

알고리즘 중급 세미나

02: 그래프의 최단거리

연세대학교 전우제^{kiwiyou}

2023.12.05.r1

누적 합

- 구간의 합을 합의 차로 구하는 테크닉
- $S_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$ 일 때, $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j = S_j - S_{i-1}$
- a_i 가 변하지 않을 때 구간의 합을 $\mathcal{O}(1)$ 에 구함

2차원 누적 합

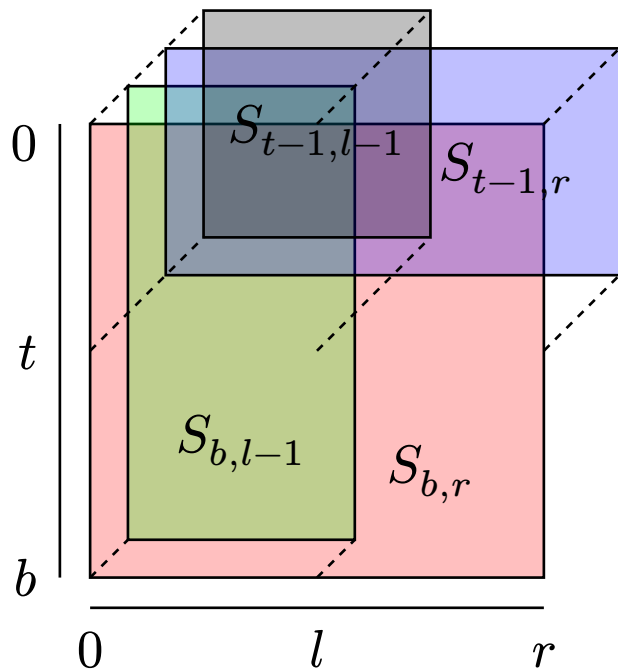
- 직사각형의 합을 구하는テクニック

$$S_{r,c} = \sum \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,c} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,c} \end{pmatrix}$$

$$\sum \begin{pmatrix} a_{t,l} & a_{t,l+1} & \cdots & a_{t,r} \\ a_{t+1,l} & a_{t+1,l+1} & a_{t+1,r} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{b,l} & a_{b,l+1} & \cdots & a_{b,r} \end{pmatrix} = S_{b,r} - S_{t-1,r} - S_{b,l-1} + S_{t-1,l-1}$$

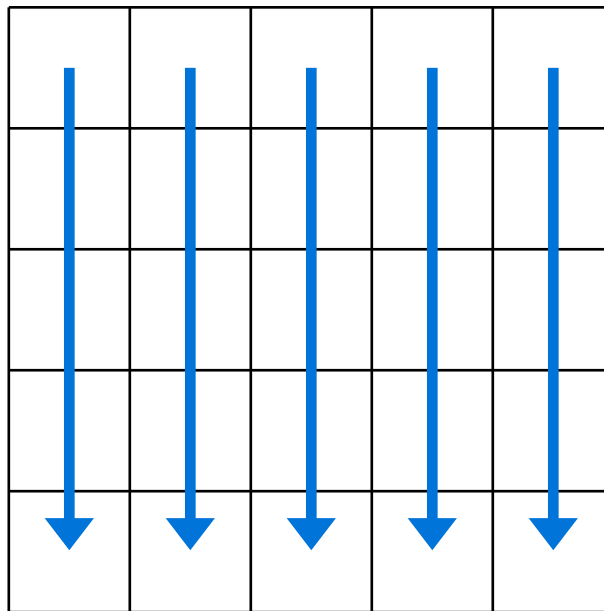
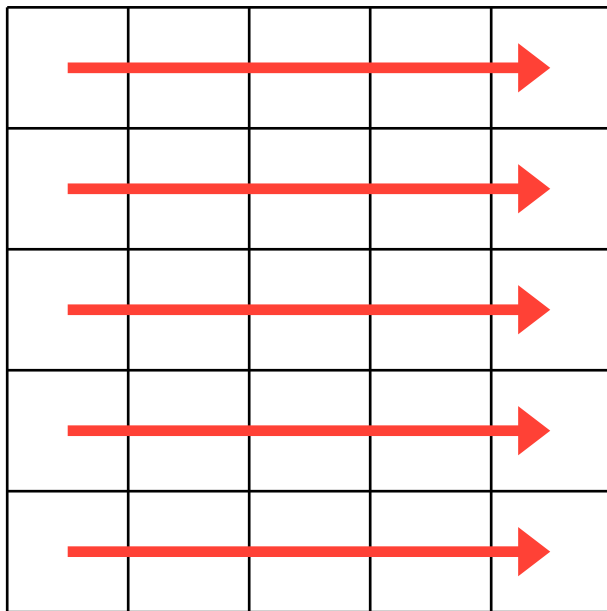
2차원 누적 합

- 직사각형을 4분할한 뒤 생각



2차원 누적 합

- $S_{r,c}$ 구하는 법



과제

- [11660 구간 합 구하기 5](#)
- [25682 체스판 다시 칠하기 2](#)
- [14846 직사각형과 쿼리](#)

플로이드-워셜

- 모든 두 정점 간 최단 경로 (APSP)
- 도달성(추이 폐포)을 모두 구할 수 있음
- 양수, 음수 가중치 모두 가능
- 음수 사이클의 존재를 판단 가능

플로이드-워셜

- 인접행렬 기반
- 매번 각 정점이 양쪽으로 잇는 경로를 탐색 후 최단거리 갱신 (Relaxation)
- 정점 V 개, 정점과 연결된 양쪽 점을 찾는 데 $\mathcal{O}(V^2)$
- $\mathcal{O}(V^3)$
- 음수 사이클이 있다면 $u \rightarrow u$ 최단거리가 갱신
- 오버플로에 주의

플로이드-워셜

```
1: function FLOYD-WARSHALL( $A$ )
2:   for  $via$  in  $V$  do
3:     for  $u$  in  $V$  do
4:       for  $v$  in  $V$  do
5:         if  $A[u][v] > A[u][via] + A[via][v]$  then
6:            $A[u][v] \leftarrow A[u][via] + A[via][v]$ 
7:       for  $u$  in  $V$  do
8:         if  $A[u][u] < 0$  then
9:           report negative cycle
```

- $A[u][v]$ 는 $u \rightarrow v$ 간선의 가중치 또는 ∞

플로이드-워셜

```
1: function TRANSITIVE-CLOSURE( $A$ )  
2:   for  $via$  in  $V$  do  
3:     for  $u$  in  $V$  do  
4:       for  $v$  in  $V$  do  
5:         if  $A[u][via]$  and  $A[via][v]$  then  
6:            $A[u][v] \leftarrow \mathbf{true}$ 
```

- $A[u][v]$ 는 $u \rightarrow v$ 간선이 있으면 true, 없으면 false

과제

- [1613 역사](#)
- [11562 백양로 브레이크](#)

벨만-포드

- 출발점 s 에서 시작해서 모든 정점으로 끝나는 최단 경로 (SSSP)
- 양수, 음수 가중치 모두 가능
- 음수 사이클의 존재를 판단 가능

벨만-포드

- s 를 제외한 모든 정점까지의 거리 $D[u]$ 를 무한대로 놓고 시작
- $|V| - 1$ 번, 모든 간선을 이용해 Relax
- 모든 최단경로는 $|V| - 1$ 개의 간선으로 이루어짐
- 음수 사이클이 있다면 $|V|$ 번째에 Relax
- $|V| - 1$ 번 모든 간선을 확인하므로 총 $\mathcal{O}(VE)$

벨만-포드

```
1: function BELLMAN-FORD( $V, E, s$ )
2:    $D[v] \leftarrow \mathbf{inf}$  for all  $v \in V$ 
3:    $D[s] \leftarrow 0$ 
4:   for  $|V| - 1$  times do
5:     for  $(u, v, w)$  in  $E$  do
6:       if  $D[v] > D[u] + w$  then
7:          $D[v] \leftarrow D[u] + w$ 
8:   for  $(u, v, w)$  in  $E$  do
9:     if  $D[v] > D[u] + w$  then
10:      report negative cycle
11:  return  $D$ 
```

과제

- [1865 뵘홀](#)

데이크스트라

- 출발점 s 에서 시작해서 모든 정점으로 끝나는 최단 경로 (SSSP)
- 0 이상의 가중치에서만 사용 가능
- $D[u]$ 가 최단거리라면 더 Relax되지 않음
- $s \rightarrow v \rightarrow w$ 가 최단거리라면 $s \rightarrow v$ 또한 최단거리

데이크스트라

- s 를 제외한 모든 정점까지의 거리 $D[u]$ 를 무한대로 놓고 시작
- 집합 Q : 아직 최단거리가 결정되지 않은 정점
 - 처음에 $Q = V$
- Q 에서 $D[u]$ 가 가장 작은 정점 u 를 뽑음
- u 와 연결된 각 정점 v 를 Relax
- Q 에서 u 를 찾는 데 총 $\mathcal{O}(V^2)$, Relax에 쓰이는 간선 확인 총 $\mathcal{O}(E)$
- $\mathcal{O}(V^2 + E)$?

데이크스트라

- 이진 힙 (\in 우선순위 큐)
 - 삽입에 $\mathcal{O}(\log N)$
 - 최소 원소 확인에 $\mathcal{O}(1)$
 - 최소 원소 삭제에 $\mathcal{O}(\log N)$
- $\mathcal{O}(E)$ 번의 Relax마다 힙에 삽입하므로 $\mathcal{O}(E \log E)$
- 그만큼 삭제가 일어나므로 $\mathcal{O}(E \log E)$

데이크스트라

- 이론적인 최소 시간복잡도 $\mathcal{O}(E + V \log V)$ (구현이 복잡하여 느림)
- 피보나치 힙
 - 삽입에 $\mathcal{O}(\log N)$
 - 최소 원소 삭제에 $\mathcal{O}(\log N)$
 - 우선순위 변경에 $\mathcal{O}(1)$
- $\mathcal{O}(E)$ 번의 Relax마다 우선순위를 변경하므로 $\mathcal{O}(E)$
- 힙에는 처음에 $\mathcal{O}(V)$ 개의 원소가 들어가고 $\mathcal{O}(V)$ 번 삭제가 일어나므로 $\mathcal{O}(V \log V)$

데이크스트라

```
1: function DIJKSTRA( $V, E, s$ )
2:    $D[v] \leftarrow \mathbf{inf}$  for all  $v \in V$ 
3:    $D[s] \leftarrow 0$ 
4:    $Q \leftarrow \{(s, D[s])\} \triangleright$  Binary Heap
5:   while  $Q$  is not empty do
6:     remove  $(u, d)$  from  $Q$  with minimum  $d$ 
7:     if  $d > D[u]$  then
8:       continue
9:     for  $(u, v, w)$  in  $E$  do
10:      if  $D[v] > D[u] + w$  then
11:         $D[v] \leftarrow D[u] + w$ 
12:        insert  $(v, D[v])$  into  $Q$ 
13:   return  $D$ 
```

- $d > D[u]$ 체크가 빠지면 $\mathcal{O}(V^2 + E \log E)$!

과제

- [14284 간선 이어가기 2](#)
- [25636 소방차](#)
- [28131 K-지폐](#)