RANGO DI UNA MATRICE

DEF Il rango di una matrice A è l'ordine massimo dei minori non nulli estraibili da A.

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Essendoci elementi non nulli, $\text{rank}(A) \geq 1$.
Vediamo se A ammette minori di ordine 2 non nulli. I minori di ordine 2 sono:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Quindi il rango di A è 1:

$$\text{rank}(A) = 1$$

PROPRIETÀ

Sia $A_{m \times n}$

1) $\text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$

2) $\text{rank}(O) = 0$

e, per convenzione, poniamo

$$\text{rank}([\,]) = 0$$

3) se A è quadrata, di dim. n

A è non singolare $\iff \text{rank}(A) = n$

4) $\text{rank}(A) = p$

$$\Updownarrow$$

- $\exists$ un minore di ordine p non nullo
- e tutti i minori di ordine $> p$ sono nulli

5) Permutando le righe e/o le colonne di una matrice, il suo rango non cambia:

$$\text{rank}(PA) = \text{rank}(AP) = \text{rank}(A)$$

essendo P una qualsiasi matrice di permutazione

6) Aggiungendo a una riga di A una combinazione lineare di altre righe, il rango rimane invariato. Risultato analogo per le colonne

MATRICI RIDOTTE A SCALINI

DEF Una matrice si dice "ridotta a scalini" ("echelon form") se il primo elemento non nullo di ciascuna riga si trova a destra del primo elemento non nullo della riga precedente.

ESEMPI

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A è ridotta a scalini.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B è triangolare superiore ma non è ridotta a scalini. In generale, una matrice ridotta a scalini è triang. sup. ma non vale il viceversa.

COLONNE LIBERE

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

COLONNE PIVOTALI

A è ridotta a scalini.

NOTAZIONE: I primi elementi non nulli di ciascuna riga sono detti "elementi pivotali". Le colonne corrispondenti sono dette "colonne pivotali". Le rimanenti colonne sono dette "colonne libere".

OSSERVAZIONE: Consideriamo la seguente matrice ridotta a scalini:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Evidentemente, il rango di una matrice ridotta a scalini coincide con il numero di elementi (o di colonne) pivotali o, equivalentemente, il numero di righe non nulle.

Infatti, detto p il numero di elementi pivotali, la sottomatrice quadrata di dimensione p triangolare superiore avente come elementi diagonali gli elementi pivotali è certamente non singolare.
Inoltre, ogni altra sottomatrice quadrata di dimensione maggiore di p conterrebbe almeno una riga nulla e quindi sarebbe singolare.

Nell'esempio precedente possiamo concludere:

$$\text{rank}(A) = 2$$

e la sottomatrice di dim. 2 non singolare è, ad esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'algoritmo di fattorizzazione LU (con pivot) può essere opportunamente modificato in modo da ridurre una generica matrice A a scalini. Introduciamo questa variante mediante un esempio.

ESEMPIO: Ridurre a scalini la seguente matrice:

$$A_1 = A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{array}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Scambiamo seconda e terza riga (tecnica del pivot)

$$A'_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ 0 \\ 1 \end{array}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -2 \end{matrix}$$

VARIANTE:

Se, a un certo passo, incontriamo un elemento pivotale nullo e sono nulli tutti gli elementi sottostanti, il nuovo elemento pivotale si dovrà cercare subito a destra dell'elemento pivotale corrente.

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Con l'aggiunta di questa variante si perviene al seguente risultato.

Teorema. Sia A una matrice generica $m \times n$.

Allora:

$\exists\, P$ $m \times m$ di permutazione

$\exists\, L$ $m \times m$ triang. inf. speciale

$\exists\, U$ $m \times n$ ridotta a scalini

tali che:

$$PA = LU$$

Negli esercizi e nelle applicazioni è spesso inutile costruire esplicitamente le matrici P e L.

OSSERVAZIONE. Siano

L $m \times m$ triang. inf. speciale

B $m \times n$ matrice generica

Consideriamo il prodotto LB

ESEMPIO con $m=4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & \cdots & b_{3n} \\ b_{41} & \cdots & b_{4n} \end{bmatrix}$$

- La prima riga di LB rimane inalterata
- Seconda riga di LB = (seconda riga di B) + $l_{21} \cdot$ (prima riga di B)
- terza riga di LB = (terza riga di B) + $l_{31} \cdot$ (prima riga di B) + $l_{32} \cdot$ (seconda riga di B)

In generale, la i-esima riga di LB si ottiene sommando alla i-esima riga di B una combinazione lineare di altre righe di B.

In base alla proprietà 6) vista all'inizio possiamo quindi concludere che:

$$\text{rank}(LB) = \text{rank}(B)$$

Inoltre, dalla proprietà 5) segue che

$$\text{rank}(PA) = \text{rank}(A)$$

se P è una matrice di permutazione

In conclusione possiamo dedurre il seguente risultato:

Con riferimento alla fatt. LU vista nel teorema precedente, si ottiene:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(PA) = \text{rank}(LU)$$
$$= \text{rank}(U)$$

Da questa osservazione, possiamo facilmente calcolare il rango di una generica matrice, una volta che l'abbiamo ridotta a scalini

Nell'esempio precedente: $\text{rank}(A) = 4$.

RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI GENERICI

Consideriamo un sistema lineare di m equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Le introduciamo:

$$A = \{a_{ij}\} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$ → matrice dei coefficienti

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ → vettore dei termini noti (di lunghezza m)

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ → vettore delle incognite (di lunghezza n)

Il sistema lineare si scrive in forma compatta: $A\underline{x} = \underline{b}$.

L'algoritmo di eliminazione di Gauss, con le varianti precedentemente introdotte, può essere utilizzato per:

1) Stabilire la compatibilità del sistema lineare (ricordiamo che un sistema lineare si dice "compatibile" se ammette soluzioni).

2) determinare le soluzioni di un sistema lineare compatibile.

Ricordiamo, ulteriormente, che due sistemi lineari si dicono "equivalenti" se ammettono lo stesso insieme di soluzioni.

L'algoritmo di eliminazione trasforma un sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ in uno equivalente $U\underline{x} = \underline{c}$ dove U è una matrice ridotta a scalini.

Esaminiamo una serie di esempi.

ESEMPIO 1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Consideriamo la matrice completa e riduciamola a scalini:

$$[A_1 | b_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -1 \\ -2 \end{array}$$

$$[A_2 | b_2] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -1 \end{array}$$

$$[A_3 | b_3] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Abbiamo ottenuto il sistema equivalente:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 0 = -1 \end{cases} \rightarrow \text{IMPOSSIBILE}$$

Il sistema non è compatibile.

Osserviamo che $\quad \text{rank}(A) = 2$

$$\text{rank}([A \mid b]) = 3$$

Evidentemente, il fatto che il rango della matrice completa sia superiore al rango della matrice dei coefficienti comporta, dopo l'algoritmo di riduzione a scalini, la comparsa di un'equazione della forma

$$0 = a, \quad \text{con } a \neq 0$$

che è un'equazione impossibile.

ESEMPIO 2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 \qquad - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$[A_1 \mid b_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -1 \\ -2 \end{array}$$

$$[A_2 \mid b_2] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -1 \end{array}$$

$$[A_3 \mid b_3] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Il sistema equivalente a

$$[A_3 | b_3] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

COLONNE PIVOTALI

COLONNA LIBERA

è:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

← IDENTITÀ (sempre verificata)

Se rimuoviamo l'identità otteniamo un sistema equivalente a quello di partenza con 2 equazioni e 3 incognite.

Si procede parametrizzando le incognite relative alle colonne libere (incognite libere).

Nel nostro caso la terza colonna è libera e conseguentemente parametrizziamo x_3.

Ciò significa riguardare x_3 non più come incognita ma come parametro:

$$x_3 = h \quad (h \text{ parametro reale})$$

Otteniamo il sistema triangolare superiore

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2h \\ -2x_2 = 1 - 3h \end{cases}$$

Si procede con l'algoritmo di sostituzione all'indietro:

$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}h$$

$$x_1 = 2h - x_2 = 2h + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}h = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}h$$

Le soluzioni sono infinite e dipendono dal parametro h:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che, in questo caso:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}([A \mid b]) = 2 \quad (< 3)$$

mentre il num. delle incognite $= 3$

CONCLUSIONE: La comparsa di un singolo parametro consegue dal fatto che

$$\#\text{incognite} - \text{rank}(A) = 1$$

Diremo che il sistema ammette

$$\infty^1 \text{ soluzioni}$$

$$\Updownarrow$$

le soluzioni sono infinite e dipendono da un solo parametro.

ESEMPIO 3 (sistema sovradeterminato)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 11 \\ x_1 - 4x_2 = -10 \\ 4x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases}$$

4 equazioni e solo 2 incognite

$$[A_1 | b_1] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 11 \\ 1 & -4 & -10 \\ 4 & -2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -1/2 \\ -1/2 \\ -2 \end{array}$$

$$[A_2 | b_2] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7/2 & 21/2 \\ 0 & -7/2 & -21/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

$$[A_3 | b_3] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7/2 & 21/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \text{IDENTITÀ}$$

Il sistema equivalente è:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ \frac{7}{2} x_2 = \frac{21}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

La soluzione è unica:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}([A|b]) = 2$$

$$\#\text{ incognite} = 2$$

$$\#\text{incognite} - \text{rank}(A) = 0$$

$$\infty^0 = 1 \text{ soluzione}$$

ESEMPIO 4 (sistema sottodeterminato)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

2 equazioni e 4 incognite.

$$[A_1|b_1] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] -2$$

$$[A_2|b_2] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & +2 & 3 \end{array}\right]$$

colonne pivotali

colonne libere

Parametrizziamo le incognite corrispondenti alle colonne libere:

$$x_3 = h \; ; \quad x_4 = k \qquad h, k \in \mathbb{R}$$

Il sistema equivalente è:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = k \\ \quad -3x_2 = 3 - h - 2k \end{cases}$$

$$x_2 = -1 + \frac{1}{3}h + \frac{2}{3}k$$

$$x_1 = -2x_2 + k = -2 - \frac{2}{3}h - \frac{4}{3}k + k = -2 - \frac{2}{3}h - \frac{1}{3}k$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{h}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{k}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

L'insieme delle soluzioni è infinito e dipende da due parametri.

Ci sono ∞^2 soluzioni

Osserviamo che:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}([A|b]) = 2$$

$$\#\text{incognite} = 4$$

$$\Downarrow$$

$$\#\text{incognite libere} = 2 \Rightarrow 2 \text{ parametri}$$

$$\infty^{\#\text{incognite} - \text{rank}(A)} = \infty^2$$

Teorema (di Rouché-Capelli)

Consideriamo il sistema lineare

(1) $$A\underline{x} = \underline{b}$$

di m equazioni e n incognite ($\Rightarrow A_{m \times n}$)

- Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema (1) sia compatibile è che la matrice dei coefficienti A e la matrice completa $[A|b]$ ammettano lo stesso rango:

(2) $$\text{rank}(A) = \text{rank}([A|b])$$

- Supponendo che la (2) sia vera e denotato con p il rank(A) (o ow $[A|b]$), il sistema (1) ammette ∞^{n-p} soluzioni, cioè ammette infinite soluzioni dipendenti da $n-p$ parametri.

DIM. Si riduce la matrice completa $[A|b]$ a scalini, ottenendo il sistema equivalente $[U|c]$.

La tesi discende dalla discussione fatta nel corso degli esempi precedenti $\square$

ESERCIZIO. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x - y + t = 1 \\ y + z - t = 1 \\ x - 2y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

Scriviamo la matrice completa e riduciamola a scalini

$$[A_1 | b_1] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 0 \\ -1 \end{array}$$

$$[A_2 | b_2] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ 1 \end{array}$$

$$[A_3 | b_3] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

COLONNE PIVOTALI COLONNE LIBERE

$$\text{rank}(A) = \text{rank}([A|b]) = 2$$

$$\Updownarrow$$

il sistema è compatibile e ammette $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni. Determiniamole.

Abbiamo ottenuto il sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - y + t = 1 \\ y + z - t = 1 \end{cases}$$

Parametrizziamo le incognite z e t che sono quelle relative alle colonne libere:

$$z = h \; ; \qquad t = k \; , \qquad h, k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 - k \\ y = 1 - h + k \end{cases}$$

Quindi:

$$y = 1 - h + k$$

$$x = y + 1 - k = 1 - h + k + 1 - k = 2 - h$$

Le soluzioni sono:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 1: Scrivere una funzione Python/Matlab che ha in input una matrice A generica e restituisce, in output, la ridotta a scalini di A.

ESERCIZIO 2: Scrivere una funzione Python/Matlab che ha in input una matrice generica A e, in output, il rango di A.
Questa funzione dovrà far uso della funzione al punto precedente