## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5.Расчет цифровых фильтров с бесконечными импульсными характеристиками

ЦЕЛЬ РАБОТЫ –расчет БИХ-фильтров с различными аппроксимациями идеальной АЧХ в пакете Matlab и изучение их свойств.

### 5.1. Теоретические сведения

***Основные свойства БИХ-фильтров***

Цифровой фильтр с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтр) является физически реализуемым и устойчивым, если его импульсная характеристика $h(n)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$h(n) = 0, \quad n< 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} | h(n) | < \infty .$$

Наиболее общая форма записи $z$-преобразования импульсной характеристики БИХ-фильтров имеет вид

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}} .$$

Здесь по крайней мере один из коэффициентов $a_i$отличен от нуля, причем сразу все корни знаменателя (полюса передаточной функции) не могут в точности компенсироваться корнями числителя (нулями передаточной функции). Нули $H(z)$ могут располагаться на всей $z$-плоскости, но полюсы в соответствии с условием устойчивости фильтра обязательно должны размещаться внутри круга единичного радиуса. Как правило, число нулей $M$ не превышает числа полюсов $N$. Системы, удовлетворяющие этому условию, называются системами $N$-го порядка. При $M>N$ порядок системы становится неопределенным. В этом случае можно считать, что передаточная функция $H(z)$ соответствует последовательному соединению системы $N$-го порядка и фильтра с конечной импульсной характеристикой ($M – N$)-го порядка.

Основными функциями, характеризующими фильтр, являются квадрат амплитудной характеристики, фазовая характеристика и характеристика групповой задержки.

При расчете БИХ-фильтра с использованием аппроксимации только амплитудной характеристики (т.е. без учета фазовой характеристики) удобнее всего оперировать квадратом амплитудной характеристики, определяемым следующим образом:

$$\left| H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = \left| H(z) H\left(z^{-1}\right)\right| \Big|_{z=e^{j\omega}} .$$

Расположению нулей и полюсов этой функции в $z$-плоскости свойственна симметрия с зеркальным отображением относительно единичной окружности. Полюсы $H(z)$ располагаются внутри единичной окружности, поэтому они полностью определяются квадратом амплитудной характеристики фильтра. Нули передаточной функции $H(z)$ чаще всего выбираются таким способом, чтобы соответствующие им нули квадрата амплитудной характеристики располагались на единичной окружности или внутри ее в $z$-плоскости. Фильтры с такими нулями являются минимально-фазовыми фильтрами.

Так как передаточная функция БИХ-фильтра в общем случае представляет собой комплексную функцию от $\omega$, можно рассматривать и фазовую характеристику фильтра, которая равна

$$\beta\left(e^{j\omega}\right) = \operatorname{arctg}\left\{\frac{Im\left[H(z)\right]}{Re\left[H(z)\right]}\right\}_{z=e^{j\omega}}.$$

Фазовая характеристика БИХ-фильтра, как правило, существенно нелинейна, поэтому для оценки дисперсионного воздействия фильтра на типовой обрабатываемый сигнал часто используется характеристика групповой задержки, записываемая как

$$\tau_g\left(e^{j\omega}\right) = -\frac{d\beta\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega} = -jz\frac{d\beta}{dz}\Big|_{z=e^{j\omega}}.$$

Предпочтительна приблизительно постоянная характеристика групповой задержки во всей полосе (или полосах) пропускания фильтра.

### *Методы расчета коэффициентов БИХ-фильтра*

Расчет фильтра сводится к нахождению значений его коэффициентов $b_i$и $a_i$, обеспечивающих аппроксимацию заданных характеристик (таких как импульсная, частотная, характеристика групповой задержки и др.) в том или ином смысле (например, в среднеквадратичном или минимаксном). Таким образом, задача расчета фильтра в значительной мере сводится к задаче аппроксимации и может быть решена чисто математическими методами.

Расчет цифровых БИХ-фильтров практически не связан с фильтрами непрерывного времени. Однако вместо того, чтобы заново создавать теорию расчета цифровых фильтров, можно воспользоваться простыми методами отображения, позволяющими преобразовывать аналоговые фильтры в цифровые. Именно эти методы чаще всего применяются при расчете стандартных БИХ-фильтров: нижних и верхних частот, полосовых, режекторных. В таких случаях последовательность расчета должна быть следующей:

– расчет аналогового фильтра-прототипа;

– преобразование полосы частот;

– дискретизация аналогового фильтра.

Другую группу методов расчета цифровых БИХ-фильтров образуют прямые методы расчета в $z$-плоскости. Часто удается найти такое расположение полюсов и нулей фильтра, при котором обеспечивается некоторая аппроксимация непосредственно заданной характеристики фильтра.

Третий, также часто встречающийся подход к расчету БИХ-фильтров, заключается в использовании процедур оптимизации для нахождения положения нулей и полюсов в $z$-плоскости. В этом случае нельзя получить формулы, связывающие коэффициенты фильтра с параметрами заданной характеристики. Расчет производится методом последовательных приближений.

### *Расчет аналоговых фильтров-прототипов*

В качестве аналогового фильтра-прототипа используется нормированный фильтр нижних частот с частотой среза, равной 1 рад/с. Передаточная функция такого фильтра представляет собой рациональную функцию следующего вида:

$$H(s)=\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{1+\sum_{i=1}^{n} a_i s^i}.$$

Аппроксимируемой функцией является квадрат амплитудной характеристики. Чаще всего применяются фильтры Баттерворта, Чебышева и эллиптические.

Фильтры Баттерворта имеют максимально гладкую амплитудную характеристику в начале координат в $s$-плоскости. Ее квадрат равен

$$|H(\Omega)|^2=\frac{1}{1+\left(\Omega^2\right)^n},$$

где $n$ – порядок фильтра.

Данные фильтры имеют только полюсы (все нули расположены на бесконечности). На частоте $\Omega$=1 рад/с коэффициент передачи равен $1/\sqrt{2}$ (т.е. на частоте среза амплитудная характеристика спадает на 3 дБ). Порядок фильтра полностью определяет весь фильтр.

Отличительной чертой фильтров Чебышева является наименьшая величина максимальной ошибки аппроксимации в заданной полосе частот. Ошибка аппроксимации представляется равновеликими пульсациями, флуктуирует между максимумами и минимумами равной величины. В зависимости от того, где минимизируется ошибка – в полосе пропускания или подавления, различают фильтры Чебышева типа I и II.

Фильтры Чебышева типа I имеют только полюсы и обеспечивают равновеликие пульсации амплитудной характеристики в полосе пропускания и монотонное изменение ослабления в полосе подавления. Квадрат амплитудной характеристики фильтра $n$-го порядка описывается выражением

$$|H(\Omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2(\Omega)},$$

где $\varepsilon$ – параметр, характеризующий пульсации в полосе пропускания; $T_n(\Omega)$ – полином Чебышева $n$-го порядка, равный

$$T_n(\Omega) = \begin{cases} \cos(n \arccos \Omega), & |\Omega| \le 1, \\ \mathrm{ch}(n \,\mathrm{Arch}\, \Omega), & |\Omega| > 1. \end{cases}$$

Свойство оптимальности фильтров Чебышева типа I заключается в том, что не существует какого-либо другого фильтра $n$-го порядка, содержащего только полюсы, которые имели бы такие же или лучшие характеристики и в полосе пропускания, и в полосе подавления.

Фильтры Чебышева типа II (иногда их называют обратными фильтрами Чебышева) обеспечивают монотонное изменение ослабления в полосе пропускания (максимально гладкое при $\Omega$=0) и равновеликие пульсации в полосе подавления. Нули фильтров располагаются на мнимой оси в $s$-плоскости, а полюсы – в левой полуплоскости. Квадрат амплитудной характеристики фильтра $n$-го порядка можно представить следующим образом:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left[T_n(\Omega_r) / T_n(\Omega_r / \Omega)\right]^2},$$

где $\Omega_r$ – наименьшая частота, на которой в полосе подавления достигается заданный уровень ослабления.

Эллиптические фильтры (называемые также фильтрами Кауэра или Золотарева) характеризуются тем, что их амплитудная характеристика имеет равновеликие пульсации и в полосе пропускания, и в полосе подавления. Данные фильтры оптимальны с точки зрения минимальной ширины переходной полосы. Квадрат амплитудной характеристики записывается в виде

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_n^2(\Omega, L)},$$

где $R_n(\Omega,L)$ – рациональная функция Чебышева; $L$ – параметр, характеризующий ее пульсации.

### *Преобразование полосы частот для аналоговых фильтров*

Для преобразования фильтра нижних частот (ФНЧ) с частотой среза 1 рад/с в другой фильтр нижних частот (имеющий другую частоту среза), а также в фильтр верхних частот (ФВЧ), полосовой (ПФ) или режекторный (РФ) применяют следующие преобразования:

ФНЧ → ФНЧ: $\quad s \to \dfrac{s}{\Omega_u},$

ФНЧ → ФВЧ: $\quad s \to \dfrac{\Omega_u}{s},$

ФНЧ → ПФ: $\quad s \to \dfrac{s^2 + \Omega_u \Omega_l}{s(\Omega_u - \Omega_l)},$

$$\text{ФНЧ} \to \text{РФ:} \qquad s \to \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_u\Omega_l}.$$

Здесь $\Omega_l$ – нижняя частота среза; $\Omega_u$ – верхняя частота среза.

Данные соотношения имеют нелинейный характер, однако это не создает никаких трудностей, поскольку частотные характеристики преобразуемых фильтров аппроксимируются ступенчатой функцией. Так, нелинейность отображения приводит к изменению взаимного расположения максимумов и минимумов пульсаций характеристик эллиптических фильтров, но не влияет на амплитуду этих пульсаций. Поэтому фильтры, рассчитанные методами преобразования полосы, сохраняют равновеликий характер пульсаций фильтра-прототипа.

### *Дискретизация аналогового фильтра*

Наиболее распространенным методом дискретизации аналоговых фильтров является метод билинейного $z$-преобразования. Он основан на простом конформном отображении $s$-плоскости в $z$-плоскости, получающемся в результате следующей замены:

$$s \to \frac{2}{T}\frac{(1 - z^{-1})}{(1 + z^{-1})}.$$

При таком преобразовании ось $j\Omega$ из $s$-плоскости отображается в единичную окружность на $z$-плоскости; левая полуплоскость $s$ отображается в единичный круг, а правая полуплоскость $s$ – в область вне единичного круга на $z$-плоскости.

Определенным недостатком билинейного $z$-преобразования является нелинейность соотношения между частотами аналогового фильтра $\Omega$ и цифрового фильтра $\omega$:

$$\Omega \to \frac{2}{T} tg\left(\frac{\omega T}{2}\right).$$

Данный недостаток не позволяет, например, использовать билинейное $z$-преобразование для получения цифрового дифференцирующего фильтра. Существует, правда, большой класс фильтров, для которых частотная деформация может быть скомпенсирована. К ним относятся фильтры нижних и верхних частот, полосовые и режекторные. Метод компенсации прост. Пусть известна совокупность частот среза цифрового фильтра. Используя приведенное соотношение между частотными шкалами, пересчитаем все частоты среза цифрового фильтра в частоты среза аналогового. Теперь рассчитаем аналоговый фильтр, все характерные частоты которого совпадали бы с этими пересчитанными частотами. Выполнив билинейное $z$-преобразование, получим требуемый цифровой фильтр.

### *Расчет цифровых фильтров в пакете Matlab*

Расчет БИХ-фильтров с аппроксимацией Баттерворта в пакете Matlab осуществляется с помощью функции `butter`. Ее формат следующий:

```
[B,A] = butter(N,Wn)
```

Рассчитывается фильтр нижних частот `N`-го порядка с частотой среза `Wn`, заданной в долях частоты Найквиста (`0 < Wn < 1`). В векторах `B` и `A` длиной `N+1` возвращаются коэффициенты числителя и знаменателя передаточной функции, расположенные в порядке уменьшения степеней *z*. Команда

```
[B,A] = butter(N,Wn,'high')
```

позволяет получить фильтр нижних частот. Если `Wn` – двухэлементный вектор `Wn = [W1 W2]`, то будет рассчитан полосовой фильтр порядка `2N` с полосой пропускания `W1 < W < W2`. Для получения режекторного фильтра следует использовать команду

```
[B,A] = BUTTER(N,Wn,'stop')
```

При расчете фильтров в качестве исходных данных обычно задаются граничные частоты полос пропускания `Wp` и подавления `Ws`, а также наибольшее допустимое отклонение в полосе пропускания `Rp` и наименьшее допустимое затухание в полосе подавления `Rs`. Получить необходимые для функции `butter` порядок фильтра и частоту среза можно с помощью функции `butterord`:

```
[N, Wn] = butterord(Wp, Ws, Rp, Rs)
```

Например, `Wp = 0.2`, `Ws = 0.1` соответствует фильтру верхних частот, а `Wp = [0.1 0.8]`, `Ws = [0.2 0.7]` – полосовому.

Для расчета фильтров Чебышева типов I и II используются функции `cheby1` и `cheby2`:

```
[B,A] = cheby1(N,R,Wn)
[B,A] = cheby2(N,R,Wn)
```

Для `cheby1` параметр `R` является размахом колебаний в полосе пропускания (в децибелах), а для `cheby2` – в полосе подавления. В остальном данные функции аналогичны `butter`.

Определить порядок фильтров Чебышева типов I и II и их частоту среза можно с помощью функций `cheby1ord` и `cheby2ord`, которые аналогичныфункции `butter`.

Эллиптические фильтры рассчитываются функцией`ellip`:

```
[B,A] = ellip(N,Rp,Rs,Wn)
```

Параметры `Rp` и `Rs` обозначают размах колебаний в полосах пропускания и подавления соответственно, выраженные в децибелах. Остальные параметры соответствуют функции `butter`. Для нахождения `N` и `Wn` используется функция `ellipord`.

При анализе цифровых БИХ-фильтров часто бывает необходимо построить диаграмму расположения нулей и полюсов передаточной функции на *z*-плоскости. Для этого служит функция Matlab `zplane`. В качестве параметров ей передаются вектора `B` и `A` – коэффициенты числителя и знаменателя передаточной функции. Функция `zplane`строит на графике единичную окружность и отмечает положение нулей с помощью символа `'o'` и полюсов с помощью символа `'x'`. При кратности нулей и полюсов, большей единицы, она показывается справа вверху.

## 5.2. Порядок выполнения работы

5.2.1. В соответствии с номером варианта рассчитайте ФНЧ с аппроксимацией Баттерворта (табл. 5.1).

Таблица5.1

Варианты для задания 5.2.1

| Номер варианта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Порядок фильтра | 7 | 6 | 5 | 8 | 9 | 5 |
| Частота дискретизации, Гц | 200 | 2000 | 16000 | 8000 | 10000 | 20 |
| Частота среза, Гц | 60 | 400 | 5000 | 1900 | 2000 | 5 |

Постройте АЧХ и ФЧХ, диаграмму расположения нулей и полюсов передаточной функции, значимую часть импульсной характеристики. Каким образом можно получить каждые два графика из третьего?

5.2.2. Выполните задание 5.2.1, воспользовавшись функцией `cheby1` и приняв допустимую неравномерность АЧХ в полосе пропускания 0,5 дБ.

5.2.3. Выполните задание 5.2.2, воспользовавшись функцией `ellip` и приняв минимальное затухание АЧХ в полосе подавления 30 дБ.

5.2.4. Требуется цифровой ФВЧ со следующими параметрами (табл. 5.2):

Таблица5.2

Варианты для задания 5.2.4(частоты определены в долях от частоты Найквиста)

| Номер варианта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Граничная частота подавления | 0,64 | 0,28 | 0,4 | 0,1 | 0,86 | 0,72 |
| Граничная частота пропускания | 0,7 | 0,32 | 0,6 | 0,15 | 0,9 | 0,73 |
| Допустимая неравномерность в полосе пропускания, дБ | 0,05 | 0,1 | $1\cdot10^{-5}$ | 0,15 | 0,11 | 1 |
| Минимальное затухание в полосе подавления, дБ | 40 | 30 | 100 | 85 | 57 | 30 |

Какой порядок будет иметь такой фильтр с аппроксимациями Баттерворта, Чебышева типа I, Чебышева типаII, эллиптической? Сравните эффективность различных аппроксимаций при более жестких и более мягких требованиях к АЧХ.

5.2.5. Исследуйте, как скажется на АЧХ и ФЧХ фильтров из заданий 5.2.1–5.2.3 усечение коэффициентов передаточной функции до четырех десятичных разрядов,до двух разрядов? Сделайте выводы.