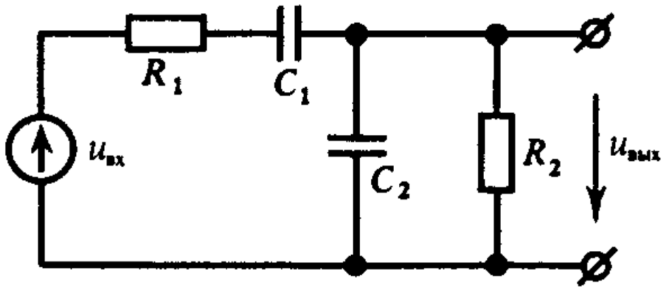
Задача №4 (из главы №8)

Условие задачи

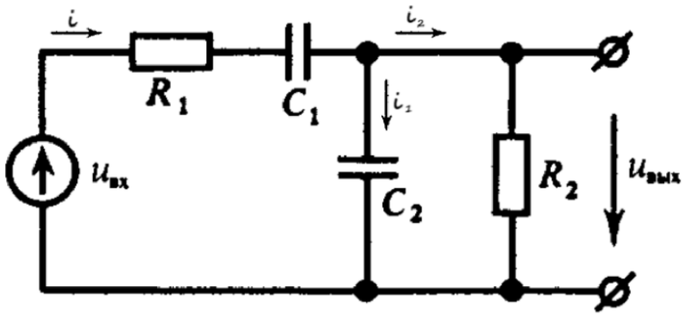
Составьте дифференциальное уравнение, описывающее цепь:



Уравнение должно быть записано относительно неизвестной функции $u_{вых}(t)$.

Решение

Отметим на рисунке токи:



Воспользуемся законами Кирхгофа:

$$i = i_1 + i_2 \tag{1}$$

$$u_{вх} = u_{R_1} + u_{C_1} + u_{вых} \tag{2}$$

Затем выражения для неизвестных нам напряжений:

$$u_{C_1} = \frac{1}{C_1}\int_0^t i\,dt \tag{3}$$

$$u_{R_1} = R_1 \cdot i \tag{4}$$

Подставив (3) и (4) в выражение (2), получим:

$$u_{вх} = R_1 \cdot i + \frac{1}{C_1}\int_0^t i\,dt + u_{вых} \tag{5}$$

Теперь запишем выражения для токов i_1 и i_2:

$$i_1 = \mathrm{C}_2 \frac{du_{\text{вых}}}{dt} \tag{6}$$

$$i_2 = \frac{u_{\text{вых}}}{R_2} \tag{7}$$

Подставив (6) и (7) в выражение (1), получим:

$$i = \mathrm{C}_2 \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + \frac{u_{\text{вых}}}{R_2} \tag{8}$$

Наконец, подставим выражение для тока (8) в выражение для напряжений (5):

$$u_{\text{вх}} = R_1 \cdot \left(\mathrm{C}_2 \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + \frac{u_{\text{вых}}}{R_2}\right) + \frac{1}{\mathrm{C}_1} \int_0^t \left(\mathrm{C}_2 \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + \frac{u_{\text{вых}}}{R_2}\right) dt + u_{\text{вых}} =$$

$$= R_1 \mathrm{C}_2 \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + \frac{R_1}{R_2} u_{\text{вых}} + \frac{1}{\mathrm{C}_1} \int_0^t \mathrm{C}_2 \frac{du_{\text{вых}}}{dt}\, dt + \frac{1}{\mathrm{C}_1} \int_0^t \frac{u_{\text{вых}}}{R_2}\, dt + u_{\text{вых}} =$$

$$= R_1 \mathrm{C}_2 \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + \frac{R_1}{R_2} u_{\text{вых}} + \frac{\mathrm{C}_2}{\mathrm{C}_1} u_{\text{вых}} + \frac{1}{\mathrm{C}_1} \int_0^t \frac{u_{\text{вых}}}{R_2}\, dt + u_{\text{вых}} =$$

$$= R_1 \mathrm{C}_2 \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{\mathrm{C}_2}{\mathrm{C}_1} + 1\right) u_{\text{вых}} + \frac{1}{\mathrm{C}_1} \int_0^t \frac{u_{\text{вых}}}{R_2}\, dt$$

Продифференцируем по t полученное выражение:

$$R_1 \mathrm{C}_2 \frac{d^2 u_{\text{вых}}}{dt^2} + \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{\mathrm{C}_2}{\mathrm{C}_1} + 1\right) \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + \frac{1}{\mathrm{C}_1 R_2} u_{\text{вых}} = \frac{du_{\text{вх}}}{dt}$$