

## CENNI SU AUTOVALORI E AUTOVETTORI

DEF. Sia  $A$  una matrice quadrata di dimensione  $n$ . Un scalare  $\lambda \in \mathbb{C}$  si dice autovettore di  $A$  se

$$\exists \underline{x} \neq \underline{0} \text{ t.c. } A\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

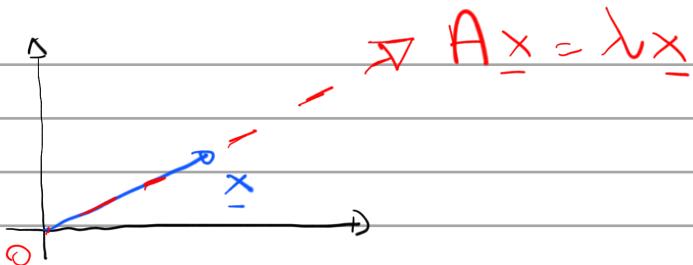
Il vettore  $\underline{x}$  (reale o complesso) è detto autovettore associato all'autovettore  $\lambda$ .

Significato geometrico

Gli autovettori definiscono particolari direzioni dello spazio vettoriale  $\mathbb{C}^n$  che risultano invarianti rispetto all'azione della matrice  $A$ . In effetti, lavorando in norma 2:

$$\|A\underline{x}\|_2 = \|\lambda \underline{x}\|_2 = |\lambda| \cdot \|\underline{x}\|_2$$

$A\underline{x}$  è quindi un vettore che condivide con  $\underline{x}$  la medesima direzione e la sua grandezza è scelta di un fattore  $|\lambda|$ .



Per determinare gli autovalori e autovettori di una matrice, occorre risolvere il sistema lineare

$$(1) \quad A \underline{x} = \lambda \underline{x}$$

dipendente dal parametro  $\lambda$  imponendo che esmette soluzioni non nulle.

Osserviamo che la (1) è equivalente a

$$(2) \quad (A - \lambda I) \underline{x} = \underline{0}$$

Per il teorema di Rouché-Capelli, affinché (2) abbia soluzioni non nulle, occorre imporre:

$$(3) \quad \det(A - \lambda I) = 0$$

La (3) è detta equazione caratteristica.

Poniamo

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

e osserviamo che  $p(\lambda)$  è un polinomio di grado  $m$  in  $\lambda$ .

Infatti:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} - \lambda \end{bmatrix}$$

Applicando le regole di Laplace è possibile  
proseguire così:

$$p(\lambda) = (-\lambda)^m + c_1(-\lambda)^{m-1} + \dots + e_m$$

dove il coefficiente  $c_i$  è la somma degli  
 $(?)$  minori principali di  $A$  di ordine  $i$   
(quindi  $c_m = \det(A)$ ) e  $e_1 = \sum_{i=1}^m a_{ii}$  - traccia di  $A$ )

Dal teorema fondamentale dell'algebra  $p(\lambda)$   
ammette  $m$  radici (non necessariamente  
distinte) che rappresenterebbero gli autovalori  
di  $A$ :

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$$

Dopo di che è possibile calcolare gli autovettori  
risolvendo i sistemi lineari

$$(A - \lambda_i I) \mathbf{x} = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

ESEMPIO Determinare gli autovettori di

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= 3 \end{aligned}$$

Selezioniamo l'autovettore  $\underline{x}_1$  associato a  $\lambda_1$ :

$$\begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ 2 & 4-2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{eliminazione di Gauß} \end{array} \right.$

$$\text{L'insieme delle soluzioni è: } h \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

OSSERVAZIONE Dalle (1) segue che un autovettore è definito univocamente a meno di uno scalare multiplo. Infatti se

$A \underline{x} = \lambda \underline{x}$  moltiplicando membro a membro per uno scalare  $\alpha \neq 0$

$$\alpha (A \underline{x}) = \alpha (\lambda \underline{x}) \Leftrightarrow A(\alpha \underline{x}) = \lambda (\alpha \underline{x})$$

Nell'esempio precedente, poniamo scegliere

$$x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'autosetore associato all'autosetore  $\lambda_2 = 3$

lo si ottiene risolvendo il sistema omogeneo:

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 1 \\ 2 & 6-3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che ammette soluzioni della forma  $b \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

Di più poniamo, ad esempio, scegliere

$$x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ottenuto per } b=2)$$

DEF. (di autosetore dominante)

Supponiamo di ordinare gli autosetori di  $A$  come:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq 0.$$

$\lambda_1$  è detto autosetore dominante di  $A$   
se risulta:

$$|\lambda_1| > |\lambda_i|, \quad i=2, \dots, n$$

OSSERVAZIONE: se  $A$  è una matrice reale

e  $\lambda_1$  è autoset. dominante di  $A$ , allora  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$

Oltre informazioni sull'autoselore dominante  
di una matrice è importante in molti  
contesti applicativi, ad esempio quando  
si studia la stabilità di un sistema.

Studieremo un metodo numerico che  
consente di determinare l'autoselore  
dominante di una matrice e il corrispondente  
autosettore.

### PROPRIETÀ (degli autoselori).

1)  $\lambda = 0$  è autoselore di  $A \Leftrightarrow A$  è singolare

2) Se  $A$  è non singolare e ammette autoselore  
 $\lambda$  è autosettore  $x$  allora:

$$A^{\lambda} \underline{x} = \frac{1}{\lambda} \underline{x}$$

3)  $A$  e  $A^T$  condividono i medesimi  
autoselori. (Infatti:  $\det(A^T - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$ )

4)  $\underline{x}$  è autosettore proprio e  $\lambda$   
 $\underline{x} \in \text{Ker}(A - \lambda I) \setminus \{0\}$

5) autovettori associati a autovalori distinti sono linearmente indipendenti. Infatti, siano:

$$\lambda, \mu \neq \text{autosel. / autovett. di } A$$

$$x, y \quad // \quad //$$

con  $\lambda \neq \mu$ . Consideriamo una combinazione lineare nulla di  $x$  e  $y$ :

$$(*) \quad c_1 x + c_2 y = 0$$

Vogliamo mostrare che, necessariamente,  $c_1 = c_2 = 0$ .

Premoltiplicando (\*) per  $A$ :

$$c_1 A x + c_2 A y = 0$$

$$c_1 \lambda x + c_2 \mu y = 0$$

Moltiplicando (\*) per  $\mu$  e sottraendo membro a membro:

$$c_1 (\underbrace{\lambda - \mu}_{\begin{matrix} \# \\ 0 \end{matrix}}) \underbrace{x}_{\begin{matrix} \# \\ 0 \end{matrix}} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

Dal (\*) otteniamo infine  $c_2 = 0$

## METODO DELLE POTENZE (caso A reale)

È un metodo numerico per il calcolo dell'autosel

selore dominante di un matrice.

Ipotesi di lavoro: Supponiamo, per semplicità, che A ammetta n autosettori linearmente indipendenti:  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_m$

con  $\underline{x}_1$  autosettore associato all'autoselore dominante  $\lambda_1$ .

### Definizione del metodo

Q partire da  $\underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$  finito, il metodo delle potenze genera la seguente successione:

$$\underline{y}_1 = A \underline{y}_0; \quad \underline{y}_2 = A \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n = A \underline{y}_{n-1}$$

Risulto:

$$\underline{y}_n = A \underline{y}_{n-1} = A \cdot A \underline{y}_{n-2} = A^2 \underline{y}_{n-2} = \dots = A^K \underline{y}_0$$

$\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_m\}$  formano una base di  $\mathbb{R}^n$ .

Poniamo ora suppose  $\underline{y}_0$  lungo queste base:

$$\underline{y}_0 = \alpha_1 \underline{x}_1 + \alpha_2 \underline{x}_2 + \dots + \alpha_m \underline{x}_m$$

Supponiamo che  $\underline{y}_0$  sia scelto in modo

che  $\alpha_1 \neq 0$ . Osserviamo che se

$$A \underline{x} = \lambda \underline{x} \quad \text{premultipliando per } A:$$

$$A^2 \underline{x} = \lambda A \underline{x} = \lambda^2 \underline{x}$$

$$A^k \underline{x} = \lambda^k \underline{x}$$

Consideriamo  $\underline{y}_k = A^k \underline{y}_0$ . Risulta:

$$\underline{y}_k = A^k (\alpha_1 \underline{x}_1 + \alpha_2 \underline{x}_2 + \dots + \alpha_m \underline{x}_m)$$

$$= A^k \sum_{i=1}^m \alpha_i \underline{x}_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i A^k \underline{x}_i$$

$$= \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i^k \underline{x}_i$$

$$= \alpha_1 \lambda_1^k \underline{x}_1 + \sum_{i=2}^m \alpha_i \lambda_i^k \underline{x}_i$$

$$= \lambda_1^k \left[ d_1 \underline{x}_1 + \sum_{i=2}^m \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \underline{x}_i \right]$$

Poniamo:  $\underline{g}_k = \sum_{i=2}^m \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \underline{x}_i$

e osserviamo che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \underline{g}_k = \underline{0}$$

essendo  $\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| < 1$  ( $\lambda_1$  è dominante)

Quindi

$$\underline{y}_n = \lambda_1^k (d_1 \underline{x}_1 + \underline{g}_n) \quad (**)$$

Per  $k$  grande

$$\underline{y}_n \approx d_1 \lambda_1^k \underline{x}_1$$

$\underline{y}_n$  tende ad allinearsi all'autovettore dominante,

controllando alle successive  $\underline{y}_n$

costruiamo la seguente successione numerica:

$$\sigma_k = \frac{\underline{y}_{k+1}^\top \underline{y}_k}{\underline{y}_k^\top \underline{y}_k}$$

Se ciiono vedere che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = \lambda_1$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \frac{\underline{y}_{k+1}^\top \underline{y}_n}{\underline{y}_n^\top \underline{y}_n} = \frac{\lambda_1^{K+1} (\alpha_1 \underline{x}_1^\top + \underline{g}_{k+1}^\top) \lambda_1^k (\alpha_1 \underline{x}_1 + \underline{g}_n)}{\lambda_1^k (\alpha_1 \underline{x}_1^\top + \underline{g}_n^\top) \lambda_1^k (\alpha_1 \underline{x}_1 + \underline{g}_n)} \\ &= \lambda_1 \cdot \frac{|\alpha_1|^2 \cdot \|\underline{x}_1\|_2^2 + O(\underline{g}_n)}{|\alpha_1|^2 \cdot \|\underline{x}_1\|_2^2 + O(\underline{g}_n)} \end{aligned}$$

Ponendo al limite per  $k \rightarrow \infty$

si ottiene l'onesto poiché  $O(\underline{g}_n) \rightarrow 0$ .

Per ottenere l'autovettore dominante poniamo

considerare le seguenti accennare:

$$\frac{\underline{y}_n}{\underline{y}_n^{(m_k)}}$$

dove  $\underline{y}_n^{(m_k)}$  denota la componente del vettore modulo di  $\underline{y}_n$ , cioè: Componente i-esime di  $\underline{y}_n$

$$|\underline{y}_n^{(m_k)}| = \|\underline{y}_n\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |\underline{y}_n^{(i)}|$$

Così medesimi calcoli di sopra, mi mostre  
che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\underline{y}_n}{\underline{y}_n^{(mn)}} = \underline{x}_1$$

### OSSERVAZIONE

In generale l'implementazione di questo  
metodo comporta problemi di overflow  
o underflow (si vede (\*\*)).

Per ovviare a ciò si introduce la  
scovrente della normalizzazione.

Questo scovrente è inutile se  $|\lambda_1| = 1$   
(si vede (\*\*))

## Metodo delle potenze con tecnica di normalizzazione

OSSERVAZIONE Un vettore normalizzato

è un vettore di norma 1. Se  $\underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\underline{0}\}$  e  $\|\cdot\|$  è una norma di  $\mathbb{R}^m$ , allora:

$$\underline{z} = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}$$

è un vettore di norma 1. Infatti:

$$\|\underline{z}\| = \left\| \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \right\| = \frac{1}{\|\underline{x}\|} \cdot \|\underline{x}\| = 1$$

Supponiamo, nel seguito, di lavorare con la norma 2.

Si parte da  $\underline{y}_0 \in \mathbb{R}^m$  generico e si pone:

$$\underline{z}_0 = \frac{\underline{y}_0}{\|\underline{y}_0\|}$$

definiamo

$$\begin{cases} \underline{t}_1 = A \underline{z}_0 \\ \underline{z}_1 = \frac{\underline{t}_1}{\|\underline{t}_1\|} \end{cases}$$

andando avanti, avremo, in generale

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{t}_k = A \underline{z}_{k-1} \\ \underline{z}_n = \frac{\underline{t}_n}{\|\underline{t}_n\|} \end{array} \right.$$

Se siamo in relazione tra  $\underline{y}_n$ ,  $\underline{z}_n$  e  $\underline{t}_n$

Risulta:

$$\underline{z}_n = \frac{1}{\|\underline{t}_n\|} \cdot A \underline{z}_{n-1} = \frac{1}{\|\underline{t}_n\| \cdot \|\underline{t}_{n-1}\|} \overset{2}{A} \underline{z}_{n-2}$$

$$= \dots = \frac{1}{\prod_{i=0}^k \|\underline{t}_i\|} \cdot A^k \underline{y}_0 = \gamma_k \cdot \underline{y}_n$$

a sento posto  $\gamma_k = \frac{1}{\prod_{i=0}^k \|\underline{t}_i\|}$

Conseguentemente:

$$\overline{\gamma}_k = \frac{\underline{y}_{k+1}^T \underline{y}_n}{\underline{y}_n^T \underline{y}_n} = \frac{\frac{1}{\|\underline{t}_{k+1}\|} \underline{z}_{k+1}^T \cdot \cancel{\frac{1}{\|\underline{t}_n\|} \underline{z}_n}}{\frac{1}{\|\underline{t}_n\|} \underline{z}_n^T \cdot \cancel{\frac{1}{\|\underline{t}_n\|} \underline{z}_n}}$$

$$\gamma_{k+1} = \frac{\gamma_k}{\|\underline{t}_{k+1}\|}$$

Quindi:

$$\overline{\gamma}_n = \frac{\|\underline{t}_{n+1}\| \underline{z}_{n+1}^T \underline{z}_n}{\underline{z}_n^T \cdot \underline{z}_n} = \frac{\underline{t}_{n+1}^T \underline{z}_n}{\|\underline{z}_n\|_2^2}$$

$$\text{Se } \|\cdot\| = \|\cdot\|_2 \text{ allora } \|\underline{z}_n\|_2^2 = 1$$

e risulta:

$$\tilde{\sigma}_n = \underline{t}_{(k+1)}^T \cdot \underline{z}_n$$

Per l'autovettore dominante, osserviamo che

$$\frac{\underline{y}_n}{\underline{y}_n^{(m_r)}} = \frac{\frac{1}{\tilde{\sigma}_n} \cdot \underline{z}_n}{\frac{1}{\tilde{\sigma}_n} \underline{z}_n^{(m_r)}} = \frac{\underline{z}_n}{\underline{z}_n^{(m_r)}}$$

Se invece desideriamo la normalizzazione  
in norme 2, possiamo direttamente considerare  
la successione  $\{\underline{z}_n\}$ .

Legue programma python sull'implementazione  
del metodo delle potenze con tecnica di normalizzazione.

## SLIDE #12

Proprietà: se  $G$  è un mettore

le cui colonne sommano a 1,

e ammette  $\lambda = 1$  come autovalore:

infatti consideriamo il vettore

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e poniamo } G = [\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_m]$$

$$G^T \underline{e} = \begin{bmatrix} \underline{g}_1^T \\ \vdots \\ \underline{g}_m^T \end{bmatrix} \underline{e} = \begin{bmatrix} \underline{g}_1^T \underline{e} \\ \vdots \\ \underline{g}_m^T \underline{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{e}$$

Quindi  $G^T$  ammette 1 come autovalore e  
è come autovettore. Dunque 1 sarà autovettore  
anche di  $G$ .

Se gli elementi di  $G$  sono non ripetitivi,  
è possibile provare che:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_i|, \quad i = 2, \dots, n.$$

## SLIDE 14

Python offre la possibilità di gestire le matrici sparse tramite il pacchetto `sparse` presente nel modulo `scipy`

```
from scipy import sparse
```

- la function `sparse.csr_matrix` permette di definire una matrice sparse  
( vedere gli esempi riportati nell' `help` )
- le operazioni somma e prodotto tra matrici sparse seguono le regole degli array classici.
- la function `getsizeof` del modulo `sys` permette di calcolare le quantità di memoria utilizzate per un oggetto Python