ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2. Разностные уравнения

ЦЕЛЬ РАБОТЫ – изучение разностных уравнений, программирование разностных уравнений в пакете Matlab.

2.1. Теоретические сведения

Разностное уравнение

В практическом применении ЦОС особую роль играет класс систем, которые описываются разностными уравнениями с фиксированными коэффициентами:

$$a_0 y(n) = \sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i), \tag{2.1}$$

где $\{b_i\}$ – *коэффициенты прямой связи*, которые применяются к поступающему в систему сигналу; $x(n)$ и $\{a_i\}$ – *коэффициенты обратной связи*, которые применяются к выходному сигналу $y(n)$.

В зависимости от значения коэффициентов $\{b_i\}$ и $\{a_i\}$выражение (2.1)может описывать работу различных устройств (например интегратора, дифференциатора, полосового фильтра, фильтра нижних частот и т.д.).В Matlabразностные уравнения задаются двумя векторами коэффициентов: $\{b_i\}$ и $\{a_i\}$.

На рис. 2.1показана схема реализации разностного уравнения (2.1). Заметим, что чаще всего коэффициент a_0имеет единичное значение и поэтому не показан на схеме. Через z^{-1}на рисунке обозначен блок задержки (регистр), который хранит соответствующий задержанный отсчет. В Matlabлинейную систему реализует функция`y=filter(b,a,x)`, где `b` – коэффициенты прямой связи, `a` – коэффициенты обратной связи, `x` – входной сигнал. Ниже приводится пример использования функции `filter` для реализации линейной системы:

$$y(n) = 0{,}3x(n) + 0{,}6x(n-1) + 0{,}3x(n-2) - 0{,}9y(n-2). \tag{2.2}$$

```
N = 64;
x = [1 zeros(1,N-1)]; % дельта-импульс
b = [0.3 0.6 0.3];
a = [1 0 0.9];
y = filter(b,a,x);
```

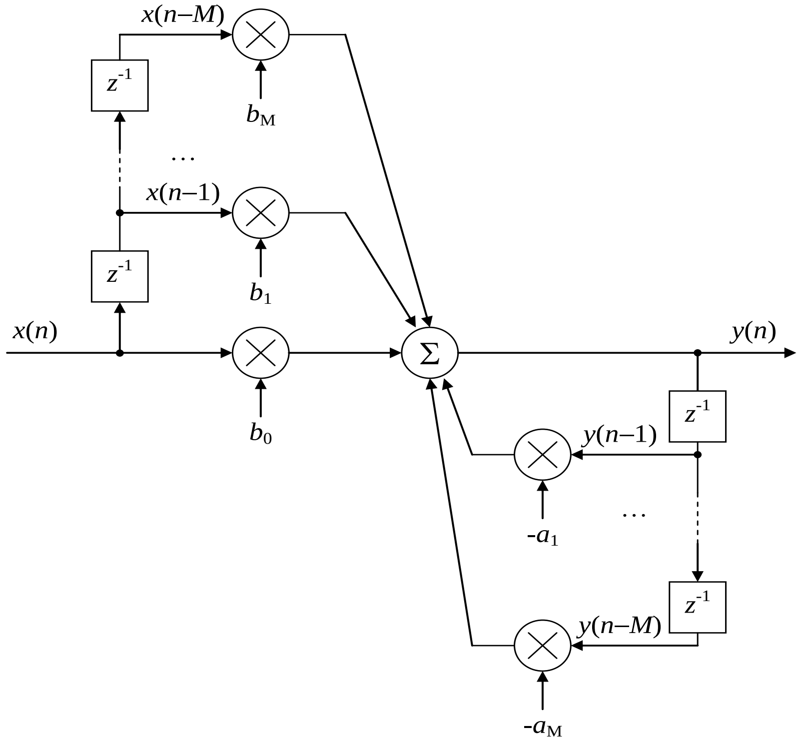

Рис. 2.1.Схема реализации разностного уравнения

На рис. 2.2показаны графики входного и выходного сигналов линейной системы из приведенного примера.

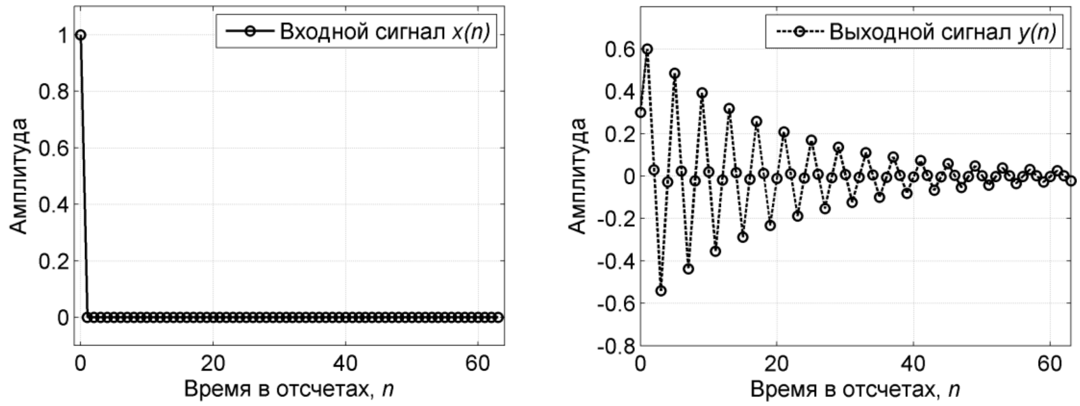

Рис. 2.2. Работа линейной системы

Импульсная характеристика

Системы, описываемые уравнением(2.1), делят на два класса:

а) рекурсивные;

б) нерекурсивные.

В *рекурсивных* системах выход $y[n]$зависит как от входного сигнала $x[n]$ и его предыстории $x[n-i]$, так и от предыдущих выходных значений$y[n-i]$. В *нерекурсивных* системах выходной сигнал зависит только от входного сигнала и его предыстории. Другими словами, у нерекурсивных систем все коэффициенты a_i(кроме a_0)равны нулю.

Помимо задания коэффициентов $\{b_i\}$и$\{a_i\}$ в выражении (2.1) линейную систему можно описать посредством ее *импульсной характеристики*. **Импульсная характеристика** – это временной сигнал, который генерирует система при подаче на ее вход дельта-импульса$\delta(n)$. Пример получения импульсной характеристики показан на рис. 2.2. Очевидно, что при подаче дельта-импульса на вход нерекурсивной системы ее выходной сигнал будет иметь конечную длительность, отчего такие системы называются системами с конечной импульсной характеристикой (КИХ). Для нерекурсивных систем вследствие наличия обратной связи характерна бесконечная импульсная характеристика (БИХ).

Собственная частота

Известно, что импульсная характеристика линейной системы может содержать колебания нескольких *собственных частот*. Эти собственные частоты определяются коэффициентами обратной связи $\{a_i\}$. Каждый корень характеристического полинома (p_i)

$$A(z) = 1 + \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i} \tag{2.3}$$

дает свой вклад в импульсную характеристику вида $p_i^n u(n)$.

В Matlabдля определения корней полинома имеется функция `root`. Для получения полной информации о работе данной функции `root`наберите к консольном окне системы Matlab`help root`.

Для разностных уравнений второго порядка (как например в (2.2)) характерно наличие двух различных собственных частот. Вследствие чего их импульсная характеристика описывается выражением

$$h(n) = (\alpha p_1^n + \beta p_2^n)u(n). \tag{2.4}$$

Линейная система

Линейная система, описываемая уравнением(2.1),входит в более общий класс *систем дискретного времени*:

$$y[n] = L[x[n]].$$

В этом выражении оператор $L[\cdot]$задает алгоритм, согласно которому из последовательности $x[n]$получается$y[n]$. Поскольку большинство систем,рассматриваемых в курсе ТиПЦОС,являются*линейными* (КИХ, БИХ-фильтры и дискретное преобразование Фурье), то необходимо знать их отличительные свойства.

Как же отличить линейную систему от любой другой? Существенным признаком линейной системы является выполнение***принципа суперпозиции***:

$$L[a_1x_1[n] + a_2x_2[n]] = a_1L[x_1[n]] + a_2L[x_2[n]].$$

Другое важное свойство линейных систем – это их ***инвариантность*** к сдвигу. Инвариантность означает, чтоесли сигнал $x[n]$ вызывает отклик $y[n]$, то задержанный сигнал $x[n-k]$будетвызывать задержанный отклик $y[n-k]$.Рассмотрим пример, поясняющий введенные понятия.

Пример 2.1. Нелинейная система

Пусть дискретная система описывается уравнением

$$y[n] = \left[x[n]\right]^2. \tag{2.5}$$

*Чтобы определить, является ли система**линейной,**проверим выполнение-принципа суперпозиции для двух тестовых сигналов $x_1[n]$ и$x_2[n]$(рис. 2.3).*

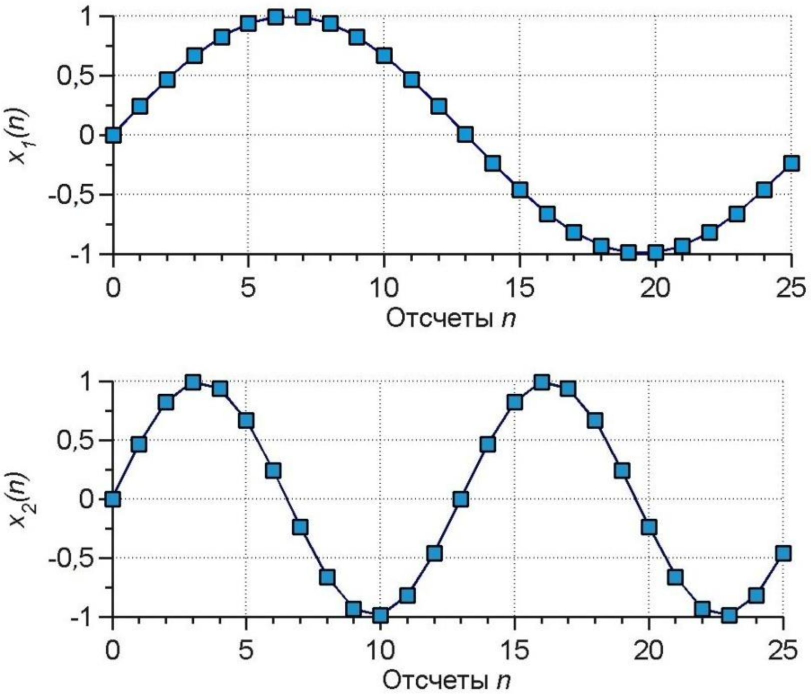

Рис. 2.3. Входные сигналы

Сложим эти два сигнала и пропустим через дискретную систему (2.5). Результат показан на рис.2.4.

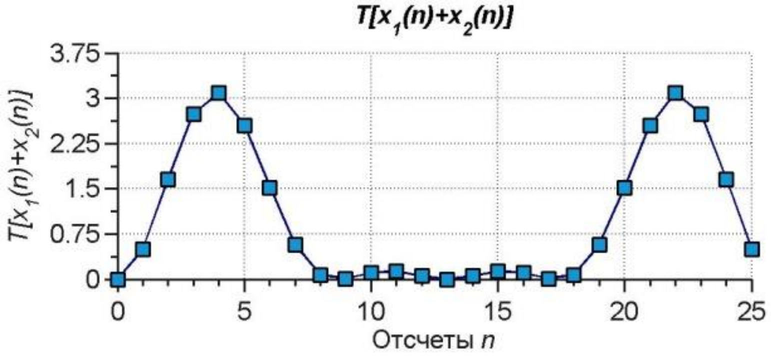

Рис. 2.4. Выходной сигнал после подачи на вход суммы сигналов $x_1[n]$и $x_2[n]$

Теперь пропустим по отдельности сигналы $x_1[n]$ и$x_2[n]$ через рассматриваемую дискретную систему и затем сложим их, в результате чего получим сигнал, изображенный на рис2.5.

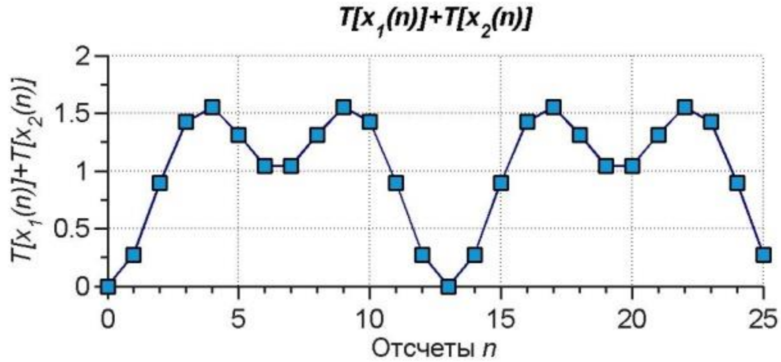

Рис. 2.5. Суммавыходных сигналов системы после подачи на вход сигналов $x_1[n]$и $x_2[n]$

Легко видеть, что графики на рис. 2.4 и 2.5различны. Из этого можно заключить, что (2.5) описывает ***нелинейную*** *систему.*

Z-преобразование

Z-преобразование дискретного сигнала $x(n)$имеет вид

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}.$$

Одной изособенностейz-преобразования является свойство*задержкиилисмещения*, которое имеет следующий смысл:если z-образ последовательности $x(n)$равен$X(z)$, то z-образ задержанной последовательности $x(n-m)$равен $z^{-m}X(z)$:

$$x(n) \to X(z),$$
$$x(n-m) \to z^{-m}X(z).$$

Z-преобразование бывает весьма полезно, когда необходимо определить стабильность линейной системы (везде далее под термином«линейная система» мы будем иметь в виду линейную систему, инвариантную к сдвигу). Система называется *стабильной*, если на любое ограниченное воздействие $x[n]$ее отклик также ограничен, т.е.

$$|x(nT)| \leq M_x < \infty$$

длявсех $n = 0, 1, 2 \ldots$, и

$$|y(n)| \leq M_y < \infty$$

для всех $n = 0, 1, 2 \ldots$.

Пример 2.2. Нестабильность линейной системы

В качестве тестового сигнала будем использовать единичный скачок длительностью 5 отсчетов (рис.2.6).

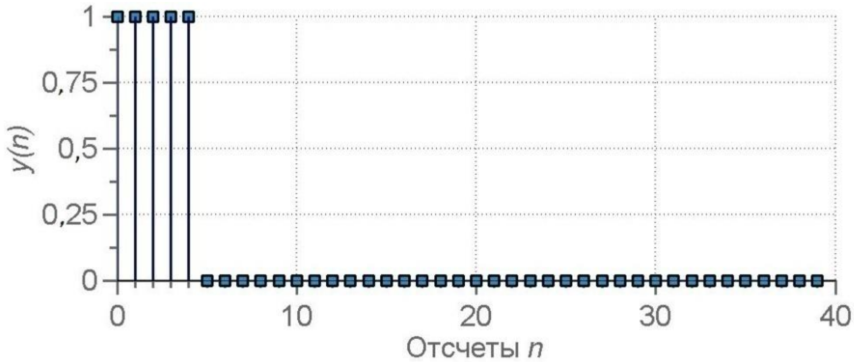

Рис. 2.6. Единичный отсчет длительностью пять отсчетов

Приведем отклик на единичный скачок нестабильной линейной системы (рис. 2.7).

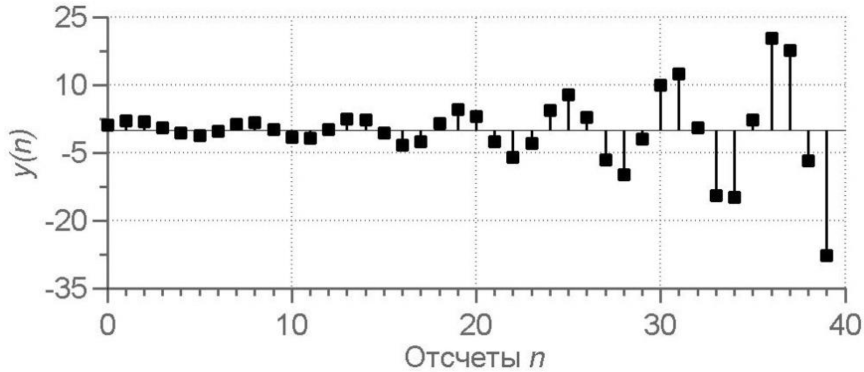

Рис. 2.7. Нестабильная система

Система нестабильна, поскольку отклик на сигнал ограниченной длительности не сходится к нулю и лишь увеличивается с увеличением n.

Приведем отклик на тот же единичный скачок стабильной системы (рис.2.8).

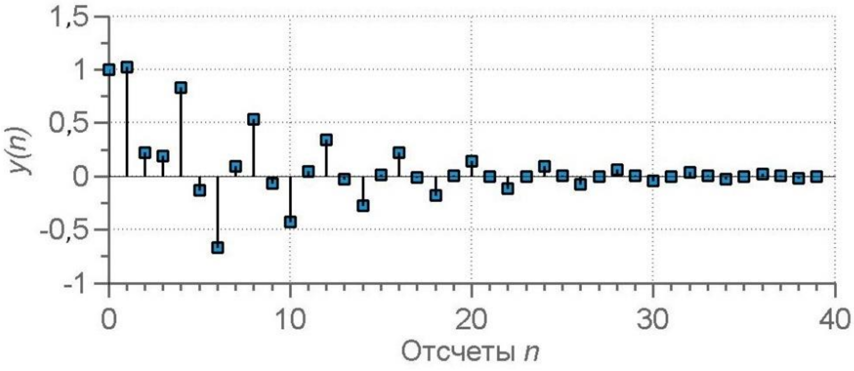

Рис. 2.8. Стабильная система

Легко увидеть, что отклик системы сходится к нулю – значит, система стабильна.

Часто необходимо определить стабильность линейной системы, зная лишь ее коэффициенты $\{b_i\}$и$\{a_i\}$из уравнения (2.1).Для этого необходимо обратиться к математическому аппаратуz-преобразования.

Вначале рассмотрим уравнение *свертки* во временной области:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M} h_i x(n-i), \tag{2.6}$$

где$x(n)$– это входной сигнал;$y(n)$ – выходной сигнал;$\{h_i\}$ –фиксированные коэффициенты.

Заметим, что сверткой описывается работа линейных нерекурсивных систем. Учитывая свойство задержки

$$h_0 x(n) \to h_0 X(z),$$
$$h_i x(n-i) \to h_i z^{-i} X(z),$$

z-преобразование для (2.6) принимает вид

$$Y(z) = \sum_{i=0}^{M} h_i z^{-i} X(z). \tag{2.7}$$

Вынося $X(z)$за знак суммы, получаем

$$Y(z) = X(z) \sum_{i=0}^{M} h_i z^{-i} = X(z) H(z). \tag{2.8}$$

Таким образом, получено еще одно свойство z-преобразования, которое показывает, что свертка двух сигналов во временной области эквивалента перемножению их образов в z-области.

Аналогичным образом можно поступить с разностным уравнением (2.1).Применяя свойство задержки z-преобразования

$$a_i x(n-i) \to a_i z^{-i} X(z),$$
$$b_i y(n-i) \to b_i z^{-i} Y(z),$$

получим

$$Y(z) = \sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} X(z) - \sum_{i=1}^{M} a_i z^{-i} Y(z).$$

Преобразуем выражение к виду

$$Y(z)\left(1 + \sum_{i=1}^{M} a_i z^{-i}\right) = X(z) \sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i},$$

из которого легко получить *передаточную функцию* линейной дискретной системы:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{\left(1 + \sum_{i=1}^{M} a_i z^{-i}\right)}. \tag{2.9}$$

Передаточнаяфункция$H(z)$полностью определяет линейную систему. Зная коэффициенты $\{b_i\}$и$\{a_i\}$, из выражения (2.9) можно записать разностное уравнение (2.1), которое описывает работу линейной системы.

Рассмотрим передаточную функцию в общем виде

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)},$$

где $N(z)$и $D(z)$ – полиномы от z^{-1}порядка M.

Поскольку полином степени Mимеет ровно Mкорней, функцию $H(z)$можно разложить намножители и представить в виде:

$$H(z) = \frac{K(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_M)}, \tag{2.10}$$

где z_i– i-й нуль;p_i–i-й полюс;K–коэффициент усиления.

Информацию, содержащуюся в уравнении (2.10), удобно и полезно изображать в виде диаграммы *нулей и полюсов*в z-плоскости (см. пример 2.3). На диаграмме крестиком обозначается положение полюсов, а кружком – положение нулей. Важной особенностью диаграммы нулей и полюсов является *единичная окружность*, которая задается уравнением $|z| = 1$. Для определения стабильности линейной системы существует правило: ***уустойчивых (стабильных) систем все полюса должны лежать внутри единичной окружности в z-плоскости***.

Пример 2.3. Определение стабильности системы

Определить стабильность системы с коэффициентами $b_0 = 1$, $b_1 = 1$*и* $a_1 = -0{,}5$ *и изобразить схему, реализующую систему.*

Вначале построим передаточную функцию согласно формуле (2.9):

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0{,}5z^{-1}}. \tag{2.11}$$

Затем преобразуем к виду (2.10):

$$H(z) = \frac{z + 1}{z - 0{,}5}. \tag{2.12}$$

Диаграмма нулей и полюсов для (2.12)показана на рис.2.9, из которой видно, что единственный полюс рассматриваемой системы $p_1 = 0{,}5$ *лежит внутри единичной окружности и, следовательно, линейная система стабильна.*

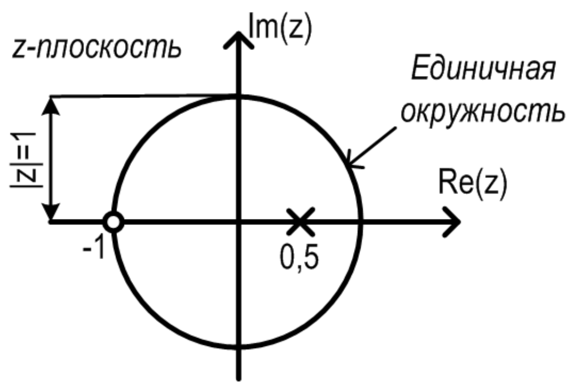

Рис. 2.9. Диаграмма нулей и полюсов

Чтобы изобразить схему, реализующую линейную систему, необходимо преобразовать передаточную функцию (2.11) к разностному уравнению:

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + 0{,}5y(n-1). \tag{2.13}$$

На рис.2.10приведена схема, реализующая выражение (2.13): *через* z^{-1} *изображаются блоки задержки сигнала на один такт. При аппаратной реализации задержка реализуется в виде регистра, который хранит предыдущее значение входного или выходного отсчета.*

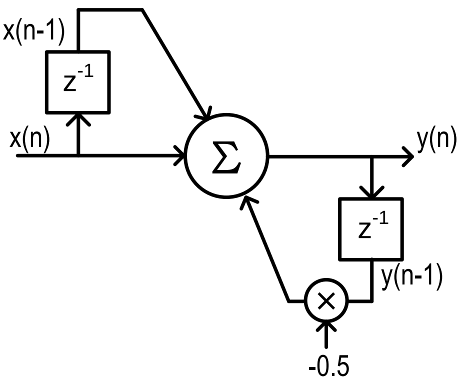

Рис. 2.10. Блок-схема фильтра

Частотная характеристика линейной системы

Для описания линейных систем в частотной области используется специальный входнойсигнал:

$$x(n) = e^{j\omega n}, -\infty < n < \infty. \quad (2.14)$$

Если такая последовательность поступает на вход линейной системы с *импульсной характеристикой*$h(n)$, то на выходе появится последовательность

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} h(m) \cdot e^{j\omega(n-m)} = e^{j\omega n} \sum_{m=0}^{M} h(m) \cdot e^{-j\omega m} = x(n) H\left(e^{j\omega}\right).$$

Таким образом, при подаче на вход сигналов вида (2.14)выходной сигнал совпадает со входным с точностью до комплексного множителя$H\left(e^{j\omega}\right)$. Этот комплексный коэффициент называется *частотной характеристикой системы* и выражается через ее импульсную характеристику следующим образом:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{m=0}^{M} h(m) \cdot e^{-j\omega m}.$$

Частотная характеристика является периодической функциейω, причем ее период равен2π. Эта периодичность связана со спецификой дискретного колебания: входная последовательность с частотой$(\omega + 2m\pi)$ $(m = \pm 1, \pm 2, \dots)$ не отличается от входной последовательности с частотойω, т.е.

$$\tilde{x}(n) = e^{j(\omega+2m\pi)n} = e^{j\omega n} = x(n).$$

Поскольку$H(e^{j\omega})$ – периодическая функция, то для полного описания достаточно задать ее на любом интервале длиной2π. Обычно для этой цели используют интервал$0 \le \omega \le 2\pi$.

2.2. Порядок выполнения работы

2.2.1. Для вариантов 1–3: найдите коэффициенты $\{b_i\}$ и$\{a_i\}$фильтра, который задан своей передаточной функцией.

$$H(z) = \frac{k(z-z_1)(z-z_2)}{(z-p_1)(z-p_2)}.$$

Таблица2.1

Числовые значения параметров k, z_1, z_2, p_1 и p_2

Номер варианта	k	z_1	z_2	p_1	p_2
1	0,09316	–0,99868 +0,05141j	–0,99868 –0,05141j	+0,51743 +0,40197j	+0,51743 –0,40197j
2	0,44405	–0,99992 +0,01297j	–0,99992 –0,01297j	–0,28370 +0,48321j	–0,28370 –0,48321j
3	0,17534	–0,99946 +0,03280j	–0,99946 –0,03280j	+0,28602 +0,48265j	+0,28602 –0,48265j

Для вариантов4–6: запишите передаточную функцию и найдите нули и полюса фильтра, которыйзадан в виде блок-схемы (рис. 2.11). Значения a_1, a_2, b_0, b_1 и b_2 выберите из табл. 2.2.

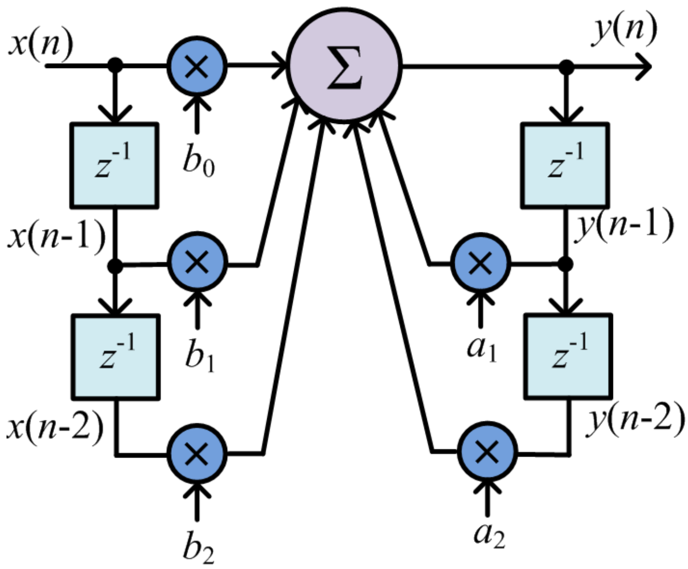

Рис. 2.11. Блок-схема линейной системы второго порядка

Таблица2.2

Числовые значения параметров a_1, a_2, b_0, b_1 и b_2

Номер варианта	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
4	0,22888	2,06144	0,86232	0,19501	1,73566
5	0,06797	1,53449	0,67549	0,05196	1,35097
6	0,09241	1,63060	0,70587	0,07190	1,41295

2.2.2. Напишите функцию, реализующую разностное уравнение (2.1). На вход функции поступают коэффициенты $\{b_i\}$,$\{a_i\}$ и входной сигнал $x[n]$. С помощью написанной функции постройте импульсную характеристику для фильтра из задания 2.2.1. Сравните результат с работой функции `filter`.

2.2.3. Определитесобственные частоты импульсной характеристики фильтра из задания 2.2.1 (см. формулу (2.3) и пояснение к ней). Найдите коэффициенты αи βиз уравнения (2.4) с которыми колебания собственных частот входят в импульсную характеристику. Для этого вычислите $h(n)$для любых двух значений n(например для $n = 0$и 1) и составьте систему линейных уравнений относительно неизвестных αи β. Решите эту систему с использованием Matlab-оператора «\» (backslash). Используя найденные значения αи β,постройте график $h(n)$согласно уравнению (2.4) и сравните его с результатом из задания 2.2.2.

2.2.4. Найдите отклик фильтра из задания 2.2.1 при воздействии на вход единичного скачка$x(n) = u(n - n_0),\ n = 1 \dots N$. Выбрав достаточное значение N, определите, к какому значению сходится выходной сигнал фильтра. Это значение называют устоявшимся режимом фильтра, а переменную часть характеристики – переходной характеристикой. В качестве n_0 возьмите номер своего варианта (т.е. если выполняете вариант №2, то $n_0 = 2$).

2.2.5. Вычислите отклик фильтра на следующие сигналы (табл.ица 2.3)*.

Таблица 2.3

Сигналы для воздействия на линейную систему

Номер варианта	Задание
1–2	Периодический прямоугольный сигнал с частотой 10 Гц и сигнал такой же формы с частотой 20 Гц. Частота дискретизации сигналовf_s=80 Гц
3–4	Периодический треугольный сигнал с частотой 15 Гц и сигнал такой же формы с частотой 80 Гц. Частота дискретизации сигналовf_s=320 Гц
5	Периодический пилообразный сигнал с частотой 20 Гц и сигнал такой же формы с частотой 110 Гц. Частота дискретизации сигналовf_s=440 Гц
6	Периодический трапециевидный сигнал с частотой 18 Гц и сигнал такой же формы с частотой 130 Гц. Частота дискретизации сигналовf_s=520 Гц

---

* Функции для генерирования сигналов заданной формы можно найти в сетевом каталоге: "\\1-311-kafevs\Docs\ТиПЦОС\Функции для ЛР№2\".

2.2.6. Вычислите частотную характеристику линейной системы из задания 2.2.1по формуле

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{j\omega k}}{(1 + \sum_{k=1}^{M} a_k e^{j\omega k})}, \qquad \omega \in [0\ \pi].$$

Постройте график $A(\omega) = |H(e^{j\omega})|$ и $\varphi(\omega) = \arg H(e^{j\omega})$. Функция$A(\omega)$ – это амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), а $\varphi(\omega)$– фазо-частотная характеристика (ФЧХ).

2.2.7. Постройте АЧХ и ФЧХ линейной системы из задания 2.2.1при помощи функции `freqz`.

2.2.8*. Алгоритм Карплуса–Стронга для имитации звука гитарной струны. Рассмотрим разностное уравнение:

$$y[n] = \alpha y[n - M] + x[n], \tag{2.15}$$

где $x[n]$ – входной сигнал;M – задержка;α – коэффициент затухания.

Предполагается, что значение задержкиM равно длине входного сигнала. Число генерируемых выходных значений $y[n]$ должно быть кратно M. Согласно алгоритму на вход необходимо подать случайную последовательность длинойM. Такую последовательность можно получить следующим образом:

```
x=(1/3)*randn(M,1);
```

Напишите в Matlabфункцию `y=ks_synthesis(x, alpha, P)`,которая генерирует выходную последовательность согласно разностному уравнению (2.15), длина выходной последовательности равна $M \times P$, где M – длина последовательности x.

Для получения «реальных аккордов» значение M должно быть выбрано исходя из частоты дискретизации сигнала F_s и «опорной» частоты F_0. Например A4 имеет «опорную» частоту 440 Гц, другие ноты могут быть получены из нее по формуле $F_0 = 440 \times 2^{n/12}$, где n – число полутонов между A4 и необходимой нотой. Например, открытый аккорд из песни Битлз «Hardday'snight» состоит из следующих нот D3, F3, G3, F4, A4, C5, G5. Ниже приведена заготовка Matlab-кода, необходимая для генерирования данного аккорда:

* Выполнение данного задания не является обязательным.

```
clear all; close all; clc;

% Параметры:
%
% - Fs       : частотадискретизации
% - F0       : частотаноты, формирующейаккорд
% - gain     : усилениеотдельныхнотваккорде
% - duration : длительностьаккордавсекундах
% - alpha    : ослабление в алгоритме Карплуса-Стронга

Fs = 48000;

% D2, A2, D3, F3, G3, F4, A4, C5, G5
F0 = 440*[2^-(31/12); 2^-(19/12); 2^-(16/12); 2^(-14/12); 2^-
(4/12); 1; 2^(3/12); 2^(10/12)];
gain = [1.2 3.0 1.0 2.2 1.0 1.0 1.0 3.5];
duration = 4;
alpha = 0.9785;

% Количествоотсчетовваккорде
nbsample_chord = Fs*duration;

first_duration = ceil(nbsample_chord / round(Fs/F0(1)));

% Инициализация
chord = zeros(nbsample_chord, 1);

for i = 1:length(F0)

  current_M = round(Fs/F0(i));
  current_duration = ceil(nbsample_chord/current_M);

  current_alpha = alpha^(first_duration/current_duration);

% Формированиевходногоивыходного сигналовалгоритма Карплуса-
% Стронга
x = (1/3)*rand(current_M, 1);
  y = ks_synthesis (x, current_alpha, current_duration);
y = y(1:nbsample_chord);

    % Добавление ноты к аккорду
chord = chord + gain(i) * y;
end

% Проигрывание аккорда
sound(chord, Fs);
```