

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6. Расчет цифровых КИХ-фильтров с линейной фазовой характеристикой методом взвешивания

ЦЕЛЬ РАБОТЫ – расчет КИХ-фильтров с линейной фазовой характеристикой в пакете Matlab и изучение их свойств, изучение различных типов временных окон.

6.1. Теоретические сведения

Представление о КИХ-фильтре

Представление о цифровом фильтре с конечной импульсной характеристикой можно получить, если рассмотреть задачу вычисления скользящего значения в массиве данных. Предположим, есть массив данных $x(n)$, $n = 0, 1, \dots$. Необходимо сформировать массив выходных (сглаженных) данных

$$y(n) = \frac{1}{5} \sum_{m=-2}^2 x(n-m). \quad (6.1)$$

В данном случае сглаживание состоит в том, что для получения выходного значения в каждый момент времени n берется среднее значение от пяти точек входных данных $x(n-2)$, $x(n-1)$, $x(n)$, $x(n+1)$ и $x(n+2)$. Заметим, что с помощью этой формулы невозможно сгладить по два значения в начале и в конце потока данных. На рис. Рис. 6.16 поясняется работа формулы (6.1).

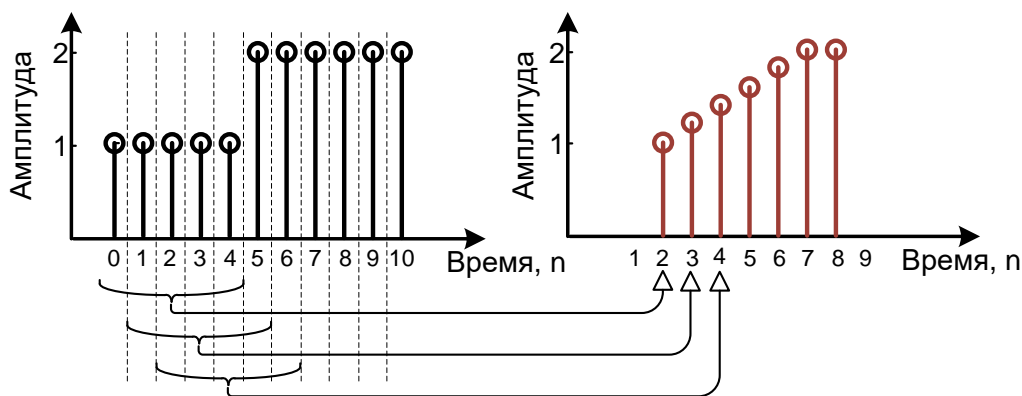


Рис. 6.1. Процесс вычисления скользящего среднего значения массива данных

Формула (6.1) представляет собой цифровой КИХ-фильтр ($N = 4$)

$$y(n) = \sum_{m=0}^N x(n-m)h(m), \quad (6.2)$$

у которого все коэффициенты $h(m)$ имеют значения $1/5$.

Как выглядит формула (6.1) с частотной точки зрения? Предположим, что входная функция представляет собой комплексную синусоиду $e^{j\omega n}$. Поскольку формула линейна по отношению к данным, то такая же функция будет всегда на выходе, за исключением того, что она умножается на множитель $H(\omega)$, который называется частотной характеристикой фильтра (см. лабораторную работу №2). Подставив комплексную экспоненту $e^{j\omega n}$ в формулу сглаживания пятерками, получим

$$H(\omega) = \frac{1}{5}(e^{-2j\omega} + e^{-j\omega} + 1 + e^{j\omega} + e^{2j\omega}).$$

Отметим, что отрицательные и положительные частоты имеют одинаковые коэффициенты и, следовательно, попарно могут быть заменены соответствующими косинусными функциями:

$$H(\omega) = \frac{1}{5}(1 + 2 \cos \omega + 2 \cos 2\omega).$$

Вид этой функции показан на рис. 6.2. Частотная характеристика $H(\omega)$ показывает, что происходит, когда усредняются данные с частотой ω . Очевидно, что сглаживание можно выполнять и по 7, и по 9, и т.д. точкам.

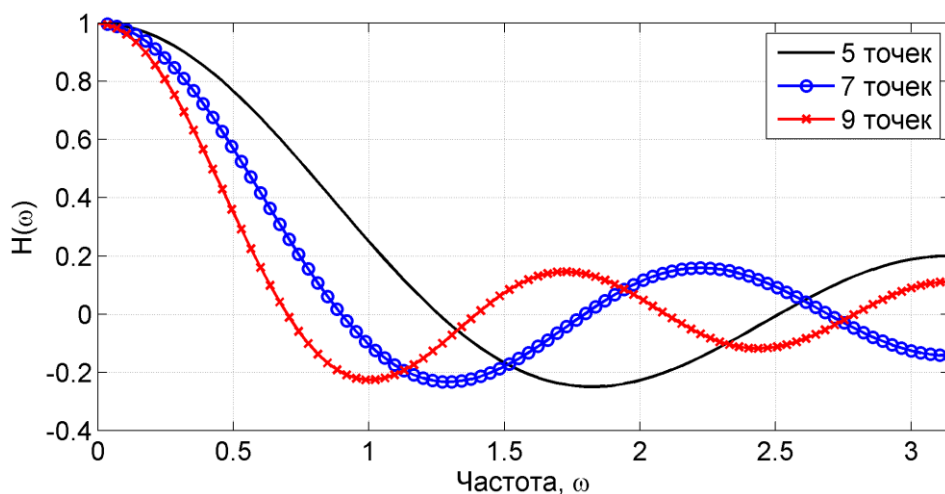


Рис. 6.2. КИХ-фильтр для сглаживания данных в частотной области

На рис. 6.3 и 6.4 показано вычисление скользящего среднего для данных, содержащих колебания различных частот. Из приведенных иллюстраций можно сделать вывод, что увеличение частоты колебаний во входных данных привело к уменьшению амплитуды колебаний в выходном массиве данных, что находится в полном соответствии с графиком частотной характеристики.

Таким образом, мы рассмотрели частный случай КИХ-фильтра (6.2), у которого все коэффициенты являются постоянными. В общем случае проектирование КИХ-фильтра состоит в расчете таких коэффициентов $h(m)$, которые обеспечивали бы требуемый вид частотной характеристики.

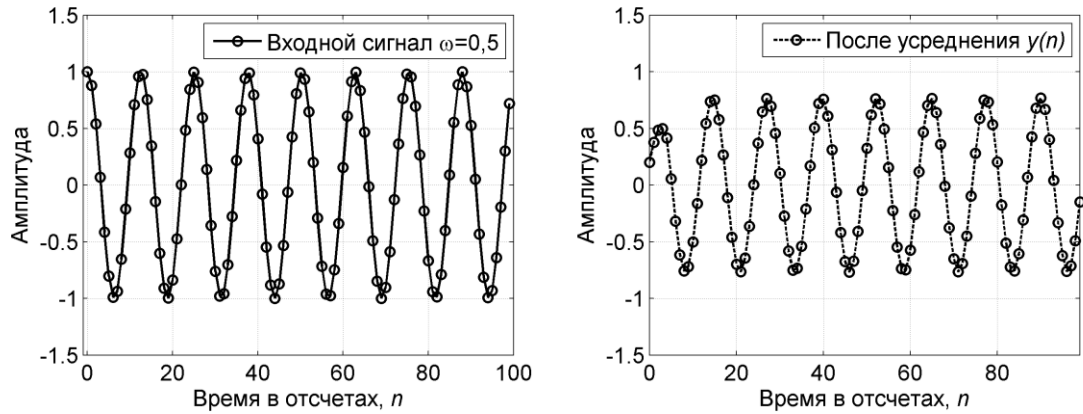


Рис. 6.3. Усреднение по 5 точкам данных, содержащих колебание частотой $\omega = 0,5$ рад/с

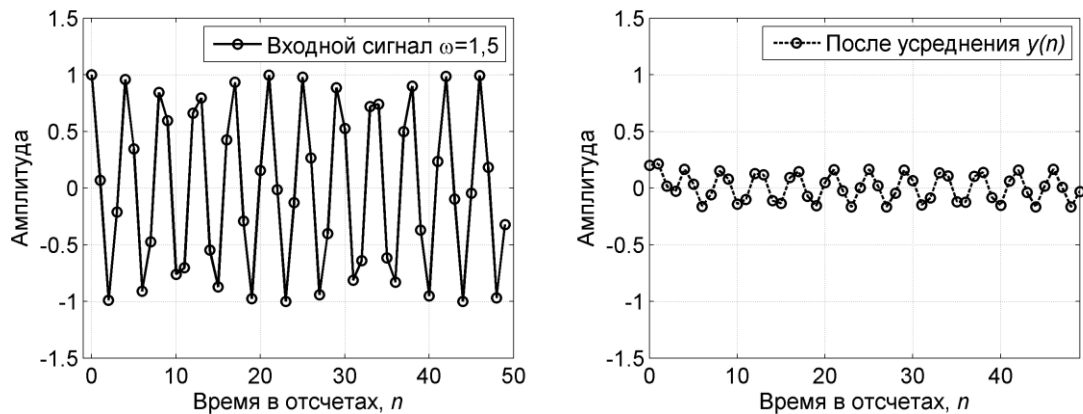


Рис. 6.4. Усреднение по 5 точкам данных, содержащих колебание частотой $\omega = 1,5$ рад/с

Основные свойства КИХ-фильтров

Пусть импульсная характеристика КИХ-фильтра $h(n)$ задана на интервале $0 \leq n \leq N-1$. Ее преобразование Фурье равно

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}.$$

Рассматривая только действительные $h(n)$, получим дополнительные ограничения на функцию $H(e^{j\omega})$, представив ее через амплитуду и фазу:

$$H(e^{j\omega}) = \pm |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}.$$

Модуль преобразования Фурье является симметричной функцией, а фаза – антисимметричной функцией частоты, т. е.

$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|, \quad 0 \leq \omega \leq \pi, \quad \theta(\omega) = -\theta(-\omega).$$

На практике при расчете КИХ-фильтров часто требуется строго линейная фазовая характеристика. Линейность фазы является еще одним ограничением; она означает, что фазовая характеристика $\theta(\omega)$ имеет вид

$$\theta(\omega) = -\alpha\omega, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi,$$

где α – постоянная фазовая задержка, выраженная через число интервалов дискретизации.

Выражение для преобразования Фурье от импульсной характеристики теперь можно переписать следующим образом:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} = \pm |H(e^{j\omega})| e^{-j\alpha\omega} = H^*(e^{j\omega}) e^{-j\alpha\omega},$$

где $H^*(e^{j\omega})$ – действительная функция.

Для каждого N существует только одна фазовая задержка α , при которой достигается строгая линейность фазовой характеристики фильтра:

$$\alpha = \frac{N-1}{2}.$$

При этом импульсная характеристика должна обладать вполне определенной симметрией:

$$h(n) = h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Если N – нечетное, то α – целое, т.е. задержка в фильтре равна целому числу интервалов дискретизации. Центр симметрии импульсной характеристики приходится на центральный отсчет, для которого нет пары. Функция $H^*(e^{j\omega})$ в этом случае симметрична относительно π .

При четном N задержка становится дробной. Центр симметрии импульсной характеристики располагается между двумя центральными отсчетами, и каждый отсчет имеет парный. Функция $H^*(e^{j\omega})$ асимметрична относительно π и обращается в 0 при $\omega = \pi$. Отсюда следует, что такие фильтры нельзя использовать, например, для проектирования фильтров верхних частот.

Согласно условию линейности фазовой характеристики, требуется, чтобы фильтр имел постоянную как групповую, так и фазовую задержку. Если достаточно, чтобы только групповая задержка была постоянной (как это часто бывает), можно определить еще один тип фильтра с линейной фазой, фазовая характеристика которого является кусочно-линейной функцией частоты:

$$H(e^{j\omega}) = \pm |H(e^{j\omega})| e^{j(\beta - \alpha\omega)}.$$

Линейность фазы в этом случае достигается при следующих условиях:

$$\alpha = \frac{N-1}{2},$$

$$\beta = \pm \frac{\pi}{2},$$

$$h(n) = -h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Импульсные характеристики фильтров данного типа, в отличие от предыдущих, антисимметричны относительно центра.

Для нечетных значений N средний отсчет импульсной характеристики всегда равен нулю. Функция $H^*(e^{j\omega})$ антисимметрична относительно π и обращается в 0 при $\omega = 0$ и $\omega = \pi$. Без учета множителя с линейным изменением фазы частотная характеристика является чисто мнимой, поэтому такие фильтры

наиболее пригодны для проектирования преобразователей Гильберта и дифференциаторов.

В случае, если N четно, $H^*(e^{j\omega})$ симметрична относительно π и обращается в 0 при $\omega=0$.

Расчет КИХ-фильтров с линейной фазой методом взвешивания

Суть метода взвешивания (метод окна) сводится к получению конечной импульсной характеристики путем усечения последовательности бесконечной импульсной характеристики длины. Поскольку частотная характеристика требуемого идеального цифрового фильтра $H_d(e^{j\omega})$ является периодической функцией частоты, ее можно представить рядом Фурье:

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n}, \quad (6.3)$$

где $h_d(n)$ – соответствующая последовательность отсчетов импульсной характеристики, т.е.

$$h_d(n) = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (6.4)$$

Использование соотношений (6.3) и (6.4) для проектирования КИХ-фильтров связано с двумя трудностями. Во-первых, импульсная характеристика фильтра в общем случае имеет бесконечную длину, поскольку суммирование в (6.3) производится в бесконечных пределах. Во-вторых, такой фильтр физически нереализуем, т. к. импульсная характеристика начинается в $-\infty$, т.е. никакая конечная задержка не сделает фильтр физически реализуемым. Итак, фильтр, рассчитываемый на основе представления функции $H_d(e^{j\omega})$ рядом Фурье, оказывается физически нереализуемым БИХ-фильтром.

Один из возможных методов получения КИХ-фильтра, аппроксимирующего заданную функцию $H_d(e^{j\omega})$, заключается в усечении бесконечного ряда Фурье (6.3) за пределами $n = \pm(N-1)/2$. Однако простое усечение ряда приводит к хорошо известному явлению Гиббса, которое проявляется в виде выбросов и пульсаций определенного уровня до и после точки разрыва в аппроксимируемой частотной характеристике. Так, например, при аппроксимации стандартных фильтров типа идеального фильтра нижних частот или полосового фильтра максимальная амплитуда пульсаций частотной характеристики составляет около 9% и не уменьшается с увеличением длины импульсной характеристики, т.е. учет все большего числа членов ряда Фурье не приводит к уменьшению максимальной амплитуды пульсаций. Вместо этого по мере увеличения N уменьшается ширина выброса.

Лучшие результаты дает метод проектирования КИХ-фильтров, основанный на использовании весовой последовательности конечной длины $w(n)$, называемой окном, для модификации коэффициентов Фурье $h_d(n)$ в формуле (6.3), с тем чтобы управлять сходимостью ряда Фурье.

Метод взвешивания иллюстрируется на рис. 6.5: заданная периодическая частотная характеристика $H_d(e^{j\omega})$ и ее коэффициенты Фурье $h_d(n)$ – на рис. 6.5, а, весовая последовательность конечной длины $w(n)$ и ее преобразование Фурье $W(e^{j\omega})$ – на рис. 6.5, б. Для большинства приемлемых окон функция $W(e^{j\omega})$ имеет главный лепесток, содержащий почти всю энергию окна, и боковые лепестки, которые обычно быстро затухают. Чтобы получить аппроксимацию функции $H_d(e^{j\omega})$, формируется последовательность $h(n) = h_d(n)w(n)$, в точности равная нулю за пределами интервала $-(N-1)/2 \leq n \leq (N-1)/2$.

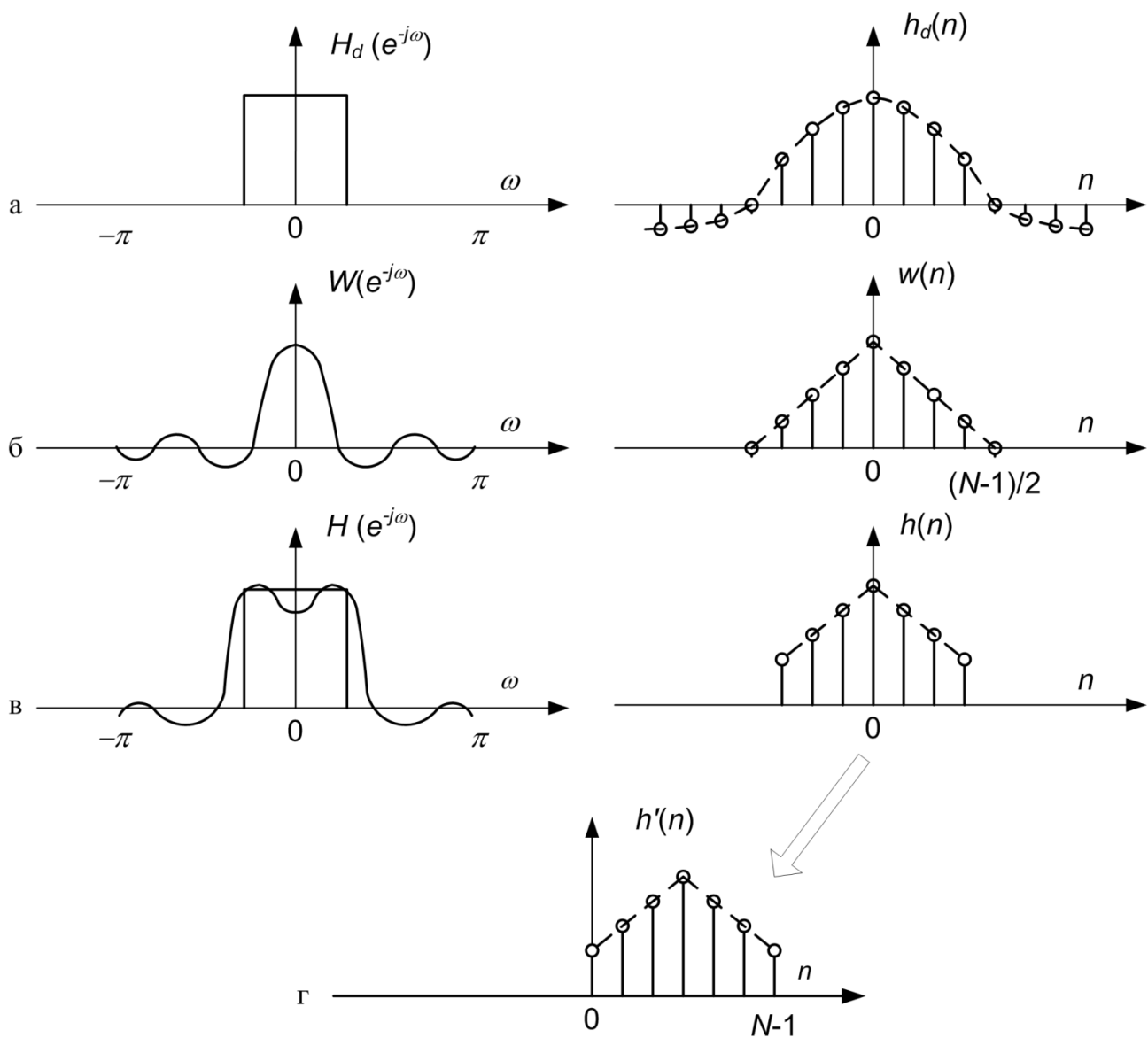


Рис. 6.5. Иллюстрация метода взвешивания

На рис. 6.5, в представлена последовательность $h(n)$ и ее преобразование Фурье $H(e^{j\omega})$, равное, очевидно, круговой свертке функций $H_d(e^{j\omega})$ и $W(e^{j\omega})$, поскольку $h(n)$ является произведением $h_d(n)w(n)$:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta. \quad (6.5)$$

Физически реализуемая последовательность $h'(n) = h(n - (N - 1)/2)$, которая равна задержанной последовательности $h(n)$ и может быть использована в качестве искомой импульсной характеристики фильтра показана на рис. 6.5, г. При этом частотная характеристика физически реализуемого фильтра будет равна $H(e^{j\omega})e^{j\omega(N-1)/2}$ и при соблюдении условий симметрии импульсной характеристики: $h'(n) = \pm h'(N - 1 - n)$ будет иметь линейную ФЧХ.

На примере, представленном на рис. 6.5, можно проследить влияние операции взвешивания коэффициентов Фурье фильтра на его частотную характеристику.

Прежде всего, по обе стороны от точек разрыва заданной функции $H_d(e^{j\omega})$ появляются переходные полосы. Ясно, что поскольку результирующая частотная характеристика фильтра равна круговой свертке идеальной частотной характеристики и частотной характеристики окна, то ширина переходных полос зависит от ширины главного лепестка функции $W(e^{j\omega})$. Кроме того, на всех частотах ω возникают ошибки аппроксимации, имеющие вид пульсаций частотной характеристики, которые обусловлены боковыми лепестками функции $W(e^{j\omega})$. Ясно, наконец, и то, что получаемые фильтры ни в каком смысле *не являются оптимальными* (даже если окна и удовлетворяют тому или иному критерию оптимальности), поскольку их частотные характеристики рассчитываются через свертку.

После общего рассмотрения метода взвешивания возникают два вопроса: какими свойствами должны обладать окна и насколько точно они могут быть реализованы на практике? Ответ на первый вопрос относительно прост. Желательно, чтобы окно обладало следующими свойствами:

- 1) ширина главного лепестка частотной характеристики окна, содержащего по возможности большую часть общей энергии, должна быть малой;
- 2) энергия в боковых лепестках частотной характеристики окна должна быстро уменьшаться при приближении ω к π .

Было предложено много окон, аппроксимирующих заданные характеристики. В качестве примеров мы рассмотрим три окна, а именно: прямоугольное окно, «обобщенное» окно Хэмминга и окно Кайзера. Эти окна обладают свойствами всех возможных видов окон и позволяют достаточно хорошо понять преимущества и недостатки метода взвешивания.

Прямоугольное окно

N -точечное *прямоугольное окно*, соответствующее простому усечению (без модификации) ряда Фурье, описывается весовой функцией

$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases}$$

Здесь и далее предполагается, что N – нечетное число. С помощью простой модификации аналогичные результаты могут быть получены и для четного N . Предполагается также, что последовательность окна имеет нулевую задержку. Частотная характеристика прямоугольного окна описывается соотношением

$$\begin{aligned} W(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} e^{-j\omega n} = \frac{e^{j\omega(N-1)/2}(1 - e^{-j\omega N})}{(1 - e^{-j\omega})} = \\ &= \frac{e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}. \end{aligned}$$

Для вычисления N -точечного прямоугольного окна в пакете Matlab можно использовать функцию `boxcar(N)`. График прямоугольного окна и его АЧХ для $N=23$ в диапазоне от $-\pi$ до π представлен на рис. 6.6.

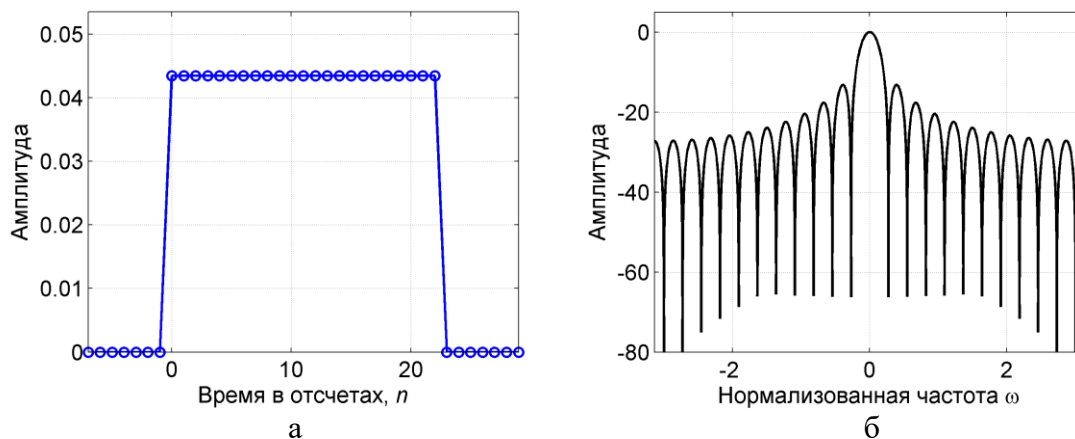


Рис. 6.6. Прямоугольное окно: представление во временной (а) и частотной (б) областях

Окно Бартлетта

N -точечное *окно Бартлетта* – треугольное окно. Коэффициенты окна Бартлетта вычисляются по следующим формулам:

$$w(k) = \begin{cases} \frac{2k}{n-1}, & 0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}, \\ 2 - \frac{2k}{n-1}, & \frac{n-1}{2} \leq k \leq n-1, \end{cases} \quad (\text{для нечетного } n);$$

$$w(k) = \begin{cases} \frac{2k}{n-1}, & 0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1, \\ \frac{2(n-k-1)}{n-1}, & \frac{n}{2} \leq k \leq n-1, \end{cases} \quad (\text{для четного } n).$$

Окно Бартлетта почти полностью совпадает с треугольным окном. Отличие от треугольного окна заключается лишь в том, что значение окна Бартлетта при $k = 1$ и $k = n$ равно нулю.

Для вычисления N -точечных окон Бартлетта и треугольного в Matlab можно использовать функции `bartlett(N)` и `triang(N)` соответственно. Графики АЧХ окна Бартлетта и треугольного окна для $N = 23$ в диапазоне от $-\pi$ до π представлены на рис. 6.7 и 6.8 соответственно.

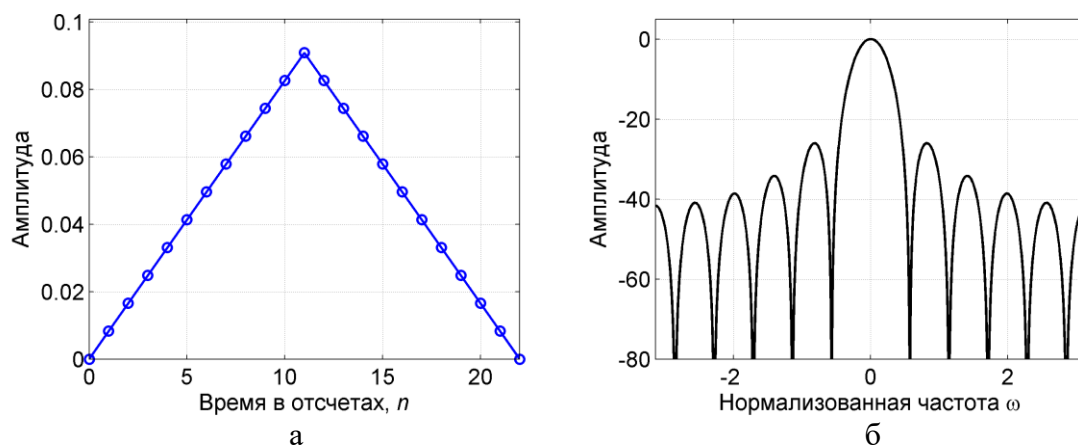


Рис. 6.7. Окно Бартлетта: представление во временной (а) и частотной (б) областях

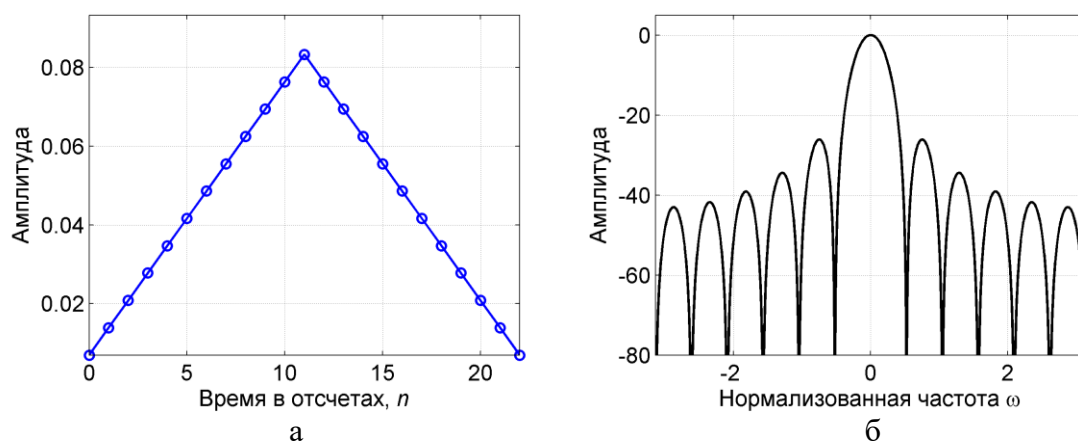


Рис. 6.8. Треугольное окна: представление во временной (а) и частотной (б) областях

Обобщенное окно Хэмминга

Окно, называемое *обобщенным окном Хэмминга*, имеет вид

$$w_H(n) = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 0, & \text{при других } n, \end{cases} \quad (6.6)$$

причем α лежит в пределах $0 \leq \alpha \leq 1$. Случай, когда $\alpha = 0,5$ соответствует окну Ханна, когда $\alpha = 0,54$ – окну Хэмминга. Частотную характеристику рассматриваемого окна легко получить, если учесть, что оно может быть представлено в виде произведения прямоугольного окна и окна, определяемого формулой (6.6), но для всех n , т. е.

$$w_H(n) = w_R(n) \left[\alpha + (1 - \alpha) \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right].$$

Следовательно, частотная характеристика обобщенного окна Хэмминга может быть записана в следующем виде:

$$W_H(e^{j\omega}) = \alpha W_R(e^{j\omega}) + \frac{1-\alpha}{2} W_R(e^{j[\omega - (2\pi/(N-1))]}) + \frac{1-\alpha}{2} W_R(e^{j[\omega + (2\pi/(N-1))]}).$$

Для вычисления N -точечного окна Ханна в Matlab можно использовать функцию `hann(N)`, окна Хэмминга – функцию `hamming(N)`, окна Блэкмана – функцию `blackman(N)`. Эти окна являются частным случаем обобщенного окна Хэмминга. Графики и АЧХ окон Ханна, Хэмминга и Блэкмана для $N = 23$ в диапазоне от $-\pi$ до π представлены на рис. 6.9, 6.10 и 6.11 соответственно.

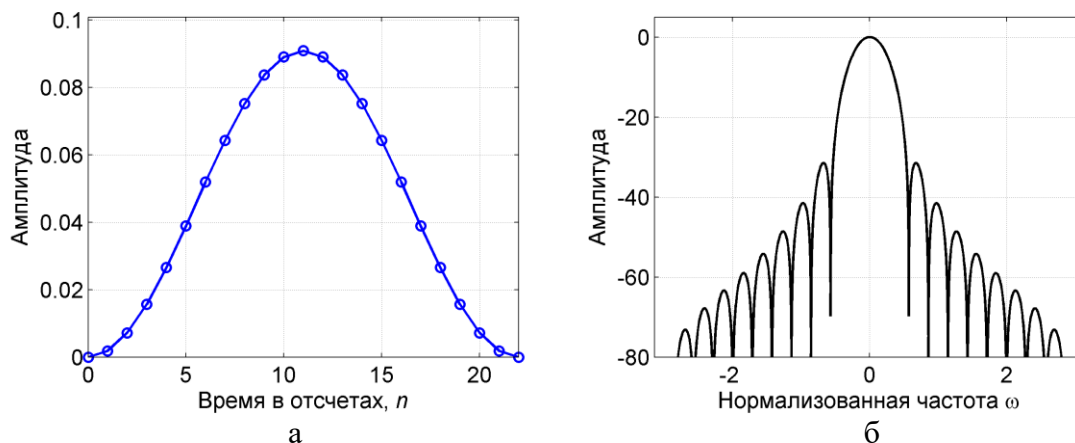


Рис. 6.9. Окно Ханна: представление во временной (а) и частотной (б) областях

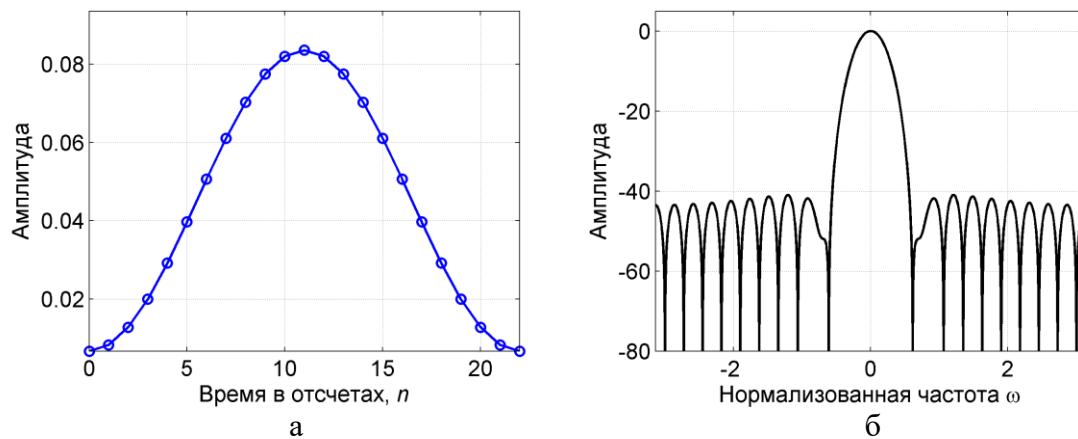


Рис. 6.10.Окно Хэмминга: представление во временной (а) и частотной (б) областях

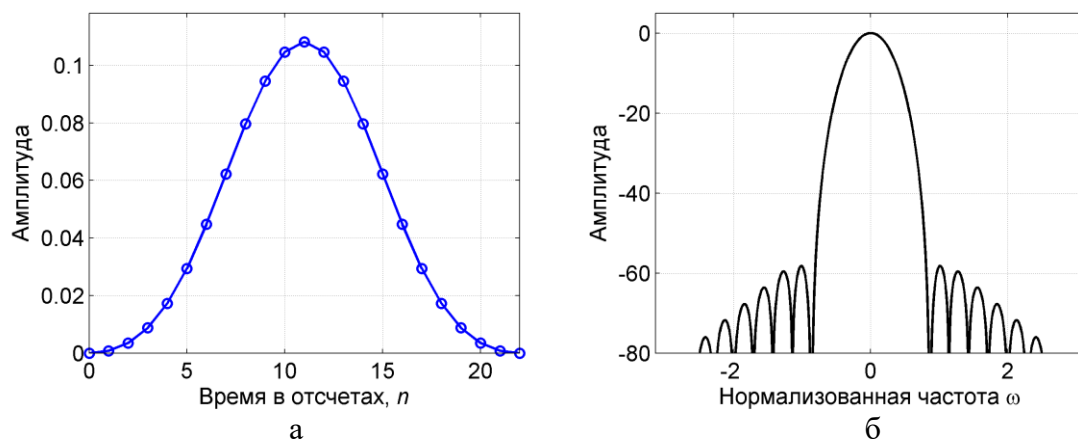


Рис. 6.11.Окно Блэкмана: представление во временной (а) и частотной (б) областях

Из рисунков видно, что ширина главного лепестка частотной характеристики окна Хэмминга в два раза больше, чем для прямоугольного окна. Однако уровень боковых лепестков в случае окна Хэмминга значительно ниже, чем у прямоугольного окна. При $\alpha = 0,54$, т. е. для обычного окна Хэмминга, 99,96 % общей энергии спектра содержится в главном лепестке, а максимумы боковых лепестков намного ниже главного максимума. В отличие от окна Хэмминга максимум боковых лепестков в спектре прямоугольного окна ниже главного максимума всего на 10–20 дБ.

При расчете фильтра нижних частот расширение главного лепестка соответствует расширению переходной полосы между полосами пропускания и непропускания, тогда как уменьшение уровня боковых лепестков соответствует меньшим пульсациям в полосе пропускания и лучшему подавлению в полосе непропускания фильтра.

Окно Кайзера

Задача расчета хороших окон фактически сводится к математической задаче отыскания ограниченных во времени функций, преобразования Фурье которых наилучшим образом аппроксимируют функции, ограниченные по частоте.

те, т.е. имеют минимальную энергию за пределами заданного интервала частот. При решении этой задачи в замкнутой форме для непрерывных функций времени был введен класс так называемых *вытянутых сфероидальных волновых функций*. Эти функции имеют достаточно сложный вид. Поэтому Кайзер в качестве наилучшего окна предложил относительно простую аппроксимацию этих функций, названную окном Кайзера, которая записывается в следующем виде:

$$w_K(n) = \begin{cases} \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-[2n/(N-1)]^2}\right)}{I_0(\beta)}, & \text{при } -\left(\frac{N-1}{2}\right) \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 0, & \text{при других } n, \end{cases}$$

где β – константа, определяющая компромисс между максимальным уровнем боковых лепестков и шириной главного лепестка (или долей общей энергии в главном лепестке) частотной характеристики окна, а модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка вычисляется согласно следующему выражению:

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^k \right]^2.$$

Как именно величина β оказывает влияние на этот компромисс, видно из табл.6.1.

Таблица 6.1
Влияние коэффициента β

β	$D = \Delta F N$ (ΔF – ширина переходной полосы, N – длина окна)	Пульсация в по- лосе пропуска- ния, дБ	Пульсация в полосе непропускания, дБ
2,120	1,50	$\pm 0,27$	–30
3,384	2,23	$\pm 0,0864$	–40
4,538	2,93	$\pm 0,0274$	–50
5,658	3,62	$\pm 0,00868$	–60
6,764	4,32	$\pm 0,00275$	–70
7,865	5,0	$\pm 0,000868$	–80

Для вычисления N -точечного окна Кайзера определенной величиной β в Matlab можно использовать функцию `kaiser(N, β)`. График и АЧХ окна Кайзера для $N = 23$ в диапазоне от $-\pi$ до π представлен нарис. 6.12.

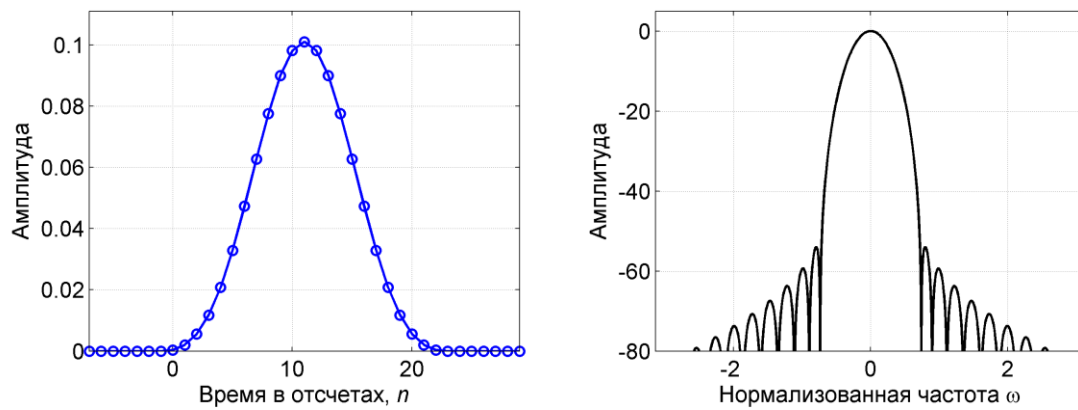


Рис. 6.12. Окно Кайзера (для $\beta=7,5$): представление во временной и частотной области

Окно Кайзера является по существу оптимальным окном, т.к. представляет последовательность конечной длины, которая имеет минимум энергии спектра за пределами некоторой заданной частоты.

Как отмечено выше, метод взвешивания предполагает предварительное вычисление импульсной характеристики $h_d(n)$ (6.4) требуемого фильтра как коэффициентов ряда Фурье (6.3) его частотной характеристики. В тех случаях, когда аналитическое вычисление затруднено, можно осуществить дискретизацию по частоте функции $H_d(e^{j\omega})$ с очень малым интервалом дискретизации $2\pi/M$ ($M \gg N$), а затем вычислить обратное дискретное преобразование Фурье полученной последовательности выборок:

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{M-1} H_d(e^{j(2\pi k/M)}) e^{j(2\pi kn/M)}.$$

Тогда функция $h(n) \approx h_d(n)$ в диапазоне $|n| \leq (N-1)/2$.

Аналитическое определение импульсных характеристик не представляет труда для большинства широко используемых типов фильтров, т.е. для ФНЧ, ФВЧ, фильтра полосно-пропускающего (ФПП) и фильтра полосно-задерживающего (ФПЗ). В табл. 6.2 сведены импульсные характеристики перечисленных выше идеальных, физически нереализуемых фильтров, для которых f_c обозначает безразмерную частоту среза для ФНЧ и ФВЧ, а f_1 и f_2 – граничные частоты полосы пропускания для ФПП, либо граничные частоты полосы задерживания (непропускания) для ФПЗ.

Итак, порядок расчета фильтра методом взвешивания следующий:

1. В зависимости от вида фильтра по формулам из табл. 6.2 вычисляется импульсная характеристика фильтра.
2. Полученная последовательность взвешивается с помощью временного окна.

Таблица.6.2

Выражения для идеальных импульсных характеристик различных типов фильтров

Тип фильтра	Формулы для нечетное N	Формулы для четного N
ФНЧ	$h(0) = 2f_c$ $h(n) = \frac{\sin(2\pi n f_c)}{n\pi}$	$h(n) = \frac{\sin 2\pi(n-0,5)f_c}{(n-0,5)\pi}$
ФВЧ	$h(0) = 1 - 2f_c$ $h(n) = -\frac{\sin(2\pi n f_c)}{n\pi}$	$h(n) = \frac{1}{(n-0,5)\pi} [\sin \pi(n-0,5) - \sin 2\pi(n-0,5)f_c]$
ФПН	$h(0) = 2(f_2 - f_1)$ $h(n) = \frac{1}{n\pi} [\sin(2\pi n f_2) - \sin(2\pi n f_1)]$	$h(n) = \frac{1}{(n-0,5)\pi} [\sin 2\pi(n-0,5)f_2 - \sin 2\pi(n-0,5)f_1]$
ФПВ	$h(0) = 1 - 2(f_2 - f_1)$ $h(n) = \frac{1}{n\pi} [\sin(2\pi n f_1) - \sin(2\pi n f_2)]$	$h(n) = \frac{1}{(n-0,5)\pi} [\sin \pi(n-0,5)f_c - \sin 2\pi(n-0,5)f_c]$

Пример 6.1. Расчет КИХ-фильтра

Используя окно Хэмминга, необходимо рассчитать КИХ-фильтр нижних частот с линейной фазой с длиной импульсной характеристики 23 отсчета и нормированной частотой среза $\omega_0 = 0,3$. Вычислить и отобразить на графиках идеальную и реальную (полученную) АЧХ, АЧХ в логарифмическом масштабе, импульсную характеристику и расположение нулей на единичной окружности.

При расчетах будем учитывать, что проектируемый фильтр нижних частот имеет коэффициенты ряда Фурье (т.е. отсчеты импульсной характеристики) вида

$$h(0) = 2f_c, \quad h(n) = \frac{\sin(2\pi n f_c)}{n\pi}.$$

Для вычисления последовательности вида $\frac{\sin(xn)}{xn}$ в Matlab может быть использована стандартная функция $y = \text{sinc}(x*n)$. Для расчета заданных выше фильтров в Matlab используется следующая программа

```
N = 23;
w0 = 0.3;
M = (N - 1) / 2;
n = floor(-M) : floor(M);
```

```

L = 1024;
IdealW = 0 : 1/L : (L - 1) / L;
IdealH = zeros(L, 1);
IdealH(1 : w0 * L + 1) = 1;
h = w0 * sinc(w0 * n);
w = hamming(N);
h = h .* w';
[H, wi] = freqz(h, 1, L);
figure;
plot(wi/pi, abs(H), 'k'); hold on;
plot(IdealW, IdealH, 'b--');
grid on;
figure;
plot(wi/pi, 20 * log10(abs(H)), 'k');
grid on; zoom on;
figure;
impz(h, 1);
grid on;
figure;
zplane(h, 1);
grid on;

```

Результаты работы программы представлены на рис.6.13 –Рис. 6.16.

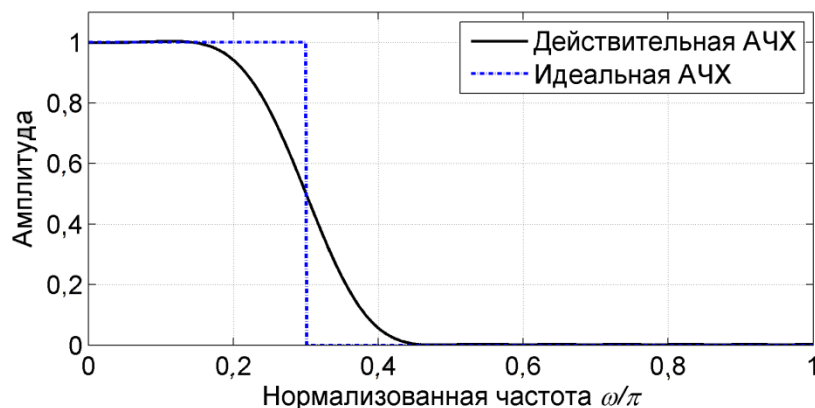


Рис. 6.13. Амплитудно-частотные характеристики фильтра

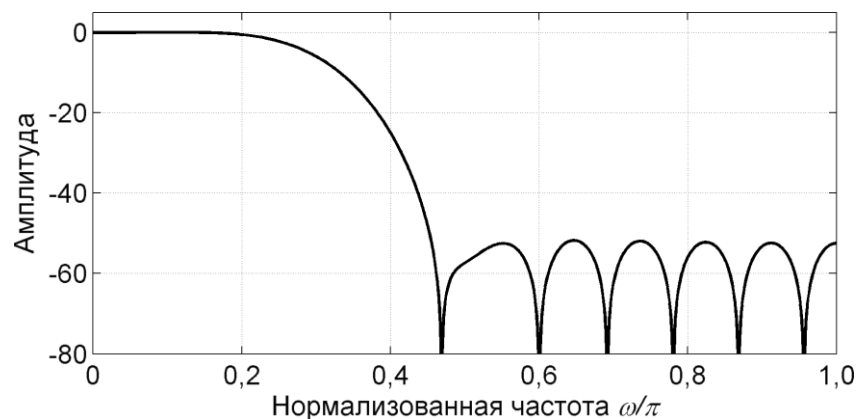


Рис. 6.14. Амплитудно-частотная характеристика в логарифмическом масштабе

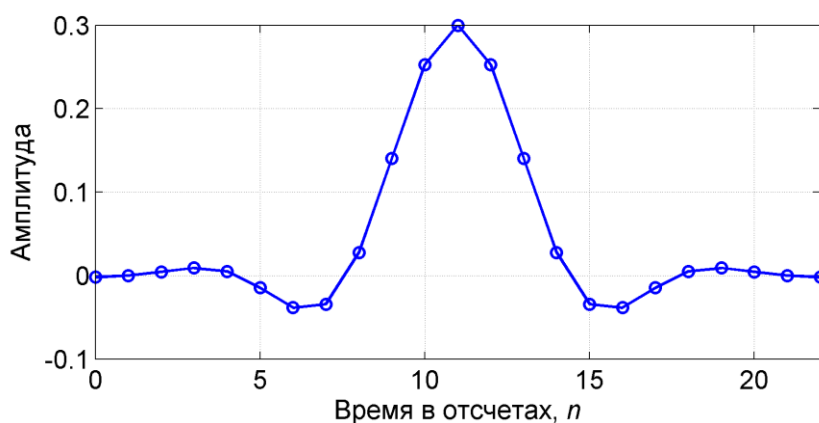


Рис. 6.15. Импульсная характеристика фильтра

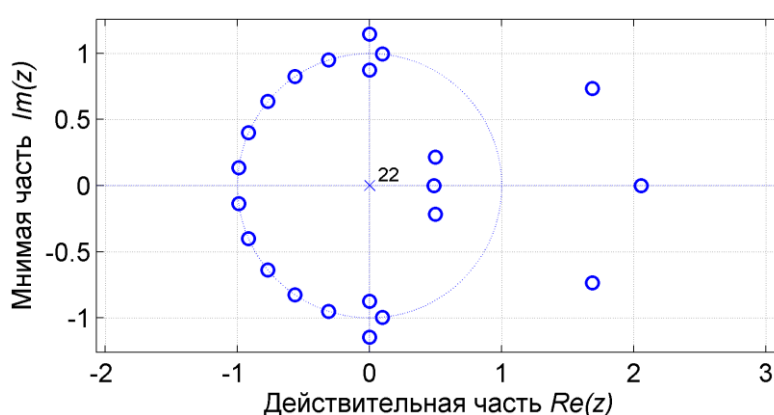


Рис. 6.16 – Диаграмма расположения нулей

Одним из главных преимуществ метода взвешивания является относительная простота расчета импульсных характеристик с минимальным числом вычислительных операций. Основной недостаток метода состоит в том, что получаемые КИХ-фильтры не удовлетворяют всем известным критериям оптимальности, и, следовательно, в большинстве случаев они могут быть существенно улучшены.

1.5 Порядок выполнения работы

6.2.1. Используя прямоугольное окно, рассчитайте КИХ-фильтр нижних частот с линейной фазой в соответствии с вариантом (табл. 6.3).

Таблица 6.3

Варианты для задания 6.2.1 (частота определена в долях от частоты Найквиста)

Номер варианта	1	2	3	4	5	6
Длина импульсной характеристики	23	25	27	29	31	27
Нормированная граничная частота пропускания	0,3	0,7	0,5	0,4	0,6	0,4

Постройте график импульсной характеристики, идеальные и действительные АЧХ (в логарифмическом масштабе) и ФЧХ, а также диаграмму расположения нулей. Для устранения скачков фазы воспользуйтесь функцией `unwrap`.

Как объяснить отклонение АЧХ и ФЧХ фильтра от идеальных? Что изменится при использовании нулевой фазы, линейной фазы, рассчитанной для длины импульсной характеристики в 11 отсчетов?

2. Выполните задание 6.2.1 для длины импульсной характеристики, большей на единицу. Что можно сказать о симметрии импульсной характеристики? Сравните поведение АЧХ двух фильтров в области границы полосы пропускания.

3. Постройте следующие временные окна и их АЧХ: треугольное, Хэмминга, Блэкмана. Используйте функции `triang`, `hamming`, `blackman`.

4. Выполните задание 6.2.1 с использованием временных окон: треугольного, Хэмминга, Блэкмана. Сравните АЧХ этих фильтров. Какой из них обеспечивает наименьшую среднеквадратичную погрешность аппроксимации АЧХ?

5. Выполните задание 1 с использованием временного окна Кайзера. Определите значение β , обеспечивающее минимальную среднеквадратичную погрешность аппроксимации АЧХ.

6. Используя окно Хэмминга, рассчитайте следующий многополосный КИХ-фильтр с линейной фазой, используя данные табл. 6.4.

Таблица 6.4

Варианты для задания 6.2.1 (частота определена в долях от частоты Найквиста)

Номер варианта	1	2	3	4	5	6
Длина импульсной характеристики	61	53	59	51	57	55
Первая полоса пропускания	0... 0,2	0,3...0,4	0...0,3	0,4...0,6	0...0,25	0,5...0,6
Вторая полоса пропускания	0,3...0,4	0,8...1,0	0,7...0,85	0,9...1,0	0,4...0,6	0,75...1,0

Коэффициент передачи в первой полосе пропускания равен единице, а во второй полосе – 0,5. Постройте идеальную и полученную АЧХ.