SECONDO ESONERO - 16 GENNAIO 2018

TRACCIA n° 1

(1.a) Poniamo $A = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5]$ e ricordiamo che:

$$S = \mathrm{Im}(A) \text{ e quindi } \dim(S) = \mathrm{rank}(A)$$

Pertanto, riduciamo A a scalini:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \end{array} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ 0 \\ -2 \end{array} \end{array} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

COLONNE PIVOTALI

Quindi:

- $\dim(S) = \mathrm{rank}(A) = 3$
- una base di S è: $\{\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_5\}$

(1.b) Ricordiamo che

$$S^{\perp} = \mathcal{Im}(A)^{\perp} = \mathrm{Ker}(A^T) = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid A^T \underline{x} = \underline{0} \}$$

Occorre risolvere il sistema lineare $A^T \underline{x} = \underline{0}$.

OSSERVAZIONE: per velocizzare i calcoli è possibile eliminare da A le colonne linearmente dipendenti.

Posto $\hat{A} = [\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_5]$, ovviamente

$$\mathcal{Im}(A) = \mathcal{Im}(\hat{A}) \quad \text{e quindi}$$

$$S^{\perp} = \mathrm{Ker}(\hat{A}^T).$$

Risolviamo dunque il sistema $\hat{A}^T \underline{x} = \underline{0}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]_1 \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]_1$$

COLONNE PIVOTALI

COLONNE LIBERE

parametrizziamo le incognite relative alle colonne libere:

$$x_4 = h; \qquad x_5 = k$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -h - k \\ x_2 + x_3 = -h + k \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= -h + k \\ x_1 &= -h - k + h - k = -2k \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = h \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{w}_1} + k \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{w}_2} \qquad h, k \in \mathbb{R}$$

Dunque:

- $\dim(S^\perp) = 5 - \dim(S) = 2$
- una base di $S^\perp$ è $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$

(1.c) A norma di definizione, $\underline{x} \in S^\perp \iff \hat{A}^T \underline{x} = \underline{0}$

Risulta:

$$\hat{A}^T \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Quindi $\underline{x} \notin S^\perp$.

Proviamo a vedere se $\underline{x} \in S \iff A \underline{z} = \underline{x}$ è compatibile.

Avevamo già ridotto la matrice A a scalini.

Possiamo ripetere la sequenza dei passi sul vettore dei termini noti $\underline{x}$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 0 \\ -2 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Concludiamo che $3 = \text{rank}(A) \neq \text{rank}([A|\underline{x}]) = 4$

quindi il sistema non è compatibile e $\underline{x} \notin S$

(1.d) Si verifica subito che $\hat{A}^T \underline{y} \neq 0$, quindi $\underline{y} \notin S^\perp$

Vediamo se $\underline{y} \in S$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ 0 \\ -2 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Concludiamo che $3 = \text{rank}(A) = \text{rank}([A|\underline{y}])$,

quindi $\underline{y} \in S$.

(1.e) Unendo le due basi $\{\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_5\}$ di S e $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ di $S^\perp$

otteniamo una base di $\mathbb{R}^5$, essendo $\mathbb{R}^5 = S \oplus S^\perp$.

Posto $B = [\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_5, \underline{w}_1, \underline{w}_2]$, risolviamo il

sistema lineare $B\underline{x} = \underline{z}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ 0 \\ -2 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 6 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ 1/2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{2} & -5 \end{array}\right]$$

Procedendo con l'algoritmo di sostituzione all'indietro:

$$x_5 = -\frac{10}{11}$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(-2 - \frac{10}{11}\right) = -\frac{16}{11}$$

$$x_3 = 2 + 2 \cdot \left(-\frac{10}{11}\right) = \frac{2}{11}$$

$$x_2 = -2x_3 + x_4 - x_5 = \frac{17}{11}$$

$$x_1 = \frac{25}{11}$$

Dunque:

$$\underline{z} = \underbrace{\frac{25}{11} \cdot \underline{v}_1 + \frac{17}{11}\underline{v}_3 + \frac{2}{11}\underline{v}_5}_{\underline{z}_1} \underbrace{- \frac{16}{11}\underline{w}_1 - \frac{10}{11}\underline{w}_2}_{\underline{z}_2}$$

$$\underline{z}_1 = \frac{2}{11}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \underline{z}_2 = \frac{2}{11}\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

TRACCIA n° 2

(2.a)

x_i	-1	0	1
y_i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$

$$P(x) = \frac{1}{2} L_0(x) + L_1(x) + \frac{1}{2} L_2(x)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x(x-1)}{(-1)\cdot(-2)} + \frac{x^2-1}{1\cdot(-1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x(x+1)}{2\cdot 1}$$

$$= \frac{1}{4}(x^2-x) + 1 - x^2 + \frac{1}{4}(x^2+x)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 1$$

(2.b) $$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{6} + x\right]_{-1}^{1} = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} = \frac{5}{3}$$

$$E_R = \left| \frac{5/3 - \pi/2}{\pi/2} \right| \simeq 6.1 \cdot 10^{-2}$$

(2.c) Il polinomio di Taylor $t(x)$ di grado 2 è:

$$t(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2$$

Risulta: $f(0) = 1$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -2\,\frac{(1+x^2)^2 - 4x(1+x^2)^3\cdot(2x)}{(1+x^2)^4} \Rightarrow f''(0) = -2$$

Quindi: $t(x) = 1 - x^2$

$$\int_{-1}^{1} t(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$E_R = \left|\frac{4/3 - \pi/2}{\pi/2}\right| \simeq 1.5 \cdot 10^{-1}$$

CONCLUSIONE: il polinomio interpolante restituisce una migliore approssimazione dell'integrale rispetto al polinomio di Taylor.