OSSERVAZIONE n° 1 : Interpretazione geometrica

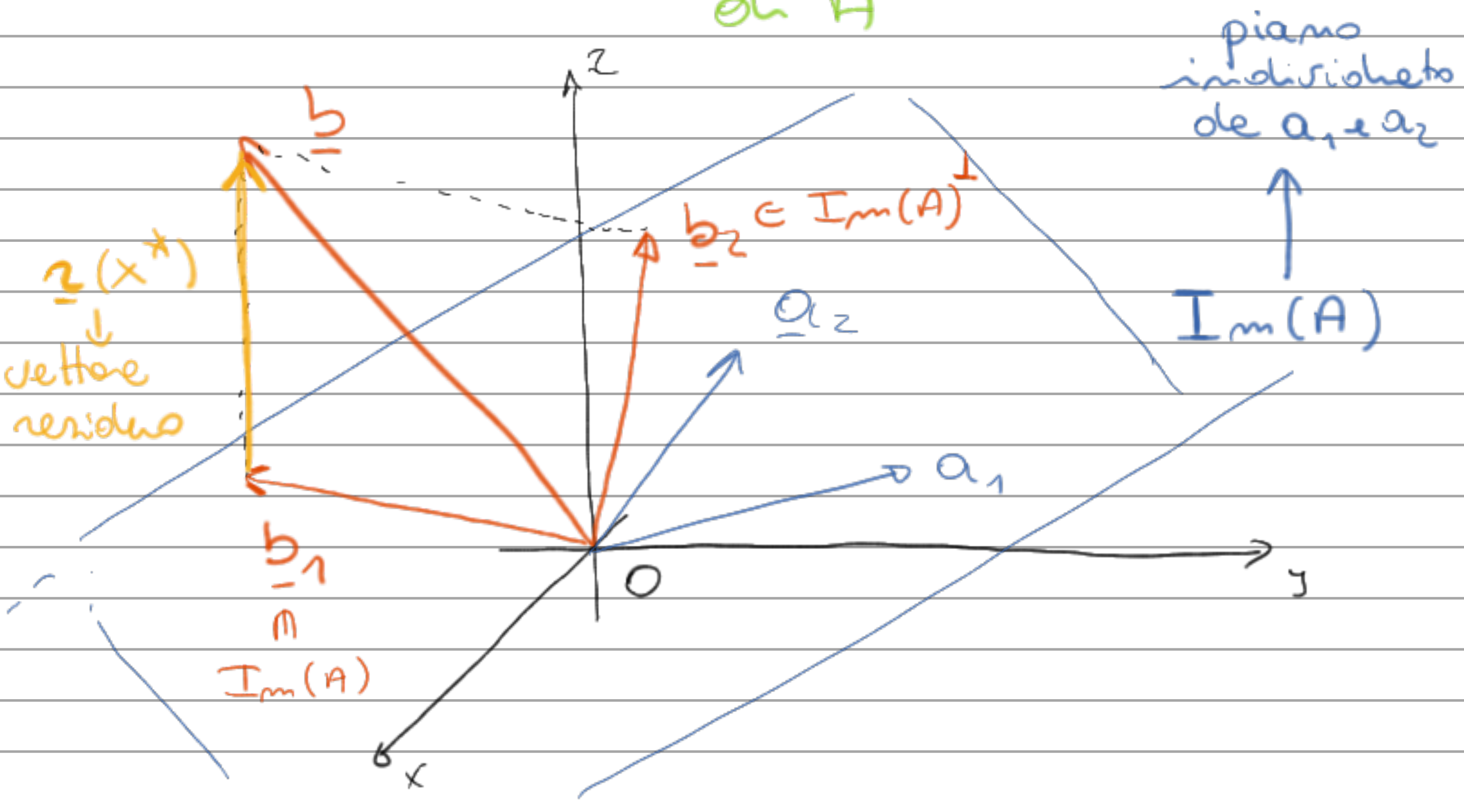
Per fissare le idee supponiamo $m=3$, quindi lo spazio ambiente è $\mathbb{R}^3$. Consideriamo

$$A\underline{x}=\underline{b} \qquad A_{3\times 2},\ b_{3\times 1}$$

$\text{rank}(A)=2 \iff$ le due colonne di A sono lin. indip.

$$\text{se } A=[\underline{a}_1, \underline{a}_2]$$

$$Im(A) = \underbrace{\{c_1\underline{a}_1+c_2\underline{a}_2,\ c_1,c_2\in\mathbb{R}\}}_{\text{spazio generato dalle colonne di A}}$$



Osservazione n°: 2

Sia $A_{m \times n}$, $m \geq n$ di rango massimo ($\text{rank}(A) = n$) e sia poi $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$.

Problema: vogliamo decomporre $\underline{b} = \underline{b}_1 + \underline{b}_2$ con $\underline{b}_1 \in Im(A)$ e $\underline{b}_2 \in Im(A)^{\perp} = Ker(A^T)$

Sappiamo dalla teoria che

$$\mathbb{R}^m = Im(A) \oplus Ker(A^T)$$

Quindi sappiamo che la decomposizione esiste ed è unica. Una maniera alternativa di procedere è di risolvere il problema dei minimi quadrati associato al sistema $A\underline{x} = \underline{b}$.

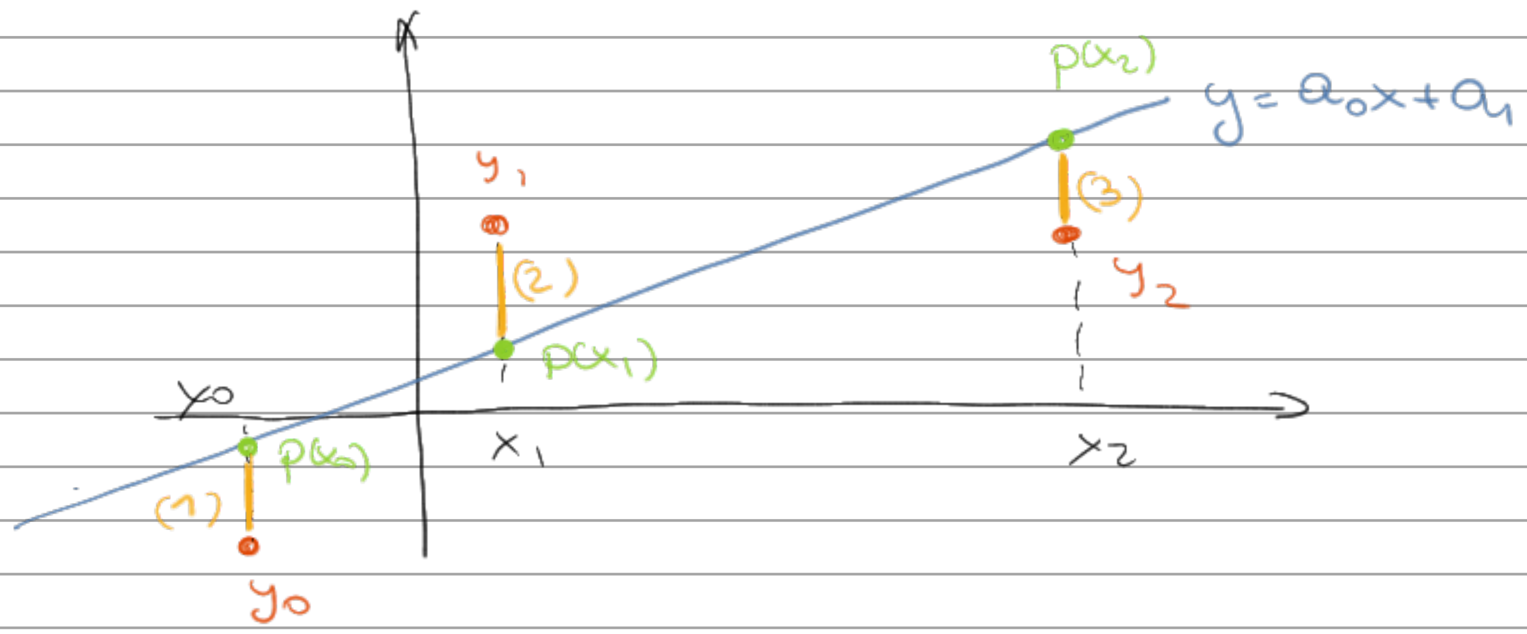
Se $\underline{x}^*$ è la soluzione, dalla dimostrazione nella slide 6, vediamo che

$$\underline{b}_1 = A x^*$$

e di conseguenza,

$$\underline{b}_2 = \underline{b} - \underline{b}_1$$

3 punti $(m=2)$; $P_1(x)=a_0x+a_1$ SLIDE 12



$$\underbrace{\|\underline{b}-A\underline{x}\|_2}_{\text{RADICE QUADRATA DELLA SOMMA DEI QUADRATI DELLE MISURE DEI SEGMENTI IN GIALLO}} = \sqrt{\underbrace{(p(x_0)-y_0)^2}_{(1)}+\underbrace{(p(x_1)-y_1)^2}_{(2)}+\underbrace{(p(x_2)-y_2)^2}_{(3)}}$$

ESONERO 2014-15 - TRACCIA n° 1

(1.a) $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti

$$\iff A = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3] \text{ è t.c. } \operatorname{rank}(A) = 3$$

$\uparrow$ num. colonne di A

$$A_1 = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \underline{v}_1 & \quad \underline{v}_2 & \quad \underline{v}_3 \end{array} & \end{array}$$

$$A_2 = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{array} \end{array}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 0 \\ -1 \end{matrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(A) = \text{rank}(A_4) = 3$ (# righe non nulle)

CONCLUSIONE: $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3$ sono lin. indip.

(1.b) Dal punto precedente abbiamo visto che $\text{rank}(A) = 3$ (massimo). Dalla teoria sappiamo che, in tal caso, il problema dei minimi quadrati ammette soluzione unica.

Ricaviamo il sistema normale

$$A^T A \underline{x} = A^T \underline{b}$$

$$A^T A =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 7 & 19 \\ 7 & 3 & 6 \\ 19 & 6 & 22 \end{bmatrix}$$

$$A^T \underline{b} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Procediamo con l'eliminazione di Gauss:

$$[A_1 | b_1] = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|c} 19 & 7 & 19 & 5 \\ 7 & 3 & 6 & 3 \\ 19 & 6 & 22 & 2 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ -\frac{7}{19} \\ -1 \end{array} \end{array}$$

$$[A_2 | b_2] = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|c} 19 & 7 & 19 & 5 \\ 0 & 8/19 & -1 & 22/19 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ 19/8 \end{array} \end{array}$$

$$[A_3|b_3] = \left[\begin{array}{ccc|c} 19 & 7 & 19 & 5 \\ 0 & 8/19 & -1 & 22/19 \\ 0 & 0 & 5/8 & -1/4 \end{array}\right]$$

Risolviamo il sistema triangolare superiore:

$$\begin{cases} 19x_1 + 7x_2 + 19x_3 = 5 \\ \frac{8}{19}x_2 - x_3 = \frac{22}{19} \\ \frac{5}{8}x_3 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$x_3 = -\frac{2}{5}$$

$$\frac{8}{19}x_2 = \frac{22}{19} - \frac{2}{5} = \frac{72}{19 \cdot 5}$$

$$x_2 = \frac{9}{5}$$

$$19x_1 = 5 - 7 \cdot \frac{9}{5} + 19 \cdot \frac{2}{5} = \frac{25 - 63 + 38}{5} = 0$$

$$x_1 = 0$$

La soluzione del prob. dei minimi quadrati è

$$\underline{x}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 9/5 \\ -2/5 \end{bmatrix}$$

(1.c) Dalla teoria sappiamo che

$\underline{b}_1 = A\underline{x}^*$ e di conseguenza $\underline{b}_2 = \underline{b} - \underline{b}_1$

$$\underline{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 9/5 \\ -2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 1 \\ 4/5 \\ 7/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4/5 \\ 1 \\ 4/5 \\ 7/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 1/5 \\ -2/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

(1.d) Osserviamo che

$$\underline{b}_1 = 0\,\underline{v}_1 + \frac{9}{5}\underline{v}_2 - \frac{2}{5}\underline{v}_3$$

quindi $\underline{b}_1 \in \text{span}\{\underline{v}_2, \underline{v}_3\}$