SISTEMI TRIANGOLARI

DEF. Un sistema lineare si dice "triangolare" se la matrice dei coefficienti è triangolare.

I sistemi triangolari si risolvono facilmente mediante gli algoritmi di sostituzione all'indietro (se triang. superiore) e in avanti (se triang. inferiori)

Sistemi triangolari superiori

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad\quad \vdots \\ \quad\quad\quad a_{ii}x_i + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \quad\quad\quad\quad \vdots \\ \quad\quad\quad\quad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Ipotesi di lavoro: $\det(A) \neq 0$

OSSERVAZIONE: essendo A triang. sup.

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

Quindi

$$\det(A) \neq 0 \iff \begin{cases} a_{ii} \neq 0 \\ i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

cioè gli elementi diagonali sono non nulli.

Per risolvere questo sistema, cominciamo con l'osservare che l'ultima equazione contiene la sola incognita x_n.
Dunque ricaviamo

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Osserviamo poi che la penultima equazione è:

$$a_{n-1,n-1} x_{n-1} + a_{n-1,n} x_n = b_{n-1}$$

Essendo x_n nota, questa equazione conterrà la sola incognita x_{n-1}.
Quindi ricaviamo

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

Si procede a ritroso. Dalla i-esima equazione

$$a_{ii} x_i + \overbrace{a_{i,i+1} x_{i+1} + \dots + a_{in} x_n} = b_i$$

avendo già calcolato $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$. Ricaviamo

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

ALGORITMO DI SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO

$$\begin{cases} \text{per } i = n, \dots, 1 \\ x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \end{cases}$$

COSTO COMPUTAZIONALE

NON SERVE

fissiamo l'indice i:

molt./div. $\quad n-i+1$

add./sottr. $\quad n-i$

Consegue che

$$C_{m/d} = \sum_{i=1}^{n} (n-i+1) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

num. tot. molt./div.

$k = n-i+1$

$$= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \underbrace{O(n)}_{\text{può essere trascurato per } n \text{ grande}}$$

NOTAZIONE:

$O(n^p)$ denota un polinomio di grado al più p in n

$$C_{a/s} = \sum_{i=1}^{n} (n-i) = \frac{n^2}{2} + O(n)$$

$$C_{TOT} = n^2 + O(n) \text{ flops}$$

floating point operations

ALGORITMO DI SOSTITUZIONE IN AVANTI
(per la risoluzione di un sistema triangolare inferiore)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots a_{ii}x_i = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{per } i = 1, \dots, n \\ x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \end{cases}$$

~~$C_{TOT} = n^2 + O(n)$ flops~~

Ricordiamo che:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ESERCIZIO: implementare l'algoritmo di sostituzione in avanti ✓

PROPRIETÀ DELLE MATRICI TRIANGOLARI

Siano A e B due matrici triangolari inferiori. Valgono le seguenti proprietà:

- $A \cdot B$ è triangolare inferiore
- se A è invertibile ($a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, \dots, n$), allora A^{-1} è triangolare inferiore

La dimostrazione, per induzione sulla dimensione n di A e B, si omette.

OSSERVAZIONE: In altre parole, l'insieme delle matrici triangolari inferiori è chiuso rispetto alle operazioni di moltiplicazione e di inversione.

DEFINIZIONE Una matrice triangolare si dice "speciale" se i suoi elementi diagonali sono uguali a 1.

Naturalmente il suo determinante sarà $= 1$.

- Le proprietà sopra elencate si estendono a:
  - matrici triangolari superiori
  - matrici triangolari speciali

Ricordiamo un'ulteriore proprietà che riguarda l'inversa di un prodotto.

PROPRIETÀ

Siano A e B due matrici quadrate invertibili. Allora il loro prodotto è ancora invertibile e risulta:

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

Inoltre:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

FATTORIZZAZIONE LU di una matrice

DEFINIZIONE Una matrice quadrata A di dimensione n si dice fattorizzabile in forma LU, se possiamo riguardare A come prodotto di due matrici:

$$A = L \cdot U$$

dove

L : triangolare inferiore speciale

U : triangolare superiore

Cominciamo col discutere l'unicità della fattorizzazione LU.

Proposizione. (Unicità della fatt. LU)

Sia A una matrice quadrata invertibile. $\det(A) \neq 0$

Allora, se A è fattorizzabile in forma LU, la fattorizzazione è unica.

DIM Siano:

$$A = L_1 U_1 = L_2 U_2$$

due fattorizzazioni LU di A. Vogliamo provare che $L_1 = L_2$ e $U_1 = U_2$

Da $L_1 U_1 = L_2 U_2$

Premoltiplichiamo ambo i membri per L_1^{-1}

$$\underbrace{L_1^{-1} \cdot L_1}_{I} U_1 = L_1^{-1} L_2 U_2$$

matrice identica

Per ipotesi $\det(A) \neq 0$. Ma

$$0 \neq \det(A) = \begin{cases} \det(L_1 U_1) = \det(U_1) \\ \det(L_2 U_2) = \det(U_2) \end{cases}$$

Quindi U_2 è invertibile. Moltiplicando a destra per U_2^{-1} otteniamo:

$$U_1 \cdot U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2$$

Per le proprietà viste in precedenza:

U_2^{-1} è triang. sup.

$U_1 \cdot U_2^{-1}$ è triang. sup.

L_1^{-1} è triang. inf. spec.

$L_1^{-1} L_2$ è triang. inf. spec.

In definitiva, a primo membro abbiamo una triangolare superiore mentre, a secondo membro, una triangolare inferiore speciale.

Graficamente:

$$U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2$$

$$\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ & * & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ * & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ * & \cdots & * & 1 \end{bmatrix}$$

$*$ = elementi eventualmente non nulli

Ne consegue che i due membri dovranno necessariamente coincidere con la matrice identica:

$$U_1 U_2^{-1} = I \quad \Longrightarrow \quad U_1 U_2^{-1} \cdot U_2 = I \, U_2 \quad \Longrightarrow$$

$$L_1^{-1} L_2 = I \qquad\quad L_1 L_1^{-1} L_2 = L_1 I$$

$$U_1 = U_2$$

$$L_1 = L_2 \qquad \square$$

Per poter provare l'esistenza, faremo uso delle "matrici elementari di Gauss"

DEFINIZIONE Per $K = 1, \dots, n-1$, si definisce K-esima matrice elementare di Gauss, la seguente matrice triangolare inferiore speciale:

$$L_K = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & m_{K+1,K} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & m_{iK} & & \ddots \\ & & \vdots & & \\ & & m_{nK} & & & 1 \end{bmatrix}$$

colonna K

L_K coincide con la matrice identica con l'aggiunta di elementi eventualmente non nulli in colonna K-esima al di sotto dell'elemento diagonale:

$$m_{iK}, \quad i = K+1, \dots, n$$

moltiplicatori di Gauss

Proprietà (delle matrici elementari di Gauss)

Introduciamo i vettori:

IN QUESTO CASO $i=1$

m_{1k}

VETTORE DI COLONNA K (COLONNA DI GAUSS)

$$\underline{m}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_{k+1,k} \\ \vdots \\ m_{ik} \\ \vdots \\ m_{nk} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} k \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n-k \end{array}$$

VETTORE RIGA K

RIGA PRECEDENTE AL PRIMO ELEMENTO DI GAUSS

$$\underline{e}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{elemento } k \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Allora:

$$L_k = I + \underline{m}_k \underline{e}_k^T$$

OSSERVAZIONE:

$$\underset{(n\times 1)}{\underline{m}_k}\ \underset{(1\times n)}{\underline{e}_k^T} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_{k+1,k} \\ \vdots \\ m_{ik} \\ \vdots \\ m_{nk} \end{bmatrix} [0, \dots 0, 1, 0, \dots 0]$$

$(n \times 1)\ (1 \times n) \downarrow\ n \times n$

$$= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & & & m_{k+1,k} & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & m_{ik} & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & m_{nk} & & \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} k \text{ righe} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow \text{ colonna } k \end{array}$$

Richiamo: se $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ (vettori colonna):

$$\underline{a}^T \underline{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \longrightarrow \text{prodotto scalare o interno}$$

$$\underline{a}\,\underline{b}^T = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & & & \\ a_n b_1 & \cdots & & a_n b_n \end{bmatrix} \longrightarrow \text{prodotto esterno}$$

Quindi $\underline{m}_k \underline{e}_k^T$ è un prodotto esterno.

INVERSA L_k è una matrice triang. inf. speciale e pertanto $\det(L_k) = 1$.

Inoltre, l'inversa di L_k è:

$$L_k^{-1} = I - \underline{m}_k \underline{e}_k^T.$$

$$L_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -m_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & -m_{ik} & & \\ & & \vdots & & \\ & & -m_{nk} & & 1 \end{bmatrix}$$

~~Infatti, verifichiamo che:~~

$$\cancel{(\underline{I} + \underline{m}_k \underline{e}_k^T)(\underline{I} - \underline{m}_k \underline{e}_k^T) = \underline{I}}$$

~~Risulta:~~

$$(\underline{I} + \underline{m}_k \underline{e}_k^T)(\underline{I} - \underline{m}_k \underline{e}_k^T) =$$

$$= \underline{I} - \cancel{\underline{m}_k \underline{e}_k^T} + \cancel{\underline{m}_k \underline{e}_k^T} - (\underline{m}_k \underline{e}_k^T)(\underline{m}_k \underline{e}_k^T)$$

$$= \underline{I} - \underline{m}_k \underbrace{(\underline{e}_k^T \underline{m}_k)}_{\text{prodotto scalare, quindi un numero}} \underline{e}_k^T$$

$$= \underline{I} - \underbrace{(\underline{e}_k^T \underline{m}_k)}_{} \underline{m}_k \underline{e}_k^T$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-esimo elemento}}}{(0, 0, \dots 0, 1, 0, \dots 0)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_{k+1,k} \\ \vdots \\ m_{nk} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} k \text{ elementi nulli} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = 0$$

$$= \underline{I}$$

In conclusione: l'inversa di una matrice elementare di Gauss è ancora una matrice elementare di Gauss, ottenuta cambiando il segno dei moltiplicatori.

PRODOTTO

Siano L_r e L_s due matrici elementari di Gauss, con $r < s$. Allora

$$L_r \cdot L_s = I + \underline{m}_r \cdot \underline{e}_r^T + \underline{m}_s \underline{e}_s^T$$

Cioè:

$$L_r \cdot L_s = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & m_{r+1,r} & 1 & & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & m_{s+1,s} & \ddots & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & m_{nr} & & m_{ns} & & 1 \end{bmatrix}$$

Il prodotto è la sovrapposizione dei due singoli fattori.

DIM

Osserviamo che:

$$e_r^T \underline{m}_s = [0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{elemento } r}}{1}, 0 \dots 0] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_{s+1,s} \\ \vdots \\ m_{ns} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} s \text{ zeri} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= 0 \qquad \forall\, r \le s$$

$$L_r \cdot L_s = (\underline{I} + \underline{m}_r \underline{e}_r^T)(\underline{I} + \underline{m}_s \underline{e}_s^T)$$

$$= \underline{I} + \underline{m}_r \underline{e}_r^T + \underline{m}_s \underline{e}_s^T + (\underline{m}_r \underline{e}_r^T)(\underline{m}_s \underline{e}_s^T)$$

per l'associatività delle moltiplicazione

$$= \underline{I} + \underline{m}_r \underline{e}_r^T + \underline{m}_s \underline{e}_s^T + \underline{m}_r \underbrace{(\underline{e}_r^T \underline{m}_s)}_{= 0} \underline{e}_s^T$$

$$= \underline{I} + \underline{m}_r \underline{e}_r^T + \underline{m}_s \underline{e}_s^T \qquad \square$$

Durante la dimostrazione dell'esistenza della fattorizzazione LU, faremo uso della seguente proprietà.

Consideriamo due matrici così partizionate

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

triang. inf. a blocchi

A_{11} e B_{11} sono blocchi quadrati $K \times K$ che abbiamo chiamato "sottomatrici principali di testa di ordine K".

Facendo il prodotto riga × colonna a blocchi:

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} \cdot B_{11} & A_{11} B_{12} \\ A_{21} B_{11} + A_{22} B_{21} & A_{21} B_{12} + A_{22} B_{22} \end{bmatrix}$$

La sottomatrice principale di testa di AB è $A_{11} \cdot B_{11}$

Teorema (di esistenza e unicità della fattorizz. LU)

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e supponiamo che i minori principali di testa di A siano non nulli:

$$\det(\underbrace{A_{kk}}_{\text{sottomatrice principale di testa di ordine } k}) \neq 0, \quad k = 1, \dots, n$$

Allora

$\exists !\, L$ triangolare inferiore speciale

$\exists !\, U$ triangolare superiore

tali che $A = LU$

DIM La dimostrazione è costruttiva, cioè induce un algoritmo che può essere implementato sul calcolatore.

Definiremo una sequenza finita di matrici:

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

tali che $A_1 = A$ e $A_n = U$

Gli elementi di A_k saranno denotati con $a_{ij}^{(k)}$: $A_k = \{a_{ij}^{(k)}\}$

Si procede per induzione finita: descriviamo il primo passo e, in seguito, partendo da alcune ipotesi di induzione, descriveremo il generico passo k.

PASSO 1 : $A_1 \to A_2$

Sappiamo che $A_1 = \{a_{ij}^{(1)}\} = A = \{a_{ij}\}$

Poniamo

$$A_2 = L_1 \cdot A_1$$

con L_1 matrice elementare di Gauss.

Sceglieremo i moltiplicatori di Gauss di L_1, (m_{i1}, $i = 2, \dots, n$), in modo da annullare in A_2 tutti gli elementi della prima colonna dal secondo in poi:

$$\begin{cases} a_{i1}^{(2)} = 0 \\ i = 2, \dots, n \end{cases} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{i1} & \cdots & 1 & \\ m_{n1} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1j}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & \cdots & \vdots & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{i1}^{(1)} & \cdots & a_{ij}^{(1)} & \cdots & \\ a_{n1}^{(1)} & \cdots & a_{nj}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

riga i-esima di L_1

per $i = 2, \dots, n$

$$a_{i1}^{(2)} = (\text{riga } i\text{-esima di } L_1)(\text{prima colonna di } A_1)$$

$$= m_{i1} \cdot a_{11}^{(1)} + a_{i1}^{(1)}$$

$$a_{i1}^{(2)} = 0 \iff \begin{cases} m_{i1} = -\dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \\ i = 2, \dots, n \end{cases}$$

Osserviamo che $a_{11}^{(1)} \neq 0$ poiché è il minore principale di testa di ordine 1.

Osserviamo anche che la prima riga di A_2 coincide con la prima riga di A_1.

I restanti elementi di A_2 saranno:

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1} \cdot a_{1j}^{(1)} \\ i, j = 2, \dots, n \end{cases}$$

Ora descriviamo il passo k, che costruisce la matrice A_{k+1} a partire dalla matrice A_k

IPOTESI DI INDUZIONE: la matrice A_k ha nulli tutti gli elementi delle prime $k-1$ colonne al di sotto della diagonale

PASSO K : $A_k \longrightarrow A_{k+1}$

Si pone : $A_{k+1} = L_k A_k$

Sceglieremo i moltiplicatori di L_k (m_{ik}, $i = k+1, \dots, n$) in modo da annullare in A_{k+1} gli elementi della k-esima colonna al di sotto di quello diagonale :

$$\begin{cases} \text{per } i = k+1, \dots, n \\ a_{ik}^{(k+1)} = 0 \end{cases}$$

$$A_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & m_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & m_{ik} & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & & & \ddots \\ & & m_{nk} & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & & & & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & & & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & & & \\ & & & a_{kk}^{(k)} & a_{kj}^{(k)} & a_{kn}^{(k)} \\ & & & a_{ik}^{(k)} & a_{ij}^{(k)} & \vdots \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nk}^{(k)} & a_{nj}^{(k)} & \end{bmatrix}$$

riga i-esima di L_k

colonne j-esime di A_k

per $i = k+1, \dots, n$

$$a_{ik}^{(k+1)} = (\text{riga } i \text{ di } L_k)(\text{colonna } k \text{ di } A_k)$$
$$= m_{ik}\, a_{kk}^{(k)} + a_{ik}^{(k)}$$

Quindi

$$a_{ik}^{(k+1)} = 0 \iff \begin{cases} m_{ik} = -\dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \\ i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

Occorre provare che $a_{kk}^{(k)} \neq 0$. Sappiamo che

$$A_k = L_{k-1} A_{k-1} = L_{k-1} \cdot L_{k-2} A_{k-2}$$

$$= \dots = \underbrace{L_{k-1} \cdot L_{k-2} \cdots L_1}_{\text{triang. inf. speciale } \equiv \tilde{L}} \cdot A$$

$$A_k = \tilde{L} \cdot A = \begin{bmatrix} \tilde{L}_{11} & 0 \\ \tilde{L}_{21} & \tilde{L}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A_{kk}} & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

sottomatrice principale di testa di ordine k di A.

$$= \begin{bmatrix} \tilde{L}_{11} A_{kk} & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

Quindi il minore principale di testa di ordine k di A_k a primo membro coincide con il minore principale di testa della matrice a secondo membro ovvero:

$$a_{11}^{(1)} \cdot a_{22}^{(2)} \cdots a_{kk}^{(k)} = \det(\tilde{L}_{11} A_{kk}) = \det(A_{kk})$$

Per ipotesi, $\det(A_{KK}) \neq 0$. Ne consegue che $a_{KK}^{(K)} \neq 0$.

Osserviamo che le prime K righe e le prime K-1 colonne della matrice A_{K+1} rimangono immutate.

Determiniamo i rimanenti elementi della matrice A_{K+1}:

per $i = K+1, \dots, n$

per $j = K+1, \dots, n$

$$a_{ij}^{(K+1)} = a_{ij}^{(K)} + m_{iK}\, a_{Kj}^{(K)}$$

Quindi A_{K+1} ha la forma richiesta: elementi nulli nelle prime K colonne al disotto della diagonale principale.

Al passo n-1 definiremo:

$$A_n = L_{n-1} A_{n-1}$$

Evidentemente, A_n sarà triangolare superiore. Vediamo come A_n è relazionata alla matrice di partenza A.

Risulta:

$$A_n = L_{n-1} A_{n-1} = L_{n-1} L_{n-2} A_{n-2} = \dots$$
$$= (L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_1) A$$

Ricaviamo la matrice A:

$$A = (L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_1)^{-1} A_n$$
$$= (L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}) A_n$$

Poniamo: $U = A_n$ (triangolare sup.)

$L = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}$ (triang. inf. speciale)

In particolare, risulta:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -m_{21} & 1 & & & \\ -m_{31} & -m_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & 1 & \\ -m_{n1} & -m_{n2} & \cdots & -m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi provato che
$$A = LU.$$
L'unicità era stata precedentemente dimostrata $\square$

COSTO COMPUTAZIONALE

Riprendiamo l'algoritmo:

per $k = 1, \dots, n-1$

per $i = k+1, \dots, n$

$$m_{ik} = -\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

per $j = k+1, \dots, n$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} + m_{ik} a_{kj}^{(k)}$$

Fissato il passo k sono necessarie:

- $(n-k)^2$ add./sottr.
- $(n-k)^2$ molt. e $(n-k)$ divisioni

Pertanto

$$C_{add./sottr.} = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2$$

effettuiamo il cambiamento di variabile

$$s = n-k$$

se k varia tra 1 e $n-1$, l'indice s varierà tra $n-1$ e 1, quindi:

$$C_{add./sottr.} = \sum_{s=1}^{n-1} s^2$$

Ricordiamo la seguente formula:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

$$C_{add./sottr.} = \frac{(n-1)\cdot n(2n-1)}{6} = \frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

Analogamente,

$$C_{molt./divis.} = \frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

In conclusione:

$$C_{TOT} = \frac{2}{3} n^3 + O(n^2) \text{ flops.}$$

OSSERVAZIONE:

Consideriamo il ciclo più interno dell'algoritmo:

$$\text{per } j = k+1, \dots, n$$
$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} + m_{ik}\, a_{kj}$$

Può essere scritto in forma vettoriale come segue:

$$\underbrace{A_{k+1}(i, k+1:n)}_{\text{nuova riga } i} = \underbrace{A_k(i, k+1:n)}_{\text{vecchia riga } i} + m_{ik}\, \underbrace{A_k(k, k+1:n)}_{\text{riga } k}$$

In altri termini, la nuova riga i-esima è la combinazione lineare della vecchia riga i-esima con la riga k-esima.

ESERCIZIO: Determinare la fattorizzazione LU della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Sfruttare il risultato per calcolare il determinante di A.

Svolgimento. Poniamo $A_1 = A$ e determiniamo la matrice A_2

elemento pivotale

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = 1$

$m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -2$

$m_{41} = -a_{41}/a_{11} = 0$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

la nuova seconda riga è uguale alla vecchia seconda riga + m_{21} * la prima riga

(3ª riga di A_2) = (3ª riga di A_1) + m_{31} * (1ª riga di A_1)

Costruiamo A_3 a partire da A_2

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ m_{32} = -0/-1 = 0 \\ m_{42} = -2/-1 = 2 \end{matrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad m_{43} = -1$$

$$U = A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Inoltre:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ 2 & 0 & 1 & \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcoleremo il determinante di A:

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L) \cdot \det(U)$$
$$= 1 \cdot \det(U) = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-3) = -6$$

ALCUNE APPLICAZIONI DELLA FATTORIZZAZIONE LU

CALCOLO DEL DETERMINANTE DI UNA MATRICE

Come visto nell'esempio precedente, avendo determinato la fatt. LU di una matrice A, risulta:

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L) \cdot \det(U)$$

$$= 1 \cdot \det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

RISOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE

Al fine di risolvere il sistema lineare

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

determiniamo, preliminarmente, la fattorizzazione LU di A:

$$A = LU$$

Il sistema lineare diventa:

$$L\underbrace{U\underline{x}}_{\underline{y}} = \underline{b}$$

Introduciamo un nuovo vettore incognito

$$\underline{y} = U\underline{x}$$

il sistema di partenza si trasforma in una coppia di sistemi:

$$\begin{cases} L\underline{y} = \underline{b} \rightarrow \text{sistema triangolare inf.} \\ U\underline{x} = \underline{y} \rightarrow \text{sistema triangolare sup.} \end{cases}$$

- Dal primo sistema ricaviamo l'incognita $\underline{y}$ mediante l'algoritmo di sostituzione in avanti
- Dal secondo sistema ricaveremo poi la $\underline{x}$ mediante l'algoritmo di sostituzione all'indietro.

Questi due algoritmi hanno un costo complessivo di $2n^2$ flops e quindi trascurabile rispetto all'algoritmo di fattorizzazione LU, per n grande.

ALGORITMO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS

È possibile trasformare un sistema lineare $A\underline{x}=\underline{b}$ in uno equivalente $U\underline{x}=\underline{y}$ durante l'esecuzione dell'algoritmo che fattorizza A in forma LU. Infatti, posto $A_1 = A$ e $\underline{b}_1 = \underline{b}$ ripetiamo i passi della fatt. LU coinvolgendo anche il termine noto

PASSO 1: $$A_1\underline{x} = b_1 \qquad (\text{cioè } A\underline{x}=\underline{b})$$

premoltiplichiamo ambo i membri per L_1:

$$L_1 A_1 \underline{x} = L_1 \underline{b}_1$$

(L_1 è la stessa matrice definita al primo passo della fatt. LU)

$$\text{Si pone } A_2 = L_1 A_1 \quad e \quad b_2 = L_1 b_1$$

PASSO K al passo precedente abbiamo ottenuto

$$A_k \underline{x} = \underline{b}_k$$

Si premoltiplica primo e secondo membro per L_k

$$L_k A_k = L_k b_k$$

dove L_k è la medesima matr. el. di Gauss.

introdotta al k-esimo passo della fatt. LU. Quindi si pone: $A_{k+1} = L_k A_k$ e $b_{k+1} = L_k b_k$

All'ultimo passo $(n-1)$ avremo così ottenuto il sistema equivalente

$$A_n \underline{x} = \underline{b}_n$$

Mostriamo che questo sistema lineare è proprio $U\underline{x} = \underline{y}$ discusso precedentemente.

- Ovviamente $A_n = U$ (avendo ripetuto, sulla matrice A, i passi della fatt. LU).

- $\underline{b}_n = L_{n-1} \underline{b}_{n-1} = \dots = L_{n-1} L_{n-2} \cdot \dots \cdot L_1 \underline{b}_1$

  cioè:

$$b_n = L^{-1} b$$

$\left(\text{infatti } L = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdot \dots \cdot L_{n-1}^{-1} \right)$

Quindi $\underline{b}_n$ è proprio la soluzione del sistema lineare $L\underline{y} = \underline{b}$, quindi

$$\underline{b}_n \equiv \underline{y}$$

Dato un sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$, la matrice $[A, \underline{b}]$ è detta "matrice completa".

ESEMPIO Risolvere il seguente sistema lineare

$$
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 + x_4 = -1 \\
-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\
2x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 1 \\
-x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 2
\end{cases}
$$

Applichiamo l'algoritmo di eliminazione di Gauss alla matrice completa:

$$
[A_1 | b_1] = \begin{array}{c c}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\
2 & -3 & 0 & 2 & 1 \\
-1 & 2 & 0 & -2 & 2
\end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{array}
\end{array}
$$

$$
[A_2 | b_2] = \begin{array}{c c}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\
0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ 0 \end{array}
\end{array}
$$

$$
[A_3 | b_3] = \begin{array}{c c}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\
0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ \\ 0 \end{array}
\end{array}
$$

$[A_4 | b_4] = [A_3 | b_3]$

Abbiamo così ottenuto il seguente sistema triangolare superiore equivalente a quello di partenza:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -1 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_3 + x_4 = 2 \\ -x_4 = 1 \end{cases}$$

Applichiamo l'algoritmo di sostituzione all'indietro:

$x_4 = -1$

$x_3 = 3/2$

$x_2 = 2x_3 + x_4 + 1 = 2 \cdot \frac{3}{2} - 1 + 1 = 3$

$x_1 = 2x_2 - x_4 - 1 = 6$

La soluzione è

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

Utilizzare l'algoritmo di eliminazione di Gauss per risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

La matrice completa è:

$$[A_1|b_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 1 \\ -2 \end{array}$$

$$[A_2|b_2] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{3}{0} \text{ ??} \end{array}$$

L'algoritmo si arresta al secondo passo poiché abbiamo trovato un elemento pivotale nullo!!

In effetti il minore principale di testa di ordine 2 è

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

tuttavia $\det(A) \neq 0$

Essendo $\det(A) \neq 0$, la soluzione esiste ed è unica, ma l'algoritmo di eliminazione finora esposto non ci consente di calcolarla.

OSSERVAZIONE: Evidentemente, se permutiamo le equazioni di un sistema lineare, la soluzione non cambia. Pertanto, nell'esempio precedente, possiamo scambiare la seconda riga con la terza. Si ottiene:

$$[A_2' \mid b_2'] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$[A_3 \mid b_3] = [A_2' \mid b_2']$$

Si procede con la risoluzione del sistema triangolare superiore

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_2 - 7x_3 = -3 \\ 4x_3 = 1 \end{cases}$$

La tecnica che effettua lo scambio della riga a cui appartiene un eventuale elemento pivotale nullo con una riga sottostante è detta
"tecnica del pivot"
È possibile dimostrare che, se al passo k, l'elemento pivotale $a_{kk}^{(k)} = 0$, certamente esiste un elemento non nullo nella colonna k-esima al di sotto di $a_{kk}^{(k)}$, nell'ipotesi che la matrice A sia non singolare.

Tecnica del massimo pivot parziale

Quando lavoriamo sul calcolatore, conviene effettuare un eventuale scambio di righe anche quando l'elemento pivotale non risultane nullo.
In particolare, al passo k si determina un indice $s \in \{k, ..., n\}$

$$|a_{sk}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|$$

Individuiamo, cioè, l'elemento di massimo modulo tra:

$$\begin{bmatrix} a_{kk}^{(k)} \\ a_{k+1,k}^{(k)} \\ \vdots \\ a_{n,k}^{(k)} \end{bmatrix}$$

$a_{kk}^{(k)}$ → elemento pivotale

$a_{k+1,k}^{(k)}, \dots, a_{n,k}^{(k)}$: elementi sottostanti

e s è l'indice di riga di appartenenza dell'elemento di massimo modulo

- se $s = k$

  NON SI EFFETTUANO SCAMBI DI RIGA

- se $s > k$

  SI SCAMBIA LA RIGA k CON LA RIGA s

Tale tecnica, denominata "tecnica del massimo pivot parziale", rende più stabile l'algoritmo di eliminazione di Gauss.

N.B. Se lavoriamo in $\mathbb{R}$ (anziché in $\mathbb{F}$) possiamo effettuare lo scambio solo se necessario!!

ESERCIZIO: Implementare, in Python/Matlab l'algoritmo di eliminazione di Gauss con tecnica del massimo pivot parziale.

Suggerimento (Python): AL PASSO k:

```
s = k
piv = abs(A[k,k])
for i in range(k+1, n)
    if (abs(A[i,k]) > piv)
        s = i
        piv = abs(A[i,k])

if (s != k)
```

EFFETTUARE LO SCAMBIO

riga k di A ⟷ riga s di A

elemento k di b ⟷ elemento s di b

FATTORIZZAZIONE LU CON TECNICA DEL PIVOT

La tecnica del pivot o del massimo pivot parziale può essere applicata anche per la fattorizzazione di una matrice in forma LU.

Matrici di permutazione

Una matrice di permutazione è una matrice P ottenuta permutando un certo numero di righe o colonne della matrice identica I

ESEMPIO: Determinare le matrici di permutazione di dimensione $n=3$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad P_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In generale, esisteranno $n!$ matrici di permutazione di dimensione n

OSSERVAZIONE: Siano date

$A \rightarrow$ matrice generica $n \times n$

$P \rightarrow$ matrice di permutazione

Allora:

- Premoltiplicare una matrice A per una matrice di permutazione P ha l'effetto di permutare le righe di A secondo quanto descritto dalla matrice P

ESEMPIO:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A}$$

$$PA = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

- Analogamente l'azione del prodotto AP è quella di permutare le colonne di A.

PROPRIETÀ Se P è una matrice di permutazione, allora P è non singolare e risulta:

$$P^{-1} = P^T$$

Teorema (di fatt. LU con pivot)

Sia A una matrice quadrata di dimensione n. Allora:

$\exists\, P$ matrice di permutazione

$\exists\, L$ matrice triang. inf. speciale

$\exists\, U$ matrice triang. sup.

tali che

$$PA = LU$$

DIM viene omessa.

DETTAGLI TECNICI (UTILI PER L'IMPLEMENTAZIONE)

Conviene memorizzare gli eventuali scambi di righe all'interno di un vettore $\underline{p}$

Inizialmente

$$\underline{p} = [1, 2, \ldots, n]$$

Se al passo k si effettua lo scambio tra la riga k e la riga s dobbiamo:

1) Scambiare gli analoghi elementi del vettore $\underline{p}$

2) Scambiare i moltiplicatori della riga k con quelli della riga s precedentemente calcolati.

Alla fine il vettore $\underline{p}$ degli scambi ci consentirà di definire la matrice di permutazione P. Alternativamente, in luogo del vettore $\underline{p}$, si può direttamente considerare una matrice P che inizialmente sarà la matrice identica I.

CALCOLO DELL'INVERSA MEDIANTE FATTORIZZAZIONE LU

PROBLEMA: data una matrice A non singolare, determinare A^{-1} (inversa di A)

OSSERVAZIONE: A^{-1} risolve il seguente sistema lineare avente come incognita una matrice X:

$$A \underbrace{X}_{\text{matrice incognita}} = \underbrace{I}_{\text{matrice identica}}$$

Partizioniamo le matrici X e I per colonne:

$$\underline{X} = [\underbrace{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n}_{\text{colonne (incognite) di } \underline{X}}]$$

$$I = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_i & \underline{e}_n \end{array} \end{array}$$

quindi $\underline{e}_i = [0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{i-esimo elemento}}, 0 \dots 0]^T$

Il sistema da risolvere diventa:

$$A\,[\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n] = [\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n]$$

$$[A\underline{x}_1, A\underline{x}_2, \dots, A\underline{x}_n] = [\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n]$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall j = 1, \dots, n : \quad A\,\underline{x}_j = \underline{e}_j$$

Conviene fattorizzare A in forma LU

(anche con tecnica del max. pivot parziale) e, successivamente, risolvere le n coppie di sistemi triangolari

$$\begin{cases} L\,\underline{y}_i = \underline{e}_i \\ U\,\underline{x}_i = \underline{y}_i \end{cases}, \qquad i = 1, \dots, n$$

OSSERVAZIONE Consideriamo un sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ e supponiamo di ottenere la fattorizzazione LU con pivot di A:

$$PA = LU$$

Da $A\underline{x} = \underline{b}$ otteniamo il sistema lineare equivalente:

$$PA\,\underline{x} = P\underline{b}$$

Posto $\underline{c} = P\underline{b}$, occorre quindi risolvere:

$$LU\,\underline{x} = \underline{c}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} L\,\underline{y} = \underline{c} \\ U\,\underline{x} = \underline{y} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE: anche per la costruzione dell'inversa è possibile evitare il calcolo esplicito di I_n implementando l'algoritmo di eliminazione di Gauss.

ESEMPIO

Determinare l'inversa della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Occorre risolvere $AX = I$. Per applicare l'algoritmo di eliminazione di Gauss partiamo dalla matrice completa:

$$[A_1, B_1] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ -2 \\ 0 \end{array}$$

$$[A_2, B_2] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ 2/3 \end{array}$$

$$[A_3, B_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right]$$

Risolviamo i tre sistemi lineari:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_2 - x_3 = -2 \\ \frac{1}{3} x_3 = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$x_3 = -4$; $x_2 = -2$; $x_1 = -1$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 1 \\ \frac{1}{3} x_3 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$x_3 = 2$; $x_2 = 1$; $x_1 = 1$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \\ \frac{1}{3} x_3 = 1 \end{cases}$$

$x_3 = 3$; $x_2 = 1$; $x_1 = 1$

Dunque:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Verifica:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

FUNZIONI PREDEFINITE PER IL CALCOLO DELLA FATT. LU e SUE APPLICAZIONI IN AMBIENTE PYTHON

- FATT. LU

```
import scipy
```

il modulo scipy contiene un modulo di nome linalg (linear algebra)

```
[P, L, U] = scipy.linalg.lu(A)
```

realizza la fatt. LU con pivot di A:

N.B. $$A = PLU$$

Per riportarla alla forma da noi trattata:

$$\underbrace{P^T}A = LU$$

è la nostra matrice di permutazione

- CALCOLO DEL DETERMINANTE

```
scipy.linalg.det(A)
```

- CALCOLO DELL' INVERSA

```
B = scipy.linalg.inv(A)
```

- RISOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE

```
x = scipy.linalg.solve(A, b)
```

OSSERVAZIONE

Le funzioni sopra elencate, a eccezione di quella che calcola la fatt. LU, sono anche implementate nel modulo linalg di numpy

ESEMPIO

```
from numpy import *

linalg.det(A)
linalg.inv(A)

linalg.solve(A, b)
```

FUNZIONI PREDEFINITE PER IL CALCOLO DELLA FATT. LU e SUE APPLICAZIONI IN AMBIENTE MATLAB

- $$[L, U, P] = lu(A)$$

effettua la fattorizzazione LU con pivot di A:

$$PA = LU$$

Nota:

$$[L, U] = lu(A)$$

genera una matrice L_1 che è prodotto di una matrice di permutazione e di una matrice triangolare inferiore speciale, e una matrice triangolare superiore, tali che

$$A = L_1 U$$

In pratica, è come riscrivere la fattorizzazione con pivot $PA = LU$ nella forma

$$A = P^T L U$$

e accorpare $P^T L$ nella L_1 che ci restituisce il Matlab.

- Calcolo del determinante

det(A) restituisce il determinante
della matrice (quadrata) A

- Calcolo dell'inversa

inv(A) restituisce l'inversa
della matrice (non singolare) A

- Risoluzione di un sistema lineare

A \ b

risolve il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$