ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3.Дискретное преобразование Фурье

ЦЕЛЬ РАБОТЫ –Изучение дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и его свойств,получение практических навыков использования ДПФ в пакете Matlab.

3.1. Теоретические сведения

Частотно-временной анализ. Преобразование Фурье

Преобразование Фурье является одним из мощнейших и эффективных средств для решения многих связанных с обработкой сигналов. *Жан Батист Жозеф Фурье* (1768–1830) предложил концепцию представления заданногосигнала в виде тригонометрического ряда из косинусов и синусов:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t), \qquad (3.1)$$

где $\omega_k = \frac{2\pi k}{T_p}$;$T_p$ – период сигнала.

Особенность разложения (3.1) в том, что оно применимо только для периодического сигнала (рис. 3.1).

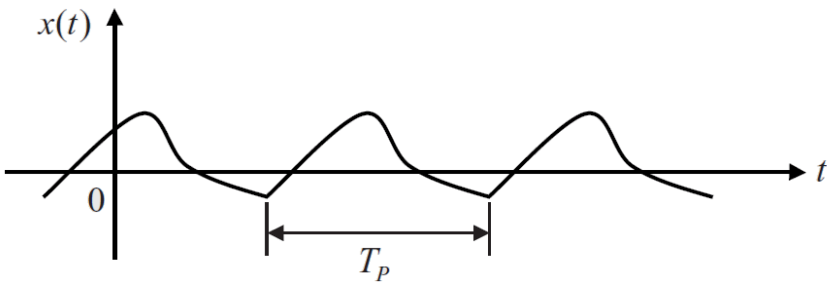


Рис. 3.1. Периодический сигнал

Самая низкочастотная составляющая сигнала, которая входит в (3.1),называется*основной частотой,*или *частотой основного тона*,$f_1 = 1/T_P$, поскольку все остальные частоты кратны ей.Частотные компоненты сигнала называются ***гармониками***. Например,частотная компонента $(a_2 \cos\omega_2 t + b_2 \sin\omega_2 t)$ является второй гармоникой. Коэффициент $a_0/2$является постоянной составляющей и представляет собой*среднее значение* сигнала за период. Причина, по которой стремятся представить сигнал в форме(3.1), заключается в том, что часто полезно разложить «сложный» сигнал в сумму «простых» – в данном случае косинусов и синусов. Не следует считать, что периодические сигналы редкость в природе. Например, на рис. 3.2 показан участок речевого сигнала (звук И), форма которого близка к периодической. Похожей периодичностью обладают почти все гласные (вокализованные) звуки.

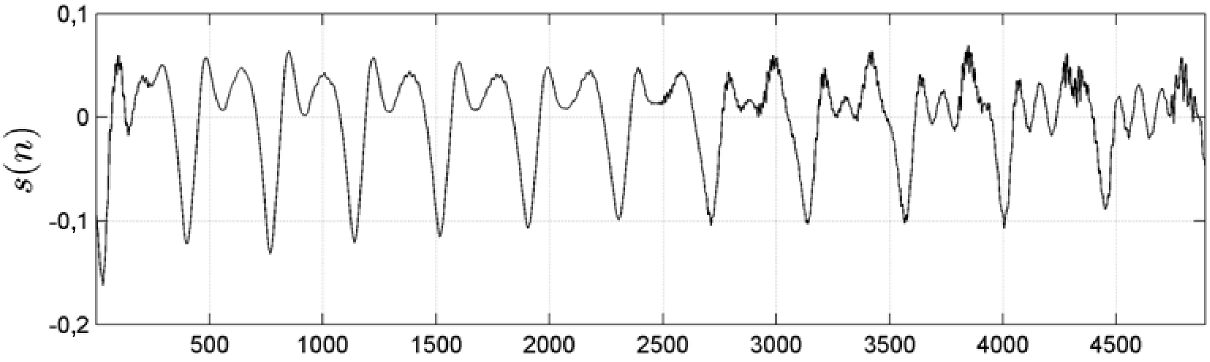


Рис. 3.2.Пример речевого сигнала

Ортогональность функций **sin** *и* **cos**

Часто возникает вопрос, почему для разложения функции в ряд (3.1) выбраны именно функции sin и cos? Так произошло благодаря тому, что эти функции обладают особым свойством *ортогональности*, известным из курса геометрии, где оно относилось к векторам. Оказывается, между функциями и векторами существует аналогия: как произвольный вектор можно представить в виде суммы ортогональных векторов (составляющих базис), так и произвольную функцию можно представить в виде суммы ортогональных функций (рис. 3.3).

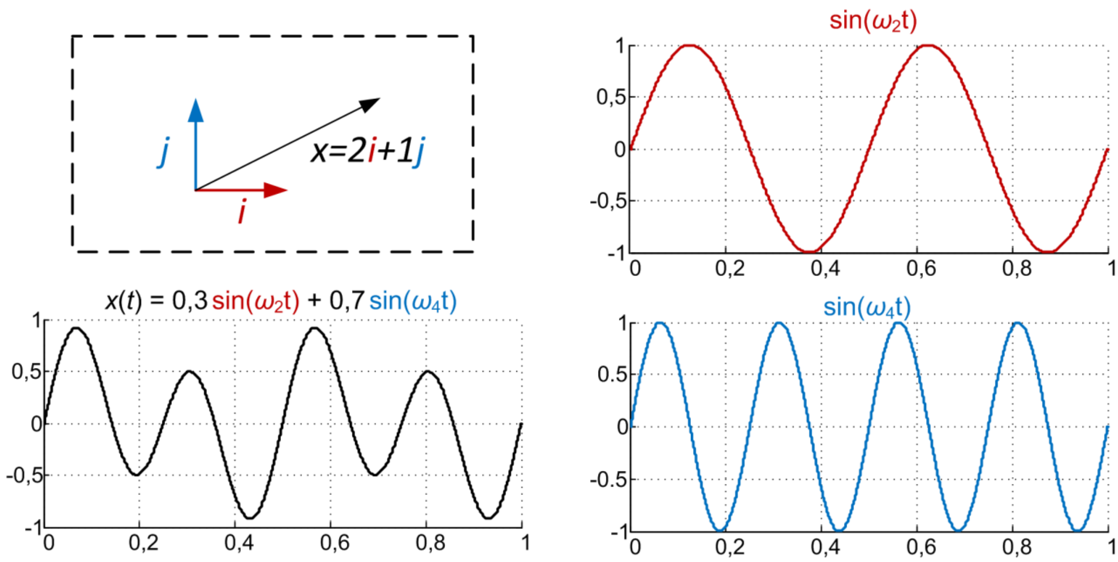


Рис. 3.3.Разложение в ортогональный базис вектора и функции

Различие при разложении вектора и функции в том, что количество базисных векторов конечно, а число базисных функций бесконечно*.

* Иногда говорят, что функция – это *бесконечномерный* вектор.

Как определить, является ли одна функция ортогональной по отношению к другой? Известно, что ортогональные векторы имеют нулевую проекцию друг на друга. С понятием проекции связано понятие скалярного произведения векторов

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

которое равно нулю для ортогональных векторов. Для функций также есть аналог скалярного произведения:

$$\int_a^b f_1(t) \cdot f_2(t) dt.$$

Это выражение равно нулю, если функции $f_1(t)$и $f_2(t)$ортогональны на интервале $[a,\ b]$, иначе получаемое число показывает *проекцию* одной функции на другую. Исходя из того, что геометрический смысл интеграла – площадь под кривой, на рис. 3.4 иллюстрируется понятие скалярного произведения функций.

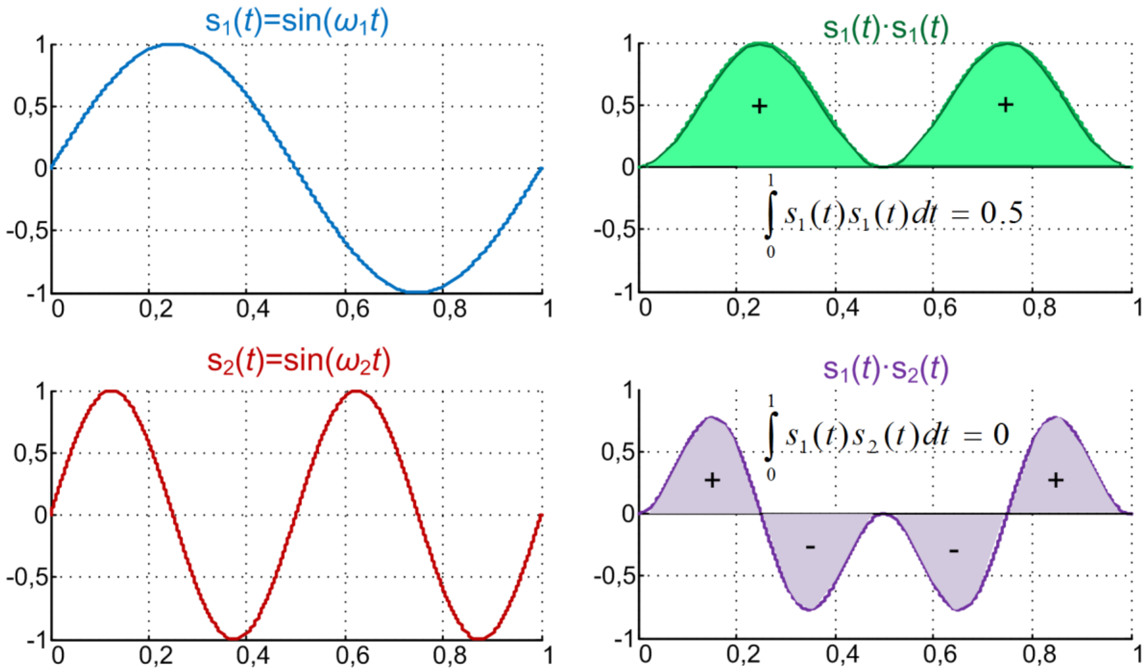


Рис. 3.4.Скалярное произведение функций

Учитывая введенные вначале обозначения, свойство ортогональности функций sin и cos записываются следующим образом:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_k t \sin \omega_m t \, dt = 0, \quad \forall k, m, \tag{3.2}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\omega_k t \cos\omega_m t\, dt = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ T/2, & k = m, \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin\omega_k t \sin\omega_m t\, dt = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ T/2, & k = m. \end{cases}$$

Фурье-анализ

Основная задача Фурье-анализа найти коэффициенты a_kиb_k в выражении(3.1). Для этого необходимо умножить левую и правую части (3.1)на $\cos\omega_m t$:

$$x(t)\cos\omega_m t = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos\omega_k t \cos\omega_m t + b_k \sin\omega_k t \cos\omega_m t).$$

Интегрируя обе части по переменной$t \in [-T/2,\ T/2]$,получаем

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos\omega_m t\, dt = \frac{a_0}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \cos\omega_m t\, dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-T/2}^{T/2} \cos\omega_k t \cos\omega_m t\, dt + b_k \int_{-T/2}^{T/2} \sin\omega_k t \cos\omega_m t\, dt\right).$$

Используя свойство ортогональности (3.2), легко можно найти выражения для коэффициентов a_kиb_k:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos\omega_k t\, dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin\omega_k t\, dt.$$

Часто бывает полезным следующее разложение функции $x(t)$, которое может быть получено из (3.1):

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \cos(\omega_k t + \varphi_k),$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$ –основная частота (частота основного тона); $M_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ – амплитуда компоненты сигнала на частоте $k\omega_1$; $\varphi_k = \mathrm{arctg}(-b_k/a_k)$ – фаза компоненты сигнала на частоте $k\omega_1$.

Пример 3.1. Сигналмеандр

В качестве примера рассмотрим ряд Фурье для периодическогосигнала$x(t+nT) = x(t)$,который определен следующим образом (рис. 3.5):

$$x(t) = \begin{cases} -1, & -T/2 < t < 0, \\ 1, & 0 \le t < T/2. \end{cases} \tag{3.3}$$

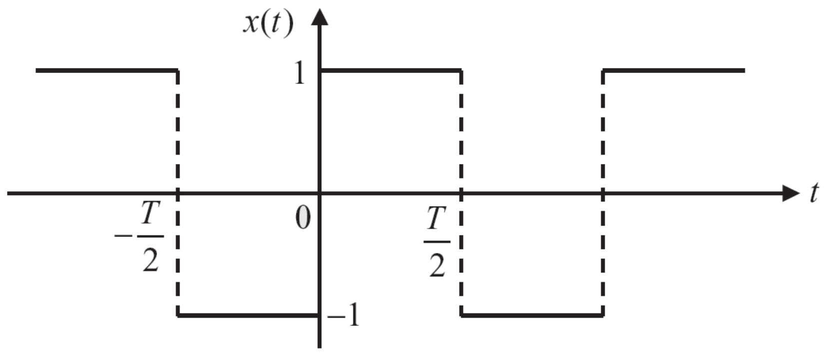


Рис. 3.5.Меандр

Легко заметить, что среднее значение сигнала равно нулю:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = 0,$$

а коэффициенты a_kи b_k равны

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos(\omega_k t)\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} -\cos(\omega_k t)\,dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} \cos(\omega_k t)\,dt\right] = 0,$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos(\omega_k t)\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} -\cos(\omega_k t)\,dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} \sin(\omega_k t)\,dt\right] =$$
$$= \frac{2}{k\pi}(1 - \cos k\pi).$$

Подставляя полученные значения в (3.1),получим выражение для сигнала:

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\left[sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3}sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5}sin(5\omega_1 t) + \cdots\right]. \qquad (3.4)$$

Необходимо отметить, что в разложении участвуют только функции sin*. Это происходит из-за того, что функция меандра является нечетной и для ее представления не нужнычетные функции(*cos*).*

Полезно рассмотреть,как частичные суммы(3.4)аппроксимируют исходный сигнал$x(t)$.Обозначим через $S_n(t)$ сумму первых nчленов в (3.4). Графики первых трех частичных сумм приведены на рис. 3.6.

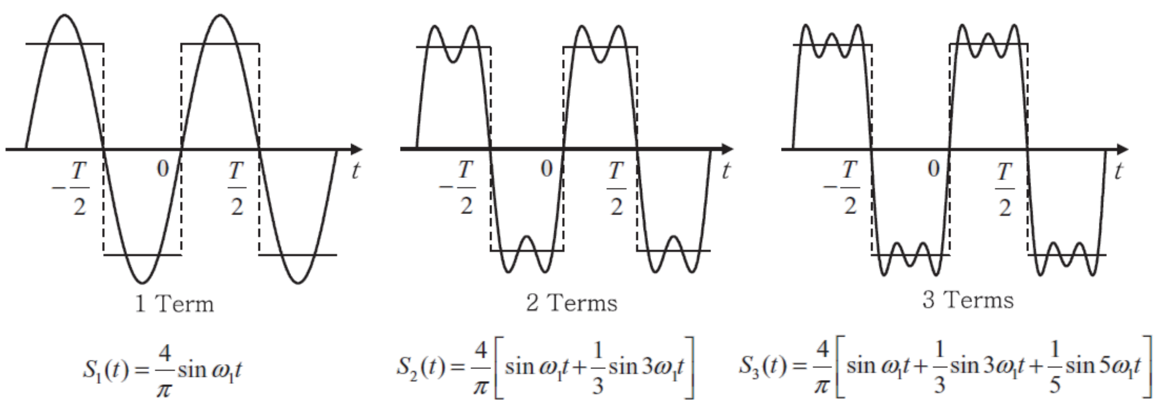


Рис. 3.6.Частичные суммы, аппроксимирующие сигнал меандр

Эффект Гиббса

Поведение частичных сумм ряда Фурье в точке разрыва функции называют *эффектом Гиббса*. Создается впечатление, что колебания в точках разрыва исчезнут, если просуммировать больше членов ряда, однако этого не происходит (рис. 3.7). Заметьте, что от количества слагаемых в ряде Фурье амплитуда выброса не изменяется.

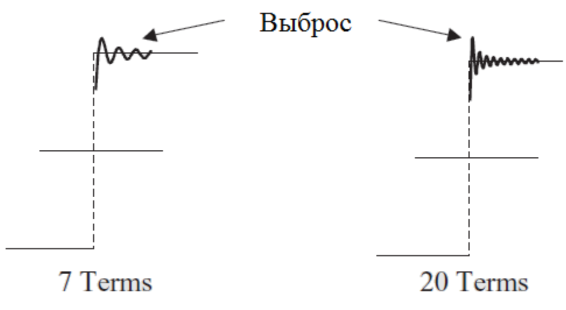


Рис. 3.7.Эффект Гиббса

Комплексная запись ряда Фурье

Наиболее часто ряд Фурье записывается в терминах комплексных экспонент $e^{j\omega_k t}$,где $\omega_k = 2\pi k/T_P$. Переход к комплексной форме записи ряда Фурье можно выполнить, если учесть, что

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right) \quad \text{и} \quad \sin\theta = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right). \tag{3.5}$$

Используя эти соотношения, выражение (3.1) можно преобразовать к виду

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-j\omega_k t}, \tag{3.6}$$

$$c_k = \frac{1}{T_P}\int_0^{T_P} x(t) e^{-j\omega_k t} dt,$$

где комплексные коэффициенты c_k связаны с a_k и b_k следующим образом:

$$c_k = (a_k - jb_k)/2.$$

Коэффициент c_k несет в себе информацию об амплитуде синусной и косинусной волны k-й компоненты разложения Фурье (илиk-й гармоники). Форма (3.6)связана сразложением

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \tag{3.7}$$

следующим образом*:

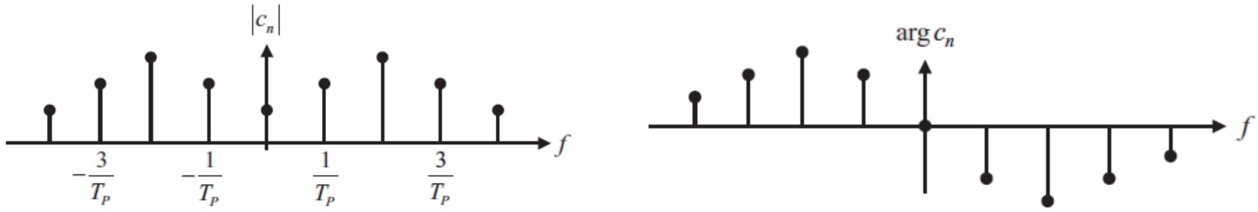
$$|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = M_k, \quad \arg(c_k) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-b_k}{a_k}\right) = \varphi_k.$$

Заметим, что в (3.6)«кирпичиками», из которых складывается сигнал, являются *комплексные экспоненты*$e^{-j\omega_k t}$. Коэффициенты c_k также имеют комплексные значения и несут в себе информацию не только об амплитуде, но и о фазеk-й гармоники. Кроме того, в (3.6)возникают компонентыс«отрицательной частотой». Понятие отрицательной частотыимеет чисто математическую природу и берет свои истоки в (3.5).

Спектр сигнала

Для пояснения понятия спектра сигнала обратимся к комплексной форме ряда Фурье (3.6). График зависимости$|c_k|$ от частоты ω_kназывается *амплитудным спектром* сигнала $x(t)$. График зависимости фаз частотных компонент $\arg c_k$ в от частоты ω_kназывается *фазовым спектром* сигнала $x(t)$. Примеры амплитудного и фазового спектров показаны на рис. 3.8.

* В Matlab для вычисления модуля комплексного числа используется функция `abs`, а для вычисления аргумента комплексного числа – функция `angle`.



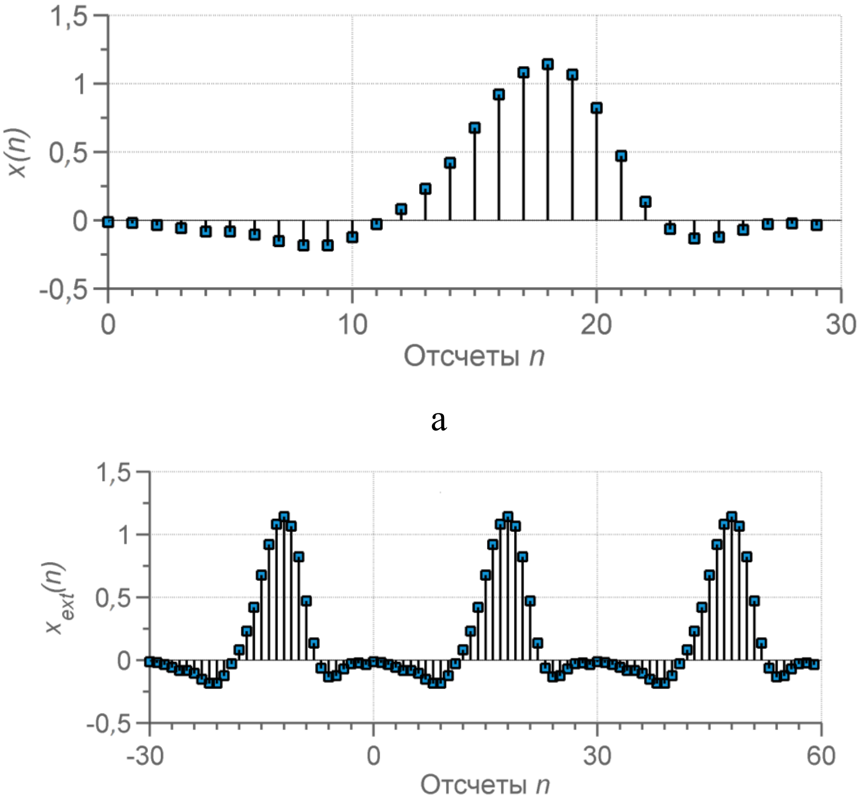
а б

Рис.3.8.Амплитудный (а) и фазовый (б) спектры

Альтернативным способом изобразить спектр сигнала является построение графиков для M_kи φ_k из выражения (3.7).

Дискретное преобразование Фурье

ДПФ является аналогом ряда Фурье для сигнала, определенного в дискретные моменты времени. В ДПФ «предполагается», что вне заданного интервала сигнал имеет периодическое продолжение, как и в случае ряда Фурье (сравнитерис. 3.9 и 3.1).



а

б

Рис. 3.9.Дискретный сигнал (а) и его ДПФ-расширение (б)

По этой причине полный период функцииsin с точки зрения ДПФ представляется, как показано на рис. 3.10 (без нулевого отсчета в конце). Так происходит потому, что именно в этом случае ДПФ-расширение сигнала тоже является синусом (рис. 3.11).

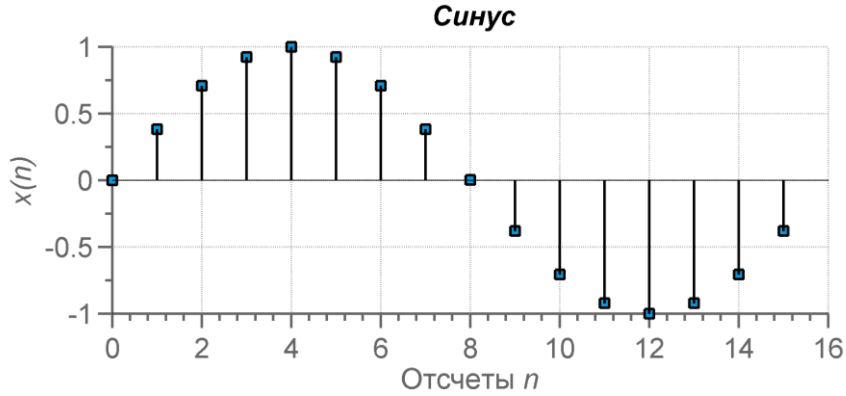


Рис. 3.10.Один период дискретного синуса

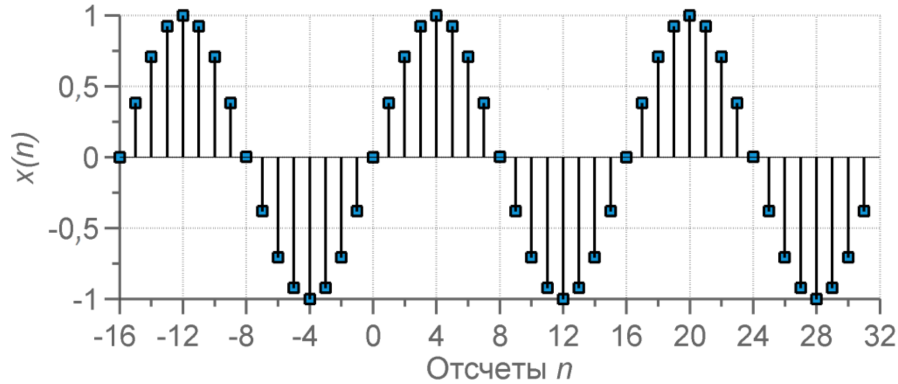


Рис.3.11.Дискретный синус: ДПФ-расширение

Что делает ДПФ?

Как показано на рис.3.12, ДПФпереводитN точек входного сигнала в два выходных сигнала из $N/2+1$ точек. Входной сигнал – это сигнал, который подвергается разложению, а два выходных сигнала содержат *амплитуды* синусов и косинусов. Как правило, входной сигнал определен во *временной области*. Это вызвано тем, что большинство сигналов, встречающихся в ЦОС, состоят из отсчетов, полученных через равные интервалы *времени*. Термин *частотная область* используется для описания амплитуд синусов и косинусов (включая специальное масштабирование, которое будет объяснено позже).

Частотная область содержит точно такую же информацию, как и временная, но в другой форме. Если известно представление сигнала в одной из областей, всегда можноего представить в другой. Если известен сигнал во временной области, то процесс вычисления сигнала в частотной области называется *разложением, анализом*, *прямым ДПФ* или просто *ДПФ*. Если известен сигнал в частотной области, то вычисление сигнала во временной области называется *синтезом*, или *обратным ДПФ*. Как синтез, так и анализ могут быть представлены в виде формул и компьютерных алгоритмов.

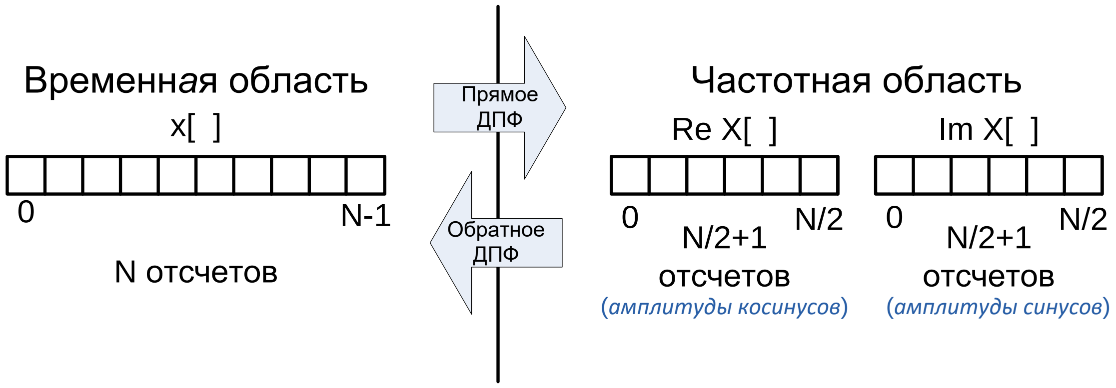


Рис.3.12.ДПФ:представление сигнала во временной и частотной областях

Число отсчетов во временной области обычно обозначается *переменной*N. Значение N может быть любой положительной величиной, но чаще всего его выбирают кратным степени числа 2, т. е. 128, 256, 512 и т. д. Это происходит по следующим двум причинам: 1) при хранении цифровых данных адресное пространство памяти кратно степени двойки; 2) большинство эффективных алгоритмов для вычисления ДПФ используют N, кратное степени двойки.

На рис. 3.13 показан пример ДПФ для $N = 32$. Сигнал во временной области представляется в виде массива $x[0], \ldots x[31]$, сигнал в частотной области – в виде двух массивов $Re\, X[0] \ldots Re\, X[16]$ и $Im\, X[0] \ldots Im\, X[16]$. Заметим, что 32 точки временной области соответствуют 17 точкам в каждом массиве частотной области с номерами частот от 0 до 16, т. е. N точек временной области соответствуют $N/2 + 1$ точек частотной области (не $N/2$ точек). Опускание этой дополнительной точки является типичной ошибкой при программировании ДПФ.

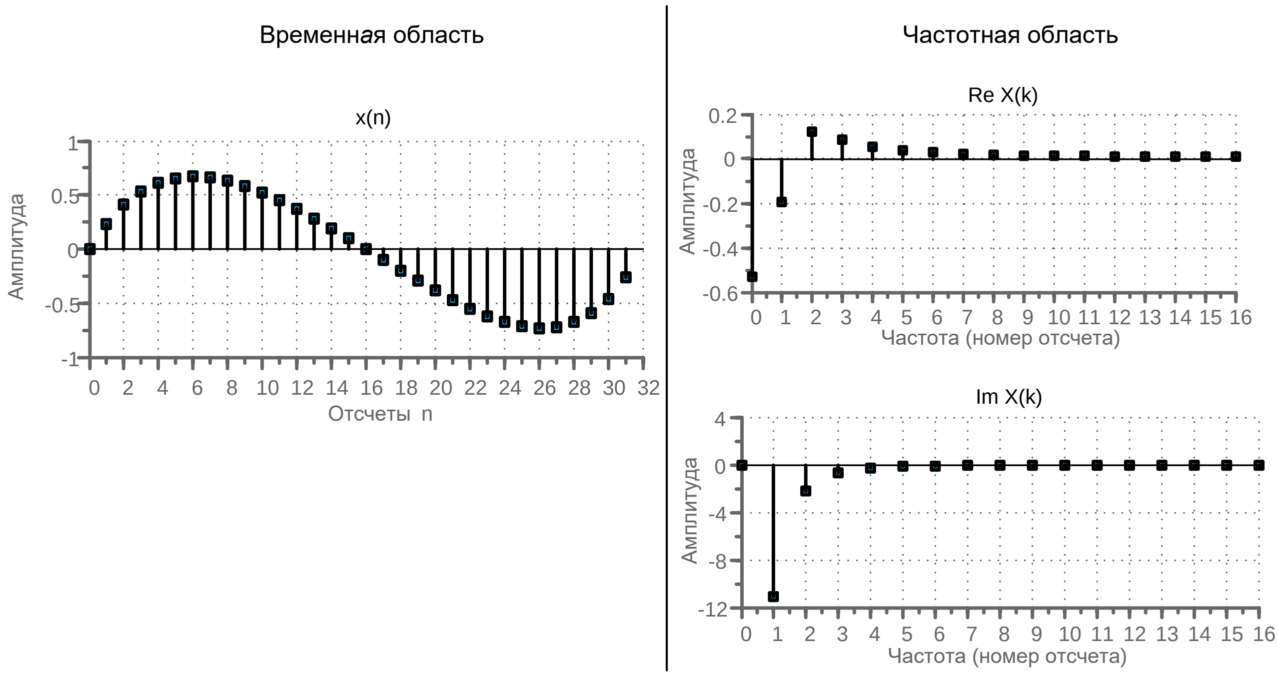


Рис. 3.13.Пример ДПФ для 32 отсчетов: представление сигнала во временной и частотной областях

Масштаб частотной оси

Горизонтальная ось в частотной области может быть обозначена четырьмя различными способами, все они общеприняты в ЦОС. При *первом способе* горизонтальная ось размечена номерами отсчетов от 0 до $N/2$. В этом случае индексы в частотной области есть целые числа, например, $Re\,X[k]$ и $Im\,X[k]$, где k меняется от 0 до $N/2$ с шагом единица. Этот способ часто применяют программисты, потому что он соответствует коду, который используется для доступа к массиву(см. рис. 3.13).

Во*втором способе* горизонтальная ось размечена *в долях частоты дискретизации*. Это означает, что величина вдоль горизонтальной оси всегда изменяется от 0 до 0,5, т. к. дискретные данные могут содержать частоты только от постояннойсоставляющей до половины частоты дискретизации. Для этого обозначения используется переменная f. Реальная и мнимая части записываются как $Re\,X[f]$ и $Im\,X[f]$, где f принимает значения $N/2+1$различных значений, равномерно расположенных в интервале от0до0,5. Связь между первым и вторым способом масштабирования частотной оси выражается следующим образом:

$$f = \frac{k}{N}.$$

Третий способ по сути совпадает со вторым, за исключением того, что горизонтальная ось умножена на 2π. Индекс, используемый для разметки, – ω. При этом обозначении реальная и мнимая части записываются как$Re\,X[\omega]$ и $Im\,X[\omega]$, где ω принимает значения $N/2+1$ величин, равномерно расположенных между 0 иπ. Параметр ω называется *нормированной круговой частотой*. Этот способ обозначений удобен тем, что позволяетсократить математические выкладки. Например, рассмотрим запись косинуса,используя три различных способа задания частотной оси:

$k{:}\,\mathrm{c}(n) = \cos(2\pi kn/N)$,

$f{:}\,c(n) = \cos(2\pi fn)$,

$\omega{:}\,c(n) = \cos(\omega n)$.

Четвертый способ заключается в разметке горизонтальной оси в величинах аналоговых частот, используемых в *практических* приложениях. Например, если в системе применяется частота дискретизации 10 кГц (т.е. 10 000 отсчетов в секунду), то на графике частота будет меняться от 0 до 5 кГц. Этот способ хорош для представления частотных данных в обозначениях, используемых на практике. Недостаток заключается в том, что он привязан к конкретному значению частоты дискретизации входного сигнала, и поэтому неприменим,когда ведется речь от абстрактном сигнале.

Базисные функции ДПФ

Синусы и косинусы, используемые в ДПФ, обычно называются *базисными функциями*. Эти базисные функции имеют *единичную* амплитуду. Выходом ДПФ является набор чисел, которые представляют амплитуды базисных функций. Если определить каждую амплитуду (в частотной области) соответствующего синуса или косинуса, то в результате будут получены значения, которые отличаются от реальных на*масштабирующий коэффициент*.

Базисные функции ДПФ определяются следующими выражениями:

$$c_k[n] = \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right), \qquad s_k[n] = \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right),$$

где$n = 0,1 \dots N-1$;$k = 0,1 \dots N/2$;$c_k[n]$ – косинусная волна с амплитудой, содержащейся в $Re\, X[k]$;$s_k[n]$ – синусная волна с амплитудой, содержащейся в $Im\, X[k]$. Например, рис. 3.14 показывает некоторые из 17 синусов и 17 косинусов, используемых в32-точечном ДПФ.

Рассмотрим некоторые из этих базисных функций. Косинусная волна $c_0[\,]$ имеет нулевую частоту, т.е. это постоянныйсигнал сединичной амплитудой. Это означает, что $Re\, X[0]$ содержит величину, усредненную по всем точкам сигнала во временной области. В электронике можно было бы сказать, что $Re\, X[0]$ содержит *постоянную составляющую*. Синусная волна с нулевой частотой$s_0[\,]$ состоит из одних нулей. Она не воздействует на формирование сигнала.

Синусоиды $c_2[n]$ и $s_2[n]$ совершают 2 полных колебания на отрезке из N точек. Им соответствуют $Re\, X[2]$ и $Im\, X[2]$. Подобным образом$c_{10}[n]$ и $s_{10}[n]$ совершают 10 полных колебаний на N точках. Этим синусоидам соответствуют амплитуды $Re\, X[10]$ и $Im\, X[10]$. Проблема заключается в том, что отсчеты $c_{10}[n]$ и $s_{10}[n]$ не отражают *наглядно* характер синусных и косинусных волн. Если бы не было непрерывной кривой на графике, было бы трудно определить вид сигнала.

Самые высокие частоты в базисных функциях – это $c_{N/2}$и$s_{N/2}$ (для рассматриваемого примера $c_{16}[n]$ и $s_{16}[n]$). Дискретная косинусная волна чередуется между 1 и -1, что может быть интерпретировано как отсчеты по пикам непрерывной синусоиды. В противоположность этому дискретная синусная волна состоит из всех нулей в результате попадания отсчетов на *нулевые пересечения*. Это делает величину $Im\, X[N/2]$ такой же, как и $Im\, X[0]$: всегда равной нулю и не влияющей на синтез сигнала во временной области,что дает ответ на вопрос, почему из N отсчетов на входе ДПФ образуется $N+2$ отсчетов на выходе. Ответ в том, чтодва выходных отсчета не содержат информацию, позволяя другим N быть полностью независимыми.

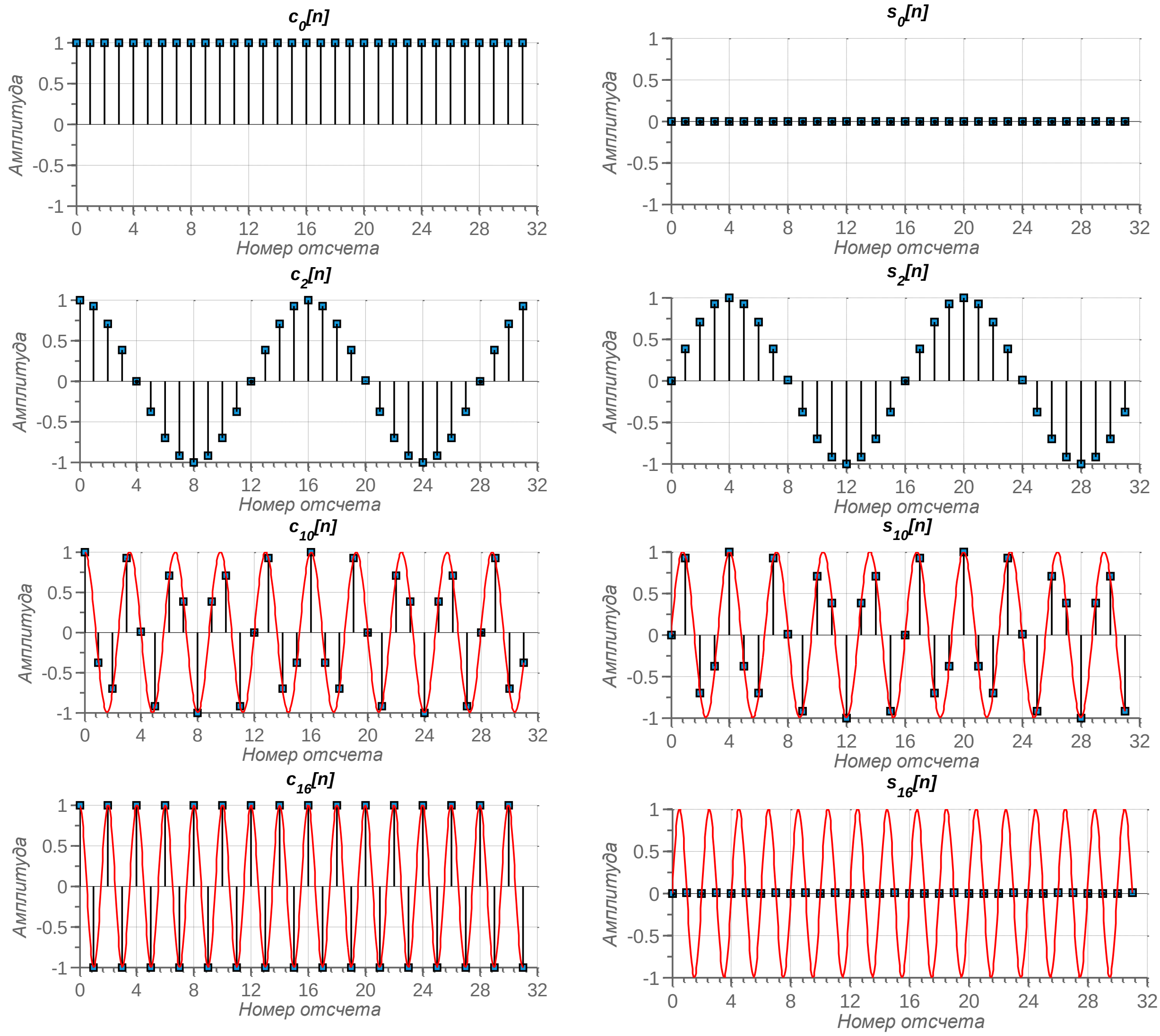


Рис.3.14.Базовые функции 32-точечного ДПФ

Вычисление ДПФ

Выражения для вычисления прямого ДПФ:

$$ReX[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right), ImX(k) = -\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right),$$

где $x[n]$ – анализируемый сигнал во временной области;$Re\,X(k)$и $Im\,X(k)$– вычисляемые сигналы в частотной области; индекс k изменяется от 0 до $N/2$.

Выражение для ДПФ можно записать и в комплексной форме, используя формулу Эйлера $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}, \qquad k = 0, 1 \dots N/2.$$

Уравнение синтеза или обратного ДПФ можно записать как

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N/2} Re\,\hat{X}(k)\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) + \sum_{k=0}^{N/2} Im\,\hat{X}(k)\sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right). \tag{3.8}$$

Иными словами, любой сигнал из Nточек $x[n]$ может быть создан суммированием $N/2+1$ косинусных волн и $N/2+1$ синусных волн. Амплитуды косинусных и синусных волн содержатся в массивах $Re\hat{X}(k)$ и$Im\hat{X}(k)$ соответственно.

В выражении (3.8) массивы обозначаются$Re\,\hat{X}(k)$ и$Im\,\hat{X}(k)$ вместо $Re\,X(k)$ и $Im\,X(k)$. Это вызвано тем, что амплитуды, необходимые для синтеза, слегка отличаются от значений сигнала в частотной области. Это влияние коэффициента масштабирования.Для получения правильного результата требуется нормализация.Незнание этого факта часто приводит к ошибкам при программировании формул ДПФ. Формально масштабирование выглядит следующим образом:

$$Re\,\hat{X}(k) = \frac{Re\,X(k)}{N/2}\ ,\ \ Im\,\hat{X}(k) = -\frac{Im\,X(k)}{N/2}\ ,$$

за исключением двух специальных случаев:

$$Re\,\hat{X}(0) = \frac{Re\,X(0)}{N}\ ,\ \ Re\,\hat{X}(N/2) = \frac{Re\,X(N/2)}{N}\ .$$

По аналогии с выражением (3.7) формулу для обратного преобразования Фурье можно записать в следующем виде:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N/2} M_k \cos\left(\frac{2\pi nk}{N} + \varphi_k\right), \tag{3.9}$$

где

$$M_k = \sqrt{\left(Re\,\hat{X}(k)\right)^2 + \left(Im\,\hat{X}(k)\right)^2},\ \ \varphi_k = \operatorname{arctg}\frac{-Im\,\hat{X}(k)}{Re\,\hat{X}(k)}.$$

Выражение (3.9) показывает, что с помощью ДПФ можно представить сигнал в виде суммы гармонических колебаний. При этом каждая гармоника имеет свою амплитуду M_k и фазу φ_k. Для правильного вычисления фазы в среде Matlabпредусмотрена функция `atan2(imX, reX)`, которая возвращает значение угла в диапазоне $[-\pi,\ \pi]$.

Существует и комплексная форма записи обратного ДПФ:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{\frac{j2\pi kn}{N}}, \qquad n = 0,1,\dots N-1.$$

Вычисление ДПФ в пакете Matlab

В пакете Matlab для вычисления дискретного преобразования Фурье используется функция `FFT(X)`. В случае матричного аргумента ДПФ рассчитывается для каждого столбца матрицы. Может оказаться полезным явное указание размера преобразования: `FFT(X,N)`. Если реальная длина вектора X меньше заданной размерности N, он дополняется нулями. При этом можно получить больше частотных отчетов и, следовательно, улучшить условия различения синусоидальных компонент сигнала. Если длина входного вектора больше N, лишние отсчеты отсекаются.

Обратное дискретное преобразование Фурье вычисляется с помощью функции `IFFT(X)`, которая используется аналогично предыдущей.

1.4 Порядок выполнения работы

3.2.1. Разработайте функцию `DFT`, вычисляющую ДПФ от входного вектора, не используя функцию Matlab`FFT`, и рисующую графики действительной и мнимой частей результата преобразования. Сравните результаты работы своей функции с функцией Matlab `FFT`.

3.2.2. Предположим, что задан входной сигнал $x[n]$изначения ДПФ сигнала $X(k)$. Разработайте в среде Matlab функцию `[cA, sA]=SinCosAmps(X)`, которая из комплексных значений $X(k)$ вычисляет амплитуды косинусов и синусов, на которые раскладывается сигнал$x[n]$. Если входной сигнал имеет размерность N, то выходные массивы `cA` и `sA` должны иметь размерность $N/2 + 1$.

3.2.3.Напишите Matlab-функцию, которая выполняет синтез сигнала $x[n]$ из амплитуд косинусов и синусов, полученных функцией `SinCosAmps`. Проверьте работу функции.

3.2.4. Напишите Matlab-функцию которая преобразует комплексные значения ДПФ сигнала $X(k)$ в гармонические параметры M_k и φ_k(см. формулу (3.9)). Если $X(k)$ имеет размерность N, то размерность массивов M_kи φ_k должна быть $N/2 + 1$. Используя разработанную функцию произвольного сигнала $x[n]$, постройте амплитудный и фазовый спектры сигнала.

3.2.5. Напишите Matlab-функцию которая выполняет синтез сигнала из гармонических параметров M_k и φ_k (см. формулу(3.9)). Проверьте работу функции.

3.2.6. Используя функцию из задания 3.2.5, выполните Фурье-анализ ЭКГ-сигнала**. Постройте график сигнала во временной и частотной областях. По оси абсцисс в частотной области отложите аналоговые частоты.

3.2.7. Используйте функции из задания 3.2.5 и 3.2.6 для изменения тембра речевого сигнала. Для это запрограммируйте в Matlab следующий алгоритм:

- загрузите wav-файл при помощи функции `[x, fs]=wavread('путь_к_файлу');`
- входной сигнал разбейте на последовательные секции по 512 отсчетов;
- для каждой секции сигнала выполните ДПФ и найдите гармонические параметры M_k иφ_k;
- преобразуйте амплитуды гармоник M_k при помощи функции `ChangeTimbre(M_k,alpha)`, оставляя фазы гармоник неизменными. Параметр `alpha` влияет на степень изменения тембра:$\alpha = 1$ – не изменит тембра, $\alpha > 1$– тембр становится более высоким, $\alpha < 1$– более низким. При $\alpha > 2$ и$\alpha < 0{,}5$ в речевой сигнал может быть значительно искажен;
- выполните синтез секции речевого сигнала из параметров M_k иφ_kпри помощи функции из задания 3.2.6;
- запишите синтезированный речевой сигнал `y` в wav-файл при помощи функции `wavwrite(y,fs,'имя_файла')`.

3.2.8. Выполните моделирование работы полупроводникового диода при прохождении через него синусоидального сигнала (рис. 3.15).

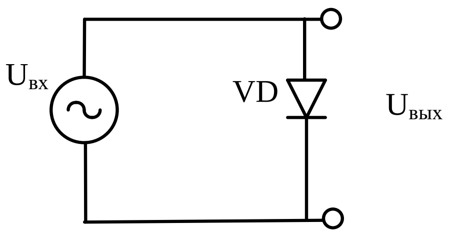


Рис.3.15. Схема для задания 3.2.8

Выходное напряжение определяется следующим образом

$$U_{\text{вых}} = \begin{cases} U_{\text{вх}} \times \text{acrtg}\left(\dfrac{1}{r_{\text{пр}}}\right), & U_{\text{вх}} > U_{\text{отс}} \\ U_{\text{отс}}\left(\dfrac{U_{\text{вх}}}{U_{\text{отс}}}\right)^2, & 0 < U_{\text{вх}} < U_{\text{отс}} \\ 0, & \text{U}_{\text{вх}} < 0 \end{cases}.$$

** Файл `ecg_data`хранится в папке "\\1-311-kafevs\Docs\ТиПЦОС\Материалы для ЛР№3\". Для загрузки необходимо скопировать файл в текущий каталог Matlabи выполнить команду `load('ecg_data');`частота дискретизации сигнала равна 360 Гц.

Постройте график выходного напряжения, если на входе действует сигнал $x(t) = 0{,}5\sin(2\pi 10t)$, $0 < t < 0{,}5\ c$. Для получения дискретного сигнала $x[n]$ выполните дискретизацию сигнала с частотой 100 Гц. Постройте спектры входного ($x[n]$) и выходного сигнала $y[n]$. Какие выводы можно сделать по внешнему виду полученных спектров?