알고리즘 중급 세미나

02: 그래프의 최단거리

연세대학교 전우제[kiwiyou]

2023.11.30.r1

누적 합

- 구간의 합을 합의 차로 구하는 테크닉
- $S_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$일 때, $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j = S_j - S_{i-1}$
- a_i가 변하지 않을 때 구간의 합을 $\mathcal{O}(1)$에 구함

2차원 누적 합

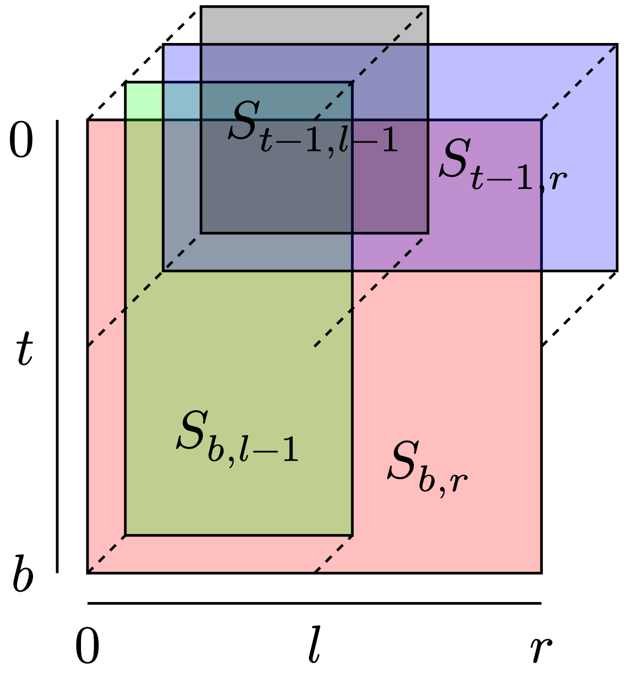
- 직사각형의 합을 구하는 테크닉

$$S_{r,c} = \sum \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,c} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,c} \end{pmatrix}$$

$$\sum \begin{pmatrix} a_{t,l} & a_{t,l+1} & \cdots & a_{t,r} \\ a_{t+1,l} & a_{t+1,l+1} & a_{t+1,r} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{b,l} & a_{b,l+1} & \cdots & a_{b,r} \end{pmatrix} = S_{b,r} - S_{t-1,r} - S_{b,l-1} + S_{t-1,l-1}$$

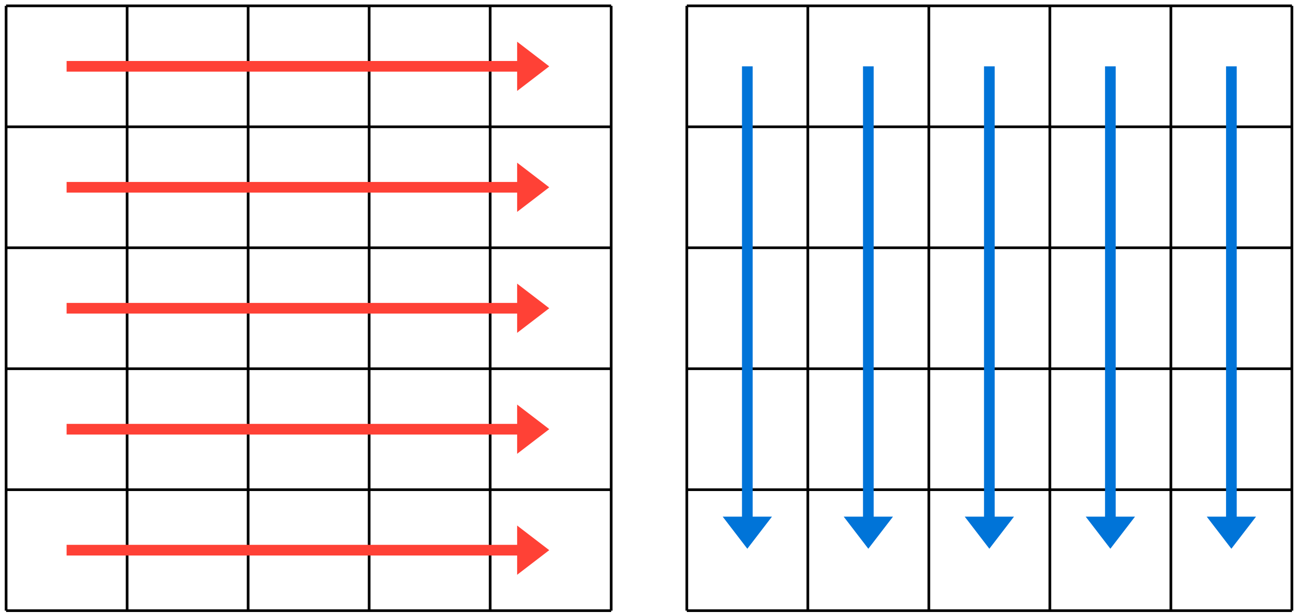
2차원 누적 합

- 직사각형을 4분할한 뒤 생각



2차원 누적 합

- $S_{r,c}$ 구하는 법



과제

- 11660 구간 합 구하기 5
- 25682 체스판 다시 칠하기 2
- 14846 직사각형과 쿼리

플로이드-워셜

- 모든 두 정점 간 최단 경로 (APSP)
- 도달성(추이 폐포)을 모두 구할 수 있음
- 양수, 음수 가중치 모두 가능
- 음수 사이클의 존재를 판단 가능

플로이드-워셜

- 인접행렬 기반
- 매번 각 정점이 양쪽으로 잇는 경로를 탐색 후 최단거리 갱신 (Relaxation)
- 정점 V개, 정점과 연결된 양쪽 점을 찾는 데 $\mathcal{O}(V^2)$
- $\mathcal{O}(V^3)$
- 음수 사이클이 있다면 $u \to u$ 최단거리가 갱신
- 오버플로에 주의

플로이드-워셜

function Floyd-Warshall(A)
    for via **in** V **do**
        for u **in** V **do**
            for v **in** V **do**
                if $A[u][v] > A[u][\text{via}] + A[\text{via}][v]$ **then**
                    $A[u][v] \leftarrow A[u][\text{via}] + A[\text{via}][v]$
        for u **in** V **do**
            if $A[u][u] < 0$ **then**
                report negative cycle

- $A[u][v]$는 $u \to v$ 간선의 가중치 또는 ∞

플로이드-워셜

```
function Transitive-Closure(A)
    for via in V do
        for u in V do
            for v in V do
                if A[u][via] and A[via][v] then
                    A[u][v] ← true
```

- $A[u][v]$는 $u \to v$ 간선이 있으면 `true`, 없으면 `false`

과제

- 1613 역사
- 11562 백양로 브레이크

벨만-포드

- 출발점 s에서 시작해서 모든 정점으로 끝나는 최단 경로 (SSSP)
- 양수, 음수 가중치 모두 가능
- 음수 사이클의 존재를 판단 가능

벨만-포드

- s를 제외한 모든 정점까지의 거리 $D[u]$를 무한대로 놓고 시작
- $|V| - 1$번, 모든 간선을 이용해 Relax
- 모든 최단경로는 $|V| - 1$개의 간선으로 이루어짐
- 음수 사이클이 있다면 $|V|$번째에 Relax
- $|V| - 1$번 모든 간선을 확인하므로 총 $\mathcal{O}(VE)$

벨만-포드

function Bellman-Ford(V, E, s)
    $D[v] \leftarrow$ **inf** for all $v \in V$
    $D[s] \leftarrow 0$
    for $|V| - 1$ times **do**
        for (u, v, w) **in** E **do**
            if $D[v] > D[u] + w$ **then**
                $D[v] \leftarrow D[u] + w$
    for (u, v, w) **in** E **do**
        if $D[v] > D[u] + w$ **then**
            report negative cycle
    return D

과제

- 1865 웜홀

데이크스트라

- 출발점 s에서 시작해서 모든 정점으로 끝나는 최단 경로 (SSSP)
- 0 이상의 가중치에서만 사용 가능
- $D[u]$가 최단거리라면 더 Relax되지 않음
- $s \to v \to w$가 최단거리라면 $s \to v$ 또한 최단거리

데이크스트라

- s를 제외한 모든 정점까지의 거리 $D[u]$를 무한대로 놓고 시작
- 집합 Q: 아직 최단거리가 결정되지 않은 정점
    - 처음에 $Q = V$
- Q에서 $D[u]$가 가장 작은 정점 u를 뽑음
- u와 연결된 각 정점 v를 Relax
- Q에서 u를 찾는 데 총 $\mathcal{O}(V^2)$, Relax에 쓰이는 간선 확인 총 $\mathcal{O}(E)$
- $\mathcal{O}(V^2 + E)$?

데이크스트라

- 이진 힙 (∈ 우선순위 큐)
  - 삽입에 $\mathcal{O}(\log N)$
  - 최소 원소 확인에 $\mathcal{O}(1)$
  - 최소 원소 삭제에 $\mathcal{O}(\log N)$
- $\mathcal{O}(E)$번의 Relax마다 힙에 삽입하므로 $\mathcal{O}(E \log E)$
- 그만큼 삭제가 일어나므로 $\mathcal{O}(E \log E)$

데이크스트라

- 이론적인 최소 시간복잡도 $\mathcal{O}(E + V \log V)$ (구현이 복잡하여 느림)
- 피보나치 힙
  - 삽입에 $\mathcal{O}(\log N)$
  - 최소 원소 삭제에 $\mathcal{O}(\log N)$
  - 우선순위 변경에 $\mathcal{O}(1)$
- $\mathcal{O}(E)$번의 Relax마다 우선순위를 변경하므로 $\mathcal{O}(E)$
- 힙에는 처음에 $\mathcal{O}(V)$개의 원소가 들어가고 $\mathcal{O}(V)$번 삭제가 일어나므로 $\mathcal{O}(V \log V)$

데이크스트라

```
function DIJKSTRA(V, E, s)
    D[v] ← inf for all v ∈ V
    D[s] ← 0
    Q ← {(s, D[s])}  ▷ Binary Heap
    while Q is not empty do
        remove (u, d) from Q with minimum d
        if d > D[u] then
            continue
        for (u, v, w) in E do
            if D[v] > D[u] + w then
                D[v] ← D[u] + w
                insert (v, D[v]) into Q
    return D
```

- $d > D[u]$ 체크가 빠지면 $\mathcal{O}(V^2 \log E)$!

과제

- 14284 간선 이어가기 2
- 25636 소방차
- 28131 K-지폐