TRACCIA # 1, ESONERO 2015

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

(1.a) Poniamo $A = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4]$ e riduciamola a scalini.

$$A_1 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & -6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ -1 \end{array}$$

$$A_2 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ -1 \end{array}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

colonne pivotali

Dunque vi sono $s = 2$ vettori linearmente indipendenti tra $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$. Ad esempio, possiamo scegliere quelli corrispondenti alle colonne pivotali: $\underline{v}_1, \underline{v}_3$

(1.b) Sappiamo che

$$\dim(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{rank}(A) = 2$$

e che

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$$

Possiamo scegliere, come base di Im(A),

$$\{\underline{v}_1, \underline{v}_3\}$$

(1.c) Sappiamo che

$$V^{\perp} = \mathrm{Ker}(A^T)$$

dunque, dovremo ricercare l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$A^T \underline{x} = \underline{0}$. Poniamo $B_1 = A_1^T$

$$[B_1 | \underline{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -3 \\ 2 \\ -3 \end{array}$$

$$[B_2 | 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$[B_2' \mid \underline{0}] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ 0 \\ 1 \end{array}$$

$$[B_3 \mid \underline{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

colonne pivotali   colonna libera

Il sistema triangolare superiore da risolvere è:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Parametrizziamo l'incognita corrispondente alla colonna libera:

$$x_3 = h \qquad (h \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = h \\ 3x_2 = -3h \end{cases}$$

$x_2 = -h$, $\quad x_1 = x_2 - h = -2h$

Le soluzioni del sistema sono ∞^1:

$$(*)\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2h \\ -h \\ h \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}$$

Da $\dim(V) + \dim(V^\perp) = 3$

osserviamo che

$$\dim V^\perp = 1$$

Questo lo deduciamo anche da $(*)$.

Una base di $V^\perp$ è l'insieme ridotto

al vettore $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(1.d) $\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

Posto $\underline{w}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, base di $V^\perp$,

dalla teoria sappiamo che $\{\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{w}_1\}$ risulta una base di $\mathbb{R}^3$. Sviluppiamo $\underline{b}$ lungo questa base. Posto

$$C = [\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{w}_1]$$

occorre risolvere il sistema lineare $C\underline{x} = \underline{b}$

$$[C_1 \mid b_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 1 \\ -1 \end{array}$$

$$[C_2 \mid b_2] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -1 \end{array}$$

$$[C_3 \mid b_3] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right]$$

Abbiamo ottenuto il seguente sistema lineare triangolare superiore

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ \quad\quad 3x_2 - 3x_3 = 6 \\ \quad\quad\quad\quad 6x_3 = -6 \end{cases}$$

$$x_3 = -1$$

$$x_2 = x_3 + 2 = 1$$

$$x_1 = 2x_2 - 2x_3 = 2 + 2 = 4$$

La soluzione è $\underline{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Quindi:

$$\underline{b} = \underbrace{4\underline{v}_1 + \underline{v}_3}_{\in V} - \underbrace{\underline{w}_1}_{\in V^{\perp}}$$

Risulta quindi:

$$\underline{b}_1 = 4\underline{v}_1 + \underline{v}_3 = 4\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+2 \\ 4+1 \\ -4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_2 = -\underline{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Abbiamo ottenuto

$$\underline{b} = \underline{b}_1 + \underline{b}_2, \quad \underline{b}_1 \in V, \ \underline{b}_2 \in V^{\perp}$$

TRACCIA # 2 ESONERO 2012

$$f(x) = x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

(2.a)

x_i	y_i
0	0
1	$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$

Utilizzando la base di Lagrange:

$$L_0(x) = \frac{x-1}{0-1} = 1-x$$

$$L_1(x) = \frac{x-0}{1-0} = x$$

$$P_1(x) = L_0(x)\cdot 0 + L_1(x)\cdot y_1 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2\right) x$$

(2.b) Dalla teoria sappiamo che

$$f(x) - P_1(x) = \omega_1(x) \cdot \frac{f''(\eta_x)}{2!}$$

dove η_x è un opportuno punto di $[0,1]$

e $\omega_1(x) = x(x-1)$

$$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x$$

$$= \arctan x$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\max_{0\le x\le 1} |f''(x)| = \max_{0\le x\le 1} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

Quindi

$$\|f - P_1\|_\infty \le \frac{1}{2}\max_{0\le x\le 1}|\omega_1(x)| \cdot \underbrace{\max_{0\le x\le 1}|f''(\eta_x)|}_{\le 1}$$

$$\le \frac{1}{2}\max_{0\le x\le 1}|x(x-1)|$$

$$= \frac{1}{2}\max_{0\le x\le 1} x(1-x)$$

$$= \frac{1}{2}\max_{0\le x\le 1}(x-x^2)$$

il max lo si ottiene per $x = 1/2$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$$

TRACCIA # 1 ESONERO: GIUGNO 2013

(1.a) Riduciamo a scalini la matrice completa

$$[A_1|b_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] -2$$

$$[A_2|b_2] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

colonne pivotali

colonne libere

le soluzioni sono $\infty^{3-2} = \infty^1$

infinite soluzioni dipendenti da 1 parametro

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -3y - 2z = -4 \end{cases}$$

Parametrizziamo l'incognita z: $z = h$, $h \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y = 3 - h \\ -3y = -4 + 2h \end{cases}$$

$$y = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}h$$

$$x = 3 - h - \frac{4}{3} + \frac{2}{3}h = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}h$$

L'insieme delle soluzioni è:

$$\begin{bmatrix} 4/3 \\ 5/3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{bmatrix} h, \qquad h \in \mathbb{R}$$

(1.b) La terza equazione può essere scelta come una qualsiasi combinazione lineare delle prime due. Ad esempio, sommando le prime due equazioni otteniamo:

$$3x \quad + z = 5$$

(1.c) Basta scegliere, ad esempio:

$$3x \quad + z = a, \qquad a \neq 5$$

oppure, la terza equazione potrebbe essere:

$$0 = 1$$

TRACCIA # 2 ESONERO: GIUGNO 2013

(2.a) In termini algebrici, occorre determinare gli eventuali valori del parametro α affinché il seguente sistema sia compatibile:

$$A\underline{x} = \underline{b}, \quad \text{con } A = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$$

Riduciamo a scalini la matrice completa.

$$[A_1 | \underline{b}_1] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & \alpha+2 \\ 0 & -1 & 2 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & 2\alpha \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{array}$$

$$[A_2 | \underline{b}_2] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & \alpha+2 \\ 0 & -1 & 2 & \alpha+1 \\ 0 & 3/2 & -1 & \alpha/2+4 \\ 0 & -3 & 0 & 3\alpha+2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ 3/2 \\ -3 \end{array}$$

$$[A_3 | \underline{b}_3] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & \alpha+2 \\ 0 & -1 & 2 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 2 & 2\alpha+11/2 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ 3 \end{array}$$

$$[A_4 \mid \underline{b}_4] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & \alpha+2 \\ 0 & -1 & 2 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 2 & 2\alpha + 11/2 \\ 0 & 0 & 0 & 6\alpha + 31/2 \end{array}\right]$$

Affinché il sistema sia compatibile, dovrà essere:

$$6\alpha + \frac{31}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{31}{12}}$$

Infatti, in questo caso,

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A \mid b]) \quad (= 3)$$

(2.b) Osserviamo che

$$V^{\perp} = \mathrm{Ker}(A^T)$$

essendo A la matrice definita al punto precedente.

$$\underline{b} \in \mathrm{Ker}(A^T) \Leftrightarrow A^T \underline{b} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha+2 \\ \alpha+1 \\ 3 \\ 2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3 \times 4 \qquad\qquad 4 \times 1 \qquad\qquad 3 \times 1$$

$$\begin{cases} -2\alpha - 4 + 3 + 4\alpha = 0 \\ -\alpha - 2 - \alpha - 1 + 6 - 4\alpha = 0 \\ 2\alpha + 4 + 2\alpha + 2 - 6 - 4\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha = 1 \\ -6\alpha = -3 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \alpha = 1/2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Il sistema ammette un'unica soluzione:

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$$

In conclusione:

$$\underline{b} \in \bar{V}^{\perp} \iff \alpha = \frac{1}{2}$$

(2.c) Si procede come nel punto (2.a), con la differenza che non dovremo prendere in considerazione il vettore $\underline{v}_3$.
Quindi dovremo determinare gli eventuali valori del parametro α affinché il sistema

$$B\underline{x} = \underline{b}, \qquad B = [\underline{v}_1, \underline{v}_2]$$

sia compatibile. I primi passaggi sono identici a quelli svolti nel punto (2.a):
$[B_1 \mid \underline{b}_1]$ ------

$$[B_3 \mid \underline{b}_3] = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & \alpha+2 \\ 0 & -1 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 2\alpha + 11/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Osservando l'ultima equazione $0=-1$, deduciamo che $\underline{b}$ non può essere combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ per nessun valore di α.

(2.d) Essendo $\mathrm{rank}(A)=3$, il problema dei minimi quadrati associato al sistema

$$A\underline{x}=\underline{b}, \qquad A=[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$$

ammette un'unica soluzione che si determina risolvendo il sistema normale

$$A^T A \underline{x} = A^T \underline{b}$$

Rispondiamo ai due quesiti

- $\underline{x}^* = \underline{0} \iff A^T\underline{b} = 0$

Questa è la medesima condizione imposta nel quesito (2.b). Quindi:

$$\boxed{\alpha = 1/2}$$

- Essendo $\underline{r}^* = b - A\underline{x}^*$, si ha:

$\underline{r}^* = \underline{0} \iff A\underline{x}^* = \underline{b}$, quindi

$\underline{x}^*$ è soluzione del sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$.

Questo ci rimanda al quesito (2.e). Pertanto la soluzione è:

$$\boxed{\alpha = -\frac{31}{12}}$$

TRACCIA #1 ESONERO: GIUGNO 2011

Riduciamo a scalini la matrice completa.

$$[A_1 | \underline{b}_1] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & \alpha & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 2-\alpha & 2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 3 \\ 1 \end{array}$$

$$[A_2 | \underline{b}_2] = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha-3 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 2-\alpha & 1 \end{array}\right]$$

OSSERVAZIONE: Occorre distinguere due casi:

(a) $\alpha - 3 \neq 0$: in tal caso l'elemento pivotale è $\alpha - 3$

(b) $\alpha - 3 = 0$: in tal caso, poiché al di sotto di $\alpha - 3$ c'è un elemento nullo, il nuovo elemento pivotale è il 2 che compare in terza colonna.

(b)

$$[A_2 \mid \underline{b}_2] = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{3}{2} \end{array} \end{array}$$

$$[A_3 \mid \underline{b}_3] = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 17/2 \end{array}\right]$$

colonne pivotali

Il sistema è compatibile, in quanto:

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A, \underline{b}]) = 3$$

Possiamo parametrizzare x_2: $x_2 = h$, $h \in \mathbb{R}$

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} -x_1 = -1 + h \\ 2x_3 - x_4 = -5 \\ \frac{1}{2} x_4 = \frac{17}{2} \end{cases}$$

$x_4 = 17$; $x_3 = 6$; $x_1 = 1 - h$. Le ∞^1 soluzioni sono

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1-h \\ h \\ 6 \\ 17 \end{bmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}$$

(a).

$$[A_2 \mid \underline{b}_2] = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha-3 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 2-\alpha & 1 \end{array}\right]$$

colonne pivotali

È ridotta a scalini. Il sistema è compatibile in quanto

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A, \underline{b}]) = 3$$

Parametrizziamo l'incognita x_4: $x_4 = h$, $h \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = -1 \\ (\alpha-3)x_2 + 2x_3 = -5 + h \\ 3x_3 = 1 - (2-\alpha)h \end{cases}$$

Si procede con l'algoritmo di sostituzione all'indietro.

TRACCIA # 3 ESONERO: GIUGNO 2011

Se rank(A) fosse massimo (quindi 3), per risolvere più velocemente l'esercizio si determinerebbe la soluzione $\underline{x}^*$ del problema dei minimi quadrati associato al sistema $A\underline{x} = \underline{b}$.

La teoria ci dice che:

$$\underline{b}_1 = A\underline{x}^*$$

Di conseguenza $\underline{b}_2 = \underline{b} - \underline{b}_1$ e avremmo terminato.

Vediamo se il rango di A è massimo, riducendo la matrice a scalini

$$A_1 = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \end{array} \qquad A_2 = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rank}(A) = 2$$

Non possiamo seguire la via breve discussa in precedenza. Dovremo invece

(1) • determinare una base di $\mathrm{Im}(A)$

(2) • determinare una base di $\mathrm{Im}(A)^\perp$

(3) • unire le due basi per ottenere una base di $\mathbb{R}^5$

(4) • esprimere $\underline{x}$ come combinazione lineare della base di $\mathbb{R}^5$ definita al punto precedente. Ciò richiede la risoluzione di un sistema lineare di 5 equazioni in 5 incognite.

(5) • Determinata la soluzione del sistema lineare, si procede con il decomporre $\underline{x}$ nei due vettori

$$\underline{v} \in \mathrm{Im}(A) \quad e \quad \underline{w} \in \mathrm{Im}(A)^\perp$$

(1) Dal punto precedente segue che una base di $Im(A)$ è, per esempio,

$$\{\underline{v}_1, \underline{v}_3\} \qquad \text{(colonne pivotali)}$$

(2) $$Im(A)^{\perp} = Ker(A^T)$$

Occorre risolvere il sistema lineare $A^T \underline{x} = \underline{0}$

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ 2 \\ -1 \end{array} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

colonne pivotali

colonne libere

L'insieme delle soluzioni è costituito da ∞^3 vettori. Parametrizziamo x_3, x_4, x_5: $x_3 = h$, $x_4 = k$, $x_5 = q$, $h, k, q \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -h + k - q \\ 2x_2 = -2k \end{cases}$$

$x_2 = -k$; $\quad x_1 = -h - q$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} -h-q \\ -k \\ h \\ k \\ q \end{bmatrix} = h \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{w}_1} + k \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{w}_2} + q \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{w}_3}$$

$\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ rappresentano una base di $\mathrm{Im}(A)^\perp$

OSSERVAZIONE : dalla teoria sappiamo che

$$\underbrace{\dim(\mathrm{Im}(A))}_{=2} + \dim(\mathrm{Im}(A)^\perp) = \underbrace{\dim(\mathbb{R}^5)}_{=5}$$

quindi potevamo già aspettarci che

$$\dim(\mathrm{Im}(A)^\perp) = 5-2 = 3$$

(3), (4) Una base di $\mathbb{R}^5$ è

$$\{\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$$

Occorre risolvere il sistema lineare

$$[\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3]\,\underline{z} = \underline{x}$$

sistema di 5 equazioni in 5 incognite.
Si procede con la classica eliminazione di Gauss.

(5) Se la soluzione è $\underline{z} = [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5]^T$
ovvero ottenuto

$$\underline{x} = \underbrace{z_1 \cdot \underline{v}_1 + z_2 \underline{v}_2}_{\underline{v} \in Im(A)} + \underbrace{z_3 \underline{w}_1 + z_4 \underline{w}_2 + z_5 \underline{w}_3}_{\underline{w} \in Im(A)^{\perp}}$$