PRIMO ESONERO - Traccia n°: 1 - 20/11/2014

$$f(x) = x^3 - 1 ;$$

$$\phi_c(x) = x - (x^3-1)\,\frac{x-c}{x^3-c^3}$$

$$= x - (x^3-1)\,\frac{\cancel{x-c}}{\cancel{(x-c)}(x^2+cx+c^2)}$$

$$= \frac{\cancel{x^3}+cx^2+c^2x-\cancel{x^3}+1}{x^2+cx+c^2}$$

$$= \frac{cx^2+c^2x+1}{x^2+cx+c^2}$$

$$\phi_c'(x) = \frac{(2cx+c^2)(x^2+cx+c^2)-(cx^2+c^2x+1)(2x+c)}{(x^2+cx+c^2)^2}$$

$$= \frac{(2x+c)c(x^2+cx+c^2)-(cx^2+c^2x+1)(2x+c)}{(x^2+cx+c^2)^2}$$

$$= \frac{(2x+c)\left(\cancel{cx^2}+\cancel{c^2x}+c^3-\cancel{cx^2}-\cancel{c^2x}-1\right)}{(x^2+cx+c^2)^2}$$

$$= \frac{(2x+c)(c^3-1)}{(x^2+cx+c^2)^2}$$

$$\phi_c'(1) = \frac{(2+c)(c^3-1)}{(1+c+c^2)^2}$$

(1.a) $c=0 \implies \phi_0'(1) = \dfrac{-2}{1} = -2$

non si ha convergenza locale

(1.b) $c=2 \implies \phi_2'(1) = \dfrac{4\cdot 7}{7^2} = \dfrac{4}{7}$

si ha convergenza locale

(1.c) Si ha convergenza quadratica se

$$\phi_c'(1) = 0 \quad e \quad \phi_c''(1) \neq 0$$

$$\phi_c'(1) = 0 \iff c=-2 \ \vee \ c=1$$

Si verifica che $\phi_{-2}''(1) \neq 0$ e $\phi_1''(1) \neq 0$

(1.d) Per $c=2$

$$\phi_2(x) = \frac{2x^2+4x+1}{x^2+2x+4}$$

$$\phi_2'(x) = 14\,\frac{x+1}{(x^2+2x+4)^2}$$

Dobbiamo lavorare in $[0, +\infty)$.

Osserviamo innanzitutto che $\phi_2'(x) > 0$ per $x \geq 0$. Quindi $\phi_2(x)$ è crescente.

$$\phi_2''(x) = 14\,\frac{(x^2+2x+4)^{\cancel{2}} - 2(x+1)\cancel{(x^2+2x+4)}(2x+2)}{(x^2+2x+4)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= 14\,\frac{x^2+2x+4 - 4(x^2+2x+1)}{(x^2+2x+4)^3}$$

$$= 14\,\frac{-3x^2-6x}{(x^2+2x+4)^3} = -14 \cdot 3 \cdot \frac{x(x+1)}{(x^2+2x+4)^3}$$

$\phi_2''(x) < 0 \quad \forall x \geq 0 \implies \phi_2'(x)$ è decrescente

Siccome $\phi_2'(0) = \frac{14}{16} < 1$

segue che $\phi_2'(x) < 1, \quad \forall x > 0.$

Quindi $0 < \phi_2'(x) < 1, \quad \forall x > 0.$

Infine proviamo che

$$x \geq 0 \implies \phi_2(x) \geq 0$$

Abbiamo visto che $\phi_2(x)$ è crescente, quindi

$$x \geq 0 \implies \phi_2(x) \geq \phi_2(0) = \frac{1}{4} > 0$$

TRACCIA n°=1 - PRIMO ESONERO 11/04/2012

$$x = 3.2415 \qquad y = 1.0805$$

(1.b) Calcolare in $\mathbb{F}$, $x * y$:

$$fl(x) = 3.242 \qquad fl(y) = 1.080$$

$$fl(x) \circledast fl(y) = arr\left(fl(x) * fl(y)\right)$$

$$= arr\,(3.50136) = 3.501$$

$$E_{IN} = \frac{\left(fl(x) * fl(y)\right) - x*y}{x*y}$$

$$= \frac{3.50136 - 3.50244075}{3.50244075} = -3.09 \cdot 10^{-4}$$

$$E_{ALG} = \frac{fl(x) \circledast fl(y) - fl(x) * fl(y)}{fl(x) \cdot fl(y)}$$

$$= \frac{3.501 - 3.50136}{3.50136} = -1.03 \cdot 10^{-4}$$

(1.e) $\Omega = \text{realmax} = 10^{3} \cdot 9.999$

$\omega = \text{realmin} = 10^{-2} \cdot 1.000$

- $\Omega \oplus 10 \circledast \omega = \Omega \oplus 10^{-1} \cdot 1.000$

$= 10^{2} \cdot 9.999$

- $\Omega \oplus 50 \circledast \omega = \Omega \oplus 10^{-1} \cdot 5.000$

$= fl(10^{3} \cdot 10^{-1} \cdot 9.999 \cdot 5)$

$= fl(10^{2} \cdot 49.995)$

$= fl(10^{3} \cdot 4.9995)$

$= 10^{3} \cdot 5.000$

(1.f) $fl(\Omega^{\frac{1}{4}}) = \text{arr}(9.999|97.....)$

$= 10^{1} \cdot 1.000$ da cui:

$$[fl(\Omega^{\frac{1}{4}})]^{4} = 10^{4} \cdot 1.000$$