COMPLEMENTI SUGLI SPAZI LINEARI

OSSERVAZIONE SLIDE #5

$$A = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n], \quad \begin{cases} \underline{v}_i \in \mathbb{R}^m \\ i = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$x = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$$

Vogliamo verificare che

$$A\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i$$

Denotiamo gli elementi di $\underline{v}_i$ con la seguente notazione:

$$\underline{v}_i = [v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots, v_i^{(m)}]$$

Quindi

$$A\underline{x} = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_1^{(1)} & v_2^{(1)} & & v_n^{(1)} \\ v_1^{(2)} & v_2^{(2)} & \dots & v_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1^{(m)} & v_2^{(m)} & & v_n^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} \alpha_1 v_1^{(1)} + \alpha_2 v_2^{(1)} + \dots + \alpha_n v_n^{(1)} \\ \alpha_1 v_1^{(2)} + \alpha_2 v_2^{(2)} + \dots + \alpha_n v_n^{(2)} \\ \vdots \\ \alpha_1 v_1^{(m)} + \alpha_2 v_2^{(m)} + \dots + \alpha_n v_n^{(m)} \end{bmatrix}
$$

$$
= \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i
$$

CONCLUSIONE

All'occorrenza, un prodotto matrice × vettore può essere riguardato come combinazione lineare delle colonne della matrice mediante coefficienti che sono gli elementi del vettore.

DIMOSTRAZIONE SLIDE #7

(a) $\iff$ $$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0} \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m = 0$$

$$\iff \underbrace{[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m]}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\iff A\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$$

$\iff$ il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{0}$ deve ammettere un'unica soluzione rappresentata dal vettore nullo.

$\iff$ $\mathrm{rank}(A) = m$ (numero di incognite)

per il teorema di Rouché-Capelli $\square$

OSSERVAZIONE

Dopo aver ridotto la matrice A a scalini, le colonne pivotali individuano i vettori linearmente indipendenti all'interno degli m vettori dati.

DIMOSTRAZIONE SLIDE #9

(a) $\Rightarrow$ (b)

L'esistenza discende direttamente dalla definizione di "sistema di generatori".
Occorre provare l'unicità.

Consideriamo due comb. lineari di v:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$$

Ciò implica:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = 0$$

cioè

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0$$

Per la lineare indipendenza dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (vera per ipotesi) possiamo concludere che

$$\begin{cases} \alpha_i - \beta_i = 0 \\ i = 1, \ldots, n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_i = \beta_i \\ i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

(b) $\Rightarrow$ (a)

Per ipotesi, sappiamo che $\forall v \in V$

$\exists!\ \alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$

Dobbiamo provare che

$v_1, v_2, \dots, v_n$ costituiscono una base di V.

Il fatto che siano un sistema di generatori discende immediatamente da (b).

Rimane da provarne la lineare indipendenza.

Consideriamo allora una comb. lineare nulla dei vettori v_i

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$$

dobbiamo provare che $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

Questo è ovvio poiché, per la (b), $0 \in V$ è rappresentato da un'unica combinazione lineare che, evidentemente, è quella con coefficienti tutti nulli (non possono essercene altre). $\square$

RISPOSTA alla DOMANDA SLIDE #11

Per le due proposizioni che caratterizzano la "lineare indipendenza" e la def. di "sistema di generatori" possiamo concludere che, affinché

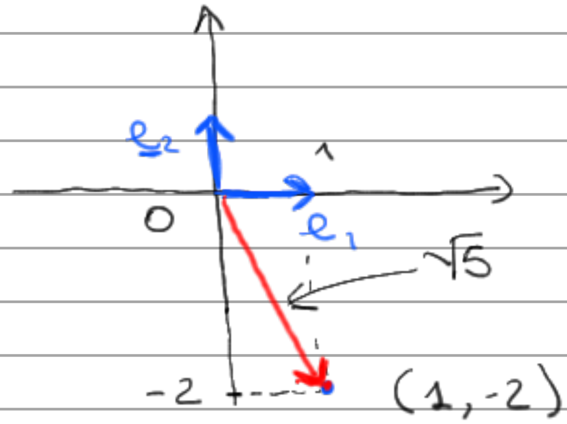
$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ rappresentino

una base di $\mathbb{R}^n$ dovrà aversi:

- $m = n$
- $\det([\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m]) \neq 0$

APPROFONDIMENTO SLIDE #13

ESEMPIO $V = \mathbb{R}^2$



$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\|\underline{x}\|_1 = |1| + |-2| = 3$$

$$\|\underline{x}\|_\infty = \max\{|1|, |-2|\} = 2$$

DEFINIZIONE In $\mathbb{R}^n$, si definisce sfera di centro zero e raggio 1, il seguente sottoinsieme:

$$B(\underline{0}, 1) = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}\| \leq 1 \}$$

Più in generale, definiremo sfera di centro $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$ e raggio r:

$$B(\underline{c}, r) = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x} - \underline{c}\| \leq r \}$$

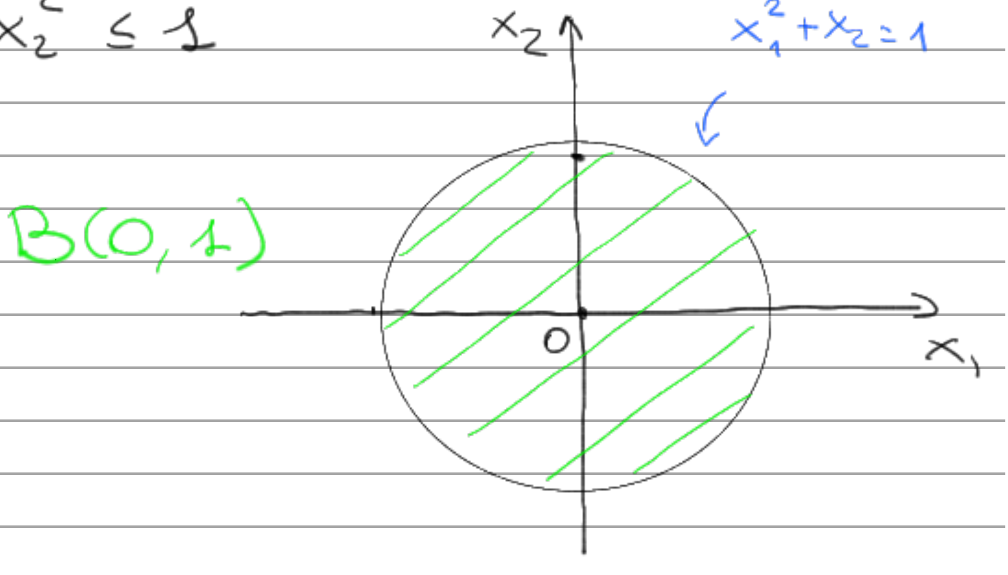
ESERCIZIO Disegnare la sfera unitaria $B(\underline{0}, 1)$ in $\mathbb{R}^2$ considerando la norma 2, la norma 1 e la norma ∞.

NORMA 2

sia $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ dobbiamo imporre:

$$\|\underline{x}\|_2 \le 1 \iff \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \le 1$$

$$\iff x_1^2 + x_2^2 \le 1$$



NORMA 1

In questo caso, dobbiamo imporre:

$$\|\underline{x}\|_1 \le 1 \iff |x_1| + |x_2| \le 1 \iff$$

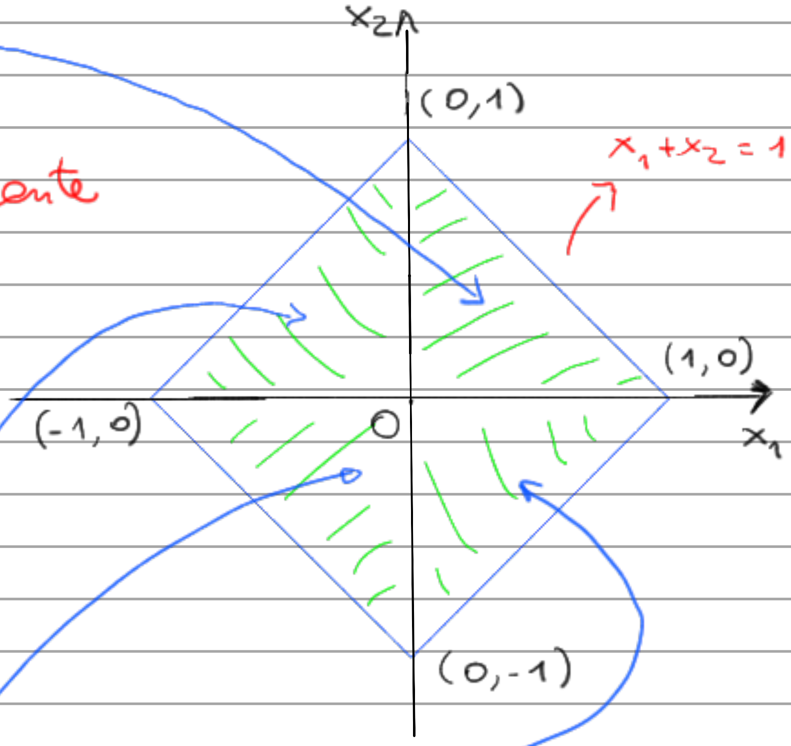
$$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 \le 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 \ge 0 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 < 0 \\ x_1 - x_2 \le 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \\ -x_1 - x_2 \le 1 \end{cases}$$

Primo sistema:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ \underbrace{x_1 + x_2 \leq 1} \end{cases}$$

$\left.\begin{matrix} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{matrix}\right\}$ 1° quadrante

semipiano sottostante la retta di equazione $x_1 + x_2 = 1$

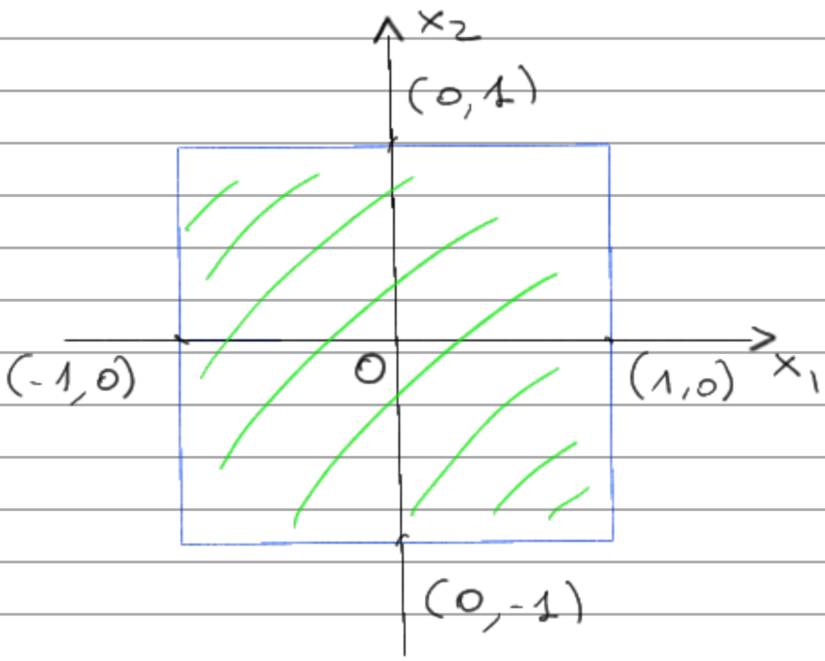


Secondo sistema

terzo sistema

quarto sistema

NORMA ∞ (per esercizio)



NORMA p

Sia $p \in \mathbb{N}^*$. Se $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\underline{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Questa applicazione soddisfa i tre assiomi di norma.

- Se $p = 1$, si ottiene la norma 1
- Se $p = 2$, si ottiene la norma 2
- $\lim_{p \to \infty} \|\underline{x}\|_p = \|\underline{x}\|_\infty$

APPROFONDIMENTO SLIDE # 14

Sia $\|\cdot\|$ una norma in $\mathbb{R}^n$.

A partire da questa norma è possibile costruire una norma su matrici (detta "norma indotta"). A tal fine, si considera la funzione

$$G : \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

così definita. Se $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \neq 0$

$$G(\underline{x}) = \frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|}$$

È possibile dimostrare che $G(\underline{x})$ ammette massimo. Possiamo allora considerare la seguente applicazione che continueremo a denotare con $\|\cdot\|$:

$$\|\cdot\| = A \in \mathbb{R}^{n\times n} \longmapsto \max_{\underline{x}\neq 0} \frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|}$$

Si può provare che questa applicazione soddisfa i tre assiomi di norma e, pertanto, definisce una norma su matrici.

ESEMPIO SLIDE #15

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$\|A\|_\infty = \max\{3, 4\} = 4$$

$$\|A\|_1 = \max\{2, 3, 2\} = 3$$

ESERCIZIO: Scrivere una function Python

norma(A, s)

con A matrice generica e

s = 1, inf

che restituisce la norma 1 o infinito della matrice A.

ESEMPIO DI NORMA NON INDOTTA

NORMA DI FROBENIUS:

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

OSSERVAZIONE: $\|I_{n\times n}\|_F = \sqrt{n}$

matrice identica

APPROFONDIMENTO SLIDE # 16

PROPRIETÀ 1

Poiché $\|A\| = \max_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|}$

è chiaro che $\forall \underline{x} \neq \underline{0}$ risulterà

$$\frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \max_{\underline{z} \neq \underline{0}} \frac{\|A\underline{z}\|}{\|\underline{z}\|} = \|A\|$$

Moltiplicando ambo i membri per $\|\underline{x}\|$ si ottiene

$$\|A\underline{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\underline{x}\|$$

Questa relazione continua a valere per $\underline{x} = \underline{0}$ (avremmo $0 \leq 0$).

PROPRIETÀ 2

In base alla compatibilità possiamo scrivere che, $\forall \underline{x} \neq \underline{0}$:

compatibilità

$$\|A(B\underline{x})\| \leq \|A\| \cdot \|B\underline{x}\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|\underline{x}\|$$

Dividendo primo e ultimo membro per $\|\underline{x}\|$

$$\forall \underline{x} \neq 0 : \quad \frac{\|AB\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Passando al massimo otteniamo:

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

PROPRIETÀ 3: ovvia

PROPRIETÀ 4

$$\|Q\|_2 = \max_{\underline{x} \neq 0} \frac{\|Q\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2}$$

ricordando che $\|\underline{z}\|_2 = \sqrt{\underline{z}^T \underline{z}}$, ($\underline{z}$ vettore colonna)

$$\|Q\|_2 = \max_{\underline{x} \neq 0} \frac{\sqrt{(Q\underline{x})^T(Q\underline{x})}}{\sqrt{\underline{x}^T\underline{x}}} =$$

identità

$$= \max_{\underline{x} \neq 0} \frac{\sqrt{\underline{x}^T Q^T Q \underline{x}}}{\sqrt{\underline{x}^T\underline{x}}} =$$

$$= \max_{\underline{x} \neq 0} \frac{\sqrt{\underline{x}^T I \underline{x}}}{\sqrt{\underline{x}^T\underline{x}}} = 1$$

La matrice di Hilbert di dimensione n è così definita:

$$H_n = \{h_{ij}\}, \quad h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} = 1, \dots, n$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

cond(H_n) cresce velocemente al crescere della dimensione n.

ESERCIZIO Considerare per $n \geq 1$, i sistemi lineari

(1) $\quad H_n \underline{x} = \underline{b}_n$

Scegliendo $b_n = H_n \underline{e}$ dove $\underline{e} = [1, 1, \dots, 1]'$, sappiamo che la soluzione teorica di (1) è proprio $\underline{x} = \underline{e}$.
Per valori crescenti di n, risolvere il sistema (1) nel calcolatore e generare un grafico analogo a quello nella slide #23 (in ascisse n)

APPROFONDIMENTO SLIDE # 25

Verifichiamo che $S = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$

è stabile rispetto a $+$ e $\cdot$

$S + S \subset S$

Siano v e $w \in S$. Quindi:

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$$

$$w = \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i$$

sommando membro a membro

$$v + w = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \beta_i) v_i$$

posto $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$, abbiamo provato che

$$v + w = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i v_i \in S$$

$\mathbb{R} \cdot S \subset S$

siano $\lambda \in \mathbb{R}$, $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \in S$

$$\lambda v = \lambda \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda \alpha_i) v_i \in S$$

Risposta alle domande (slide #25)

Ricordiamo che, posto

$$A = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k], \quad \underline{x} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_k]^T$$

la combinazione lineare $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{v}_i$

la possiamo anche scrivere $A\underline{x}$.

Fatta questa premessa, osserviamo che

$\underline{v} \in \text{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\} \iff$ il sistema lineare

$$A\underline{x} = \underline{v}$$

risulta compatibile.

APPROFONDIMENTO SLIDE #26

OSSERVAZIONE

$\ker(A) \equiv$ insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$A\underline{x} = \underline{0}$$

Mostriamo che $\ker(A)$ è stabile rispetto a + e ·

$\ker(A) + \ker(A) \subset \ker(A)$

Siano $\underline{x}, \underline{y} \in \ker(A)$. Allora

$$A\underline{x} = \underline{0}$$
$$A\underline{y} = \underline{0}$$

sommando membro a membro

$$A\underline{x} + A\underline{y} = \underline{0} \Rightarrow A(\underline{x}+\underline{y}) = \underline{0}$$

$\mathbb{R} \cdot \ker(A) \subset \ker(A)$

Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\underline{x} \in \ker(A)$. Allora:

$$A(\lambda \underline{x}) = \lambda A\underline{x} = \lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

APPROFONDIMENTO SLIDE # 27

OSSERVAZIONE. In breve, possiamo scrivere:

$$\mathrm{Im}(A) = \{ A\underline{x}, \quad x \in \mathbb{R}^n \}$$

Mostriamo che Im(A) è stabile rispetto a + e ·

$\mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Im}(A)$

Siano $\underline{y}_1, \underline{y}_2 \in \mathrm{Im}(A)$ allora:

$\exists\, \underline{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\underline{y}_1 = A\underline{x}_1$

$\exists\, \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\underline{y}_2 = A\underline{x}_2$

Sommando membro a membro

$$\underline{y}_1 + \underline{y}_2 = A\underline{x}_1 + A\underline{x}_2 = A(\underline{x}_1 + \underline{x}_2)$$

$\mathbb{R} \cdot \mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Im}(A)$

Siano $\lambda \in \mathbb{R}$, $\underline{y} \in \mathrm{Im}(A)$. Risulta:

$\exists\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\underline{y} = A\underline{x}$

Moltiplicando primo e secondo membro per λ:

$$\lambda\underline{y} = \lambda A\underline{x} = A(\lambda\underline{x}).$$

APPROFONDIMENTO SLIDE # 28

Mostriamo che $V^\perp$ è stabile rispetto a + e ·

$$V^\perp + V^\perp \subset V^\perp$$

Siano $\underline{x}, \underline{y} \in V^\perp \Rightarrow$

$$\underline{x}^T \underline{v} = 0 \qquad \forall\, \underline{v} \in V$$
$$\underline{y}^T \cdot \underline{v} = 0$$

Sommando membro a membro

$$\underline{x}^T \underline{v} + \underline{y}^T \underline{v} = 0 \qquad \forall\, \underline{v} \in V$$

$$(\underline{x}^T + \underline{y}^T)\, \underline{v} = (\underline{x} + \underline{y})^T \underline{v} = 0, \qquad \forall\, \underline{v} \in V$$

$$\mathbb{R} \cdot V^\perp \subset V^\perp$$

Siano $\lambda \in \mathbb{R}$, $\underline{x} \in V^\perp$. Risulta:

$$(\lambda \underline{x})^T \underline{v} = \lambda (x^T \underline{v}) = 0, \qquad \forall\, \underline{v} \in V.$$

APPROFONDIMENTO SLIDE #31

Verifichiamo le due proprietà.

PROPRIETÀ 1)

Sia $\underline{x} \in V \cap V^\perp$

Poiché $\underline{x} \in V^\perp \Rightarrow \underline{x}^T \underline{v} = 0, \quad \forall v \in V$

poiché $\underline{x} \in V$ dovrà quindi aversi

$$0 = \underline{x}^T \underline{x} = \|\underline{x}\|_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\underline{x}\|_2 = 0 \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$$

PROPRIETÀ 2)

Ovviamente $V + V^\perp \subset \mathbb{R}^n$

Occorre provare l'inclusione contraria:

$$\mathbb{R}^n \subset V + V^\perp \quad \text{cioè}$$

$$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad \begin{array}{l} \exists\, \underline{v} \in V \\ \exists\, \underline{w} \in V^\perp \end{array} \quad \text{t.c.} \quad \underline{x} = \underline{v} + \underline{w}$$

Sia $k = \dim(V)$. Dalla relazione nella slide 30 possiamo scrivere che

$$\dim(V^\perp) = n - k$$

Denotiamo con

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ una base di V

$\underline{v}_{k+1}, \underline{v}_{k+2}, \ldots, \underline{v}_n$ una base di $V^\perp$

Proviamo che $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}, \ldots, \underline{v}_n\}$, unione delle due basi, risulta una base di $\mathbb{R}^n$. Sarà sufficiente mostrarne la lineare indipendenza (essendo in numero $= n$).

Consideriamo una combinazione lineare nulla

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i$$ Vogliamo provare che $\begin{cases} \alpha_i = 0 \\ i = 1, \ldots, n \end{cases}$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{v}_i}_{\in V} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i}_{\in V^\perp}$$ da cui

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{v}_i}_{\in V} = - \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i}_{\in V^\perp}$$

Poiché $V \cap V^\perp = \{\underline{0}\}$, concludiamo che

$$\begin{matrix} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0} \\ \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0} \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_k = 0 \\ \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n = 0 \end{matrix}$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ potrà esprimersi come comb. lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ essendo $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di $\mathbb{R}^n$.

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{v}_i}_{= \underline{v} \in V} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i}_{= \underline{w} \in V^\perp}$$

Abbiamo provato che

$$\underline{x} = \underline{v} + \underline{w}, \qquad \underline{v} \in V, \quad \underline{w} \in V^\perp$$

DIMOSTRAZIONE PROPOSIZIONE SLIDE # 32

L'esistenza deriva dai conti svolti precedentemente:

fissiamo $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ base di V

$\{\underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n\}$ base di W

Come visto, l'unione delle due basi,

$$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n\}$$

risulta essere una base di $\mathbb{R}^n$. Pertanto, un generico $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ sarà sviluppabile lungo questa base:

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{v}_i}_{\in V} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i}_{\in V^\perp}$$

Posto $\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{v}_i$ e $\underline{w} = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i$

abbiamo ottenuto

$$\underline{x} = \underline{v} + \underline{w} \quad \text{con} \quad \underline{v} \in V \text{ e } \underline{w} \in W.$$

Mostriamo l'unicità. Supponiamo che

$$\underline{x} = \underline{v}_1 + \underline{w}_1 \qquad , \quad \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V, \quad \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$$
$$\underline{x} = \underline{v}_2 + \underline{w}_2$$

Sottraendo membro a membro

$$\underline{0} = (\underline{v}_1 - \underline{v}_2) + (\underline{w}_1 - \underline{w}_2)$$

$$\underbrace{\underline{v}_1 - \underline{v}_2}_{\in V} = \underbrace{\underline{w}_2 - \underline{w}_1}_{\in W}$$

Poiché $V \cap W = \{\underline{0}\}$, segue che

$$\begin{matrix} \underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{0} \\ \underline{w}_2 - \underline{w}_1 = \underline{0} \end{matrix} \implies \begin{matrix} \underline{v}_1 = \underline{v}_2 \\ \underline{w}_1 = \underline{w}_2 \end{matrix} \qquad \square$$