

METODI NUMERICI PER ZERI DI FUNZIONI

Calcolo Numerico
corso A a.a.2021/22
F. lavernaro



Problema: Data una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, determinarne gli zeri appartenenti all'intervallo $\underline{[a, b]}$

Ricordiamo che $x \in [a, b]$ si dice zero di f se $f(x) = 0$. Quindi, il problema delle determinazione degli zeri di una funzione $f(x)$ è equivalente al problema delle risoluzione dell'equazione

$$f(x) = 0$$

Esempi

$$f(x) = x - \cos x ; \quad g(x) = x - e^{-x}$$

x è zero di $f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow$

x è soluzione dell'equazione $f(x) = 0$

Dicono se la funzione ammette zeri e se questo è unico

Teoremi di localizzazione

Rieliuiamiamo dall'analisi i seguenti risultati

Teorema degli zeri (o di Bolzano)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$

e tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$ (cioè $f(x)$

cambia segno agli estremi dell'intervallo).

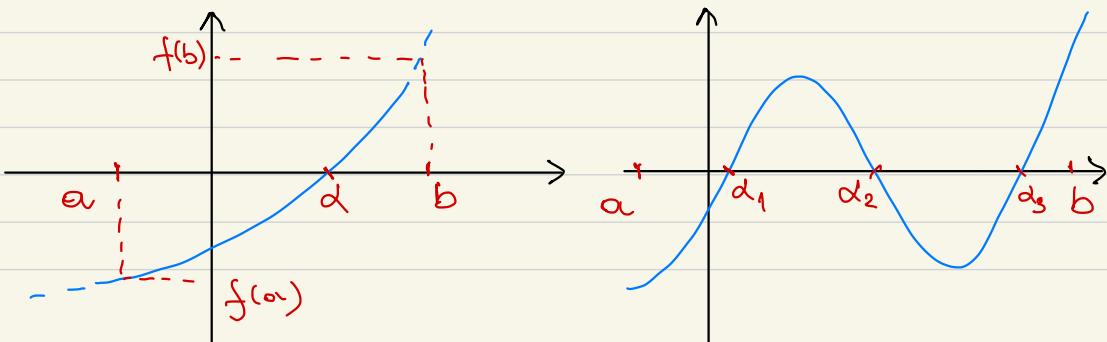
Allora:

$$\exists \alpha \in (a, b) \text{ t.c. } f(\alpha) = 0$$

Esoè, a parole:

f ammette almeno uno zero α in (a, b)

Esempi



Il teorema di Bolzano esprime una condizione sufficiente per l'esistenza di uno zero di f , tuttavia non ne assicura l'unicità.

Per ottenere l'unicità potremmo assumere ulteriormente che f sia strettamente monotone.

Proposizione (di esistenza e unicità del zero)

Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile in $[a,b]$ e.t.c.

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad \text{e} \quad f'(x) \neq 0$$

Ora f ammette un unico zero α in (a,b) :

$$\exists! \alpha \in (a,b) \text{ t.c. } f(\alpha) = 0$$

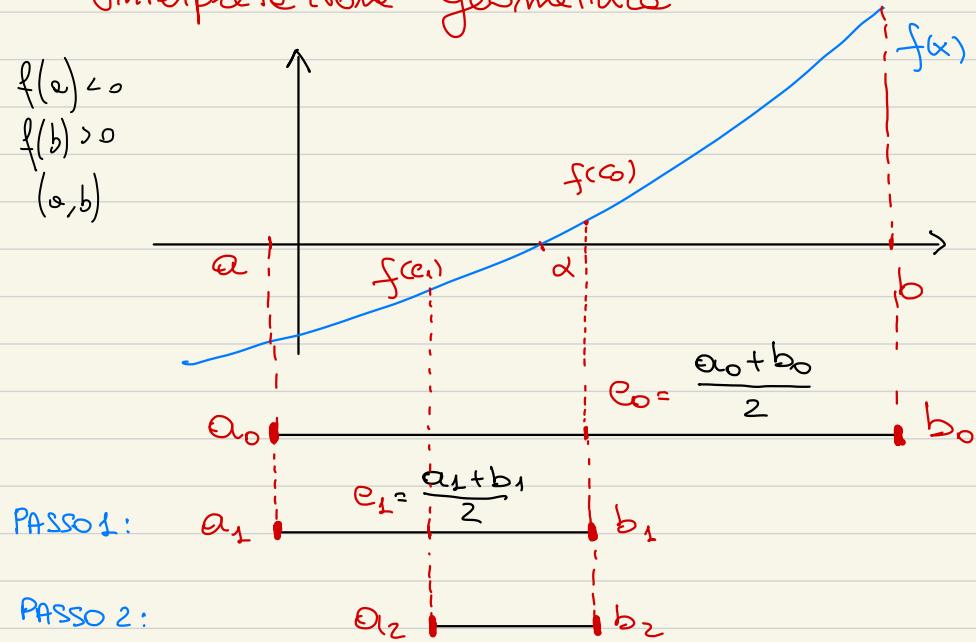
ESISTE UN UNICO

Dimostrazione costruttiva del T. degli zeri

Metodo delle successive bisezioni

La dimostrazione del teorema degli zeri, fatto in Analisi, è di tipo costruttivo, cioè induce un algoritmo che può essere implementato sul calcolatore per approssimare α , zero di f .

Interpretazione geometrica



Iterando queste procedure, si se α confluire

lo zero d' in un intervallo di ampiezza piccole a piacere. Se l'ampiezza del generico intervallo è sufficientemente piccola, possiamo scegliere un qualsiasi suo punto come approssimazione di α ; ad esempio

$$c_m \approx \alpha$$

Definizione formale del metodo

Il metodo delle successive bisezioni definisce tre successioni numeriche

$$\{a_m\} \quad \{b_m\} \quad \{e_m\}$$

cose definite:

- inizialmente si pone

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

al primo passo, costruiamo $[a_1, b_1]$ a

partire da $[c_0, b_0]$.

Se $f(c_0) = 0 \rightarrow \text{STOP} \quad \alpha = c_0$.

Altrimenti si pone:

$$[a_1, b_1] = \begin{cases} [a_0, c_0], & \text{se } f(c_0) \cdot f(a_0) < 0 \\ [c_0, b_0], & \text{se } f(c_0) \cdot f(b_0) < 0 \end{cases}$$

Procedendo per induzione, supponiamo di aver definito l'intervallo $[c_{m-1}, b_{m-1}]$ e vediamo come costruire $[c_m, b_m]$.

Si pone: $c_{m-1} = \frac{a_{m-1} + b_{m-1}}{2}$

Se $f(c_{m-1}) = 0 \rightarrow \text{STOP}$ poiché $\alpha = c_{m-1}$

Altrimenti:

$$[a_m, b_m] = \begin{cases} [a_{m-1}, c_{m-1}], & \text{se } f(a_{m-1}) \cdot f(c_{m-1}) < 0 \\ [c_{m-1}, b_{m-1}], & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nell'ipotesi che $f(c_m) \neq 0 \quad \forall m$, si dimostri che

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \lim_{m \rightarrow \infty} c_m = \alpha$$

DIM

Le successioni $\{a_m\}$ e $\{b_m\}$ verificano le seguenti proprietà:

$$(1) \quad [a_m, b_m] \subset [a_{m-1}, b_{m-1}]$$

$$(2) \quad b_m - a_m = \frac{1}{2} (b_{m-1} - a_{m-1})$$

$$(3) \quad f(a_m) \cdot f(b_m) < 0, \quad \forall m$$

Dalle proprietà (1) si ricava che

- $a_m \geq a_{m-1}; \quad a_m < b$
- $b_m \leq b_{m-1}; \quad b_m > a$

Quindi:

$\{a_m\}$ è monotone crescente e limitata

superiormente (b è un suo maggiorante).

Dall'analisi sappiamo oltre che $\{a_n\}$

ammette limite finito:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \bar{a} \in \mathbb{R}$$

Analogamente, $\{b_m\}$ è monotone decrescente

e limitata inferiormente (a è un suo minorante). Ne consegue che ammette

limite finito:

$$\exists \lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \bar{b} \in \mathbb{R}$$

Prossimo ore che $\bar{a} = \bar{b}$. Infatti:

$$\bar{b} - \bar{a} = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (\text{essendo finiti i limiti})$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} (b_m - a_m) = \frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow \infty} (b_{m-1} - a_{m-1}) \quad (2)$$

$$= \dots = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2^m} \cdot (b - a) = 0$$

Proviamo che $\bar{a} (= \bar{b}) = \alpha$

$$0 \leq [f(\bar{a})]^2 = f(\bar{a}) \cdot f(\bar{b})$$

$$= f\left(\lim_{m \rightarrow \infty} a_m\right) \cdot f\left(\lim_{m \rightarrow \infty} b_m\right) \quad (\text{essendo } f \text{ continua})$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} f(a_m) \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} f(b_m)$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} f(a_m) \cdot f(b_m) \leq 0 \quad (3)$$

Consegue che $f(\bar{a}) = 0 \Rightarrow \bar{a} = \alpha$

Ora infine provare che anche $\{c_m\}$ tende ad α . Essendo $\{c_m\}$ la successione dei punti medi, avremo

$$a_m < c_m < b_m$$

$m \rightarrow \infty$



$m \rightarrow \infty$



Dal teorema dei due confronti (o del doppio confronto) deduciamo che

$$\lim_{m \rightarrow \infty} c_m = \alpha$$

□

Criteri di arresto

Non potendo costruire gli infiniti elementi delle successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$,

termineremo l'iterazione quando avremo raggiunto un'accuratezza sufficiente.



Volendo scegliere c_m quale approssimante di α , andiamone a calcolare le distanze:

$$|c_m - \alpha| < b_m - a_m$$

La maggiorazione $b_m - a_m$ è calcolabile

Quindi, come criterio di arresto,

possiamo usare

$$|b_m - a_m| < tol$$

essendo tol la precisione richiesta dall'utente.

Seguono i codici MATLAB e PYTHON

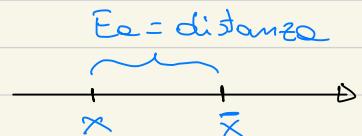
Richiamiamo le seguenti definizioni

Siano $x \in \mathbb{R}$ una quantità teorica
e \bar{x} una sua approssimazione.

Si definiscono:

Errore assoluto

$$E_a = |x - \bar{x}|$$



L'errore assoluto è la distanza tra x e \bar{x}

nella retta reale.

Eruore relativo

$$E_r = \frac{|x - \bar{x}|}{|x|} \quad \text{se } x \neq 0$$

L'errore relativo scala l'errore assoluto

delle grandezze delle quantità da approssimare.

L'importante dell'errore relativo è quella di fornirci un'informazione sul numero di cifre significative corrette contenute nell'approssimazione \bar{x} . Più precisamente,

scrivendo in base 10, se

$$\frac{|x - \bar{x}|}{|x|} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-d}$$

Allora l'approssimazione \bar{x} contiene almeno

d cifre significative corrette. Questo significa che gli avvicendamenti di x e \bar{x} a d cifre coincidono.

Errore misto

$$E_m = \frac{|x - \bar{x}|}{1 + |x|}$$

L'errore misto è utile sul calcolatore quando $|x| \approx 0$, per cui l'espressione dell'errore relativo causerebbe problemi. Può essere interpretato come una sorta di media tra l'errore assoluto e l'errore relativo. Infatti

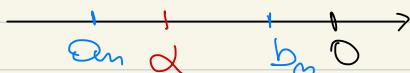
$$\frac{|x - \bar{x}|}{1 + |x|} \begin{cases} \sim |x - \bar{x}| & \text{se } x \approx 0 \\ \sim \frac{|x - \bar{x}|}{|x|} & \text{se } |x| \gg 1 \end{cases}$$

Torniamo a discutere i criteri di arresto del metodo delle successive bisezioni. Abbiamo già esaminato quello sull'errore assoluto. Vediamo come ottenere un criterio di arresto basato sull'errore relativo. Facciamo riferimento ai seguenti grafici

$$\alpha > 0$$



$$\alpha < 0$$



Poiché $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \alpha$, per m grande, a_m e b_m avranno lo stesso segno di α .

Pertanto:

$$\alpha > 0 : a_m < \alpha \Rightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{a_m}$$

$$\alpha < 0 : \alpha < b_m \Rightarrow \frac{1}{-\alpha} < \frac{1}{b_m} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{|\alpha|} < \frac{1}{|b_m|}$$

Volendo racchiudere in un unico caso :

$$\frac{1}{|d|} < \frac{1}{\min\{|a_n|, |b_n|\}}$$

In definitiva, il criterio di arresto sull'errore assoluto diventa :

$$\frac{|b_n - a_n|}{\min\{|a_n|, |b_n|\}} < tol$$

Infine, il criterio di arresto sull'errore misto è :

$$\frac{|b_n - a_n|}{1 + \min\{|a_n|, |b_n|\}} < tol$$

Osservazione. Lavorando con l'errore assoluto,

è possibile stabilire a priori il numero di iterazioni necessarie per ottenere una certa

accettere tol. Infatti, durante la dimostrazione delle convergenze, avremo stabilito che

$$b_m - a_m = \frac{b-a}{2^m}$$

Dunque, il criterio di arresto

$$b_m - a_m < tol$$

dovrà

$$\frac{b-a}{2^m} < tol$$

che può essere risolto rispetto all'incognita m :

$$2^m > \frac{b-a}{tol}$$

$$m > \log_2 \frac{b-a}{tol}$$

arondamento
all'intero
successivo

Quindi potremo scegliere $m = \lceil \log_2 \frac{b-a}{tol} \rceil$

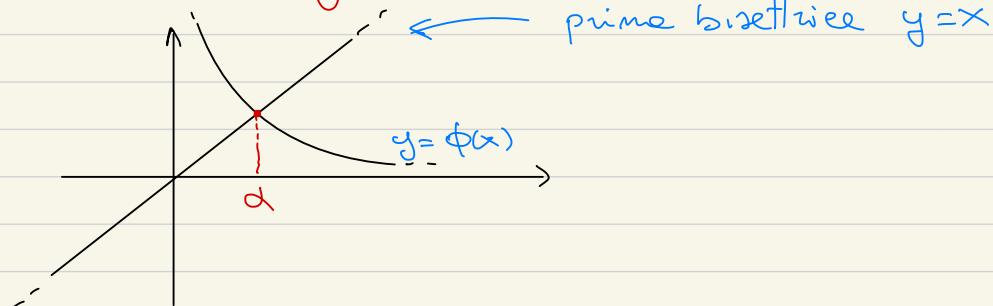
METODI ONE-STEP (a un passo)

Definizione

Sia $\phi : [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}$. $\alpha \in [\alpha, b]$ si dice punto fermo di ϕ se

$$\phi(\alpha) = \alpha$$

L'interpretazione geometrica



Poiché la prima bisettrice è il luogo geometrico dei punti che hanno le stesse ascisse e ordinate, i punti fermi di ϕ sono le ascisse dei punti di intersezione del grafico di ϕ con la prima bisettrice. In effetti

$$x = \phi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = \phi(x) \end{cases}$$

Trasformeremo il problema della ricerca degli zeri di una funzione $f(x)$ in un problema equivalente della ricerca dei punti fermi di un'opportuna funzione $\phi(x)$:

$$f(x) = 0 \iff x = \phi(x)$$

a zero di f

a punto fisso di ϕ

Dire che i due problemi sono equivalenti, significa dire che le due equazioni $f(x) = 0$ e $x = \phi(x)$ ammettono le medesime soluzioni.

Il vantaggio di operare con la ϕ è che l'equazione $x = \phi(x)$ suggerisce il seguente metodo risolutivo. Si genera lo seguente

successione

$$(1) \quad \begin{cases} x_0 \text{ assegnato} & (\text{stima iniziale di } d) \\ x_m = \phi(x_{m-1}) \end{cases}$$

Sotto opportune ipotesi che studieremo in seguito,
si ha:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = d$$

cioè, la successione $\{x_m\}$ converge a un
punto fisso di ϕ .

Esempio

$$f(x) = x - \cos x$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \cos x$$

e quindi scegliamo $\phi(x) = \cos x$.

Partiamo da $x_0 = 0$ e calcoliamo la
successione $\{x_m\}$:

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = \cos(x_0) = \cos(0) = 1$$

$$x_2 = \cos(x_1) = \cos(1) = 0.5403\dots$$

$$x_3 = \cos(x_2) = 0.8575\dots$$

$$x_4 =$$

$$x_5 =$$

$$x_6 =$$

}

$$x_{10} = \cos(x_9) \approx 0.73140\dots$$

}

$$x_{20} = \approx 0.73893\dots \approx \alpha$$

La (1) è detta metodo one-step

(la costruzione di x_m dipende dall'elemento precedentemente calcolato x_{m-1}).

La funzione ϕ è detta funzione iteratrice

Osservazione

Se ϕ è una funzione continua in $[a, b]$ ed

esiste $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \alpha$, necessariamente α

dovranno essere punti fino di ϕ . Infatti:

$$\begin{aligned}\zeta &= \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi(x_{m-1}) = \phi\left(\lim_{m \rightarrow \infty} x_{m-1}\right) \\ &= \phi(\zeta)\end{aligned}$$

\downarrow
 ϕ è continua

Notazioni e richiami

Denoteremo con

$$C([a, b]) = \{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua in } [a, b] \}$$

$$C^1([a, b]) = \{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ derivabile in } [a, b] \text{ con } f'(x) \text{ continua in } [a, b] \}$$

Evidentemente $C^1([a, b]) \subset C([a, b])$

Più in generale:

$$C^k([a, b]) = \{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ derivabile } k \text{ volte in } [a, b], \text{ con } f^{(k)}(x) \text{ continua in } [a, b] \}$$

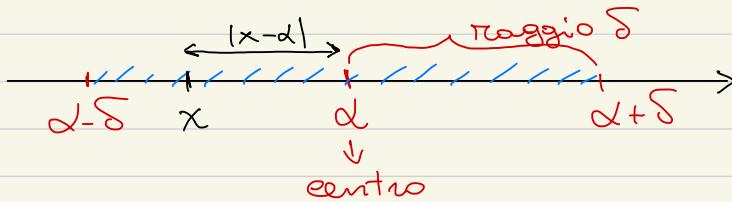
$$C^k([a, b]) \subset C^{k-1}([a, b]) \subset \dots \subset C^1([a, b]) \subset C([a, b])$$

intorno sférico.

Siamo $\alpha \in \mathbb{R}$, e $\delta > 0$. Si definisce intorno sférico di centro α e raggio δ e lo si denota con $B(\alpha, \delta)$:

Ball

$$B(\alpha, \delta) = (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$$



Vediamo di interpretare la scrittura $x \in B(\alpha, \delta)$

$$x \in B(\alpha, \delta) \Leftrightarrow x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \Leftrightarrow$$

$$\alpha - \delta < x < \alpha + \delta \Leftrightarrow -\delta < x - \alpha < \delta \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{|x - \alpha|}_{\text{distanza di } x \text{ dal centro } \alpha} < \underbrace{\delta}_{\text{raggio}}$$

distanza di x dal centro α
raggio

In conclusione: $x \in B(\alpha, \delta) \Leftrightarrow$

la distanza di x dal centro α dell'intorno
è minore del raggio δ .

Definizione (di convergenza locale)

Siamo $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha \in (a, b)$ punto fisso
di ϕ . Il metodo one-step indotto dalla
funzione iterativa ϕ si dice localmente
convergente al punto fisso α se:

$\exists B(\alpha, \delta)$, intorno sferrato di centro α
e raggio δ , tale che, $\forall x_0 \in B(\alpha, \delta)$:

(a) $x_m \in B(\alpha, \delta)$, $m \geq 0$

(b) $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \alpha$

Osservazione. Nel caso di convergenza locale

si richiede che x_0 sia una stima sufficientemente buona di λ .

Definizione (di convergenza globale)

Siano $\phi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ e λ punto fisso di ϕ .

Il metodo iterativo one-step definito dalla funzione iterativa ϕ è detto globalmente convergente ad λ in $[a,b]$ se, $\forall x_0 \in [a,b]$:

(a) $x_m \in [a,b], \quad m \geq 0$

(b) $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \lambda$

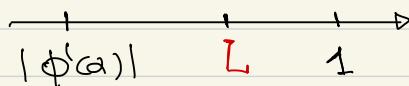
Osservazione:

Convergenza globale \Rightarrow convergenza locale

Teorema (condizione sufficiente per la convergenza locale)

Siamo $\phi \in C^1([a, b])$ e α punto fisso di ϕ in (a, b) . Allora, se $|\phi'(\alpha)| < 1$ il metodo one-step definito dalla funzione iterativa ϕ risulta localmente convergente ad α .

DIM



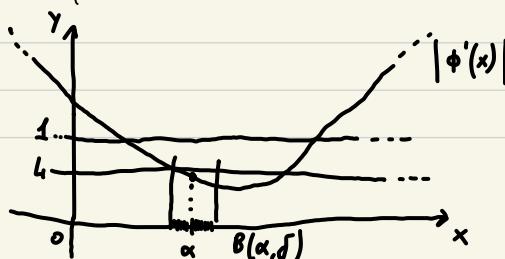
Sia $0 < L < 1$ t.c. $|\phi'(\alpha)| < L < 1$

Essendo $\phi \in C^1([a, b])$, $\phi'(\alpha)$ è continua in $[a, b]$ così pure il suo rapporto assoluto $|\phi'(\alpha)|$.

Per il teorema della permanenza del segno

viene ad α , $|\phi'(\alpha)|$ continua a essere minore

di L :



$$\exists B(\alpha, \delta) \text{ t.c. } |\phi(x)| < L \quad \forall x \in B(\alpha, \delta)$$

Facciamo vedere che, all'interno di questo intorno, sono verificate le due proprietà (a) e (b) della definizione di convergenza locale.

Proprietà (a)

Si procede per induzione sull'indice m .

Per $m=0$ l'asserito è vero in quanto, per definizione, sappiamo che $x_0 \in B(\alpha, \delta)$.

Supponiamo l'asserito vero per $m-1$, cioè $x_{m-1} \in B(\alpha, \delta)$ e proviamolo per m . Risulta:

$$\begin{aligned} |x_m - \alpha| &= |\phi(x_{m-1}) - \phi(\alpha)| \\ &\stackrel{\text{ETA}}{=} \underbrace{|\phi'(y_{b_{m-1}})(x_{m-1} - \alpha)|}_{\text{per il teorema di Lagrange}} \end{aligned}$$

dove y_{m-1} è un opportuno punto tra

x_{m-1} e α



Osserviamo che $y_{m-1} \in B(\alpha, \delta) \Rightarrow |\phi(y_{m-1})| < L$

Dunque:

$$|x_m - \alpha| = |\phi(y_{m-1})| \cdot |x_{m-1} - \alpha| < L \cdot |x_{m-1} - \alpha|$$

$$\begin{matrix} \text{dall'ipotesi} \\ \text{induttiva} \end{matrix} \quad < L_1 \cdot \delta \stackrel{L < 1}{<} \delta$$

Proprietà (b)

Abbiamo visto che $|x_m - \alpha| < L_1 |x_{m-1} - \alpha|$

Essendo m generico, possiamo iterare:

$$\begin{aligned} |x_m - \alpha| &< L_1 |x_{m-1} - \alpha| < L_1^2 |x_{m-2} - \alpha| < \dots \\ &< L_1^m |x_0 - \alpha| \end{aligned}$$

Quindi, in conclusione:

$$0 \leq |x_m - \alpha| < \bigcup_{n=1}^m |x_n - \alpha|$$

$m \rightarrow \infty$
 \downarrow
 0

Per il teorema della convergenza obbligata
(o dei due carabinieri) :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |x_m - \alpha| = 0$$



$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \alpha$$

□

Osservazione

- Se $|\phi'(\alpha)| > 1$ il metodo non può essere localmente convergente ad α . Infatti, vicino ad α , $|\phi'(x)| > L > 1$ e quindi se x_0 è sufficientemente vicino ad α

$$|x_1 - \alpha| > L|x_0 - \alpha| > |x_0 - \alpha|$$

ci allontaniamo da α .

- Se $|\phi'(\alpha)| = 1$, non si può dire nulla a priori circa la convergenza locale.

Osserviamo ulteriormente che nelle ipotesi avremmo potuto scrivere $\phi \in C^1(B(\alpha, r))$ anziché scrivere $\phi \in C^1([a, b])$.

Teorema (condizione sufficiente per la convergenza globale)

Sia $\phi \in C^1([a, b])$ tale che:

$$1) \quad \phi([a, b]) \subset [a, b]$$

$$2) \quad |\phi'(x)| < 1, \quad \forall x \in [a, b]$$

Allora ϕ ammette un unico punto fisso $\alpha \in [a, b]$ e il metodo one-step definito dalla funzione iterativa ϕ risulta essere

globalmente convergente ad α nell'intervallo $[a, b]$.

DIM

Proviamo innanzitutto l'esistenza e l'unicità del punto fermo di ϕ . A tal fine consideriamo la seguente funzione ausiliaria $g(x)$:

$$g(x) = x - \phi(x)$$

Ovviamente $g \in C^1([a, b])$ e risulta

$$g'(x) = 1 - \phi'(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

cioè $g(x)$ è strettamente crescente in $[a, b]$.

Inoltre:

$$\begin{aligned} g(a) &= a - \phi(a) \leq 0 && \text{dalle (1)} \\ g(b) &= b - \phi(b) \geq 0 \end{aligned}$$

Per un teorema di localizzazione, $g(x)$

ammette un unico zero $\alpha \in [a, b]$:

$$\exists ! \alpha \in [a, b] \text{ t.c. } g(\alpha) = 0$$

$$\alpha - \phi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \phi(\alpha)$$

Ora proviamo a dimostrare le proprietà

(a) e (b) delle definizione di conseguenze

globale.

Proprietà (a)

Dall'ipotesi 1) Sappiamo che

$$\phi([a, b]) \subset [a, b]$$

Cioè significa che:

$$\forall x \in [a, b] : \phi(x) \in [a, b]$$

Questo equivale alla proprietà (a) :

$$x_0 \in [a, b] \Rightarrow x_1 = \phi(x_0) \in [a, b] \Rightarrow \dots \Rightarrow x_m \in [a, b]$$

Propriété (b)

Sie $M = \max_{a \leq x \leq b} |\phi'(x)| < 1$

Il massimo M esiste per il teorema di

Weierstrass, essendo $|\phi'(x)|$ continua in $[a, b]$.

$$0 \leq |x_m - \alpha| = |\phi(x_{m-1}) - \phi(\alpha)|$$

$$= |\phi'(y_{b_{m-1}})| |x_{m-1} - \alpha|$$

$$< M |x_{m-1} - \alpha| < M^2 |x_{m-2} - \alpha| \dots$$

$$< M^m |x_0 - \alpha|$$

Per il teorema dei due acciuffieri

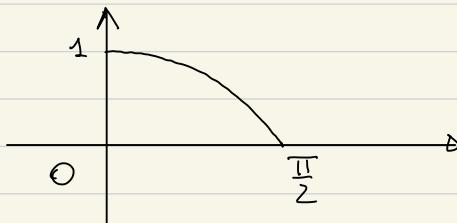
$$\lim_{m \rightarrow \infty} |x_m - \alpha| = 0$$

□

Esempio Riprendiamo l'esempio

$$x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \cos x$$

$$\phi(x) = \cos x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$



$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \cos x \leq 1 < \frac{\pi}{2}$$

quindi la proprietà 1) è verificata:

$$\phi([0, \frac{\pi}{2}]) \subset [0, \frac{\pi}{2}]$$

Oltre:

$$|\phi'(x)| = |- \sin x| = \sin x$$

$$0 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

La proprietà 2) è verificata in

$$[0, \frac{\pi}{2}) \text{ essendo } \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Se tuttavia, scegliendo $x_0 = \frac{\pi}{2}$ otteniamo:

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{e quindi anche}$$

con queste scelte di x_0 otteniamo la

convergenza add. Quindi il

metodo risulta globalmente convergente

in $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Esercizio

Si consideri la funzione

$$f(x) = x^3 - 2x - 5, \quad x \in [1, 3]$$

- 1) Provare che $f(x)$ ammette un unico zero
 $x \in (1, 3)$

- 2) Per l'approssimazione di x si considerino i seguenti due metodi iterativi one-step:

(a) Il primo metodo è ottenuto andando a risolvere l'equazione

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

isolando il secondo termine:

$$x = \frac{x^3 - 5}{2}$$

Più suggestiva la funzione iterativa

$$\phi_1(x) = \frac{x^3 - 5}{2}$$

(b) Lo si ottiene risolvendo rispetto al
primo termine x^3 :

$$x = \sqrt[3]{2x+5}$$

de cui la funzione iterativa

$$\phi_2(x) = \sqrt[3]{2x+5}$$

Studiare le convergenze locale e globale
dei due metodi definiti da $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$.

Svolgimento

1) $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 - 5 = 1 - 2 - 5 = -6 < 0$

$$f(3) = 3^3 - 2 \cdot 3 - 5 = 27 - 11 = 16 > 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2 > 0 \quad \forall x \in [1, 3]$$

Per il secondo teorema di localizzazione degli
zeri, f ammette un unico zero $d \in (1, 3)$

2) Cominciamo a studiare il metodo (a).

$$\phi_1(x) = \frac{x^3 - 5}{2} \quad \text{da cui}$$

$$\phi'_1(x) = \frac{3}{2}x^2 \geq \frac{3}{2} > 1 \quad \forall x \in [1, 3]$$



$$\phi'_1(x) > 1$$

Quindi il metodo (a) non converge localmente.

A maggior ragione non converge globalmente in $[1, 3]$.

Passiamo a studiare il metodo (b)

$$\phi_2(x) = \sqrt[3]{2x+5} = (2x+5)^{\frac{1}{3}}$$

$$\phi'_2(x) = \frac{1}{3}(2x+5)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(2x+5)^2}}$$

$\phi'_2(x)$ decresce nell'intervallo di lavoro $[1, 3]$,

pertanto:

$$0 < \phi_2'(x) \leq \max_{1 \leq x \leq 3} \phi_2'(x) = \phi_2'(1) = \frac{2}{3}.(7) \approx 0.18 - \frac{2}{3}$$

$$0 < \phi_2'(x) < 1$$

Possiamo subito concludere che $|\phi_2'(x)| < 1$

e quindi il metodo (b) converge localmente.

Per la convergenza globale, resta da provare la condizione 1) del relativo teorema:

$\phi_2([1,3]) \subset [1,3]$, il che significa:

$$1 \leq x \leq 3 \Rightarrow 1 \leq \phi_2(x) \leq 3$$

Dovremo risolvere il sistema

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2x+5} \geq 1 \\ \sqrt[3]{2x+5} \leq 3 \end{cases}$$

Detto S l'insieme delle soluzioni dobbiamo verificare se $[1,3] \subset S$

da risoluzione del sistema è la scrittura per esercizio. Seguiremo un'alternativa più breve. Ossiamo visto che $\phi'_2(x) > 0$, quindi $\phi_2(x)$ è strettamente crescente in $[1,3]$. Allora:

$$1 \leq x \leq 3 \Rightarrow \phi_2(1) \leq \phi_2(x) \leq \phi_2(3)$$

$$\sqrt[3]{7} \stackrel{11}{\approx} 1.91$$

$$\begin{matrix} \checkmark \\ 1 \end{matrix}$$

$$\sqrt[3]{11} \stackrel{11}{\approx} 2.22$$

$$\begin{matrix} \wedge \\ 3 \end{matrix}$$

Quindi abbiamo posso che $1 < \phi_2(x) < 3$.

Il metodo (b) risulta globalmente convergente in $[1,3]$

Osservazione

La scrittura è possibile quando $\phi(x)$

\bar{e} monotona in $[a, b]$. In particolare:

$\phi(x)$ è crescente in $[a, b]$:

$$a \leq x \leq b \Rightarrow \phi(a) \leq \phi(x) \leq \phi(b)$$

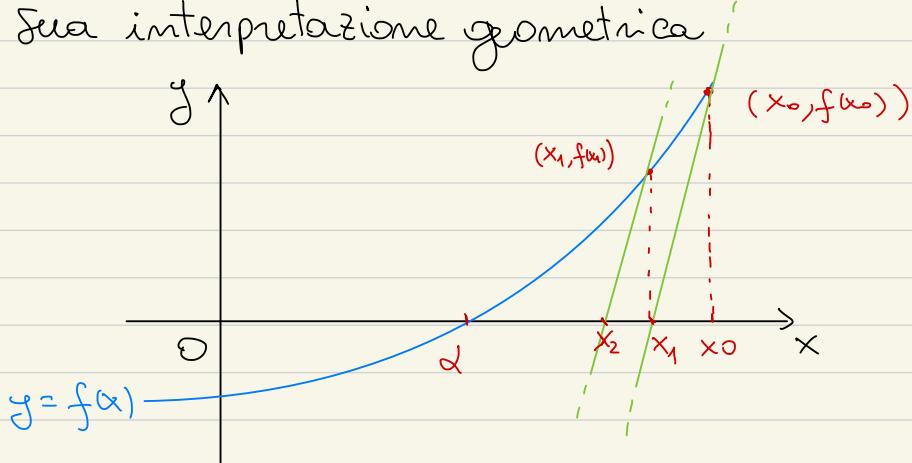
$\phi(x)$ è decrescente in $[a, b]$:

$$a \leq x \leq b \Rightarrow \phi(b) \leq \phi(x) \leq \phi(a)$$

Procediamo col definire e studiare
i metodi one-step principali.

Metodo della direzione costante

Introduciamo questo metodo mediante la sua interpretazione geometrica



A partire da una stima iniziale x_0 di α , si considera la retta passante per il punto $(x_0, f(x_0))$ e di coefficiente angolare $\frac{1}{m}$ (con $m \neq 0$). La sua equazione sarà:

$$y - f(x_0) = \frac{1}{m} (x - x_0)$$

Definiamo x_1 come l'intercetta di questa

retta con l'asse delle ascisse :

$$\begin{cases} y - f(x_0) = \frac{1}{m}(x - x_0) \\ y = 0 \end{cases}$$

da cui

$$x_1 = x_0 - m f(x_0)$$

Iterando le procedure si perviene al metodo
delle direzioni costante :

$$\begin{cases} x_0 \text{ assegnato} \\ x_m = x_{m-1} - m f(x_{m-1}) \end{cases}$$

La funzione iteratrice è :

$$\phi(x) = x - m f(x)$$

Essa dipende dal parametro m . Come
deve essere scelto questo parametro per ottenere
convergenza locale o globale ? Risulta :

$$\phi'(x) = 1 - m f'(x)$$

Convergenza locale

Dovremo imporre

$$|\phi'(d)| < 1$$

$$-1 < 1 - m f'(d) < 1 \quad \text{sottraendo 1}$$

$$-2 < -m f'(d) < 0 \quad \text{cambiamo segno}$$

$$0 < m f'(d) < 2$$

Questa è la condizione per le convergenze locali. Per la convergenza globale si ha il seguente risultato.

Teorema (di convergenza globale)

Sia $f \in C^1([a, b])$ tale che:

(a) $f(a) \cdot f(b) < 0$

(b) $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$

(c) $0 < m f'(x) \leq 1, \forall x \in [a, b]$

Allora f ammette un unico zero $\alpha \in (a, b)$
e il metodo delle direzioni costante converge
globalmente ad α in tutto l'intervallo $[a, b]$.

Dalle (e) ricaviamo:

$$0 < m \cdot f'(x) \leq 1 \quad \text{cambiando segno}$$

$$-1 \leq -m f'(x) < 0 \quad \text{aggiungiamo } 1$$

$$0 \leq 1 - m f'(x) < 1$$

$$0 \leq \phi'(x) < 1$$

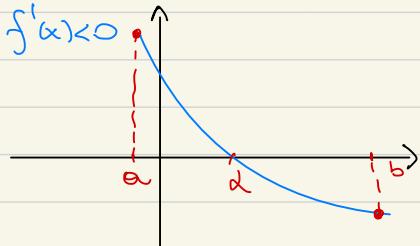
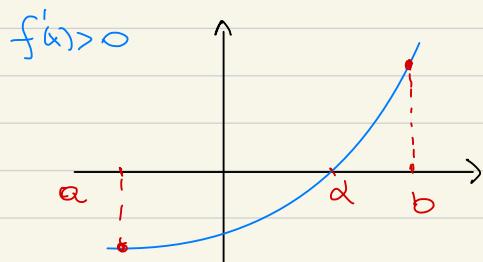
Quindi la seconda ipotesi del teorema di
convergenza globale è soddisfatta. Resta da
provare che $\phi([a, b]) \subset [a, b]$

Poiché $\phi'(x) \geq 0$, $\phi(x)$ è monotone crescente
e quindi

$$a \leq x \leq b \Rightarrow \phi(a) \leq \phi(x) \leq \phi(b)$$

Si possono presentare i due casi schematizzati

nelle due figure sottostanti:



Discussiamo il primo caso ($f'(x) > 0$);

l'altro lo si lascia per esercizio. Risulta:

$$\phi(a) = a - m \underset{\text{V}}{\underset{\text{O}}{\wedge}} f(a) > a$$

$$\phi(b) = b - m \underset{\text{V}}{\underset{\text{O}}{\wedge}} f(b) < b$$

In conclusione

$$a \leq x \leq b \Rightarrow a \leq \phi(x) \leq b$$

□

Metodo di Newton (o delle tangenti)

Definiamo questo metodo mediante due strategie
di diverse

Approccio analitico

O partire da una stima iniziale x_0 ,
sviluppiamo $f(x)$ come polinomio di Taylor
annestato al primo ordine in un intorno di x_0 :

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{parte lineare di } f} + \underbrace{o(x-x_0)}_{\text{infinitesimo di ordine superiore}}$$

dove $o(x-x_0)$ denota un infinitesimo
di ordine superiore al primo per $x \rightarrow x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(x-x_0)}{x-x_0} = 0$$

Se x è vicino a x_0 , potremo trascurare
l'infinitesimo $o(x-x_0)$ e scrivere

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ora ziché risolvere $f(x) = 0$, risolveremo

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

Denotando con x_1 la soluzione, si ottiene:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

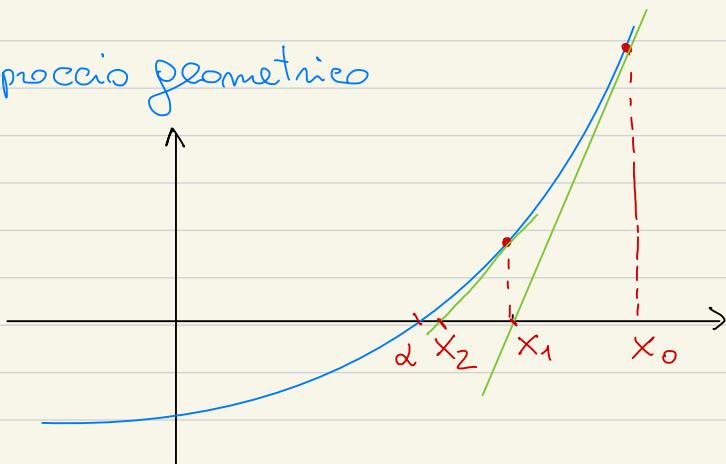
Iterando la procedura si ottiene il metodo di Newton:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \text{ assegnato} \\ x_m = x_{m-1} - \frac{f(x_{m-1})}{f'(x_{m-1})} \end{array} \right.$$

Da cui, la funzione iteratrice è:

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Approccio geometrico



L'equazione della retta tangente al grafico
di f nel punto di ascissa x_0 , è:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Denotiamo con x_1 l'intercetto delle retta
con l'asse X . Ponendo $y=0$, si ottiene

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Ripetendo le procedure si ottiene il metodo
di Newton.

Studiamo le convergenze locali del metodo di Newton. Premettiamo la seguente definizione.

Definizione (moltiplicità di uno zero)

Sia $f \in C^d(B(\alpha, \delta))$, α zero di f .

La moltiplicità (o ordine) dello zero α di f è un intero d tale che:

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(d-1)}(\alpha) = 0 \quad \wedge \quad f^{(d)}(\alpha) \neq 0$$

Significato analitico

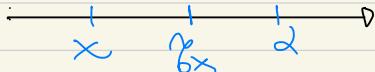
Consideriamo lo sviluppo di Taylor di f in un intorno di α :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + f''(\alpha) \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \\ &\quad + \dots + f^{(d-1)}(\alpha) \frac{(x-\alpha)^{d-1}}{(d-1)!} + f^{(d)}(\gamma_x) \frac{(x-\alpha)^d}{d!} \end{aligned}$$

Poiché la moltiplicità di α è d , risulta:

$$f(x) = \frac{(\gamma_{bx})^d}{d!} (x-\alpha)^d, \text{ con } \gamma_x \text{ opportuno}$$

punto fra x e α



Poiché $f^{(d)}(\alpha) \neq 0$, per $x \approx \alpha$ anche

$f^{(d)}(\gamma_{bx}) \neq 0$. Osserviamo che in un intorno di α , $f(x)$ si comporta come

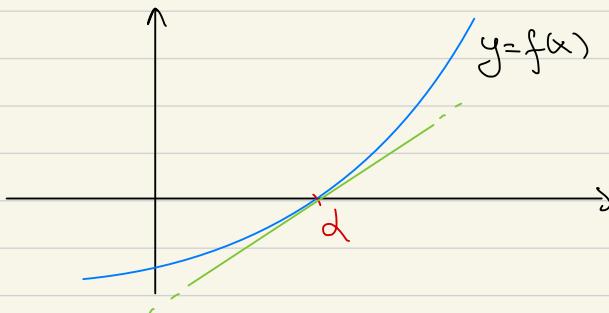
$$f(x) \approx \text{cost.} (x-\alpha)^d$$

e quindi

$$f(x) = 0 \sim (x-\alpha)^d = 0$$

L'interpretazione geometrica

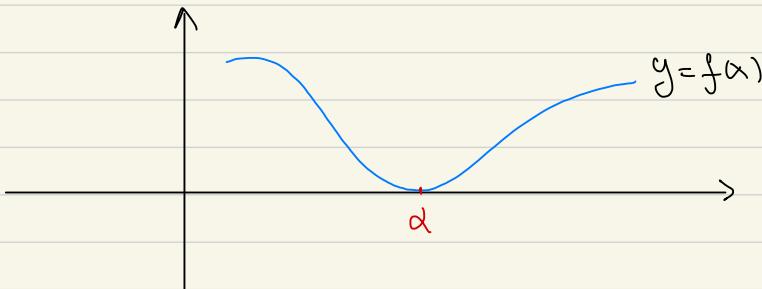
$$d=1 \quad (f(\alpha)=0 \wedge f'(\alpha) \neq 0)$$



In tal caso α si dice zero semplice.

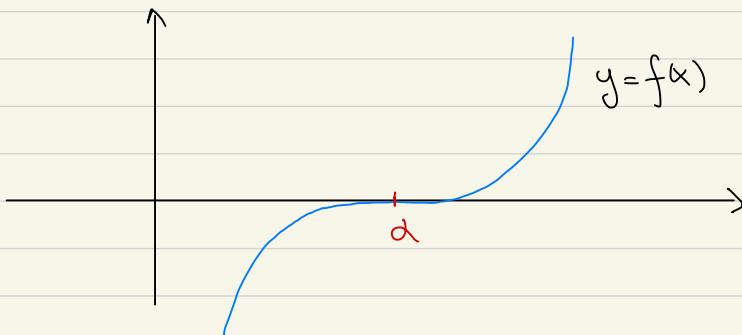
Questo è il caso più frequente.

$$d=2 \quad (f(\alpha) = f'(\alpha) = 0 \wedge f''(\alpha) \neq 0)$$



In questo caso α si dice zero doppio.

$$d=3 \quad (f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = 0 \wedge f'''(\alpha) \neq 0)$$



Torniamo al metodo di Newton.

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

La sua derivata prima è :

$$\phi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Distinguiamo due casi

- x zero semplice: $f(x)=0$ e $f'(x) \neq 0$

Possiamo calcolare

$$\phi'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} = 0$$

$\frac{\cancel{+}}{0}$

Dal teorema di convergenza locale, concludiamo
che il metodo di Newton è localmente
convergente

- α zero di molteplicità $d \geq 2$:

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(d-1)}(\alpha) = 0 \quad \wedge \quad f^{(d)}(\alpha) \neq 0$$

$\phi'(x)$ non è definita in α poiché

il denominatore si annulla. Tuttavia,

è possibile dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \phi'(x) = 1 - \frac{1}{d}$$

Possiamo prolungare la $\phi'(x)$ per continuità

in α , ponendo, per definizione

$$\phi'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \phi'(x) = 1 - \frac{1}{d}$$

Anch'esso in questo caso risulta che $|\phi'(\alpha)| < 1$

e otteniamo la convergenza locale

Conclusione: il metodo di Newton è sempre localmente convergente.

Studiamo ora la convergenza globale

Teorema (di cons. globale del metodo di Newton)

Sia $f \in C^2([a, b])$ tale che:

(a) $f(a) \cdot f(b) < 0$

(b) $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$

(c) $f''(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$

Allora f ammette un unico zero $\alpha \in (a, b)$.

Inoltre, scelto $x_0 \in [a, b]$ tale che

$f(x_0) \cdot f''(x) > 0$, il metodo di Newton

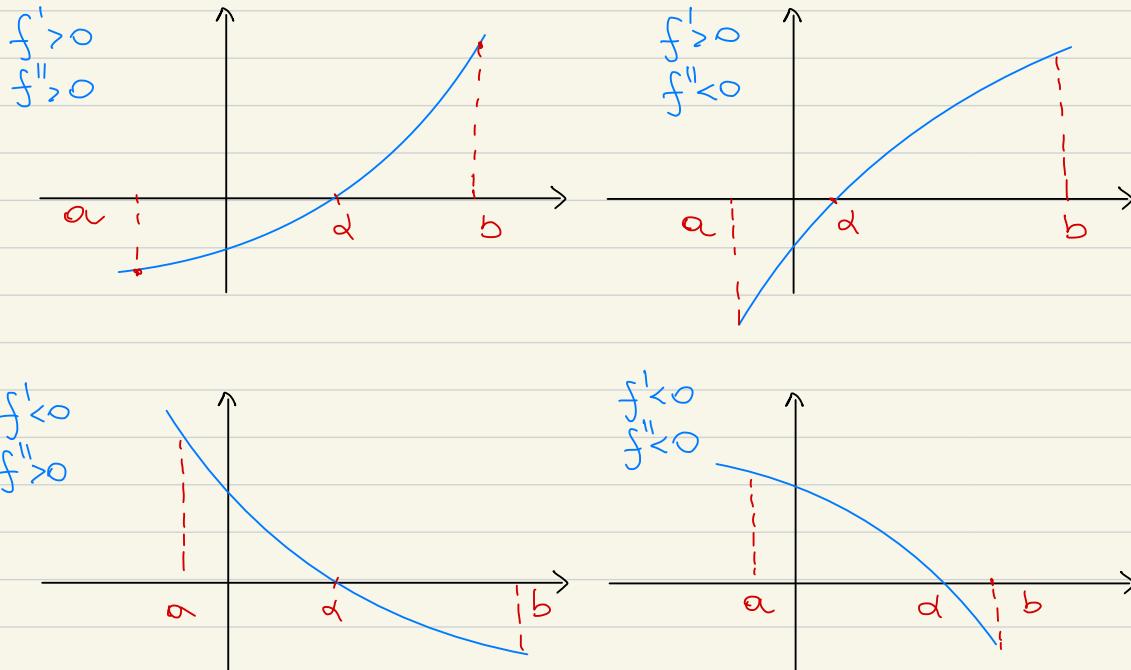
genera una successione $\{x_n\}$ che

converge ad α monotonicamente

DIM

L'esistenza e l'unicità della zero $d \in (a, b)$ di f discende dalle ipotesi (a) + (b).

Si distinguono quattro casi schematizzati nei grafici sottostanti:



Esaminiamo il primo caso, $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$,

mentre gli altri 3 casi sono lasciati per esercizio.

Ricordiamo che:

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad \phi'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Dall'enunciato del teorema, dobbiamo scegliere

$x_0 \in (a, b]$. Facciamo innanzitutto vedere

$$\text{che } \phi((a, b]) \subset (a, b]$$

Poiché in $(a, b]$ risulta $\phi'(x) > 0$, ne

consegue che ϕ è strettamente crescente in $(a, b]$:

$$a < x \leq b \implies \phi(a) < \phi(x) \leq \phi(b)$$

Ora:

$$\phi(a) = a$$

$$\phi(b) = b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b$$

Abbiamo provato che $a < \phi(x) < b$

Facciamo infine vedere che $\{x_n\}$ converge ad α ed è una successione strettamente decrescente.

Dal punto precedente sappiamo che $x_n \in (\alpha, b]$

$\forall n \geq 0$,

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} < x_{n-1}$$

0
 1
 ✓

$\{x_n\}$ è strettamente decrescente e limitata inferiormente da α . Dall'analisi ammette limite finito

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \beta \geq \alpha$$

Poiché β è punto fermo di f , necessariamente dovrà essere $\beta = \alpha$

□

Corollario Nelle stesse ipotesi (a), (b) e (c)

dell teorema, se $x_0 \in [a, b]$ e $x_1 = \phi(x_0) \in [a, b]$,
allora la successione $\{x_n\}$ converge ad a .

DIM

Facendo riferimento sempre al primo caso,
se scegliamo $x_0 \in [a, \alpha)$, essendo $\phi'(x) < 0$
in $[a, \alpha)$ segue che $\phi(x)$ è strettamente
decrecente e quindi

$$x_0 < \alpha \implies x_1 = \phi(x_0) > \phi(\alpha) = \alpha$$

e quindi, dall'ipotesi $x_1 \in [a, b]$ segue
che $x_1 \in (\alpha, b]$ e da questo
punto in poi sale il teorema precedente.

Ordine di convergenza

È uno strumento che ci consente di stimare la velocità con cui una successione convergente tende al suo valore limite. Questo strumento ci consentirà di confrontare i metodi iterativi in base alle rapidità di convergenza delle successioni che essi generano.

Definizione

Sia $\{x_m\}$ una successione convergente ad $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \alpha \in \mathbb{R}$$

Si definisce ordine di convergenza della successione $\{x_m\}$ un reale positivo $p > 0$ tale che esiste e sia finito il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - d|}{|x_n - d|^p} = e$$

con $0 < e < +\infty$

Sigmficato

Per n abbastanza grande (definitivamente) possiamo scrivere

$$\frac{|x_{n+1} - d|}{|x_n - d|^p} \approx e$$

da cui

$$|x_{n+1} - d| \approx e \cdot |x_n - d|^p$$

Tale uguaglianza relazione l'errore assoluto a un generico punto con l'errore assoluto al punto precedente e quindi esprime la legge con cui l'errore si riduce (per n grande) ad ogni punto. Ne consegue che

La riduzione dell'errore ad ogni passo sarà
tanto maggiore

- quanto più grande è il valore di p
- quanto più piccolo è il valore di c

La costante c è detta **costante asintotica di convergenza**. La convergenza si dice:

- lineare, se $p = 1$;
- superlineare, se $p > 1$;
- quadratica, se $p = 2$.

Osservazione

Se $p = 1$, necessariamente $0 < c < 1$. Infatti,
per m grande, abbiamo

$$|x_{m+1} - \alpha| \approx c |x_m - \alpha|$$

Se c fosse maggiore o uguale a 1,

la distanza tra x_n e α non si ridurrebbe
al crescere di n , e ciò contraddice l'ipotesi
che $x_n \rightarrow \alpha$.

Definizione (di ordine di convergenza di un metodo iterativo)

Un metodo iterativo per la ricerca degli zeri di una
funzione si dice avere ordine p se, applicato
a una data classe di funzioni, genera successioni
che convergono allo zero con ordine p .

Esempio

Consideriamo due metodi iterativi one-step

definiti dalle due funzioni iterative ϕ_1 e ϕ_2 ,
e supponiamo che, applicati per la ricerca

di uno zero α di una funzione f :

Φ_1 : $P_1 = 1$ (convergenza lineare) e $c_1 = \frac{1}{10}$

Φ_2 : $P_2 = 2$ (convergenza quadratica) e $c_2 = 10$

Stiamo avvantaggiando il primo metodo
relativamente al valore delle costante asintotica:

$$c_2 = 100 \cdot c_1$$

Ipotesi di lavoro: scegliamo, per i due metodi,
una condizione iniziale x_0 t.c.

$$|x_0 - \alpha| = 10^{-2}$$

e supponiamo di trovarci in un intorno abbastanza
piccolo di α , in modo tale che

$$|x_{n+1} - \alpha| \approx c |x_n - \alpha|^p$$

Generiamo le due successioni.

<u>m</u>	ERRORE ASSOLUTO $x_{m+1} = \phi_1(x_m)$	ERRORE ASSOLUTO $x_{m+1} = \phi_2(x_m)$
0	10^{-2}	10^{-2}
1	$\approx 10^{-3}$	$\approx 10^{-3}$
2	$\approx 10^{-4}$	$\approx 10^{-5}$
3	$\approx 10^{-5}$	$\approx 10^{-9}$
4	$\approx 10^{-6}$	$\approx 10^{-17}$

Osservazione

In caso di convergenza quadratica, se la costante assintotica $c \approx 1$, il numero di cifre significative dell'approssimazione allo zero α , definitivamente raddoppia da un passo al successivo

$$|x_{m+1} - \alpha| \approx \underset{\frac{1}{2}}{c} |x_m - \alpha|^2$$

Se $\frac{|x_m - \alpha|}{|\alpha|} < 10^{-d}$, quindi x_m contiene

d cifre significative corrette, abbiano:

$$\frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|\alpha|} \approx \frac{|x_n - \alpha|^2}{|\alpha|} = |\alpha| \cdot \left(\frac{|x_n - \alpha|}{|\alpha|} \right)^2 < |\alpha| \cdot 10^{-2d}$$

Come determinare l'ordine di convergenza p di un metodo iterativo? La seguente proposizione ci fornisce una semplice risposta nel caso di metodi iterativi one-step.

Proposizione

Sia $\phi \in C^p(B(\alpha, \delta))$, con α punto fisso di ϕ .

Sono equivalenti le seguenti due proposizioni

- (a) Il metodo iterativo one-step definito da ϕ ha ordine p .

(b) $\phi'(\alpha) = \phi''(\alpha) = \dots = \phi^{(p-1)}(\alpha) = 0 \quad \wedge \quad \phi^{(p)}(\alpha) \neq 0$

DIM Delle due implicazioni $(a) \Rightarrow (b)$ e

$(b) \Rightarrow (a)$, mostriremo solo la seconda, che
è la più importante. Le prime è lasciate
per esercizio (la procedura è analoga a quelle
descritte qui sotto).

$(b) \Rightarrow (a)$ Consideriamo lo sviluppo di Taylor
della funzione iteratrice ϕ in un intorno di α :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi(\alpha) + \phi'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{\phi''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\phi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}(x-\alpha)^{p-1} + \frac{\phi^{(p)}(\gamma_x)}{p!}(x-\alpha)^p\end{aligned}$$

Con γ_x opportuno punto fra x e α .

Dall'ipotesi (b) possiamo semplificare come:

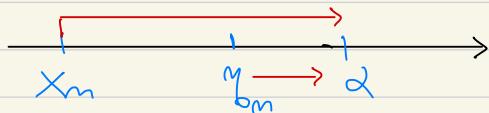
$$\phi(x) = \phi(\alpha) + \frac{\phi^{(p)}(\gamma_x)}{p!}(x-\alpha)^p$$

Per la successione $\{x_n\}$ generata dal metodo

possiamo scrivere :

$$x_{n+1} - \alpha = \phi(x_n) - \phi(\alpha) = \frac{\phi^{(P)}(\gamma_{b_m})}{P!} (x_n - \alpha)^P$$

dove γ_{b_m} è un opportuno punto tra x_n e α



Si noti che, poiché $x_n \rightarrow \alpha$, anche $\gamma_{b_m} \rightarrow \alpha$

Ottieniamo che :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\phi^{(P)}(\gamma_{b_m})}{P!} \right|$$

$$= \frac{1}{P!} \cdot \left| \phi^{(P)} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{b_m} \right) \right| = \frac{1}{P!} \left| \phi^{(P)}(\alpha) \right|$$
x
□

Osservazione La costante assintotica di convergenza

dei metodi one-step è :

$$\frac{1}{P!} \left| \phi^{(P)}(\alpha) \right|$$

In particolare, per $p=1$,

$$c = |\phi'(\alpha)|$$

Determiniamo ora l'ordine di convergenza dei due metodi one-step finora studiati.

Metodo delle direzione costante

$$\phi(x) = x - m f(x)$$

$$\phi'(\alpha) = 1 - m f'(\alpha)$$

$$\phi'(\alpha) = 1 - m f'(\alpha)$$

Distinguiamo due casi

- $m \neq \frac{1}{f'(\alpha)}$. Questo è il caso generale.

Risulta $\phi'(\alpha) \neq 0$ e quindi l'ordine di convergenza è $p=1$

- $m = \frac{1}{f'(\alpha)}$. In questo caso eccezionale

risulta $\phi'(x) = 0$ e quindi la successione $\{x_n\}$ generata con queste scelte converge ad x con ordine $p=2$.

Conclusione: l'ordine di convergenza del metodo delle direzioni costante è $p=1$.

Metodo di Newton

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\phi'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Distinguiamo due casi

- x zero semplice. In questo caso generale:

$$\phi'(x) = 0$$

In generale, $\phi'(x) \neq 0$, quindi il metodo di Newton, in presenza di zeri semplici, for-

ordine $p=2$.

- d zero di molteplicità $d > 1$. In tal caso, avremo per es. che

$$\phi'(d) = \lim_{x \rightarrow d} \phi'(x) = 1 - \frac{1}{d} \neq 0$$

In presenza di zeri multipli, la successione $\{x_n\}$ generata dal metodo di Newton converge ad d linearmente.

Commenti sul metodo di Newton.

Vantaggio: il metodo di Newton ha ordine di convergenza $p=2$.

Svantaggi:

- Per la sua implementazione, occorre preventivamente calcolare l'espressione delle derivate prima di f .

Ciò può essere oneroso se f ha una espressione complicata o addirittura impossibile se l'espressione di f non è nota (black-box)

- Il costo computazionale per iterata del metodo di Newton è:

2 valutazioni di funzione
iterata

quindi, ad esempio, coste il doppio rispetto al metodo della direzione costante. Si osservi che il numero di valutazioni di funzione è proporzionale al tempo di esecuzione sul calcolatore.

- La convergenza del metodo può rallentare molto se x_m non è abbastanza vicino

add. In alcuni casi la regione di conseguente potrebbe essere molto piccola, il che richiederebbe una stima iniziale x_0 molto buona.

Per questo motivo si introducono alcune varianti del metodo di Newton che possono risolvere uno o più degli svantaggi sopre elencati. Ne analizziamo due.

Metodo di Newton modificato

Non è altro che il metodo delle direzioni costante con la seguente definizione del parametro m :

$$m = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Il metodo di Newton modificato è:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \text{ o meglio} \\ x_m = x_{m-1} - \frac{f(x_{m-1})}{f'(x_0)}, \quad m \geq 1 \end{array} \right.$$

Le derivate prime di f va calcolate solo nel punto iniziale. L'idea è che se $x_0 \approx \alpha$

allora $f'(x_0) \approx f'(\alpha)$ e quindi

$$m = \frac{1}{f'(x_0)} \approx \frac{1}{f'(\alpha)}$$

Ricordiamo che per $m = 1/f'(\alpha)$ la convergenza sarebbe quadratica. Nel nostro caso, il metodo diventa lineare, ma la costante asintotica è piccola:

$$|\phi'(\alpha)| = |1 - m f'(\alpha)| = \left| 1 - \frac{f'(\alpha)}{f'(x_0)} \right| \ll 1$$

Costo computazionale: 1 valutazione di funzione iterata

Metodo delle secanti

Lo si ottiene dal metodo di Newton operando la seguente approssimazione della derivate prima di f in x_m :

$$f'(x_m) \approx \frac{f(x_m) - f(x_{m-1})}{x_m - x_{m-1}}$$

Il metodo delle secanti è così definito:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0, x_1 \text{ assegnati,} \\ x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f(x_m) - f(x_{m-1})}, \quad m \geq 1 \end{array} \right.$$

È un metodo a due passi. Si può dimostrare che il suo ordine è:

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{(sezione aurea)}$$

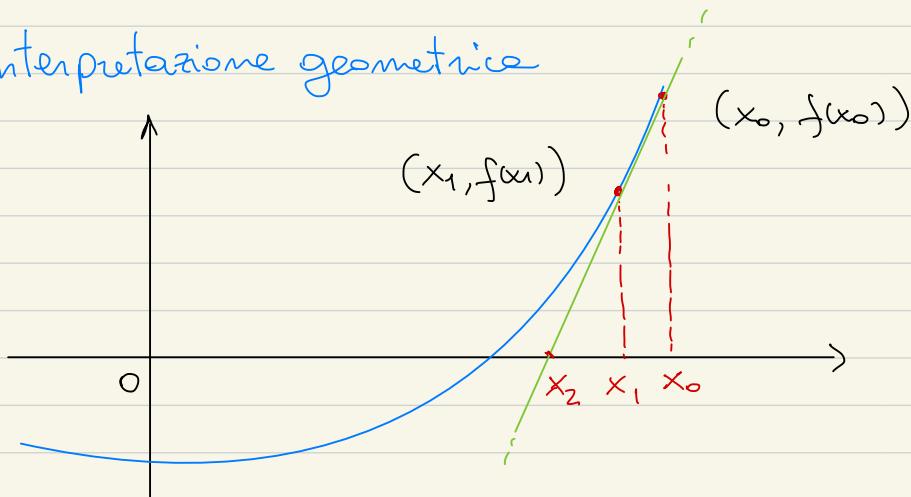
≈ 1.6

Si tratta di un metodo superlineare $1 < p < 2$.

Il costo computazionale : 1 valutazione di funz.
iterate

perché ?

Interpretazione geometrica



Il punto x_2 lo si ottiene come intersezione

delle rette secante il grafico delle funzione

f nei punti di ascissa x_0 e x_1 . L'equazione
di questa retta è :

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Criteri di arresto

Poiché non possiamo calcolare gli infiniti elementi della successione $\{x_n\}$ ed inoltre considerando che il calcolatore ha una precisione finita, arresteremo l'iterazione quando

$$(*) \quad |x_n - z| < tol$$

dove tol è una tolleranza specificata in input dall'utente. Un'analoga condizione possiamo scriverla per l'errore relativo e per l'errore misto. Al momento concentriamo la nostra attenzione sull'errore assoluto.

Quando la condizione (*) si realizza, il processo di iterazione ha termine e si considera

l'ultimo elemento calcolato della successione quale approssimante di α :

$$x_m \approx \alpha$$

Poiché α non è noto, la (*) non è una condizione operativa. Si possono seguire due strade:

- determinare una maggiorazione calcolabile dell'errore assoluto
- determinare una stima dell'errore assoluto

Maggiorazione dell'errore assoluto

Consideriamo

$$x_{m+1} - x_m = x_{m+1} - \alpha + \alpha - x_m$$

$$= \phi(x_m) - \phi(\alpha) - (x_m - \alpha)$$

$$\begin{aligned}
 &= \phi'(\gamma_{b_m}) (x_m - \alpha) - (x_m - \alpha) \\
 &= (\phi'(\gamma_{b_m}) - 1) (x_m - \alpha)
 \end{aligned}$$

γ_{b_m} opportuno punto tra x_n e α

Poiché $\gamma_{b_m} \rightarrow \alpha$ per $m \rightarrow \infty$

ciò implica che $|\phi'(\gamma_{b_m})| < 1$ per m grande

e quindi, per m grande

$$1 - \phi'(\gamma_{b_m}) \geq 1 - |\phi'(\gamma_{b_m})| > 0$$

Dalle uguaglianze precedenti ricaviamo :

$$\begin{aligned}
 |x_m - \alpha| &= \frac{1}{|1 - \phi'(\gamma_{b_m})|} \cdot |x_{m+1} - x_m| \\
 &\leq \frac{1}{1 - |\phi'(\gamma_{b_m})|} |x_{m+1} - x_m|
 \end{aligned}$$

Se si riesce a determinare un intervallo

$[a, b]$ tale che :

- $\alpha \in (a, b)$ e • $|\phi'(x)| < 1$ in $[a, b]$

denotando con $M = \max_{a \leq x \leq b} |\phi'(x)| < 1$

per m grande $y_{6m} \in (a, b)$ e quindi

$$|\phi'(y_{6m})| \leq M$$

$$-|\phi'(y_{6m})| \geq -M$$

$$1 - |\phi'(y_{6m})| \geq 1 - M$$

$$\frac{1}{1 - |\phi'(y_{6m})|} \leq \frac{1}{1 - M}$$

Sfruttando queste maggiorazioni otteniamo

$$|x_m - a| \leq \frac{1}{1 - M} |x_{m+1} - x_m|$$

Ottieniamo una maggiorazione solutabile dell'errore assoluto. Il criterio di arresto diventa

$$\frac{1}{1 - M} |x_{m+1} - x_m| < tol$$

Stima dell'errore

Ora si determina una maggiorezione dell'errore, se ne determina una stima.

In genere si sceglie:

$$|x_m - \alpha| \approx C |x_{m+1} - x_m|$$

C è una costante solitamente finita a 1:

$$C = 1$$

oppure $C > 1$. La scelta $C = 1$

è certamente appropriata per il metodo di

Newton. Infatti seppiamo che, in presenza

di zeri semplici, $\phi'(\alpha) = 0$; ciò significa

che, per m grande, $\phi'(y_m) \approx 0$ e quindi

$$\frac{1}{1 - \phi'(y_m)} \approx 1$$

Scegliendo $G=1$, il criterio di arresto

si semplifica come

$$|x_{n+1} - x_n| < tol$$

Per l'errore relativo, possiamo usare
il seguente criterio di arresto :

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < tol$$

Infine, per l'errore misto :

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{1 + |x_{n+1}|} < tol$$

Appendice

Ricordami sui numeri complessi

Unità immaginaria : $i = \sqrt{-1}$

Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ ha la forma

$$z = a + i b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

parte reale
di z



parte immaginaria
di z

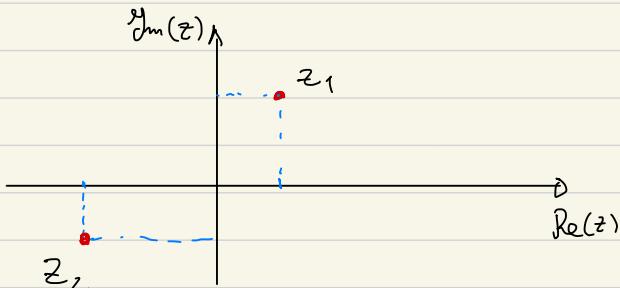
Un numero complesso lo si rappresenta sul piano complesso (o di Gauss), un piano conteniamo in cui l'asse delle ascisse corrisponde alle parte reale di z , $\operatorname{Re}(z)$, e l'asse delle ordinate alle parte immaginaria di z , $\operatorname{Im}(z)$.

di z , $\operatorname{Im}(z)$

Esempio

$$z_1 = 1 + 2i$$

$$z_2 = -2 - i$$



Sui numeri complessi si definiscono le operazioni concrete dell'aritmetica reale.

Siano $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

Addizione:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Sottrazione: analoga

Moltiplicazione:

Osserviamo che $i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)$$

$$= x_1 \cdot x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 - y_1 y_2$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Teorema fondamentale dell'algebra

Ogni polinomio di grado n ha esattamente

n radici in \mathbb{C} contate con la loro
molteplicità.

Esempi

1) $x^2 = 1 \longrightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$

2) $x^2 = -1 \longrightarrow x_1 = -i, x_2 = +i$

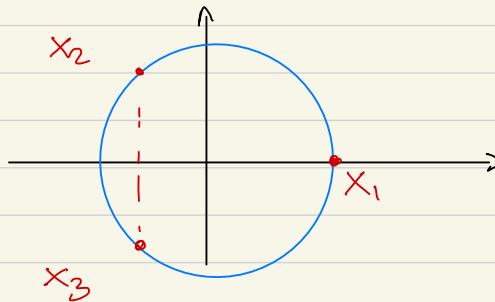
3) $x^3 = 1$

Le tre radici sono

$$x_1 = 1 \quad (\text{unica radice reale})$$

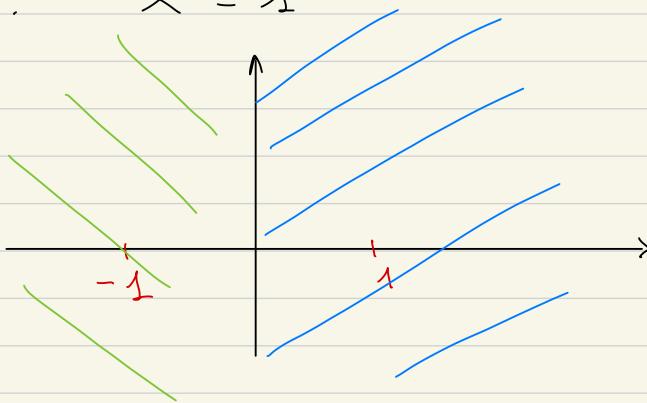
$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$



Regioni di attrazione per il metodo di Newton

Esempio : $x^2 = 1$



Esempio $x^3 = 1$

Vedere l'esempio [frattale_cubice.py](#)

in python.