Spazi lineari

Felice Iavernaro

Dipartimento di Matematica
Università di Bari

4 Dicembre 2017

Definizione di spazio vettoriale reale

Definizione

Siano V un insieme e

$$+ : V \times V \longrightarrow V \qquad \textit{legge di composizione interna o binaria}$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V \qquad \textit{legge di composizione esterna}$$

La terna $(V, +, \cdot)$ è detta spazio vettoriale se verifica le seguenti proprietà:

1) $(V, +)$ *è un gruppo abeliano;*
2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall v \in V:\ (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v;$
3) $\forall \alpha, \in \mathbb{R},\ \forall u, v \in V:\ \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v;$
4) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall v \in V:\ \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v;$
5) $\forall v \in V:\ 1 \cdot v = v.$

PROPRIETÀ:

a) $\alpha \cdot v = 0 \iff \alpha = 0$ oppure $v = 0$
b) $(-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v)$

Alcuni esempi

1) $V = \mathbb{R}$ (oppure $V = \mathbb{C}$);
2) $V = \mathbb{R}^n$ (oppure $V = \mathbb{C}^n$) (insieme dei vettori reali o complessi);
   se $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ e $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$
   allora:
   $\mathbf{x} + \mathbf{y} = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n]^T$,
   e
   $\alpha \cdot \mathbf{x} = [\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n]^T$.
3) $V = \mathbb{R}^{m \times n}$ (oppure $V = \mathbb{C}^{m \times n}$); (insieme delle matrici reali o complesse con m righe ed n colonne);
   se $A = \{a_{ij}\}$ e $B = \{b_{ij}\}$
   allora:
   $A + B = \{a_{ij} + b_{ij}\}$,
   e
   $\alpha \cdot A = \{\alpha a_{ij}\}$.

Alcuni esempi

4) $V = C([a,b])$ (insieme delle funzioni continue nell'intervallo $[a,b]$);
è uno spazio vettoriale munito delle seguenti leggi di composizione:
   - $f, g \in C([a,b]) : f + g = x \mapsto f(x) + g(x)$
   - $\alpha \in \mathbb{R}, f \in C([a,b]) : \alpha \cdot f = x \mapsto \alpha f(x)$

5) $V = C^k([a,b])$ (insieme delle funzioni derivabili k volte in $[a,b]$ con derivata k-esima continua nell'intervallo $[a,b]$);
è uno spazio vettoriale munito delle stesse leggi di composizione viste sopra.

6) $V = P_n$; (insieme dei polinomi di grado al più n).
se $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ e $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$
allora:
$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$,
e
$\alpha p(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \cdots + \alpha a_n x^n$.

Combinazione lineare di vettori

Definizione

Siano $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, con V sp. vettoriale. Si definisce combinazione lineare di tali vettori ogni elemento v di V della forma:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

OSSERVAZIONE

Scegliamo $V = \mathbb{R}^m$. Considerata la matrice $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ le cui colonne sono i vettori v_i ed il vettore colonna $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$ allora evidentemente

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = A\mathbf{x}$$

Lineare indipendenza

Definizione

I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ *si dicono linearmente dipendenti se esiste una combinazione lineare nulla dei vettori* v_i *con coefficienti non tutti nulli:*

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ non tutti nulli, tale che} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0.$$

Definizione

I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ *si dicono linearmente indipendenti se non sono linearmente dipendenti, cioè:*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0.$$

cioè l'unica combinazione lineare nulla dei vettori v_i *è quella con coefficienti tutti nulli.*

Lineare indipendenza e rango

Consideriamo il caso $V = \mathbb{R}^m$.

Proposizione

Sono equivalenti le seguenti proposizioni:

(a) $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ *sono linearmente indipendenti;*

(b) $rank([v_1, v_2, \dots, v_n]) = n \equiv$ *(num. colonne della matrice)* lin indip

Per la dimostrazione si vedano gli appunti della relativa lezione.

Base di uno spazio vettoriale

Definizione

I vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ *costituiscono un sistema di generatori di* V *se ogni elemento dello spazio* V *può esprimersi come combinazione lineare dei vettori* v_i*, cioè:*

$$\forall v \in V \ \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \ t.c. \quad v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

ovvero equivalentemente

$$V = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \ \text{al variare di } \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

Definizione

Un insieme di vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ *costituisce una base di* V *se verifica le seguenti proprietà:*

(a) $v_i, \ i = 1, \dots, n$ *sono linearmente indipendenti;*

(b) $v_i, \ i = 1, \dots, n$ *formano un sistema di generatori.*

Proprietà delle basi

Teorema

Ogni spazio vettoriale V ammette una base. Due basi di uno stesso spazio vettoriale V hanno la stesso numero di elementi (finito o infinito) che prende il nome di dimensione dello spazio vettoriale V e si indica con $\dim(V)$.

Proposizione

Sono equivalenti le seguenti proposizioni:

(a) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *costituiscono una base di* V*;*

(b) *ogni elemento di V può esprimersi in maniera univoca come combinazione lineare dei v_i, cioè:*

$$\forall v \in V \exists | \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \quad v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Per la dimostrazione si vedano gli appunti della relativa lezione.

Esempi di basi

- $\mathbb{R}^n$ ha dimensione n. La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

  che sono le colonne della matrice identica I.

- Lo spazio vettoriale P_n dei polinomi di grado al più n ha dimensione $n+1$. Infatti un polinomio di grado n:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

  non è altro che una combinazione lineare delle potenze

$$x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n$$

  cioè la base delle potenze.

~~Esercizio: Dimostrare la seguente proprietà~~

Proposizione

Sono equivalenti le due proposizioni:

- *(a) $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ costituiscono un sistema di generatori di $\mathbb{R}^m$;*
- *(b) $rank([v_1, v_2, \ldots, v_n]) = m \equiv$ (num. di righe della matrice)*

SUGGERIMENTO. Riformulare il problema in termini algebrici. Porre $A = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$, $x = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]^T$. Ricordando che Ax è la generica combinazione lineare dei vettori v_i, si ha che $v_1, v_2, \ldots, v_n$ costituiscono un sistema di generatori di $\mathbb{R}^m$ se e solo se il sistema lineare $Ax = v$, dove v è un generico vettore di $\mathbb{R}^m$, risulta sempre compatibile. Applicare quindi il Teorema di Rouché-Capelli.

OSSERVAZIONE. Dalla proposizione segue che, essendo il rango di una matrice $\leq$ al minimo tra le sue dimensioni, una condizione necessaria perché valga la (a) è che $n \geq m$. Quindi, ad esempio, due vettori di $\mathbb{R}^3$ non potranno mai generare $\mathbb{R}^3$.

DOMANDA: quando $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ formeranno una base di $\mathbb{R}^m$?

Norme su spazi vettoriali

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale reale. Si dice norma un'applicazione

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

che verifica le seguenti proprietà (dette assiomi di norma):

(a) $\forall v \in V : \ \|v\| \geq 0 \quad e \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(b) $\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \ \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

(c) $\forall u, v \in V : \ \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(disuguaglianza triangolare).*

La coppia $(V, ||\cdot||)$ è detta spazio normato

Ogni norma induce canonicamente una distanza. Se $u, v \in V$:

$$d(u, v) = ||u - v|| \quad \text{(distanza tra } u \text{ e } v\text{)}$$

Norme su vettori ($V = \mathbb{R}^n$)

Sia $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ un vettore.

- $|| \cdot ||_2$ Norma 2 (o norma euclidea).

$$||\mathbf{x}||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \qquad \text{in Python: } >>> linalg.norm(x)$$

- $|| \cdot ||_1$ Norma 1.

$$||\mathbf{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{in Python: } >>> linalg.norm(x, 1)$$

- $|| \cdot ||_\infty$ Norma infinito.

$$||\mathbf{x}||_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| \qquad \text{in Python: } >>> linalg.norm(x, inf)$$

Norme su matrici ($V = \mathbb{R}^{m\times n}$)

Ogni norma vettoriale induce una norma matriciale. Sia $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ una matrice con m righe ed n colonne e consideriamo una norma su vettori $||\cdot||$. La norma matriciale indotta è così definita:

$$||A|| = \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\mathbf{x}\neq 0} \frac{||A\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||}$$

In effetti si può dimostrare che tale quantità risulta finita, e l'applicazione

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n} \mapsto ||A|| \in \mathbb{R}$$

che alla matrice A associa lo scalare $||A||$ soddisfa agli assiomi di norma.

Norma infinito, norma 1, e norma 2

Piuttosto che calcolare il massimo, è possibile descrivere una norma matriciale indotta in termini dei suoi elementi

$$||A||_\infty = \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, \mathbf{x}\neq 0} \frac{||A\mathbf{x}||_\infty}{||\mathbf{x}||_\infty} = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$||A||_1 = \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, \mathbf{x}\neq 0} \frac{||A\mathbf{x}||_1}{||\mathbf{x}||_1} = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$||A||_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

dove ρ denota il raggio spettrale di una matrice quadrata (ovvero il massimo tra i moduli dei suoi autovalori)

Alcune proprietà delle norme matriciali indotte

- $\forall \mathbf{x}$ vettore : $\quad ||A\mathbf{x}|| \le ||A||\,||\mathbf{x}||$ (compatibilità)
- $\forall A, B : \quad ||A\,B|| \le ||A||\,||B||$ (disuguaglianza di Schwartz)
- $||I|| = 1$ (I matrice identica)
- se Q è una matrice unitaria (cioè $Q^T Q = I$), allora $||Q||_2 = 1$.

Condizionamento dei sistemi lineari

Si consideri il sistema lineare di n equazioni in n incognite

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Sappiamo che il sistema ammette un'unica soluzione se $\det(A) \neq 0$. Possiamo pensare a questo sistema come ad un problema i cui dati di input sono la matrice dei coefficienti A ed il vettore dei termini noti $\mathbf{b}$ ed il cui dato di output è il vettore soluzione $\mathbf{x}$.

Nel risolvere questo sistema sul calcolatore non otterremo, in generale, la soluzione esatta: ciò è dovuto al fatto che il calcolatore, disponendo di memoria finita, fa uso di un'aritmetica di macchina (o finita) che differirà dall'aritmetica reale. In particolare, in fase di immissione dei dati, i coefficienti reali a_{ij} e b_i verranno rappresentati mediante numeri di macchina e conseguentemente si potrebbero generare degli errori di rappresentazione.

Condizionamento dei sistemi lineari

Il calcolatore risolverà un sistema perturbato della forma:

$$(A + \delta A)(\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{b}.$$

dove:

- δA è una matrice di perturbazione;
- $\boldsymbol{\delta}\mathbf{b}$ è un vettore di perturbazione;
- $\mathbf{x}$ è la soluzione del sistema non perturbato ($\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$);
- $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}$ è la perturbazione indotta sul risultato (dato di output) a causa delle perturbazioni in input (δA e $\boldsymbol{\delta}\mathbf{b}$)

~~DOMANDA: come influiranno le perturbazioni in input sul risultato~~?

Condizionamento dei sistemi lineari

Studiare il condizionamento di un problema significa analizzare in che misura le perturbazioni sui dati di input incidono sul risultato. Nel nostro caso occorrerà relazionare l'errore relativo in output con gli errori relativi in input:

$$\frac{||\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||} \sim \frac{||\delta A||}{||A||}, \frac{||\boldsymbol{\delta}\mathbf{b}||}{||\mathbf{b}||}$$

avendo supposto $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

OSSERVAZIONE: $||\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}||$ è la distanza tra la soluzione del sistema perturbato e quella del sistema non perturbato.

Determineremo tale relazione nel caso più semplice in cui la perturbazione è introdotta solo sul vettore dei termini noti.

Condizionamento dei sistemi lineari

$$\begin{cases} A\mathbf{x} \quad + A\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} & = \mathbf{b} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{b} \qquad \text{sistema perturbato} \\ A\mathbf{x} & = \mathbf{b} \qquad\qquad\; \text{sistema non perturbato} \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro otteniamo:

$$A\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} = \boldsymbol{\delta}\mathbf{b} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\delta}\mathbf{x} = A^{-1}\boldsymbol{\delta}\mathbf{b}$$

Passando alle norme:

$$||\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}|| = ||A^{-1}\boldsymbol{\delta}\mathbf{b}|| \le ||A^{-1}||\,||\boldsymbol{\delta}\mathbf{b}||$$

Inoltre da $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, passando alle norme si ottiene:

$$||\mathbf{b}|| = ||A\mathbf{x}|| \le ||A||\,||\mathbf{x}|| \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{||\mathbf{x}||} \le \frac{||A||}{||\mathbf{b}||}$$

Combinando le due disuguaglianze ottenute, ricaviamo:

$$\frac{||\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||} \le ||A||\,||A^{-1}||\,\frac{||\boldsymbol{\delta}\mathbf{b}||}{||\mathbf{b}||}$$

Condizionamento dei sistemi lineari

La quantità

$$\mu(A) = ||A||\,||A^{-1}||$$

è detta *numero di condizionamento* della matrice A. Quindi:

$$\frac{||\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||} \leq \mu(A)\,\frac{||\boldsymbol{\delta}\mathbf{b}||}{||\mathbf{b}||}$$

$\mu(A)$ rappresenta il *coefficiente di amplificazione* dell'errore in input:

- se $\mu(A)$ è "moderatamente piccolo", il sistema sarà ben condizionato;
- se $\mu(A)$ è "grande", il sistema sarà mal condizionato, ovvero le piccole perturbazioni in input possono generare grandi errori in output.

OSSERVAZIONE: $\mu(A) \geq 1$. Infatti:

$$1 = ||I|| = ||AA^{-1}|| \leq ||A||\,||A^{-1}|| = \mu(A)$$

Esempio di sistema mal condizionato

$$\begin{cases} (1-\varepsilon)x_1 - 2x_2 = 1 \\ -x_1 + (2+\varepsilon)x_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

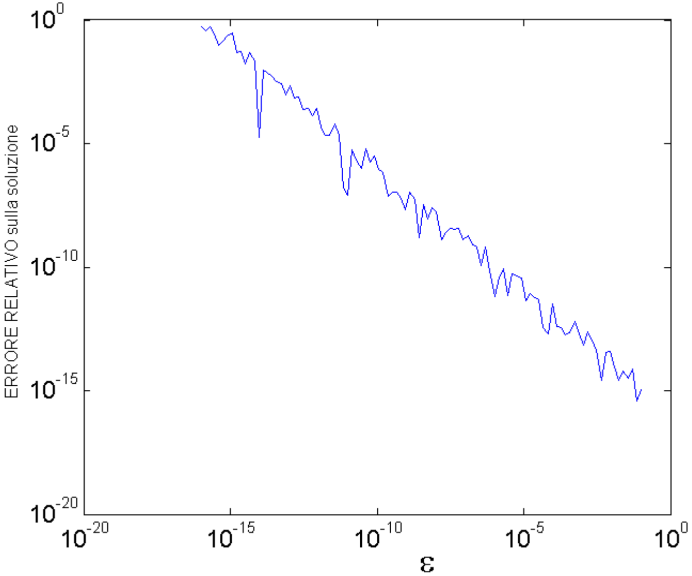
con ε parametro reale che faremo tendere a zero.
Si studi il condizionamento del sistema al variare di ε.
[Ris. Il sitema è mal condizionato per $\varepsilon \simeq 0$ oppure $\varepsilon \simeq -1$]

OSSERVAZIONE:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{agg}(A)$$

quindi se $\det(A) \simeq 0$, $||A^{-1}|| \gg 1 \Rightarrow \mu(A) \gg 1$.

Esempio di sistema mal condizionato



Sottospazi

Definizione

Siano $(V, +, \cdot)$ *uno spazio vettoriale ed* $S \subset V$.
Si dirà che S *è un sottospazio vettoriale di* V *se, munito delle due leggi di composizione* $+$ *e* $\cdot$, S *risulta uno spazio vettoriale.*

OSSERVAZIONE
In pratica $S \subset V$ sarà un sottospazio vettoriale se:

1) $\forall u, v \in S: \; u + v \in S$ (ovvero S è stabile rispetto a $+$)
2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in S: \; \lambda \cdot v \in S$ (ovvero S è stabile rispetto a $\cdot$)

La 1) e la 2) in forma compatta si scriveranno:

$$S + S \subset S, \qquad \mathbb{R} \cdot S \subset S$$

In parole: sommando due elementi di S si ottiene un elemento di S; moltiplicando uno scalare per un elemento di S si ottiene ancora un elemento di S.

Esempi di sottospazi

- Sottospazio nullo.
  $S = \{0\}$, ovvero il sottoinsieme ridotto al solo elemento nullo, è un sottospazio vettoriale. In effetti: $0 + 0 = 0 \in S$ e $\lambda \cdot 0 = 0 \in$S.$\{0\}$ è detto sottospazio nullo.
- Sottospazio generato da un insieme di elementi di V.
  Siano $v_1, v_2, \ldots, v_k$, k elementi di V e consideriamo l'insieme S formato dalle combinazioni lineari di questi elementi:

  $$S = \{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i, \text{ al variare di } \alpha_i \in \mathbb{R}\}.$$

  S è un sottoinsieme di V che risulta stabile rispetto a $+$ e $\cdot$ (verificarlo per esercizio). S prende il nome di *sottospazio generato* dai vettori $v_i, i = 1, \ldots, k$ e si denota con $\text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$.

  Tali vettori quindi rappresenteranno un sistema di generatori per S: ulteriormente se essi risultano linearmente indipendenti, allora rappresenteranno una base per S e quindi $\dim(S) = k$.

  DOMANDA: Consideriamo k vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$, ed $S = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. Sia poi $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Dire se $\mathbf{v} \in S$.

Nucleo di un'applicazione lineare

PREMESSA: una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ può essere riguardata come un'applicazione da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$:

$$A := \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbf{y} = A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$$

Tale applicazione risulta lineare: $A(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha A\mathbf{x} + \beta A\mathbf{y}$.

Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$:

$$\ker(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

risulta stabile rispetto a $+$ e $\cdot$ (verifica per esercizio) e pertanto è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.
$\ker(A)$ prende il nome di *nucleo* di A.

Immagine (o range) di una matrice

Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^m$:

$$\mathrm{Im}(A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m | \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \mathbf{y} = A\mathbf{x}\}$$

risulta stabile rispetto a $+$ e $\cdot$ (verifica per esercizio) e pertanto è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$. $\mathrm{Im}(A)$ prende il nome di *immagine* di A.

OSSERVAZIONE: $Im(A)$ risulta il sottospazio generato dalle colonne di A, cioè, partizionando A per colonne: $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]$, risulta:

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\},$$

Per rendersene conto, basta osservare che il prodotto $A\mathbf{x}$, con $\mathbf{x}$ generico, rappresenta una generica combinazione lineare delle colonne di A.

DEFINIZIONE ALTERNATIVA DI RANGO:

$$\mathrm{rank}(A) = \dim(Im(A)) \equiv \text{ num. di colonne lin. indip. di } A$$

Sottospazio ortogonale

PREMESSA: Due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$.

Definizione

Siano V sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ una sua base. Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$

$$V^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x}^T\mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V\} \subset \mathbb{R}^n$$

risulta essere un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ (verifica per esercizio). $V^\perp$ è detto sottospazio ortogonale di V.

Sottospazio ortogonale

Per stabilire se $\mathbf{x} \in V^{\perp}$ è sufficiente fare il test di ortogonalità solo sugli elementi della base di V; infatti:

$$\mathbf{x} \in V^{\perp} \Leftrightarrow \mathbf{x}^T \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i \right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}^T \mathbf{v}_i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x}^T \mathbf{v}_i = 0, \\ \forall i = 1, \dots, k \end{cases}$$

In forma compatta possiamo scrivere:

$$\mathbf{x} \in V^{\perp} \Longleftrightarrow A^T \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

infatti

$$A^T = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_k^T \end{pmatrix}$$

Dunque

$$V^{\perp} = \ker(A^T)$$

Sottospazio ortogonale

Qual è la dimensione di $V^{\perp}$?

Sappiamo che V ha dimensione k (essendo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ linearmente indipendenti). Dunque risulta

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T) = k$$

Come abbiamo visto, dire che $\mathbf{x} \in V^{\perp}$ significa

$$A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Per il teorema di Rouché-Capelli, tale sistema sistema ammetterà infinito alla *num. di incognite* - $\text{rank}(A^T)$ soluzioni, e quindi possiamo concludere

$$\dim(V^{\perp}) = n - k = n - \dim(V)$$

Proprietà di $V^\perp$

[redacted]

Siano V e W sottospazi di $\mathbb{R}^n$. [redacted]:

1) $V \cap W$ è un sottospazio vettoriale;
2) $V + W$ è un sottospazio vettoriale, ricordando che:

$$V + W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w}, \quad \text{con} \quad \mathbf{v} \in V \text{ e } \mathbf{w} \in W\}$$

PROPRIETÀ

Sia V sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ una sua base. [redacted]:

1) $V \cap V^\perp = \{\mathbf{0}\}$
2) $V + V^\perp = \mathbb{R}^n$

Somma diretta

Definizione

Siano V *e* W *sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}^n$. *Si dice che* $\mathbb{R}^n$ *è somma diretta di* V *e* W *e si scrive*

$$\mathbb{R}^n = V \oplus W$$

se

1) $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$
2) $V + W = \mathbb{R}^n$

Proposizione

Se $\mathbb{R}^n = V \oplus W$, *ogni* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *può essere rappresentato in maniera univoca come somma di un elemento di* V *ed un elemento di* W, *cioè:*

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \exists | \mathbf{v} \in V, \exists | \mathbf{w} \in W \quad \textit{tali che} \quad \mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w}.$$

Ne segue quindi che:

$$\mathbb{R}^n = V \oplus V^{\perp}$$