

Calcolo delle probabilità e statistica Canale A–L anno accademico 2023–2024, primo semestre

Titolare del corso: Stefano Rossi

Testi consigliati:

- (1) *Calcolo delle probabilità e statistica*, Paolo Baldi, McGraw-Hill.
- (2) *Probabilità e statistica*, Sheldon M. Ross, Apogeo.

Diario delle lezioni:

- *Lunedì 25–09–2023:*
Presentazione del corso. Spazi di probabilità: spazio campionario, σ -algebra degli eventi, e probabilità. Operazioni tra eventi. Prime proprietà della probabilità. Esempi: spazi finiti, numerabili, continui.
- *Mercoledì 27–09–2023:*
Proprietà di continuità della probabilità per successioni crescenti e decrescenti di eventi. σ -subadditività della probabilità. Richiami di combinatoria. Primi esercizi di probabilità finita.
- *Lunedì 02–10–2023:*
Probabilità condizionata (rispetto a un evento). Partizioni di uno spazio di probabilità. Formula della probabilità totale. Formula di Bayes. Indipendenza per famiglie di eventi. Spazi prodotto. Variabili aleatorie come funzioni misurabili. Combinazioni lineari e prodotti di variabili aleatorie (definite sul medesimo spazio di probabilità) sono ancora variabili aleatorie.
- *Mercoledì 04–10–2023:*
Esercizi di riepilogo su probabilità condizionata, probabilità totale e formula di Bayes.
- *Lunedì 09–10–2022:*
Indipendenza per variabili aleatorie. Variabili semplici: bernoulliane e binomiali. Media (o aspettazione) e varianza per variabili semplici: proprietà.
- *Mercoledì 11–10–2023:*
Variabili discrete. Variabili di Poisson. Teorema di Poisson. Riproducibilità delle variabili di Poisson. Esercizi di ricapitolazione.
- *Lunedì 16–10–2023:*
Variabile geometrica e assenza di memoria. Funzione di ripartizione di una variabile aleatoria e sue proprietà: monotonia, limiti a $\pm\infty$, continuità da destra. Variabili aleatorie continue. Variabili aleatorie assolutamente continue e densità di probabilità. Media e varianza per variabili aleatorie assolutamente continue. Densità notevoli: uniforme, esponenziale. Assenza di memoria per la distribuzione esponenziale.
- *Mercoledì 18–10–2023:*
Esercizi di ricapitolazione. Il minimo di n variabili esponenziali indipendenti è ancora

esponenziale, con parametro dato dalla somma dei parametri. Legge dello statistico inconsapevole (distribuzione di $g(X)$ data la distribuzione di X , per g invertibile di classe C^1 .)

- *Lunedì 23–10–2023:*

Disuguaglianza di Markov. Disuguaglianza di Chebyshev. Successioni di variabili aleatorie. Convergenza quasi certa. Convergenza in probabilità. La convergenza quasi certa implica la convergenza in probabilità. Legge debole dei grandi numeri. Enunciato (senza dimostrazione) della legge forte. Distribuzione normale e distribuzione normale standard. Standardizzazione. Quantili. Convergenza in distribuzione. Enunciato (senza dimostrazione) del teorema del limite centrale (versione di Lindberg-Lévy).

- *Mercoledì 25–10–2023:*

Esercizi sull'applicazione del teorema del limite centrale e di ricapitolazione sulle variabili continue.

- *Lunedì 30–10–2023:*

Variabili aleatorie multidimensionali. Distribuzione congiunta e marginale. Densità congiunta e marginale. Densità condizionale. Esercizi sulla convergenza in legge.

- *Lunedì 06–11–2023:*

Prodotto di convoluzione e densità della somma di due variabili aleatorie assolutamente continue e tra loro indipendenti. Riproducibilità della densità normale. Introduzione alla statistica inferenziale. Statistica parametrica. Spazio di probabilità parametrico. Stimatori. Stimatori corretti e distorti. Media e varianza campionarie.

- *Mercoledì 08–11–2023:*

Esercizi su somma e prodotti di uniformi indipendenti. Stima e estimatori di massima verosimiglianza: campione bernoulliano, poissoniano, uniforme, esponenziale, gaussiano.

- *Lunedì 20–11–2023:*

Rischio quadratico medio. Correttezza asintotica e consistenza. Distribuzione gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$. Riproducibilità della distribuzione gamma: se X_1, X_2, \dots, X_m sono variabili aleatorie indipendenti con legge $\Gamma(\alpha_1, \lambda), \Gamma(\alpha_2, \lambda), \dots, \Gamma(\alpha_m, \lambda)$, allora la somma $X_1 + X_2 + \dots + X_m$ ha legge $\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m, \lambda)$. Distribuzione $\chi^2(n)$ del chi-quadro con n gradi di libertà come $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ e riproducibilità. Proprietà dei campioni gaussiani (teorema di Cochran, senza dimostrazione). Intervalli di confidenza. Costruzione dell'intervallo di confidenza per la media di una popolazione gaussiana (caso con varianza nota) e della varianza.

- *Mercoledì 22–11–2023:*

Esercizi su estimatori corretti. Esercizi vari su intervalli di confidenza. Esercizi di ricapitolazione.

- *Lunedì 27–11–2023:*

Intervallo di confidenza per la differenza delle medie di due popolazioni gaussiane (caso con varianze nota e caso con varianze delle due popolazioni non note ma uguali tra di loro). Intervallo di confidenza per il parametro p di una popolazione bernoulliana. Informazione di Fisher. Disuguaglianza di Cramér-Rao (solo enunciato). Stimatori efficienti. Informazione di Fisher di un campione bernoulliano, poissoniano, esponenziale.

- *Mercoledì 29-11-2023:*
Esercizi di riepilogo su stimatori, intervalli di confidenza, variabili aleatorie.
- *Lunedì 04-12-2023:*
Test di verifica delle ipotesi. Ipotesi nulla e ipotesi alternativa. Ipotesi nulla semplice. Errore di prima e di seconda specie. Zona di rifiuto. Livello di significatività del test. Test di Gauss e test di Student sulla media di una popolazione gaussiana (a una coda e a due code). p -value di un test. Test del chi quadrato sulla varianza di una popolazione normale.
- *Mercoledì 06-12-2023:*
Test di Fisher sul confronto di varianza. Potenza di un test. Esercizi sui test.
- *Lunedì 11-12-2023:*
Statistiche sufficienti. Teorema di fattorizzazione di Fisher (cenni). Aspettazione condizionata. Teorema di Blackwell-Rao. Statistiche complete. Teorema di Lehmann-Scheffé.
- *Mercoledì 13-12-2023:*
Simulazione prova scritta.