MATRICI E SISTEMI LINEARI

- PARTE I -

Felice Iavernaro

Dipartimento di Matematica
Università di Bari

Novembre 2017

Definizione di matrice reale

Definizione

Dati due interi positivi m ed n, una matrice A reale $m \times n$ è un array bidimensionale avente m righe ed n colonne così definito

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definizione di matrice reale

Definizione

Dati due interi positivi m ed n, una matrice A reale $m \times n$ è un array bidimensionale avente m righe ed n colonne così definito

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Più formalmente possiamo dire che una matrice è un'applicazione

$$A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che $A(i, j) = a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Notazioni

Una matrice verrà solitamente denotata con le lettere maiuscole dell'alfabeto, mentre gli elementi di una matrice con le lettere minuscole; ad esempio la scrittura

$$A = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots m \\ j=1,\dots n}}, \text{ ovvero } \quad A = \{a_{ij}\}, \quad i = 1, \dots m, \quad j = 1, \dots n,$$

denoterà una matrice ad m righe ed n colonne il cui generico elemento è a_{ij}. Denotiamo con $\mathbb{R}^{m \times n}$ l'insieme delle matrici con m righe ed n colonne.

Notazioni

Una matrice verrà solitamente denotata con le lettere maiuscole dell'alfabeto, mentre gli elementi di una matrice con le lettere minuscole; ad esempio la scrittura

$$A = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots m \\ j=1,\dots n}}, \text{ ovvero } \quad A = \{a_{ij}\}, \quad i = 1, \dots m, \quad j = 1, \dots n,$$

denoterà una matrice ad m righe ed n colonne il cui generico elemento è a_{ij}. Denotiamo con $\mathbb{R}^{m \times n}$ l'insieme delle matrici con m righe ed n colonne.

Esempio ($A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & \sqrt{3} \\ \pi & \log(3) & -1/3 & 1 \\ 2/3 & 0 & \sin(\pi/7) & 4/3 \end{pmatrix},$$

è una matrice 3×4*, ovvero a* 3 *righe e* 4 *colonne.*

Matrici particolari

- Se $m = n$, (num. di righe= num. di colonne), la matrice è detta quadrata di dimensione n (se $m \neq n$, la matrice è detta rettangolare);
- se $m = n = 1$, la matrice si riduce ad un unico elemento e dunque coincide con uno scalare: $A = (a_{11})$;
- se $m = 1$, la matrice possiede un'unica riga, pertanto si riduce ad un vettore riga: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$
- se $n = 1$, la matrice possiede un'unica colonna, pertanto si riduce ad un vettore colonna:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \end{pmatrix}^T .$$

Matrici particolari

- La matrice $m \times n$ i cui elementi sono tutti nulli si chiama matrice nulla e si denota con $0_{m\times n}$ o più semplicemente con 0.
- Si chiama diagonale principale di una matrice quadrata di dim. n, il vettore:
$$\mathrm{diag}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^T.$$
- Si chiama matrice identica, ogni matrice quadrata aventi elementi diagonali uguali ad 1 ed elementi extra-diagonali nulli:
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Matrici quadrate particolari

- Una matrice quadrata A è detta:
  - diagonale se tutti i suoi elementi extra-diagonali sono nulli: $a_{ij} = 0, \ \forall i, j = 1, \dots n, \quad i \neq j$;
  - triangolare inferiore se tutti i suoi elementi al di sopra della diagonale principale sono nulli: $a_{ij} = 0, \ \forall i < j$;
  - triangolare superiore se tutti i suoi elementi al di sotto della diagonale principale sono nulli: $a_{ij} = 0, \ \forall i > j$;
- Esempio:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Addizione tra matrici

Definizione

Se $A = \{a_{ij}\}$ e $B = \{b_{ij}\}$ sono matrici $m \times n$ si definisce somma tra A e B la matrice

$$A + B = \{a_{ij} + b_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Si osservi che

$$+ : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$$

è una legge di composizione interna (o legge binaria).

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2/3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1/3 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \; A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proprietà dell addizione

- Commutatività: $\forall A,\ B \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$A + B = B + A;$$

- Associatività: $\forall A,\ B,\ C \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$(A + B) + C = A + (B + C);$$

- Esistenza dell'elemento neutro: $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$A + 0 = 0 + A = A;$$

- Esistenza del simmetrico (opposto): $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \exists B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tale che $A + B = 0$.
  L'opposto di A si denota con $-A$.

Osservazione

$(\mathbb{R}^{m\times n}, +)$ *è un gruppo abeliano.*

Moltiplicazione di uno scalare per una matrice

Definizione

Se $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *si definisce prodotto di* λ *per* A *la matrice*

$$\lambda \cdot A = \{\lambda a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

L'applicazione

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$$

è una legge di composizione esterna.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2/3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4/3 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Proprietà della moltiplicazione per uno scalare

Per ogni $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ e per ogni $A,\ B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ risulta:

- $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\,\mu) \cdot A$;
- $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$;
- $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$;
- $1 \cdot A = A$.

Per semplicità si scriverà $\lambda\, A$ in luogo di $\lambda \cdot A$.

Trasposta di una matrice

Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la trasposta di A, denotata con A^T, è la matrice ottenuta da A scambiando le righe con le colonne (o viceversa), ovvero

$$A^T = \{a_{ji}\}, \qquad i = 1, \dots m, \; j = 1, \dots n.$$

Pertanto $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sottomatrici (o matrici estratte)

Se $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, una sottomatrice di A (o matrice estratta da A) è una matrice ottenuta sopprimendo in A un certo numero di righe e di colonne.

Esempio

$$\textit{Considerata} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2/3 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

sono sottomatrici di A:

$$B = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2/3 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \; G = A, \; H = ().$$

Sottomatrici principali

Si chiama sottomatrice principale di una matrice A una sottomatrice di A i cui elementi diagonali sono anche elementi diagonali di A.

Esempio

$$Se\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2/3 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1/4 & 1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2/3 & -2 & 2 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

è ottenuta da A considerando $1^a, 3^a$ e 4^a riga e $1^a, 3^a$ e 4^a colonna di A.

Sottomatrici principali di testa

Si chiama sottomatrice principale di testa di A di ordine k una sottomatrice (principale) di A ottenuta considerando le prime k righe e colonne di A

Esempio

$$Se\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2/3 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1/4 & 1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2/3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

è la sottomatrice principale di testa di A di ordine 3*.*

Partizionamento di matrici

Una matrice A si dice partizionata se è riguardata in termini di sue sottomatrici (dette blocchi di A).

Esempio

Se $A = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$, *e*

$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$,

$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$, $A_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} \end{pmatrix}$.

possiamo allora scrivere $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Partizionamenti per righe e per colonne

- Partizionamento per righe. Se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e denotiamo con $\mathbf{a}_1^T,\ \mathbf{a}_2^T,\ \mathbf{a}_m^T$, le righe di A, potremo scrivere:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{pmatrix}.$$

Partizionamenti per righe e per colonne

- Partizionamento per righe. Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e denotiamo con $\mathbf{a}_1^T, \ \mathbf{a}_2^T, \ \mathbf{a}_m^T$, le righe di A, potremo scrivere:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{pmatrix}.$$

- Partizionamento per colonne. Se $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e denotiamo con $\mathbf{a}_1, \ \mathbf{a}_2, \ \mathbf{a}_n$, le colonne di A, potremo scrivere:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_2, & \ldots \mathbf{a}_n \end{pmatrix}.$$

Prodotto di matrici (righe per colonne)

- Ricordiamo che se **a** e **b** sono due vettori (colonna) di lunghezza n, il prodotto scalare di **a** e **b** denotato con $\mathbf{a}^T\,\mathbf{b}$ è così definito:

$$\mathbf{a}^T\,\mathbf{b} \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k.$$

- Siano $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$ e $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Si definisce prodotto (righe per colonne) tra A e B la matrice $C = A \cdot B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ il cui elemento generico c_{ij} è il prodotto scalare tra la riga i-esima di A e la colonna j-esima di B:

$$c_{ij} = \mathbf{a}_i^T\,\mathbf{b}_j = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}, \quad i = 1, \ldots m, \;\; j = 1, \ldots, n.$$

$\mathbf{a}_i^T \rightarrow i$-esima riga di A; $\quad \mathbf{b}_j \rightarrow j$-esima colonna di B.

ESEMPIO

Osservazione

Il prodotto tra due matrici è possibile solo se il numero di colonne del primo fattore coincide con il numero di righe del secondo fattore.

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \end{array} \right), \quad B = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} \mathbf{b}_1, & \mathbf{b}_2, & \mathbf{b}_3 \end{array} \right)$$

$$A \cdot B = \left(\begin{array}{ccc} \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 7 & 9 & -6 \\ 3 & 5 & -8 \end{array} \right)$$

$B \cdot A$ non è possibile.

Ulteriori esempi (1/2)

- $$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \\ -17 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -11 & -13 & -15 \end{pmatrix}$$
-

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^2 = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 66 & 81 & 96 \\ 102 & 126 & 150 \end{pmatrix}$$

Ulteriori esempi (2/2)

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Osservazione

Dunque, se A e B sono quadrate dello stesso ordine, $A \cdot B$ e $B \cdot A$ sono ben definite, tuttavia, in generale A e B non sono permutabili cioè, in generale, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Ne segue che la moltiplicazione tra matrici <u>non</u> è commutativa.

Proprietà della moltiplicazione di matrici quadrate

$$\cdot : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$$

è una legge di composizione interna su $\mathbb{R}^{n\times n}$ che verifica le seguenti proprietà:

- Associatività: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
- Esistenza dell'elemento neutro: $A \cdot I = I \cdot A = A$;
- $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$;
- Distributività a sinistra: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
- Distributività a destra: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
- $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Osservazione

La terna $(\mathbb{R}^{n\times n}, +, \cdot)$ è un anello unitario (non commutativo).

Inversa di una matrice quadrata

Una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si dice invertibile se esiste $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che

$$A\,B = I = B\,A$$

l'inversa di A, se esiste, è denotata con A^{-1}.

Osservazione

- *L'inversa di una matrice, se esiste, è unica. Infatti, se*

  $$A\,B = I = B\,A \qquad e$$

  $$A\,C = I = C\,A,$$

  segue che

  $$B = I\,B = (C\,A)B = C(A\,B) = C\,I = C.$$

- *Se A è invertibile, $(A^{-1})^{-1} = A$ (dim. per esercizio).*

Esempi e controesempi

- Esempi. $I^{-1} = I$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

- Controesempi. Non sono invertibili: $0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (matrice nulla)

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinante di una matrice quadrata

Se $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, denotiamo con A_{ij} la sottomatrice quadrata di A di dimensione $n-1$ ottenuta da A sopprimendone la i-esima riga e la j-esima colonna.

Definizione

Si definisce determinante di A e lo si denota con $\det(A)$ il seguente scalare:

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11}, & se\ n = 1, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A_{1j}), & se\ n > 1. \end{cases}$$

Osservazione

La definizione appena data va sotto il nome di REGOLA DI LAPLACE per il calcolo del determinante. In letteratura esistono diverse altre definizioni equivalenti. Il vantaggio di quella da noi adottata è che essa induce in maniera naturale un semplice algoritmo ricorsivo.

Determinante di matrici 2×2 e 3×3

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A) = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}.$

Determinante di matrici 2×2 e 3×3

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A) = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}.$

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A) =$

$$a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \quad & a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} \\ & -a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32}. \end{aligned}$$

Generalizzazione della regola di Laplace

Il determinante di una matrice quadrata $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, può essere equivalentemente calcolato mediante una delle seguenti formule che generalizzano quella precedentemente data:

- Sviluppo lungo la riga i-esima:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \qquad (n > 1).$$

- Sviluppo lungo la colonna j-esima:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \qquad (n > 1).$$

Generalizzazione della regola di Laplace

Il determinante di una matrice quadrata $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, può essere equivalentemente calcolato mediante una delle seguenti formule che generalizzano quella precedentemente data:

- Sviluppo lungo la riga i-esima:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \qquad (n > 1).$$

- Sviluppo lungo la colonna j-esima:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \qquad (n > 1).$$

Definizione

La quantità $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ *prende il nome di complemento algebrico dell'elemento* a_{ij}.

Secondo teorema di Laplace

La somma dei prodotti degli elementi di una riga (colonna) per i complementi algebrici di un'altra riga (colonna) è nulla, cioè:

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ij} \det(A_{kj}) = 0, \quad \forall i \neq k$$

ovvero:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ij} \det(A_{ik}) = 0, \quad \forall j \neq k.$$

Proprietà del determinante (1/3)

- $\det(A^T) = \det(A)$.
- $\det(A) = 0$ se:
  - gli elementi di una riga sono tutti nulli;
  - esistono due righe di A che sono uguali (proporzionali);
  - esiste una riga di A che è combinazione lineare di altre righe (vale anche il viceversa).
- Aggiungendo ad una riga una combinazione lineare di altre righe, si ottiene una nuova matrice il cui determinante coincide con quello di A.

Osservazione

Una combinazione lineare tra vettori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *è una somma della forma*

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k$$

Proprietà del determinante (2/3)

- Se per la i-esima riga di A risulta $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, dette B e C le matrici che si ottengono sostituendo in A la i-esima riga con $[b_{i1}, \dots, b_{in}]$ e $[c_{i1}, \dots, c_{in}]$, risulta:

$$\det(A) = \det(B) + \det(C)$$

- Se B è ottenuta da A scambiando due sue righe, risulta $\det(B) = -\det(A)$.
- Se B è ottenuta da A moltiplicandone gli elementi di una riga per uno scalare α, risulta $\det(B) = \alpha \det(A)$.
- Se A e B sono quadrate dello stesso ordine, $\det(A\,B) = \det(A)\det(B)$.

  In particolare, se A è invertibile, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Proprietà del determinante (3/3)

- Poiché $\det(A^T) = \det(A)$, le precedenti proprietà continuano a valere se riferite alle colonne piuttosto che alle righe di A.
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$
- Se A è una matrice triangolare, allora

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

cioè il determinante di A è il prodotto dei suoi elementi diagonali. In particolare se I è la matrice identica, risulta $\det(I) = 1$.

(Dimostrare i punti per esercizio, applicando i teoremi di Laplace.)

Esistenza dell'inversa

Una matrice quadrata A si dice non singolare se $\det(A) \neq 0$.
Si definisce matrice aggiunta di A e si denota con $\mathrm{agg}(A)$, la trasposta della matrice dei complementi algebrici di A:

$$[\mathrm{agg}(A)]_{ij} = \{(-1)^{i+j} \det(A_{ij})\}^T = \{(-1)^{i+j} \det(A_{ji})\}$$

Teorema

A è invertibile ($\exists A^{-1}$) $\iff$ A è non singolare ($\det(A) \neq 0$).
Inoltre risulta:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, \mathrm{agg}(A)$$

Dimostrazione del teorema di esistenza

mai chiesta

Posto $B = \dfrac{1}{\det(A)}\,\mathrm{agg}(A)$, sarà sufficiente provare che $C \equiv A\,B = I$. Gli elementi di C sono:

$$c_{ij} = \tfrac{1}{\det(A)}\Big(\quad a_{i1}\,(-1)^{j+1}\det(A_{j1}) + a_{i2}\,(-1)^{j+2}\det(A_{j2}) + \dots \\ \dots + a_{in}\,(-1)^{j+n}\det(A_{jn})\Big)$$

Distinguiamo due casi:

- per $i = j$, per la regola di Laplace,

$$c_{ii} = \frac{1}{\det(A)}\,\det(A)$$

- per $i \neq j$, per il secondo teorema di Laplace segue che

$$c_{ij} = 0.$$

$\square$

Sistemi lineari di n equazioni in n incognite

Un sistema lineare di n equazioni in n incognite ha la seguente forma:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

- La matrice $A = \{a_{ij}\}$ prende il nome di matrice dei coefficienti;
- il vettore $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ prende il nome di vettore delle incognite;
- il vettore $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^T$ prende il nome di vettore dei termini noti.

Il sistema lineare sopra riportato può scriversi come

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \text{(forma compatta)}$$

Soluzione di un sist. lin. (di n eq.ni in n incognite)

Consideriamo il sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Se supponiamo che la matrice dei coefficienti A è non singolare ($\det(A) \neq 0$), allora A sarà invertibile: moltiplicando ambo i membri a sinistra per A^{-1} otteniamo:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

dunque possiamo concludere che:

Teorema

Se la matrice dei coefficienti di un sistema lineare di n equazioni in n incognite è non singolare, il sistema lineare ammette una ed una sola soluzione (vale anche il viceversa).

Metodo di Cramer

non lo useremo mai

Da

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{agg}(A)\mathbf{b},$$

eguagliando le i-esime componenti dei due vettori ad ambo i membri si ha:

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \left((-1)^{i+1} b_1 \det(A_{1i}) + \ldots (-1)^{i+n} b_n \det(A_{ni})\right)$$

Detta A_i la matrice che si ottiene sostituendo in A la i-esima colonna con il vettore dei termini noti, si riconosce immediatamente che

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Conclusioni

- In questa prima parte di lezioni di *Algebra Lineare* abbiamo introdotto le matrici e ne abbiamo studiato alcune proprietà di base.
- Abbiamo poi applicato i risultati allo studio dei sistemi lineari con ugual numero di equazioni ed incognite
- Abbiamo poi osservato che, benché la regola di Laplace ed il metodo di Cramer siano facilmente implementabili sul calcolatore, le relative complessità computazionali (numero di operazioni) sono talmente elevate da rendere tali tecniche del tutto inefficienti.

Conclusioni

- In questa prima parte di lezioni di *Algebra Lineare* abbiamo introdotto le matrici e ne abbiamo studiato alcune proprietà di base.
- Abbiamo poi applicato i risultati allo studio dei sistemi lineari con ugual numero di equazioni ed incognite
- Abbiamo poi osservato che, benché la regola di Laplace ed il metodo di Cramer siano facilmente implementabili sul calcolatore, le relative complessità computazionali (numero di operazioni) sono talmente elevate da rendere tali tecniche del tutto inefficienti.
- Alcuni argomenti della *PARTE II*:
  - approccio numerico ai problemi finora affrontati;
  - generalizzazione della teoria a matrici e sistemi rettangolari;
  - ulteriori proprietà delle matrici;
  - introduzione della teoria degli spazi vettoriali;
  - applicazione della teoria delle matrici allo studio degli spazi vettoriali.