$

---

esercizio (n°20 pag 330 "Ross")

Una compagnia petrolifera dichiara che il contenuto di zolfo del suo carburante diesel non su
lo 0.15%.

Per verificare questa ipotesi, se ne analizzano 40 campioni, trovando un contenuto medio pari a
0.162% con deviazione standard campionaria pari a S = 0.40%.

↳ ci fa capire che dobbiamo usare la T di student

Al livello di significatività $\alpha = 5\%$ possiamo confutare le affermazioni della compagnia?

Iniziamo dicendo cos'è un ipotesi nulla.

$H_0: \mu \leq \mu_0 = 0.15$ (ipotesi della compagnia)

$H_1: \mu > \mu_0$

$n = 40$ (densità campionaria)

$\bar{X} = 0.162$

$S = 0.4$

rifiuto H_0 se $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > t_{1-\alpha}(n-1)$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{0.162 - 0.15}{0.4}\sqrt{40} = 0.189$$

$t_{0.95}(39) = 1.68$

$0.189 > 1.68$ → non si può rifiutare H_0

---

esercizio (n°10 pag. 329 "Ross")

Il messaggio pubblicitario di un nuovo dentifricio afferma che esso è in grado di ridurre la frequenza delle carie dei bambini negli anni in cui ne sono soggetti.

Supponiamo che il numero medio di carie per un bambino di quell'età sia 3 e varianza (nota!) σ^2
e che uno studio condotto su 2500 bambini di quell'età abbia rilevato un numero medio di carie
pari a 2.95 (sui bambini che usano tale dentifricio).

Ipotizziamo che la varianza usando questo dentifricio nel dentifricato non cambia.

a) Questi dati sono abbastanza forti da convalidare al 5% di significatività l'annuncio pubblicitario?

$\mu_0 = 3$

$H_0: \mu = \mu_0 = 3$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

$\sigma^2 = 1$

$n = 2500$

$\bar{X} = 2.95$

rifiuto H_0 se $\dfrac{|\bar{X} - \mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \longrightarrow z_{0.975} = 1.96$

$\dfrac{|2.95 - 3|}{1} \sqrt{2500} = 0.05 \cdot 10 \cdot 5 = 2.5$

$2.5 > 1.96$ si può rifiutare

EFFICIENZA DI STIMATORI

$T = t(X_1, X_2, \dots, X_n)$ STIMATORE CORRETTO DI $\psi(\theta)$, QUINDI $E_\theta[T] = \psi(\theta)\ \forall \theta \in \Theta$, ALLORA T È EFFICIENTE SE $r_\theta(T)$ È IL PIÙ PICCOLO POSSIBILE.

$\rightsquigarrow$ CRAMER-RAO: $r_\theta(T) \geq \dfrac{|\psi'(\theta)|^2}{I_n(\theta)}$

NON SI PUÒ RAGGIUNGERE UN RISULTATO ABBASTANZA PICCOLO, A VOLTE NON FUNZIONA PERCHÈ L'INFORMAZIONE DI FISHER A VOLTE NON È DEFINITA

OSS: SE $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ È UN CAMPIONE UNIFORME $U(0,a)$ CON

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{SE } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

STATISTICA SUFFICIENTE (DEFINIZIONE DI FISHER)

$T = t(X_1, X_2, \dots, X_n)$ È SUFFICIENTE SE LA LEGGE CONDIZIONATA DELLE OSSERVAZIONI $(X_1, X_2, \dots X_n)$, DATO T, NON CONTIENE IL PARAMETRO θ.

SUPPONIAMO $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ CAMPIONE BERNOULLIANO.

$$P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n] = p^{x_1+x_2+\dots+x_n}(1-p)^{n-(x_1+x_2+\dots+x_n)}$$

SE $T = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, ALLORA T È UNA STATISTICA SUFFICIENTE.

$$P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, \ldots, X_n = x_n \mid T = t] = \frac{P[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n; T = t]}{P[T = t]}$$

BINOMIALE DI PARAMETRI n E p

$$= \begin{cases} \text{SE } t \neq x_1 + x_2 + \ldots + x_n \to = 0 \\ \text{SE } t = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \to = \dfrac{\cancel{p^{(x_1 + \ldots + x_n)}} \, \cancel{(1-p)^{n-(x_1+\ldots+x_n)}}}{\binom{n}{t} \cancel{p^{x_1+\ldots+x_n}} \, \cancel{(1-p)^{n-(x_1+\ldots+x_n)}}} = \dfrac{1}{\binom{n}{t}} \end{cases}$$

QUINDI
$$= \begin{cases} 0 & \text{SE } t \neq x_1 + \ldots + x_n \\ \dfrac{1}{\binom{n}{t}} & \text{SE } t = x_1 + \ldots + x_n \end{cases}$$

TEOREMA DI FATTORIZZAZIONE DI FISHER

$(\Omega, \mathcal{F}, \{P_\theta\}_{\theta \in \Theta})$ $\qquad (X_1, \ldots, X_n)$ OSSERVAZIONI

$T = t(X_1, \ldots, X_n)$

T È SUFFICIENTE SE E SOLO SE LA LEGGE CONGIUNTA DI $(X_1, \ldots, X_n)$ SI FATTORIZZA, QUINDI SI SCRIVE COME IL PRODOTTO:

$$f(x_1, \ldots, x_n, \theta) = u(x_1, \ldots, x_n)\, v(t(x_1, \ldots, x_n), \theta)$$

ESEMPIO: $P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \underbrace{p^{x_1+\dots+x_n}(1-p)^{n-(x_1+\dots+x_n)}}$

DIPENDE DA $x_1+\dots+x_n$

ESEMPIO (CAMPIONE POISSON DI PARAMETRO $\lambda > 0$):

$$P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{x_1+\dots+x_n}}{x_1!\,x_2!\dots x_n!}$$

DIPENDE DA $x_1+\dots+x_n$

$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ È SUFFICIENTE

ESEMPIO (CAMPIONE ESPONENZIALE):

$$f(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda(x_1+\dots+x_n)} & \text{SE } x_i \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, n \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

DIPENDE DA $x_1+\dots+x_n$

$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$

STAT. SUFFICIENTE

ESEMPIO (CAMPIONE UNIFORME TRA 0 E $\theta > 0$)

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} & 0 \leq x_i \leq \theta \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$\theta \geq x_i \ \forall i$

$\theta \geq \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$

$$\longrightarrow f(x_1,\dots,x_n,\theta) = \frac{1}{\theta^n}\,\mathbb{1}_{[\max\{x_i\},+\infty]}(\theta)$$

$T = \max_{1\le i\le n}\{X_i\}$ STATISTICA SUFFICIENTE

ESEMPIO (CAMPIONE NORMALE GAUSSIANO DI PARAMETRO σ^2,μ):

$$f(x_1,\dots,x_n;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}\,e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2+\mu^2-2x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + n\mu^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$T(X_1\dots X_n) = \left(\sum_{i=1}^{n}X_i, \sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)$ STATISTICA SUFFICIENTE

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI FISHER CASO DISCRETO

◦) T SUFFICIENTE $\Rightarrow$ VALE LA FATTORIZZAZIONE

$P[X_1=x_1,\dots,X_n=x_n \mid T=t] \; u(x_1,\dots,x_n)$ NON CONTIENE θ

POSSIAMO SUPPORRE CHE $T=t(x_1,\dots,x_n)$

$$P(A\cap B) = P(A\mid B)\cdot P(B)$$

$$P[X_1=x_1,\dots,X_n=x_n] = P[X_1=x_1,\dots,X_n=x_n \mid T=t]\cdot P[T=t] =$$

$$= u(x_1, \dots, x_n)\, v(t(x_1, \dots, x_n); \theta)$$

•) VALE LA FATTORIZZAZIONE $\Rightarrow$ T SUFFICIENTE

$$P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = u(x_1, \dots, x_n)\, v(t(x_1, \dots, x_n); \theta)$$

$$P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n \mid T = t] = \begin{cases} 0 & t \neq t(x_1, \dots, x_n) \\ \dfrac{P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]}{P[T = t]} & t = t(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

$$= \frac{u(x_1, \dots, x_n)\, v(t(\cancel{x_1, \dots, x_n}); \theta)}{\sum u(y_1, y_2, \dots, y_n)\, v(t(\cancel{y_1, \dots, y_n}); \theta)}$$

CVD

$y_1, y_2, \dots, y_n$

$t(y_1, \dots, y_n) = t(x_1, \dots, x_n) = t$

$\boxed{\text{ATTESA CONDIZIONALE}}$

(X, Y)

$\exists\, f(x,y)$

$$f_{X|Y=y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} & \text{se } f_Y(y) = 0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$E[X \mid Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y=y}(x,y)\, dy = h(y)$$

$h(Y) = E[X \mid Y]$ ATTESA DI X DATO Y

TEOREMA BLACKWELL-RAO

$(\Omega, \mathcal{F}, \{P_\theta\}_{\theta \in \Theta})$

U STIMATORE CORRETTO DI $\psi(\theta)$
$T = t(X_1, \dots, X_n)$ STATISTICA SUFFICIENTE

ALLORA $U^* = E[U \mid T]$, U^* È CORRETTO E

$r_\theta(U^*) \leq r_\theta(U) \quad \forall \theta \in \Theta$

<u>LEMMA</u> (X, Y) $\quad E[X \mid Y] = h(Y)$

$$E[h(Y)\, g(Y)] = E[X\, g(Y)]$$

IN PARTICOLARE SE $g(Y) = 1$ ALLORA $E[h(Y)] = E[X]$

OPPURE $E[E[X \mid Y]] = E[X]$

<u>VERIFICA</u> $E[h(Y)\, g(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\, g(y)\, f_Y(y)\, dy$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y=y}(x, y)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\, \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x\, \frac{f(x,y)}{\cancel{f_Y(y)}}\, dx \right) g(y)\, \cancel{f_Y(y)}\, dy =$$

$= E[X g(Y)]$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA

$T = t(X_1, \dots, X_n)$ SUFFICIENTE
$U = U(X_1, \dots, X_n)$ STIMATORE CORRETTO DI $\tau(\theta)$
$U^* = E[U \mid T] = U^*(T)$ NON DIPENDE DA θ

U, T $\qquad E_\theta[U g(T)] = E_\theta[U^* g(T)]$

$X \; Y$ $\qquad \tau(\theta) = E_\theta[U] = E_\theta[U^*]$

$$r_\theta(U) = E_\theta\left[(U - \tau(\theta))^2\right] = E_\theta\left[(\underbrace{U - U^*}_{a} + \underbrace{U^* - \tau(\theta)}_{b})^2\right] =$$

$$= E_\theta\left[(U - U^*)^2\right] + E_\theta\left[(U^* - \tau(\theta))^2\right] + 2E_\theta\left[(U - U^*)(U^* - \tau(\theta))\right]$$

$$\geq r_\theta(U^*) + 2E_\theta\left[(U - U^*)(U^* - \tau(\theta))\right]$$

VOGLIAMO CONTROLLARE CHE $E_\theta[U(U^* - \tau(\theta))] = E_\theta[U^*(U^* - \tau(\theta))]$
PER IL LEMMA DELLE ATTESE.

STATISTICA COMPLETA

UNA STATISTICA $T = t(X_1, \dots, X_n)$ SI DICE COMPLETA SE
$E_\theta[f(T)] = 0 \quad \forall \theta \in \Theta \implies f = 0$

$(X_1, \dots, X_n)$ CAMPIONE DI BERNOULLI DI PARAMETRO p.

$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ È COMPLETA?

$$P[T=k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$k = 0, \dots, n$

$$E_p[f(T)] = 0 \quad \forall p \in [0,1]$$

$$E_p[f(T)] = \sum_{k=0}^{n} f(k) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 0 \quad \forall p$$

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k) \left(\frac{p}{1-p}\right)^k = 0 \quad \forall p$$

$$\left(\frac{p}{1-p}\right) = x \to \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k) x^k = 0 \to \binom{n}{k} f(k) = 0 \quad \forall k = 0, \dots, n$$

$$\to f(k) = 0$$

$\boxed{\text{TEOREMA LEHMANN - SCHEFFÈ}}$

SE $T = t(X_1, \dots, X_n)$ È UNA STATISTICA SUFFICIENTE E COMPLETA, ALLORA ESISTE AL PIÙ UNO STIMATORE CORRETTO DI $\tau(\theta)$ CHE SIA UNA FUNZIONE DI T.
INOLTRE, TALE STIMATORE È EFFICIENTE.

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

SUPPONIAMO CI SIANO DUE STIMATORI CORRETTI:

$$V_1 = f_1(T) \qquad V_2 = f_2(T)$$

$$E_\theta[V_1] = E_\theta[f_1(T)] = \tau(\theta) \quad \forall \theta$$

$$E_\theta[V_2] = E_\theta[f_2(T)] = \tau(\theta) \quad \forall \theta$$

$$E_\theta[(f_1 - f_2)(T)] = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow f_1 = f_2$$

$$\Rightarrow V_1 = V_2$$

COMPLETEZZA

QUINDI ABBIAMO CONFERMATO CHE $\exists$ AL PIÙ UNO STIMATORE

SIA S STIMATORE CORRETTO DI $\tau(\theta)$.

$$r_\theta(S) \underset{B\text{-}R}{\geq} r_\theta(S^*) = r_\theta(f(T)) \qquad S^* = E_\theta[S \mid T]$$

OVE $f(T)$ UNICO STIMATORE CORRETTO DI T

QUINDI $f(T)$ È EFFICIENTE

APPLICAZIONE DEL TEOREMA LEHMANN-SCHEFFÈ

CAMPIONE UNIFORME $(X_1, \dots, X_n)$

$$f(x_1, \dots, x_n, \theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{[\max_{1 \le i \le n}\{x_i\}]}(\theta)$$

$$T = \max_{1 \le i \le n}\{X_i\}$$

T È SUFFICIENTE E COMPLETA?

$$P[T \le t] = P[X_i \le t \ \forall i = 1, 2, \dots, n] = P[X_1 \le t] \cdot \ldots \cdot P[X_n \le t]$$

$$P[X_1 \le t]^n = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^n}{\theta^n} & 0 \le t \le \theta \\ 1 & t \ge \theta \end{cases}$$

$$g(t) = \text{DERIVATA} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{n t^{n-1}}{\theta^n} & 0 < t < \theta \\ 0 & t \ge \theta \end{cases}$$

OVE $h(T)$ FUNZIONE QUALSIASI

$$E_\theta[h(T)] = 0 \quad \forall \theta$$

$$E_\theta[h(T)] = \int_0^\theta h(t) \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} \, dt = 0 \quad \forall \theta > 0$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta h(t) \, t^{n-1} \, dt = 0 \quad \forall \theta > 0$$

$$\Rightarrow \int_0^a h(t)\, t^{n-1}\, dt = 0 \quad \forall a > 0 \quad \Rightarrow h = 0$$

CONFERMIAMO CHE T È COMPLETA

$$E_a[T] = \frac{n}{a^n} \int_0^a t^n\, dt = \frac{n}{a^n} \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^a = \frac{n}{n+1} a$$

$U = \frac{n+1}{n} T$ È UNO STIMATORE CORRETTO CON T SUFFICIENTE E COMPLETA $\Rightarrow$ U È EFFICIENTE