



А. И. Солонина

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ



В ЗЕРКАЛЕ
MATLAB

bhv®



А. И. Солонина

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

**В ЗЕРКАЛЕ
MATLAB**

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2018

УДК 004.438(075.8)
ББК 32.973.26–018.2я73
С60

Солонина А. И.

С60 Цифровая обработка сигналов в зеркале MATLAB: учеб. пособие. — СПб.: БХВ-Петербург, 2018. — 560 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)
ISBN 978-5-9775-3946-3

Учебное пособие представляет собой базовый курс по цифровой обработке сигналов с традиционными темами: линейные дискретные системы; эффекты квантования в цифровых системах с фиксированной точкой; дискретные сигналы с описанием в частотной области, включая алгоритмы дискретного и быстрого преобразований Фурье; случайные процессы и их статистические характеристики; методы непараметрического и параметрического спектрального анализа; цифровые фильтры общего и специального назначения; многоскоростные системы и их полифазные структуры; банки фильтров; основы адаптивной обработки сигналов. Теория ЦОС преподносится с позиции моделирования в MATLAB: теоретические аспекты базовых методов и алгоритмов ЦОС увязываются с их моделированием в MATLAB и иллюстрируются соответствующими примерами.

*Для студентов, аспирантов и преподавателей вузов,
а также специалистов в области цифровой обработки сигналов*

УДК 004.438(075.8)
ББК 32.973.26–018.2я73

Группа подготовки издания:

Главный редактор	Екатерина Кондукова
Зав. редакцией	Екатерина Капалыгина
Редактор	Анна Кузьмина
Компьютерная верстка	Ольги Сергиенко
Корректор	Зинаида Дмитриева
Дизайн серии	Инны Тачиной
Оформление обложки	Маринды Дамбиевой
Фото	Кирилла Сергеева

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Е. Б. Соловьева, д-р техн. наук, завкафедрой теоретических основ электротехники
Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ»

А. А. Монаков, д-р техн. наук, проф. кафедры радиотехнических систем
Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения

"БХВ-Петербург", 191036, Санкт-Петербург, Гончарная ул., 20.

ISBN 978-5-9775-3946-3

© ООО "БХВ", 2018
© Оформление. ООО "БХВ-Петербург", 2018

Оглавление

Список условных обозначений и сокращений	9
Предисловие	13
Глава 1. Введение в цифровую обработку сигналов	15
1.1. Основные типы сигналов	15
1.2. Обобщенная схема цифровой обработки сигналов	16
1.3. Нормирование времени и частоты	21
1.4. Основная полоса частот	21
1.5. Типовые дискретные сигналы	22
Глава 2. Линейные дискретные системы.....	27
2.1. Определение линейной дискретной системы	27
2.2. Импульсная характеристика	29
2.3. Формула свертки.....	29
2.4. Разностное уравнение.....	33
2.5. Рекурсивные и нерекурсивные системы	35
2.6. Свойство памяти линейных дискретных систем.....	36
2.7. Системы с конечной и бесконечной импульсной характеристикой.....	37
2.8. Устойчивость линейных дискретных систем	38
2.9. Первый критерий устойчивости	39
Глава 3. Z-преобразование	41
3.1. Преобразование Лапласа.....	41
3.2. Z-преобразование	42
3.3. Связь между z- и p-плоскостями.....	43
3.4. Отображение p-плоскости в z-плоскость	45
3.5. Основные свойства Z-преобразования	49
3.6. Таблица соответствий	51
3.7. Обратное Z-преобразование	56
3.7.1. Использование теоремы Коши о вычетах.....	56
3.7.2. Разложение z-изображения на простые дроби.....	58
3.7.3. Использование таблицы соответствий	60
3.8. Z-преобразование и преобразование Фурье	61

Глава 4. Описание линейных дискретных систем в z-области	63
4.1. Передаточная функция	63
4.2. Нули и полюсы передаточной функции.....	65
4.3. Связь передаточной функции с разностным уравнением	67
4.4. Рекурсивные звенья	68
4.5. Разновидности представления передаточной функции.....	73
4.6. Второй критерий устойчивости.....	75
4.7. Устойчивость и сходимость.....	77
Глава 5. Описание линейных дискретных систем в частотной области	79
5.1. Частотная характеристика.....	79
5.2. Свойства частотных характеристик	82
5.3. Расчет АЧХ и ФЧХ	83
5.4. Нули и экстремумы АЧХ	84
5.5. Экспресс-анализ АЧХ	87
5.6. Групповое время задержки	95
Глава 6. Структуры линейных дискретных систем	97
6.1. Структуры рекурсивных ЛДС	98
6.1.1. Прямая структура и ее модификации	98
6.1.2. Описание ЛДС в пространстве состояний	103
6.1.3. Каскадная структура	106
6.1.4. Параллельная структура	106
6.2. Структуры нерекурсивных ЛДС.....	107
6.3. Описание структур в MATLAB	108
Глава 7. Фазовые звенья.....	115
7.1. Минимально-фазовые и неминимально-фазовые ЛДС	115
7.2. Определение и свойства фазового звена	119
7.3. Фазовый корректор.....	121
7.4. Фазовое звено 1-го порядка	122
7.5. Фазовое звено 2-го порядка	125
7.6. Фазовое звено произвольного порядка	128
7.7. Структура фазового звена	129
Глава 8. Эффекты квантования	135
8.1. Форматы данных.....	135
8.1.1. Форматы данных с фиксированной точкой	136
8.1.2. Форматы данных с плавающей точкой	139
8.1.3. Выбор формата данных	142
8.1.4. Коды данных с фиксированной точкой.....	142
8.1.5. Арифметика в дополнительном коде	145
8.2. Квантование данных.....	147
8.2.1. Методы округления	148
8.2.2. Оценки ошибки квантования	149
8.3. Источники ошибок квантования	151
8.3.1. Предположения о шумах	152
8.4. Шум аналого-цифрового преобразователя.....	153

8.5. Собственный шум цифровой системы.....	155
8.5.1. Эквивалентная линейная модель	156
8.5.2. Собственный шум структур рекурсивных звеньев	157
8.5.3. Влияние нулей и полюсов на дисперсию собственного шума	163
8.5.4. Собственный шум структур нерекурсивной системы.....	166
8.5.5. Собственный шум параллельной структуры	167
8.5.6. Собственный шум каскадной структуры	168
8.5.7. Расстановка звеньев в каскадной структуре	170
8.6. Отношение сигнал/шум и динамический диапазон цифровой системы	171
8.7. Ошибки квантования коэффициентов	172
8.8. Ошибки переполнения сумматоров	172
8.8.1. Масштабирование в каскадных структурах.....	174
8.8.2. Расчет масштабирующих множителей.....	181
8.8.3. Нормирование коэффициентов.....	183
8.8.4. Оценивание собственного шума после масштабирования	184
8.9. Предельные циклы.....	185

Глава 9. Описание дискретных сигналов в частотной области.....189

9.1. Спектральная плотность	189
9.2. Свойства спектральной плотности.....	190
9.3. Связь спектральных плотностей дискретного и аналогового сигналов.....	194
9.4. Дискретизация относительно узкополосных сигналов	198
9.5. Операции со спектральной плотностью	202
9.5.1. Перенос спектральной плотности.....	202
9.5.2. Инверсия спектральной плотности вещественного сигнала	204
9.5.3. Формирование сигнала с одной боковой полосой	205
9.5.4. Перенос спектральной плотности узкополосного высокочастотного сигнала в область низких частот	208

Глава 10. Дискретное преобразование Фурье.....215

10.1. Симметричные ряды Фурье	216
10.2. Взаимно однозначные преобразования "время—частота"	217
10.3. Дискретное преобразование Фурье.....	223
10.3.1. Дискретное преобразование Фурье периодической последовательности	224
10.3.2. Дискретное преобразование Фурье конечной последовательности	225
10.3.3. Разрешение по частоте и растекание спектра.....	226
10.3.4. Восстановление спектральной плотности.....	228
10.4. Свойства дискретного преобразования Фурье	229
10.5. Дискретное косинус-преобразование.....	233
10.6. Вычисление линейной свертки с помощью дискретного преобразования Фурье	234
10.7. Секционированные свертки.....	237

Глава 11. Быстрое преобразование Фурье239

11.1. Алгоритм быстрого преобразования Фурье с прореживанием по времени	240
11.1.1. Формирование прореженной последовательности	247
11.1.2. Обратное быстрое преобразование Фурье.....	248
11.1.3. Оценка вычислительной сложности алгоритма быстрого преобразования Фурье.....	249
11.2. Алгоритм быстрого преобразования с прореживанием по частоте	250

Глава 12. Случайные процессы.....	253
12.1. Случайный процесс	253
12.2. Статистические характеристики случайного процесса	255
12.3. Стационарный случайный процесс	257
12.4. Эргодический случайный процесс	258
12.4.1. Характеристики детерминированных последовательностей.....	260
12.4.2. Смещенные и несмешенные оценки.....	261
12.5. Спектральная плотность мощности	262
12.6. Обработка случайного процесса линейной дискретной системой	265
12.7. Белый шум.....	267
12.7.1. Обработка белого шума линейной дискретной системой	268
Глава 13. Спектральный анализ.....	271
13.1. Непараметрические методы.....	272
13.1.1. Метод периодограмм	272
13.1.2. Основные показатели качества оценок СПМ	274
13.1.3. Метод периодограмм Даньелла	276
13.1.4. Метод периодограмм Бартлетта	278
13.1.5. Метод периодограмм Уэлча.....	280
13.1.6. Методы коррелограмм.....	282
13.2. Параметрические методы	284
13.2.1. Математические модели случайного процесса	285
13.2.2. Оценка параметров авторегрессионной модели.....	288
13.2.3. Метод Юла—Уолкера (автокорреляционный).....	288
13.2.4. Ковариационный метод	292
13.2.5. Модифицированный ковариационный метод.....	294
13.2.6. Расчет оценки СПМ	296
13.2.7. Оценка порядка авторегрессионной модели.....	300
Глава 14. Введение в цифровые фильтры.....	303
14.1. Классификация цифровых фильтров	304
14.2. Проектирование цифровых фильтров.....	306
Глава 15. КИХ-фильтры с линейной ФЧХ	309
15.1. Условия линейности ФЧХ КИХ-фильтров	309
15.2. Четыре типа КИХ-фильтров с линейной ФЧХ	310
15.3. Амплитудные функции КИХ-фильтров с линейной ФЧХ	313
15.4. Требования к АЧХ КИХ-фильтров	316
15.5. Структуры КИХ-фильтров с линейной ФЧХ	319
Глава 16. Синтез КИХ-фильтров методом окон	323
16.1. Импульсная характеристика идеального КИХ-фильтра.....	323
16.2. Окно Дирихле и эффект Гиббса	326
16.3. Окна	332
16.3.1. Основные параметры окон.....	336
16.3.2. Окно Кайзера.....	342
16.4. Итерационная процедура синтеза КИХ-фильтра методом окон	343

Глава 17. Синтез КИХ-фильтров методом наилучшей равномерной (чебышевской) аппроксимации	347
17.1. Формулировка задачи.....	347
17.1.1. Проблемы решения задачи.....	352
17.2. Теорема Чебышева	353
17.3. Решение задачи	355
17.3.1. Полиномиальный алгоритм Ремеза	357
17.3.2. Пример поиска оптимального решения с помощью алгоритма Ремеза	358
17.3.3. Обменный алгоритм Ремеза.....	362
17.3.4. Интерполяционный метод Паркса—Мак-Клеллана.....	363
17.4. Итерационная процедура синтеза оптимального КИХ-фильтра	364
Глава 18. Специальные КИХ-фильтры с линейной ФЧХ	367
18.1. Специальные КИХ-фильтры с симметричной импульсной характеристикой	367
18.1.1. Однородный фильтр	367
18.1.2. Триангулярный фильтр.....	370
18.1.3. Полуполосные фильтры	372
18.1.4. Фильтр Найквиста.....	378
18.1.5. Квадратурно-зеркальные фильтры	383
18.2. Специальные КИХ-фильтры с антисимметричной импульсной характеристикой.....	387
18.2.1. Цифровой преобразователь Гильберта	387
18.2.2. Цифровой дифференциатор	392
Глава 19. Синтез БИХ-фильтров	401
19.1. Синтез БИХ-фильтра на основе аналогового прототипа	401
19.1.1. Процедура синтеза БИХ-фильтра	402
19.2. Метод инвариантности импульсной характеристики.....	404
19.2.1. Теоретические основы метода	404
19.2.2. Свойства БИХ-фильтров при стандартном Z-преобразовании	406
19.2.3. Синтез БИХ-фильтра	408
19.3. Метод билинейного Z-преобразования.....	412
19.3.1. Теоретические основы метода	412
19.3.2. Свойства БИХ-фильтров при билинейном Z-преобразовании	413
19.3.3. Процедура синтеза оптимального БИХ-фильтра	417
Глава 20. Оценивание собственного шума цифрового фильтра.....	421
20.1. Оценивание собственного шума структур КИХ-фильтра	421
20.2. Оценивание собственного шума каскадных структур БИХ-фильтра.....	422
Глава 21. Многоскоростные системы	435
21.1. Система однократной интерполяции	436
21.2. Система однократной децимации	442
21.3. Система однократной передискретизации	449
21.4. Полифазные структуры многоскоростных систем	449
21.4.1. Полифазная структура системы однократной интерполяции	450
21.4.2. Полифазная структура системы однократной децимации.....	455
21.4.3. Описание полифазных структур в MATLAB.....	460
21.5. Банки фильтров.....	461

Глава 22. Адаптивные фильтры	467
22.1. Структурная схема адаптивного фильтра.....	467
22.2. Фильтр Винера.....	470
22.3. Алгоритм LMS	473
22.4. Алгоритм RLS	478
22.5. Идентификация систем	484
22.5.1. Оценка импульсной характеристики неизвестной системы	486
22.5.2. Очистка сигнала от шума	488
22.5.3. Выравнивание частотной характеристики.....	491
22.5.4. Оценка параметров линейного предсказания сигнала.....	497
Приложение 1. Средства GUI FDATool.....	501
П1.1. Обращение к FDATool	501
П1.2. Синтез цифровых фильтров	503
П1.3. Анализ цифровых фильтров.....	507
П1.4. Моделирование цифровых фильтров с фиксированной точкой	509
П1.4.1. Расстановка звеньев и масштабирование.....	509
П1.4.2. Установка параметров квантования	511
П1.4.3. Параметры квантования коэффициентов	512
П1.4.4. Параметры квантования входного и выходного сигналов	515
П1.4.5. Параметры квантования арифметических операций	518
П1.5. Моделирование полифазных структур многоскоростных систем.....	523
П1.5.1. Синтез фильтра-прототипа.....	525
П1.6. Экспорт из FDATool.....	529
П1.6.1. Экспорт в Workspace.....	529
П1.6.2. Экспорт в SPTool	531
П1.6.3. Экспорт в окно моделей Simulink	531
П1.6.4. Экспорт на диск в виде M-файла	534
П1.7. Импорт из Workspace	535
П1.8. Сохранение сеанса работы в FDATool.....	538
Приложение 2. Средства GUI SPTool	539
П2.1. Обращение к SPTool.....	539
П2.1.1. Анализ сигналов во временной области.....	540
П2.1.2. Моделирование цифровой фильтрации.....	543
П2.1.3. Спектральный анализ сигналов	546
П2.2. Экспорт данных из SPTool.....	551
П2.3. Сохранение сеанса работы в SPTool	552
Список литературы.....	553
Предметный указатель	556

Список условных обозначений и сокращений

- ◀ — окончание примера.
- ACF — Autocorrelation Function (автокорреляционная функция).
- AF — Adaptive Filter (адаптивный фильтр).
- DCT — Discrete Cosine Transform (дискретное косинус-преобразование).
- DFT — Discrete Fourier Transform (дискретное преобразование Фурье).
- DSP — Digital Signal Processing (цифровая обработка сигналов).
- EXT — Extension (расширение).
- FDATool — Filter Design and Analysis Toolbox (средство проектирования и анализа фильтров).
- FFT — Fast Fourier Transform (быстрое преобразование Фурье).
- FIR — Finite Impulse Response (конечная импульсная характеристика).
- GUI — Graphical User Interface (графический интерфейс пользователя).
- HTML — Hyper Text Markup Language (язык разметки гипертекста).
- IDFT — Inverse Discrete Fourier Transform (обратное дискретное преобразование Фурье).
- IFFT — Inverse Fast Fourier Transform (обратное быстрое преобразование Фурье).
- IIR — Infinite Impulse Response (бесконечная импульсная характеристика).
- LMS — Least Mean Square (метод наименьших квадратов).
- LSB — Least Significant Bits (младшее слово).
- MAE — Mean Absolute Value (среднее абсолютное отклонение).
- MSB — Most Significant Bits (старшее слово).
- NLMS — Normalize Least Mean-Square (нормированный метод наименьших квадратов).
- PSD — Power Spectral Density (спектральная плотность мощности).
- RLS — Recursive Least Square (рекурсивный метод наименьших квадратов).

RMSE	— Root Mean Squared Error (среднеквадратическая ошибка).
SOS	— Second-Order Sections (рекурсивные звенья 2-го порядка).
SPTool	— Signal Processing Toolbox (средство обработки сигнала).
STD	— Standard Deviation (стандартное отклонение).
АКФ	— автокорреляционная функция.
АФ	— адаптивный фильтр.
АФП	— аналоговый фильтр-прототип.
АЦП	— аналого-цифровой преобразователь.
АЧХ	— амплитудно-частотная характеристика.
БИХ	— бесконечная импульсная характеристика (тип фильтра).
БПФ	— быстрое преобразование Фурье.
ВКФ	— взаимная корреляционная функция.
ВЦД	— высокочастотный цифровой дифференциатор.
ГВЗ	— групповое время задержки.
ДКП	— дискретное косинус-преобразование.
ДПФ	— дискретное преобразование Фурье.
ИХ	— импульсная характеристика.
КИХ	— конечная импульсная характеристика (тип фильтра).
КФНЧ	— комплексный фильтр нижних частот.
КЧХ	— комплексная частотная характеристика.
ЛДС	— линейная дискретная система.
ЛФЧХ	— линейная ФЧХ.
МНК	— метод наименьших квадратов.
НМНК	— нормированный метод наименьших квадратов.
ННУ	— нулевые начальные условия.
НЦД	— низкочастотный цифровой дифференциатор.
ОБП	— одна боковая полоса.
ОБПФ	— обратное быстрое преобразование Фурье.
ОДПФ	— обратное дискретное преобразование Фурье.
ПЗ	— полоса задерживания.
ПЛИС	— программируемая логическая интегральная схема.
ПП	— полоса пропускания.
ПТ	— плавающая точка.

ПФ	— полосовой фильтр.
ПЦД	— полосовой цифровой дифференциатор.
РНК	— рекуррентный метод наименьших квадратов.
РУ	— разностное уравнение.
РФ	— режекторный фильтр.
СКО	— среднеквадратическое (стандартное) отклонение.
СКФ	— системная корреляционная функция.
СЛАУ	— система линейных алгебраических уравнений.
СПМ	— спектральная плотность мощности.
ФВЧ	— фильтр верхних частот.
ФЗ	— фазовое звено.
ФНЧ	— фильтр нижних частот.
ФТ	— фиксированная точка.
ФЧХ	— фазочастотная характеристика.
ЦАП	— цифроаналоговый преобразователь.
ЦД	— цифровой дифференциатор.
ЦОС	— цифровая обработка сигналов.
ЦПГ	— цифровой преобразователь Гильберта.
ЦПОС	— цифровой процессор обработки сигналов.
ЦФ	— цифровой фильтр.
ЧХ	— частотная характеристика.
ШЦД	— широкополосный цифровой дифференциатор.

Предисловие

Перспективы научно-технического развития в области телекоммуникаций и радиотехники в значительной мере связаны с разработкой новых методов и алгоритмов цифровой обработки сигналов (ЦОС) и созданием на их основе программных (soft) и аппаратных (hard) продуктов.

Сложность технологии разработки soft- и hard-продуктов предполагает высокий уровень подготовки бакалавров и магистров в соответствии с новыми Федеральными государственными образовательными стандартами высшего образования по направлениям "Инфокоммуникационные технологии и системы связи" и "Радиотехника".

В архитектуре системы высшего образования базовая дисциплина ЦОС соответствует уровню "бакалавр" и ее расширение/углубление распространяется на уровень "магистр".

Результаты подготовки в области ЦОС в сжатой формулировке сводятся к триаде знаний и навыков: фундаментальная теория, компьютерное моделирование, реализация.

Фундаментальная теория ЦОС — весьма обширная область знаний, в которой условно принято выделять две части: базовую и прикладную.

В базовой части изучаются базовые методы и алгоритмы ЦОС, инвариантные относительно приложений и физической природы сигнала. Содержание базовой части может варьировать в зависимости от направления подготовки, но в общем случае оно охватывает традиционные темы, так или иначе представленные в различных книгах по ЦОС.

В прикладной части рассматриваются специальные методы и алгоритмы ЦОС для конкретных приложений и физической природы сигналов, основу которых составляют базовые методы и алгоритмы с учетом специфики их приложения. Обычно они изучаются в рамках специальных дисциплин, определяемых вузом в зависимости от направления и профиля подготовки.

Компьютерное моделирование методов и алгоритмов ЦОС, как правило, выполняется в программной среде (системе) MATLAB, созданной компанией The Math Works, Inc., — общепризнанным мировым универсальным стандартом в области компьютерных технологий. Если компьютерную модель (soft-продукт) предполагается реализовать в виде устройства (hard-продукта), то в ней должны учитываться эффекты квантования исходных данных и результатов арифметических операций.

Далее, если это необходимо, производится тестирование модели с помощью виртуальных приборов на реальных сигналах в среде графического программирования LabVIEW, интегрированной с MATLAB.

Реализация модели в виде hard-продукта может быть программной, аппаратной или аппаратно-программной на базе цифрового процессора обработки сигналов (ЦПОС), программируемой логической интегральной схемы (ПЛИС), системы на кристалле (System on Chip, SoC) и т. п. В системе MATLAB предусмотрены целевые средства реализации hard-продукта на основе модели Simulink (подсистемы MATLAB).

Книга предназначена для поддержки двух составляющих обозначенной триады: фундаментальная теория — компьютерное моделирование. В конкретном случае это означает, что теория ЦОС (базовая часть) преподносится с позиции моделирования в MATLAB: теоретические аспекты методов и алгоритмов ЦОС увязываются с их моделированием в MATLAB и иллюстрируются соответствующими примерами. Это образно и кратко отражено в названии книги.

Рассмотрение реализации ограничено автоматическим созданием моделей Simulink цифровых фильтров.

Предыдущие книги автора (написанные в соавторстве) "Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB" (2008) и "Цифровая обработка сигналов и MATLAB" (2013) содержат лишь краткие теоретические справки по разделам ЦОС. Основное внимание в них уделяется средствам моделирования ЦОС в MATLAB.

В новой книге, напротив, системно излагаются теоретические основы ЦОС, а средства моделирования в MATLAB рассматриваются в объеме, необходимом для описания процедур проектирования систем ЦОС или подтверждения теоретических выводов. При этом в иллюстративных примерах используются script-файлы, приведенные в книге "Цифровая обработка сигналов и MATLAB", а в новой книге представлены и проанализированы результаты моделирования.

Содержание книги включает 22 главы и 2 приложения с описанием средств GUI (Graphical User Interface — графический интерфейс пользователя) FDATool (Filter Design and Analysis Toolbox — средство проектирования и анализа фильтров) и SPTool (Signal Processing Toolbox — средство обработки сигнала).

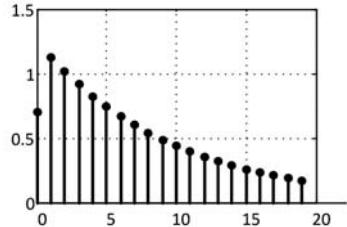
Данная книга, в первую очередь, ориентирована на бакалавров, магистров, аспирантов и преподавателей вузов. Однако она может быть полезна для всех инженерно-технических специалистов, проявляющих интерес к области ЦОС.

Алла Ивановна Солонина, канд. техн. наук, доцент кафедры радиосистем и обработки сигналов Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича (СПбГУТ).

Автор выражает глубокую признательность рецензентам д-ру техн. наук Елене Борисовне Соловьевой и д-ру техн. наук Андрею Алексеевичу Монакову, а также канд. техн. наук Дмитрию Андреевичу Улаховичу за консультации в процессе написания книги и редактору Анне Сергеевне Кузьминой за ценные предложения по ее оформлению.

Все предложения и замечания, которые будут приняты автором с благодарностью, просим присыпать в издательство "БХВ-Петербург" по электронному адресу: mail@bhv.ru.

ГЛАВА 1



Введение в цифровую обработку сигналов

Цифровая обработка сигналов (ЦОС) — это область науки и техники, в которой изучаются общие для различных технических приложений методы и алгоритмы обработки сигналов средствами цифровой вычислительной техники.

1.1. Основные типы сигналов

Сигналом называют физический процесс, несущий в себе информацию.

Математически сигнал описывается функцией времени, тип которой зависит от типа сигнала. К основным типам сигналов относят аналоговый, дискретный и цифровой.

Аналоговым называют сигнал, непрерывный по времени и состоянию. Такой сигнал описывается *непрерывной* или кусочно-непрерывной функцией $x(t)$, при этом и аргумент, и функция могут принимать любые значения из некоторых интервалов $t_1 \leq t \leq t_2$, $x_1 \leq x \leq x_2$ соответственно (рис. 1.1, *a*).

Дискретным называют сигнал, дискретный по времени и непрерывный по состоянию. Такой сигнал описывается *последовательностью* $x(nT)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, (решетчатой функцией), которая определена только в дискретные моменты времени nT и может принимать любые значения из некоторого интервала $x_1 \leq x \leq x_2$ (рис. 1.1, *б*).

Значения последовательности $x(nT)$ называют *отсчетами* (samples), интервал T — *периодом дискретизации*, а обратную величину $f_d = 1/T$ — *частотой дискретизации*.

Дискретный сигнал может быть *вещественным* или *комплексным*. В последнем случае вещественная и мнимая части описываются вещественными последовательностями:

$$x(nT) = x_1(nT) + jx_2(nT).$$

Термины "дискретный сигнал" и "последовательность" в теории ЦОС тождественны.

Цифровым называют сигнал, дискретный по времени и квантованный по состоянию. Такой сигнал описывается *квантованной последовательностью* (квантованной решетчатой функцией) $x_{\text{u}}(nT)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, отсчеты которой в каждый момент времени nT принимают дискретные значения уровней квантования из некоторого интервала $x_1 \leq x \leq x_2$ (рис. 1.1, *в*).

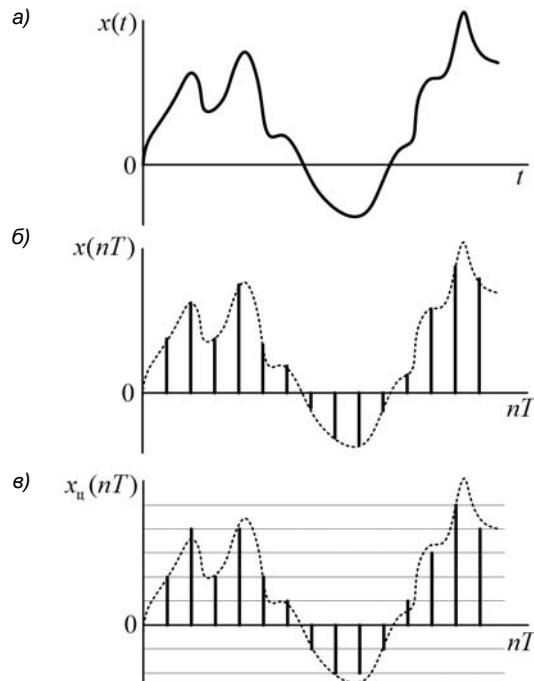


Рис. 1.1. Аналоговый (*а*), дискретный (*б*) и цифровой (*в*) сигналы

1.2. Обобщенная схема цифровой обработки сигналов

Обобщенная схема ЦОС (рис. 1.2) отображает последовательность процедур, необходимых для преобразования исходного аналогового сигнала $x(t)$ в другой аналоговый сигнал $y(t)$ по заданному алгоритму средствами цифровой вычислительной техники.

В цифровой обработке сигнала можно выделить три основных этапа:

- формирование *цифрового* сигнала $x_{\text{u}}(nT)$ из исходного *аналогового* сигнала $x(t)$;
- преобразование *входного цифрового* сигнала $x_{\text{u}}(nT)$ в *выходной цифровой* сигнал $y_{\text{u}}(nT)$ по заданному алгоритму;
- формирование *аналогового* сигнала $y(t)$ из *цифрового* сигнала $y_{\text{u}}(nT)$.

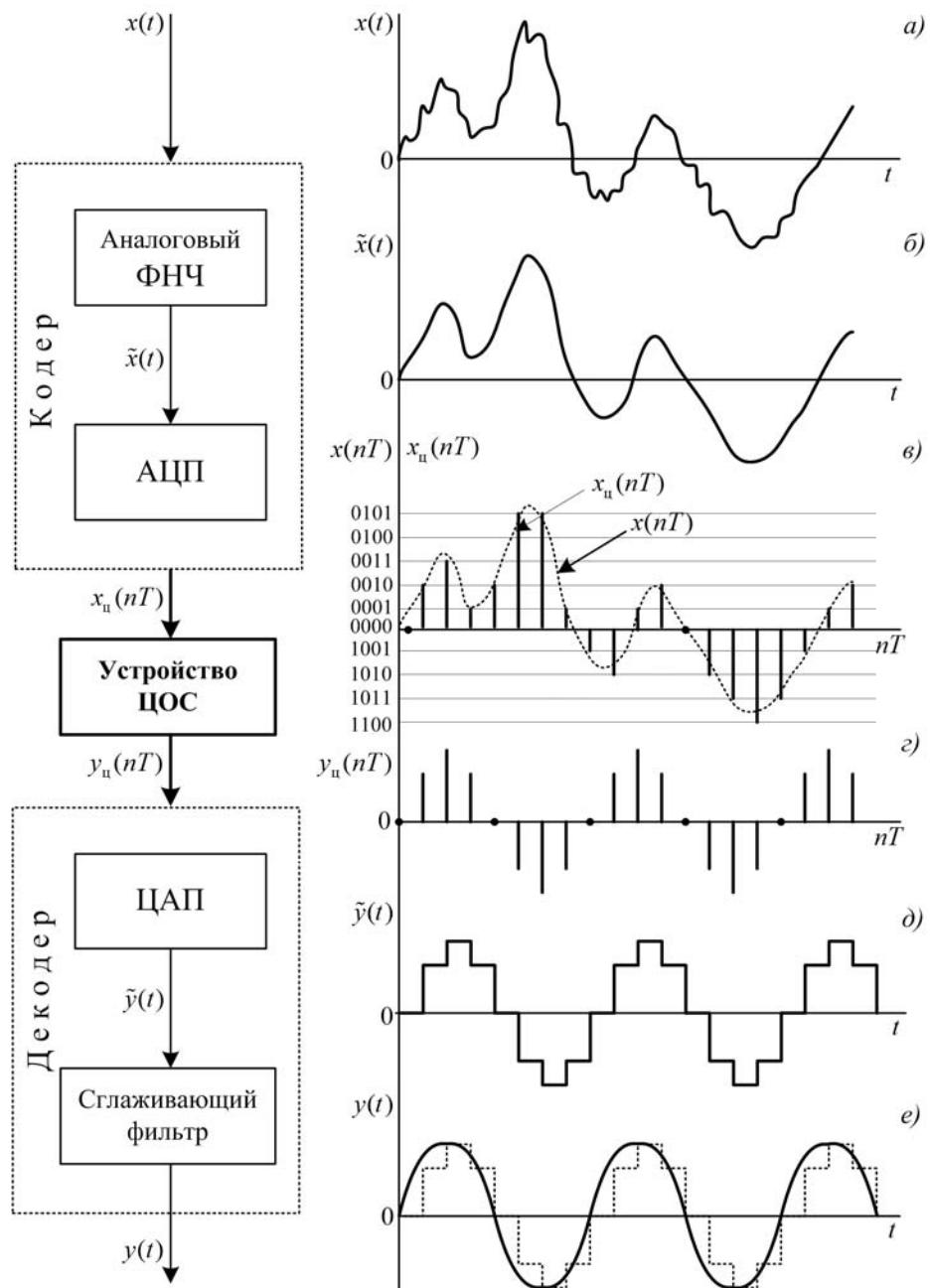


Рис. 1.2. Обобщенная схема цифровой обработки сигнала

В обобщенной схеме ЦОС этим этапам соответствуют три функциональных устройства:

- кодер;
- устройство ЦОС;
- декодер.

Рассмотрим процесс ЦОС поэтапно.

- На первом этапе *кодер* из исходного *аналогового* сигнала $x(t)$ (см. рис. 1.2, а) формирует *цифровой* сигнал $x_{\text{ц}}(nT)$ (см. рис. 1.2, в). В состав кодера входят аналоговый фильтр низких частот (ФНЧ) и аналого-цифровой преобразователь (АЦП).

Аналоговый фильтр низких частот предназначен для ограничения спектра (спектральной плотности)¹ $X(j\omega)$ исходного аналогового сигнала $x(t)$.

Необходимость ограничения спектра вытекает из теоремы Котельникова, в соответствии с которой частота дискретизации f_d выбирается из условия: $f_d \geq 2f_v$, где f_v — верхняя частота спектра сигнала.

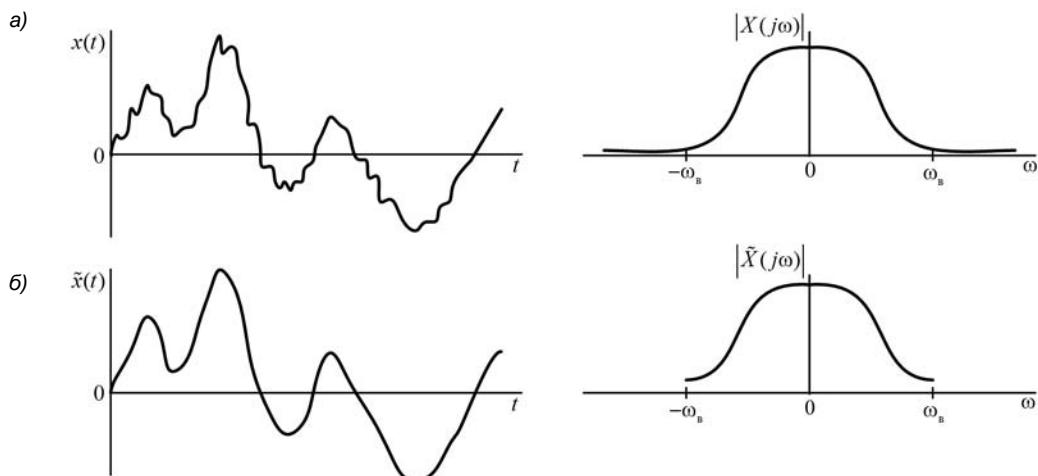


Рис. 1.3. Сигналы и их амплитудные спектры на входе (а) и выходе (б) аналогового ФНЧ

Возможность ограничения спектра связана с особенностями частотного распределения энергии сигнала: основная часть его энергии сосредоточена в области $f \leq f_v$, т. е. амплитуды спектральных составляющих, начиная с некоторой частоты $f > f_v$, существенно снижаются (рис. 1.3, а). Выбор значения f_v определяется конкретным типом сигнала и решаемой задачей. При обработке аудио-

¹ Спектр и спектральная плотность не тождественные понятия, и в дальнейшем будут определены. Здесь же, во вводной главе, используем краткий термин "спектр", по умолчанию объединяющий в себе оба данных понятия.

и видеосигналов выбор значения f_v зависит от особенностей психофизического восприятия данных сигналов. Например, для стандартного телефонного сигнала верхняя частота f_v равна 3,4 кГц, а минимальная стандартная частота дискретизации f_d — 8 кГц.

На выходе ФНЧ (см. рис. 1.2, б) получают аналоговый сигнал $\tilde{x}(t)$ с *финитным* (ограниченным по протяженности) спектром $\tilde{X}(j\omega)$ (рис. 1.3, б).

Аналого-цифровой преобразователь формирует цифровой сигнал $x_u(nT)$ посредством дискретизации и квантования аналогового сигнала $\tilde{x}(t)$ (см. рис. 1.2, в).

Дискретизация по времени (дискретизация) представляет собой процедуру взятия мгновенных значений — *отсчетов* — сигнала $\tilde{x}(t)$ с интервалом времени, равным периоду дискретизации T . По умолчанию будем подразумевать *равномерную* (эквидистантную) дискретизацию. Значения отсчетов $x(nT)$ совпадают со значениями сигнала $\tilde{x}(t)$ в моменты времени $t = nT$:

$$x(nT) = \tilde{x}(t) \Big|_{t=nT} .$$

Совокупность отсчетов $x(nT)$, $n = 0, 1, \dots$, называют *дискретным сигналом*.

Квантование по уровню (квантование) производится с целью представления точных значений отсчетов $x(nT)$ в виде двоичных чисел конечной разрядности — *квантованных отсчетов* $x_u(nT)$.

Для этого динамический диапазон дискретного сигнала $x(nT)$ разбивается на конечное число дискретных уровней — *уровней квантования*, и каждому отсчету по определенному правилу присваивается значение одного из ближайших уровней, между которыми он оказывается. Уровни квантования кодируются двоичными числами разрядности b , зависящей от числа уровней квантования R :

$$R \leq 2^b ,$$

откуда $b = \text{int}(\log_2 R)$ — ближайшее целое в сторону увеличения. На временной диаграмме (см. рис. 1.2, в) для примера выбрано 6 уровней квантования (без учета знака), поэтому $b=3$ и отсчеты $x_u(nT)$ кодируются четырехразрядными двоичными числами: один разряд знаковый, три значащих.

Совокупность квантованных отсчетов $x_u(nT)$, $n = 0, 1, \dots$, называют *цифровым сигналом*.

2. На втором этапе *устройство ЦОС* преобразует *входной цифровой* сигнал $x_u(nT)$ (см. рис. 1.2, в) в *выходной цифровой* сигнал $y_u(nT)$ (см. рис. 1.2, г) по заданному алгоритму.

Устройство ЦОС может быть реализовано программно, например, на базе цифрового процессора обработки сигналов (ЦПОС), аппаратно, например, на программируемой логической интегральной схеме (ПЛИС), или аппаратно-программно, когда часть операций реализуется аппаратно, а часть — программно.

Устройства ЦОС могут работать в реальном или нереальном времени.

В *реальном времени* обработка сигналов должна выполняться в темпе поступления отсчетов входного сигнала $x_{\text{ц}}(nT)$, $n = 0, 1, \dots$, и отвечать следующим требованиям:

- время цикла $\Delta t_{\text{ц}}$ при вычислении отсчета $y_{\text{ц}}(nT)$ не должно превышать интервала между двумя соседними отсчетами $x_{\text{ц}}(nT)$, т. е. периода дискретизации

$$\Delta t_{\text{ц}} \leq T;$$

- тактовая частота f_{τ} процессора должна быть много выше частоты дискретизации $f_{\text{д}}$ сигнала $x_{\text{ц}}(nT)$

$$f_{\tau} \gg f_{\text{д}}.$$

Последнее вызвано тем, что в алгоритмах ЦОС количество операций в цикле, необходимых для вычисления одного отсчета $y_{\text{ц}}(nT)$, весьма велико. Например, для стандартного телефонного сигнала с частотой дискретизации 8 кГц тактовая частота должна быть не менее 6 МГц.

В *реальном времени* выполняется обработка сигналов, связанная, прежде всего, с их передачей по каналам связи, в том числе через Интернет.

В *нереальном времени* выполняется обработка сигналов, связанная с их исследованием, например, обработкой данных от датчиков различной физической природы, студийной обработкой аудио- и видеосигналов и др.

- На третьем этапе *декодер* формирует результирующий *аналоговый* сигнал $y(t)$ из *цифрового* сигнала $y_{\text{ц}}(nT)$. В состав декодера входят цифроаналоговый преобразователь (ЦАП) и сглаживающий фильтр.

Цифроаналоговый преобразователь формирует из цифрового сигнала $y_{\text{ц}}(nT)$ (см. рис. 1.2, *г*) ступенчатый аналоговый сигнал $\tilde{y}(t)$ (см. рис. 1.2, *д*).

Сглаживающий фильтр (анalogовый ФНЧ) устраниет ступенчатый (лестничный) эффект в выходном сигнале ЦАП $\tilde{y}(t)$. На выходе сглаживающего фильтра получаем аналоговый сигнал $y(t)$ (см. рис. 1.2, *е*) — результат преобразования исходного сигнала $x(t)$.

Предметом изучения в этой книге являются *дискретные и цифровые сигналы и методы их преобразования*, реализуемые устройством ЦОС (на рис. 1.2 выделено полужирным шрифтом).

1.3. Нормирование времени и частоты

Дискретным временем называют значения аргумента nT , $n = 0, 1, \dots$, дискретного $x(nT)$ или цифрового $x_{\text{ц}}(nT)$ сигнала.

Дискретным нормированным временем называют отношение дискретного времени к периоду дискретизации:

$$n = \frac{nT}{T}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1)$$

Шкала дискретного нормированного времени является *унифицированной*: при любых значениях периода дискретизации обеспечивается равенство

$$x(nT) = x(n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.2)$$

а время n имеет смысл *номера отсчета*.

При описании дискретных и цифровых сигналов и систем в *частотной области*, наряду с частотами f (Гц) и ω (Гц/с), используют нормированные частоты.

Нормированной частотой называют ее отношение к частоте дискретизации:

$$\hat{f} = \frac{f}{f_{\Delta}} = fT \quad (\text{безразмерная величина}); \quad (1.3)$$

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{f_{\Delta}} = \omega T \quad (\text{рад}), \quad (1.4)$$

где

$$\hat{\omega} = 2\pi\hat{f}.$$

Шкала нормированной частоты \hat{f} или $\hat{\omega}$ является *унифицированной*. Например, интервалу $[0; f_{\Delta}]$ при любых значениях f_{Δ} в шкале частот \hat{f} будет соответствовать интервал $[0; 1]$, а в шкале частот $\hat{\omega}$ — интервал $[0; 2\pi]$.

1.4. Основная полоса частот

Согласно теореме Котельникова, точное восстановление аналогового сигнала с фильтром спектром, ограниченным верхней частотой f_b , гарантируется при выборе частоты дискретизации f_{Δ} из условия

$$f_{\Delta} \geq 2f_b,$$

откуда

$$f_b \leq \frac{f_{\Delta}}{2}.$$

С этим связано понятие *основной полосы частот* в шкале частот f :

$$f \Rightarrow \left[0; \frac{f_{\Delta}}{2} \right]$$

или ω :

$$\omega \Rightarrow \left[0; \frac{\omega_{\Delta}}{2} \right] = \left[0; \frac{2\pi f_{\Delta}}{2} \right] = \left[0; \frac{\pi}{T} \right].$$

В шкале нормированных частот \hat{f} или $\hat{\omega}$ основная полоса частот унифицирована:

$$\hat{f} \Rightarrow [0; 0,5];$$

$$\hat{\omega} \Rightarrow [0; \pi].$$

Частоту $f = f_{\Delta}/2$, а также ее нормированные эквиваленты $\hat{f} = 0,5$ и $\hat{\omega} = \pi$, называют *частотой Найквиста*.

Взаимосвязь между значением нормированной частоты $\hat{\omega}_0$ и абсолютной частоты f_0 легко определить из пропорции:

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{f_{\Delta}}{2}; \\ \hat{\omega}_0 &= \pi, \end{aligned}$$

откуда

$$f_0 = \frac{\hat{\omega}_0 f_{\Delta}}{2\pi}. \quad (1.5)$$

1.5. Типовые дискретные сигналы

Определим типовые дискретные сигналы (последовательности), которые будем использовать в последующем.

□ *Цифровой единичный импульс* — последовательность с единственным отсчетом, отличным от нуля и равным единице в точке $n = 0$ (рис. 1.4, а):

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Задержка цифрового единичного импульса, как и любой другой последовательности, эквивалента ее сдвигу по оси времени *вправо* (рис. 1.4, б) на $m > 0$ отсчетов (m периодов дискретизации):

$$u_0(n - m) = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

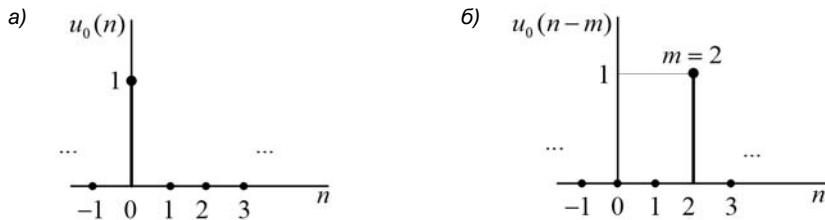


Рис. 1.4. Цифровой единичный (а) и задержанный цифровой единичный (б) импульсы

В цифровой обработке сигналов цифровой единичный импульс $u_0(n)$ играет ту же роль, какую в аналоговой обработке играет δ -функция (функция Дирака) $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0; \\ 0, & t \neq 0, \end{cases}$$

однако, в отличие от нее, цифровой единичный импульс *физически реализуем*.

С этим связано его принятое обозначение $u_0(n)$, а не $\delta(n)$, во избежание путаницы, т. к. $\delta(0) = \infty$.

По определению интеграл от δ -функции $\delta(t)$ (его площадь) равен единице. В области дискретного времени ему можно сопоставить сумму отсчетов цифрового единичного импульса, также равную единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_0(n) = 1.$$

Фильтрующему свойству¹ δ -функции в виде интеграла [19]

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

соответствует *фильтрующеее свойство цифрового единичного импульса* в виде ряда

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) u_0(n-m) = x(n), \quad (1.7)$$

означающее, что из *бесконечной* последовательности цифровой единичный импульс выделит *один* отсчет, соответствующий моменту времени $n = m$, а остальные — "обнулит" (подавит). Это свойство иллюстрирует рис. 1.5. В каждый момент времени n имеем только одно *отличное от нуля* локальное произведение $x(m)u_0(n-m)$ при равенстве $m = n$: $x(n)u_0(0) = x(n)$.

¹ Его также называют свойством селективности.

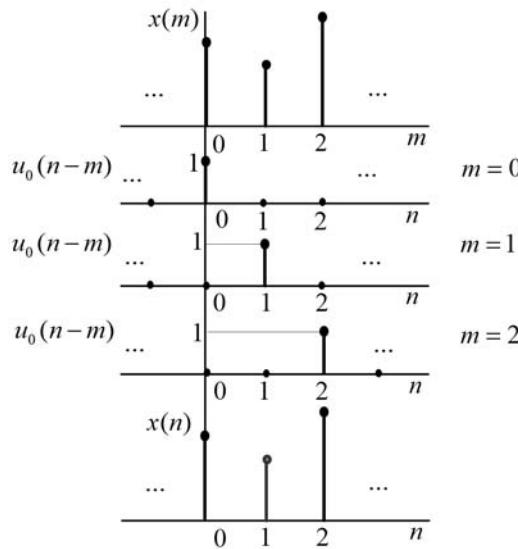


Рис. 1.5. Иллюстрация фильтрующего свойства цифрового единичного импульса

□ Цифровой единичный скачок — последовательность, отсчеты которой равны единице при всех неотрицательных значениях n и нулю — в противном случае (рис. 1.6, а):

$$u_1(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Задержанный цифровой единичный скачок описывается последовательностью (рис. 1.6, б):

$$u_1(n-m) = \begin{cases} 1, & n \geq m; \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

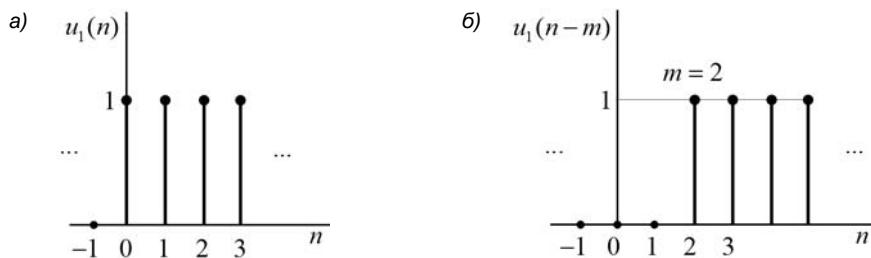


Рис. 1.6. Цифровой единичный (а) и задержанный цифровой единичный (б) скачки

□ Дискретная экспонента — последовательность, отсчеты которой определяются соотношением (рис. 1.7):

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

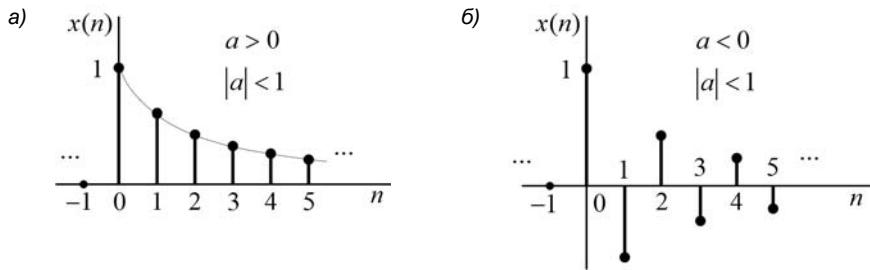


Рис. 1.7. Знакопостоянная (а) и знакопеременная (б) дискретные экспоненты

- Дискретный гармонический сигнал — последовательность, отсчеты которой совпадают со значениями аналогового гармонического сигнала (синусоиды или косинусоиды) в моменты дискретного времени (рис. 1.8):

$$x(nT) = C \cos(\omega t) \Big|_{t=nT} = C \cos(\omega nT),$$

где C — амплитуда, ω — частота, T — период дискретизации сигнала.

В шкале дискретного нормированного времени (1.1) и нормированной частоты (1.4) это эквивалентно

$$x(n) = C \cos(\hat{\omega}n).$$

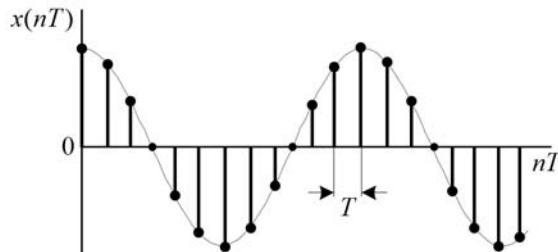


Рис. 1.8. Аналоговый (огибающая) и дискретный гармонический сигналы

- Дискретный комплексный гармонический сигнал — комплексная последовательность, отсчеты которой совпадают со значениями комплексного аналогового гармонического сигнала в моменты дискретного времени:

$$x(nT) = Ce^{j\omega t} \Big|_{t=nT} = Ce^{j\omega nT}.$$

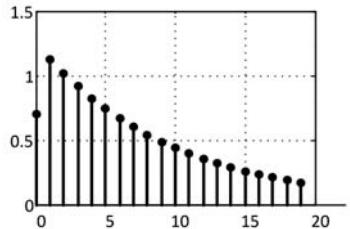
В шкале дискретного нормированного времени и нормированной частоты это эквивалентно

$$x(n) = Ce^{j\hat{\omega}n}. \quad (1.10)$$

Вещественная и мнимая части комплексного сигнала описываются вещественными последовательностями:

$$x(n) = C \cos(\hat{\omega}n) + jC \sin(\hat{\omega}n).$$

ГЛАВА 2



Линейные дискретные системы

В этой главе дается определение линейной дискретной системы и рассматривается ее описание во *временной области*.

2.1. Определение линейной дискретной системы

Системой обработки сигналов (системой) называется объект, выполняющий требуемое преобразование входного сигнала в выходной.

Входной сигнал системы называют *воздействием*, а выходной — *реакцией*.

В общем случае взаимосвязь между входными и выходными сигналами системы с несколькими входами и выходами — *соотношение вход/выход* — описывается уравнением в операторной форме:

$$Y = F\{X\}, \quad (2.1)$$

где X , Y — векторы, элементами которых являются, соответственно, воздействия и реакции (функции времени); F — оператор, определяющий математическое преобразование (линейное, нелинейное, алгебраическое, дифференциальное и др.).

Для систем с одним входом и одним выходом уравнение (2.1) принимает вид:

$$y = F\{x\}, \quad (2.2)$$

где x , y — воздействие и реакция (функции времени) соответственно.

Далее по умолчанию будем рассматривать *системы с одним входом и одним выходом*.

В соответствии с определением, системой можно назвать как физическое устройство, так и *оператор* F (математическое преобразование).

Линейной называют систему, отвечающую двум условиям:

- *однородности* — умножению воздействия на весовой коэффициент соответствует реакция, умноженная на тот же коэффициент

$$F\{ax\} = aF\{x\}; \quad (2.3)$$

- аддитивности** — сумме воздействий соответствует сумма реакций на данные воздействия (принцип суперпозиции)

$$F\{x_1 + x_2 + \dots\} = F\{x_1\} + F\{x_2\} + \dots \quad (2.4)$$

Линейная система отождествляется с линейным оператором F .

Дискретной называют систему, преобразующую входной дискретный сигнал $x(nT)$ в выходной дискретный сигнал $y(nT)$, когда соотношение вход/выход (2.2) принимает вид

$$y(nT) = F\{x(nT)\}. \quad (2.5)$$

Линейной дискретной системой (ЛДС) называют дискретную систему с линейным оператором F (рис. 2.1).

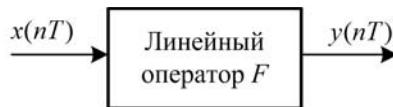


Рис. 2.1. К определению линейной дискретной системы

Линейный оператор F в (2.5) имеет две универсальные формы представления:

- свертку;
- линейное разностное преобразование.

Они рассматриваются соответственно в разд. 2.3 и 2.4.

Стационарной называют систему, обладающую свойством *инвариантности во времени*. Это означает, что реакция системы не зависит от момента подачи воздействия, и задержка воздействия приведет к задержке реакции на то же время:

$$\begin{aligned} x(nT) &\Rightarrow y(nT); \\ x(nT - mT) &\Rightarrow y(nT - mT). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Параметры стационарной системы неизменны во времени.

Начальные условия, характеризующие состояние ЛДС до начала воздействия, могут быть нулевыми или ненулевыми.

Нулевые начальные условия (ННУ) означают, что все значения воздействия и реакции, которые может помнить система *до начала воздействия* ($n = 0$), равны нулю:

$$\begin{cases} x[(n-i)T] \Big|_{n-i < 0, i=1, 2, \dots} = 0; \\ y[(n-k)T] \Big|_{n-k < 0, k=1, 2, \dots} = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

где iT и kT — значения задержек воздействия и реакции соответственно.

Признаком нулевых начальных условий является отсутствие реакции в отсутствии воздействия:

$$x(nT) = 0 \Rightarrow y(nT) = 0,$$

а ненулевых — наличие ненулевых отсчетов реакции (свободных колебаний) в отсутствии воздействия.

Физически реализуемой называют систему, отвечающую условиям физической реализуемости, которые отображают *причинно-следственную связь* (принцип причинности), и для *дискретной* системы формулируются следующим образом:

- при ННУ реакция не может возникнуть раньше воздействия;
- при ННУ значения реакции $y(nT)$ в каждый момент времени nT зависят от текущего $x(nT)$ и предшествующих отсчетов воздействия $x[(n-m)T]$, $m \geq 1$, и не зависят от его последующих отсчетов $x[(n+m)T]$ (тех, которые еще не поступили).

Математическое описание (описание) ЛДС включает в себя:

- ее основную характеристику;
- соотношение вход/выход.

2.2. Импульсная характеристика

Основной характеристикой ЛДС во временной области является импульсная характеристика (ИХ).

Импульсной характеристикой $h(nT)$ линейной дискретной системы называется ее реакция на цифровой единичный импульс $u_0(nT)$ при нулевых начальных условиях (рис. 2.2).

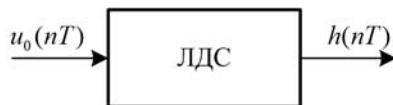


Рис. 2.2. К определению импульсной характеристики

В данном определении очевидна преемственная связь с определением ИХ $h(t)$ линейной аналоговой системы как ее реакции на δ -функцию $\delta(t)$ при ННУ.

В обоих случаях импульсная характеристика является основной характеристикой линейной системы, потому что, зная ее, можно определить реакцию на любое (произвольное) воздействие, и далее она будет определена для ЛДС.

2.3. Формула свертки

Получим соотношение вход/выход, связывающее выходной $y(nT)$ и входной $x(nT)$ сигналы ЛДС при известной импульсной характеристике $h(nT)$. Будем последовательно записывать соответствия вход/выход ЛДС, указываемые стрелкой:

- по определению, воздействию в виде цифрового единичного импульса соответствует реакция, называемая импульсной характеристикой:

$$u_0(nT) \Rightarrow h(nT);$$

- согласно свойству инвариантности во времени (2.6), воздействию, задержанному на время mT , соответствует реакция, задержанная на то же время:

$$u_0[(n-m)T] \Rightarrow h[(n-m)T];$$

- согласно свойству однородности (2.3), умножению воздействия на константу $x(mT)$ соответствует реакция, умноженная на ту же константу:

$$x(mT)u_0[(n-m)T]x(mT) \Rightarrow x(mT)h[(n-m)T]x(mT);$$

- согласно свойству аддитивности (2.4), реакции на сумму воздействий соответствует сумма реакций на данные воздействия:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT)u_0[(n-m)T] \Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT)h[(n-m)T];$$

- согласно фильтрующему свойству цифрового единичного импульса (1.7), слева имеем воздействие

$$x(nT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT)u_0[(n-m)T],$$

а справа — реакцию

$$y(nT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT)h[(n-m)T];$$

- при ННУ (2.7):

$$\begin{cases} x(mT) \Big|_{m < 0} = 0; \\ h[(n-m)T] \Big|_{n-m < 0} = 0 \end{cases}$$

реакция определяется по формуле

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} x(mT)h[(n-m)T]. \quad (2.8)$$

Линейное уравнение (2.8) называют формулой свертки.

Свертка соответствует *первой универсальной форме* представления линейного оператора F в соотношении вход/выход (2.5). В этом случае *параметры* оператора F (коэффициенты в линейном преобразовании) полностью определяются *импульсной характеристикой* ЛДС.

Формула свертки (2.8) имеет тождественную запись

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h(mT)x[(n-m)T]. \quad (2.9)$$

В линейных аналоговых системах линейный оператор F представлен интегралом свертки, и уравнения свертки имеют вид [51]:

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau;$$

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau.$$

При произвольном воздействии реакция вычисляется с помощью одного из методов (алгоритмов) численного интегрирования. Все подобные методы являются приближенными, т. е. вносят методическую погрешность.

В формуле свертки (2.8) или (2.9) вычисление отсчетов реакции $y(nT)$, $n = 0, 1, \dots$, выполняется методом прямой подстановки при ННУ, при этом методическая погрешность отсутствует.

Следовательно, формула свертки непосредственно описывает алгоритм вычисления реакции при известной импульсной характеристики, что стало возможным при переходе от непрерывного времени к дискретному $t \rightarrow nT$.

В шкале дискретного нормированного времени (1.1) формулы (2.8) и (2.9) принимают вид соответственно:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)h(n-m), \quad (2.10)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m). \quad (2.11)$$

Пример 2.1. Определить первые три отсчета реакции по формуле свертки (2.10) при ННУ.

Решение.

$$y(0) = x(0)h(0) + x(0)h(-1) + \dots = x(0)h(0);$$

$$y(1) = x(0)h(1) + x(1)h(0) + x(2)h(-1) + \dots = x(0)h(1) + x(1)h(0);$$

$$\begin{aligned} y(2) &= x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0) + x(3)h(-1) + \dots = \\ &= x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0). \end{aligned}$$

Линейная дискретная система, соотношение вход/выход которой описывается в виде формулы свертки, отвечает условиям физической реализуемости:

□ при ННУ реакция не может возникнуть раньше воздействия.

Если воздействие поступило в момент времени $n = 0$, то все значения реакции до этого момента будут нулевыми; например, в (2.10):

$$y(-1) = x(0)h(-1) = 0 \text{ и т. д.};$$

□ при ННУ значения реакции в каждый момент времени n зависят от текущего и предшествующих отсчетов воздействия и не зависят от его последующих отсчетов, как это следует из примера 2.1.

Поясним суть операции свертки на простом примере.

Пример 2.2. Вычислить реакцию ЛДС $y(n)$ по формуле свертки (2.10) при воздействии $x(n) = \{x_0; x_1; x_2\} = \{1; 2; 2\}$ длины $N_1 = 3$ и импульсной характеристики $h(n) = \{h_0; h_1\} = \{2; 1\}$ длины $N_2 = 2$. Определить длину свертки.

Решение. Процедуру вычисления реакции иллюстрирует рис. 2.3. Согласно (2.10), реакция $y(n)$ равна сумме локальных произведений отсчетов фиксированного воздействия $x(m)$ (рис. 2.3, а) и смещаемой по оси времени ИХ $h(n-m)$, где $h(0-m)$ — зеркальное отображение ИХ $h(m)$ (рис. 2.3, б, в), а $h(n-m)$, $n=1, 2, 3, 4$, — результаты его последовательного скольжения слева направо (рис. 2.3, г—ж). Отсчеты ИХ $h(n-m)$, совпадающие по времени с отсчетами воздействия $x(m)$, выделены жирными черными линиями и точками, а не совпадающие — серыми.

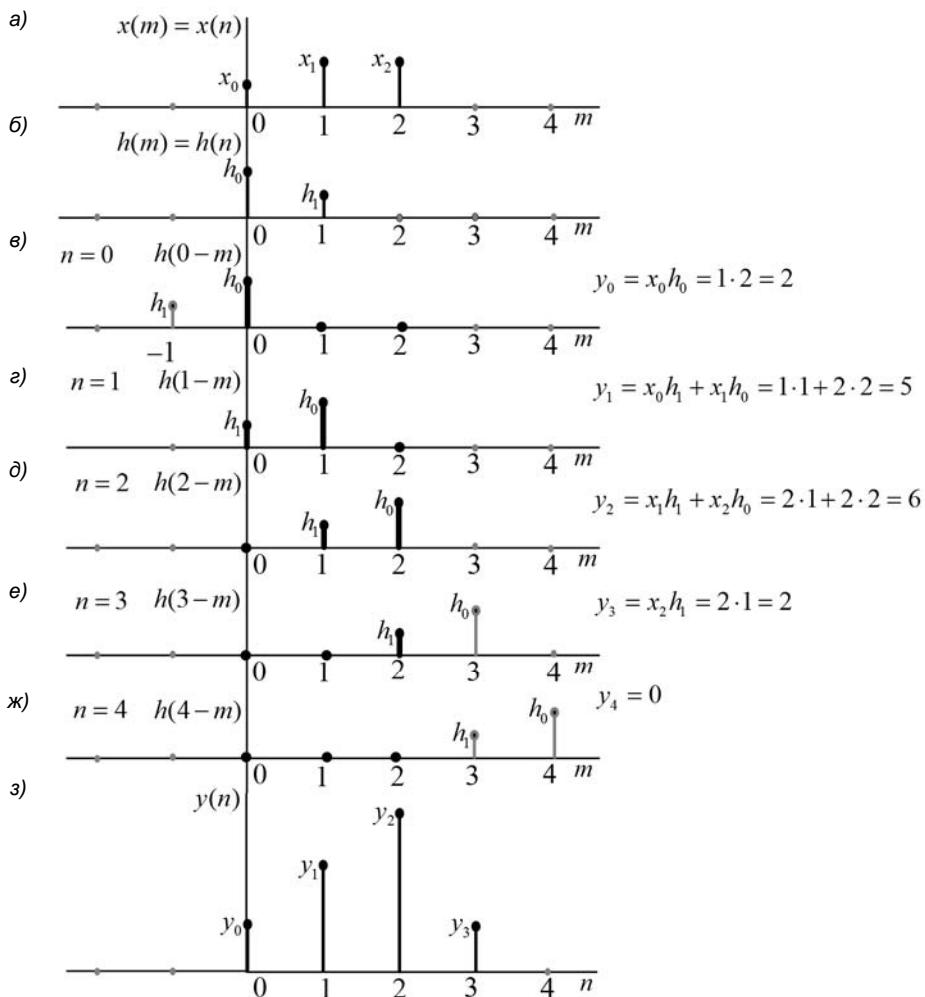


Рис. 2.3. Иллюстрация вычислений по формуле свертки

Справа на рис. 2.3, в—ж представлены результаты расчета реакции $y(n)$: в каждый момент времени n ее значение равно сумме локальных произведений *совпадающих по времени* отсчетов воздействия $x(m)$ и смещенной ИХ $h(n-m)$.

Очевидно, что вычисление следует прекратить, как только все локальные произведения окажутся равными нулю. Это произойдет в момент времени $n=4$, когда смещенная ИХ $h(4-m)$ и воздействие $x(m)$ "разойдутся", и у них не будет ни одного совпадения отсчетов. На рис. 2.3, з представлен результат вычисления свертки $y(n)$ длины $L = N_1 + N_2 - 1 = 4$. ▲

В общем случае, для воздействия $x(n)$ длины N_1 и импульсной характеристики $h(n)$ длины N_2 длина свертки $y(n)$ будет равна

$$L = N_1 + N_2 - 1, \quad (2.12)$$

и формулы (2.10)–(2.11) примут вид:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} x(m)h(n-m); \quad (2.13)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m)x(n-m). \quad (2.14)$$

Операцию свертки в (2.13) и (2.14) называют *линейной сверткой*. На практике длину реакции ограничивают до длины воздействия.

2.4. Разностное уравнение

Второй универсальной формой представления линейного оператора F в (2.5) является линейное разностное преобразование¹, и этому соответствует соотношение вход/выход ЛДС в виде *разностного уравнения* (РУ)

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x[(n-i)T] - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y[(n-k)T], \quad (2.15)$$

где:

- b_i, a_k — коэффициенты РУ (вещественные константы);
- iT, kT — значения задержек воздействия и реакции соответственно;
- $(N-1)$ и $(M-1)$ — константы, определяющие максимальную задержку воздействия и реакции соответственно, где

$$(N-1) \leq (M-1). \quad (2.16)$$

¹ При переходе от непрерывного времени к дискретному производные заменяются конечными разностями, а линейные дифференциальные преобразования — линейными разностными преобразованиями [24].

Параметрами ЛДС называют коэффициенты разностного уравнения.

Соотношение вход/выход ЛДС в виде разностного уравнения обычно называют ее *математической моделью*.

В линейных аналоговых системах линейный оператор F представлен линейным дифференциальным преобразованием, и линейное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} - \sum_{k=1}^{M-1} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k},$$

где b_i , a_k — коэффициенты уравнения (вещественные константы), взаимосвязанные со значениями сопротивлений, индуктивностей и емкостей в аналоговой цепи.

Дифференциальное уравнение решается с помощью одного из методов (*алгоритмов*) численного интегрирования. Выбор метода — отдельная задача [41], однако все подобные методы являются приближенными, т. е. вносят методическую погрешность. При неудачно выбранном методе эта погрешность может оказаться нарастающей, что приведет к непредсказуемому результату.

В разностном уравнении (2.15) вычисление отсчетов реакции $y(nT)$, $n = 0, 1, \dots$, выполняется *методом прямой подстановки* при ННУ, при этом методическая погрешность отсутствует.

Следовательно, *разностное уравнение* непосредственно описывает *алгоритм вычисления реакции при известных параметрах ЛДС*, что стало возможным при переходе от непрерывного времени к дискретному $t \rightarrow nT$.

В шкале дискретного нормированного времени (1.1) разностное уравнение (2.15) принимает вид

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k). \quad (2.17)$$

Пример 2.3. Определить первые три отсчета реакции по разностному уравнению (2.17).

Решение.

$$y(0) = b_0 x(0) + b_1 x(-1) + \dots - a_1 y(-1) - \dots = b_0 x(0);$$

$$y(1) = b_0 x(1) + b_1 x(0) + b_2 x(-1) + \dots - a_1 y(0) - a_2 y(-1) - \dots =$$

$$= b_0 x(1) + b_1 x(0) - a_1 y(0);$$

$$y(2) = b_0 x(2) + b_1 x(1) + b_2 x(0) + b_3 x(-1) + \dots - a_1 y(1) - a_2 y(0) - a_3 y(-1) - \dots =$$

$$= b_0 x(2) + b_1 x(1) + b_2 x(0) - a_1 y(1) - a_2 y(0). \blacktriangleleft$$

Линейная дискретная система, соотношение вход/выход которой описывается в виде разностного уравнения, отвечает условиям физической реализуемости:

□ при ННУ реакция не может возникнуть раньше воздействия.

Если воздействие поступило в момент времени $n = 0$, то все значения реакции до этого момента будут нулевыми:

$$y(-1) = b_0 x(-1) = 0 \text{ и т. д.};$$

- при ННУ значения реакции в каждый момент времени n зависят от текущего и предшествующих отсчетов воздействия и не зависят от его последующих отсчетов, как это следует из примера 2.3.

Пример 2.4. Решить разностное уравнение

$$y(n) = x(n) - 0,5y(n-1)$$

при заданном воздействии

$$x(n) = 0,1^n.$$

Решение. Вычисление первых 5 отсчетов реакции при ННУ приведено в табл. 2.1. ▲

Таблица 2.1. Вычисление реакции методом прямой подстановки

n	Воздействие	Реакция
0	$x(0) = 1$	$y(0) = x(0) - 0,5y(-1) = 1 - 0,5 \cdot 0 = 1$
1	$x(1) = 0,1$	$y(1) = x(1) - 0,5y(0) = 0,1 - 0,5 \cdot 1 = -0,4$
2	$x(2) = 0,01$	$y(2) = x(2) - 0,5y(1) = 0,01 - 0,5 \cdot (-0,4) = 0,21$
3	$x(3) = 0,001$	$y(3) = x(3) - 0,5y(2) = 0,001 - 0,5 \cdot 0,21 = -0,104$
4	$x(4) = 0,0001$	$y(4) = x(4) - 0,5y(3) = 0,0001 - 0,5 \cdot (-0,104) = 0,0521$

2.5. Рекурсивные и нерекурсивные системы

Линейная дискретная система с соотношением вход/выход в виде РУ (2.17):

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k)$$

называется *рекурсивной*, если хотя бы один из коэффициентов a_k , $k=1, 2, \dots, (M-1)$, не равен нулю.

С учетом (2.16), *порядок рекурсивной* ЛДС будет равен максимальной задержке *реакции* $(M-1)$.

При ННУ реакция $y(n)$ *рекурсивной* ЛДС в каждый момент времени n определяется:

- текущим отсчетом воздействия $x(n)$;
- предысторией воздействия $x(n-i)$, $i=1, 2, \dots, (N-1)$;
- предысторией реакции $y(n-k)$, $k=1, 2, (M-1)$.

Приведем примеры разностных уравнений простейших рекурсивных ЛДС:

- первого порядка

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1); \quad (2.18)$$

- второго порядка

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2). \quad (2.19)$$

Линейная дискретная система называется *нерекурсивной*, если все коэффициенты a_k разностного уравнения (2.17) равны нулю

$$a_k = 0, \quad k=1, 2, \dots, (M-1).$$

Для *нерекурсивной* ЛДС разностные уравнения (2.15) и (2.17) принимают вид соответственно:

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i [x(n-i)T]; \quad (2.20)$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i). \quad (2.21)$$

Порядок нерекурсивной ЛДС равен максимальной задержке *воздействия* ($N-1$).

При ННУ реакция $y(n)$ *нерекурсивной* ЛДС в каждый момент времени n определяется:

- текущим отсчетом воздействия $x(n)$;
- предысторией воздействия $x(n-i), i=1, 2, \dots, (N-1)$.

Приведем пример разностного уравнения простейшей нерекурсивной ЛДС второго порядка:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2). \quad (2.22)$$

2.6. Свойство памяти линейных дискретных систем

Свойство памяти системы подразумевает ее способность "помнить" предысторию *воздействия* при вычислении реакции в текущий момент времени. Длительность предыстории (количество предшествующих отсчетов воздействия) определяет *длительность памяти*.

Рассмотрим свойство памяти нерекурсивных и рекурсивных ЛДС.

Согласно разностному уравнению *нерекурсивной* ЛДС (2.21), при вычислении реакции $y(n)$ в каждый момент времени система "помнит" ($N-1$) предшествующих отсчетов воздействия. Следовательно, нерекурсивная ЛДС обладает свойством памяти, ее длительность *конечна* и равна ($N-1$).

Согласно разностному уравнению *рекурсивной* ЛДС (2.17), каждый текущий отсчет реакции $y(n) = y_n$ можно выразить через предшествующие отсчеты воздействия $x(n) = x_n$:

$$\begin{aligned}y_0 &= b_0 x_0; \\y_1 &= b_0 x_1 + b_1 x_0 - \underline{a_1 y_0} = b_0 x_1 + b_1 x_0 - \underline{a_1 (b_0 x_0)} = b_0 x_1 + (b_1 - a_1 b_0) x_0; \\y_2 &= b_0 x_2 + b_1 x_1 + b_2 x_0 - \underline{a_2 y_1} - \underline{a_2 y_0} = \\&= b_0 x_2 + b_1 x_1 + b_2 x_0 - \underline{a_1 [b_0 x_1 + (b_1 - a_1 b_0) x_0]} - \underline{a_2 (b_0 x_0)} = \\&= b_0 x_2 + (b_1 - a_1 b_0) x_1 + [b_2 - a_1 (b_1 - a_1 b_0) - a_2 b_0] x_0;\end{aligned}$$

...

При вычислении реакции $y(n)$ в каждый момент времени система "помнит" все предшествующие отсчеты воздействия. Следовательно, рекурсивная ЛДС обладает свойством памяти и ее длительность при $n \rightarrow \infty$ бесконечна.

Это свойство памяти рекурсивных ЛДС объясняется наличием обратной связи, благодаря чему, любой ненулевой отсчет воздействия циркулирует в системе бесконечно. С течением времени он затухает (его вес уменьшается), но присутствует, по крайней мере, теоретически.

2.7. Системы с конечной и бесконечной импульсной характеристикой

Определим импульсные характеристики рекурсивных и нерекурсивных ЛДС. Для этого рассмотрим их вычисления на простых примерах и результаты обобщим.

Пример 2.5. Вычислить импульсную характеристику *нерекурсивной* ЛДС второго порядка, соотношение вход/выход которой описывается РУ (2.22)

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2).$$

Решение. Согласно определению, ИХ — это реакция на цифровой единичный импульс при ННУ, поэтому, выполнив замену:

$$\begin{cases} x(n) \rightarrow u_0(n); \\ y(n) \rightarrow h(n), \end{cases} \quad (2.23)$$

перепишем РУ в виде

$$h(n) = b_0 u_0(n) + b_1 u_0(n-1) + b_2 u_0(n-2)$$

и решим его методом прямой подстановки при ННУ:

$$\begin{aligned}h(0) &= b_0 u_0(0) + b_1 u_0(-1) + b_2 u_0(-2) = b_0 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 = b_0; \\h(1) &= b_0 u_0(1) + b_1 u_0(0) + b_2 u_0(-1) = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 = b_1; \\h(2) &= b_0 u_0(2) + b_1 u_0(1) + b_2 u_0(0) = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 1 = b_2;\end{aligned}$$

$$h(3) = b_0 u_0(3) + b_1 u_0(2) + b_2 u_0(1) = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 = 0 ; \\ h(n) = 0 \text{ при } n \geq 3 . \blacktriangleleft$$

Распространяя полученные результаты на нерекурсивную ЛДС произвольного порядка, приходим к следующим выводам:

- нерекурсивная ЛДС имеет *конечную* импульсную характеристику (КИХ);
- нерекурсивная ЛДС и КИХ-система — тождественные понятия;
- отсчеты импульсной характеристики нерекурсивной ЛДС равны коэффициентам разностного уравнения:

$$h(n) = b_i, \quad n=i=0, 1, \dots, (N-1). \quad (2.24)$$

Пример 2.6. Вычислить импульсную характеристику *рекурсивной* ЛДС первого порядка, соотношение вход/выход которой описывается РУ (2.18), где $b_1 = 0$:

$$y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1).$$

Решение. Выполним замену (2.23), перепишем РУ в виде

$$h(n) = b_0 u_0(n) - a_1 h(n-1)$$

и решим его методом прямой подстановки при ННУ:

$$\begin{aligned} h(0) &= b_0 u_0(0) - a_1 h(-1) = b_0; \\ h(1) &= b_0 u_0(1) - a_1 h(0) = -a_1 b_0; \\ h(2) &= b_0 u_0(2) - a_1 h(1) = -a_1 (-a_1 b_0) = a_1^2 b_0; \\ h(3) &= b_0 u_0(3) - a_1 h(2) = -a_1 (a_1^2 b_0) = -a_1^3 b_0; \\ &\dots \\ h(n) &= (-1)^n a_1^n b_0, \quad n = 4, 5, \dots \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Распространяя полученные результаты на рекурсивную ЛДС произвольного порядка, приходим к следующим выводам:

- рекурсивная ЛДС имеет *бесконечную* импульсную характеристику (БИХ);
- рекурсивная ЛДС и БИХ-система — тождественные понятия.

2.8. Устойчивость линейных дискретных систем

Определение: ЛДС называется *устойчивой*, если при ограниченном воздействии

$$\max_n |x(n)| \leq R_x$$

и произвольных, но ограниченных начальных условиях реакция будет ограниченной:

$$\max_n |y(n)| \leq R_y,$$

где R_x , R_y — любые сколь угодно большие положительные числа, не равные бесконечности.

Существует два критерия устойчивости ЛДС. В этой главе, посвященной описанию ЛДС во временной области, приводится первый критерий, позволяющий оценить устойчивость ЛДС по ее импульсной характеристики.

2.9. Первый критерий устойчивости

Первый критерий устойчивости формулируется следующим образом: для того чтобы линейная дискретная система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие абсолютной сходимости ряда отсчетов импульсной характеристики:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty. \quad (2.25)$$

Доказательство. Определим реакцию ЛДС по формуле свертки (2.10)

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) x(n-m).$$

Для модуля реакции справедливо соотношение

$$|y(n)| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} h(m) x(n-m) \right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)| |x(n-m)| = \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)| |x(n-m)|.$$

Оценим максимальное значение $|y(n)|$, подставив вместо отсчетов воздействия $|x(n-m)|$ их максимально допустимую величину R_x :

$$\max_n |y(n)| = R_x \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)|.$$

Если реакция ограничена:

$$R_x \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)| \leq R_y,$$

необходимо, чтобы выполнялось условие (2.25), и для того чтобы реакция была ограничена, достаточно выполнения того же условия.

Первый критерий позволяет классифицировать ЛДС по признаку устойчивости:

□ нерекурсивные ЛДС (КИХ-системы) — устойчивы по определению:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |h(n)| \neq \infty;$$

□ рекурсивные ЛДС (БИХ-системы) — требуют проверки на устойчивость.

Пример 2.7. Проверить на устойчивость рекурсивную ЛДС с импульсной характеристикой в виде дискретной экспоненты (1.9)

$$h(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Решение. Согласно критерию (2.25):

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n < \infty,$$

ЛДС будет устойчивой в области сходимости бесконечной геометрической прогрессии $|a| < 1$. ▲

В этом простейшем примере ИХ задана аналитической формулой, которая позволила свести оценку сходимости ряда (2.25) к определению области сходимости бесконечной геометрической прогрессии.

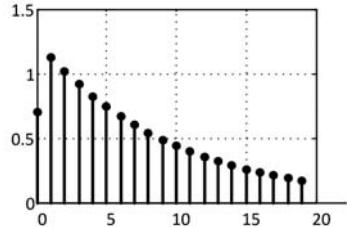
Однако в общем случае оценка устойчивости ЛДС по первому критерию практически затруднена.

Второй критерий устойчивости, более удобный для практического применения, рассматривается в разд. 4.6. Основная идея его вывода раскрыта в рассмотренном простейшем примере: необходимо получить такое обобщенное аналитическое представление импульсной характеристики, которое позволит свести *оценку устойчивости к определению области сходимости бесконечной геометрической прогрессии*.

Там же будет показано, что при проверке устойчивости по первому критерию возможна ситуация, когда он выполняется, а ЛДС — не устойчива, что исключено для второго критерия.

Для этого необходимо перейти к описанию ЛДС в z -области, которое рассматривается в главе 4, что предполагает знакомство с математическим аппаратом Z -преобразования, которому посвящена следующая глава.

ГЛАВА 3



Z-преобразование

В теории линейных дискретных систем Z -преобразование играет ту же роль, что и преобразование Лапласа в теории линейных аналоговых систем. Описание линейных систем в области комплексной переменной позволило существенно упростить их анализ и синтез.

В этой главе рассматривается преемственная связь Z -преобразования с преобразованием Лапласа, математический аппарат Z -преобразования и его связь с преобразованием Фурье.

3.1. Преобразование Лапласа

Преобразованием Лапласа (прямым односторонним) функции $x(t)$ называют следующий интеграл (интеграл Лапласа):

$$X_a(p) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt, \quad (3.1)$$

где комплексная переменная p — *оператор Лапласа*¹

$$p = \sigma + j\omega. \quad (3.2)$$

Функцию $x(t)$ (вещественную или комплексную, равную нулю в области отрицательного времени) называют *оригиналом*, а комплексную функцию $X_a(p)$ — ее *L-изображением* (изображением по Лапласу).

В $X_a(p)$ добавлен индекс "а" от слова "аналоговый" во избежание путаницы с преобразованием последовательности.

Преобразование Лапласа возможно только для ограниченного класса функций $x(t)$ (непрерывных или кусочно-непрерывных и однозначных) и справедливо только в области абсолютной сходимости интеграла:

¹ В математической и англоязычной литературе для обозначения оператора Лапласа обычно используется буква s .

$$\int_0^{\infty} |x(t)e^{-pt}| dt = \int_0^{\infty} |x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}| dt = \int_0^{\infty} |x(t)| |e^{-j\omega t}| e^{-\sigma t} dt = \int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty,$$

определенной абсциссой абсолютной сходимости σ_0 . На комплексной p -плоскости это область, где $\operatorname{Re}(p) = \sigma \geq \sigma_0$.

В области дискретного времени $t \rightarrow nT$, где непрерывной функции $x(t)$ соответствует последовательность $x(nT)$, от преобразования Лапласа (3.1) переходят к *дискретному преобразованию Лапласа* в виде ряда:

$$X(e^{pT}) = D\{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-pnT}, \quad (3.3)$$

которое справедливо только в области его абсолютной сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)e^{-pnT}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)| |e^{-j\omega nT}| e^{-\sigma nT} = \sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)| e^{-\sigma nT} < \infty.$$

3.2. Z-преобразование

Z-преобразование получено на основе дискретного преобразования Лапласа (3.3) в результате замены переменных

$$z = e^{pT}. \quad (3.4)$$

Z-преобразованием (прямым односторонним) последовательности $x(n) = x(nT)$ называют следующий ряд:

$$X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}, \quad (3.5)$$

где Z — оператор прямого Z-преобразования.

Последовательность $x(n)$ (вещественную или комплексную, равную нулю в области отрицательного времени) называют *оригиналом*, а комплексную функцию $X(z)$ — ее *z-изображением*.

Z-преобразование (3.5) справедливо только в области абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(n) z^{-n}| < \infty, \quad (3.6)$$

которую называют *областью сходимости z-изображения*.

Для того чтобы найти область сходимости z-изображения, выполним следующие действия:

□ в (3.6) заменим модуль произведения произведением модулей

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(n) z^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)| |z^{-n}|;$$

- вынесем нулевое слагаемое за знак суммы

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)| |z^{-n}| = x(0) + \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| |z^{-n}|;$$

- представим сумму справа в виде

$$x(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|x(n)|^{1/n} |z^{-1}| \right)^n;$$

- обозначим максимум модуля последовательности

$$R = \max |x(n)|^{1/n}, \quad n=1, 2, \dots$$

Поскольку значение любого отсчета, в том числе и $x(0)$, всегда конечно, условие (3.6) выполняется, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} R |z^{-1}|^n < \infty,$$

что возможно только при

$$R |z^{-1}| < 1,$$

откуда получаем *область сходимости z-изображения*

$$|z| > R, \quad (3.7)$$

определенную *радиусом сходимости R*. На комплексной z-плоскости это область *вне* круга радиуса R (рис. 3.1).

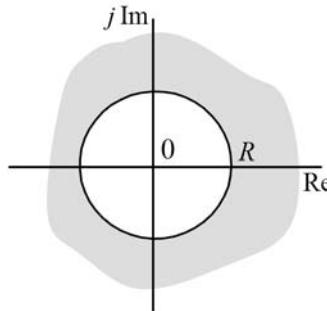


Рис. 3.1. Область сходимости z-изображения

3.3. Связь между z- и p-плоскостями

Как известно, комплексная переменная имеет две эквивалентные формы представления:

- алгебраическую;
□ показательную.

Комплексная переменная $p = \sigma + j\omega$ (3.2) представляется в *алгебраической форме*, и положение точки на комплексной p -плоскости задается декартовыми координатами σ_0 и ω_0 (рис. 3.2, a).

Комплексную переменную $z = e^{pT}$ (3.4) принято представлять в *показательной форме*:

$$z = re^{j\varphi}, \quad (3.8)$$

и положение точки на комплексной z -плоскости задавать полярными координатами — радиусом r и углом поворота φ вектора (рис. 3.2, b).

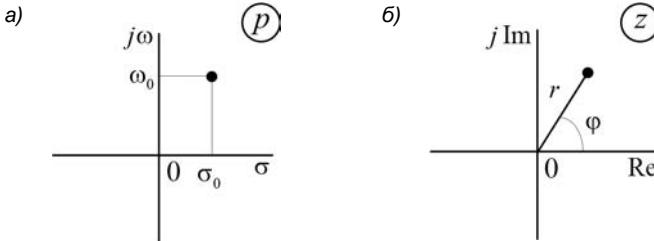


Рис. 3.2. Комплексные плоскости p (a) и z (б)

Показательной форме (3.8) соответствует алгебраическая форма

$$z = \xi + j\eta, \quad (3.9)$$

где значения ξ и η связаны со значениями r и φ известными соотношениями: радиус r является *модулем*, а угол φ — *аргументом* комплексной переменной z :

$$r = |z| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}; \quad (3.10)$$

$$\varphi = \arg(z) = \arctg\left(\frac{\eta}{\xi}\right). \quad (3.11)$$

Связь между z - и p -плоскостями определяется соотношением (3.4), которое при подстановке (3.2) принимает вид:

$$z = e^{pT} = e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}. \quad (3.12)$$

Раскрывая $e^{j\omega T}$ по формуле Эйлера:

$$z = e^{\sigma T} \cos(\omega T) + j e^{\sigma T} \sin(\omega T),$$

на основании (3.9) получаем соответствия для вещественной и мнимой осей z -плоскости:

$$\operatorname{Re} z = \xi \Rightarrow e^{\sigma T} \cos(\omega T);$$

$$j \operatorname{Im} z = j\eta \Rightarrow j e^{\sigma T} \sin(\omega T).$$

Подставляя (3.8) в (3.12):

$$z = e^{pT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = r e^{j\varphi}, \quad (3.13)$$

устанавливаем связь между переменными r и σ :

$$r = e^{\sigma T}$$

и переменными φ и ω :

$$\varphi = \omega T = \hat{\omega}. \quad (3.14)$$

Последнее раскрывает смысл *нормированной частоты* $\hat{\omega}$ (1.4): это угол φ на комплексной z -плоскости, измеряемый в радианах.

В силу периодичности экспоненты в (3.12):

$$e^{j\varphi} = e^{j\hat{\omega}} = e^{j(\hat{\omega} \pm 2\pi k)},$$

угол φ указывается с точностью до слагаемого $2\pi k$:

$$\varphi = \hat{\omega} \pm 2\pi k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.15)$$

но, как правило, представляет интерес *главное значение* аргумента в диапазоне

$$-\pi < \varphi \leq \pi, \quad (3.16)$$

и именно его подразумевают по умолчанию.

3.4. Отображение p -плоскости в z -плоскость

Используя связь между комплексными переменными z и p (3.13)

$$z = e^{pT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = r e^{j\varphi},$$

рассмотрим отображение p -плоскости в z -плоскость.

Приведем отображения, представляющие интерес для последующего анализа дискретных сигналов и линейных дискретных систем.

1. Начало координат p -плоскости отображается на z -плоскости в точку $z = 1$ (рис. 3.3):

$$z = e^{pT} = e^{0 \cdot T} e^{j0 \cdot T} = r e^{j\varphi} = 1 \cdot e^{j0} = 1.$$

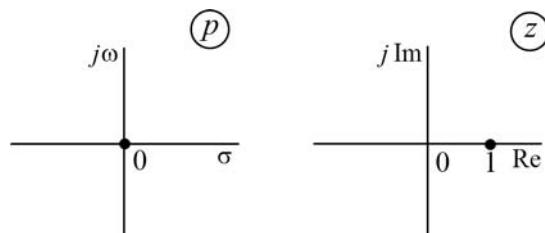


Рис. 3.3. Отображение начала координат p -плоскости на z -плоскость

2. Две точки $\omega = \pm\pi/T$ на оси частот p -плоскости отображаются на z -плоскости в одну точку $z = -1$ (рис. 3.4):

$$z = e^{pT} = e^{0 \cdot T} e^{\pm j \frac{\pi}{T} T} = r e^{j\varphi} = 1 \cdot e^{\pm j\pi} = -1.$$

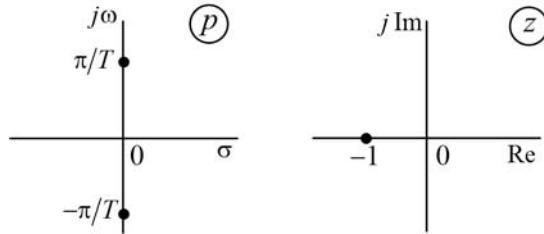


Рис. 3.4. Отображение двух точек оси частот p -плоскости в одну точку на z -плоскости

3. Две точки $\omega = \pm\pi/2T$ на оси частот p -плоскости отображаются на z -плоскости в две точки $z = \pm j$ (рис. 3.5):

$$z = e^{pT} = e^{0 \cdot T} e^{\pm j \frac{\pi}{2T} T} = r e^{j\varphi} = 1 \cdot e^{\pm j \frac{\pi}{2}} = \pm j.$$

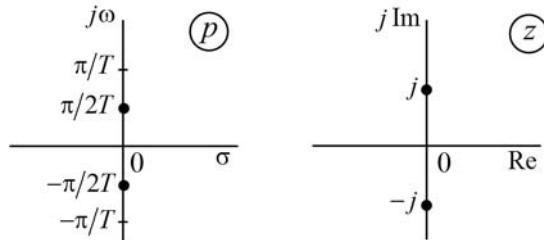


Рис. 3.5. Отображение двух точек оси частот p -плоскости в две точки на z -плоскости

4. Бесконечное множество точек $\omega = \pi/T \pm 2\pi k/T$, $k = 1, 2, \dots$, на оси частот p -плоскости отображается на z -плоскости в одну точку $z = -1$ (рис. 3.6):

$$z = e^{pT} = e^{0 \cdot T} e^{j\left(\frac{\pi T \pm 2\pi T k}{T}\right)} = r e^{j\varphi} = 1 \cdot e^{j(\pi \pm j 2\pi k)} = -1.$$

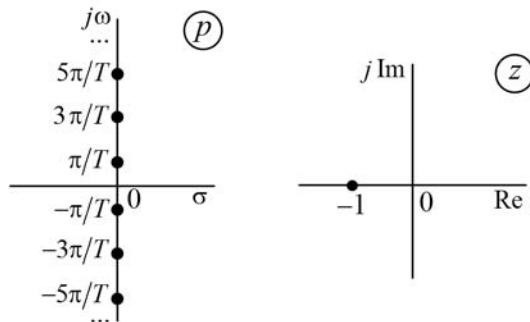


Рис. 3.6. Отображение бесконечного множества точек оси частот p -плоскости в одну точку на z -плоскости

При одинаковом радиусе $r = 1$ угол φ (3.15) принимает значения

$$\varphi = \hat{\omega} \pm 2\pi k \hat{\omega} = \pi \pm 2\pi k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

вследствие чего возникает *неоднозначность* отображения точек оси частот $j\omega$ на z -плоскость.

5. Отрезок оси частот $-\pi/T < \omega \leq \pi/T$ p -плоскости длиной $\Delta\omega = 2\pi/T = \omega_d$ отображается на z -плоскости в окружность единичного радиуса — *единичную окружность* (рис. 3.7):

$$z = e^{j\omega T} = e^{0 \cdot T} e^{j\omega T} = r e^{j\varphi} = 1 \cdot e^{j\hat{\omega}}, \quad -\pi < \hat{\omega} \leq \pi \Rightarrow \Delta\hat{\omega} = 2\pi.$$

В данном случае угол φ ограничен областью *главных значений* (3.16).

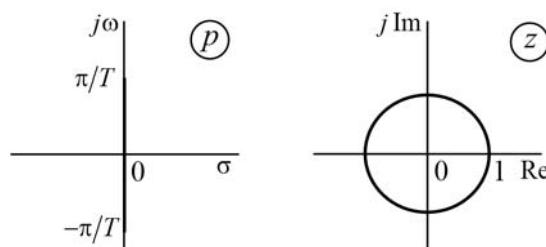


Рис. 3.7. Отображение отрезка оси частот p -плоскости в единичную окружность на z -плоскость

6. Ось частот p -плоскости $j\omega$ отображается на z -плоскости в периодическое повторение единичной окружности, одному обороту которой $\Delta\hat{\omega} = 2\pi$ соответствует отрезок оси длиной $\Delta\omega = 2\pi/T$.

Представим ось частот $j\omega$ в виде бесконечной последовательности отрезков между точками $\omega = \pi/T \pm 2\pi k/T$, $k = 1, 2, \dots$, (рис. 3.8).

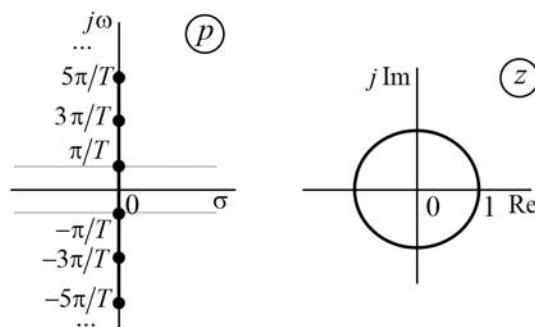


Рис. 3.8. Отображение оси частот p -плоскости в периодическое повторение единичной окружности на z -плоскости

Каждый отрезок длиной $\Delta\omega = 2\pi/T$ отображается на z -плоскости в единичную окружность, а их бесконечная последовательность в ее периодическое продолжение, вследствие чего возникает *неоднозначность отображения точек p -плоскости на z -плоскость*.

Взаимно однозначное отображение точек обеспечивается только для части p -плоскости, выделенной на рис. 3.8 параллельными линиями, где

$$-\pi/T < \omega \leq \pi/T \Rightarrow \Delta\omega = 2\pi/T,$$

а угол $\varphi = \hat{\omega}$ ограничен областью *главных значений* (3.16):

$$-\pi < \hat{\omega} \leq \pi \Rightarrow \Delta\hat{\omega} = 2\pi.$$

7. Левая p -полуплоскость отображается на z -плоскости в круг единичного радиуса — *единичный круг*.

Представим левую p -полуплоскость в виде бесконечной последовательности ее частей, ограниченных параллельными линиями между соседними точками $\omega = \pi/T \pm 2\pi k/T$, $k = 1, 2, \dots$ (рис. 3.9).

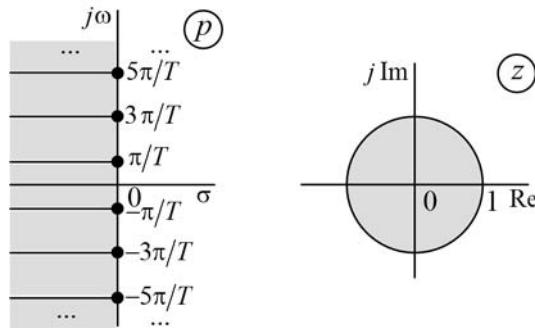


Рис. 3.9. Отображение левой p -полуплоскости в единичный круг на z -плоскости

Часть левой p -полуплоскости

$$\sigma \leq 0; \quad -\pi/T < \omega \leq \pi/T,$$

отображается на z -плоскости в единичный круг:

$$z = e^{pT} = e^{\sigma T} e^{j\hat{\omega}};$$

$$r \leq 1; \quad -\pi < \hat{\omega} \leq \pi \Rightarrow \Delta\hat{\omega} = 2\pi.$$

С учетом отмеченной выше неоднозначности, каждая выделенная часть левой p -полуплоскости отображается на z -плоскости в единичный круг, следовательно, *вся левая p -полуплоскость отображается в единичный круг*.

8. Правая p -полуплоскость отображается на z -плоскости в область вне единичного круга.

Представим аналогичным образом правую p -полуплоскость (рис. 3.10).

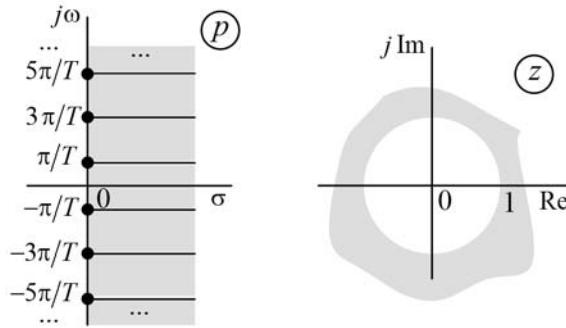


Рис. 3.10. Отображение правой p -полуплоскости в область вне единичного круга на z -плоскости

Часть правой p -полуплоскости

$$\sigma > 0; \quad -\pi/T < \omega \leq \pi/T,$$

отображается на z -плоскости в область вне единичного круга:

$$z = e^{pT} = e^{\sigma T} e^{j\hat{\omega}};$$

$$r > 1; \quad -\pi < \hat{\omega} \leq \pi \Rightarrow \Delta\hat{\omega} = 2\pi.$$

С учетом отмеченной выше неоднозначности, каждая выделенная часть правой p -полуплоскости отображается на z -плоскости в область вне единичного круга, следовательно, вся правая p -полуплоскость отображается в область вне единичного круга.

3.5. Основные свойства Z-преобразования

Приведем следующие основные свойства Z-преобразования.

□ **Линейность:** z -изображение линейной комбинации последовательностей равно линейной комбинации их z -изображений¹:

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) + \dots \Leftrightarrow X(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z) + \dots \quad (3.17)$$

Доказательство следует из определения Z-преобразования (3.5):

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} [a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) + \dots] z^{-n} = a_1 \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n) z^{-n} + \\ &+ a_2 \sum_{n=0}^{\infty} x_2(n) z^{-n} + \dots = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z) + \dots \end{aligned}$$

□ **Теорема о задержке:** z -изображение задержанной последовательности $x(n-m)$, $m > 0$, равно z -изображению последовательности $x(n)$, умноженному на z^{-m} :

¹ Двусторонняя стрелка отображает взаимно однозначную связь.

$$\begin{aligned} x(n) &\Leftrightarrow X(z) \\ x(n-m) &\Leftrightarrow X(z)z^{-m}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Доказательство. Подставим $x(n-m)$ в (3.5) и выполним замену переменных $k = n - m \rightarrow n = k + m$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n-m)z^{-n} = \sum_{k+m=0}^{\infty} x(k)z^{-(k+m)} = z^{-m} \sum_{k=-m}^{\infty} x(k)z^{-k}.$$

Разобьем сумму на две:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n-m)z^{-n} = z^{-m} \left[\sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \right].$$

С учетом равенства $x(k)|_{k<0} = 0$ получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n-m)z^{-n} = z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = X(z)z^{-m}.$$

□ *Теорема о свертке:* z -изображение свертки последовательностей равно произведению z -изображений сворачиваемых последовательностей:

$$x(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) \\ \sum_{m=0}^{\infty} x_1(n-m)x_2(m) \end{cases} \Leftrightarrow X(z) = X_1(z)X_2(z). \quad (3.19)$$

В левой части (3.19) имеем последовательность $x(n)$, представляющую собой свертку последовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$ в двух вариантах ее записи.

Доказательство. Подставим в (3.5) свертку (3.19):

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) \right] z^{-n}$$

и изменим порядок суммирования

$$X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m) \left[\sum_{n=0}^{\infty} x_2(n-m)z^{-n} \right].$$

Применим к содержимому в квадратных скобках теорему о задержке (3.18):

$$X(z) = X_2(z) \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)z^{-m}.$$

Сумма представляет собой z -изображение последовательности $x_1(n)$, следовательно:

$$X(z) = X_1(z)X_2(z).$$

3.6. Таблица соответствий

Определяя для заданных последовательностей z -изображения, получим пары их взаимно однозначных соответствий, из которых составим *таблицу соответствий*.

Пример 3.1. Найти z -изображение цифрового единичного импульса $u_0(n)$ (1.6) и область его сходимости.

Решение. Подставив $u_0(n)$ (1.6) в (3.5), получаем искомое z -изображение (строка 1 в табл. 3.1)

$$U_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_0(n) z^{-n} = u_0(0) z^{-0} = 1.$$

Областью сходимости z -изображения $U_0(z)$ является вся комплексная z -плоскость. ◀

Пример 3.2. Найти z -изображение цифрового единичного скачка $u_1(n)$ (1.8) и область его сходимости.

Решение. Подставив $u_1(n)$ (1.8) в (3.5), получим ряд

$$U_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_1(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

в виде бесконечной геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad (3.20)$$

где $q = z^{-1}$. В области абсолютной сходимости этого ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |q|^n < \infty,$$

соответствующей

$$|q| < 1, \quad (3.21)$$

сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеет конечный предел, равный

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}. \quad (3.22)$$

Подставив $q = z^{-1}$ в (3.22), получаем искомое z -изображение (строка 2 в табл. 3.1)

$$U_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

и область его сходимости (3.21)

$$|z^{-1}| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|z|} < 1 \Rightarrow |z| > 1$$

с радиусом сходимости $R = 1$. ◀

Пример 3.3. Найти ее z -изображение дискретной экспоненты (1.9):

$$x(n) = \begin{cases} (\pm a_1)^n, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

и область его сходимости.

Решение. Подставив последовательность $x(n)$ в (3.5), получаем ряд, подобный (3.20), где $q = \pm az^{-1}$:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm a_1)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm a_1 z^{-1})^n,$$

откуда, применив формулу (3.22), получаем искомое z -изображение (строка 3 в табл. 3.1)

$$X(z) = \frac{1}{1 \mp a_1 z^{-1}}$$

и область его сходимости (3.21)

$$|a_1 z^{-1}| < 1 \Rightarrow \frac{|a_1|}{|z|} < 1 \Rightarrow |z| > |a_1|$$

с радиусом сходимости $R = |a_1|$. ◀

Пример 3.4. Найти z -изображение последовательности

$$x(n) = \begin{cases} r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

и область его сходимости.

Решение. Подставим последовательность $x(n)$ в (3.5):

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*} z^{-n} = \frac{1}{\sin \varphi_*} \sum_{n=0}^{\infty} r_*^n \sin[(n+1)\varphi_*] z^{-n}$$

и используем для синуса формулу Эйлера:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{\sin \varphi_*} \sum_{n=0}^{\infty} r_*^n \frac{e^{j(n+1)\varphi_*} - e^{-j(n+1)\varphi_*}}{2j} z^{-n} = \\ &= \frac{1}{2j \sin \varphi_*} \left[\sum_{n=0}^{\infty} r_*^n e^{j(n+1)\varphi_*} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} r_*^n e^{-j(n+1)\varphi_*} z^{-n} \right] = \\ &= \frac{1}{2j \sin \varphi_*} \left[e^{j\varphi_*} \sum_{n=0}^{\infty} (r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})^n - e^{-j\varphi_*} \sum_{n=0}^{\infty} (r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})^n \right]. \end{aligned}$$

Каждая из сумм представляет собой ряд, подобный (3.20), где $q = r_* e^{j\varphi_*} z^{-1}$ и $q = r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1}$ соответственно, откуда, применив формулу (3.22), получаем z -изображение

$$X(z) = \frac{1}{2j \sin \varphi_*} \left[\frac{e^{j\varphi_*}}{1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1}} - \frac{e^{-j\varphi_*}}{1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1}} \right]$$

и область его сходимости (3.21)

$$\left| r_* e^{\pm j\varphi_*} z^{-1} \right| < 1 \Rightarrow \frac{r_*}{|z|} < 1 \Rightarrow |z| > r_*$$

с радиусом сходимости $R = r_*$.

Приведем к общему знаменателю дроби в квадратных скобках

$$X(z) = \frac{1}{2j \sin \varphi_*} \left[\frac{e^{j\varphi_*} - r_* z^{-1} - e^{-j\varphi_*} + r_* z^{-1}}{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})} \right] = \frac{1}{2j \sin \varphi_*} \left[\frac{e^{j\varphi_*} - e^{-j\varphi_*}}{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})} \right].$$

Сворачивая экспоненты

$$\frac{e^{j\varphi_*} - e^{-j\varphi_*}}{2j} = \sin \varphi_*,$$

получим z -изображение в виде дробно-рациональной функции 2-го порядка с разложением знаменателя на простейшие множители:

$$X(z) = \frac{1}{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})}. \quad (3.23)$$

Полюсами такой функции называют значения z , при которых ее знаменатель обращается в нуль. Умножив числитель и знаменатель на z^2 :

$$X(z) = \frac{z^2}{(z - r_* e^{j\varphi_*})(z - r_* e^{-j\varphi_*})},$$

находим корни знаменателя — комплексно сопряженные полюсы, для обозначения которых принято использовать символ "звездочка" (*):

$$z_{*1,2} = r_* e^{\pm j\varphi_*}. \quad (3.24)$$

Умножив простейшие множители в знаменателе (3.23)

$$X(z) = \frac{1}{1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1} - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1} + r_*^2 z^{-2}} = \frac{1}{1 - r_* (e^{-j\varphi_*} + e^{j\varphi_*}) z^{-1} + r_*^2 z^{-2}}$$

и свернув экспоненты в круглых скобках, получаем z -изображение $X(z)$ в виде дробно-рациональной функции с вещественными коэффициентами

$$X(z) = \frac{1}{1 - 2r_* \cos \varphi_* z^{-1} + r_*^2 z^{-2}},$$

которую принято записывать в виде (строка 4 в табл. 3.1)

$$X(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

где:

$$a_1 = -2r_* \cos \varphi_*; \quad (3.25)$$

$$a_2 = r_*^2. \quad (3.26)$$

Для последовательностей в строках 5, 6 табл. 3.1 z -изображения легко найти самостоятельно с помощью аналогичного приема. ▲

Таблица 3.1. Таблица соответствий

№	Последовательность	z -изображение
1	$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$	$U_0(z) = 1$
2	$u_1(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0 \end{cases}$	$U_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$
3	$x(n) = (\pm a_1)^n$	$X(z) = \frac{1}{1 \mp a_1 z^{-1}}$
4	$x(n) = r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*},$ $r_* = \sqrt{a_2}; \varphi_* = \arccos\left(\frac{-a_1}{2r_*}\right)$	$X(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$ $a_1 = -2r_* \cos \varphi_*; a_2 = r_*^2$
5	$x(n) = r_*^n \sin(\varphi_* n);$ $r_* = \sqrt{a_2}; \varphi_* = \arccos\left(\frac{-a_1}{2r_*}\right)$	$X(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}};$ $a_1 = -2r_* \cos \varphi_*; a_2 = r_*^2; b_1 = r_* \sin \varphi_*$
6	$x(n) = r_*^n \cos(\varphi_* n);$ $r_* = \sqrt{a_2}; \varphi_* = \arccos\left(\frac{-a_1}{2r_*}\right)$	$X(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}};$ $a_1 = -2r_* \cos \varphi_*; a_2 = r_*^2; b_1 = -r_* \cos \varphi_*$

Покажем, как пользоваться таблицей соответствий на примерах.

Пример 3.5. Найти z -изображение последовательности

$$x(n) = b_0(-a_1)^n + b_1(-a_1)^{n-1}.$$

Решение. Согласно свойству линейности (3.17) и теореме о задержке (3.18), z -изображение последовательности равно

$$X(z) = b_0 Z\{(-a_1)^n\} + b_1 z^{-1} Z\{(-a_1)^n\}.$$

В табл. 3.1 находим соответствие (строка 3):

$$x(n) = (-a_1)^n \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1}},$$

следовательно:

$$X(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}} + \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}},$$

откуда получаем искомое z -изображение

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}. \blacktriangleleft$$

Пример 3.6. Найти z -изображение последовательности

$$x(n) = b_0 r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*} + b_1 r_*^{n-1} \frac{\sin(n\varphi_*)}{\sin \varphi_*} + b_2 r_*^{n-2} \frac{\sin[(n-1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}.$$

Решение. Согласно свойству линейности (3.17) и теореме о задержке (3.18), z -изображение последовательности равно

$$X(z) = b_0 Z\left\{r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}\right\} + b_1 z^{-1} Z\left\{r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}\right\} + b_2 z^{-2} Z\left\{r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}\right\}.$$

В табл. 3.1 находим соответствие (строка 4):

$$x(n) = r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*} \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

следовательно:

$$X(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} + \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} + \frac{b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

откуда получаем искомое z -изображение

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

где $a_1 = -2r_* \cos \varphi_*$, $a_2 = r_*^2$. \blacktriangleleft

3.7. Обратное Z-преобразование

Последовательность (оригинал) $x(n)$ по известному z -изображению $X(z)$ находится с помощью *обратного Z-преобразования*

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz, \quad (3.27)$$

где Z^{-1} — оператор обратного Z-преобразования; C — любой замкнутый контур в области сходимости подынтегральной функции, охватывающий все ее особые точки (полюсы) и начало координат комплексной z -плоскости.

Вычислить оригинал непосредственно по формуле (3.27) достаточно сложно и в большинстве случаев невозможно. Однако если z -изображение $X(z)$ представляет собой *дробно-рациональную функцию* (именно этот случай будет представлять интерес в дальнейшем), то для определения обратного Z-преобразования существуют более простые способы на основе:

- теоремы Коши о вычетах;
- разложения z -изображения на простые дроби;
- таблицы соответствий.

3.7.1. Использование теоремы Коши о вычетах

Этот способ основан на использовании теоремы Коши о вычетах, в соответствии с которой вычисление интеграла (3.27) сводится к вычислению суммы

$$x(n) = \sum_{k=1}^K \text{Res}_{\alpha_k} [X(z) z^{n-1}], \quad (3.28)$$

где $\text{Res}_{\alpha_k} [X(z) z^{n-1}]$ называют вычетом¹ подынтегральной функции в особой точке — k -м полюсе α_k .

Если дробно-рациональная функция $X(z)$ имеет простые (не кратные, т. е. не равные между собой) полюсы, то вычет в простом k -м полюсе равен

$$\text{Res}_{\alpha_k} [X(z) z^{n-1}] = \lim_{z \rightarrow \alpha_k} [(z - \alpha_k) X(z) z^{n-1}]. \quad (3.29)$$

При наличии у дробно-рациональной функции $X(z)$ *кратных* полюсов вычет в полюсе α_k кратности l_k определяется по формуле

$$\text{Res}_{\alpha_k} [X(z) z^{n-1}] = \frac{1}{(l_k - 1)!} \lim_{z \rightarrow \alpha_k} \frac{d^{l_k-1}}{dz^{l_k-1}} [(z - \alpha_k)^{l_k} X(z) z^{n-1}]. \quad (3.30)$$

¹ Res — начальные буквы французского слова *residue* — остаток.

Пример 3.7. Найти последовательность (оригинал) по известному z -изображению

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha_1 z^{-1}}.$$

Решение. Умножив числитель и знаменатель на z

$$X(z) = \frac{z}{z - \alpha_1},$$

находим полюс (корень знаменателя)

$$\alpha_1 = \alpha_1.$$

Сумма (3.28) содержит один вычет (3.29), соответствующий последовательности

$$x(n) = \text{Res}_{\alpha_1} \left[(z - \alpha_1) X(z) z^{n-1} \right] = \lim_{z \rightarrow -\alpha_1} \left[(z - \alpha_1) \frac{z}{(z - \alpha_1)} z^{n-1} \right] = \lim_{z \rightarrow -\alpha_1} (z^n) = (\alpha_1)^n,$$

что подтверждается соотвествием в табл. 3.1 (строка 3):

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha_1 z^{-1}} \Leftrightarrow (\alpha_1)^n. \quad (3.31)$$

Пример 3.8. Найти последовательность (оригинал) по известному z -изображению

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0,5 z^{-1} + 0,06 z^{-2}}. \quad (3.32)$$

Решение. Умножив числитель и знаменатель на z^2 , получим дробно-рациональную функцию с вещественными полюсами $\alpha_1 = 0,2$, $\alpha_2 = 0,3$, которые легко определить по теореме Виета:

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0,5 z^1 + 0,06} = \frac{z^2}{(z - 0,2)(z - 0,3)}.$$

В сумме (3.28) имеем два слагаемых — два вычета (3.29).

Вычет в полюсе $\alpha_1 = 0,2$ равен

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\alpha_1} \left[X(z) z^{n-1} \right] &= \lim_{z \rightarrow 0,2} \left[(z - 0,2) \frac{z^2}{(z - 0,2)(z - 0,3)} z^{n-1} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0,2} \left[\frac{z^2}{(z - 0,3)} z^{n-1} \right] = \left(\frac{0,2^2}{-0,1} \right) 0,2 \cdot 2^{n-1} = \left(\frac{0,2}{-0,1} \right) 0,2 \cdot 0,2^{n-1} = -2 \cdot 0,2^n. \end{aligned}$$

Вычет в полюсе $\alpha_2 = 0,3$ равен

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\alpha_2} \left[X(z) z^{n-1} \right] &= \lim_{z \rightarrow 0,3} \left[(z - 0,3) \frac{z^2}{(z - 0,2)(z - 0,3)} z^{n-1} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0,3} \left[\frac{z^2}{(z - 0,2)} z^{n-1} \right] = \left(\frac{0,3^2}{0,1} \right) 0,3 \cdot 0,3^{n-1} = \left(\frac{0,3}{0,1} \right) 0,3 \cdot 0,3^{n-1} = 3 \cdot 0,3^n. \end{aligned}$$

Искомая последовательность равна сумме вычетов

$$x(n) = -2 \cdot 0,2^n + 3 \cdot 0,3^n. \blacktriangleleft \quad (3.33)$$

Пример 3.9. Найти последовательность (оригинал) по известному z -изображению

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0,25z^{-2}} = \frac{z^{-1}}{(1 - 0,5z^{-1})^2}.$$

Решение. Умножив числитель и знаменатель на z^2 , получим дробно-рациональную функцию с вещественным полюсом $\alpha_1 = -0,5$ кратности $l_1 = 2$ (два одинаковых полюса)

$$X(z) = \frac{z}{(z - 0,5)^2}.$$

Следовательно, сумма (3.28) содержит один вычет (3.30), соответствующий последовательности

$$\begin{aligned} x(n) &= \text{Res}_{\alpha_1} [X(z)z^{n-1}] = \frac{1}{(l_1-1)!} \lim_{z \rightarrow \alpha_1} \frac{d^{l_1-1}}{dz^{l_1-1}} [(z - \alpha_1)^{l_1} X(z)z^{n-1}] = \\ &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 0,5} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} [(z - 0,5)^2 X(z)z^{n-1}] = \lim_{z \rightarrow 0,5} \frac{d}{dz} \left[(z - 0,5)^2 \frac{z}{(z - 0,5)^2} z^{n-1} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0,5} \frac{d}{dz} [z^n] = \lim_{z \rightarrow 0,5} [nz^{n-1}] = n0,5^{n-1}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

3.7.2. Разложение z -изображения на простые дроби

Этот способ основан на представлении z -изображения в виде суммы простых дробей.

Если $X(z)$ — дробно-рациональная функция, порядок рациональной функции числителя меньше порядка рациональной функции знаменателя, и все полюсы простые (не кратные), то ее можно представить в виде суммы простых дробей

$$X(z) = \sum_{k=1}^{M-1} \left(\frac{A_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right), \quad (3.34)$$

где:

- α_k — простой k -й полюс (вещественное или комплексное число);
- A_k — константа разложения при k -м полюсе, всегда число того же типа, что и полюс α_k ;
- $(M-1)$ — количество полюсов α_k (и констант A_k).

Найдем оригинал z -изображения (3.34). Согласно свойству линейности (3.17)

$$x(n) = Z^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{M-1} \left(\frac{A_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right) \right\} = \sum_{k=1}^{M-1} A_k Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right\}$$

и соответственно (3.31), оригинал равен

$$x(n) = \sum_{k=1}^{M-1} A_k \alpha_k^n. \quad (3.35)$$

Если порядок рациональной функции числителя равен порядку рациональной функции знаменателя, то в (3.34) добавляется *вещественная* целая часть:

$$X(z) = A_0 + \sum_{k=1}^{M-1} \left(\frac{A_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right). \quad (3.36)$$

Используя соответствие в табл. 3.1 (строка 1), получаем оригинал

$$x(n) = A_0 u_0(n) + \sum_{k=1}^{M-1} A_k \alpha_k^n. \quad (3.37)$$

При кратных полюсах также применимо разложение дробно-рациональной функции $X(z)$ на простые дроби, однако определение оригинала в данном случае существенно усложняется. Необходимые формулы и пример расчета приводятся в [34].

Пример 3.10. Найти последовательность (оригинал) по известному z -изображению (3.32)

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0,5 z^{-1} + 0,06 z^{-2}}.$$

Решение. При известных простых полюсах $\alpha_1 = 0,2$, $\alpha_2 = 0,3$ представление $X(z)$ в виде суммы простых дробей (3.34) имеет вид

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - 0,2 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - 0,3 z^{-1}},$$

где A_1, A_2 — константы разложения при полюсах (вещественные числа), следовательно:

$$\frac{1}{1 - 0,5 z^{-1} + 0,06 z^{-2}} = \frac{A_1}{1 - 0,2 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - 0,3 z^{-1}}.$$

Разложив на простейшие множители знаменатель дроби в левой части равенства (3.53) и сложив дроби в правой части, получаем

$$\frac{1}{(1 - 0,2 z^{-1})(1 - 0,3 z^{-1})} = \frac{(A_1 + A_2) - (0,3 A_1 + 0,2 A_2) z^{-1}}{(1 - 0,2 z^{-1})(1 - 0,3 z^{-1})},$$

откуда имеем систему уравнений для констант разложения:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1; \\ 0,3 A_1 + 0,2 A_2 = 0, \end{cases}$$

решением которой будут их значения:

$$\begin{cases} A_1 = -2; \\ A_2 = 3, \end{cases}$$

что позволит представить z -изображение в виде суммы простых дробей (3.34):

$$X(z) = \frac{-2}{1 - 0,2z^{-1}} + \frac{3}{1 - 0,3z^{-1}}$$

и найти его оригинал (3.35) — последовательность, совпадающую с (3.33):

$$x(n) = -2 \cdot 0,2^n + 3 \cdot 0,3^n. \blacktriangleleft$$

3.7.3. Использование таблицы соответствий

В примерах 3.5—3.6 таблица соответствий применялась для прямого Z -преобразования. Покажем, как ею пользоваться при обратном Z -преобразовании.

Пример 3.11. Найти оригинал z -изображения

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}.$$

Решение. В табл. 3.1 находим соответствие (строка 3):

$$X(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \Rightarrow x(n) = a_1^n.$$

Согласно свойству линейности (3.17), оригинал равен сумме обратных Z -преобразований:

$$x(n) = b_0 Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \right\} + b_1 Z^{-1} \left\{ \frac{z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} \right\},$$

откуда, применив теорему о задержке (3.18), получаем искомый оригинал

$$x(n) = b_0 a^n + b_1 a^{n-1}. \blacktriangleleft$$

Пример 3.12. Найти оригинал z -изображения

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

Решение. В табл. 3.1 находим соответствие (строка 4):

$$X(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \Rightarrow x(n) = r_*^n \frac{\sin[(n+1)\phi_*]}{\sin \phi_*},$$

где $r_* = \sqrt{a_2}$, $\phi_* = \arccos \left(\frac{-a_1}{2r_*} \right)$.

Согласно свойству линейности (3.17), оригинал равен сумме обратных Z-преобразований:

$$X(z) = b_0 Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \right\} + b_1 Z^{-1} \left\{ \frac{z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \right\} + b_2 Z^{-1} \left\{ \frac{z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \right\},$$

откуда, применив теорему о задержке (3.18), получаем искомый оригинал

$$x(n) = b_0 r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*} + b_1 r_*^{n-1} \frac{\sin(n\varphi_*)}{\sin \varphi_*} + b_2 r_*^{n-2} \frac{\sin[(n-1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}. \blacktriangleleft$$

3.8. Z-преобразование и преобразование Фурье

Очевидно, что преемственная связь Z-преобразования последовательности с преобразованием Лапласа непрерывной функции должна сохраниться для их преобразований Фурье.

Преобразованием Фурье функции $x(t)$ (односторонним) называется пара взаимно однозначных преобразований:

□ прямого преобразования

$$X_a(j\omega) = \int_0^\infty x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.38)$$

□ и обратного преобразования

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.39)$$

Функцию $x(t)$ (вещественную или комплексную, равную нулю в области отрицательного времени) называют *оригиналом*, а комплексную функцию $X_a(j\omega)$ — ее *Фурье-изображением*.

Преобразование Фурье (3.38) возможно только для ограниченного класса функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям Дирихле (непрерывных или кусочно-непрерывных, однозначных, имеющих конечное число экстремумов и разрывов 1-го рода) и справедливо только при условии абсолютной сходимости интеграла:

$$\int_0^\infty |x(t) e^{-j\omega t}| dt = \int_0^\infty |x(t)| dt < \infty.$$

Отсюда следует, что преобразование Фурье справедливо для более узкого класса функций $x(t)$, чем преобразование Лапласа, и для функций этого класса преобразование Фурье можно считать частным случаем преобразования Лапласа при

$$p = j\omega, \quad (3.40)$$

т. е. на комплексной p -плоскости *Фурье-изображение функции* $x(t)$ совпадает с ее *L-изображением на оси $j\omega$* :

$$X_a(j\omega) = X_a(p) \Big|_{p=j\omega}.$$

В Z -преобразовании (3.5) комплексные переменные z и p связаны соотношением (3.4). При подстановке p (3.40) оно примет вид:

$$z = e^{pT} = e^{j\omega T}, \quad (3.41)$$

т. е. на комплексной z -плоскости *Фурье-изображение последовательности* $x(n)$ совпадает с ее *z-изображением на единичной окружности* $e^{j\omega T}$:

$$X(e^{j\omega T}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}}. \quad (3.42)$$

Преобразованием Фурье последовательности (прямым) называют ряд

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-j\omega T n}. \quad (3.43)$$

Последовательность $x(n)$ (вещественную или комплексную) называют *оригиналом*, а комплексную функцию $X(e^{j\omega T})$ — ее *Фурье-изображением*.

Преобразование Фурье (3.42) справедливо только при условии абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)| e^{-j\omega T n} < \infty. \quad (3.44)$$

В силу периодичности экспоненты (3.41) с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_d = 2\pi/T$:

$$e^{j\omega T} = e^{j\left(\frac{\omega \pm 2\pi k}{T}\right)T} = e^{j\omega T} e^{\pm j2\pi k} = e^{j\omega T}, \quad (3.45)$$

функция $X(e^{j\omega T})$ является *периодической*, поэтому ее можно представить в виде ряда Фурье

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega T n}, \quad (3.46)$$

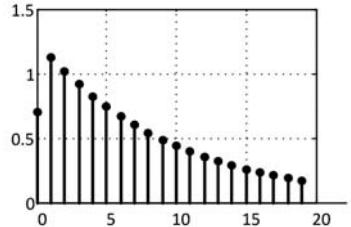
для которого должно выполняться условие абсолютной сходимости

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty.$$

Обратным преобразованием Фурье называют коэффициенты Фурье $x(n)$ ряда (3.46):

$$x(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega T n} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_0^{2\pi/T} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega T n} d\omega. \quad (3.47)$$

ГЛАВА 4



Описание линейных дискретных систем в z-области

Описание ЛДС в z -области позволяет ввести фундаментальное для линейных систем понятие передаточной функции, что существенно упрощает их анализ и синтез.

4.1. Передаточная функция

Основной характеристикой ЛДС в z -области является z -изображение ее импульсной характеристики, которое определяется с помощью Z -преобразования (3.5):

$$H(z) = Z\{h(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} \quad (4.1)$$

и называется *передаточной функцией*. Это ее математическое определение.

Соотношение вход/выход ЛДС во временной области описывается с помощью формулы свертки либо разностного уравнения. Рассмотрим их отображение в z -области.

Формуле свертки (2.10)–(2.11)

$$y(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} x(m)h(n-m); \\ \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) \end{cases}$$

в z -области, согласно теореме о свертке (3.19), соответствует соотношение вход/выход в виде произведения

$$Y(z) = H(z)X(z). \quad (4.2)$$

Это позволяет представить передаточную функцию как отношение

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (4.3)$$

и определить ее подобно передаточной функции линейных аналоговых систем.

Передаточной функцией $H(z)$ линейной дискретной системы называется отношение z -изображения реакции к z -изображению воздействия при нулевых начальных условиях.

Данное определение не противоречит математическому, поскольку импульсная характеристика $h(n)$ представляет собой реакцию на цифровой единичный импульс $u_0(n)$, а его z -изображение равно единице (см. табл. 3.1):

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Z\{h(n)\}}{Z\{u_0(n)\}} = Z\{h(n)\} = H(z).$$

Разностному уравнению (2.17)

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k)$$

в z -области, согласно свойству линейности (3.17) и теореме о задержке (3.18), соответствует уравнение

$$Y(z) = X(z) \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} - Y(z) \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k},$$

откуда, после приведения подобных слагаемых:

$$Y(z) \left[1 + Y(z) \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k} \right] = X(z) \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i},$$

получаем соотношение вход/выход

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} X(z) \quad (4.4)$$

и передаточную функцию, не зависящую ни от воздействия, ни от реакции:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}, \quad (4.5)$$

где b_i, a_k — ее вещественные коэффициенты (параметры ЛДС).

Напомним (см. разд. 2.4), что в *первой универсальной форме* представления линейного оператора F в (2.5) — *свертке* — параметры оператора F полностью определяются *импульсной характеристикой* ЛДС.

Во *второй универсальной форме* представления линейного оператора F — *линейном разностном преобразовании* — параметры оператора F полностью определяются *передаточной функцией* ЛДС.

Дробно-рациональная передаточная функция общего вида (4.5), где согласно (2.16) $(M - 1) \geq (N - 1)$, описывает рекурсивную ЛДС порядка $(M - 1)$.

В отличие от целых рациональных функций — многочленов с неотрицательными степенями переменной, — *рациональные* функции в числителе и знаменателе (4.5) представлены многочленами с *нулевой и отрицательными* степенями переменной z .

При подстановке в (4.5) $a_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, (M - 1)$, получаем передаточную функцию *нерекурсивной* ЛДС порядка $(N - 1)$ — *рациональную функцию*

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}, \quad (4.6)$$

которую, с учетом равенства (2.24), можно представить в тождественном виде:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}. \quad (4.7)$$

4.2. Нули и полюсы передаточной функции

Как любая дробно-рациональная функция, передаточная функция (4.5) характеризуется своими *полюсами* (особыми точками) и *нулями*.

Нулями называют значения z , при которых передаточная функция (4.5) равна нулю.

Полюсами (особыми точками) называют значения z , при которых знаменатель передаточной функции (4.5) равен нулю.

Полюсы и нули передаточных функций ЛДС находятся аналогично тому, как это делается для передаточных функций линейных аналоговых цепей. Однако в данном случае предварительно необходимо выразить $H(z)$ (4.5) относительно *положительных степеней* z , для чего числитель и знаменатель $H(z)$ следует умножить на z^{M-1} :

$$H(z) = \frac{z^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{z^{M-1} \left(1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k} \right)} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{(M-1)-i}}{z^{M-1} + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{(M-1)-k}}. \quad (4.8)$$

Далее целесообразно выделить два случая:

1. Порядок многочлена числителя равен порядку многочлена знаменателя

$$(N - 1) = (M - 1),$$

и передаточная функция (4.8) имеет вид

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{(M-1)-i}}{z^{M-1} + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{(M-1)-k}}.$$

Нулями данной передаточной функции являются корни уравнения числителя (корни числителя):

$$\sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{(M-1)-i} = 0,$$

а полюсами — корни уравнения знаменателя (корни знаменателя):

$$z^{M-1} + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{(M-1)-k} = 0.$$

Если среди полюсов или нулей встречаются одинаковые, их называют *кратными*.

2. Порядок многочлена числителя $(L - 1)$ меньше порядка многочлена знаменателя $(M - 1)$

$$(L - 1) < (M - 1),$$

и передаточная функция (4.8) имеет вид

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{L-1} b_i z^{(M-1)-i}}{z^{M-1} + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{(M-1)-k}},$$

где $(L - 1)$ может принимать значения

$$(L - 1) = 0, 1, \dots, (M - 2).$$

Полюсы передаточной функции $H(z)$ определяются так же, как в первом случае. Что касается нулей, то помимо $(L - 1)$ корней числителя добавляются нули $z = \infty$, кратность которых равна разности порядков многочленов знаменателя и числителя

$$(M - 1) - (L - 1) = M - L.$$

Как правило, эти нули не считаются информативными, поэтому часто их опускают.

Например, имеем передаточную функцию второго порядка

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

После умножения числителя и знаменателя на $z^{M-1} = z^2$ получим передаточную функцию

$$H(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2},$$

у которой порядок многочлена числителя $(L - 1) = 1$ на единицу меньше порядка многочлена знаменателя $(M - 1) = 2$:

$$(M - 1) - (L - 1) = M - L = 1.$$

Следовательно, данная передаточная функция имеет *два* нуля: один — корень числителя

$$b_1 z + b_2 = 0 \Rightarrow z_{\circ 1} = -\frac{b_2}{b_1}$$

и второй — неинформативный $z_{\circ 2} = \infty$.

Картой нулей и полюсов называют совокупность нулей и полюсов, представленных на z-плоскости одновременно с единичной окружностью. Нули изображаются кружками (\circ), а полюсы — звездочками (*) или крестиками (\times).

4.3. Связь передаточной функции с разностным уравнением

Из сопоставления передаточной функции общего вида (4.5) и разностного уравнения (2.17):

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \Leftrightarrow y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k)$$

очевидна их взаимосвязь:

□ числитель $H(z)$ связан с отсчетами *воздействия*:

- степень z^{-i} соответствует задержке отсчета воздействия $x(n-i)$;
- коэффициент b_i сохраняется.

Символически это можно записать следующим образом:

$$b_0 \Leftrightarrow b_0 x(n);$$

$$b_i z^{-i} \Leftrightarrow b_i x(n-i);$$

□ знаменатель $H(z)$ связан с отсчетами *реакции*:

- свободный член знаменателя $H(z)$ всегда равен 1 ($a_0 = 1$), он соответствует реакции $y(n)$ в левой части РУ;
- степень z^{-k} соответствует задержке отсчета реакции $y(n-k)$;
- у коэффициента a_k изменяется знак.

Символически это можно записать следующим образом:

$$1 \Leftrightarrow y(n);$$

$$a_k z^{-k} \Leftrightarrow -a_k y(n-k).$$

Пример 4.1. Записать разностные уравнения по заданным передаточным функциям:

$$H(z) = \frac{1 - 0,3z^{-1}}{1 + 0,9z^{-1}};$$

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0,8z^{-1} + 0,64z^{-2}};$$

$$H(z) = 1 - 0,5z^{-1} + 0,9z^{-2}.$$

Решение. Разностные уравнения имеют вид соответственно:

$$y(n) = x(n) - 0,3x(n-1) - 0,9y(n-1);$$

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + x(n-2) - 0,8y(n-1) - 0,64y(n-2);$$

$$y(n) = x(n) - 0,5x(n-1) + 0,9x(n-2). \blacktriangleleft$$

4.4. Рекурсивные звенья

Рекурсивными звеньями 1-го и 2-го порядков называют простейшие рекурсивные ЛДС 1-го и 2-го порядков с передаточными функциями соответственно:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1}}{1 + a_1z^{-1}}; \quad (4.9)$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}. \quad (4.10)$$

Рекурсивные звенья 2-го порядка с данной передаточной функцией также называют *биквадратными звеньями*.

Разностные уравнения рекурсивных звеньев 1-го и 2-го порядков имеют вид соответственно:

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) - a_1y(n-1); \quad (4.11)$$

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2). \quad (4.12)$$

Базовыми звеньями называют рекурсивные звенья 1-го и 2-го порядков, у которых числитель передаточной функции равен 1:

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1z^{-1}}; \quad (4.13)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}. \quad (4.14)$$

Им соответствуют разностные уравнения:

$$y(n) = x(n) - a_1y(n-1);$$

$$y(n) = x(n) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2).$$

С помощью таблицы соответствий (см. табл. 3.1) установим взаимно однозначное соответствие между передаточной функцией и импульсной характеристикой базовых звеньев:

- для базового звена 1-го порядка (табл. 3.1, строка 3)

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1}} \Leftrightarrow h(n) = (-a_1)^n; \quad (4.15)$$

- для базового звена 2-го порядка (табл. 3.1, строка 4)

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \Leftrightarrow h(n) = r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin\varphi_*}, \quad (4.16)$$

где r_* и φ_* — радиус и угол (рад) комплексно сопряженных полюсов (3.24):

$$z_{1,2} = r_* e^{\pm j\varphi_*}. \quad (4.17)$$

Значения r_* и φ_* связаны с коэффициентами a_1 , a_2 соотношениями:

$$r_* = \sqrt{a_2}; \quad (4.18)$$

$$\varphi_* = \arccos\left(\frac{-a_1}{2r_*}\right). \quad (4.19)$$

На основе соответствий (4.15)–(4.16), свойства линейности (3.17) и теоремы о задержке (3.18) установим взаимно однозначное соответствие между передаточной функцией и импульсной характеристикой не базовых звеньев:

- для рекурсивного звена 1-го порядка (см. пример 3.5)

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \Leftrightarrow h(n) = b_0(-a_1)^n + b_1(-a_1)^{n-1}, \quad (4.20)$$

где ИХ должна быть определена с учетом ННУ:

$$h(n) = \begin{cases} b_0(-a_1)^n, & n=0; \\ b_0(-a_1)^n + b_1(-a_1)^{n-1}, & n \geq 1; \end{cases} \quad (4.21)$$

- для рекурсивного звена 2-го порядка (см. пример 3.6)

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow h(n) = b_0 r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin\varphi_*} + b_1 r_*^{(n-1)} \frac{\sin(n\varphi_*)}{\sin\varphi_*} + b_2 r_*^{(n-2)} \frac{\sin[(n-1)\varphi_*]}{\sin\varphi_*}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где ИХ должна быть определена с учетом ННУ:

$$h(n) = \begin{cases} b_0 r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}, & n=0; \\ b_0 r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*} + b_1 r_*^{(n-1)} \frac{\sin(n\varphi_*)}{\sin \varphi_*}, & n=1; \\ b_0 r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*} + b_1 r_*^{(n-1)} \frac{\sin(n\varphi_*)}{\sin \varphi_*} + b_2 r_*^{(n-2)} \frac{\sin[(n-1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}, & n \geq 2. \end{cases} \quad (4.23)$$

Пример 4.2. Задана передаточная функция

$$H(z) = \frac{0,7 + 0,5z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}}. \quad (4.24)$$

Определить импульсную характеристику $h(n)$.

Решение. На основании (4.21) запишем ИХ с учетом ННУ:

$$h(n) = \begin{cases} 0,7(0,5)^n, & n=0; \\ 0,7(0,5)^n + 0,5(0,5)^{n-1}, & n \geq 1. \end{cases}$$

Пример 4.3. Задана передаточная функция

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,8z^{-1} + 0,64z^{-2}}. \quad (4.25)$$

Определить импульсную характеристику $h(n)$.

Решение. Вычислим радиус r_* (4.18) и аргумент φ_* (4.19):

$$r_* = \sqrt{a_2} = \sqrt{0,64} = 0,8;$$

$$\varphi_* = \arccos\left(\frac{-a_1}{2r_*}\right) = \arccos\left(\frac{0,8}{2 \cdot 0,8}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

На основании (4.23) запишем ИХ с учетом ННУ:

$$h(n) = \begin{cases} 0,8^n \frac{\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{3}\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}, & n=0; \\ 0,8^n \frac{\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{3}\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} + 0,8^{(n-1)} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}, & n=1; \\ 0,8^n \frac{\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{3}\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} + 0,8^{(n-1)} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} + 0,8^{(n-2)} \frac{\sin\left[(n-1)\frac{\pi}{3}\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}, & n \geq 2. \end{cases}$$

Рассмотрим процедуру вычисления *нулей и полюсов* рекурсивных звеньев 1-го и 2-го порядков.

□ *Рекурсивное звено 1-го порядка с передаточной функцией (4.9).*

Умножив числитель и знаменатель (4.9) на z :

$$H(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z + a_1},$$

находят *вещественный нуль* z_{\circ} (корень уравнения числителя)

$$z_{\circ} = -b_1/b_0$$

и *вещественный полюс* (корень уравнения знаменателя)

$$z_* = -a_1.$$

□ *Рекурсивное звено 2-го порядка с передаточной функцией (4.11).*

Сначала определяют *полюсы* (4.17)

$$z_{*,1,2} = r_* e^{\pm j\varphi_*}. \quad (4.26)$$

Значения r_* и угол φ_* вычисляют по формулам (4.18)–(4.20).

Согласно (3.14), угол *полюса* φ_* представляет собой нормированную частоту, поэтому его называют "*частотой полюса*".

Затем определяют *нули*. Умножив числитель и знаменатель на z^2 , находят корни уравнения *числителя*

$$b_0 z^2 + b_1 z + b_2 = 0$$

по известной формуле

$$z_{\circ,1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_0 b_2}}{2b_0}.$$

Если корни (*нули*) оказываются *комплексно сопряженными*, то их представляют в показательной форме

$$z_{\circ,1,2} = r_{\circ} e^{\pm j\varphi_{\circ}}, \quad (4.27)$$

где радиус r_{\circ} и угол в радианах φ_{\circ} определены в (3.10)–(3.11):

$$r_{\circ} = \sqrt{\xi_{\circ}^2 + \eta_{\circ}^2};$$

$$\varphi_{\circ} = \arctg \left(-\frac{\eta_{\circ}}{\xi_{\circ}} \right).$$

Согласно (3.14), угол φ_{\circ} нуля представляет собой нормированную частоту, поэтому его называют "*частотой нуля*".

Пример 4.4. Определить нули и полюсы передаточной функции звена 1-го порядка (4.24).

Решение. Умножив числитель и знаменатель (4.24) на z :

$$H(z) = \frac{0,7z + 0,5}{z - 0,5},$$

находим *вещественный* нуль z_0 (корень уравнения числителя)

$$z_0 = -\frac{0,5}{0,7} \approx -0,7143$$

и *вещественный* полюс (корень уравнения знаменателя)

$$z_* = 0,5. \blacktriangleleft$$

Пример 4.5. Определить нули и полюсы передаточной функции звена 2-го порядка (4.25).

Решение. Сначала определим *комплексно сопряженные полюсы* (4.26), где значения r_* и φ_* вычислены в примере 4.3:

$$z_{*1,2} = 0,8e^{\pm j\frac{\pi}{3}}.$$

Затем определим *нули*. Для этого числитель и знаменатель передаточной функции (4.25) умножим на z^2 и найдем корни уравнения *числителя*

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

Нули оказались *комплексно сопряженными*:

$$z_{01,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Вычислив r_0 и φ_0 (рад):

$$r_0 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1;$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = 2\pi/3,$$

представим их в показательной форме (4.27):

$$z_{01,2} = e^{\pm j\frac{2\pi}{3}}. \blacktriangleleft$$

4.5. Разновидности представления передаточной функции

Передаточная функция *общего* вида (4.5) рекурсивной ЛДС

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}$$

может иметь следующие виды математического представления:

□ произведение простейших множителей

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^{M-1} \left(\frac{1 - \beta_k z^{-1}}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right), \quad (4.28)$$

где:

- $(M-1) = (N-1)$ — порядок передаточной функции (количество рекурсивных звеньев 1-го порядка);
- β_k и α_k — соответственно, нули и полюсы передаточной функции k -го звена, в общем случае попарно комплексно сопряженные числа;
- b_0 — вещественный коэффициент усиления;

□ произведение множителей 2-го порядка с *вещественными* коэффициентами

$$H(z) = \prod_{k=1}^L \left(\frac{b_{0k} + \tilde{b}_{1k} z^{-1} + \tilde{b}_{2k} z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \right) = \prod_{k=1}^L b_{0k} \left(\frac{1 + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \right),$$

где:

- $L = \text{int}(M-1)/2$ — количество биквадратных звеньев;
- b_{0k} — вещественный коэффициент усиления k -го звена;
- $b_{1k} = \tilde{b}_{1k}/b_{0k}$ и $b_{2k} = \tilde{b}_{2k}/b_{0k}$ — вещественные коэффициенты k -го звена.

Обычно используют эквивалентное представление $H(z)$ в виде

$$H(z) = G \prod_{k=1}^L \left(\frac{1 + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \right), \quad (4.29)$$

где $G = b_{01} \cdot b_{02} \cdots b_{0L}$ — коэффициент усиления.

Передаточная функция (4.29) получена в результате умножения простейших множителей с комплексно сопряженными нулями и полюсами. Проиллюстрируем это для пары комплексно сопряженных полюсов $\alpha_{k,k+1} = r_k e^{\pm \varphi_k}$:

$$(1 - \alpha_k z^{-1})(1 - \alpha_{k+1} z^{-1}) = (1 - r_k e^{\varphi_k} z^{-1})(1 - r_k e^{-\varphi_k} z^{-1}) = \\ = 1 - r_k e^{-\varphi_k} z^{-1} - r_k e^{\varphi_k} z^{-1} + r_k^2 z^{-2} = 1 - 2r_k \cos \varphi_k z^{-1} + r_k^2 z^{-2} = 1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2};$$

□ сумма простых дробей (3.34):

$$H(z) = \sum_{k=1}^{M-1} \left(\frac{A_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right), \quad (4.30)$$

где:

- $(M-1) < (N-1)$ — порядок передаточной функции (количество рекурсивных звеньев 1-го порядка);
- α_k — простой (не кратный) полюс k -го звена;
- A_k — константа разложения при k -м полюсе, всегда число того же типа, что и полюс α_k ; в общем случае полюсы и константы разложения попарно комплексно сопряженные числа.

При равенстве $(M-1) = (N-1)$ сумма (4.30) принимает вид (3.36):

$$H(z) = A_0 + \sum_{k=1}^{M-1} \left(\frac{A_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right); \quad (4.31)$$

□ сумма дробей 2-го порядка с *вещественными* коэффициентами:

$$H(z) = \sum_{k=1}^L \left(\frac{B_{0k} + B_{1k} z^{-1}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \right), \quad (4.32)$$

где $L = \text{int}(M-1)/2$ — количество рекурсивных звеньев 2-го порядка.

Передаточная функция (4.32) получена в результате сложения простых дробей с комплексно сопряженными полюсами и константами разложения. Проиллюстрируем это для пары комплексно сопряженных полюсов $\alpha_{k,k+1} = r_k e^{\pm j\tilde{\varphi}_k}$ и констант $A_{k,k+1} = \tilde{r}_k e^{\pm j\tilde{\varphi}_k}$:

$$\frac{A_k}{(1 - \alpha_k z^{-1})} + \frac{A_{k+1}}{(1 - \alpha_{k+1} z^{-1})} = \frac{A_k - A_k \alpha_{k+1} z^{-1} + A_{k+1} - A_{k+1} \alpha_k z^{-1}}{(1 - \alpha_k z^{-1})(1 - \alpha_{k+1} z^{-1})}.$$

Произведение в знаменателе получено выше, перед формулой (4.30):

$$(1 - \alpha_k z^{-1})(1 - \alpha_{k+1} z^{-1}) = 1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}.$$

Определим числитель:

$$\tilde{r}_k e^{j\tilde{\varphi}_k} - \tilde{r}_k e^{j\tilde{\varphi}_k} r_k e^{-j\varphi_k} z^{-1} + \tilde{r}_k e^{-j\tilde{\varphi}_k} - \tilde{r}_k e^{-j\tilde{\varphi}_k} r_k e^{j\varphi_k} z^{-1} = \\ = 2\tilde{r}_k \cos \tilde{\varphi}_k - \tilde{r}_k r_* [e^{j(\tilde{\varphi}_k - \varphi_k)} + e^{-j(\tilde{\varphi}_k - \varphi_k)}] z^{-1} = 2\tilde{r}_k \cos \tilde{\varphi}_k - 2\tilde{r}_k r_* \cos(\tilde{\varphi}_k - \varphi_k) z^{-1} = B_{0k} + B_{1k}.$$

Среди передаточных функций *рекурсивных* ЛДС принято выделять передаточные функции *полюсного вида* с $(M - 1)$ полюсами и $(M - 1)$ кратными нулями, равными нулю:

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}. \quad (4.33)$$

В этом случае произведения (4.28) и (4.29) принимают вид соответственно:

$$H(z) = \frac{b_0}{\prod_{k=1}^{M-1} (1 - \alpha_k z^{-1})}; \quad (4.34)$$

$$H(z) = \frac{b_0}{\prod_{k=1}^L (1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2})}. \quad (4.35)$$

Передаточная функция *нерекурсивной* ЛДС (4.6)

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}$$

может иметь следующие виды математического представления:

□ произведение простейших множителей

$$H(z) = b_0 \prod_{i=1}^{N-1} (1 - \beta_i z^{-1}); \quad (4.36)$$

□ произведение множителей 2-го порядка с *вещественными* коэффициентами

$$H(z) = G \prod_{i=1}^L (1 + b_{1i} z^{-1} + b_{2i} z^{-2}), \quad (4.37)$$

где $G = b_{01} \cdot b_{02} \cdots b_{0L}$ — коэффициент усиления; $L = \text{int}(N - 1)/2$ — количество нерекурсивных звеньев 2-го порядка.

4.6. Второй критерий устойчивости

В разд. 2.9 был сформулирован первый критерий устойчивости ЛДС — абсолютная сходимость ряда отсчетов импульсной характеристики:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty. \quad (4.38)$$

Логично предположить, что должен существовать эквивалентный критерий оценки устойчивости по ее z -изображению — передаточной функции.

Представим передаточную функцию $H(z)$ (4.5) в виде (4.31):

$$H(z) = A_0 + \sum_{k=1}^{M-1} \left(\frac{A_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right),$$

что позволит записать обобщенную аналитическую формулу импульсной характеристики в виде (3.37):

$$h(n) = A_0 u_0(n) + \sum_{k=1}^{M-1} A_k \alpha_k^n. \quad (4.39)$$

Поскольку значение первого слагаемого всегда конечно, условие (4.38) выполняется, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{M-1} A_k \alpha_k^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{M-1} |A_k| |\alpha_k|^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{M-1} |A_k| |\alpha_k|^n < \infty.$$

Изменим порядок суммирования:

$$\sum_{k=1}^{M-1} |A_k| \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_k|^n < \infty.$$

Так как значения A_k всегда конечны, определение области сходимости ряда (4.38) сводится к определению области сходимости бесконечной геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_k|^n < \infty, \quad k = 1, 2, \dots, (M-1),$$

откуда имеем второй критерий устойчивости — условие для полюсов передаточной функции $H(z)$:

$$|\alpha_k| < 1, \quad k = 1, 2, \dots, (M-1). \quad (4.40)$$

Второй критерий устойчивости формулируется следующим образом: для того чтобы ЛДС была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все полюсы ее передаточной функции находились внутри круга единичного радиуса (единичного круга) комплексной z -плоскости.

Легко видеть преемственность критерия устойчивости ЛДС (4.40) с критерием устойчивости линейных аналоговых систем, в соответствии с которым все полюсы ее передаточной функции $H_a(p)$ должны располагаться в левой p -полуплоскости, а она на z -плоскости отображается в единичный круг (см. разд. 3.3).

Как правило, устойчивость рекурсивной ЛДС проверяют по *второму критерию* (4.40), более удобному для практического применения. Кроме того, при проверке устойчивости по первому критерию возможна ситуация, когда он выполняется, а ЛДС — неустойчива. Поясним на примере.

Пример 4.6. Проверить на устойчивость рекурсивную ЛДС с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{(1-1,1z^{-1})}{(1-0,8z^{-1})(1-1,1z^{-1})}.$$

Решение. В данном случае имеем два вещественных полюса $\alpha_1 = 0,8$ и $\alpha_2 = 1,1$. Согласно второму критерию, ЛДС не устойчива.

Проверим по первому критерию. Представим передаточную функцию в виде суммы простых дробей

$$H(z) = \frac{A_1}{1-0,8z^{-1}} + \frac{A_2}{1-1,1z^{-1}}.$$

Определим константы разложения A_1 и A_2 . В результате системы решения уравнений:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1; \\ 1,1A_1 + 0,8A_2 = 1,1, \end{cases}$$

получим:

$$\begin{cases} A_1 = 1; \\ A_2 = 0. \end{cases}$$

Запишем импульсную характеристику в виде (4.39), где вещественная целая часть отсутствует:

$$h(n) = 0,8^n + 0 \cdot 1,1^n = 0,8^n.$$

Согласно первому критерию, ЛДС устойчива:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |0,8|^n \neq \infty.$$

Подобная ситуация возникла вследствие того, что передаточная функция содержит сокращающиеся множители (когда нуль равен полюсу), и, как следствие, одна из констант разложения оказалась равной нулю. ▲

Вывод: первый критерий (4.38) справедлив, если передаточная функция (4.28) не содержит сокращающихся множителей, в противном случае необходимо обратить внимание на сокращающиеся множители: если полюсы (и равные им нули) расположены внутри единичного круга, ЛДС будет устойчива, иначе — не устойчива.

4.7. Устойчивость и сходимость

Согласно (3.6), областью сходимости передаточной функции (4.1) является область абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)z^{-n}| < \infty.$$

При подстановке $h(n)$ (4.39) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(A_0 u_0(n) + \sum_{k=1}^{M-1} A_k \alpha_k^{-n} \right) z^{-n} \right| \leq |A_0| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{M-1} A_k \alpha_k^{-n} z^{-n} \right| < \infty,$$

это эквивалентно условию

$$\sum_{k=1}^{M-1} |A_k| \left| \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_k z^{-1}|^n \right|^n < \infty,$$

откуда имеем область сходимости передаточной функции:

$$|\alpha_k z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |\alpha_k|, \quad k = 1, 2, \dots, (M-1).$$

Согласно (3.7), на комплексной z -плоскости она представляет собой область вне круга радиуса R (см. рис. 3.1):

$$|z| > R,$$

где R — радиус сходимости, в данном случае равный

$$R = \max_k |\alpha_k|, \quad k = 1, 2, \dots, (M-1).$$

Область устойчивости ЛДС задается критерием (4.40):

$$|\alpha_k| < 1, \quad k = 1, 2, \dots, (M-1),$$

следовательно, для устойчивой ЛДС область сходимости передаточной функции представляет собой кольцо на комплексной z -плоскости (рис. 4.1):

$$R < |z| < 1.$$

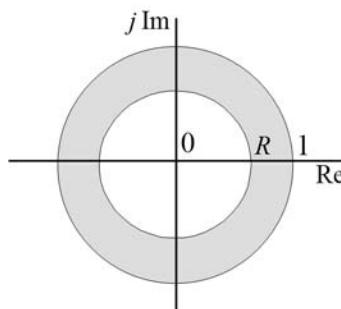
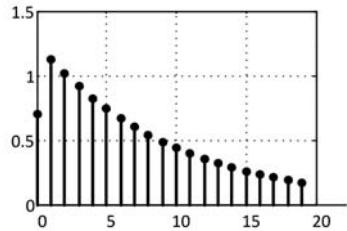


Рис. 4.1. Область сходимости передаточной функции устойчивой ЛДС

ГЛАВА 5



Описание линейных дискретных систем в частотной области

Описание ЛДС z -области подготовило автоматический переход к ее описанию в частотной области, что обусловлено связью преобразования Фурье с Z-преобразованием.

Это позволит ввести важнейшие для линейных систем понятия частотных характеристик. Проектирование многих систем ЦОС начинается с предъявления требований именно к частотным характеристикам, а их анализ помогает оценить закономерности преобразования воздействия, не очевидные во временной области.

5.1. Частотная характеристика

Основной характеристикой ЛДС в частотной области является Фурье-изображение ее импульсной характеристики, которое определяется с помощью преобразования Фурье (3.43):

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j\omega T n} \quad (5.1)$$

и называется комплексной частотной характеристикой (КЧХ) или просто частотной характеристикой (ЧХ). Это ее математическое определение.

В шкале нормированных частот $\hat{\omega}$ (1.4) формула (5.1) принимает вид

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j\hat{\omega} n}. \quad (5.2)$$

Согласно (3.44), преобразование Фурье (5.1) справедливо только в области абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty,$$

что совпадает с критерием устойчивости (2.25). Следовательно, понятие частотной характеристики применимо только к *устойчивым* ЛДС.

Автоматический переход из z -области в частотную область при подстановке $z = e^{j\omega T} = e^{j\hat{\omega}}$ позволяет:

- установить связь частотной характеристики с передаточной функцией:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}} . \quad (5.3)$$

Они совпадают на *единичной окружности комплексной z -плоскости*;

- определить частотную характеристику как *отношение Фурье-изображений реакции и воздействия* на основании (4.3):

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{Y(e^{j\hat{\omega}})}{X(e^{j\hat{\omega}})} .$$

Выразив комплексные функции через модули и аргументы, получим

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{|Y(e^{j\hat{\omega}})|}{|X(e^{j\hat{\omega}})|} e^{j[\varphi_y(\hat{\omega}) - \varphi_x(\hat{\omega})]} ; \quad (5.4)$$

- записать соотношения вход/выход на основании (4.2) и (4.4);

$$Y(e^{j\hat{\omega}}) = H(e^{j\hat{\omega}}) X(e^{j\hat{\omega}}) ;$$

$$Y(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i e^{-j(i\hat{\omega})}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k e^{-j(k\hat{\omega})}} X(e^{j\hat{\omega}}) ;$$

- получить формулы для расчета частотной характеристики *рекурсивной* ЛДС на основании (4.5):

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i e^{-j\hat{\omega}i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k e^{-j\hat{\omega}k}} ; \quad (5.5)$$

и *нерекурсивной* ЛДС на основании (4.7):

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\hat{\omega}n} . \quad (5.6)$$

Для того чтобы понять смысл определения частотной характеристики (5.4), найдем реакцию ЛДС на *дискретный комплексный гармонический сигнал* (1.10):

$$x(n) = C_x e^{j\varphi_x(\hat{\omega})} = C_x e^{j\hat{\omega}n} , \quad (5.7)$$

где $C_x = |X(e^{j\hat{\omega}})|$ — амплитуда, $\varphi_x(\hat{\omega}) = \hat{\omega}n$ (рад) — фаза воздействия.

Воспользуемся формулой свертки (2.11):

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)C_x e^{j\hat{\omega}(n-m)} = \\ &= C_x e^{j\hat{\omega}n} \sum_{m=0}^{\infty} h(m)e^{-j\hat{\omega}m} = x(n) \left[\sum_{m=0}^{\infty} h(m)e^{-j\hat{\omega}m} \right]. \end{aligned}$$

В квадратных скобках имеем частотную характеристику (5.2):

$$y(n) = x(n)H(e^{j\hat{\omega}}), \quad (5.8)$$

что позволяет ее определить как отношение

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \left. \frac{y(n)}{x(n)} \right|_{x(n)=C_x e^{j\hat{\omega}n}}. \quad (5.9)$$

Частотной характеристикой $H(e^{j\hat{\omega}})$ линейной дискретной системы называется частотная зависимость отношения реакции к дискретному гармоническому воздействию в установившемся режиме.

Выразим комплексную функцию $H(e^{j\hat{\omega}})$ через ее модуль и аргумент:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \left| H(e^{j\hat{\omega}}) \right| e^{j\arg\{H(e^{j\hat{\omega}})\}} = A(\hat{\omega})e^{j\varphi(\hat{\omega})}. \quad (5.10)$$

Подставив $H(e^{j\hat{\omega}})$ (5.10) и $x(n)$ (5.7) в (5.8), получим реакцию $y(n)$ — *дискретный комплексный гармонический сигнал*

$$y(n) = C_x e^{j\varphi_x(\hat{\omega})} A(\hat{\omega}) e^{j\varphi(\hat{\omega})} = C_x A(\hat{\omega}) e^{j[\varphi_x(\hat{\omega}) + \varphi(\hat{\omega})]} = C_y(\hat{\omega}) e^{j\varphi_y(\hat{\omega})} \quad (5.11)$$

с частотно-зависимой амплитудой

$$\left| Y(e^{j\hat{\omega}}) \right| = C_y(\hat{\omega}) = C_x A(\hat{\omega})$$

и фазой

$$\varphi_y(\hat{\omega}) = \varphi_x(\hat{\omega}) + \varphi(\hat{\omega}).$$

Это позволяет объединить не противоречащие друг другу определения частотной характеристики (5.4) и (5.9):

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\left| Y(e^{j\hat{\omega}}) \right|}{\left| X(e^{j\hat{\omega}}) \right|} e^{j[\varphi_y(\hat{\omega}) - \varphi_x(\hat{\omega})]} = \frac{C_y(\hat{\omega})}{C_x} e^{j[\varphi_y(\hat{\omega}) - \varphi_x(\hat{\omega})]} = \frac{C_x A(\hat{\omega})}{C_x} e^{j\varphi(\hat{\omega})} = A(\hat{\omega}) e^{j\varphi(\hat{\omega})}$$

и сформулировать следующие выводы:

- отношение реакции к воздействию не зависит от времени только при гармоническом воздействии и соответствующей ему гармонической реакции;
- гармоническая реакция наблюдается только по завершении переходного процесса — в установившемся режиме.

Во время *переходного процесса* она имеет вид колебания с нарастающей амплитудой;

- модуль и аргумент частотной характеристики (5.10) отображают изменения *амплитуды и фазы гармонической реакции относительно гармонического воздействия, которые зависят от частоты воздействия.*

Поэтому *модуль* назвали *амплитудно-частотной*, а *аргумент* — *фазочастотной* характеристикой ЛДС.

Амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) $A(\hat{\omega})$ *линейной дискретной системы называется частотная зависимость отношения амплитуды реакции к амплитуде дискретного гармонического воздействия в установившемся режиме:*

$$A(\hat{\omega}) = \frac{|Y(e^{j\hat{\omega}})|}{|X(e^{j\hat{\omega}})|} = \frac{C_y(\hat{\omega})}{C_x}.$$

Фазочастотной характеристикой (ФЧХ) $\phi(\hat{\omega})$ *линейной дискретной системы называется частотная зависимость разности фаз реакции и дискретного гармонического воздействия в установившемся режиме:*

$$\phi(\hat{\omega}) = \phi_y(\hat{\omega}) - \phi_x(\hat{\omega}).$$

По определению, АЧХ является *безразмерной*, а ФЧХ измеряется в *радианах*.

Общеприняты обозначения АЧХ $A(\hat{\omega})$ и ФЧХ $\phi(\hat{\omega})$, такие же, как в аналоговых системах, хотя фактически это функции аргумента $e^{j\hat{\omega}}$ (см. (5.10)), с чем связаны их особых свойства.

5.2. Свойства частотных характеристик

Перечислим основные свойства частотных характеристик ЛДС.

- Непрерывность.

ЧХ, АЧХ и ФЧХ — *непрерывные* функции частоты по определению.

- Периодичность.

ЧХ, АЧХ и ФЧХ — *периодические* функции частоты.

Периодичность функций следует из периодичности их аргумента (см. (3.45)).

В зависимости от используемой шкалы частот, период будет равен:

$$f \Rightarrow f_d;$$

$$\hat{f} \Rightarrow 1;$$

$$\omega \Rightarrow \omega_d;$$

$$\hat{\omega} \Rightarrow 2\pi.$$

Таким образом, следствием перехода от непрерывного времени к дискретному $t \rightarrow nT$ оказывается *периодичность частотных характеристик*.

□ Четность АЧХ и нечетность ФЧХ.

Если коэффициенты передаточной функции — вещественные числа (а другие случаи мы не рассматриваем), то модуль частотной характеристики (АЧХ) является четной, а аргумент (ФЧХ) — нечетной функцией частоты:

$$\begin{aligned}|H(e^{j\hat{\omega}})| &= |H(e^{-j\hat{\omega}})|; \\ \arg\{H(e^{j\hat{\omega}})\} &= -\arg\{H(e^{-j\hat{\omega}})\}.\end{aligned}$$

Доказательство. Применим к частотной характеристике (5.2) формулу Эйлера:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-j\hat{\omega}n} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)\cos(\hat{\omega}n) - j\sum_{n=0}^{\infty} h(n)\sin(\hat{\omega}n) = \operatorname{Re} - j\operatorname{Im}.$$

Изменим знак аргумента:

$$H(e^{-j\hat{\omega}}) = \operatorname{Re} + j\operatorname{Im}.$$

Для модуля частотной характеристики справедливо равенство

$$|H(e^{j\hat{\omega}})| = |H(e^{-j\hat{\omega}})| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 + \operatorname{Im}^2},$$

следовательно, АЧХ — четная функция частоты, а для аргумента, принимая во внимание, что арктангенс нечетная функция, — равенство

$$\arg\{H(e^{j\hat{\omega}})\} = -\arg\{H(e^{-j\hat{\omega}})\} = -\operatorname{arctg}(\operatorname{Im}/\operatorname{Re}),$$

следовательно, ФЧХ — нечетная функция частоты.

□ АЧХ и ФЧХ рассчитывают в основной полосе частот (см. разд. 1.4):

$$f \Rightarrow \left[0; \frac{f_{\Delta}}{2} \right]; \quad (5.12)$$

$$\hat{f} \Rightarrow [0; 0,5]; \quad (5.13)$$

$$\omega \Rightarrow \left[0; \frac{\Omega_{\Delta}}{2} \right] = \left[0; \frac{\pi}{T} \right]; \quad (5.14)$$

$$\hat{\omega} \Rightarrow [0; \pi]. \quad (5.15)$$

Взаимосвязь между значением нормированной частоты $\hat{\omega}_0$ и абсолютной частоты f_0 определена в (1.5).

5.3. Расчет АЧХ и ФЧХ

Расчет АЧХ и ФЧХ линейной дискретной системы выполняется по известной передаточной функции $H(z)$ (4.5), которая при подстановке $z = e^{j\hat{\omega}}$ принимает вид (5.5):

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i e^{-j(i\hat{\omega})}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k e^{-j(k\hat{\omega})}}.$$

Разложив экспоненты и выделив вещественные и мнимые части в числителе (индекс "ч") и знаменателе (индекс "з"):

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\left[b_0 + \sum_{i=1}^{N-1} b_i \cos(i\hat{\omega}) \right] - j \sum_{i=1}^{N-1} b_i \sin(i\hat{\omega})}{\left[1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k \cos(k\hat{\omega}) \right] - j \sum_{k=1}^{M-1} a_k \sin(k\hat{\omega})} = \frac{\text{Re}_{\text{ч}} + j \text{Im}_{\text{ч}}}{\text{Re}_{\text{з}} + j \text{Im}_{\text{з}}},$$

получаем формулы для АЧХ и ФЧХ — модуля и аргумента частотной характеристики соответственно:

$$A(\hat{\omega}) = |H(e^{j\hat{\omega}})| = \sqrt{\frac{\text{Re}_{\text{ч}}^2 + \text{Im}_{\text{ч}}^2}{\text{Re}_{\text{з}}^2 + \text{Im}_{\text{з}}^2}}; \quad (5.16)$$

$$\varphi(\hat{\omega}) = \arg\{H(e^{j\omega T})\} = \arctg\left(\frac{\text{Im}_{\text{ч}}}{\text{Re}_{\text{ч}}}\right) - \arctg\left(\frac{\text{Im}_{\text{з}}}{\text{Re}_{\text{з}}}\right).$$

5.4. Нули и экстремумы АЧХ

Не проводя подробного математического анализа, оценим точки (частоты) нуля, максимума и минимума АЧХ на примере рекурсивного звена 2-го порядка. С этой целью представим его передаточную функцию в виде произведения простейших множителей (4.28):

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b_0(1 - r_{\circ} e^{j\Phi_{\circ}} z^{-1})(1 - r_{*} e^{-j\Phi_{*}} z^{-1})}{(1 - r_{*} e^{j\Phi_{*}} z^{-1})(1 - r_{*} e^{-j\Phi_{*}} z^{-1})}$$

с комплексно сопряженными нулями

$$z_{\circ 1,2} = r_{\circ} e^{\pm j\Phi_{\circ}},$$

и комплексно сопряженными полюсами

$$z_{*1,2} = r_{*} e^{\pm j\Phi_{*}},$$

где $\Phi_{\circ} = \hat{\omega}_{\circ}$ и $\Phi_{*} = \hat{\omega}_{*}$ — частоты, соответственно нуля и полюса.

Подставляя $z = e^{j\hat{\omega}}$, запишем частотную характеристику звена

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{b_0 \left[1 - r_{\circ} e^{-j(\hat{\omega} - \Phi_{\circ})} \right] \left[1 - r_{*} e^{-j(\hat{\omega} + \Phi_{*})} \right]}{\left[1 - r_{*} e^{-j(\hat{\omega} - \Phi_{*})} \right] \left[1 - r_{*} e^{-j(\hat{\omega} + \Phi_{*})} \right]} \quad (5.17)$$

и определим ее модуль — АЧХ:

$$A(\hat{\omega}) = |H(e^{j\hat{\omega}})| = \frac{|b_0| |1 - r_* e^{-j(\hat{\omega} - \varphi_*)}| |1 - r_* e^{-j(\hat{\omega} + \varphi_*)}|}{|1 - r_* e^{-j(\hat{\omega} - \varphi_*)}| |1 - r_* e^{-j(\hat{\omega} + \varphi_*)}|}. \quad (5.18)$$

Точка нуля АЧХ очевидна: $A(\hat{\omega}) = 0$, если числитель (5.18) обращается в нуль, что выполняется при $r_* = 1$ и $\hat{\omega} = \pm\varphi_*$:

$$\begin{cases} 1 - e^{-j(\varphi_* - \varphi_*)} = 0; \\ 1 - e^{-j(-\varphi_* + \varphi_*)} = 0. \end{cases}$$

Следовательно, *внутри* основной полосы частот $0 < \hat{\omega} < \pi$ нуль АЧХ находится *точно на частоте комплексно сопряженного нуля* $\hat{\omega} = \varphi_* = \hat{\omega}_*$, лежащего на единичной окружности.

Вещественным нулям, расположенным на единичной окружности, соответствует нуль АЧХ *на границах* основной полосы частот в точках $\hat{\omega} = 0$ или/и $\hat{\omega} = \pi$.

Нуль АЧХ не является ее минимумом (экстремумом). В этой точке амплитудная функция $B(\hat{\omega})$, связанная с АЧХ соотношением $A(\hat{\omega}) = |B(\hat{\omega})|$, меняет знак, поэтому производная функции $A(\hat{\omega})$ не может быть равной нулю.

В точке нуля АЧХ в ФЧХ наблюдается скачок на π , что соответствует изменению знака амплитудной функции $B(\hat{\omega})$.

Для оценки точек максимума и минимума АЧХ сначала ограничимся двумя частными случаями.

1. Рассмотрим передаточную функцию (5.17), содержащую только *рекурсивную часть* (полюсного вида)

$$H(z) = \frac{b_0}{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})},$$

когда комплексно сопряженные нули равны нулю:

$$z_{\circ 1,2} = r_* e^{\pm j\varphi_*} = 0,$$

и АЧХ (5.18) принимает вид

$$A(\hat{\omega}) = \frac{|b_0|}{|1 - r_* e^{-j(\hat{\omega} - \varphi_*)}| |1 - r_* e^{-j(\hat{\omega} + \varphi_*)}|},$$

где

$$\begin{aligned} |1 - r_* e^{-j(\hat{\omega} - \varphi_*)}| &= |1 - r_* \cos(\hat{\omega} - \varphi_*) + j r_* \sin(\hat{\omega} - \varphi_*)| = \\ &= \sqrt{[1 - r_* \cos(\hat{\omega} - \varphi_*)]^2 + [r_* \sin(\hat{\omega} - \varphi_*)]^2} = \sqrt{1 + r_*^2 - 2r_* \cos(\hat{\omega} - \varphi_*)}, \end{aligned}$$

и аналогично

$$\left|1 - r_* e^{-j(\hat{\omega} + \varphi_*)}\right| = \sqrt{1 + r_*^2 - 2r_* \cos(\hat{\omega} + \varphi_*)},$$

следовательно, АЧХ равна

$$A(\hat{\omega}) = \left| b_0 \right| \sqrt{\frac{1}{[1 + r_*^2 - 2r_* \cos(\hat{\omega} - \varphi_*)][1 + r_*^2 - 2r_* \cos(\hat{\omega} + \varphi_*)]}}. \quad (5.19)$$

В этом случае *внутри основной полосы частот* $0 < \hat{\omega} < \pi$ АЧХ имеет максимум и не имеет минимума. Точка максимума АЧХ определяется только знаменателем $A(\hat{\omega})$ (5.19). При фиксированном радиусе r_* максимум АЧХ достигается при минимальном значении знаменателя, соответствующем $\hat{\omega} = \pm\varphi_*$:

$$\begin{cases} 1 + r_*^2 - 2r_* \cos(\hat{\omega} - \varphi_*) = 1 + r_*^2 - 2r_* \cos(\varphi_* - \varphi_*) = 1 + r_*^2 - 2r_* = \min \neq 0; \\ 1 + r_*^2 - 2r_* \cos(\hat{\omega} + \varphi_*) = 1 + r_*^2 - 2r_* \cos(-\varphi_* + \varphi_*) = 1 + r_*^2 - 2r_* = \min \neq 0. \end{cases}$$

Следовательно, максимум АЧХ находится точно на частоте комплексно сопряженного полюса $\hat{\omega} = \varphi_* = \hat{\omega}_*$.

На границах основной полосы $[0; \pi]$ АЧХ имеет минимумы.

2. Рассмотрим передаточную функцию (5.17), содержащую только *нерекурсивную часть*:

$$H(z) = b_0(1 - r_o e^{j\varphi_o} z^{-1})(1 - r_o e^{-j\varphi_o} z^{-1}),$$

когда комплексно сопряженные полюсы равны нулю:

$$z_{*,1,2} = r_o e^{\pm j\varphi_o} = 0,$$

и АЧХ (5.18) принимает вид

$$A(\hat{\omega}) = \left| b_0 \right| \left| 1 - r_o e^{-j(\hat{\omega} - \varphi_o)} \right| \left| 1 - r_o e^{-j(\hat{\omega} + \varphi_o)} \right|,$$

и по аналогии с (5.19) будет равна

$$A(\hat{\omega}) = \left| b_0 \right| \sqrt{\frac{1}{[1 + r_o^2 - 2r_o \cos(\hat{\omega} - \varphi_o)][1 + r_o^2 - 2r_o \cos(\hat{\omega} + \varphi_o)]}}. \quad (5.20)$$

В этом случае *внутри основной полосы частот* $0 < \hat{\omega} < \pi$ АЧХ имеет минимум и не имеет максимума. При фиксированном радиусе $r_o \neq 1$ минимум АЧХ достигается при минимальном значении числителя (5.18), соответствующем $\hat{\omega} = \pm\varphi_o$:

$$\begin{cases} 1 + r_o^2 - 2r_o \cos(\hat{\omega} - \varphi_o) = 1 + r_o^2 - 2r_o \cos(\varphi_o - \varphi_o) = 1 + r_o^2 - 2r_o = \min \neq 0; \\ 1 + r_o^2 - 2r_o \cos(\hat{\omega} + \varphi_o) = 1 + r_o^2 - 2r_o \cos(-\varphi_o + \varphi_o) = 1 + r_o^2 - 2r_o = \min \neq 0. \end{cases}$$

Следовательно, минимум АЧХ находится точно на частоте комплексно сопряженного нуля $\hat{\omega} = \varphi_o = \hat{\omega}_o$.

На границах основной полосы $[0; \pi]$ АЧХ имеет максимумы.

В общем случае передаточная функция звена содержит и числитель, и знаменатель, и его АЧХ равна

$$A(\hat{\omega}) = |b_0| \sqrt{\frac{[1+r_*^2 - 2r_* \cos(\hat{\omega} - \varphi_*)][1+r_*^2 - 2r_* \cos(\hat{\omega} + \varphi_*)]}{[1+r_*^2 - 2r_* \cos(\hat{\omega} - \varphi_*)][1+r_*^2 - 2r_* \cos(\hat{\omega} + \varphi_*)]}}.$$

Внутри основной полосы частот $0 < \hat{\omega} < \pi$ АЧХ может иметь один максимум и один минимум. При фиксированных радиусах r_ и $r_* \neq 1$ их точки будут зависеть как от частоты комплексно сопряженного нуля, так и от частоты комплексно сопряженного полюса. Тем не менее методами математического анализа можно показать, что на точку максимума АЧХ доминирующее влияние оказывает частота комплексно сопряженного полюса (знаменатель), а на точку минимума АЧХ — частота комплексно сопряженного нуля (числитель). Поэтому вместо точного определения точек максимума и минимума АЧХ, как это было в рассмотренных частных случаях, получим их приблизительные значения.*

Поведение АЧХ (5.16) ЛДС произвольного порядка определяется совокупностью нулей и полюсов передаточной функции. Однако при этом сохраняются аналогичные закономерности для оценок нулей и экстремумов АЧХ, а именно:

- нули АЧХ находятся точно на частотах нулей передаточной функции, лежащих на единичной окружности;
- в точках нулей АЧХ в ФЧХ наблюдаются скачки на π ;
- максимумы АЧХ внутри основной полосы частот $0 < \hat{\omega} < \pi$ находятся (приблизительно или точно) на частотах комплексно сопряженных полюсов передаточной функции;
- минимумы АЧХ внутри основной полосы частот $0 < \hat{\omega} < \pi$ находятся (приблизительно или точно) на частотах комплексно сопряженных нулей передаточной функции;
- вещественным нулям передаточной функции соответствуют нули или экстремумы АЧХ на границах основной полосы частот $[0; \pi]$.

Отметим, что при определенном соотношении комплексно сопряженных нулей и полюсов АЧХ может оказаться сглаженной и даже частотно независимой (см. разд. 7.5).

5.5. Экспресс-анализ АЧХ

Экспресс-анализ АЧХ выполняется по карте нулей и полюсов и позволяет оценить вид АЧХ на основе сформулированных закономерностей для ее экстремумов и нулей.

Проиллюстрируем на примерах рекурсивных звеньев 1-го и 2-го порядков.

Передаточная функция рекурсивного звена 1-го порядка (4.9)

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

имеет *один* вещественный полюс и *один* вещественный нуль. Следовательно, его АЧХ является монотонной (возрастающей или убывающей) функцией, которая имеет экстремум или нуль *на границах* основной полосы $[0; \pi]$: максимуму АЧХ на одной границе соответствует минимум либо нуль на противоположной границе.

Значения АЧХ и ФЧХ (без учета скачка на π) в этих точках легко определить по передаточной функции с учетом соответствия $z = e^{j\hat{\omega}}$ (рис. 5.1):

$$\begin{cases} z = e^{j0} = 1; \\ z = e^{j\pi} = -1, \end{cases}$$

откуда имеем:

$$\begin{cases} A(0) = |H(1)| = \left| \frac{b_0 + b_1}{1 + a_1} \right|; & A(\pi) = |H(-1)| = \left| \frac{b_0 - b_1}{1 - a_1} \right|; \\ \phi(0) = \arg\{H(1)\} = 0; & \phi(\pi) = \arg\{H(-1)\} = 0. \end{cases}$$

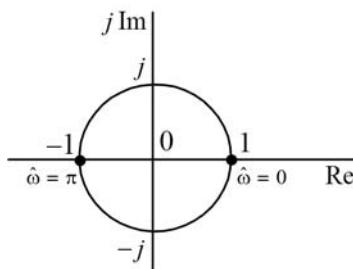


Рис. 5.1. Соответствие между значениями z и $\hat{\omega}$

В табл. 5.1 представлены передаточные функции звеньев 1-го порядка, а на рис. 5.2, a — c приведены их *нормированные* АЧХ, ФЧХ и импульсные характеристики¹.

Предлагаем самостоятельно оценить соответствие между картой нулей и полюсов и видом АЧХ и обратить внимание на следующее:

- нулю* АЧХ соответствует *скакок* ФЧХ на π (рис. 5.2, a);
- соотношение нулей и полюсов определяет *избирательность* звена 1-го порядка: низкочастотную (рис. 5.2, a — b), высокочастотную (рис. 5.2, c);

¹ Характеристики звеньев удобно анализировать в GUI FDATool, импортируя коэффициенты передаточных функций из Workspace (см. разд. П1.7 в приложении 1).

- с возрастанием модуля полюса АЧХ становится более *крутоей*, а ИХ — более *пологой* (рис. 5.2, *a*, *в*);
- вещественный нуль в начале координат $z_0 = 0$ не является информативным. В подобных случаях максимуму на одной границе соответствует минимум на противоположной границе (рис. 5.2, *б*).

Таблица 5.1. Передаточные функции звеньев 1-го порядка

Рисунок	Передаточная функция	Нули и полюсы
5.2, <i>а</i>	$H(z) = \frac{0,7 + 0,5z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}}$	$z_0 = -0,7143;$ $z_* = 0,5$
5.2, <i>б</i>	$H(z) = \frac{1}{1 + 0,5z^{-1}}$	$z_0 = 0;$ $z_* = -0,5$
5.2, <i>в</i>	$H(z) = \frac{0,7 + 0,5z^{-1}}{1 - 0,9z^{-1}}$	$z_0 = -0,7143;$ $z_* = 0,9$
5.2, <i>г</i>	$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 0,5z^{-1}}$	$z_0 = 1;$ $z_* = -0,5$

Передаточная функция рекурсивного звена 2-го порядка (4.10)

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

в общем случае имеет *два* комплексно сопряженных полюса и *два* комплексно сопряженных нуля. Следовательно, его АЧХ *внутри* основной полосы частот $0 < \hat{\omega} < \pi$ может иметь:

- *один* максимум, расположенный (приблизительно или точно) на частоте *комплексно сопряженного полюса* Φ_* ;
- *один* минимум или нуль.

Если $r_0 \neq 1$, то АЧХ будет иметь *минимум*, расположенный (приблизительно или точно) на частоте *комплексно сопряженного нуля* Φ_0 .

Если $r_0 = 1$ (нуль лежит на единичной окружности), то АЧХ будет иметь *нуль*, расположенный *точно* на частоте *комплексно сопряженного нуля* Φ_0 .

На *границах* основной полосы частот $[0; \pi]$ АЧХ может иметь нуль, если *вещественный* нуль передаточной функции лежит на единичной окружности, или экстремум.

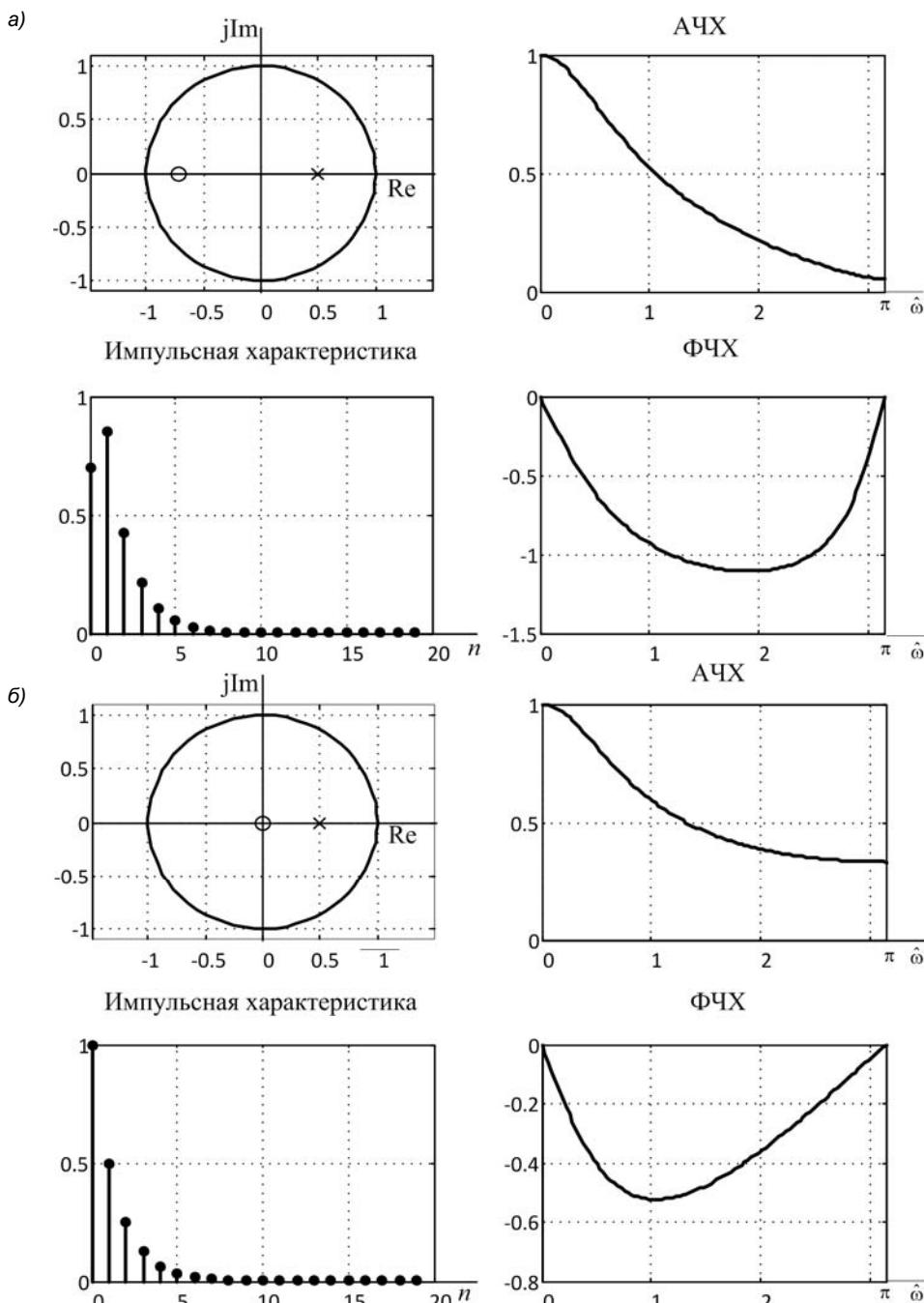


Рис. 5.2, *a*, *б*. Характеристики звеньев 1-го порядка
(передаточные функции приведены в табл. 5.1)

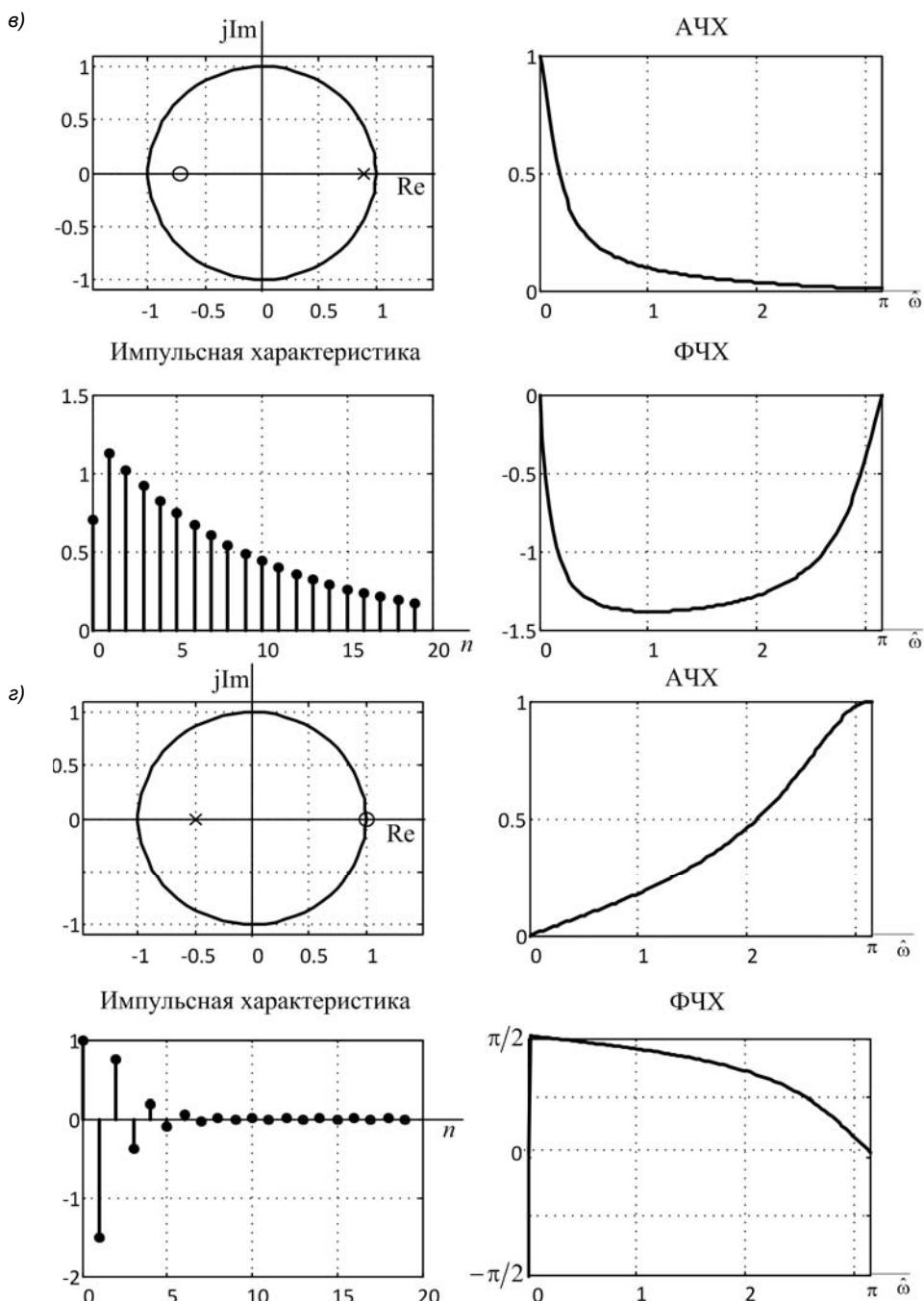


Рис. 5.2, в, г. Характеристики звеньев 1-го порядка
(передаточные функции приведены в табл. 5.1)

Значения АЧХ и ФЧХ (без учета скачков на π) в этих точках легко определить по передаточной функции (см. рис. 5.1):

$$\begin{cases} A(0) = |H(1)| = \left| \frac{b_0 + b_1 + b_2}{1 + a_1 + a_2} \right|; \\ \varphi(0) = \arg\{H(1)\} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} A(\pi) = |H(-1)| = \left| \frac{b_0 - b_1 + b_2}{1 - a_1 + a_2} \right|; \\ \varphi(\pi) = \arg\{H(-1)\} = 0. \end{cases}$$

В табл. 5.2 представлены передаточные функции звеньев 2-го порядка, а на рис. 5.3, *a*—*г* приведены их *нормированные* АЧХ, ФЧХ и импульсные характеристики.

Предлагаем самостоятельно оценить соответствие между картой нулей и полюсов и видом АЧХ и обратить внимание на следующее:

- нулю АЧХ соответствует скачок ФЧХ на π (рис. 5.3, *a*, *г*);
- соотношение нулей и полюсов определяет избирательность звена 2-го порядка: полосовую (рис. 5.3, *б*, *в*), режекторную (рис. 5.3, *г*).

Звенья 2-го порядка с максимумом АЧХ внутри основной полосы частот и нулями на границах используются для построения простейших полосовых фильтров (*резонаторов*), а с нулем АЧХ внутри основной полосы и максимумами на границах — простейших режекторных фильтров (*режекторов*);

- с возрастанием радиуса полюса АЧХ становится более *крутоей*, а импульсная характеристика — более *пологой* (рис. 5.3, *б*, *в*);
- вещественные нули в начале координат не являются информативными. В подобных случаях максимуму *внутри* основной полосы (при комплексно сопряженных полюсах) соответствуют минимумы *на ее границах* (рис. 5.3, *б*, *в*) и наоборот (при комплексно сопряженных нулях).

Таблица 5.2. Передаточные функции звеньев 2-го порядка

Рисунок	Передаточная функция	Нули и полюсы
5.3, <i>а</i>	$H(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,8z^{-1} + 0,64z^{-2}}$	$z_{\circ 1,2} = e^{\pm j\frac{2\pi}{3}}$; $z_{*1,2} = 0,8e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$
5.3, <i>б</i>	$H(z) = \frac{1}{1 - 0,8z^{-1} + 0,64z^{-2}}$	$z_{\circ 1,2} = 0$; $z_{*1,2} = 0,8e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$
5.3, <i>в</i>	$H(z) = \frac{1}{1 - 0,9z^{-1} + 0,81z^{-2}}$	$z_{\circ 1,2} = 0$; $z_{*1,2} = 0,9e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$
5.3, <i>г</i>	$H(z) = \frac{1 + z^{-2}}{1 + 0,2z^{-1} - 0,35z^{-2}}$	$z_{\circ 1} = \pm j$; $z_{*1} = 0,5$; $z_{*2} = -0,7$

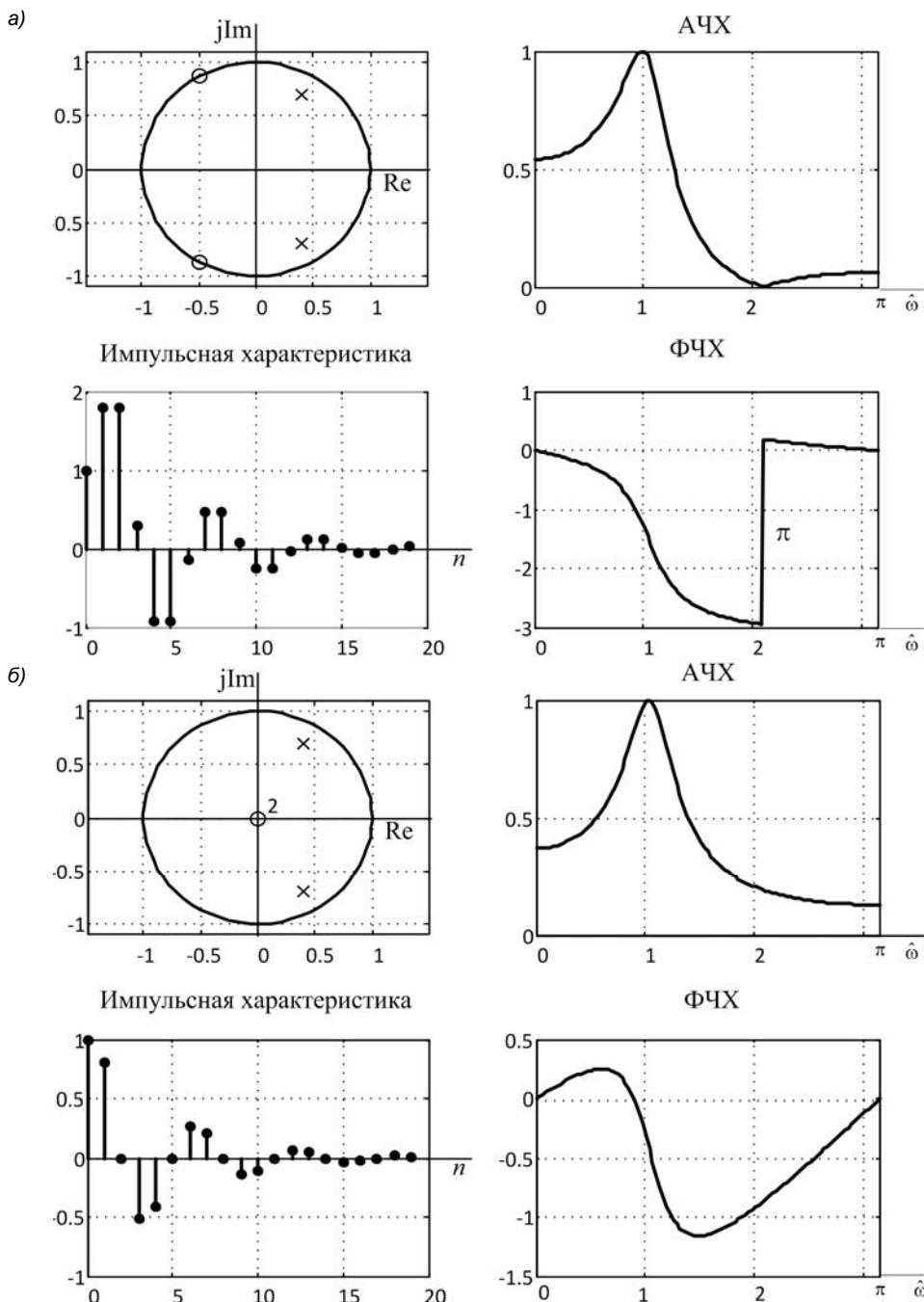


Рис. 5.3, а, б. Характеристики звеньев 2-го порядка
(передаточные функции приведены в табл. 5.2)

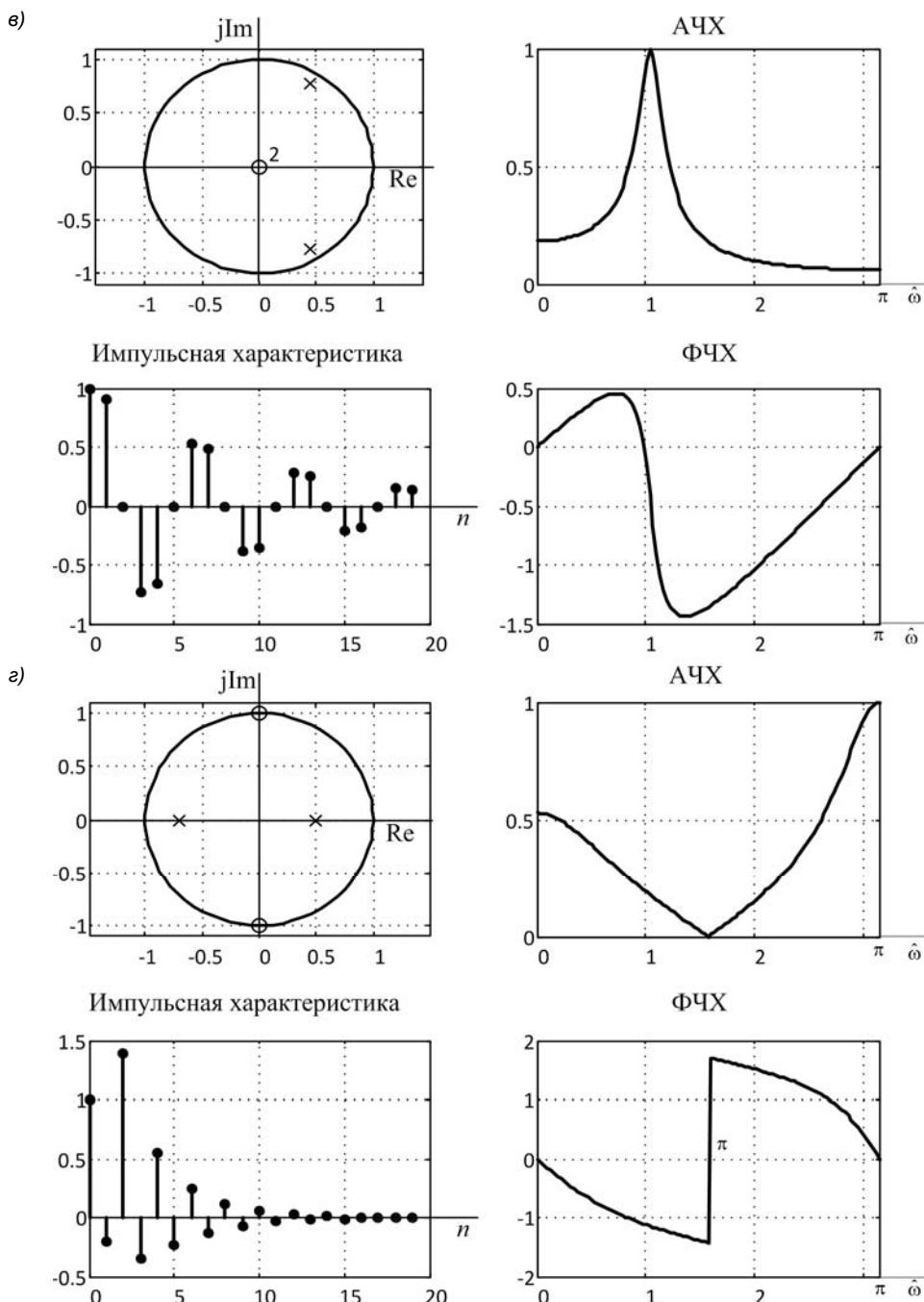


Рис. 5.3, в, г. Характеристики звеньев 2-го порядка
(передаточные функции приведены в табл. 5.2)

5.6. Групповое время задержки

Групповым временем задержки (ГВЗ) $\tau(\hat{\omega})$ линейной дискретной системы называют частотную зависимость задержки реакции относительно дискретного гармонического воздействия в установленном режиме:

$$\tau(\hat{\omega}) = -\frac{d\phi(\hat{\omega})}{d\hat{\omega}}. \quad (5.21)$$

Запишем задержанную дискретную гармоническую реакцию (5.11), применив теорему о задержке (3.18) с учетом равенства $z = e^{j\hat{\omega}}$:

$$y[n - \tau(\hat{\omega})] = C_y(\hat{\omega})e^{j\phi_y(\hat{\omega})}e^{-j\hat{\omega}\tau(\hat{\omega})} = C_y(\hat{\omega})e^{j[\phi_y(\hat{\omega}) - j\hat{\omega}\tau(\hat{\omega})]}, \quad (5.22)$$

где

$$\phi_y(\hat{\omega}) = \phi_x(\hat{\omega}) + \phi(\hat{\omega}). \quad (5.23)$$

В установленном режиме фаза $\phi_y(\hat{\omega})$ дискретной гармонической реакции изменится относительно фазы $\phi_x(\hat{\omega})$ дискретного гармонического воздействия в соответствии с ФЧХ $\phi(\hat{\omega})$ и будет иметь сдвиг нормированного времени, обусловленный задержкой реакции $\tau(\hat{\omega})$. Вследствие этого будут наблюдаться непропорциональные, зависящие от частоты, сдвиги фаз гармоник реакции относительно фаз гармоник воздействия.

Пропорциональные сдвиги возможны только при строго линейной ФЧХ:

$$\phi(\hat{\omega}) = \alpha - \tau\hat{\omega}, \quad (5.24)$$

где τ — коэффициент наклона, α — приращение ФЧХ.

В этом случае ГВЗ будет одинаковым для гармоник любой частоты:

$$-\frac{d\phi(\hat{\omega})}{d\hat{\omega}} = \tau.$$

ФЧХ (5.23) примет вид

$$\phi_y(\hat{\omega}) = \phi_x(\hat{\omega}) + \alpha - \tau\hat{\omega},$$

и в задержанной реакции (5.22)

$$y(n - \tau) = C_y(\hat{\omega})e^{j[\phi_x(\hat{\omega}) + \alpha - 2\tau\hat{\omega}]}$$

фазы гармоник реакции окажутся пропорционально сдвинутыми относительно фаз гармоник воздействия в соответствии с их частотой, тем самым будут исключены фазовые искажения реакции.

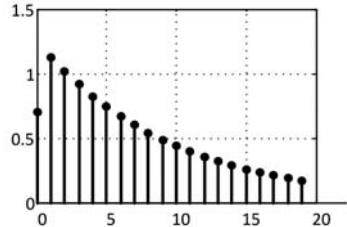
Системы со строго линейной ФЧХ рассматриваются в главе 15.

Отметим, что ГВЗ (5.21) является безразмерной, т. к. при его выводе использовалось дискретное нормированное время, а ГВЗ

$$\tau(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \quad (5.25)$$

имеет размерность времени.

ГЛАВА 6



Структуры линейных дискретных систем

Структура ЛДС отображает алгоритм вычисления реакции при известной передаточной функции и ННУ.

Дробно-рациональной передаточной функции общего вида (4.5)

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \quad (6.1)$$

соответствует алгоритм вычисления реакции, описываемый разностным уравнением (далее коротко *алгоритм в виде разностного уравнения*) при ННУ:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k).$$

Однако передаточная функция (6.1) может иметь другие виды математического представления (см. разд. 4.5), каждому из которых будет сопоставлен свой алгоритм вычисления реакции ЛДС, отображаемый соответствующей структурой.

Вот почему вид структуры определяется видом передаточной функции.

Структуру представляют в виде *структурной схемы*¹ с условными изображениями операций, необходимых для вычисления реакции:

- задержки на период дискретизации T (в области дискретного нормированного времени $T=1$);
- умножения на константу;
- алгебраического сложения.

В структуре им ставится в соответствие три вида элементов:

- элемент задержки (рис. 6.1, *a*);
- умножитель (рис. 6.1, *б*);
- сумматор (рис. 6.1, *в*).

¹ Или сигнального потокового графа [34].

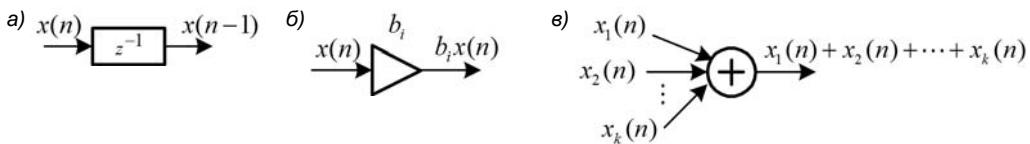


Рис. 6.1. Элементы структуры ЛДС: элемент задержки (а), умножитель (б), сумматор (в)

Задержка последовательности $x(n-1)$ отображается одним элементом задержки, задержка $x(n-2)$ — последовательным соединением двух элементов задержки (линией задержки) и т. д.

Далее термины "структурная схема" и "структура" будем считать тождественными.

Рассмотрим структуры ЛДС, взаимосвязанные с видом ее передаточной функции.

6.1. Структуры рекурсивных ЛДС

Трем эквивалентным представлениям передаточной функции рекурсивной ЛДС:

- дробно-рациональному (6.1);
- произведению множителей второго порядка (4.29);
- сумме дробей второго порядка (4.33)

соответствуют три основные структуры:

- прямая;
- каскадная;
- параллельная.

6.1.1. Прямая структура и ее модификации

Дробно-рациональная функция (6.1) и три ее *модификации* определяют четыре разновидности прямых структур рекурсивной ЛДС¹:

- прямая (Direct-form I);
- прямая каноническая (Direct-form II);
- прямая транспонированная (Direct-form I transposed);
- прямая каноническая транспонированная (Direct-form II transposed).

Практический интерес представляют прямые структуры *рекурсивного звена 2-го порядка*, т. к. из них формируются каскадная и параллельная структуры рекурсивной ЛДС.

¹ В наименованиях модификаций прямой структуры принято сохранять слово "прямая", а далее указывать ее разновидность, тем самым подчеркивая, что все данные структуры определяются дробно-рациональным видом передаточной функции.

Прямая структура определяется дробно-рациональным видом передаточной функции (4.10)

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (6.2)$$

и отображает *алгоритм* вычисления реакции в виде разностного уравнения (4.12) при ННУ (рис. 6.2):

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2). \quad (6.3)$$

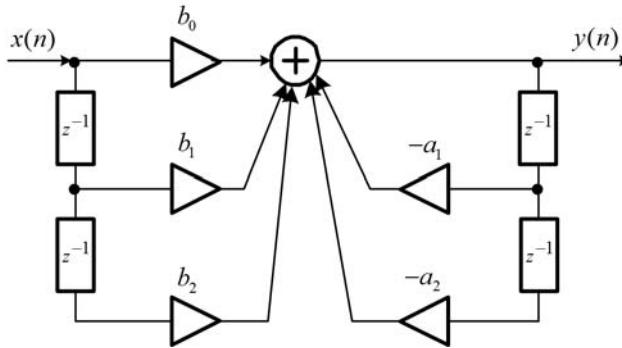


Рис. 6.2. Прямая структура звена 2-го порядка

Прямая каноническая структура определяется эквивалентным представлением передаточной функции (6.2) в виде произведения:

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) = H_1(z)H_2(z), \quad (6.4)$$

где передаточные функции определяются следующим образом:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{V(z)}{X(z)} \cdot \frac{Y(z)}{V(z)}; \quad (6.5)$$

$$H_1(z) = \frac{V(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}};$$

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}.$$

Записывая последовательно разностные уравнения, соответствующие передаточным функциям $H_1(z)$ и $H_2(z)$, получаем *алгоритм* вычисления реакции в виде системы разностных уравнений при ННУ:

$$\begin{cases} v(n) = x(n) - a_1 v(n-1) - a_2 v(n-2); \\ y(n) = b_0 v(n) + b_1 v(n-1) + b_2 v(n-2), \end{cases} \quad (6.6)$$

который отображается структурой в виде последовательного (каскадного) соединения рекурсивной и нерекурсивных частей прямой структуры (рис. 6.3, а).

Объединяя ветви в точке $v(n)$, получаем прямую каноническую структуру (рис. 6.3, б) с вдвое меньшим количеством элементов задержки по сравнению с прямой структурой (см. рис. 6.2).

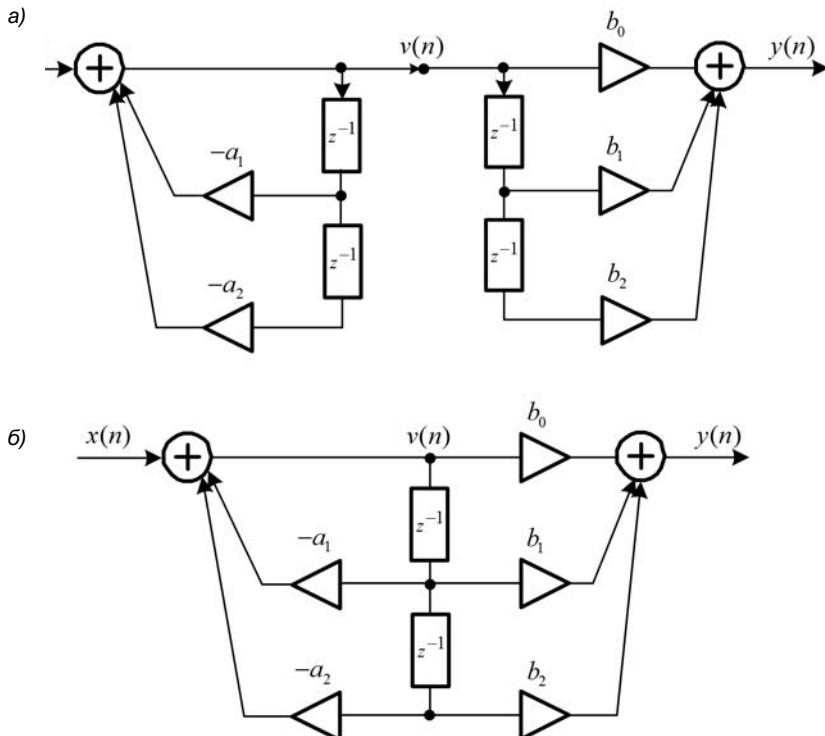


Рис. 6.3. Прямая каноническая структура звена 2-го порядка:
последовательное соединение прямых структур (а) и их объединение (б)

Прямая транспонированная структура звена 2-го порядка определяется эквивалентным представлением передаточной функции (6.2) в виде модификации произведения (6.4):

$$H(z) = \frac{1}{1 + (a_1 + a_2 z^{-1})z^{-1}} [b_0 + (b_1 + b_2 z^{-1})z^{-1}] = H_1(z)H_2(z), \quad (6.7)$$

где передаточная функция $H(z)$ определена в (6.5), а передаточные функции $H_1(z)$ и $H_2(z)$ определяются следующим образом:

$$H_1(z) = \frac{V(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + (a_1 + a_2 z^{-1})z^{-1}} = \frac{1}{1 + W_1(z)z^{-1}};$$

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = b_0 + (b_1 + b_2 z^{-1})z^{-1} = b_0 + W_2(z)z^{-1}.$$

Записывая последовательно разностные уравнения, соответствующие передаточным функциям $H_1(z)$ и $H_2(z)$, получаем алгоритм вычисления реакции в виде системы разностных уравнений при ННУ:

$$\begin{cases} v(n) = x(n) - w_1(n-1); \\ w_1(n) = a_1 v(n) + a_2 v(n-1); \\ y(n) = b_0 v(n) + w_2(n-1); \\ w_2(n) = b_1 v(n) + b_2 v(n-1), \end{cases} \quad (6.8)$$

который отображается структурой в виде каскадного соединения структур с передаточными функциями $H_1(z)$ и $H_2(z)$ (рис. 6.4, а).

Объединяя ветви в точке $v(n)$, получаем прямую транспонированную структуру (рис. 6.4, б).

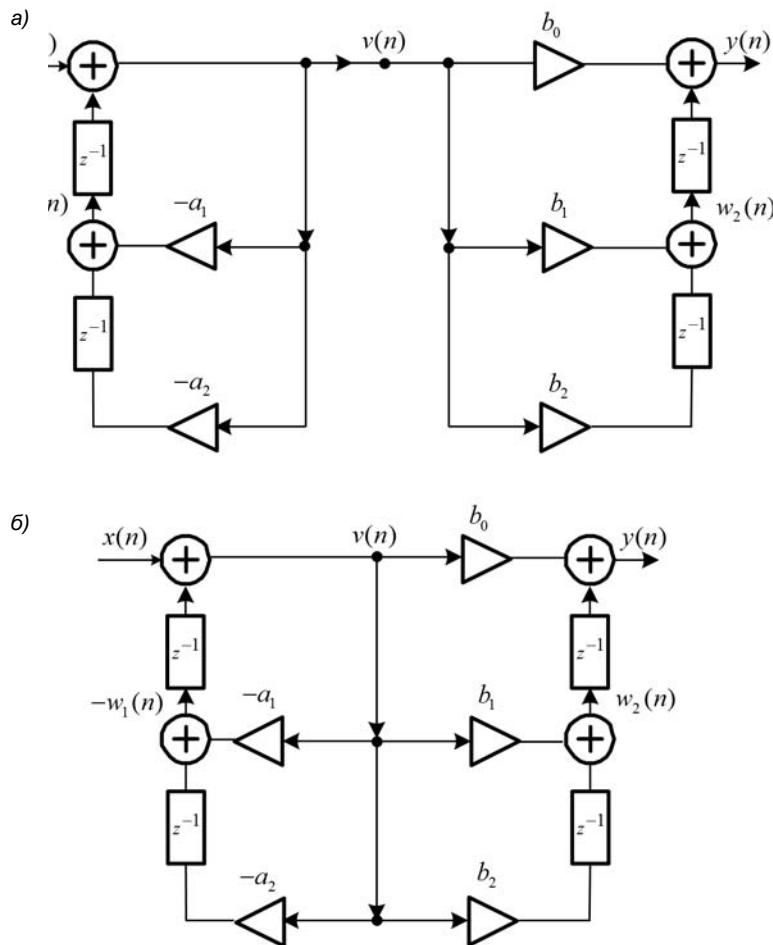


Рис. 6.4. Прямая транспонированная структура звена 2-го порядка:
последовательное соединение структур (а) и их объединение (б)

Прямая каноническая транспонированная структура звена 2-го порядка определяется эквивалентным представлением передаточной функции (6.2) в виде модификации произведения (6.7):

$$H(z) = \left[b_0 + (b_1 + b_2 z^{-1})z^{-1} \right] \frac{1}{1 + (a_1 + a_2 z^{-1})z^{-1}} = H_1(z)H_2(z),$$

где передаточная функция $H(z)$ определена в (6.5), а передаточные функции $H_1(z)$ и $H_2(z)$ определяются следующим образом:

$$H_1(z) = \frac{V(z)}{X(z)} = b_0 + (b_1 + b_2 z^{-1})z^{-1} = b_0 + W_2(z)z^{-1};$$

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{1}{1 + (a_1 + a_2 z^{-1})z^{-1}} = \frac{1}{1 + W_1(z)z^{-1}}.$$

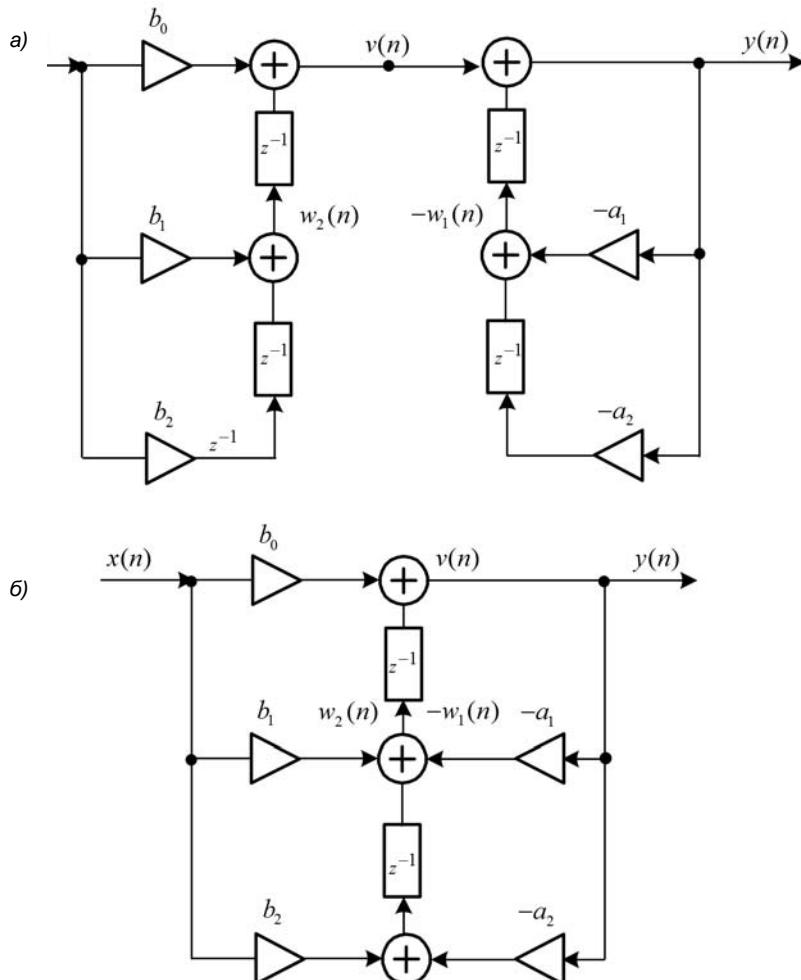


Рис. 6.5. Прямая каноническая транспонированная структура звена 2-го порядка: последовательное соединение структур (а) и их объединение (б)

Записывая последовательно разностные уравнения, соответствующие передаточным функциям $H_1(z)$ и $H_2(z)$, получаем алгоритм вычисления реакции в виде системы разностных уравнений при ННУ:

$$\begin{cases} v(n) = b_0 x(n) + w_2(n-1); \\ w_2(n) = b_1 x(n) + b_2 x(n-1); \\ y(n) = v(n) - w_1(n-1); \\ w_1(n) = a_1 y(n) + a_2 y(n-1), \end{cases} \quad (6.9)$$

который отображается структурой в виде каскадного соединения структур с передаточными функциями $H_1(z)$ и $H_2(z)$ (рис. 6.5, а).

Объединяя ветви в точке $v(n)$, получаем прямую каноническую транспонированную структуру (рис. 6.5, б) с вдвое меньшим количеством элементов задержки по сравнению с прямой (см. рис. 6.2) и прямой транспонированной (см. рис. 6.4, б) структурами.

6.1.2. Описание ЛДС в пространстве состояний

В алгоритмах (6.3), (6.6), (6.8) и (6.9) для вычисления реакции $y(n)$ используются *внутренние* сигналы структуры на выходах сумматоров. Можно, однако, для этой цели использовать другие внутренние сигналы — на выходах элементов задержки. Такие сигналы называют *переменными состояния*, а соответствующий алгоритм вычисления реакции — описанием ЛДС в *пространстве состояний* (State-space).

На практике, в том числе при моделировании в MATLAB, для описания ЛДС в пространстве состояний используют *прямую каноническую структуру*.

Поясним на примере звена 2-го порядка. Его прямая каноническая структура с *переменными состояния* $s_1(n)$ и $s_2(n)$ — сигналами на выходах элементов задержки — представлена на рис. 6.6.

Запишем систему уравнений для вычисления реакции:

$$\begin{cases} s_1(n+1) = -a_1 s_1(n) - a_2 s_2(n) + x(n); \\ s_2(n+1) = s_1(n); \\ y(n) = b_1 s_1(n) + b_2 s_2(n) + b_0 s_1(n+1). \end{cases}$$

Подставим в последнее уравнение $s_1(n+1)$:

$$\begin{cases} s_1(n+1) = -a_1 s_1(n) - a_2 s_2(n) + x(n); \\ s_2(n+1) = s_1(n); \\ y(n) = (b_1 - b_0 a_1) s_1(n) + (b_2 - b_0 a_2) s_2(n) + b_0 x(n), \end{cases} \quad (6.10)$$

где:

$$\begin{cases} s_1(n) = v(n-1); \\ s_2(n) = v(n-2). \end{cases} \quad (6.11)$$

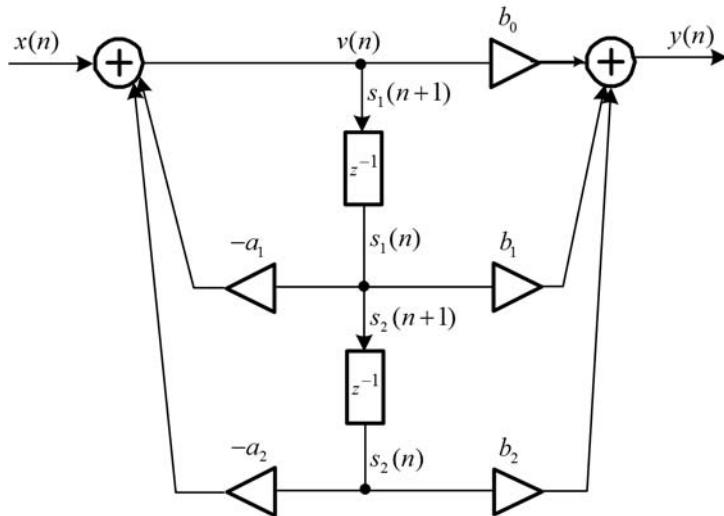


Рис. 6.6. Прямая каноническая структура звена 2-го порядка с переменными состояниями

Алгоритм вычисления реакции в виде системы уравнений (6.10) представляет собой ее описание в пространстве состояний, которое включает два уравнения состояния (по числу элементов задержки) и одно уравнение наблюдения.

В соответствии с данным описанием, задавая в (6.11) ННУ:

$$\begin{cases} s_1(0) = v(-1) = 0; \\ s_2(0) = v(-2) = 0, \end{cases}$$

вычисляется значение реакции $y(0)$:

$$\begin{cases} s_1(1) = -a_1 s_1(0) - a_2 s_2(0) + x(n) = x(0); \\ s_2(1) = s_1(0) = 0; \\ y(0) = b_0 x(0), \end{cases}$$

затем значение $y(1)$:

$$\begin{cases} s_1(2) = -a_1 s_1(1) - a_2 s_2(1) + x(1) = -a_1 x(0) + x(1); \\ s_2(2) = s_1(1) = x(0); \\ y(1) = (b_1 - b_0 a_1) s_1(1) + (b_2 - b_0 a_2) s_2(1) + b_0 x(1) = b_0 x(1) + b_1 x(0) - a_1 b_0 x(0) \end{cases}$$

и т. д.

Матричную запись (6.10):

$$\begin{cases} [s_1(n+1) \quad s_2(n+1)] = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(n); \\ y(n) = [(b_1 - b_0 a_1) \quad (b_2 - b_0 a_2)] \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \end{bmatrix} + b_0 x(n) \end{cases} \quad (6.12)$$

легко обобщить на описание в пространстве состояний ЛДС произвольного порядка ($M - 1$):

$$\begin{cases} \mathbf{s}(n+1) = \mathbf{As}(n) + \mathbf{Bx}(n); \\ y(n) = \mathbf{Cs}(n) + Dx(n), \end{cases} \quad (6.13)$$

где по аналогии с (6.12) приняты обозначения:

- $\mathbf{s}(n+1) = [s_1(n+1) \ s_2(n+1) \ \dots \ s_{M-1}(n+1)]$ — вектор-строка значений *переменных состояния* (на *выходах* элементов задержки);

- $\mathbf{s}(n) = \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \\ \vdots \\ s_{M-1}(n) \end{bmatrix}$ — вектор-столбец значений сигналов на *входах* элементов задержки;

- $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, D$ — параметры пространства состояний;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{M-2} & -a_{M-1} \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{— квадратная матрица порядка } (M-1);$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{— вектор-столбец длины } (M-1);$$

$$\mathbf{C} = [(b_1 - b_0 a_1) \ (b_2 - b_0 a_2) \ \dots \ (b_{M-1} - b_0 a_{M-1})] \quad \text{— вектор-строка длины } (M-1);$$

$$D = b_0 \quad \text{— скаляр.}$$

На основании (6.13), применив Z -преобразование к уравнениям, можно получить представление передаточной функции в пространстве состояний:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + D,$$

где \mathbf{I} — единичная матрица¹ порядка $(M-1)$.

¹ Диагональные элементы равны единице, а остальные — нулю.

6.1.3. Каскадная структура

Каскадная структура (рис. 6.7) определяется эквивалентным представлением дробно-рациональной передаточной функции (6.1) в виде произведения (4.29):

$$H(z) = G \prod_{k=1}^L \left(\frac{1 + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right) = G \prod_{k=1}^L H_k(z), \quad (6.14)$$

и отображает *алгоритм* вычисления реакции $y(n)$ в виде *системы разностных уравнений* с последовательным вычислением реакций биквадратных звеньев $y_k(n)$, $k = 1, 2, \dots, L$, $y_L(n) = y(n)$, с передаточными функциями $H_k(z)$.

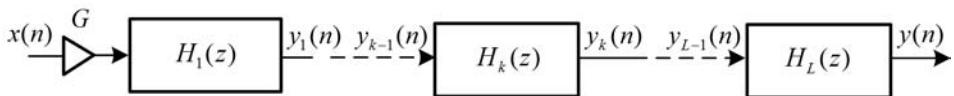


Рис. 6.7. Каскадная структура рекурсивной ЛДС

Структура звеньев определяет вид каскадной структуры:

- с *прямой* структурой звеньев (Direct-form I, SOS¹);
- с *прямой канонической* структурой звеньев (Direct-form II, SOS);
- с *прямой транспонированной* структурой звеньев (Direct-form I transposed, SOS);
- с *прямой канонической транспонированной* структурой звеньев (Direct-form II transposed, SOS).

Структура звеньев определяет *алгоритм* вычисления реакции каскадной структуры. Например, при *прямой* структуре биквадратных звеньев этот алгоритм будет описываться в виде следующей системы разностных уравнений:

$$\begin{cases} y_1(n) = G[x(n) + b_{11}x(n-1) + b_{21}x(n-2)] - a_{11}y_1(n-1) - a_{21}y_1(n-2); \\ y_2(n) = [y_1(n) + b_{12}y_1(n-1) + b_{22}y_1(n-2)] - a_{12}y_2(n-1) - a_{22}y_2(n-2); \\ \dots \\ y(n) = [y_{L-1}(n) + b_{1L}y_{L-1}(n-1) + b_{2L}y_{L-1}(n-2)] - a_{1L}y(n-1) - a_{2L}y(n-2). \end{cases}$$

6.1.4. Параллельная структура

Параллельная структура (рис. 6.8) определяется эквивалентным представлением дробно-рациональной передаточной функции (6.1) в виде суммы (4.32):

$$H(z) = \sum_{k=1}^L \left(\frac{B_{0k} + B_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right) = \sum_{k=1}^L H_k(z), \quad (6.15)$$

¹ Сокращение от Second-Order Sections — звенья 2-го порядка (биквадратные).

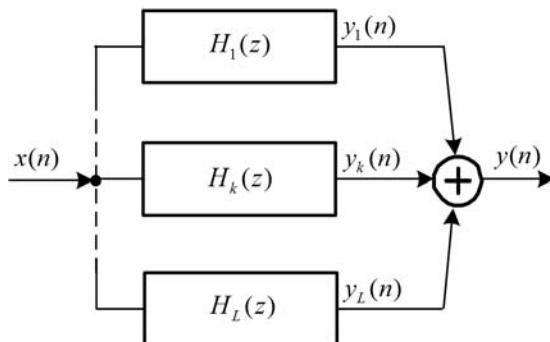


Рис. 6.8. Параллельная структура рекурсивной ЛДС

и отображает *алгоритм* вычисления реакции $y(n)$ в виде *уравнения* с параллельным вычислением реакций звеньев с передаточными функциями $H_k(z)$ при *одинаковом* воздействии $x(n)$:

$$y(n) = \sum_{k=1}^L y_k(n).$$

Согласно (6.15), в z -области ему соответствует соотношение вход/выход:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \sum_{k=1}^L H_k(z)X(z) = \sum_{k=1}^L \left(\frac{B_{0k} + B_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right) X(z) = \sum_{k=1}^L Y_k(z).$$

Структура звеньев определяет *алгоритм* вычисления их реакций $y_k(n)$, $k = 1, 2, \dots, L$, и реакции параллельной структуры, равной сумме реакций звеньев.

Например, при *прямой* структуре звеньев этот *алгоритм* будет описываться в виде *уравнения*:

$$y(n) = \sum_{k=1}^L y_k(n) = \sum_{k=1}^L [B_{0k}x(n) + B_{1k}x(n-1) - a_{1k}v_k(n-1) - a_{2k}v_k(n-2)].$$

6.2. Структуры нерекурсивных ЛДС

Прямая структура (Direct-form FIR¹) нерекурсивной ЛДС (рис. 6.9) определяется *рациональной* передаточной функцией (4.6)

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} \quad (6.16)$$

и отображает *алгоритм* вычисления реакции $y(n)$ в виде разностного уравнения (2.21) при ННУ:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i).$$

¹ Сокращение от Finite Impulse Response — конечная импульсная характеристика.

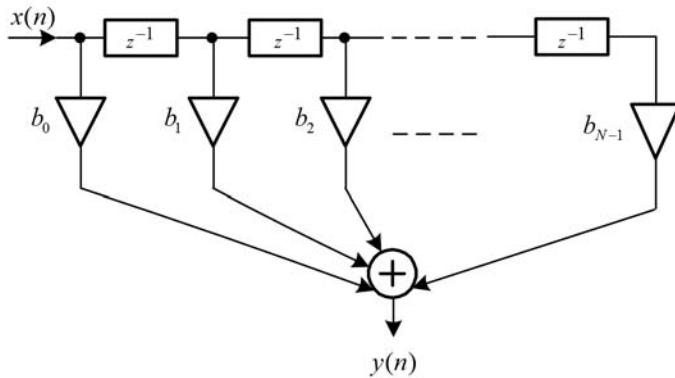


Рис. 6.9. Прямая структура нерекурсивной ЛДС

Разновидностью прямой структуры нерекурсивной ЛДС является *прямая транспонированная структура* (Direct-form FIR Transposed), эквивалентная прямой канонической транспонированной структуре на рис. 6.5 при $a_1 = a_2 = 0$.

Каскадная структура нерекурсивной ЛДС определяется передаточной функцией в виде произведения (4.37):

$$H(z) = G \prod_{i=1}^L (1 + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}) = G \prod_{k=1}^L H_k(z), \quad (6.17)$$

и отображает *алгоритм* вычисления реакции $y(n)$ в виде *системы уравнений* с последовательным вычислением реакций звеньев с передаточными функциями $H_k(z)$. Звенья могут иметь *прямую* или *прямую транспонированную* структуру.

Данная структура на практике не нашла широкого применения.

6.3. Описание структур в MATLAB

В MATLAB структура ЛДС описывается в виде объекта `dfilt` (от англ. *Discrete-time filter object*) [41]:

```
Hd = dfilt.structure(input1,...)
```

где:

- Hd — имя объекта `dfilt`, выбираемое пользователем;
- `structure` — функция, задающая структуру объекта `dfilt`;
- `input1, ...` — список параметров функции `structure`.

В табл. 6.1 приведен список типовых структур ЛДС, поддерживаемых MATLAB, и соответствующих им функций `structure` с параметрами. При описании структур использованы аббревиатуры БИХ и КИХ.

Таблица 6.1. Типовые структуры ЛДС и их описание в виде объектов dfilt

Структура	Функция <i>structure</i>	Параметры функции <i>structure</i>
Direct-Form I (прямая БИХ)	<code>df1(a,b)</code>	a, b — векторы коэффициентов передаточной функции (6.1)
Direct-Form II (прямая каноническая БИХ)	<code>df2(a,b)</code>	
Direct-Form I Transposed (прямая транспонированная БИХ)	<code>df1t(a,b)</code>	
Direct-Form II Transposed (прямая каноническая транспонированная БИХ)	<code>df2t(a,b)</code>	
Direct-Form I, SOS (каскадная БИХ из биквадратных звеньев с прямой структурой)	<code>df1sos(sos,G)</code>	sos, G — матрица коэффициентов и вектор коэффициентов усиления биквадратных звеньев в (6.14)
Direct-Form II, SOS (каскадная БИХ из биквадратных звеньев с прямой канонической структурой)	<code>df2sos(sos,G)</code>	
Direct-Form I Transposed, SOS (каскадная БИХ из биквадратных звеньев с прямой транспонированной структурой)	<code>df1tsos(sos,G)</code>	
Direct-Form II Transposed, SOS (каскадная БИХ из биквадратных звеньев с прямой канонической транспонированной структурой)	<code>df2tsos(sos,G)</code>	
State-space (прямая каноническая БИХ с описанием в пространстве состояний)	<code>statespace(A,B,C,D)</code>	A, B, C, D — параметры системы уравнений (6.13)
Direct-Form FIR (прямая КИХ)	<code>dffir(Num)</code>	Num — вектор коэффициентов передаточной функции (6.16)
Direct-Form FIR Transposed (прямая транспонированная КИХ)	<code>dffirt(Num)</code>	
Direct-Form Symmetric FIR (прямая приведенная КИХ с симметричной импульсной характеристикой)	<code>dfsymfir(Num)</code>	
Direct-Form Antisymmetric FIR (прямая приведенная КИХ с антисимметричной импульсной характеристикой)	<code>dfasymfir(Num)</code>	

Первые четыре структуры БИХ ЛДС на практике, как правило, применяют для рекурсивных звеньев 2-го порядка.

Последние две структуры КИХ ЛДС (прямые приведенные) рассматриваются в разд. 15.5.

Выходными параметрами объекта Hd являются его *свойства*, зависящие от конкретной структуры и типа арифметики.

Список свойств выводится в окне **Command Window** по имени объекта:

```
>> Hd
```

Вывод *конкретного свойства* объекта выполняется с помощью функции:

```
>> get(Hd, 'свойство')
```

Для структур КИХ ЛДС *список свойств* объекта dfilt включает:

- FilterStructure — структура ЛДС;
- Arithmetic — тип арифметики, под которым понимают формат представления данных, о чем пойдет речь в главе 8.

По умолчанию выбирается *Arithmetic: 'double'* — представление данных с плавающей точкой (ПТ) с удвоенной точностью;

- Numerator — вектор коэффициентов передаточной функции;
- PersistentMemory — начальные условия при вычислении реакции.

По умолчанию задается *false*, что соответствует ННУ.

Для созданного объекта dfilt *свойство Numerator* совпадает с параметром Num (см. табл. 6.1).

Пример 6.1. Для КИХ ЛДС с передаточной функцией (6.16)

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i},$$

равной

$$H(z) = 0,05 + 0,1z^{-1} + 0,2z^{-2} + 0,5z^{-3} + 0,2z^{-4} + 0,1z^{-5} + 0,05z^{-6}$$

выберем прямую структуру (Direct-Form FIR), создадим объект dfilt с именем H:

```
>> Num = [0.05 0.1 0.2 0.5 0.2 0.1 0.05];
>> H = dfilt.dffir(Num);
```

и выведем свойство Numerator:

```
>> get(H, 'Numerator')
ans =
0.0500 0.1000 0.2000 0.5000 0.2000 0.1000 0.0500
```

которое совпадало с параметром Num. ◀

Для каскадных структур БИХ ЛДС вместо свойства `Numerator` будем иметь два следующих свойства:

- `sosMatrix` — матрица коэффициентов;
- `ScaleValues` — вектор коэффициентов усиления.

Определим параметры `SOS` и `G` (см. табл. 6.1), а затем поясним данные свойства.

Передаточной функции в виде (4.29)

$$H(z) = G \prod_{k=1}^L \left(\frac{1 + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right), \quad (6.18)$$

где $G = b_{01} \cdot b_{02} \cdots b_{0L}$, соответствует матрица коэффициентов

$$\text{sos} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & b_{11} & b_{21} & 1 & a_{11} & a_{21} \\ 1 & b_{12} & b_{22} & 1 & a_{12} & a_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b_{1L} & b_{2L} & 1 & a_{1L} & a_{2L} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

и вектор коэффициентов усиления (скаляр)

$$G \Rightarrow G.$$

Эквивалентному представлению передаточной функции (6.18)

$$H(z) = \prod_{k=1}^L b_{0k} \left(\frac{1 + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right) \quad (6.20)$$

соответствует матрица коэффициентов (6.19) и вектор коэффициентов усиления

$$G \Rightarrow [b_{01} \ b_{02} \ \dots \ b_{0L}].$$

Эквивалентному представлению передаточной функции (6.20)

$$H(z) = \prod_{k=1}^L \left(\frac{b_{0k} + \tilde{b}_{1k}z^{-1} + \tilde{b}_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right), \quad (6.21)$$

где $b_{1k} = \tilde{b}_{1k}/b_{0k}$, $b_{2k} = \tilde{b}_{2k}/b_{0k}$, соответствует матрица коэффициентов

$$\text{sos} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_{01} & \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{21} & 1 & a_{11} & a_{21} \\ b_{02} & \tilde{b}_{12} & \tilde{b}_{22} & 1 & a_{12} & a_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{0L} & \tilde{b}_{1L} & \tilde{b}_{2L} & 1 & a_{1L} & a_{2L} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

и вектор коэффициентов усиления (скаляр)

$$G \Rightarrow 1.$$

Для созданного объекта `dfilt` свойство `sosMatrix` совпадает с параметром `SOS`.

Свойство `ScaleValues` не совпадает с параметром `G` и имеет вид вектора-столбца длины $(L+1)$, элементы которого равны:

- первый — коэффициенту усиления b_{01} на входе первого звена;
- второй — коэффициенту усиления b_{02} на входе второго звена и т. д.;
- последний — коэффициенту усиления на выходе структуры.

Этот коэффициент рассчитывается автоматически и должен учитываться при вычислении реакции. В большинстве случаев он равен единице.

Приведем примеры создания объектов `dfilt` при трех эквивалентных представлениях передаточной функции.

Пример 6.2. Для БИХ ЛДС с передаточной функцией (6.18)

$$H(z) = 0,1044 \frac{1 + 1,7021z^{-1} + 1z^{-2}}{1 - 0,6106z^{-1} + 0,3029z^{-2}} \cdot \frac{1 + 0,886z^{-1} + 1z^{-2}}{1 - 0,0013z^{-1} + 0,8093z^{-2}} \quad (6.23)$$

выберем каскадную структуру с прямой структурой звеньев (Direct-Form I, SOS), создадим объект `dfilt` с именем `H1`:

```
>> SOS = [1 1.7021 1 1 -0.6106 0.3029; 1 0.886 1 1 -0.0013 0.8093];
>> G = 0.1044;
>> H1 = dfilt.df1sos(SOS,G);
```

и выведем его свойство `sosMatrix`:

```
>> get(H1,'sosMatrix')
ans =
    1.0000    1.7021    1.0000    1.0000   -0.6106    0.3029
    1.0000    0.8860    1.0000    1.0000   -0.0013    0.8093
```

которое совпало с параметром `SOS` (6.20), и свойство `ScaleValues`:

```
>> get(H1,'ScaleValues')
ans =
    0.1044
    1.0000
    1.0000
```

представленное вектором-столбцом длины $L+1=3$. ◀

Пример 6.3. Для БИХ ЛДС с передаточной функцией (6.20)

$$H(z) = 0,5477 \frac{1 + 1,7021z^{-1} + 1z^{-2}}{1 - 0,6106z^{-1} + 0,3029z^{-2}} \cdot 0,1906 \frac{1 + 0,886z^{-1} + 1z^{-2}}{1 - 0,0013z^{-1} + 0,8093z^{-2}}$$

выберем ту же структуру (Direct-Form I, SOS), создадим объект `dfilt` с именем `H2`:

```
>> SOS = [1 1.7021 1 1 -0.6106 0.3029; 1 0.886 1 1 -0.0013 0.8093];
>> G = [0.5477 0.1906];
>> H2 = dfilt.df1sos(SOS,G);
```

и выведем его свойство `sosMatrix`:

```
>> get(H2,'sosMatrix')
ans =
    1.0000    1.7021    1.0000    1.0000   -0.6106    0.3029
    1.0000    0.8860    1.0000    1.0000   -0.0013    0.8093
```

которое совпало с параметром `sos` (6.19), и свойство `ScaleValues`:

```
>> get(H3, 'ScaleValues')
ans =
    0.5477
    0.1906
    1.0000
```

представленное вектором-столбцом длины $L+1=3$. ◀

Пример 6.4. Для БИХ ЛДС с передаточной функцией (6.21)

$$H(z) = \frac{0,5477 + 0,9322z^{-1} + 0,5477z^{-2}}{1 - 0,6106z^{-1} + 0,3029z^{-2}} \cdot \frac{0,1906 + 0,1689z^{-1} + 0,1906z^{-2}}{1 - 0,0013z^{-1} + 0,8093z^{-2}}$$

выберем ту же структуру (Direct-Form I, SOS), создадим объект `dfilt` с именем `H3`:

```
>> SOS = [0.5477 0.9322 0.5477 1 -0.6106 0.3029; 0.1906 0.1689 0.1906 1 -0.0013
0.8093];
>> G = 1;
>> H3 = dfilt.df1sos(SOS,G);
```

и выведем его свойство `sosMatrix`:

```
>> get(H3, 'sosMatrix')
ans =
    0.5477    0.9322    0.5477    1.0000   -0.6106    0.3029
    0.1906    0.1689    0.1906    1.0000   -0.0013    0.8093
```

которое совпало с параметром `sos` (6.22), и свойство `ScaleValues`:

```
>> get(H3, 'ScaleValues')
ans =
    1
    1
    1
```

представленное вектором-столбцом длины $L+1=3$. ◀

Параллельная структура БИХ ЛДС с передаточной функцией (6.15) не поддерживается MATLAB, но при необходимости может быть реализована с помощью функции `structure`:

`parallel(Hd1, Hd2, ...)`

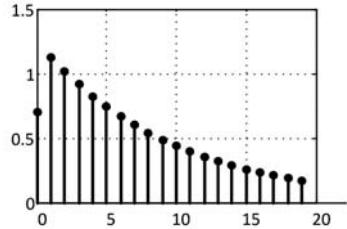
где в скобках указаны имена объектов `dfilt` для структур рекурсивных звеньев 2-го порядка, которые предварительно создаются пользователем.

При известной структуре ЛДС вычисление ее реакции выполняется с помощью функции:

`y = filter(H, x)`

где `H` — имя объекта `dfilt`; `x`, `y` — векторы отсчетов входного и выходного сигналов.

ГЛАВА 7



Фазовые звенья

В разд. 5.4 было установлено, что вид АЧХ и ФЧХ рекурсивной ЛДС полностью определяется нулями и полюсами ее передаточной функции. При этом накладывалось единственное ограничение: полюсы устойчивой ЛДС должны располагаться внутри единичного круга.

В этой главе рассматриваются дополнительные ограничения (условия) для нулей, определяющие особые свойства частотных характеристик ЛДС.

7.1. Минимально-фазовые и неминимально-фазовые ЛДС

По признаку расположения нулей на комплексной z -плоскости выделяют два класса передаточных функций и соответствующих им рекурсивных ЛДС:

- **минимально-фазовые** — если *все нули расположены в пределах единичного круга*;
- **неминимально-фазовые** — если *хотя бы один нуль расположен вне единичного круга*.

Поясним смысл данных определений на простом примере. Рассмотрим два звена 1-го порядка:

- *минимально-фазовое* звено с передаточной функцией

$$H_1(z) = \frac{1 - b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}, \quad 0 < b_1 < 1,$$

имеющей один вещественный нуль $\beta_1^{(1)}$ *внутри* единичного круга

$$\beta_1^{(1)} = b_1;$$

- *неминимально-фазовое* звено с передаточной функцией

$$H_2(z) = \frac{b_1 - z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}, \quad 0 < b_1 < 1,$$

имеющей один вещественный нуль $\beta_1^{(2)}$ вне единичного круга

$$\beta_1^{(2)} = 1/b_1.$$

Коэффициенты знаменателей передаточных функций, а следовательно, и вещественные полюсы $\alpha_1 = -a_1$, одинаковые.

Определим АЧХ и ФЧХ звеньев. Подставляя $z = e^{j\hat{\omega}}$ и раскрывая экспоненты, запишем их частотные характеристики:

$$H_1(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{1 - b_1 e^{-j\hat{\omega}}}{1 + a_1 e^{-j\hat{\omega}}} = \frac{1 - b_1 \cos \hat{\omega} + j b_1 \sin \hat{\omega}}{1 + a_1 \cos \hat{\omega} - j a_1 \sin \hat{\omega}},$$

$$H_2(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{b_1 - e^{-j\hat{\omega}}}{1 + a_1 e^{-j\hat{\omega}}} = \frac{b_1 - \cos \hat{\omega} + j \sin \hat{\omega}}{1 + a_1 \cos \hat{\omega} - j a_1 \sin \hat{\omega}}.$$

Отсюда получаем *одинаковые* АЧХ минимально-фазового и неминимально-фазового звеньев:

$$A_1(\hat{\omega}) = |H_1(e^{j\hat{\omega}})| = \sqrt{\frac{(1 - b_1 \cos \hat{\omega})^2 + (b_1 \sin \hat{\omega})^2}{(1 + a_1 \cos \hat{\omega})^2 + (a_1 \sin \hat{\omega})^2}} = \sqrt{\frac{1 - 2b_1 \cos \hat{\omega} + b_1^2}{1 + 2a_1 \cos \hat{\omega} + a_1^2}},$$

$$A_2(\hat{\omega}) = |H_2(e^{j\hat{\omega}})| = \sqrt{\frac{(b_1 - \cos \hat{\omega})^2 + (\sin \hat{\omega})^2}{(1 + a_1 \cos \hat{\omega})^2 + (a_1 \sin \hat{\omega})^2}} = \sqrt{\frac{1 - 2b_1 \cos \hat{\omega} + b_1^2}{1 + 2a_1 \cos \hat{\omega} + a_1^2}}$$

и *различные* ФЧХ:

$$\varphi_1(\hat{\omega}) = \arctg \frac{b_1 \sin \hat{\omega}}{1 - b_1 \cos \hat{\omega}} - \arctg \frac{-a_1 \sin \hat{\omega}}{1 + a_1 \cos \hat{\omega}} = \underline{\arctg \frac{b_1 \sin \hat{\omega}}{1 - b_1 \cos \hat{\omega}}} + \arctg \frac{a_1 \sin \hat{\omega}}{1 + a_1 \cos \hat{\omega}},$$

$$\varphi_2(\hat{\omega}) = \arctg \frac{\sin \hat{\omega}}{b_1 - \cos \hat{\omega}} - \arctg \frac{-a_1 \sin \hat{\omega}}{1 + a_1 \cos \hat{\omega}} = \underline{\arctg \frac{\sin \hat{\omega}}{b_1 - \cos \hat{\omega}}} + \arctg \frac{a_1 \sin \hat{\omega}}{1 + a_1 \cos \hat{\omega}}.$$

Сравним данные ФЧХ: они отличаются только первыми слагаемыми (подчеркнутыми). Обозначим их:

$$\psi_1(\hat{\omega}) = \arctg \frac{b_1 \sin \hat{\omega}}{1 - b_1 \cos \hat{\omega}};$$

$$\psi_2(\hat{\omega}) = \arctg \frac{\sin \hat{\omega}}{b_1 - \cos \hat{\omega}}.$$

Разделим числитель и знаменатель $\psi_1(\hat{\omega})$ на b_1

$$\psi_1(\hat{\omega}) = \arctg \frac{\sin \hat{\omega}}{1/b_1 - \cos \hat{\omega}},$$

и сравним $\psi_1(\hat{\omega})$ с $\psi_2(\hat{\omega})$. При $0 < b_1 < 1$ обратная величина $1/b_1 > b_1$, следовательно, в основной полосе частот $\hat{\omega} = [0; \pi]$ справедливо соотношение

$$\left| \frac{\sin \hat{\omega}}{1/b_1 - \cos \hat{\omega}} \right| < \left| \frac{\sin \hat{\omega}}{b_1 - \cos \hat{\omega}} \right|,$$

а потому

$$|\psi_1(\hat{\omega})| < |\psi_2(\hat{\omega})|.$$

Это означает, что приращение фазы — *набег фазы* — по абсолютной величине для *минимально-фазового* звена оказывается меньшим, отсюда и название.

В рассматриваемых далее примерах частотные характеристики ЛДС анализируются в GUI FDATool, и для этого коэффициенты передаточной функции ЛДС импортируются из Workspace (см. разд. 1.7 *приложения 1*).

Пример 7.1. Заданы передаточные функции звеньев 1-го порядка:

$$H_1(z) = \frac{1 - 0,8z^{-1}}{1 + 0,5z^{-1}} \quad \text{и} \quad H_2(z) = \frac{0,8 - z^{-1}}{1 + 0,5z^{-1}}.$$

Определить, какое из них является минимально-фазовым. Изобразить карты нулей и полюсов, построить графики АЧХ и ФЧХ.

Решение. Нуль передаточной функции $H_1(z)$ находится внутри единичного круга

$$\beta_1^{(1)} = -b_1 = 0,8,$$

значит, это звено минимально-фазовое, а нуль передаточной функции $H_2(z)$ — вне единичного круга

$$\beta_1^{(2)} = 1/b_1 = 1/0,8 = 1,25,$$

значит, это звено неминимально-фазовое.

Импортируем из Workspace в GUI FDATool коэффициенты передаточной функции $H_1(z)$:

```
>> b1 = [1 -0.8];
>> a1 = [1 0.5];
```

передаточной функции $H_2(z)$:

```
>> b2 = [0.8 -1];
>> a2 = [1 0.5];
```

и проанализируем характеристики звеньев (рис. 7.1, *a*, *б*). Они имеют одинаковые АЧХ и различные ФЧХ, при этом набег фазы у минимально-фазового звена меньший.◀

Полученный результат распространяется на рекурсивную ЛДС произвольного порядка: при одинаковых полюсах *набег фазы* по абсолютной величине будет *меньшим* у *минимально-фазовой* ЛДС.

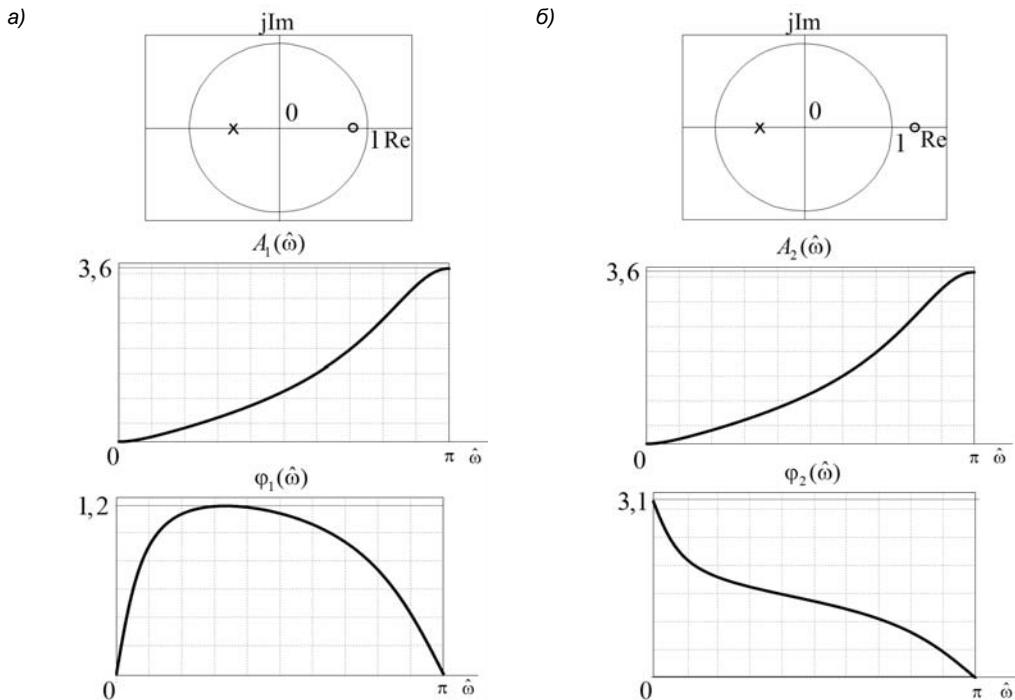


Рис. 7.1. Карты нулей и полюсов, АЧХ и ФЧХ звеньев 1-го порядка:
минимально-фазового (*а*) и неминимально-фазового (*б*)

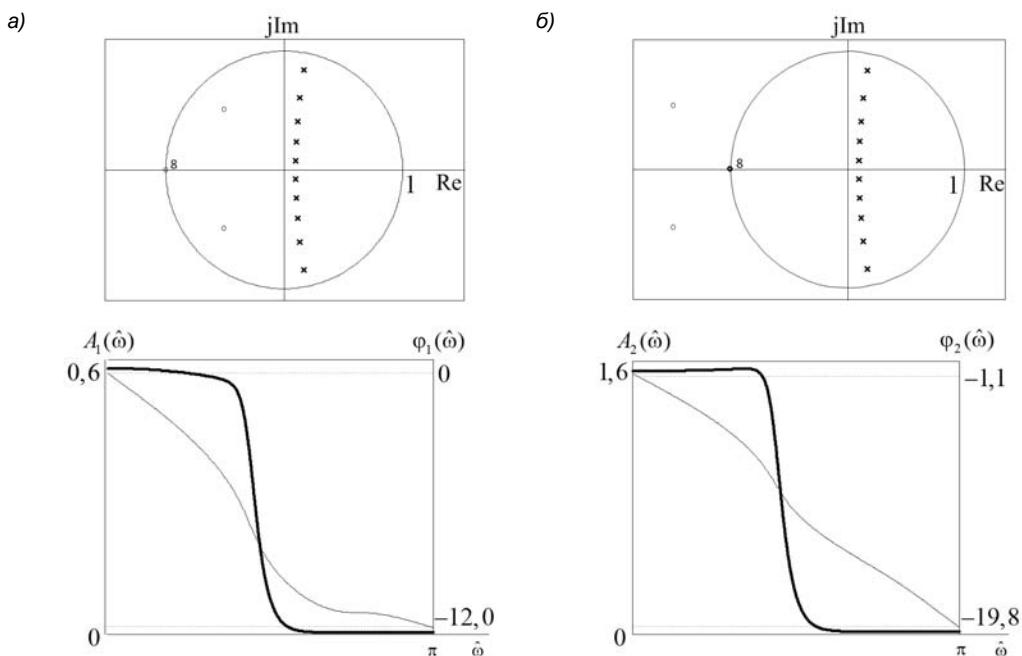


Рис. 7.2. Карты нулей и полюсов, АЧХ и ФЧХ рекурсивной ЛДС 10-го порядка:
минимально-фазовой (*а*) и неминимально-фазовой (*б*)

Это иллюстрирует рис. 7.2, где представлены карты нулей и полюсов (число 8 соответствует 8-кратным нулям), АЧХ (жирные линии) и ФЧХ минимально-фазовой и неминимально-фазовой рекурсивной ЛДС 10-го порядка.

7.2. Определение и свойства фазового звена

Фазовым звеном называют рекурсивную ЛДС, АЧХ которой в основной полосе частот $[0; \pi]$ не зависит от частоты

$$A(\hat{\omega}) = G = \text{const}.$$

Поскольку фазовые звенья не обладают частотной избирательностью, их также называют *всепропускающими фильтрами (Allpass filter)*.

Представим передаточную функцию рекурсивной ЛДС (4.5)

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}$$

в виде произведения простейших множителей (4.28), где для порядка ЛДС принято обозначение $R = (M - 1)$:

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^R \left(\frac{1 - \beta_k z^{-1}}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right), \quad (7.1)$$

и определим АЧХ и ФЧХ ЛДС при *обратном соотношении для нулей и полюсов*:

$$\beta_k = 1/\alpha_k, \quad k=1, 2, \dots, (M-1), \quad (7.2)$$

что эквивалентно соотношению для *пар нулей и полюсов*

$$\beta_k \times \alpha_k = 1, \quad k=1, 2, \dots, (M-1). \quad (7.3)$$

Полюсы устойчивой ЛДС имеют ограничение $|\alpha_k| < 1$, откуда следует автоматическое ограничение для нулей $|\beta_k| > 1$, и потому условию (7.3) отвечают только *неминимально-фазовые* ЛДС.

Запишем передаточную функцию (7.1), подставляя $\beta_k = 1/\alpha_k$:

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^R \frac{1 - (1/\alpha_k) z^{-1}}{(1 - \alpha_k z^{-1})} = \frac{b_0}{\prod_{k=1}^R \alpha_k} \prod_{k=1}^R \left(\frac{\alpha_k - z^{-1}}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right) = G \prod_{k=1}^R \left(\frac{\alpha_k - z^{-1}}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right), \quad (7.4)$$

где G — множитель, равный

$$G = \frac{b_0}{\prod_{k=1}^R \alpha_k} = \text{const}. \quad (7.5)$$

Вынесем z^{-1} за скобки каждого k -го простейшего множителя в числителе (7.4), а затем z^{-R} — за знак произведения:

$$H(z) = G \prod_{k=1}^R \left(\frac{\alpha_k - z^{-1}}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right) = G z^{-R} \prod_{k=1}^R \left(\frac{\alpha_k z - 1}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right) = G z^{-R} \prod_{k=1}^R H_k(z).$$

Подставляя $z = e^{j\hat{\omega}}$, получим частотную характеристику ЛДС:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = G e^{-jR\hat{\omega}} \prod_{k=1}^R \left(\frac{\alpha_k e^{j\hat{\omega}} - 1}{1 - \alpha_k e^{-j\hat{\omega}}} \right) = G e^{-jR\hat{\omega}} \prod_{k=1}^R H_k(e^{j\hat{\omega}}).$$

Выразим $H_k(e^{j\hat{\omega}})$ через модуль и аргумент:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = G e^{-jR\hat{\omega}} \prod_{k=1}^R |H_k(e^{j\hat{\omega}})| e^{j \arg\{H_k(e^{j\hat{\omega}})\}}. \quad (7.6)$$

Модуль $H_k(e^{j\hat{\omega}})$ равен единице:

$$|H_k(e^{j\hat{\omega}})| = \left| \frac{-(1 - \alpha_k \cos \hat{\omega}) + j\alpha_k \sin \hat{\omega}}{(1 - \alpha_k \cos \hat{\omega}) + j\alpha_k \sin \hat{\omega}} \right| = \sqrt{\frac{(1 - \alpha_k \cos \hat{\omega})^2 + (\alpha_k \sin \hat{\omega})^2}{(1 - \alpha_k \cos \hat{\omega})^2 + (\alpha_k \sin \hat{\omega})^2}} = 1,$$

поэтому частотная характеристика (7.6) принимает вид

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = G e^{-jR\hat{\omega}} \prod_{k=1}^R e^{j \arg\{H_k(e^{j\hat{\omega}})\}}. \quad (7.7)$$

В этом случае АЧХ ЛДС оказывается *частотно независимой*:

$$A(\hat{\omega}) = |H(e^{j\hat{\omega}})| = |G| = \text{const}, \quad (7.8)$$

что по определению соответствует *фазовому звену*, а ФЧХ, равной сумме аргументов экспонент:

$$\varphi(\hat{\omega}) = \arg\{H(e^{j\hat{\omega}})\} = -R\hat{\omega} + \sum_{k=1}^R \arg\{H_k(e^{j\hat{\omega}})\}.$$

Определив аргумент $H_k(e^{j\hat{\omega}})$:

$$\arg\{H_k(e^{j\hat{\omega}})\} = \arctg \frac{\alpha_k \sin \hat{\omega}}{-(1 - \alpha_k \cos \hat{\omega})} - \arctg \frac{\alpha_k \sin \hat{\omega}}{(1 - \alpha_k \cos \hat{\omega})} = -2 \arctg \frac{\alpha_k \sin \hat{\omega}}{(1 - \alpha_k \cos \hat{\omega})},$$

получим ФЧХ фазового звена, зависящую от порядка ЛДС R и полюсов ее передаточной функции:

$$\varphi(\hat{\omega}) = -R\hat{\omega} - 2 \sum_{k=1}^R \arctg \frac{\alpha_k \sin \hat{\omega}}{(1 - \alpha_k \cos \hat{\omega})}. \quad (7.9)$$

Таким образом, соотношение (7.3) можно считать *условием существования фазового звена*. Приведем основные свойства фазовых звеньев:

- фазовые звенья являются *неминимально-фазовыми* ЛДС по определению;
- частотно независимая АЧХ фазового звена, согласно (7.5), определяется только коэффициентом усиления b_0 и полюсами α_k ;
- нелинейная ФЧХ фазового звена в основной полосе частот $[0; \pi]$ является гладкой монотонной неположительной функцией со значениями на границах полосы $\phi(0) = 0$ и $\phi(\pi) = -R\pi$;
- соответственно, групповое время задержки (ГВЗ)

$$\tau(\hat{\omega}) = -\frac{d\phi(\hat{\omega})}{d\hat{\omega}}$$

будет неотрицательной функцией.

7.3. Фазовый корректор

Условием безыскаженной передачи сигнала является *частотно независимая* АЧХ и *линейная* ФЧХ (см. разд. 5.5) ЛДС. Однако во многих случаях система не отвечает данным условиям, и сигнал на ее выходе оказывается искаженным. Классическим примером подобной искажающей системы является канал связи. Искажения сигнала, обусловленные частотной зависимостью АЧХ системы, называют *амплитудными*, а нелинейностью ФЧХ — *фазовыми*.

Амплитудные искажения компенсируют каскадным подключением к искажающей системе амплитудного корректора (рис. 7.3). Во избежание дополнительных фазовых искажений, целесообразно выбрать амплитудный корректор с линейной ФЧХ [41].

Фазовые искажения компенсируют каскадным подключением к амплитудному корректору фазового корректора (см. рис. 7.3).

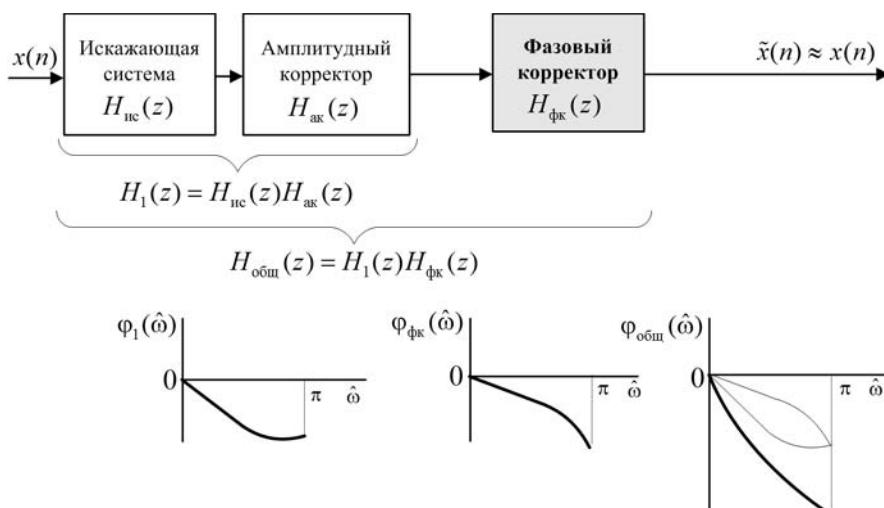


Рис. 7.3. Компенсация амплитудных и фазовых искажений

Общая передаточная функция $H_{\text{общ}}(z)$ каскадного соединения равна произведению

$$H_{\text{общ}}(z) = H_{\text{иc}}(z)H_{\text{ак}}(z)H_{\phi\kappa}(z).$$

В предположении, что амплитудный корректор не вносит фазовых искажений, ее можно представить в виде

$$H_{\text{общ}}(z) = H_1(z)H_{\phi\kappa}(z)$$

и записать общую частотную характеристику:

$$\begin{aligned} H_{\text{общ}}(e^{j\hat{\omega}}) &= H_1(e^{j\hat{\omega}})H_{\phi\kappa}(e^{j\hat{\omega}}) = \left|H_1(e^{j\hat{\omega}})\right|e^{j\varphi_1(\hat{\omega})}\left|H_{\phi\kappa}(e^{j\hat{\omega}})\right|e^{j\varphi_{\phi\kappa}(\hat{\omega})} = \\ &= \left|H_1(e^{j\hat{\omega}})\right|\left|H_{\phi\kappa}(e^{j\hat{\omega}})\right|e^{j[\varphi_1(\hat{\omega})+\varphi_{\phi\kappa}(\hat{\omega})]}. \end{aligned}$$

Для того чтобы фазовый корректор не вносил амплитудных искажений, его АЧХ должна быть частотно независимой

$$\left|H_{\phi\kappa}(e^{j\hat{\omega}})\right| = \text{const},$$

а для того чтобы минимизировать фазовые искажения, ФЧХ каскадного соединения

$$\varphi_{\text{общ}}(\hat{\omega}) = \varphi_1(\hat{\omega}) + \varphi_{\phi\kappa}(\hat{\omega})$$

должна иметь отклонения от линейной ФЧХ в пределах заданных допусков.

Фазовые корректоры реализуют на базе фазовых звеньев. Синтез фазового корректора представляет собой существенно более сложную задачу по сравнению с амплитудным корректором, и в рамках данной книги не рассматривается.

Фактически процедура синтеза сводится к решению оптимизационной задачи — расчету коэффициентов передаточной функции фазового звена минимального порядка, при котором ФЧХ $\varphi_{\text{общ}}(\hat{\omega})$ отклоняется от линейной ФЧХ в пределах заданных допусков. Процедура завершается выбором структуры фазового звена.

Рассмотрим передаточные функции и частотные характеристики простейших фазовых звеньев 1-го и 2-го порядков, обобщим результат на фазовое звено произвольного порядка, и определим его структуру, взаимосвязанную с видом передаточной функции.

7.4. Фазовое звено 1-го порядка

Передаточная функция звена 1-го порядка (4.9)

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}},$$

где для удобства принято $b_0 = 1$, имеет одну пару *вещественных* нулей и полюсов:

$$\begin{cases} \beta_1 = -b_1; \\ \alpha_1 = -a_1. \end{cases}$$

В фазовом звене 1-го порядка ($\Phi 3-1$) эта пара связана соотношением (7.3)

$$\alpha_1 \beta_1 = 1,$$

что эквивалентно обратному соотношению для нуля и полюса (7.2)

$$\beta_1 = 1/\alpha_1, \quad (7.10)$$

откуда имеем соотношение для коэффициентов числителя

$$b_1 = 1/a_1$$

и передаточную функцию $\Phi 3-1$

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} = \frac{1 + \frac{1}{a_1} z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{a_1 + z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}},$$

совпадающую с (7.4) при $R = 1$:

$$H(z) = G \frac{\alpha_1 - z^{-1}}{1 - \alpha_1 z^{-1}} = G \frac{-a_1 - z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} = \frac{1}{a_1} \cdot \left(\frac{a_1 + z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \right), \quad (7.11)$$

с множителем G (7.5), равным

$$G = \frac{b_0}{\alpha_1} = \frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{-a_1}.$$

Обратному соотношению для нуля и полюса (7.10) соответствует зеркальное отображение коэффициентов числителя и знаменателя дробно-рациональной функции (7.11) передаточной функции без учета множителя $|G|$.

Подставляя $z = e^{j\hat{\omega}}$ в (7.11), получим частотную характеристику $\Phi 3-1$ (7.7)

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = G e^{-j\hat{\omega}} e^{j \arg\{H(e^{j\hat{\omega}})\}},$$

частотно независимую АЧХ (7.8)

$$A(\hat{\omega}) = |G| = \left| \frac{1}{\alpha_1} \right| = \left| \frac{1}{a_1} \right| = \text{const} > 1$$

и ФЧХ (7.9)

$$\varphi(\hat{\omega}) = -\hat{\omega} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha_1 \sin \hat{\omega}}{1 - \alpha_1 \cos \hat{\omega}} = -\hat{\omega} + 2 \operatorname{arctg} \frac{a_1 \sin \hat{\omega}}{1 + a_1 \cos \hat{\omega}}.$$

Пример 7.2. Фазовое звено 1-го порядка имеет полюс $\alpha_1 = 0,8$. Определить нуль, записать передаточную функцию, изобразить карту нулей и полюсов, построить графики АЧХ, ФЧХ и ГВЗ.

Решение. Согласно (7.10), вещественный нуль равен

$$\beta_1 = 1/\alpha_1 = 1/0,8 = 1,25.$$

Вычислим коэффициент знаменателя

$$a_1 = -\alpha_1 = -0,8$$

и запишем передаточную функцию ФЗ-1 (7.11)

$$H(z) = \frac{1}{-0,8} \cdot \frac{-0,8 + z^{-1}}{1 - 0,8z^{-1}} = 1,25 \frac{0,8 - z^{-1}}{1 - 0,8z^{-1}} = \frac{1 - 1,25z^{-1}}{1 - 0,8z^{-1}}.$$

Импортируем из Workspace в GUI FDATool ее коэффициенты:

```
>> b = [1 -1.25];
>> a = [1 -0.8];
```

и проанализируем характеристики ФЗ-1 (рис. 7.4, а): звено неминимально-фазовое с частотно независимой АЧХ, неположительной ФЧХ и неотрицательным ГВЗ. ▲

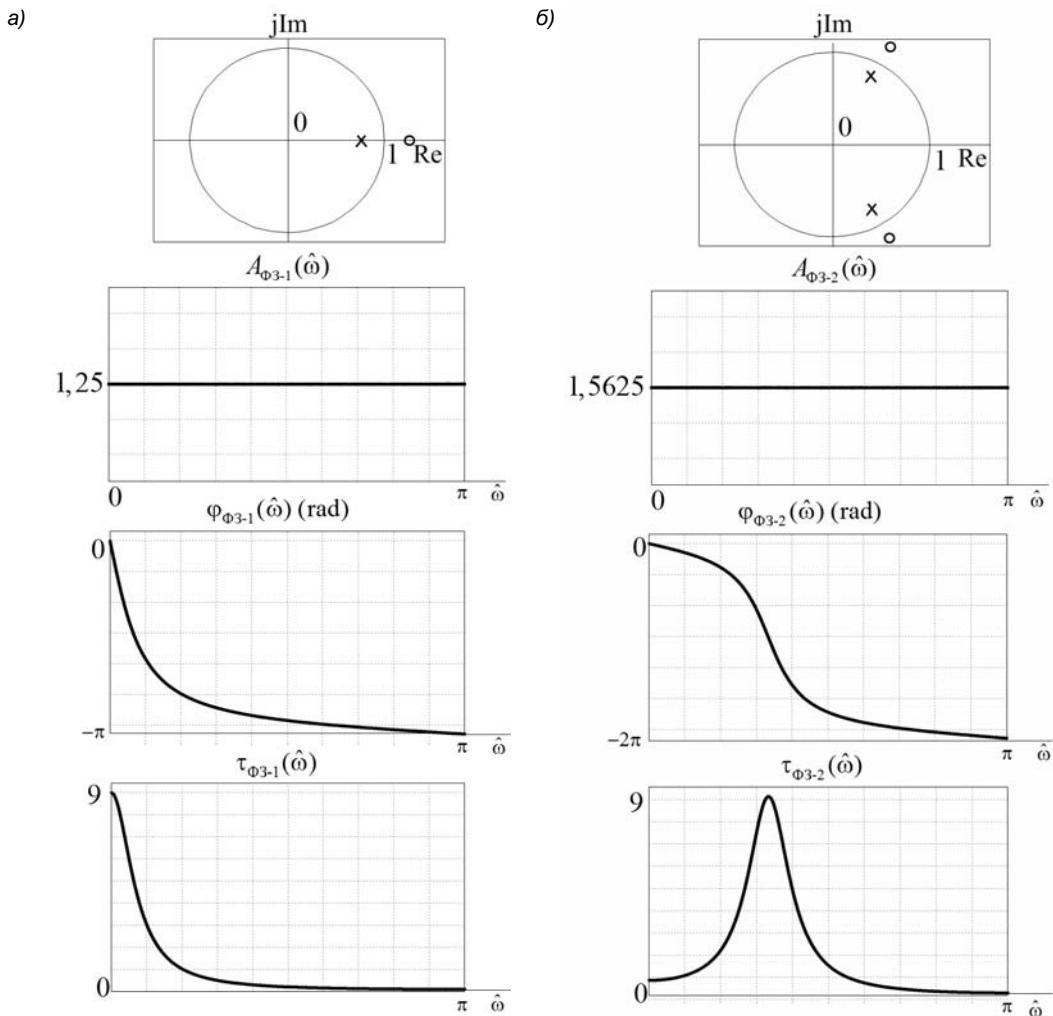


Рис. 7.4. Карта нулей и полюсов, АЧХ, ФЧХ и ГВЗ фазовых звеньев 1-го (а) и 2-го (б) порядков

7.5. Фазовое звено 2-го порядка

Передаточная функция звена 2-го порядка (4.10)

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

где для удобства принято $b_0 = 1$, в общем случае имеет *две пары комплексно сопряженных нулей и полюсов*:

$$\begin{cases} \alpha_1 = r_* e^{j\varphi_*}; \\ \beta_1 = r_\circ e^{j\varphi_\circ}; \\ \alpha_2 = r_* e^{-j\varphi_*}; \\ \beta_2 = r_\circ e^{-j\varphi_\circ}, \end{cases}$$

где r_* и $\pm\varphi_*$ — радиус и углы (рад) комплексно сопряженных полюсов, а r_\circ и $\pm\varphi_\circ$ — комплексно сопряженных нулей.

В *фазовом звене* 2-го порядка (ФЗ-2) нули и полюсы этих пар связаны соотношением (7.3):

$$\begin{cases} \alpha_1 \beta_1 = 1; \\ \alpha_2 \beta_2 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_* e^{j\varphi_*} r_\circ e^{j\varphi_\circ} = 1; \\ r_* e^{-j\varphi_*} r_\circ e^{-j\varphi_\circ} = 1, \end{cases}$$

что эквивалентно обратному соотношению для пар нулей и полюсов (7.2)

$$\begin{cases} \beta_1 = 1/\alpha_1; \\ \beta_2 = 1/\alpha_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = r_\circ e^{j\varphi_\circ} = \frac{1}{r_*} e^{-j\varphi_*}; \\ \beta_2 = r_\circ e^{-j\varphi_\circ} = \frac{1}{r_*} e^{j\varphi_*}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1,2} = r_* e^{\pm j\varphi_*}; \\ \beta_{1,2} = \frac{1}{r_*} e^{\mp j\varphi_*}. \end{cases} \quad (7.12)$$

Передаточная функция ФЗ-2 совпадает с (7.4) при $R = 2$:

$$H(z) = G \frac{\alpha_1 - z^{-1}}{1 - \alpha_1 z^{-1}} \cdot \frac{\alpha_2 - z^{-1}}{1 - \alpha_2 z^{-1}}, \quad (7.13)$$

с множителем G (7.5), равным

$$G = \frac{b_0}{\alpha_1 \alpha_2} = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} = \frac{1}{r_*^2}. \quad (7.14)$$

Подставляя $z = e^{j\hat{\omega}}$ в (7.13), получим частотную характеристику ФЗ-2 (7.7)

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = G e^{-j2\hat{\omega}} \prod_{k=1}^2 e^{j\arg\{H_k(e^{j\hat{\omega}})\}},$$

частотно независимую АЧХ (7.8)

$$A(\hat{\omega}) = |G| = \left| \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \right| = \frac{1}{r_*^2} = \text{const} > 1 \quad (7.15)$$

и ФЧХ (7.9)

$$\varphi(\hat{\omega}) = -2\hat{\omega} - 2 \sum_{k=1}^2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha_k \sin \hat{\omega}}{(1 - \alpha_k \cos \hat{\omega})}. \quad (7.16)$$

Представим передаточную функцию (7.13) в дробно-рациональном виде и выразим АЧХ и ФЧХ ее через коэффициенты. Для этого подставим полюсы $\alpha_{1,2} = r_* e^{\pm j\varphi_*}$ в (7.13):

$$H(z) = G \frac{r_* e^{j\varphi_*} - z^{-1}}{1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1}} \cdot \frac{r_* e^{-j\varphi_*} - z^{-1}}{1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1}}.$$

Приведем к общему знаменателю:

$$H(z) = G \frac{r_*^2 - r_* (e^{-j\varphi_*} + r_* e^{j\varphi_*}) z^{-1} + z^{-2}}{1 - r_* (e^{-j\varphi_*} + r_* e^{j\varphi_*}) z^{-1} + r_*^2 z^{-2}}$$

и применим формулу Эйлера для косинуса:

$$H(z) = G \frac{r_*^2 - 2r_* \cos \varphi_* z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r_* \cos \varphi_* z^{-1} + r_*^2 z^{-2}}.$$

Согласно (3.25)–(3.26):

$$\begin{cases} a_1 = -2r_* \cos \varphi_*; \\ a_2 = r_*^2, \end{cases} \quad (7.17)$$

следовательно, множитель G (7.14) равен

$$G = 1/a_2,$$

дробно-рациональное представление передаточной функции (7.13) имеет вид

$$H(z) = G \frac{a_2 + a_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{1}{a_2} \left(\frac{a_2 + a_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \right), \quad (7.18)$$

и частотно независимая АЧХ (7.15) равна

$$A(\hat{\omega}) = \frac{1}{a_2} = \text{const} > 1.$$

Подобно ФЗ-1, обратному соотношению для пар нулей и полюсов (7.12) соответствует зеркальное отображение коэффициентов числителя и знаменателя дробно-рациональной функции ФЗ-2 (7.18) без учета множителя G .

Вынесем z^{-2} в числителе (7.13) за знак произведения:

$$H(z) = \frac{1}{a_2} \cdot \frac{a_2 + a_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{1}{a_2} z^{-2} \frac{a_2 z^2 + a_1 z^1 + 1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

подставим $z = e^{j\hat{\omega}}$:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{1}{a_2} z^{-2j\hat{\omega}} \frac{a_2 e^{2j\hat{\omega}} + a_1 e^{j\hat{\omega}} + 1}{1 + a_1 e^{-j\hat{\omega}} + a_2 e^{-2j\hat{\omega}}}$$

и применим формулу Эйлера

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{1}{a_2} z^{-2j\hat{\omega}} \frac{(1 + a_1 \cos \hat{\omega} + a_2 \cos 2\hat{\omega}) + j(a_1 \sin \hat{\omega} + a_2 \sin 2\hat{\omega})}{(1 + a_1 \cos \hat{\omega} + a_2 \cos 2\hat{\omega}) - j(a_1 \sin \hat{\omega} + a_2 \sin 2\hat{\omega})}.$$

В числителе и знаменателе дроби имеем комплексно сопряженные функции, следовательно, ее модуль равен единице, а аргумент — удвоенному аргументу числителя, откуда получаем ФЧХ (7.16), выраженную через коэффициенты передаточной функции ФЗ-2 (7.18):

$$\varphi(\hat{\omega}) = -2\hat{\omega} + 2\arctg \frac{a_1 \sin \hat{\omega} + a_2 \sin 2\hat{\omega}}{1 + a_1 \cos \hat{\omega} + a_2 \cos 2\hat{\omega}}. \quad (7.19)$$

Пример 7.3. Фазовое звено 2-го порядка имеет комплексно сопряженные полюсы $\alpha_{1,2} = 0,8e^{\pm j\pi/3}$. Определить нули, записать передаточную функцию, изобразить карту нулей и полюсов, построить графики АЧХ, ФЧХ и ГВЗ.

Решение. Согласно (7.12), комплексно сопряженные нули ФЗ-2 равны

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{0,8} e^{\mp j\pi/3} = 1,25 e^{\mp j\pi/3}.$$

Вычислим коэффициенты знаменателя (7.17):

$$\begin{cases} a_1 = -2r_* \cos \varphi_* = -1,6 \cos(\pi/3) = -0,8; \\ a_2 = r_*^2 = 0,8^2 = 0,64 \end{cases}$$

и запишем передаточную функцию ФЗ-2 (7.18)

$$H(z) = \frac{1}{a_2} \cdot \frac{a_2 + a_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{1}{0,64} \cdot \frac{0,64 - 0,8z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,8z^{-1} + 0,64z^{-2}},$$

откуда имеем

$$H(z) = 1,5625 \frac{0,64 - 0,8z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,8z^{-1} + 0,64z^{-2}} = \frac{1 - 1,25z^{-1} + 1,5625z^{-2}}{1 - 0,8z^{-1} + 0,64z^{-2}}. \quad (7.20)$$

Импортируем из Workspace в GUI FDATool коэффициенты передаточной функции:

```
>> b = [1 -1.25 1.5625];
>> a = [1 -0.8 0.64];
```

и проанализируем характеристики ФЗ-2 (рис. 7.4, б): звено неминимально-фазовое с частотно независимой АЧХ, неположительной ФЧХ и неотрицательным ГВЗ. ◀

7.6. Фазовое звено произвольного порядка

В общем случае фазовое звено имеет комплексно сопряженные нули и полюсы, поэтому его передаточную функцию можно представить в виде произведения передаточных функций фазовых звеньев 2-го порядка (7.18)

$$H(z) = G \prod_{k=1}^L \left(\frac{a_{2k} + a_{1k}z^{-1} + z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right) = G \prod_{k=1}^L H_k(z), \quad (7.21)$$

где $L = \text{int } R/2$ — количество ФЗ-2, а множитель G равен

$$G = \frac{1}{\prod_{k=1}^L a_{2k}} = \text{const.}$$

Значение частотно независимой АЧХ будет равно множителю G , а ФЧХ равна сумме ФЧХ (7.19) звеньев 2-го порядка

$$\phi(\hat{\omega}) = -R\hat{\omega} + 2 \sum_{k=1}^L \operatorname{arctg} \frac{a_{1k} \sin \hat{\omega} + a_{2k} \sin 2\hat{\omega}}{1 + a_{1k} \cos \hat{\omega} + a_{2k} \cos 2\hat{\omega}}.$$

В эквивалентном дробно-рациональном представлении передаточной функции (7.21) сохраняется *зеркальное отображение коэффициентов числителя и знаменателя*:

$$H(z) = G \frac{a_R + a_{R-1}z^{-1} + a_{R-2}z^{-2} + \dots + a_2z^{-(R-2)} + a_1z^{-(R-1)} + z^{-R}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_{R-2}z^{-(R-2)} + a_{R-1}z^{-(R-1)} + a_Rz^{-R}}. \quad (7.22)$$

Пример 7.4. Получить передаточные функции двух фазовых звеньев 2-го порядка — ФЗ-2 (1) и ФЗ-2 (2). Записать передаточную функцию фазового звена 4-го порядка (ФЗ-4) в виде произведения (7.21) и дробно-рациональном виде (7.22).

Решение. В качестве ФЗ-2 (1) выберем фазовое звено, передаточная функция которого (7.20) получена в примере 7.3

$$H_1(z) = 1,5625 \frac{0,64 - 0,8z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,8z^{-1} + 0,64z^{-2}}.$$

Передаточную функцию ФЗ-2 (2) получим аналогичным образом, задавая комплексно сопряженные полюсы $\alpha_{1,2} = 0,5e^{\pm j\pi/4}$ (рекомендуем это выполнить самостоятельно)

$$H_2(z) = 4 \frac{0,25 - 0,7071z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,7071z^{-1} + 0,25z^{-2}}.$$

Передаточная функция ФЗ-4 (7.21) будет равна

$$H(z) = GH_1(z)H_2(z) = 6,25 \cdot \frac{0,64 - 0,8z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,8z^{-1} + 0,64z^{-2}} \cdot \frac{0,25 - 0,7071z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,7071z^{-1} + 0,25z^{-2}}.$$

По определению коэффициенты произведения двух многочленов равны свертке коэффициентов сомножителей. Определим их для ФЗ-4 в MATLAB с помощью функции conv:

```
>> b1 = [0.64 -0.8 1]; b2 = [0.25 -0.7071 1];
>> b = conv(b1,b2)
b = 0.1600   -0.6525    1.4557   -1.5071    1.0000
>> a1 = [1 -0.8 0.64]; a2 = [1 -0.7071 0.25];
>> a = conv(a1,a2)
a = 1.0000   -1.5071    1.4557   -0.6525    0.1600
```

и получим дробно-рациональную функцию (7.22)

$$H(z) = 6,25 \frac{0,16 - 0,6525z^{-1} + 1,4557z^{-2} - 1,5071z^{-3} + z^{-4}}{1 - 1,5071z^{-1} + 1,4557z^{-2} - 0,6525z^{-3} + 0,16z^{-4}}. \blacktriangleleft$$

7.7. Структура фазового звена

В передаточных функциях (7.21) и (7.22) множитель G влияет только на значение частотно независимой АЧХ. Обычно представляют интерес ее *нормированное* значение, равное единице, что равносильно $G=1$, и далее подразумевается по умолчанию.

Передаточной функции в виде произведения

$$H(z) = \prod_{k=1}^L \left(\frac{a_{2k} + a_{1k}z^{-1} + z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right)$$

соответствует каскадная структура фазового звена из фазовых звеньев 2-го порядка (ФЗ-2) прямой структуры либо ее любой модификации (см. разд. 6.1.1).

На рис. 7.5 приведена каскадная структура фазового звена с прямой структурой звеньев.

Алгоритм вычисления реакции $y(n)$ фазового звена описывается в виде системы разностных уравнений с последовательным вычислением реакций ФЗ-2 $y_k(n)$, $k = 1, 2, \dots, L$, $y_L(n) = y(n)$, с передаточными функциями $H_k(z)$, и при прямой структуре звеньев имеет вид:

$$\begin{cases} y_1(n) = [a_{21}x(n) + a_{11}x(n-1) + x(n-2)] - a_{11}y_1(n-1) - a_{21}y_1(n-2); \\ y_2(n) = [a_{22}y_1(n) + a_{12}y_1(n-1) + y_1(n-2)] - a_{12}y_2(n-1) - a_{22}y_2(n-2); \\ \dots \\ y(n) = [a_{2L}y_{L-1}(n) + a_{1L}y_{L-1}(n-1) + y_{L-1}(n-2)] - a_{1L}y(n-1) - a_{2L}y(n-2). \end{cases}$$

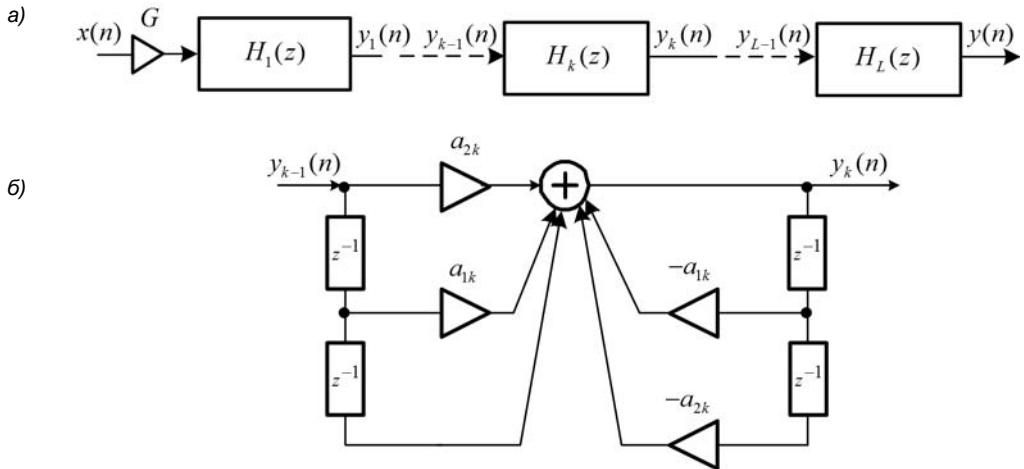


Рис. 7.5. Каскадная структура фазового звена (а)
с прямой структурой фазовых звеньев 2-го порядка (б)

Это тривиальное решение, поскольку в каскадной структуре никак не учитывается зеркальное отображение коэффициентов числителей и знаменателей передаточных функций $H_k(z)$.

Нетривиальное решение, где оно учтено, реализовано в *решетчатой структуре* (Lattice Structure) фазового звена с рекуррентным представлением передаточной функции

$$H_i(z) = \frac{Y_i(z)}{X_i(z)} = \frac{k_i + z^{-1}H_{i-1}(z)}{1 + z^{-1}k_iH_{i-1}(z)}, \quad i = 1, 2, \dots, R, \quad (7.23)$$

где k_i , $i = 1, 2, \dots, R$, — коэффициенты решетки (Lattice coefficients); $H_0(z)$ — начальное условие:

$$H_0(z) = \frac{Y_0(z)}{X_0(z)} = 1. \quad (7.24)$$

По завершении рекуррентного вычисления (7.23) должна быть получена передаточная функция фазового звена

$$H_R(z) = \frac{Y_R(z)}{X_R(z)},$$

эквивалентная ее дробно-рациональному представлению

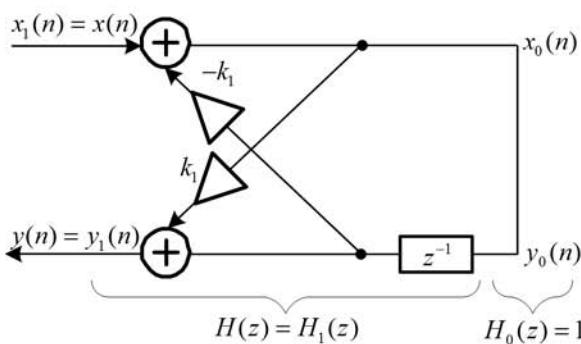
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_R + a_{R-1}z^{-1} + a_{R-2}z^{-2} + \dots + a_2z^{-(R-2)} + a_1z^{-(R-1)} + z^{-R}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_{R-2}z^{-(R-2)} + a_{R-1}z^{-(R-1)} + a_Rz^{-R}}, \quad (7.25)$$

т. е. должно быть обеспечено равенство

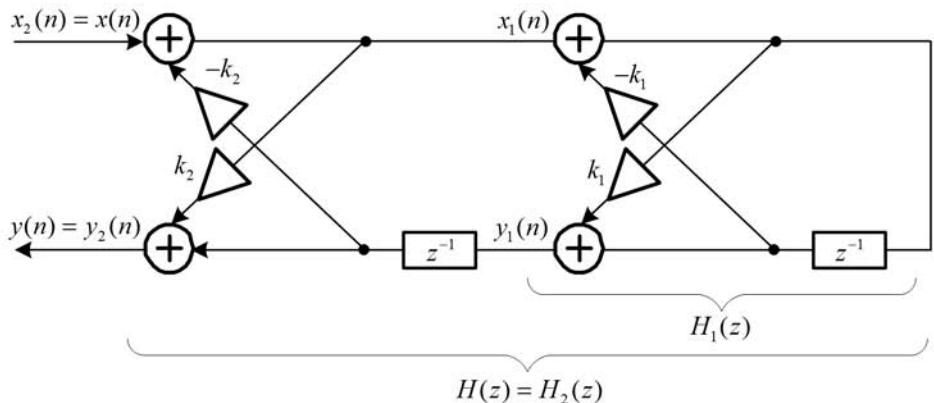
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = H_R(z) = \frac{Y_R(z)}{X_R(z)}. \quad (7.26)$$

На рис. 7.6 представлены решетчатые структуры (структурные схемы) фазовых звеньев 1-го, 2-го и произвольного порядка с подключением коэффициентов $\pm k_i$, визуально похожим на решетку.

а)



б)



в)

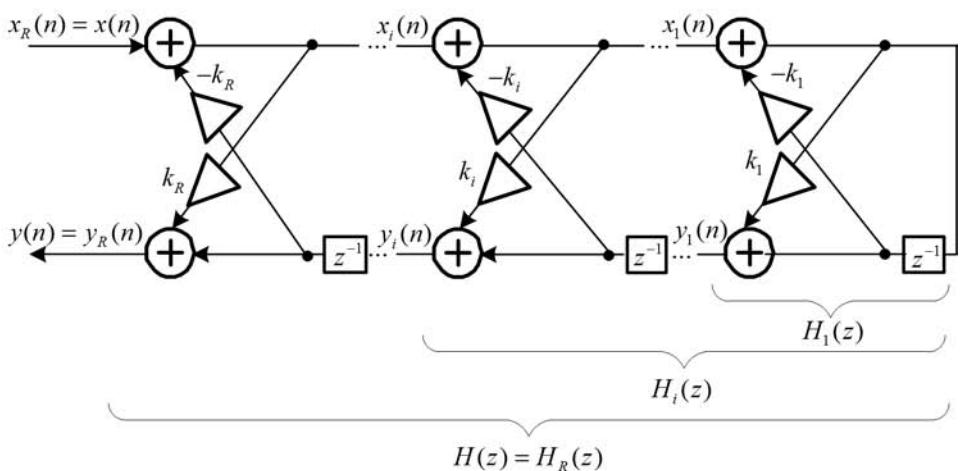


Рис. 7.6. Решетчатая структура фазового звена: 1-го порядка (а); 2-го порядка (б); произвольного порядка (в)

Поясним алгоритм вычисления реакции решетчатой структуры при рекуррентном представлении передаточной функции на примере простейших фазовых звеньев 1-го и 2-го порядков (ФЗ-1 и ФЗ-2).

В структуре ФЗ-1 (см. рис. 7.6, а) начальному условию (7.24) во временной области соответствует равенство

$$y_0(n) = x_0(n), \quad (7.27)$$

откуда имеем разностные уравнения:

$$\begin{aligned} x_0(n) &= x_1(n) - k_1 y_0(n-1); \\ y_1(n) &= y_0(n-1) + k_1 x_0(n), \end{aligned}$$

которые с учетом равенства (7.27) примут вид:

$$\begin{aligned} x_1(n) &= x_0(n) + k_1 x_0(n-1); \\ y_1(n) &= x_0(n-1) + k_1 x_0(n). \end{aligned}$$

В z -области им соответствуют уравнения:

$$\begin{aligned} X_1(z) &= [1 + k_1 z^{-1}] X_0(z); \\ Y_1(z) &= [k_1 + z^{-1}] X_0(z), \end{aligned}$$

откуда получаем передаточную функцию решетчатой структуры ФЗ-1 (7.26)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = H_1(z) = \frac{Y_1(z)}{X_1(z)} = \frac{k_1 + z^{-1}}{1 + k_1 z^{-1}} \quad (7.28)$$

и алгоритм вычисления ее реакции, описываемый разностным уравнением

$$y(n) = k_1 x(n) + x(n-1) - k_1 y(n-1).$$

Сравнивая передаточную функцию (7.25) для ФЗ-1

$$H(z) = \frac{a_1 + z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

с ее эквивалентом (7.28), определяем коэффициент решетки $k_1 = a_1$.

Запишем передаточную функцию (7.23) ФЗ-2 (см. рис. 7.6, б)

$$H_2(z) = \frac{k_2 + z^{-1} H_1(z)}{1 + z^{-1} k_2 H_1(z)}.$$

Подставляя $H_1(z)$ (7.28), получим

$$H_2(z) = \frac{Y_2(z)}{X_2(z)} = \frac{k_2 + z^{-1} H_1(z)}{1 + z^{-1} k_2 H_1(z)} = \frac{k_2 + z^{-1} \frac{k_1 + z^{-1}}{1 + z^{-1} k_1}}{1 + z^{-1} k_2 \frac{k_1 + z^{-1}}{1 + z^{-1} k_1}} = \frac{k_2 + k_1(k_2 + 1)z^{-1} + z^{-2}}{1 + k_1(k_2 + 1)z^{-1} + k_2 z^{-2}},$$

откуда имеем передаточную функцию решетчатой структуры ФЗ-2 (7.26)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = H_2(z) = \frac{Y_2(z)}{X_2(z)} = \frac{k_2 + k_1(k_2 + 1)z^{-1} + z^{-2}}{1 + k_1(k_2 + 1)z^{-1} + k_2 z^{-2}} \quad (7.29)$$

и алгоритм вычисления ее реакции, описываемый разностным уравнением

$$y(n) = k_2 x(n) + k_1(k_2 + 1)x(n-1) + x(n-2) - k_1(k_2 + 1)y(n-1) - k_2 y(n-2).$$

Сравнивая передаточную функцию (7.25) для ФЗ-2

$$H(z) = \frac{a_2 + a_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (7.30)$$

с ее эквивалентом (7.29), определяем коэффициенты решетки

$$\begin{cases} k_2 = a_2; \\ k_1 = a_1 / (a_2 + 1) \end{cases} \quad (7.31)$$

и наоборот:

$$\begin{cases} a_2 = k_2; \\ a_1 = k_1(k_2 + 1). \end{cases} \quad (7.32)$$

В общем случае всегда сохраняется равенство

$$k_R = a_R.$$

В MATLAB для перевода коэффициентов предусмотрены стандартные функции:

- при заданном векторе коэффициентов знаменателя a передаточной функции (7.25) вектор коэффициентов решетки K рассчитывается с помощью функции:

`K = tf2latc(a)`

- обратный перевод выполняется с помощью функции:

`a = latc2tf(K)`

Пример 7.5. Рассчитать коэффициенты решетки ФЗ-2 с передаточной функцией (7.30)

$$H(z) = \frac{0,64 - 0,8z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,8z^{-1} + 0,64z^{-2}}$$

и выполнить обратный перевод.

Решение. Задавая вектор коэффициентов знаменателя, определим вектор коэффициентов решетки передаточной функции (7.29):

```
>> a = [1 -0.8 0.64];
>> K = tf2latc(a)
K =
-0.4878
0.6400
```

Полученные значения совпадают с (7.31):

$$\begin{cases} k_2 = a_2 = 0,64; \\ k_1 = a_1 / (a_2 + 1) = -0,8 / (0,64 + 1) = -0,4878. \end{cases}$$

Выполним обратный перевод:

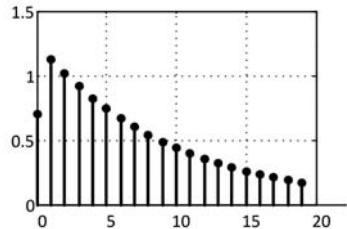
```
>> a = latc2tf (K)
a =
    1.0000    -0.8000     0.6400
```

Полученные значения совпадают с (7.32):

$$\begin{cases} a_2 = k_2 = 0,64; \\ a_1 = k_1(k_2 + 1) = -0,4878(0,64 + 1) = -0,8. \end{cases}$$

Импортируя коэффициенты решетки фазового звена из Workspace в GUI FDATool, можно проанализировать его характеристики (*см. разд. П.1.7 приложения 1*). ▲

ГЛАВА 8



Эффекты квантования

До сих пор рассматривались структуры ЛДС, в которых все данные (входные, выходные, результаты арифметических операций) представлялись точно, т. е. числами бесконечной разрядности¹.

Реализация структуры ЛДС на базе цифрового устройства — ЦПОС, ПЛИС и т. п. — связана с необходимостью квантования данных.

Квантованием данных называют их представление с помощью конечного числа двоичных разрядов (битов).

Эффектами квантования называют результаты (последствия) неточного представления данных, связанного с их квантованием.

Напомним (см. разд. 2.1), что в теории ЦОС *линейной дискретной системой* называют *линейный* оператор F , который определяет линейное математическое преобразование дискретных сигналов в соотношении вход/выход (2.5)

$$y(nT) = F\{x(nT)\}.$$

По аналогии, *цифровой системой* можно назвать *нелинейный* оператор \tilde{F} , который определяет нелинейное, вследствие эффектов квантования, математическое преобразование цифровых сигналов в соотношении вход/выход

$$y_{\text{ц}}(nT) = \tilde{F}\{x_{\text{ц}}(nT)\}. \quad (8.1)$$

Эффекты квантования, определяющие специфику обработки цифровых сигналов, рассматриваются в разд. 8.4, но предварительно необходимо познакомиться с базовыми понятиями представления данных конечной разрядности.

8.1. Форматы данных

Формат данных отображает их представление в цифровом устройстве, а именно:

- разрядность ячеек памяти и внутренних регистров;
- функциональное распределение битов в ячейках памяти и регистрах.

¹ В MATLAB им соответствуют числа типа `double` с максимальной разрядностью.

В зависимости от формы представления вещественного числа (алгебраической или показательной), различают два типа форматов:

- с *фиксированной точкой* (Fixed Point) — формат данных с ФТ.

Этот формат соответствует алгебраической (обычной) форме представления чисел с фиксированной запятой¹, разделяющей целую и дробную части, например, для чисел в двоичной системе счисления:

- 1,011;
- 0,1101;
- 10,01;

- с *плавающей точкой* (Floating Point) — формат данных с ПТ.

Этот формат соответствует показательной форме представления чисел с плавающей запятой, разделяющей целую и дробную части, например, для двоичного числа 1,011:

- $1,011 \cdot 2^0$;
- $0,1011 \cdot 2^1$;
- $10,11 \cdot 2^{-1}$.

8.1.1. Форматы данных с фиксированной точкой

Форматы данных с ФТ [47] для вещественных двоичных чисел представлены тремя основными разновидностями (рис. 8.1).

- *Слово* — отображает содержимое ячеек памяти (точность представления входных и выходных данных) со следующим функциональным распределением битов (рис. 8.1, а, слово длиной $m=16$):

- старший бит — знаковый (Sign); значение $S=0$ соответствует положительному знаку, а $S=1$ — отрицательному;
- следующие $b=(m-1)$ битов — значащие (Significant Bits);
- точка, отделяющая целую часть (по умолчанию равную нулю) от дробной, логически фиксируется после знакового бита.

- *Двойное слово MSB : LSB* — отображает содержимое соседних ячеек памяти (двойную точность представления входных и выходных данных) или внутренних регистров.

Обозначение MSB соответствует старшему слову (Most Significant Bits), а LSB — младшему слову (Least Significant Bits).

¹ В алгоритмических языках целая часть от дробной отделяется точкой, отсюда названия форматов.

Функциональное распределение битов для данных *двойной точности* следующее (рис. 8.1, б):

- старший бит MSB — знаковый;
- следующие $(2m - 1)$ битов MSB : LSB — значащие;
- точка, отделяющая целую часть (по умолчанию равную нулю) от дробной, логически фиксируется после знакового бита.

Функциональное распределение битов для *внутренних регистров*, хранящих промежуточные результаты умножения чисел (произведения)¹, следующее (рис. 8.1, в):

- *два* старших бита MSB — расширение (дублирование) знака;
- следующие $(2m - 2)$ битов MSB : LSB — значащие;
- точка, отделяющая целую часть (по умолчанию равную нулю) от дробной, логически фиксируется после битов *расширения* знака.

□ *Расширенное слово* EXT : MSB : LSB — отображает содержимое внутренних регистров (расширенную точность представления промежуточных данных).

Обозначение EXT соответствует битам расширения (Extension).

Функциональное распределение битов в формате расширенного слова EXT : MSB : LSB зависит от того, является число дробным или смешанным (содержащим целую и дробную части).

Для *дробных* чисел функциональное распределение битов следующее (рис. 8.1, г, расширенное слова длиной $k = 2m + 4 = 36$):

- старший бит MSB : LSB — знаковый;
- следующие $(2m - 1)$ битов MSB : LSB — значащие;
- биты EXP — расширение (дублирование) знака;
- точка, отделяющая целую часть (по умолчанию равную нулю) от дробной, логически фиксируется после знакового бита MSB : LSB.

Для *смешанных* чисел функциональное распределение битов следующее (рис. 8.1, д):

- старший бит EXT : MSB : LSB — знаковый;
- остальные биты EXP плюс *старший бит* MSB : LSB — значение для *целой* части числа;
- остальные $(2m - 1)$ битов MSB : LSB — значение для *дробной* части числа;
- точка (запятая), отделяющая целую часть от дробной, логически фиксируется после *младшего бита* *целой* части числа.

¹ В архитектуре цифрового устройства может быть предусмотрено хранение суммы локальных произведений в формате расширенного слова.

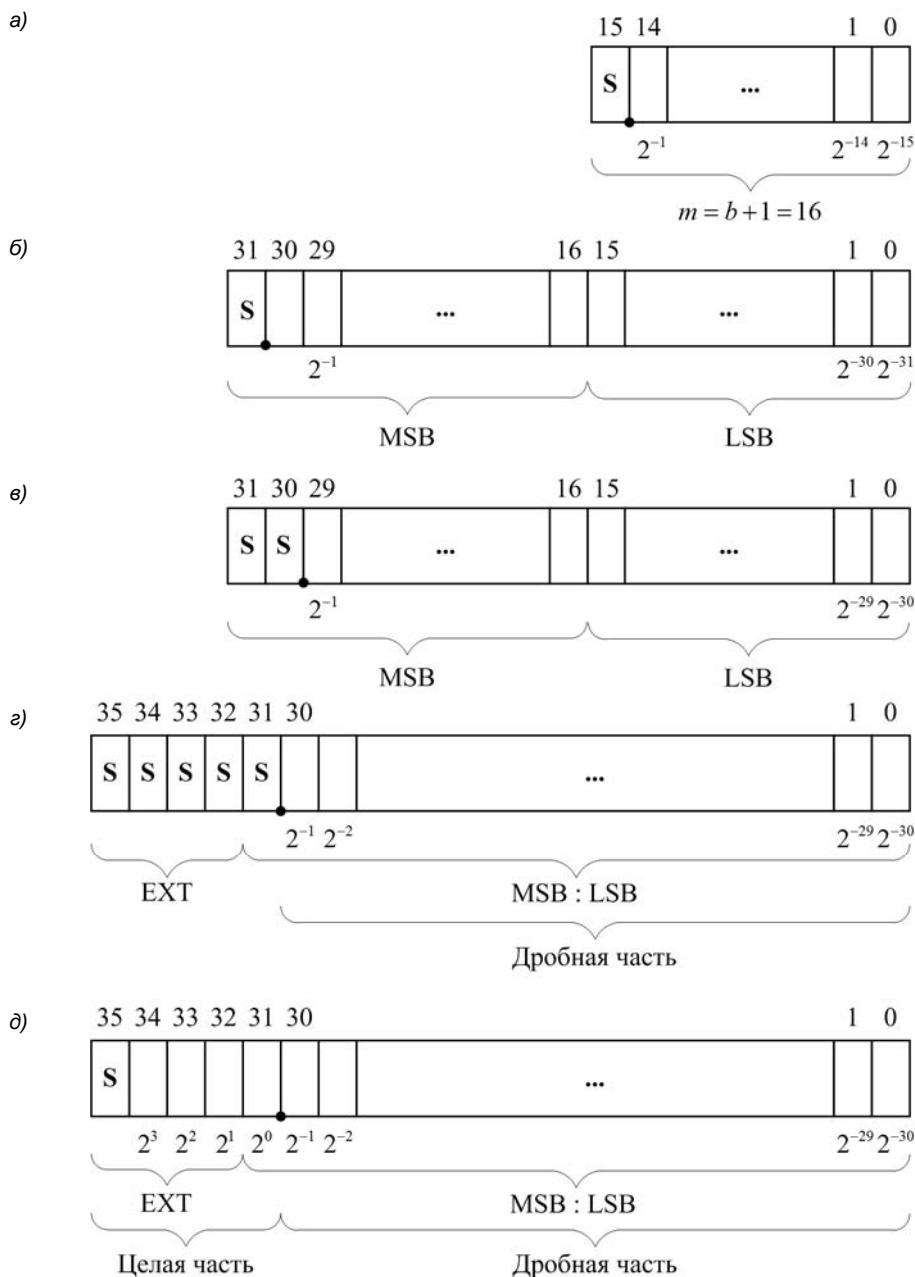
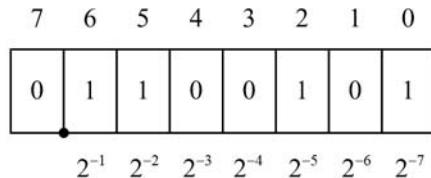


Рис. 8.1. Форматы данных с ФТ: слово (а), двойное слово (б), двойное слово для произведения (в), расширенное слово для дробных (г) и смешанных (д) чисел

На рис. 8.2 дается пример вычисления десятичного эквивалента дробного числа в формате слова длиной $m = 8$.

В форматах слова и двойного слова входные и выходные вещественные данные представляются числами по модулю меньшими единицы¹, $|C| < 1$, с чем связана необходимость *нормирования* исходных данных, не удовлетворяющих этому условию, и учета нормирующего множителя в конечных результатах.



$$C_{(10)} = +\left(1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 0 \cdot 2^{-6} + 1 \cdot 2^{-7}\right) = +0,7891$$

Рис. 8.2. Пример вычисления десятичного эквивалента числа с ФТ в формате слова

8.1.2. Форматы данных с плавающей точкой

Форматы данных с ПТ соответствуют показательной форме записи вещественных двоичных чисел, принятой стандартом IEEE754² [40, 47]:

$$C = (-1)^S \cdot 1, f \cdot 2^{E-127}, \quad (8.2)$$

где:

- S — знак числа (0 — плюс, 1 — минус);
- $1, f$ — мантисса (вещественное двоичное число в формате с ФТ); здесь 1 — целая часть, f — дробная часть; знак мантиссы совпадает со знаком числа;
- 2 — основание двоичной системы счисления;
- E — смещенный порядок — целое беззнаковое (неотрицательное) число в интервале $[2^0; 2^{255}]$ при длине смещенного порядка 8 битов;
- $(E - 127)$ — порядок — целое число со знаком в интервале $[2^{-127}; 2^{128}]$.

Для устранения неоднозначности представления числа с ПТ из всех вариантов его возможного представления выбирают один, который называется *нормализованной формой* числа с ПТ.

Для *десятичных* чисел с ПТ нормализованной формой считают число, у которого целая часть мантиссы равна нулю, а первая значащая цифра дробной части отлична

¹ В разд. 8.1.4 будет показана возможность представления числа -1 .

² Разработанному в институте инженеров по электротехнике и электронике (Institute of Electrical and Electronics Engineers) в США в 1985 году.

от нуля. Для двоичного числа с ПТ эта первая значащая цифра всегда будет равна 1, поэтому ее можно перенести в целую часть мантиссы, неявно присутствующую (физически не сохраняемую), и увеличить длину дробной части на один бит.

В (8.2) нормализованная форма соответствует двоичному числу с ПТ, мантисса которого содержит единицу в целой части (неявно присутствующую).

При длине дробной части мантиссы 23 бита возможные значения ее модуля расположаются в диапазоне $[1; (2 - 2^{-23})]$ (в дробной части все нули или все единицы), а возможные значения модуля числа с ПТ — в диапазоне¹

$$2^{-127} \leq |C| \leq (2 - 2^{-23}) \cdot 2^{128}. \quad (8.3)$$

Ненормализованная мантисса (с целой частью, равной 0) в стандарте IEEE754 используется для представления нуля и чисел по модулю, меньших 2^{-127} , а именно:

- нулю соответствуют нули во всех разрядах мантиссы и порядка (знак числа не имеет значения);
- диапазон возможных значений ненормализованной мантиссы $[0; (1 - 2^{-23})]$ определяет малые по модулю числа в диапазоне

$$2^{-23} \cdot 2^{-127} \leq |C| \leq 2^{-127}. \quad (8.4)$$

Это позволяет расширить диапазон представления малых (по модулю) чисел и сократить разрыв между нулем и самым маленьким (по модулю) числом: при нормализованной мантиссе он равен 2^{-127} , а ненормализованной — 2^{-150} .

С учетом расширения (8.4) диапазон представления значений модуля числа с ПТ существенно расширяется:

$$2^{-150} \leq |C| \leq (2 - 2^{-23}) \cdot 2^{128}.$$

Форматы данных с ФТ (слово, двойное слово, расширенное слово) сохраняются и для данных с ПТ и имеют следующие стандартные названия (рис. 8.3):

- SP (Single Precision floating-point format) — формат представления данных с одинарной точностью в виде (8.2), соответствует *слову*;
- DP (Double Precision floating-point format) — формат представления данных с двойной точностью, соответствует *двойному слову*;
- SEP (Single Extended Precision floating-point format) — формат представления результатов промежуточных вычислений с расширенной одинарной точностью, соответствует *расширенному слову*.

Структура данных форматов одинакова. В ней выделено три поля (рис. 8.3):

- поле знака S (1 бит);
- поле смещенного порядка E ;

¹ В стандарте IEEE754 в рамках этого диапазона резервируются комбинации для представления специальных данных, $\pm\infty$ и др. [47].

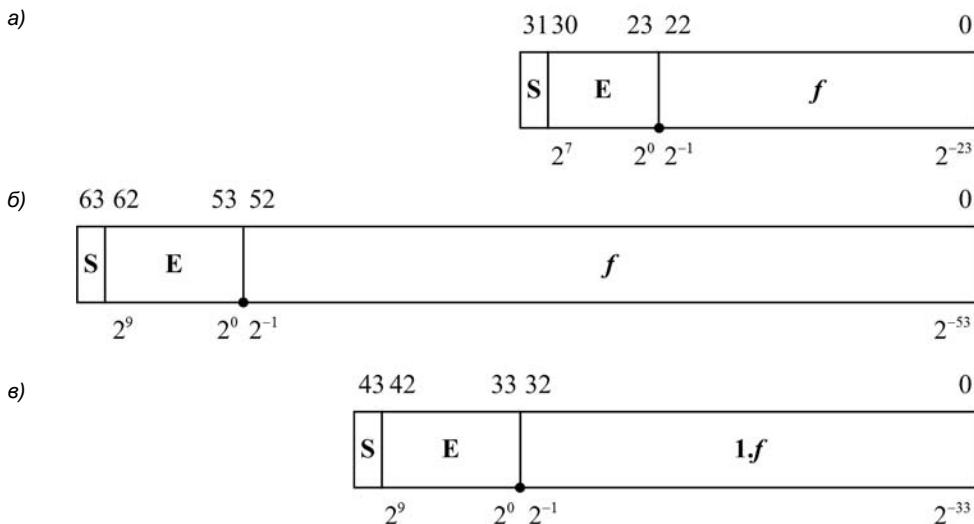
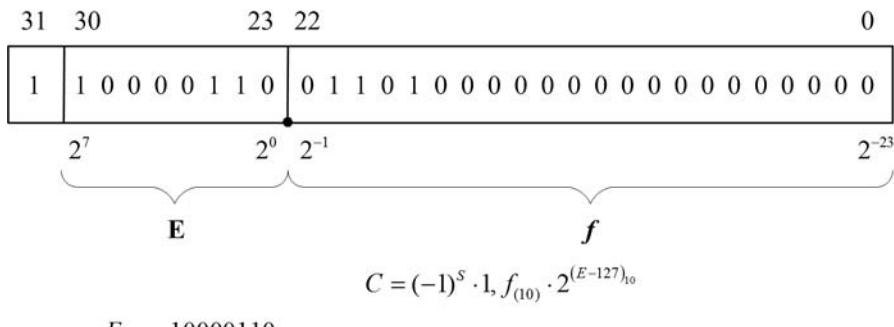


Рис. 8.3. Форматы данных с ПТ: слово SP (а), двойное слово DP (б), расширенное слово SEP (в)

Формат SP



$$E_{(2)} = 10000110$$

$$E_{(10)} = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 134$$

$$(E-127)_{(10)} = 7$$

$$1.f_{10} = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} = 1,40625$$

$$C = (-1)^1 \cdot 1,40625 \cdot 2^7 = -180$$

Нормализованная форма десятичного числа

$$C = -0,18 \cdot 10^3$$

Рис. 8.4. Пример вычисления десятичного эквивалента числа с ПТ

- поле мантиссы — для представления дробной части мантиссы $0, f$; целая часть нормализованной мантиссы (равная 1) присутствует неявно.

В формате SEP целая часть мантиссы присутствует явно, что объясняется удобством выполнения арифметических операций.

На рис. 8.4 приводится пример вычисления десятичного эквивалента двоичного числа с ПТ (8.2), представленного в формате слова SP, по формуле:

$$C = (-1)^S \cdot 1, f_{(10)} \cdot 2^{(E-127)_{10}}.$$

8.1.3. Выбор формата данных

При выборе формата данных (с ФТ или ПТ) необходимо принимать во внимание следующее:

- диапазон представления данных с ПТ существенно шире, чем с ФТ.

Например, при одинаковой длине слова $m=32$ бита для данных с ФТ будем иметь диапазон представления чисел

$$2^{-31} \leq |C| \leq (1 - 2^{-31}), \quad (8.5)$$

а для данных с ПТ — диапазон

$$2^{-150} \leq |C| \leq (2 - 2^{-23}) \cdot 2^{128};$$

- точность представления данных с ПТ существенно выше, чем с ФТ (вытекает из предыдущего), что фактически снимает проблему оценки эффектов квантования;
- арифметика данных с ПТ существенно сложнее, чем с ФТ, что связано с необходимостью выравнивания порядков перед выполнением арифметических операций; как следствие, архитектура цифрового устройства с ПТ существенно сложнее, чем с ФТ.

Последнее стало главной причиной широкого распространения *форматов с ФТ, которые далее будем подразумевать по умолчанию*.

8.1.4. Коды данных с фиксированной точкой

В цифровой технике для представления двоичных чисел с ФТ используют два основных кода: прямой и дополнительный.

Прямой код вещественного числа в формате слова (см. рис. 8.1, а) формируется по следующему правилу:

- старший бит является знаковым: 0 соответствует положительному числу, а 1 — отрицательному;
- после старшего бита логически фиксируется запятая (точка), отделяющая целую часть (равную нулю) от дробной части;
- следующие биты являются значащими и соответствуют дробной части положительного двоичного числа.

Дополнительный код положительных вещественных чисел совпадает с прямым кодом.

Дополнительный код отрицательных вещественных чисел формируется по следующему правилу (рис. 8.5):

- значение знакового бита не меняется (равно 1);
- все значащие биты инвертируются (0 заменяется на 1, а 1 — на 0);
- к младшему биту полученного числа прибавляется 1 с соблюдением правил сложения двоичных чисел.

Отрицательное вещественное число в прямом коде

7	6	5	4	3	2	1	0
1	1	1	1	0	0	1	0

2^{-1} 2^{-2} 2^{-3} 2^{-4} 2^{-5} 2^{-6} 2^{-7}

Инвертирование значащих битов

7	6	5	4	3	2	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1

2^{-1} 2^{-2} 2^{-3} 2^{-4} 2^{-5} 2^{-6} 2^{-7}

Добавление 1 к младшему биту

7	6	5	4	3	2	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0

2^{-1} 2^{-2} 2^{-3} 2^{-4} 2^{-5} 2^{-6} 2^{-7}

Отрицательное вещественное число в дополнительном коде

Рис. 8.5. Пример перевода отрицательного вещественного числа из прямого кода в дополнительный

Обратный перевод числа из дополнительного кода в прямой осуществляется точно по тому же правилу (см. число в дополнительном коде на рис. 8.5):

- значение знакового бита не меняется — 1.0001110;
- все значащие биты инвертируются — 1.1110001;
- к младшему биту прибавляется 1 — 1.1110010 (прямой код числа).

Код назван "*дополнительным*", т. к. любое отрицательное дробное число в этом коде можно легко получить путем вычитания его модуля из беззнакового целого числа 2, т. е. как *дополнение к двойке*.

Покажем это на примере прямого кода отрицательного числа 1.1110010. Модуль этого числа равен 0.1110010. Вычитая его из беззнакового целого числа $2_{(10)} = 10.0000000_{(2)}$, получаем исходное число в дополнительном коде (см. рис. 8.5):

$$\begin{array}{r} 10.0000000 \\ - 0.1110010 \\ \hline 1.0001110 \end{array}$$

Применение дополнительного кода связано с его следующими основными достоинствами.

- Устраняется неоднозначность представления нуля.

Нуль в прямом коде может быть представлен и как 0000...0, и как 1000...0, а в дополнительном коде только как 0000...0.

Проверим на примере формата слова длиной $m = 8$. Дополнительный код числа 0.0000000 совпадает с прямым и имеет десятичный эквивалент $+0_{(10)}$. Определим десятичный эквивалент числа 1.0000000. Для этого необходимо выполнить обратный перевод числа 1.0000000 в прямой код. В данном случае нельзя применить общее правило обратного перевода, поэтому воспользуемся определением дополнительного кода как дополнения модуля отрицательного числа к беззнаковому числу 2. Выполним обратную операцию: вычитая из беззнакового числа 2 число 1.0000000 в дополнительном коде:

$$\begin{array}{r} 10.0000000 \\ - 1.0000000 \\ \hline 01.0000000 \end{array}$$

получим модуль отрицательного числа в формате расширенного слова с одним битом для целой части и старшим знаковым битом. Запишем исходное отрицательное число — 11.0000000. Десятичный эквивалент данного числа равен $-2^0 = -1_{(10)}$, на основании чего дополнительному коду числа 1.0000000 поставлен в соответствие десятичный эквивалент $-1_{(10)}$.

- Расширяется диапазон представления чисел.

Например, при длине слова $m = 32$ бита диапазон будет равен

$$2^{-31} \leq |C| \leq 1,$$

где $|C| = 1$ соответствует максимальному по модулю отрицательному числу, а максимальное положительное число остается равным $(1 - 2^{-31})$.

- Упрощается выполнение арифметических операций.

8.1.5. Арифметика в дополнительном коде

Арифметика в дополнительном коде регламентирует правила выполнения арифметических операций с данными в дополнительном коде. Известны две ее разновидности [47]:

- целочисленная арифметика, когда все числа (целые, дробные и смешанные) по умолчанию воспринимаются как целые;
- дробная арифметика, когда все числа по умолчанию воспринимаются как дробные.

Наибольшее распространение получила *целочисленная арифметика*, о которой пойдет речь далее.

При целочисленной арифметике вещественные *входные* данные представляются своими *целочисленными эквивалентами*, которые определяют следующим образом:

- выполняется предварительное *нормирование* исходных данных, если они по модулю превосходят 1;
- модулю числа 1 ставится в соответствие *машинная единица* — максимально допустимое по модулю *целое* число в формате слова;
- значения остальных данных (по модулю меньших единицы) находятся из соответствующей пропорции.

Для *выходных* данных выполняется обратная процедура — деление целочисленных эквивалентов на машинную единицу.

Машинная единица в формате слова длиной m равна беззнаковому целому числу, двоичный код которого совпадает с дополнительным кодом $1000\dots0$ наименьшего отрицательного вещественного числа $-1_{(10)}$ и равна $2^{(m-1)}$ (весу старшего бита беззнакового целого числа $1000\dots0$).

Целочисленный эквивалент наименьшего вещественного отрицательного числа, равного $-1_{(10)}$, в дополнительном коде равен $-2^{(m-1)}$.

В табл. 8.1 приведены десятичные и целочисленные эквиваленты двоичных вещественных чисел в дополнительном и прямом кодах для слова длиной $m=8$ с *машинной единицей*, равной $2^{(m-1)} = 2^7 = 128$.

Современные АЦП имеют разрядность от 8 до 20 и выдают значения квантованных данных сразу в дополнительном коде.

При целочисленной арифметике все арифметические операции с числами в *дополнительном коде* выполняются как с *беззнаковыми целыми числами*, когда знаковый разряд воспринимается как старший значащий. Результат арифметической операции представлен в дополнительном коде.

Используя данные табл. 8.1 с машинной единицей, равной 128, проиллюстрируем целочисленную арифметику на примерах *сложения* чисел в дополнительном коде. В квадратных скобках будем указывать *целочисленные эквиваленты* вещественных чисел.

Таблица 8.1. Эквиваленты двоичных вещественных данных

Двоичное число в дополнительном коде	Двоичное число в прямом коде	Десятичный эквивалент числа	Целочисленный эквивалент числа
01111111	01111111	$1 - 2^{-7}$	$2^7 - 1 = 127$
01111110	01111110	$1 - 2 \cdot 2^{-7}$	$2^7 - 2 = 126$
01111101	01111101	$1 - 3 \cdot 2^{-7}$	$2^7 - 3 = 125$
01111100	01111100	$1 - 4 \cdot 2^{-7}$	$2^7 - 4 = 124$
...
00000001	00000001	$1 - (2^7 - 1) \cdot 2^{-7} = 2^{-7}$	$2^7 - (2^7 - 1) = 1$
00000000	00000000	$1 - 2^7 \cdot 2^{-7} = 0$	$2^7 - 2^7 = 0$
10000000	11.0000000	-1	$-2^8 = -128$
10000001	11111111	$-(1 - 2^{-7})$	$-(2^7 - 1) = -127$
10000010	11111110	$-(1 - 2 \cdot 2^{-7})$	$-(2^7 - 2) = -126$
10000011	11111101	$-(1 - 3 \cdot 2^{-7})$	$-(2^7 - 3) = -125$
10000100	11111100	$-(1 - 4 \cdot 2^{-7})$	$-(2^7 - 4) = -124$
...
11111111	10000001	$-(1 - (2^7 - 1) \cdot 2^{-7}) = -2^{-7}$	$-(2^7 - (2^7 - 1)) = -1$

Пример 8.1. Сложение чисел в дополнительном коде:

$$\begin{array}{r} 01111111 \quad [127] \\ + 10000011 \quad [-125] \\ \hline 00000010 \quad [2] \end{array}$$

Результат соответствует вещественному десятичному числу

$$2 / 128 = 2^{-6} = 0,015625 . \blacktriangleleft$$

Пример 8.2. Сложение чисел в дополнительном коде:

$$\begin{array}{r} 10000011 \quad [-125] \\ + 11111111 \quad [-1] \\ \hline 10000010 \quad [-126] \end{array}$$

Результат соответствует вещественному десятичному числу

$$-(126 / 128) = -0,984375 .$$

В табл. 8.1 приведен прямой код полученного отрицательного числа — 11111110, которому соответствует то же десятичное число:

$$-(2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6}) = -0,984375 . \blacktriangleleft$$

Пример 8.3. Сложение положительных чисел:

$$\begin{array}{r} 01111110 \quad [126] \\ + 00000011 \quad [3] \\ \hline 10000001 \quad [-127] \end{array}$$

Сумма положительных чисел оказалась равной отрицательному числу. Это произошло вследствие того, что действительный целочисленный эквивалент 129 *превысил машинную единицу* 128, сумма вышла за рамки заданного формата, и результат оказался недостоверным. ◀

Алгоритм умножения беззнаковых двоичных чисел в дополнительном коде отличается от общепринятого в двоичной арифметике. Однако для наших целей представляет интерес не сам алгоритм, с которым можно познакомиться в [47], а оценка длины произведения и функциональное распределение битов. Для этого достаточно проанализировать простейший пример обычного алгебраического умножения двоичных дробных чисел (рис. 8.6).

$$\begin{array}{r} \times \quad -0.1\ 0\ 1 \\ + 0.1\ 0\ 0 \\ \hline 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 1 \\ \hline -0.0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow -(2^{-1}+2^{-3}) = -0,6250 \\ \longrightarrow 2^{-1} = 0,5 \\ \longrightarrow -(2^{-2}+2^{-4}) = -0,3125 \end{array}$$

Рис. 8.6. Умножение дробных двоичных чисел

Сомножители представлены в формате слова длиной $m = 4$. Произведение содержит $(2m - 2) = 6$ значащих битов, плюс один бит знаковый, всего 7 битов. Без потери точности произведение сохраняется в формате *двойного слова*, в данном случае длиной $2m = 8$ битов, при этом "лишний" бит отводится под расширение знака (см. рис. 8.1, в).

8.2. Квантование данных

Квантование данных с ФТ характеризуется следующими параметрами:

- числом уровней квантования R ;
- числом значащих битов b , необходимым для кодирования R уровней:

$$R \leq 2^b,$$

откуда $b = \text{int}(\log_2 R)$;

- шагом квантования Q (расстоянием между соседними уровнями квантования):

$$Q = \frac{1}{R} = \frac{1}{2^b} = 2^{-b}, \quad (8.6)$$

где единица в числителе соответствует максимальному по модулю числу с ФТ в дополнительном коде. Шаг квантования равен весу младшего бита.

8.2.1. Методы округления

Метод округления (Rounding Mode) определяет правило присваивания ближайшего верхнего или нижнего уровня квантования отсчету квантуемой последовательности, расположенному между данными уровнями.

Методы округления данных можно условно разделить на две группы¹:

□ методы усечения, включающие в себя:

- усечение до ближайшего *верхнего* уровня — округление в направлении ∞ (*ceil*).

Для *положительных* чисел термин "усечение" — условный, фактически это округление с избытком;

- усечение до ближайшего *нижнего* уровня — округление в направлении $-\infty$ (*floor*).

Для *отрицательных* чисел термин "усечение" — условный, фактически это округление с недостатком;

- усечение до ближайшего *наименьшего по модулю* уровня — округление в направлении нуля (*fix*).

Положительным числам присваивается значение *нижнего* уровня квантования, а отрицательным — *верхнего* уровня.

На практике обычно именно этот метод подразумевают под *усечением* данных, и в дальнейшем будем его подразумевать по умолчанию;

□ методы округления, включающие в себя:

- округление до ближайшего с избытком (*nearest*).

Выбирается значение ближайшего уровня квантования, и если оно попадает *точно* на границу между соседними уровнями, то берется значение ближайшего *верхнего* уровня;

- округление до ближайшего по модулю (*round*).

Выбирается значение ближайшего уровня квантования, и если оно попадает *точно* на границу между соседними уровнями, то берется значение ближайшего *наибольшего по модулю* уровня квантования: *верхнего* (с избытком) — для положительного и *нижнего* (с недостатком) — для отрицательного числа.

- округление до ближайшего четного (*convergent*).

Выбирается значение ближайшего уровня квантования, и если оно попадает *точно* на границу между соседними уровнями квантования, то выбирается значение ближайшего уровня, соответствующего *четному* числу.

¹ В скобках даны имена соответствующих функций MATLAB.

Метод назван *конвергентным* (сходящимся), т. к. с ростом длины последовательности количество чисел, попадающих точно на границу между соседними уровнями квантования, возрастает, и округления с избытком и недостатком постепенно уравновешиваются.

На практике именно этому методу обычно отдается предпочтение.

На рис. 8.7, *a* представлены аналоговый $x(t)$ и дискретный $x(nT)$ сигналы, а на рис. 8.7, *б* — цифровой сигнал $x_u(nT)$ с округлением до ближайшего с избытком. При шести уровнях квантования, $R = 6$, для представления данных требуется три значащих бита, $b = 3$, плюс один, старший, знаковый.

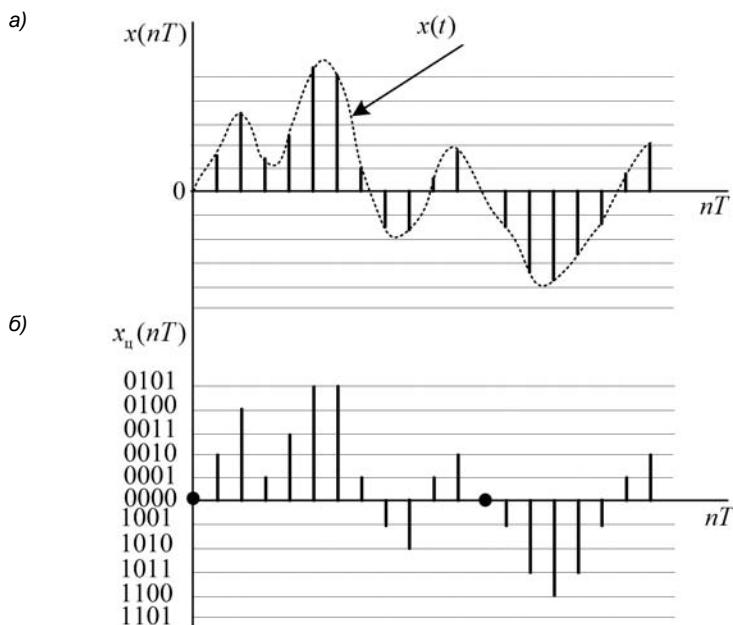


Рис. 8.7. Аналоговый, дискретный (*а*) и цифровой (*б*) сигналы

8.2.2. Оценки ошибки квантования

Нелинейная процедура квантования сопровождается внесением в каждый момент времени¹ n ошибки квантования $e(n)$.

Детерминированная оценка ошибки квантования $e(n)$ определяет ее абсолютную границу, и при усечении данных равна шагу квантования:

$$\max_n |e(n)| = Q, \quad (8.7)$$

¹ Здесь и далее дискретное время — нормированное.

а при *округлении* — половине шага квантования:

$$\max_n |e(n)| = \frac{Q}{2}, \quad (8.8)$$

где $Q = 2^{-b}$ — шаг квантования (8.6).

Это значит, что при *усечении* данных возможные значения ошибки квантования $e(n)$ расположены в диапазоне $[-Q; 0]$, а при *округлении* — в диапазоне $[-Q/2; Q/2]$.

Обычно вводится допущение о том, что значения ошибки квантования $e(n)$ в пределах указанных диапазонов *равновероятны*, т. е. ошибка квантования $e(n)$ в любой момент времени n представляет собой *случайную величину e с равномерной плотностью вероятности $p(e)$* , значение которой при усечении и округлении

$$\text{данных одинаково и равно } p(e) = \frac{1}{0 - (-Q)} = \frac{1}{Q/2 - (-Q/2)} = \frac{1}{Q} \quad (\text{рис. 8.8}).$$

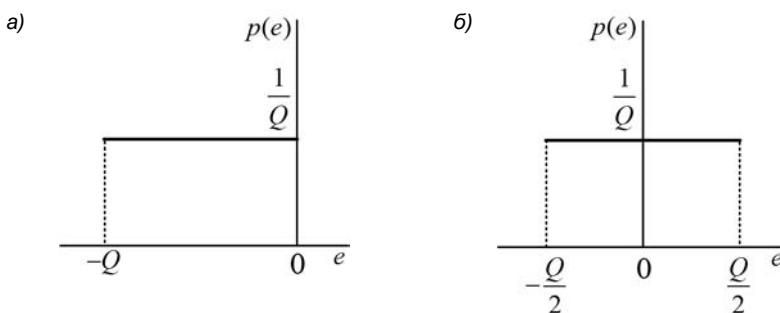


Рис. 8.8. Равномерная плотность вероятности ошибки квантования при усечении (a) и округлении (б) данных

Вероятностные оценки ошибки квантования $e(n)$ включают в себя математическое ожидание и дисперсию случайной величины e .

При *округлении* данных (рис. 8.8, б) будем иметь следующие оценки:

□ *математическое ожидание μ :*

$$\mu = \int_{-Q/2}^{Q/2} ep(e) de = \frac{1}{Q} \int_{-Q/2}^{Q/2} e de = \frac{1}{Q} \frac{e^2}{2} \Big|_{-Q/2}^{Q/2} = 0; \quad (8.9)$$

□ *дисперсия σ^2 :*

$$\sigma^2 = \int_{-Q/2}^{Q/2} (e - \mu)^2 p(e) de = \frac{1}{Q} \int_{-Q/2}^{Q/2} e^2 de = \frac{1}{Q} \frac{e^3}{3} \Big|_{-Q/2}^{Q/2} = \frac{Q^2}{12}; \quad (8.10)$$

- дисперсия в децибелах — мощность P (дБ):

$$P = 10 \lg(\sigma^2) \text{ (дБ).} \quad (8.11)$$

Подставляя σ^2 (8.10) и $Q = 2^{-b}$ (8.6), получим:

$$P = 10 \lg \frac{2^{-2b}}{12} = -(20b \lg 2 + 10 \lg 12) \approx -(6,02b + 10,79) \text{ (дБ).} \quad (8.12)$$

При усечении данных (рис. 8.8, а) математическое ожидание изменится:

$$\mu = \int_{-Q}^0 e p(e) de = \frac{1}{Q} \int_{-Q}^0 e de = \frac{1}{Q} \frac{e^2}{2} \Big|_{-Q}^0 = -\frac{Q}{2},$$

а дисперсия останется прежней:

$$\sigma^2 = \int_{-Q}^0 (e - \mu)^2 p(e) de = \frac{1}{Q} \left[\frac{e^3}{3} + \frac{Qe^2}{2} + \frac{Q^2 e}{4} \right] \Big|_{-Q}^0 = \frac{Q^2}{12}.$$

8.3. Источники ошибок квантования

Источниками ошибок квантования в цифровой системе являются:

- аналого-цифровой преобразователь (АЦП) — в каждый момент дискретного времени вносит ошибку квантования, равную разности между значениями дискретного $x(n)$ и цифрового $x_{\text{ц}}(n)$ сигналов.

Ошибки квантования, обусловленные АЦП, называют *шумом АЦП*;

- умножители — в каждый момент дискретного времени вносят ошибку квантования при округлении (усечении) результата умножения, представленного в формате двойного слова MSB : LSB, при его сохранении в ячейке памяти в формате слова MSB (см. рис. 8.1, в).

Соответствующую ошибку квантования называют *шумом умножителя*, а совокупность шумов всех умножителей — *собственным шумом цифровой системы*;

- квантование коэффициентов передаточной функции — вносит однократную, не зависящую от времени, ошибку квантования коэффициентов;

- сумматоры — в произвольный момент времени могут внести ошибку, если результат сложения, представленный в формате расширенного слова EXT : MSB : LSB, по модулю превзошел единицу и сохраняется в ячейке памяти в формате слова MSB (см. рис. 8.1, д). Знаковый бит воспринимается как значащий и результат операции оказывается недостоверным и непредсказуемым.

Этот эффект называют переполнением сумматора, а соответствующие ошибки — ошибками переполнения сумматора.

Сложная, явная и неявная, взаимосвязь ошибок квантования от различных источников не позволяет формализовать *нелинейный* оператор \tilde{F} в соотношении

вход/выход (8.1) и оценить аналитически совокупную ошибку квантования в структуре цифровой системы. Для этого применяют средства компьютерного моделирования. В теории ЦОС эффекты квантования исследуют отдельно для каждого из источников, *в предположении об их независимости*. Сначала будут рассмотрены шумы, затем ошибки квантования коэффициентов (см. разд. 8.7) и переполнения сумматоров (см. разд. 8.8).

8.3.1. Предположения о шумах

Для шума АЦП и собственного шума цифровой системы могут быть получены *аналитические оценки* при следующих предположениях о шумах.

- Шумы не коррелированы с квантуемыми сигналами. Это позволяет использовать свойство аддитивности для *сигналов и шумов* и представить цифровые сигналы в виде сумм:

$$x_{\text{ц}}(n) = x(n) + e_{\text{вх}}(n);$$

$$y_{\text{ц}}(n) = y(n) + e_{\text{вых}}(n),$$

после чего мысленно выделить в цифровой обработке две независимые составляющие:

- обработку дискретных сигналов — линейная модель (рис. 8.9, а);
- обработку шумов — нелинейная модель (рис. 8.9, б) с передаточной функцией $\tilde{H}(z)$ с квантованными коэффициентами.

- Шумы от разных источников не коррелированы между собой. Это позволяет использовать свойство аддитивности для *шумов* и в нелинейной модели (рис. 8.9, б) мысленно выделить две независимые составляющие:

- обработку шума АЦП — линейная модель (рис. 8.9, в);
- обработку шумов умножителей — линейная модель с аддитивными источниками шума умножителей (см. разд. 8.5).

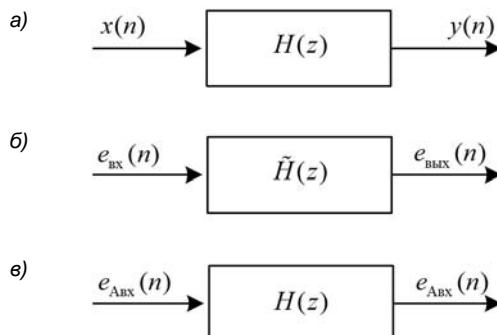


Рис. 8.9. Линейная модель обработки дискретных сигналов (а), нелинейная модель обработки шумов (б) и линейная модель обработки шума АЦП (в)

- Шум представляет собой эргодический случайный процесс типа "белый шум".
- Эргодические случайные процессы, в том числе белый шум, будут подробно рассматриваться в главе 12. Здесь лишь отметим, что в области дискретного времени белый шум — это последовательность, отсчеты которой являются *случайными величинами*, некоррелированными друг с другом.
- Ошибка квантования в любой момент дискретного времени представляет собой случайную величину с равномерной плотностью вероятности (см. рис. 8.8).

8.4. Шум аналого-цифрового преобразователя

Шум АЦП оценивается на основе линейной модели (см. рис. 8.9, в).

При округлении данных оценки *входного шума* АЦП $e_{\text{Abx}}(n)$ в любой момент времени n совпадают с оценками ошибки квантования (8.8) — (8.12):

$$\max_n |e_{\text{Abx}}(n)| = \frac{Q_A}{2}; \quad (8.13)$$

$$\mu_{e_{\text{Abx}}} = 0; \quad (8.14)$$

$$\sigma_{e_{\text{Abx}}}^2 = \frac{Q_A^2}{12}; \quad (8.15)$$

$$P_{e_{\text{Abx}}} \approx -(6,02b_A + 10,79) \text{ (дБ)}, \quad (8.16)$$

где $Q_A = 2^{-b_A}$ — шаг квантования; b_A — число значащих битов АЦП.

Выходной шум АЦП $e_{\text{Abых}}$ (n) определяется по формуле свертки

$$e_{\text{Abых}}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) e_{\text{Abx}}(n-m),$$

где $h(n)$ — импульсная характеристика ЛДС.

На основании этого определяются *оценки* шума $e_{\text{Abых}}(n)$:

- *детерминированная*:

$$\max_n |e_{\text{Abых}}(n)| = \max_n \left| \sum_{m=0}^{\infty} h(m) e_{\text{Abx}}(n-m) \right| \leq \max_n |e_{\text{Abx}}(n)| \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|,$$

откуда, с учетом (8.13):

$$\max_n |e_{\text{Abых}}(n)| = \frac{Q_A}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|; \quad (8.17)$$

- *математическое ожидание*:

$$\mu_{e_{\text{Abых}}} = M\{e_{\text{Abых}}(n)\} = M\left\{ \sum_{m=0}^{\infty} h(m) e_{\text{Abx}}(n-m) \right\},$$

где $M\{\cdot\}$ — оператор математического ожидания.

Математическое ожидание $\mu_{e_{\text{Abx}}}$ определим, используя свойство линейности оператора математического ожидания для случайных величин X , Y и константы C :

$$\begin{aligned} M\{X\} + M\{Y\} &= M\{X + Y\}; \\ M\{CX\} &= CM\{X\}, \end{aligned} \quad (8.18)$$

с учетом чего для отсчетов белого шума $e_{\text{Abx}}(n)$ получим:

$$\mu_{e_{\text{Abx}}} = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) M\{e_{\text{Abx}}(n-m)\}.$$

Математическое ожидание шума $e_{\text{Abx}}(n)$ в любой момент времени равно $\mu_{e_{\text{Abx}}} = 0$ (8.14). Следовательно,

$$\mu_{e_{\text{Abx}}} = \mu_{e_{\text{Abx}}} \sum_{n=0}^{\infty} h(n) = 0; \quad (8.19)$$

□ дисперсия $\sigma_{e_{\text{Abx}}}^2$:

$$\sigma_{e_{\text{Abx}}}^2 = D\{e_{\text{Abx}}(n)\} = D\left\{\sum_{m=0}^{\infty} h(m)e_{\text{Abx}}(n-m)\right\},$$

где $D\{\cdot\}$ — оператор дисперсии.

Аналогично, дисперсию $\sigma_{e_{\text{Abx}}}^2$ определим, используя свойства оператора $D\{\cdot\}$, справедливые для *независимых* случайных величин X , Y и константы C :

$$\begin{aligned} D\{X + Y\} &= D\{X\} + D\{Y\}; \\ D\{CX\} &= C^2 D\{X\}, \end{aligned} \quad (8.20)$$

с учетом чего для некоррелированных (*независимых*) отсчетов белого шума $e_{\text{Abx}}(n)$ получим:

$$\sigma_{e_{\text{Abx}}}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) D\{e_{\text{Abx}}(n-m)\}.$$

Дисперсия шума $e_{\text{Abx}}(n)$ в любой момент времени равна $\sigma_{e_{\text{Abx}}}^2$ (8.15). Следовательно,

$$\sigma_{e_{\text{Abx}}}^2 = \sigma_{e_{\text{Abx}}}^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) = \frac{Q_A^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n); \quad (8.21)$$

□ мощность $P_{e_{\text{Abx}}}$ (8.11):

$$P_{e_{\text{Abx}}} = 10 \lg(\sigma_{e_{\text{Abx}}}^2) + 10 \lg \left(\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) \right) = P_{e_{\text{Abx}}} + 10 \lg \left(\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) \right),$$

с учетом $P_{e_{\text{Abx}}}$ (8.16) равная

$$P_{e_{\text{Aбых}}} \approx -(6,02b_A + 10,79) + 10 \lg \left(\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) \right) \text{ (дБ).}$$

Отметим, что в линейной модели оценки шума АЦП *не зависят от структуры ЛДС*.

При усечении данных оценки легко получить по аналогии на основании.

Пример 8.4. Определить дисперсию и мощность входного $e_{\text{Abx}}(n)$ и выходного $e_{\text{Aбых}}(n)$ шумов 8-разрядного АЦП для базового звена 1-го порядка с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1}} \Rightarrow h(n) = (-a_1)^n$$

при $a_1 = 0,7$.

Решение. Определим дисперсию (8.15) и мощность входного шума АЦП $e_{\text{Abx}}(n)$:

$$\sigma_{e_{\text{Abx}}}^2 = \frac{Q_A^2}{12} = \frac{2^{-2,7}}{12} \approx 0,509 \cdot 10^{-5};$$

$$P_{e_{\text{Abx}}} = 10 \lg(\sigma_{e_{\text{Abx}}}^2) \approx -52,93 \text{ (дБ).}$$

Используя следующее равенство для базового звена 1-го порядка:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_1^2)^n = \frac{1}{1 - a_1^2},$$

определим дисперсию (8.21) и мощность выходного шума АЦП $e_{\text{Aбых}}(n)$:

$$\sigma_{e_{\text{Aбых}}}^2 = \frac{Q_A^2}{12} \cdot \frac{1}{1 - a_1^2} \approx 0,998 \cdot 10^{-5};$$

$$P_{e_{\text{Aбых}}} = 10 \lg(\sigma_{e_{\text{Aбых}}}^2) \approx -50,01 \text{ (дБ).}$$

Очевидно, что входной шум АЦП на выходе звена усиливается, и этот эффект будет возрастать с приближением полюса $z_* = -a_1$ к единичной окружности. ◀

8.5. Собственный шум цифровой системы

Собственный шум цифровой системы, обусловленный шумами умножителей, зависит от *структуре* цифровой системы и *архитектуре* цифрового устройства, на базе которого она реализуется. *Структура* определяет конфигурацию умножителей, поэтому принято говорить о *собственном шуме структуры* цифровой системы, а *архитектура* — специфику округления результатов умножения: округление

каждого локального произведения или их суммы. С этой целью в архитектуре многих ЦПОС предусмотрена операция умножения с накоплением (Multiplier/Accumulator, MAC).

Оценивание собственного шума структуры выполняется на основе линейной модели с аддитивными источниками шума умножителей.

В общем случае, шумы умножителей могут обрабатываться различными частями структуры, поэтому для оценивания собственного шума структуры на основе линейной модели создается эквивалентная линейная модель, отображающая обработку шумов умножителей.

8.5.1. Эквивалентная линейная модель

На рис. 8.10 представлена обобщенная эквивалентная линейная модель с векторным представлением соотношения вход/выход, где $\mathbf{e}_{\text{y}_{\text{вх}}}(n)$, $\mathbf{e}_{\text{y}_{\text{вых}}}(n)$ — соответственно векторы входных и выходных шумов умножителей, $\mathbf{H}_s(z)$ — вектор-столбец эквивалентных передаточных функций частей структуры, обрабатывающих составляющие вектора $\mathbf{e}_{\text{y}_{\text{вх}}}(n)$.

Собственный шум структуры $e_c(n)$ равен сумме составляющих вектора $\mathbf{e}_{\text{y}_{\text{вых}}}(n)$, а его оценки — сумме соответствующих оценок $\mathbf{e}_{\text{y}_{\text{вых}}}(n)$.

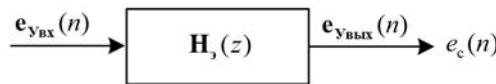


Рис. 8.10. Эквивалентная линейная модель с векторным представлением соотношения вход/выход

Составляющие $e_{\text{y}_{\text{вх}k}}(n)$ вектора $\mathbf{e}_{\text{y}_{\text{вх}}}(n)$ при округлении каждого локального произведения формируются из шумов умножителей на *входах* K сумматоров, $k=1, 2, \dots, K$, а при округлении суммы локальных произведений — на *выходах* сумматоров. В последнем случае эквивалентную линейную модель называют *линейной моделью с постнакоплением* (*post-accumulation quantization*) [4].

Составляющие $e_{\text{y}_{\text{вых}k}}(n)$ вектора $\mathbf{e}_{\text{y}_{\text{вых}}}(n)$ определяются по формуле свертки:

$$e_{\text{y}_{\text{вых}k}}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_{\text{вх}k}(m) e_{\text{y}_{\text{вх}k}}(n-m), \quad k=1, 2, \dots, K, \quad (8.22)$$

где $h_{\text{вх}k}(n)$ — эквивалентная импульсная характеристика части структуры с эквивалентной передаточной функцией $H_{\text{вх}k}(z)$.

Если шум $e_{\text{y}_{\text{вх}k}}(n)$ поступает непосредственно на выход эквивалентной линейной модели, то $H_{\text{вх}k}(z)=1$ и $e_{\text{y}_{\text{вых}k}}(n)=e_{\text{y}_{\text{вх}k}}(n)$.

Оценки шума $e_{y_{\text{вых}}}(n)$ (8.22) подобны оценкам выходного шума АЦП (8.17), (8.19) и (8.21):

$$\max_n |e_{y_{\text{вых}}}(n)| = \max_n |e_{y_{\text{вх}}}(n)| \sum_{n=0}^{\infty} |h_{\text{вх}}(n)| ;$$

$$\mu_{e_{y_{\text{вых}}}} = 0 ; \quad (8.23)$$

$$\sigma_{e_{y_{\text{вых}}}}^2 = \sigma_{e_{y_{\text{вх}}}}^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_{\text{вх}}^2(n) . \quad (8.24)$$

Дисперсия $\sigma_{e_{y_{\text{вх}}}}^2$ при округлении *каждого* локального произведения будет равна сумме дисперсий шумов умножителей на входе k -го сумматора, а при округлении их суммы — дисперсии шума *одного* умножителя на выходе k -го сумматора:

$$\sigma_y^2 = \frac{Q_y^2}{12} , \quad (8.25)$$

где $Q_y = 2^{-b_y}$ — шаг квантования; b_y — число значащих битов цифрового устройства, на базе которого реализуется структура.

С учетом (8.23), далее ограничимся оценкой *дисперсии* собственного шума различных структур.

Детерминированные оценки легко получить самостоятельно по аналогии.

8.5.2. Собственный шум структур рекурсивных звеньев

Определим составляющие векторов $\mathbf{e}_{y_{\text{вх}}}(n)$, $\mathbf{H}_s(z)$, $\mathbf{e}_{y_{\text{вых}}}(n)$ (см. рис. 8.10) и дисперсию собственного шума типовых структур рекурсивных звеньев с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} ,$$

где $b_0 = 1$, как в передаточной функции каскадной структуры (6.14).

В эквивалентной линейной модели *прямой* структуры звена и линейной модели с постнакоплением (рис. 8.11) векторы $\mathbf{e}_{y_{\text{вх}}}(n)$, $\mathbf{H}_s(z)$ и $\mathbf{e}_{y_{\text{вых}}}(n)$ представлены *одной* составляющей:

$$\mathbf{e}_{y_{\text{вх}}}(n) = e_{y_{\text{вх}1}}(n) ;$$

$$\mathbf{H}_s(z) = H_s(z) ;$$

$$\mathbf{e}_{y_{\text{вых}}}(n) = e_{y_{\text{вых}1}}(n) ,$$

где $H_s(z)$ — эквивалентная передаточная функция *рекурсивной части* структуры.

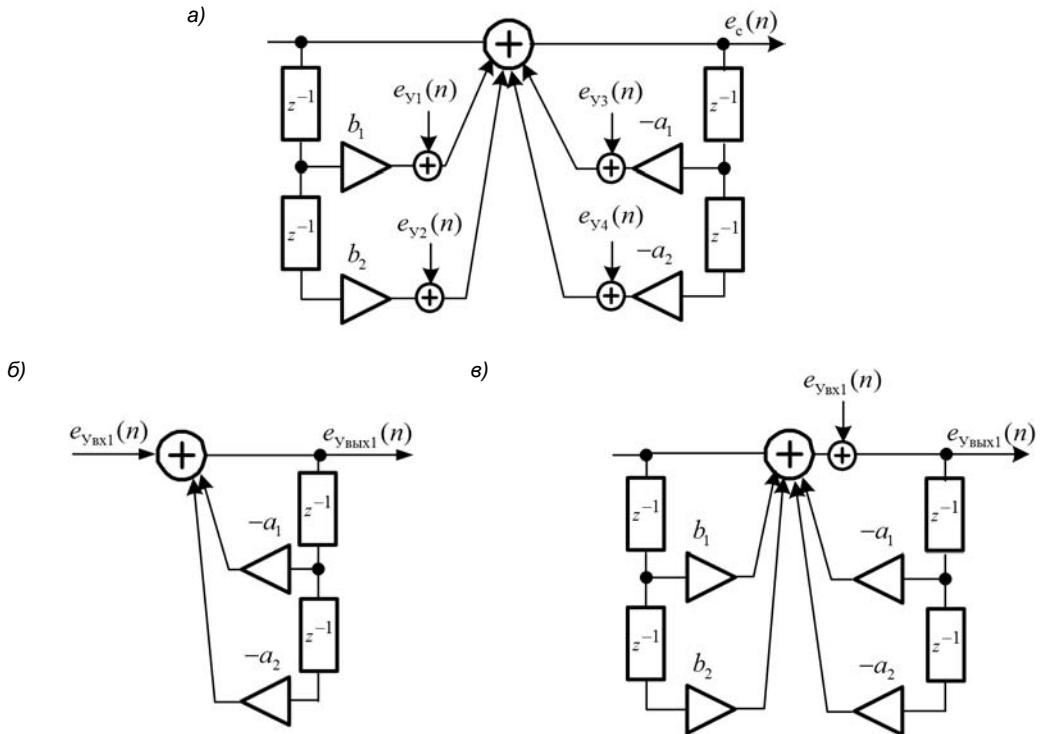


Рис. 8.11. Линейная модель (а), эквивалентная линейная модель (б) и линейная модель с постнакоплением (в) прямой структуры звена

При округлении каждого локального произведения шум $e_{y_{\text{вх1}}}(n)$ формируется на выходе сумматора:

$$e_{y_{\text{вх1}}}(n) = \sum_{i=1}^4 e_{y_i}(n),$$

и его дисперсия равна сумме дисперсий шумов умножителей:

$$\sigma_{e_{y_{\text{вх1}}}}^2 = \frac{4Q_y^2}{12},$$

а при округлении суммы локальных произведений — на выходе сумматора и его дисперсия равна дисперсии шума одного умножителя (8.25):

$$\sigma_{e_{y_{\text{вх1}}}}^2 = \frac{Q_y^2}{12}.$$

Шум $e_{y_{\text{вх1}}}(n)$ обрабатывается рекурсивной частью структуры звена, и шум $e_{y_{\text{вых1}}}(n)$ определяется по формуле свертки (8.22):

$$e_{y_{\text{вых1}}}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_3(m) e_{y_{\text{вх1}}}(n-m),$$

где $h_s(n)$ — эквивалентная импульсная характеристика рекурсивной части структуры с эквивалентной передаточной функцией

$$H_s(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

Собственный шум прямой структуры звена равен выходному шуму умножителей:

$$e_c(n) = e_{y_{\text{вых}1}}(n),$$

его дисперсия (8.24) при округлении каждого локального произведения будет равна

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{4Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h_s^2(n), \quad (8.26)$$

а при округлении *суммы* локальных произведений

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h_s^2(n).$$

В эквивалентной линейной модели *прямой канонической* структуры звена и линейной модели с постнакоплением (рис. 8.12) векторы $\mathbf{e}_{y_{\text{вх}}}(n)$, $\mathbf{H}_s(z)$ и $\mathbf{e}_{y_{\text{вых}}}(n)$ представлены *двумя* составляющими:

$$\mathbf{e}_{y_{\text{вх}}}(n) = [e_{y_{\text{вх}1}}(n) \ e_{y_{\text{вх}2}}(n)];$$

$$\mathbf{H}_s(z) = [H(z) \ 1]^T;$$

$$\mathbf{e}_{y_{\text{вых}}}(n) = [e_{y_{\text{вых}1}}(n) \ e_{y_{\text{вх}1}}(n)],$$

где $H(z)$ — эквивалентная передаточная функция *всей* структуры звена.

При округлении *каждого* локального произведения шумы $e_{y_{\text{вх}1}}(n)$, $e_{y_{\text{вх}2}}(n)$ формируются на *входах* сумматоров:

$$e_{y_{\text{вх}1}}(n) = \sum_{i=3}^4 e_{y_i}(n);$$

$$e_{y_{\text{вх}2}}(n) = \sum_{i=1}^2 e_{y_i}(n),$$

и их дисперсии равны:

$$\sigma_{e_{y_{\text{вх}1}}}^2 = \sigma_{e_{y_{\text{вх}2}}}^2 = \frac{2Q_y^2}{12}, \quad (8.27)$$

а при округлении *суммы* локальных произведений — на *выходах* сумматоров, и их дисперсии равны

$$\sigma_{e_{y_{\text{вх}1}}}^2 = \sigma_{e_{y_{\text{вх}2}}}^2 = \frac{Q_y^2}{12}.$$

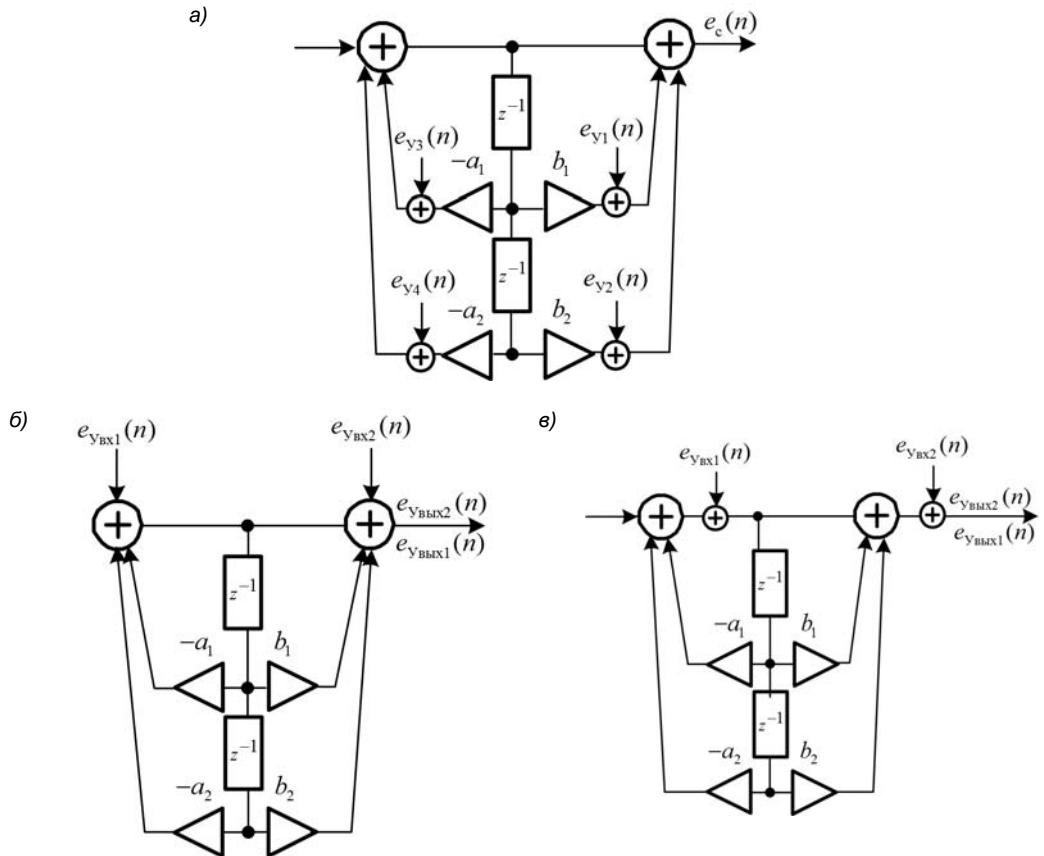


Рис. 8.12. Линейная модель (a), эквивалентная линейная модель (б) и линейная модель с постнакоплением (в) прямой канонической структуры звена

Шум $e_{y_{\text{bx}1}}(n)$ обрабатывается всей структурой звена, и шум $e_{y_{\text{вых}1}}(n)$ определяется по формуле свертки (8.22):

$$e_{y_{\text{вых}1}}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) e_{y_{\text{bx}1}}(n-m),$$

где $h(n)$ — эквивалентная импульсная характеристика всей структуры звена с эквивалентной передаточной функцией

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

Дисперсия шума $e_{y_{\text{вых}1}}(n)$ (8.24) при округлении каждого локального произведения равна

$$\sigma_{e_{y_{\text{вых}1}}}^2 = \frac{2Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n), \quad (8.28)$$

а при округлении суммы локальных произведений

$$\sigma_{e_{\text{вых1}}}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n).$$

Шум $e_{\text{вых2}}(n)$ поступает непосредственно на выход (рис. 8.12, б, в), поэтому его эквивалентная передаточная характеристика равна единице и $e_{\text{вых2}}(n) = e_{\text{вых2}}(n)$.

Собственный шум прямой канонической структуры звена равен сумме шумов:

$$e_c(n) = e_{\text{вых1}}(n) + e_{\text{вых2}}(n) = e_{\text{вых1}}(n) + e_{\text{вых2}}(n),$$

и его дисперсия — сумме дисперсий данных шумов:

$$\sigma_{e_c}^2 = \sigma_{e_{\text{вых1}}}^2 + \sigma_{e_{\text{вых2}}}^2.$$

При округлении *каждого* локального произведения дисперсия собственного шума, согласно (8.28) и (8.27), будет равна

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{2Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{2Q_y^2}{12}, \quad (8.29)$$

а при округлении суммы локальных произведений

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{Q_y^2}{12}.$$

В эквивалентной линейной модели *прямой транспонированной* структуры звена (рис. 8.13, б) с четырьмя сумматорами фактически обрабатываются два входных шума умножителей:

$$e_{\text{вых1}}(n) = e_{y_4}(n-1) + e_{y_5}(n-2);$$

$$e_{\text{вых2}}(n) = e_{y_1}(n) + e_{y_2}(n-1) + e_{y_3}(n-2),$$

как в эквивалентной линейной модели *прямой канонической* структуры (рис. 8.12, б). Задержка белого шума не влияет на его оценки, следовательно, дисперсии собственного шума данных структур совпадают.

В эквивалентной линейной модели *прямой канонической транспонированной* структуры звена (рис. 8.14) с тремя сумматорами фактически обрабатывается один входной шум умножителей

$$e_{\text{вых1}}(n) = e_{y_1}(n) + e_{y_2}(n-1) + e_{y_3}(n-2) + e_{y_4}(n-1) + e_{y_5}(n-2),$$

как в эквивалентной линейной модели *прямой* структуры (см. рис. 8.11, б), следовательно, дисперсии собственного шума данных структур совпадают.

Это позволяет далее ограничиться рассмотрением *прямой* и *прямой канонической* структур звеньев.

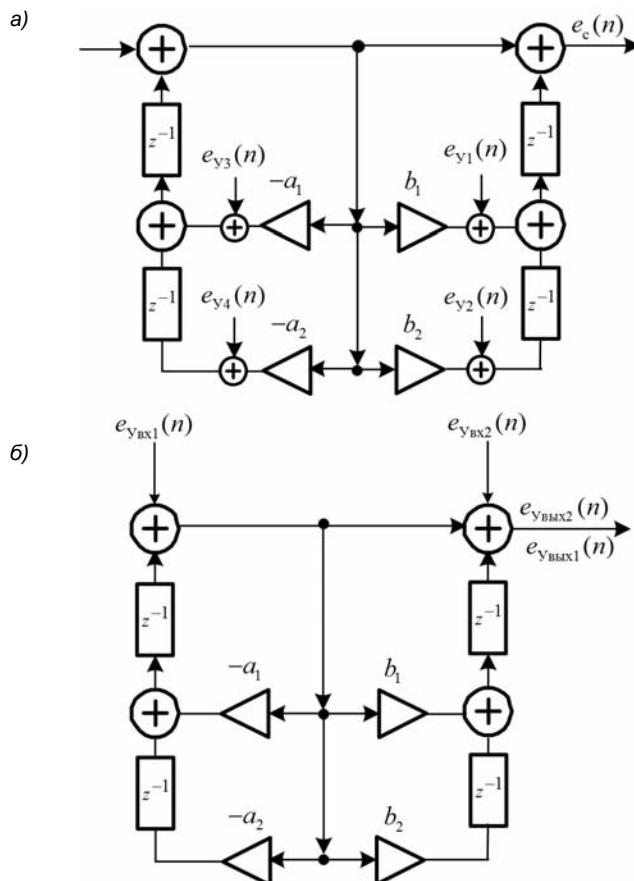


Рис. 8.13. Линейная (a) и эквивалентная линейная (б) модели прямой транспонированной структуры звена

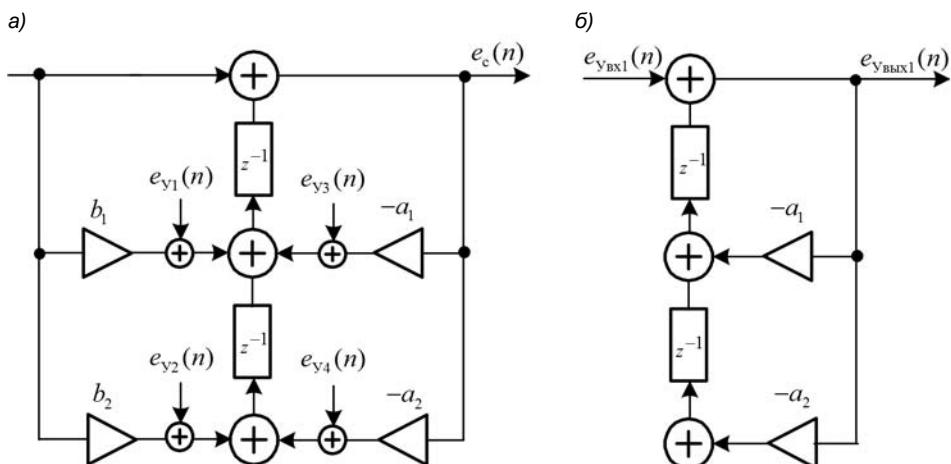


Рис. 8.14. Линейная (а) и эквивалентная линейная (б) модели прямой канонической транспонированной структуры звена

8.5.3. Влияние нулей и полюсов на дисперсию собственного шума

Представим передаточную функцию звена

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

в виде произведения простейших множителей

$$H(z) = \frac{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})}{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})} = \frac{1 - 2r_* \cos \varphi_* z^{-1} + r_*^2 z^{-2}}{1 - 2r_* \cos \varphi_* z^{-1} + r_*^2 z^{-2}}$$

и запишем импульсную характеристику (см. (4.22)):

$$h(n) = r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*} - 2r_* \cos \varphi_* r_*^{(n-1)} \frac{\sin(n\varphi_*)}{\sin \varphi_*} + r_*^2 r_*^{(n-2)} \frac{\sin[(n-1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*},$$

где r_* и φ_* — радиус и угол (рад) комплексно сопряженных полюсов; r_* и φ_* — комплексно сопряженных нулей.

При одинаковом шаге квантования Q_y дисперсии собственного шума $\sigma_{e_c}^2$ (8.26) и (8.29) будут зависеть от крутизны эквивалентных ИХ: чем она круче (модули ее значений быстрее убывают¹), тем меньше дисперсия.

В *прямой* структуре звена входной шум умножителей $e_{y_{\text{вх1}}}(n)$ обрабатывается *рекурсивной* частью структуры с эквивалентной ИХ $h_3(n)$:

$$h_3(n) = r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*} \Leftrightarrow H_3(z) = \frac{1}{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})},$$

которая зависит только от *полюсов* эквивалентной передаточной функции $H_3(z)$.

С приближением полюсов к единичной окружности значения $|h_3(n)|$ возрастают — она становится менее крутой, и дисперсия собственного шума увеличивается.

В *прямой канонической* структуре звена входной шум умножителей $e_{y_{\text{вх1}}}(n)$ обрабатывается *всей* структурой звена с эквивалентной ИХ $h(n)$:

$$h(n) \Leftrightarrow H(z) = \frac{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})}{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})},$$

которая зависит от *нулей и полюсов* эквивалентной передаточной функции $H(z)$.

¹ В формулах для дисперсий учитывается их квадрат.

В пределе, при совпадении нулей и полюсов, получим $H(z) = 1$ и $h(n) = u_0(n)$, т. е. "максимально крутую" ИХ $h(n)$ в виде цифрового единичного импульса. Следовательно, *ближение нулей с полюсами* сопровождается возрастанием крутизны ИХ и *уменьшением дисперсии собственного шума*. С приближением полюсов к единичной окружности (возрастанием радиуса полюсов) они удаляются от нулей, и дисперсия собственного шума увеличивается.

Очевидно, что в обоих случаях величина дисперсии собственного шума звена будет зависеть от *модулей значений* эквивалентных ИХ. В прямой структуре звена они определяются полюсами, а в прямой канонической — нулями и полюсами эквивалентных передаточных функций. Поэтому при одинаковых полюсах дисперсия собственного шума звена прямой канонической структуры может оказаться сравнимой и даже меньшей, чем у звена прямой структуры.

Таким образом, дисперсия собственного шума будет зависеть от *структуры* звена и *нулей и полюсов* (или полюсов) его эквивалентной передаточной функции, определяющих *модули значений* эквивалентной ИХ.

Пример 8.5. На рис. 8.15 приведены три варианта передаточных функций звена, их карты нулей и полюсов и эквивалентные ИХ (50 отсчетов) звена прямой и прямой канонической структуры.

При вычислении дисперсии собственного шума звеньев основная проблема связана с *ограничением длины* теоретически бесконечной ИХ.

Средства MATLAB позволяют эту проблему снять, если:

- описывать структуру звена в виде объекта `dfilt` (см. разд. 6.3);
- вычислять ИХ объекта `dfilt` с помощью функции `impz`.

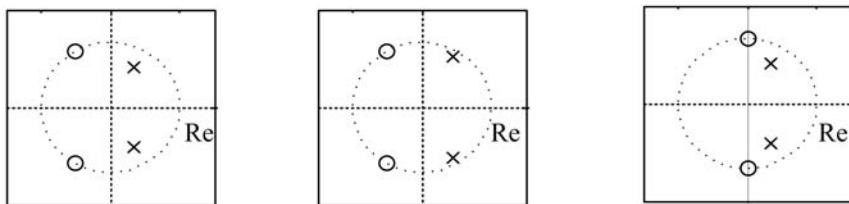
Длина ИХ в этом случае будет *автоматически ограничиваться* при достижении высокой, задаваемой по умолчанию точности.

В этом легко убедиться самостоятельно, например, описать прямую структуру звена в виде объекта `H = dfilt.df1(b, a)` (см. табл. 6.1) и вычислить ИХ — `impz(H)`. Без оператора присваивания эта функция автоматически выведет график ИХ в окне FVTool (Filter Visualization Tool — средство визуализации фильтра).

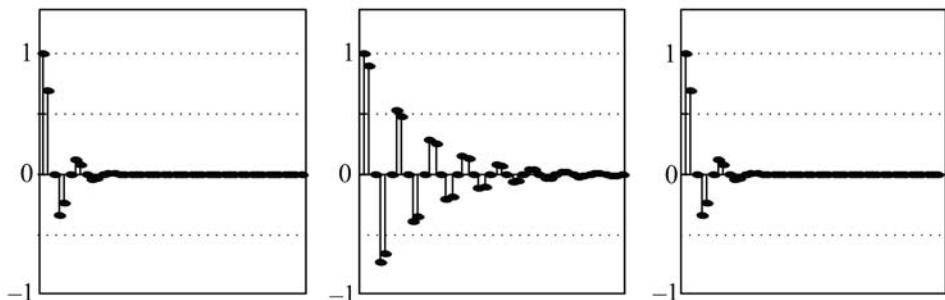
На рис. 8.16 приведена диаграмма с СКО¹ σ_{e_c} собственного шума звеньев при округлении каждого локального произведения и шаге квантования $Q_y = 2^{-b_y} = 2^{-15}$, подтверждающая теоретические выводы: с приближением полюсов к единичной окружности СКО обеих структур возрастает; с приближением нулей к полюсам СКО прямой структуры остается неизменным, а СКО прямой канонической структуры уменьшается.

¹ Среднеквадратическое (стандартное) отклонение.

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{1-0,7z^{-1}+0,49z^{-2}} \quad H(z) = \frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{1-0,9z^{-1}+0,81z^{-2}} \quad H(z) = \frac{1+z^{-2}}{1-0,7z^{-1}+0,49z^{-2}}$$



Эквивалентные IX звеньев прямой структуры



Эквивалентные IX звеньев прямой канонической структуры

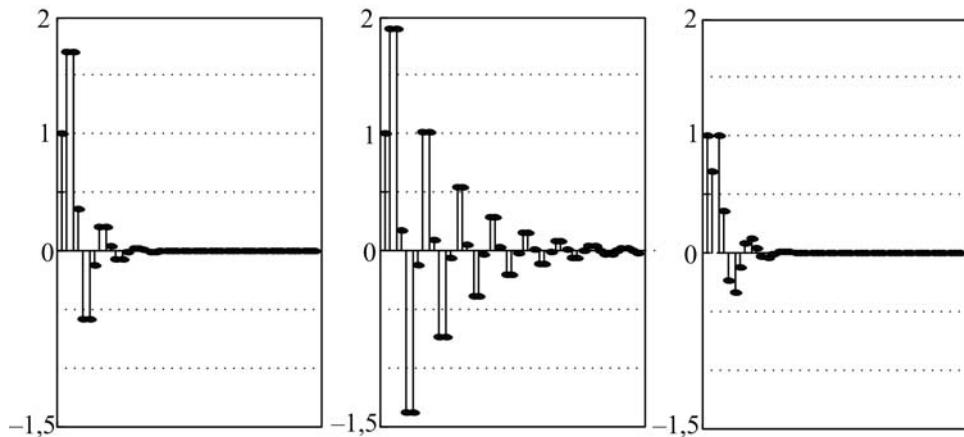


Рис. 8.15. Характеристики звеньев (сверху вниз): передаточные функции; карты нулей и полюсов (слева направо): исходная, полюсы приблизились к единичной окружности, нули приблизились к полюсам; эквивалентные ИХ



Рис. 8.16. Диаграмма СКО собственного шума прямой и прямой канонической структуры звеньев

8.5.4. Собственный шум структур нерекурсивной системы

Оценивание собственного шума структур нерекурсивной системы с передаточной функцией (6.16)

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}$$

выполняется непосредственно на основе линейной модели.

В линейной модели (рис. 8.17) прямой структуры (см. рис. 6.9) эквивалентный шум, равный сумме шумов умножителей, поступает непосредственно на выход, формируя собственный шум структуры:

$$e_c(n) = \sum_{i=1}^N e_{y_i}(n).$$

Дисперсия собственного шума при округлении *каждого* локального произведения будет равна сумме дисперсий шумов умножителей на входах сумматоров (8.25):

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{N Q_y^2}{12},$$

а при округлении *суммы* локальных произведений — дисперсии шума одного умножителя на выходе сумматора:

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12}.$$

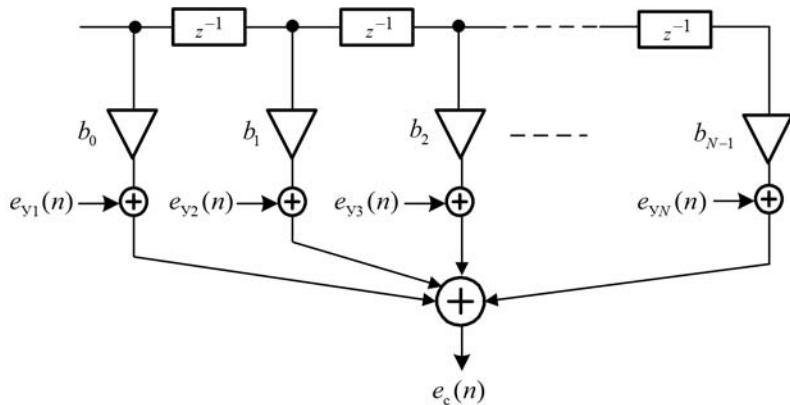


Рис. 8.17. Линейная модель прямой структуры нерекурсивной системы

8.5.5. Собственный шум параллельной структуры

Эквивалентная линейная модель (см. рис. 8.10) параллельной структуры (см. рис. 6.8) с передаточной функцией (6.15)

$$H(z) = \sum_{k=1}^L \left(\frac{B_{0k} + B_{1k} z^{-1}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \right) = \sum_{k=1}^L H_k(z),$$

созданная на основе эквивалентных линейных моделей звеньев, представлена на рис. 8.18, где $H_k(z)$ — эквивалентная передаточная функция k -го звена.

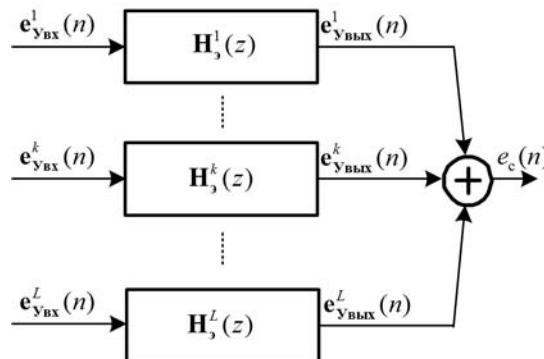


Рис. 8.18. Эквивалентная линейная модель параллельной структуры

Собственный шум $e_c(n)$ параллельной структуры равен сумме собственных шумов звеньев $e_c^k(n)$:

$$e_c(n) = \sum_{k=1}^L e_c^k(n),$$

а его дисперсия — сумме дисперсий собственного шума звеньев. Дисперсия собственного шума звена зависит от его структуры, и ее аналитические формулы подобны приведенным в разд. 8.5.2.

8.5.6. Собственный шум каскадной структуры

Эквивалентная линейная модель (см. рис. 8.10) каскадной структуры (см. рис. 6.7) с передаточной функцией (6.14)

$$H(z) = G \prod_{k=1}^L \left(\frac{1 + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right) = G \prod_{k=1}^L H_k(z), \quad (8.30)$$

созданная на основе эквивалентных линейных моделей звеньев, представлена на рис. 8.19, где $H_k(z)$ — передаточная функция k -го звена, $\mathbf{H}_s^k(z)$ — его эквивалентная передаточная функция.

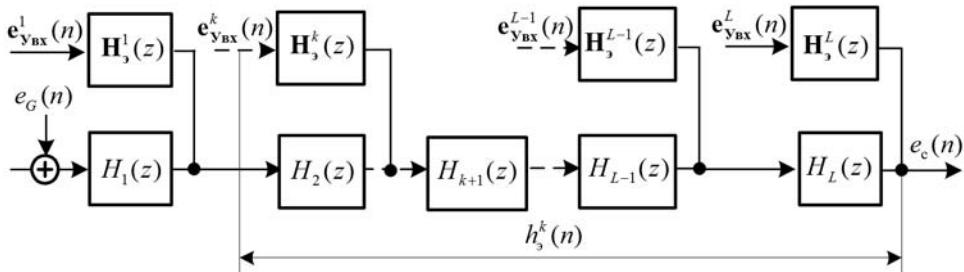


Рис. 8.19. Эквивалентная линейная модель каскадной структуры

Собственный шум каскадной структуры $e_c(n)$ будет равен сумме шумов:

$$e_c(n) = e_0(n) + \sum_{k=1}^L e_c^k(n), \quad (8.31)$$

где:

- $e_0(n)$ — реакция каскадной структуры на входной шум $e_G(n)$ умножителя G ;
- $e_c^k(n)$ — реакция *части* эквивалентной линейной модели с эквивалентной передаточной функцией $\mathbf{H}_s^k(z) \prod_{i=k+1}^L H_i(z)$ на шум $\mathbf{e}_{\text{y}_\text{bx}}^k(n)$.

Дисперсия собственного шума каскадной структуры $\sigma_{e_c}^2$ будет равна сумме дисперсий шумов в (8.31).

Шум $e_G(n)$ обрабатывается всей каскадной структурой, поэтому дисперсия собственного шума на выходе $e_0(n)$ будет равна

$$\sigma_{e_{00}}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n),$$

где $h(n)$ — ИХ каскадной структуры.

Зная вектор $\mathbf{H}_s(z)$ и дисперсию собственного шума звена, легко определить дисперсию собственного шума каскадной структуры.

Для звена *прямой* структуры с округлением *каждого* локального произведения они равны (см. (8.26)):

$$\mathbf{H}_s(z) = H_s(z);$$

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{4Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h_s^2(n),$$

где $h_s(n)$ — эквивалентная ИХ *рекурсивной части* звена с эквивалентной передаточной функцией $H_s(z)$.

Следовательно (см. рис. 18.19), при *прямой* структуре звеньев и округлении *каждого* локального произведения дисперсия собственного шума каскадной структуры будет равна (здесь и далее первая сумма — дисперсия собственного шума $\sigma_{e_{c0}}^2$):

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{4Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h_s^k(n)]^2, \quad (8.32)$$

где:

- $h_s^k(n)$ — эквивалентная ИХ *части* структуры с эквивалентной передаточной функцией $H_s^k(z) \prod_{i=k+1}^L H_i(z)$;
- $H_s^k(z)$ — эквивалентная передаточная функция *рекурсивной части* структуры k -го звена;
- $H_i(z)$ — передаточные функции звеньев каскадной структуры, начиная с $(k+1)$ -го звена.

При округлении суммы локальных произведений получим:

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h_s^k(n)]^2. \quad (8.33)$$

Для звена *прямой канонической* структуры с округлением *каждого* локального произведения имеем (см. (8.29)):

$$\mathbf{H}_s(z) = [H(z) \ 1]^T;$$

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{2Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{2Q_y^2}{12},$$

где $h(n)$ — эквивалентная ИХ *всей* структуры звена с эквивалентной передаточной функцией $H(z)$.

Следовательно (см. рис. 18.19), при *прямой канонической* структуре звеньев и округлении *каждого* локального произведения дисперсия собственного шума каскадной структуры будет равна

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{2Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{2Q_y^2}{12} \sum_{k=2}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{2Q_y^2}{12}, \quad (8.34)$$

где:

- $h^k(n)$ — эквивалентная ИХ *части* структуры с эквивалентной передаточной функцией $H^k(z) \prod_{i=k+1}^L H_i(z)$;
- $H^k(z)$ — эквивалентная передаточная функция *всей* структуры k -го звена;
- $H_i(z)$ — передаточные функции звеньев каскадной структуры, начиная с $(k+1)$ -го звена.

При округлении суммы локальных произведений получим:

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{Q_y^2}{12} \sum_{k=2}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{Q_y^2}{12}. \quad (8.35)$$

8.5.7. Расстановка звеньев в каскадной структуре

В разд. 8.5.3 проанализировано влияние нулей и полюсов эквивалентной передаточной функции на крутизну эквивалентной ИХ звена и, как следствие, ее дисперсию собственного шума.

Дисперсия собственного шума каскадной структуры зависит от эквивалентных ИХ частей структуры, но сохраняется та же тенденция: чем круче эквивалентные ИХ (модули их значений быстрее убывают), тем меньше дисперсия. Следовательно, сохраняется та же тенденция влияния нулей и полюсов эквивалентных передаточных функций на дисперсию собственного шума каскадной структуры, а именно:

- *сближение нулей с полюсами* сопровождается возрастанием крутизны эквивалентных ИХ (модули ее значений быстрее убывают) и *уменьшением дисперсии*;
- *с приближением полюсов к единичной окружности* эквивалентные ИХ становятся менее крутыми и *дисперсия увеличивается*;
- дисперсия зависит от *структуры* звеньев и *нулей и полюсов* эквивалентных передаточных функций, в целом определяющих *модули значений* эквивалентных ИХ.

Однако в *каскадной структуре* с передаточной функцией (8.30) *эквивалентные* передаточные функции можно сформировать по-разному, в зависимости от объединения в пары нулей и полюсов и последовательности расстановки звеньев. В этом случае поиск оптимального решения оказывается весьма трудоемкой задачей.

Для минимизации собственного шума каскадной структуры предложен алгоритм [34], в соответствии с которым звенья формируются посредством *объединения*

полюсов с ближайшими нулями и расставляются в порядке возрастания радиусов полюсов, для чего выполняются следующие действия:

- полюс, ближайший к единичной окружности, объединяется с ближайшим нулем;
- процедура повторяется до тех пор, пока не будут сгруппированы все полюсы с нулями;
- сформированные звенья расставляются в порядке возрастания радиусов полюсов.

В GUI FDATool предусмотрены средства автоматической расстановки звеньев (см. разд. П1.4.1 приложения 1).

8.6. Отношение сигнал/шум и динамический диапазон цифровой системы

Полный шум $e_{\text{вых}}(n)$ цифровой системы при введенном предположении о независимости источников шума будет равен сумме шума АЦП $e_{\text{Авых}}(n)$ и собственного шума $e_c(n)$:

$$e_{\text{вых}}(n) = e_{\text{Авых}}(n) + e_c(n),$$

а его дисперсия равна сумме дисперсий данных шумов.

$$\sigma_{e_{\text{вых}}}^2 = \sigma_{e_{\text{Авых}}}^2 + \sigma_{e_c}^2. \quad (8.36)$$

Динамический диапазон D цифровой системы определяется как:

$$D = 20 \lg \left(\frac{|a_{\max}|}{|a_{\min}|} \right) (\text{дБ}),$$

где a_{\max} и $a_{\min} \neq 0$ — максимальное и минимальное значения цифрового сигнала, представленные в заданном формате и коде.

Отношение сигнал/шум SNR (Signal-to-Noise Ratio) цифровой системы определяется как:

$$SNR = 10 \lg \left(\frac{P_{\text{вых}}}{P_{\text{ш}}} \right) (\text{дБ}),$$

где $P_{\text{вых}}$ — средняя мощность выходного сигнала, $P_{\text{ш}}$ — дисперсия шума цифровой системы (8.36).

Пороговое отношение сигнал/шум $SNR_{\text{пор}}$ определяется как:

$$SNR_{\text{пор}} = 10 \lg \left(\frac{P_{\text{вых min}}}{P_{\text{ш}}} \right) (\text{дБ}),$$

где $P_{\text{вых min}}$ — минимальная средняя мощность выходного сигнала.

Для входного сигнала с $|a_{\max}| = 1$ (в дополнительном коде) и $|a_{\min}| = \frac{Q}{2} = 2^{-b}$ (при округлении) динамический диапазон равен:

$$D = 20 \lg \frac{1}{2^{-b}} = 20 \lg 2^b \text{ (дБ).}$$

8.7. Ошибки квантования коэффициентов

Операция квантования коэффициентов передаточной функции, нелинейная по своей природе, не влияет на линейность самой системы, а лишь изменяет ее характеристики. Иными словами, выполнив операцию квантования коэффициентов, переходим от одной ЛДС к другой с характеристиками, несколько отличающимися от характеристик исходной ЛДС.

В частности, квантование коэффициентов приведет к изменению нулей и полюсов передаточной функции, а следовательно, искажению АЧХ, которое может оказаться неприемлемым. Для рекурсивных ЛДС контролируется устойчивость.

Квантование коэффициентов средствами GUI FDATool рассматривается в разд. П1.4 приложения 1.

8.8. Ошибки переполнения сумматоров

В отличие от принципиально неустранимых шумов квантования, ошибки переполнения сумматоров можно предотвратить либо минимизировать. Эти ошибки исследуют на линейной модели (см. рис. 8.9, а), в предположении, что остальные эффекты квантования отсутствуют.

Определим значение выходного сигнала в k -й точке структуры, где контролируется *переполнение сумматора*, по формуле свертки

$$y_k(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_k(m) x(n-m),$$

где $h_k(n)$ — импульсная характеристика части структуры от входа до k -й точки, и максимальное по модулю значение реакции:

$$\max |y_k(n)| = \max \left| \sum_{m=0}^{\infty} h_k(m) x(n-m) \right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |h_k(m)| \max |x(n-m)|.$$

При ограниченном воздействии:

$$\max |x(n)| \leq 1$$

имеем

$$\max |y_k(n)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |h_k(n)|.$$

Для предотвращения переполнения в k -й точке структуры:

$$\max |y_k(n)| \leq 1,$$

на входе структуры ставится масштабирующий множитель $1/s_k$ (умножитель):

$$\max |y_k(n)| \leq \frac{1}{s_k} \sum_{n=0}^{\infty} |h_k(n)| \leq 1,$$

где значение s_k , равное

$$s_k = \sum_{n=0}^{\infty} |h_k(n)|,$$

соответствует норме $\|\mathbf{x}\|_1$ для импульсной характеристики.

Из определения частотной характеристики (5.1):

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j\omega T n}$$

следует, что

$$|H_k(e^{j\omega T})| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} h_k(n) e^{-j\omega T n} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |h_k(n)|,$$

поэтому значение s_k можно вычислять на основе нормы для АЧХ, например $\|\mathbf{x}\|_\infty$:

$$s_k = \max |H_k(e^{j\omega T})| = \max A_k(\omega), \quad (8.37)$$

где $|H_k(e^{j\omega T})| = A_k(\omega)$ — АЧХ части структуры от входа до k -й точки.

Используют также норму $\|\mathbf{x}\|_2$ для импульсной характеристики¹:

$$s_k = \sqrt{\sum_{m=0}^{\infty} |h_k(m)|^2}.$$

Соотношение между данными нормами следующее [34]:

$$\|\mathbf{x}\|_2 < \|\mathbf{x}\|_\infty < \|\mathbf{x}\|_1.$$

Норма $\|\mathbf{x}\|_1$ гарантирует отсутствие переполнений, однако она не нашла широкого применения, т. к. принимаются во внимание все маловероятные переполнения, и платой за масштабирование оказывается существенное снижение уровня слабых сигналов. На практике предпочитают компромиссную норму $\|\mathbf{x}\|_\infty$ (8.37), гарантирующую отсутствие переполнений при гармоническом воздействии и наиболее простую для расчета масштабирующих множителей.

¹ В MATLAB масштабирующие множители s_k могут рассчитываться на основе норм $\|\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_\infty$, $\|\mathbf{x}\|_2$ и для импульсной характеристики, и для АЧХ.

Если масштабирование выполняется на основе нормы $\|x\|_2$ или $\|x\|_\infty$, то вероятность переполнений минимизируется, однако они не исключаются полностью. В таких случаях, если при вычислении суммы во внутреннем регистре (в формате расширенного слова) возникает переполнение, то при ее сохранении в ячейке памяти (в формате слова) результат, в зависимости от выбранного режима переполнения (Overflow Mode), автоматически заменяется следующим:

- в режиме арифметики насыщения (Saturate) — максимальным (по модулю) значением для формата слова.

Например, десятичные числа

$-2; -1,5; -1; -0,5; 0; 0,5; 1; 1,5; 2$

будут заменены числами

$-1; -1; -0,5; 0; 0,5; 1; 1; 1;$

- в режиме модульной арифметики (Wrap) — значением по модулю 2.

Отрицательное число, меньшее либо равное -1 , суммируется с ближайшим по модулю 2^N , а из положительного числа, большего 1, вычитается ближайшее 2^N .

Например, десятичные числа

$-2; -1,5; -1; -0,5; 0; 0,5; 1; 1,5; 2$

будут заменены числами

$0; 0,5; 1; -0,5; 0; 0,5; 1; -0,5; 0.$

Содержимое внутреннего регистра не меняется и может быть использовано для дальнейших вычислений.

В структурах нерекурсивных систем режим переполнения вполне удовлетворительно минимизирует возможные искажения результата (отсчетов реакции), и масштабирования не предусмотрено.

Наиболее уязвимы к ошибкам переполнения сумматоров *каскадные структуры* рекурсивных систем. Применение одной лишь этой меры может привести к непредсказуемому и необратимому искажению результата вследствие обратных связей. Поэтому в таких структурах предусмотрена минимизация переполнений с помощью масштабирования.

8.8.1. Масштабирование в каскадных структурах

Масштабирование в каскадных структурах с передаточной функцией (8.30) выполняется после *расстановки звеньев* (разд. 8.5.7) и основано на следующих общих принципах:

- в *каждом* звене переполнение контролируется на *выходе* только того сумматора, где накапливается *рекурсивная* часть реакции, т. к. вследствие обратной связи оно может повлечь за собой неконтролируемое последующее переполнение;
- для предотвращения переполнения на *выходе* сумматора, *масштабирующий множитель* $1/s_k$ учитывается на его *входе*;

- для того чтобы сохранить соответствие между уровнями выходного и входного сигналов звена в заданном динамическом диапазоне, на *выходе* сумматора добавляется умножитель s_k ;
- для уменьшения дисперсии собственного шума каскадной структуры, масштабирующие множители $1/s_k$ учитываются на *выходе предыдущего* звена;
- явное масштабирование выполняется путем добавления умножителей $1/s_k$ и s_k в каскадную структуру;
- неявное масштабирование предполагает учет масштабирующих множителей в коэффициентах числителей передаточных функций звеньев для уменьшения дисперсии собственного шума каскадной структуры.

Рассмотрим, как данные принципы реализуются на примере двухкаскадной структуры с передаточной функцией

$$H(z) = G \prod_{k=1}^2 \left(\frac{1 + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right) = G \prod_{k=1}^2 H_k(z), \quad (8.38)$$

и обобщим результаты на L -каскадную структуру.

При *прямой* структуре звеньев и *явном* масштабировании выполняются следующие действия (рис. 8.20, а):

- в прямой структуре звена имеется только *один* сумматор, на выходе которого накапливается сумма нерекурсивной и *рекурсивной* части реакции. Для того чтобы предотвратить (минимизировать) переполнение на *выходе* сумматора, на его *входе* ставится масштабирующий множитель (умножитель): $1/s_1$ — на входе первого звена, $1/s_2$ — второго;
- для того чтобы сохранить соответствие между уровнями выходного и входного сигналов звена в заданном динамическом диапазоне, на *выходе* сумматора добавляется умножитель: s_1 — на выходе первого звена, s_2 — второго;
- для уменьшения дисперсии собственного шума масштабирующий множитель $1/s_2$ учитывается на *выходе предыдущего* (первого) звена (рис. 8.20, б).

При *неявном* масштабировании (рис. 8.20, в) масштабирующие множители учитываются в коэффициентах числителей передаточных функций звеньев, и передаточная функция (8.38) принимает вид:

$$H(z) = \left(\prod_{k=1}^2 \frac{b'_{0k} + b'_{1k}z^{-1} + b'_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right) s_2 = \left(\prod_{k=1}^2 H'_k(z) \right) s_2, \quad (8.39)$$

где соответствие с коэффициентами *числителей* $H(z)$ (8.38) будет следующим:

$$\begin{aligned} b'_{01} &= \frac{G}{s_1 s_2}; & b'_{11} &= \frac{G}{s_1 s_2} b_{11}; & b'_{21} &= \frac{G}{s_1 s_2} b_{21}; \\ b'_{02} &= s_1; & b'_{12} &= s_1 b_{12}; & b'_{22} &= s_1 b_{22}. \end{aligned} \quad (8.40)$$

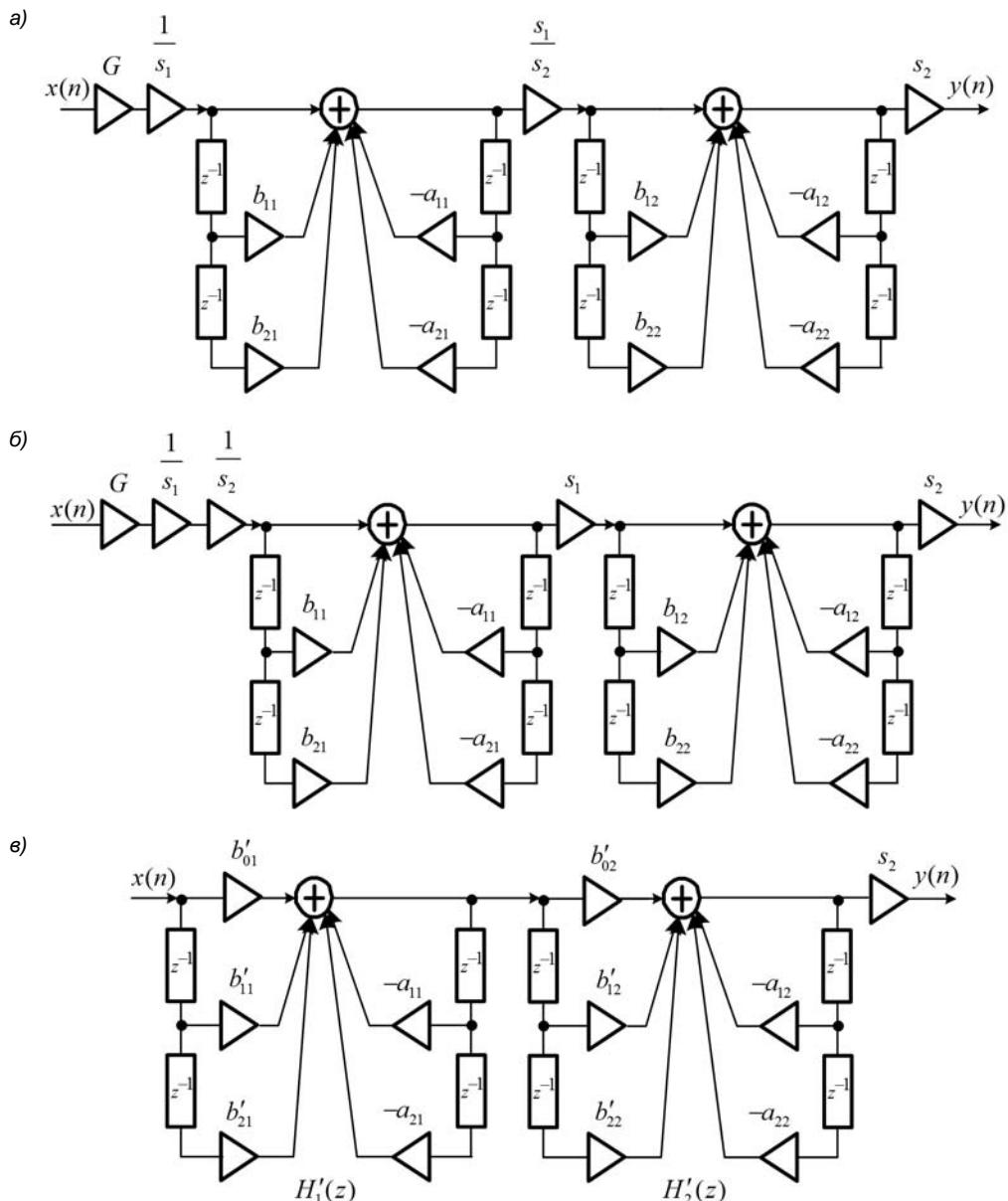


Рис. 8.20. Прямая структура звеньев: явное масштабирование (а), учет масштабирующего множителя в предыдущем звене (б), неявное масштабирование (в)

L-каскадная структура с *прямой* структурой звеньев и *явным* масштабированием на *входе* 1-го звена будет иметь те же умножители, на *входе* 2-го звена — умножитель s_1/s_3 , 3-го — s_2/s_4 и т. д., ($L-1$)-го — s_{L-1} , на *выходе* каскадной структуры — умножитель s_L .

На основании этого легко получить соответствия с коэффициентами числителей передаточной функции L -каскадной структуры $H(z)$ (8.30), которая при *прямой* структуре звеньев и *неявном* масштабировании принимает вид

$$H(z) = \left(\prod_{k=1}^L \frac{b'_{0k} + b'_{1k}z^{-1} + b'_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right) s_L = \left(\prod_{k=1}^L H'_k(z) \right) s_L, \quad (8.41)$$

где s_L — коэффициент усиления *на выходе* каскадной структуры (последнего звена).

При *прямой канонической* структуре звеньев и *явном* масштабировании выполняются следующие действия (рис. 8.21, *a*):

- в *прямой канонической* структуре звена имеется только *один* сумматор (*левый*), на выходе которого накапливается сумма *рекурсивной* части реакции $v_k(n)$, $k = 1, 2$ (см. рис. 6.3, *б*).

Для того чтобы предотвратить (минимизировать) переполнение на *выходе* сумматора, на его *входе* ставится масштабирующий множитель (умножитель): $1/s_1$ — на *входе* первого звена, $1/s_2$ — второго;

- для того чтобы сохранить соответствие между уровнями выходного и входного сигналов звена в заданном динамическом диапазоне, на *выходе* сумматора добавляется умножитель: s_1 — на *выходе* первого звена (на *всех ветвях*), s_2 — второго;
- для уменьшения дисперсии собственного шума масштабирующий множитель $1/s_2$ учитывается на *входе предыдущего* (первого) звена (рис. 8.21, *б*).

При *неявном* масштабировании (рис. 8.21, *в*) масштабирующие множители учитываются в коэффициентах *числителей* передаточных функций звеньев, и передаточная функция (8.38) принимает вид:

$$H(z) = G'' \prod_{k=1}^2 \left(\frac{b''_{0k} + b''_{1k}z^{-1} + b''_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right) = G'' \prod_{k=1}^2 H'_k(z), \quad (8.42)$$

где соответствие с коэффициентом *усиления* и коэффициентами *числителей* $H(z)$ (8.38) будет следующим:

$$\begin{aligned} G'' &= \frac{G}{s_1 s_2}; & b''_{01} &= s_1; & b''_{11} &= s_1 b_{11}; & b''_{21} &= s_1 b_{21}; \\ b''_{02} &= s_2; & b''_{12} &= s_2 b_{12}; & b''_{22} &= s_2 b_{22}. \end{aligned} \quad (8.43)$$

L -каскадная структура с *прямой канонической* структурой звеньев и *явным* масштабированием на *входе* 1-го звена будет иметь те же умножители, на *всех вводах* *правого* сумматора 1-го звена — умножитель s_1/s_3 , 2-го — s_2/s_4 и т. д., $(L-1)$ -го — s_{L-1} , L -го — s_L .

На основании этого легко получить соответствия с коэффициентами усиления и *числителями* передаточной функции L -каскадной структуры $H(z)$ (8.30), которая

при прямой канонической структуре звеньев и неявном масштабировании принимает вид

$$H(z) = G'' \prod_{k=1}^L \left(\frac{b''_{0k} + b''_{1k}z^{-1} + b''_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right) = G'' \prod_{k=1}^L H''_k(z), \quad (8.44)$$

где G'' — коэффициент усиления на выходе каскадной структуры (первого звена).

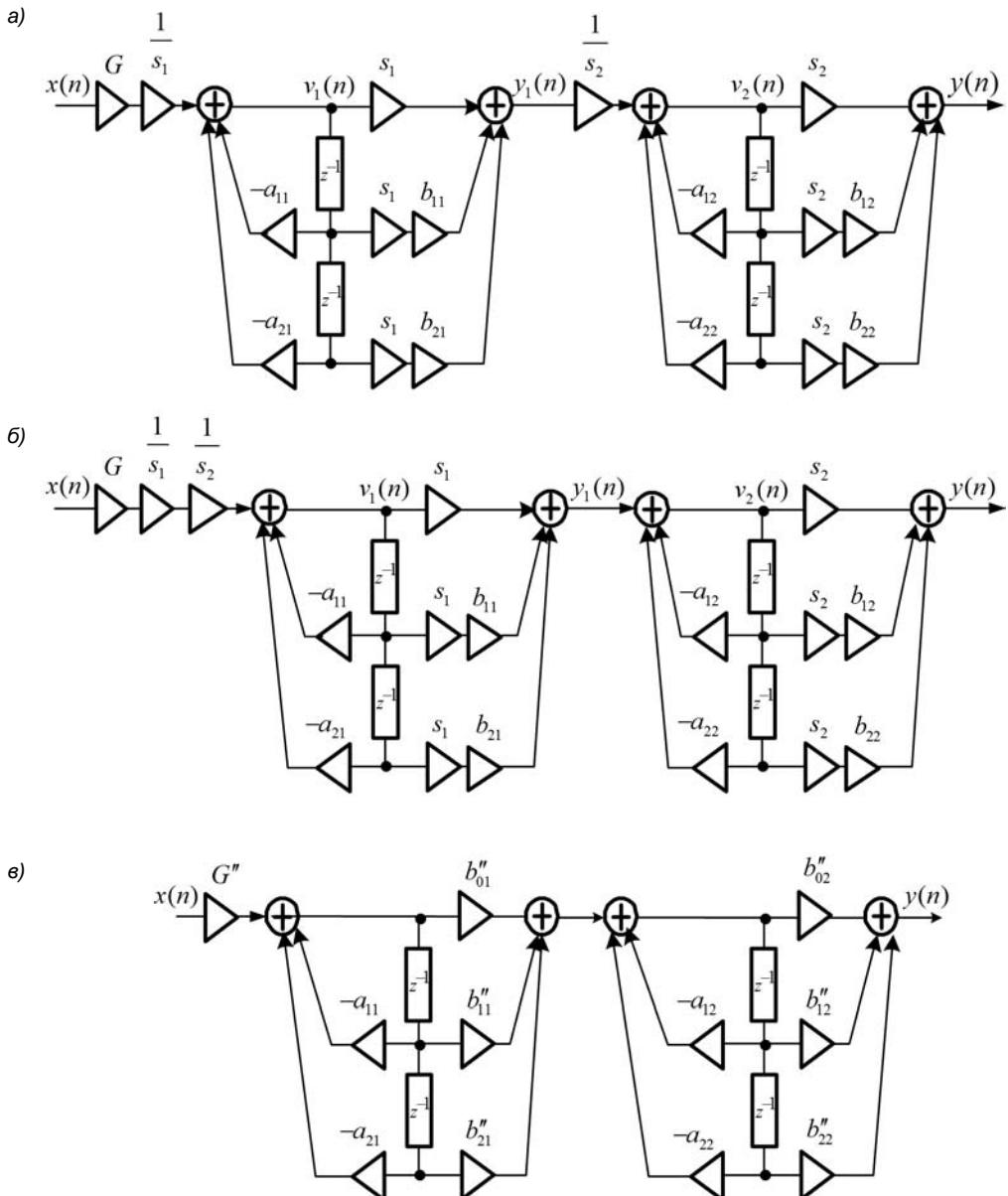


Рис. 8.21. Прямая каноническая структура звеньев: явное масштабирование (a), учет масштабирующего множителя в предыдущем звене (b), неявное масштабирование (c)

Масштабирование в каскадной структуре с *прямой транспонированной* структурой звеньев (рис. 8.13, а) выполняется так же, как с *прямой канонической* структурой звеньев, и передаточная функция имеет вид (8.44).

Масштабирование в каскадной структуре с *прямой канонической транспонированной* структурой звеньев (рис. 8.14, а) выполняется так же, как с *прямой* структурой звеньев, и передаточная функция имеет вид (8.41).

Приведем примеры масштабирования на основе нормы $\|\mathbf{x}\|_\infty$ (8.37) в двухкаскадной структуре с передаточной функцией после расстановки звеньев:

$$H(z) = 0,1044 \frac{1 + 1,7021z^{-1} + 1z^{-2}}{1 - 0,6106z^{-1} + 0,3029z^{-2}} \cdot \frac{1 + 0,886z^{-1} + 1z^{-2}}{1 - 0,0013z^{-1} + 0,8093z^{-2}}. \quad (8.45).$$

Пример 8.6. Выполним масштабирование каскадной структуры с *прямой* структурой звеньев.

Воспользуемся средствами MATLAB: описанием структуры в виде объекта `dfilt` (см. пример 6.2) и функцией `scale` с выбором нормы $\|\mathbf{x}\|_\infty$ по умолчанию:

```
>> SOS = [1 1.7021 1 1 -0.6106 0.3029; 1 0.886 1 1 -0.0013 0.8093];
>> G = 0.1044;
>> H1 = dfilt.df1sos(SOS,G); % каскадная структура ДО масштабирования
>> Hs1 = scale(H1); % каскадная структура ПОСЛЕ масштабирования
```

Выведем матрицу коэффициентов (свойство `sosMatrix`) и вектор коэффициентов усиления (свойство `ScaleValues`) объекта `Hs1`:

```
>> get(Hs1,'sosMatrix')
ans =
    0.1816    0.3091    0.1816    1.0000   -0.6106    0.3029
    0.5750    0.5095    0.5750    1.0000   -0.0013    0.8093
>> get(Hs1,'ScaleValues')
ans =
    1.0000
    1.0000
    0.9999
```

Получена передаточная функция с *неявным* масштабированием в виде (8.39):

$$H(z) = \frac{0,1816 + 0,3091z^{-1} + 0,1816z^{-2}}{1 - 0,6106z^{-1} + 0,3029z^{-2}} \cdot \frac{0,575 + 0,5095z^{-1} + 0,575z^{-2}}{1 - 0,0013z^{-1} + 0,8093z^{-2}} \cdot 0,9999. \quad (8.46)$$

Проверим соответствия (8.40). Определим значения s_1 и s_2 :

$$s_1 = b'_{02} = 0,575; \quad s_2 = \frac{G}{s_1 b'_{01}} = \frac{0,1044}{0,575 \cdot 0,1816} = 0,9998.$$

Убедимся в соответствии коэффициентов числителей передаточных функций (8.46) и (8.45):

$$b'_{01} = \frac{G}{s_1 s_2} = \frac{0,1044}{0,575 \cdot 0,9998} = 0,1816;$$

$$b'_{11} = \frac{G}{s_1 s_2} b_{11} = \frac{0,1044}{0,575 \cdot 0,9998} \cdot 1,7021 = 0,309;$$

$$b'_{21} = \frac{G}{s_1 s_2} b_{21} = \frac{0,1044}{0,575 \cdot 0,9998} \cdot 1 = 0,1816; \quad \blacktriangleleft$$

$$b'_{02} = s_1 = 0,575;$$

$$b'_{12} = s_1 b_{12} = 0,575 \cdot 0,886 = 0,5094;$$

$$b'_{22} = s_1 b_{22} = 0,575 \cdot 1 = 0,575.$$

Пример 8.7. Выполним масштабирование каскадной структуры с *прямой канонической структурой* звеньев с помощью аналогичных средств MATLAB:

```
>> SOS = [1 1.7021 1 1 -0.6106 0.3029; 1 0.886 1 1 -0.0013 0.8093];
>> G = 0.1044;
>> H2 = dfilt.df2sos(SOS, G); % каскадная структура ДО масштабирования
>> Hs2 = scale(H2); % каскадная структура ПОСЛЕ масштабирования
```

Выведем матрицу коэффициентов и вектор коэффициентов усиления объекта $Hs2$:

```
>> get(Hs2, 'sosMatrix')
ans =
    0.1743    0.2967    0.1743    1.0000   -0.6106    0.3029
    1.0327    0.9150    1.0327    1.0000   -0.0013    0.8093
>> get(Hs2, 'ScaleValues')
ans =
    0.5800
    1.0000
    1.0000
```

Получена передаточная функция с *неявным* масштабированием в виде (8.42):

$$H(z) = 0,58 \cdot \frac{0,1743 + 0,2967z^{-1} + 0,1743z^{-2}}{1 - 0,6106z^{-1} + 0,3029z^{-2}} \cdot \frac{1,0327 + 0,915z^{-1} + 1,0327z^{-2}}{1 - 0,0013z^{-1} + 0,8093z^{-2}}. \quad (8.47)$$

Проверим соответствия (8.43). Определим значения s_1 , s_2 и G'' :

$$s_1 = b''_{01} = 0,1743; \quad s_2 = b''_{02} = 1,0327;$$

$$G'' = \frac{G}{s_1 s_2} = \frac{0,1044}{0,1743 \cdot 1,0327} = 0,58.$$

Убедимся в соответствии остальных коэффициентов числителей передаточных функций (8.47) и (8.45):

$$\begin{aligned} b''_{11} &= s_1 b_{11} = 0,1743 \cdot 1,7021 = 0,2967; \\ b''_{21} &= s_1 b_{21} = 0,1743 \cdot 1 = 0,1743; \\ b''_{12} &= s_2 b_{12} = 1,0327 \cdot 0,886 = 0,915; \\ b''_{22} &= s_2 b_{22} = 1,0327 \cdot 1 = 1,0327. \end{aligned}$$

◀

8.8.2. Расчет масштабирующих множителей

Для определения масштабирующих множителей $1/s_k$ необходимо вычислить значения s_k на основе выбранной нормы (см. разд. 8.8). Рассмотрим расчет значений s_k на основе нормы $\|\mathbf{x}\|_\infty$ (8.37).

Запишем передаточную функцию *части* каскадной структуры (8.30) из k звеньев:

$$H(z) = G \prod_{i=1}^k H_i(z).$$

Подставляя $z = e^{j\omega T}$, получим АЧХ:

$$|H(e^{j\omega T})| = G \prod_{i=1}^k |H_i(e^{j\omega T})|.$$

Согласно (8.37), значение s_k равно максимуму АЧХ *части* структуры от *входа* до k -й точки, где контролируется *переполнение*, следовательно:

$$s_k = G \max \prod_{i=1}^k A_i(\omega), \quad k = 1, 2, \dots, L, \quad (8.48)$$

где $A_i(\omega)$ при $i \neq k$, — АЧХ i -го звена; $A_i(\omega)$ при $i = k$, — АЧХ *части* k -го звена от его *входа* до *выхода сумматора*, где контролируется *переполнение*.

Соотношение (8.48) описывает *алгоритм* расчета значений s_k :

$$s_1 = G \max A_1(\omega); \quad (8.49)$$

$$s_2 = G \max \{A_1(\omega)A_2(\omega)\}; \quad (8.50)$$

...

$$s_L = G \max \{A_1(\omega)A_2(\omega)\cdots A_L(\omega)\}.$$

Все АЧХ вычисляются в *основной полосе частот*.

Проверим алгоритм на примере двухкаскадной структуры с передаточной функцией (8.45). Расчет s_1 (8.48) и s_2 (8.49) выполним в MATLAB в режиме прямых вычислений. Значения АЧХ будем вычислять в шкале нормированных частот $\hat{\omega}$.

Пример 8.8. Рассчитаем s_1 и s_2 при *прямой* структуре звеньев. В этом случае выход сумматора, где контролируется переполнение, является выходом звена, следовательно, в (8.49) и (8.50) $A_1(\omega)$ и $A_2(\omega)$ — АЧХ звеньев:

```
>> w = 0:pi/1000:pi; % сетка нормированных частот
>> b1 = [1 1.7021 1]; a1 = [1 -0.6106 0.3029]; % коэффициенты звена 1
>> b2 = [1 0.886 1]; a2 = [1 -0.0013 0.8093]; % коэффициенты звена 2
>> G = 0.1044; % коэффициент усиления
>> MAG1 = abs(freqz(b1,a1,w)); % АЧХ звена 1
>> s1 = G*max(MAG1); % значение s1
>> MAG2 = abs(freqz(b2,a2,w)); % АЧХ звена 2
>> MAG3 = abs(MAG1).*abs(MAG2); % АЧХ произведения
>> s2 = G*max(MAG3); % значение s2
s1 = 0.5749
s2 = 0.9999
```

Полученные значения практически совпали с вычисленными в примере 8.6. ◀

Пример 8.9. Рассчитаем s_1 и s_2 при *прямой канонической* структуре звеньев. В этом случае выход сумматора, где контролируется переполнение, является выходом *рекурсивной части* звена, следовательно, в (8.49) $A_1(\omega)$ — АЧХ рекурсивной части первого звена, а в (8.50) $A_1(\omega)$ — АЧХ первого звена и $A_2(\omega)$ — АЧХ рекурсивной части второго звена:

```
>> w = 0:pi/1000:pi; % сетка нормированных частот
>> b1r = [1 0 0]; a1 = [1 -0.6106 0.3029]; % коэффициенты рекурсивной части звена 1
>> G = 0.1044; % коэффициент усиления
>> MAG1 = abs(freqz(b1r,a1,w)); % АЧХ рекурсивной части звена 1
>> s1 = G*max(MAG1); % значение s1
>> b1 = [1 1.7021 1]; a1 = [1 -0.6106 0.3029]; % коэффициенты звена 1
>> MAG2 = abs(freqz(b1,a1,w)); % АЧХ звена 1
>> b2r = [1 0 0]; a2 = [1 -0.0013 0.8093]; % коэффициенты рекурсивной части звена 2
>> MAG3 = abs(freqz(b2r,a2,w)); % АЧХ рекурсивной части звена 2
>> MAG4 = abs(MAG2).*abs(MAG3); % АЧХ произведения
>> s2 = G*max(MAG4); % значение s2
s1 = 0.1800
s2 = 1.0327
```

Полученные значения практически совпали с вычисленными в примере 8.7. ◀

В GUI FDATool предусмотрены средства автоматического масштабирования не только на основе нормы $\|x\|_\infty$, но и других норм.

8.8.3. Нормирование коэффициентов

Нормирование коэффициентов числителей передаточных функций звеньев в каскадных структурах выполняется после масштабирования и основано на следующих принципах:

- если хотя бы один из них превысил единицу (по модулю), то выполняется нормирование к единице;
- нормируются коэффициенты всех звеньев к максимальному (по модулю) коэффициенту каждого звена;
- нормирующий множитель $G_{\text{вых}}$, равный произведению максимальных (по модулю) коэффициентов звеньев, добавляется на выходе каскадной структуры (Output Gain) для того, чтобы нормирование не привело к изменению выходного сигнала.

При *прямой* структуре звеньев с передаточной функцией (8.41) значение $G_{\text{вых}}$ умножается на коэффициент s_L .

Пример 8.10. Проиллюстрируем, как выполняется нормирование коэффициентов числителей на примере в передаточной функции (8.47):

$$H(z) = 0,58 \cdot \frac{0,1743 + 0,2967z^{-1} + 0,1743z^{-2}}{1 - 0,6106z^{-1} + 0,3029z^{-2}} \cdot \frac{1,0327 + 0,915z^{-1} + 1,0327z^{-2}}{1 - 0,0013z^{-1} + 0,8093z^{-2}}.$$

Значения коэффициентов числителя превысили единицу только во втором звене, но нормируются коэффициенты числителей всех звеньев.

В *первом* звене они нормируются к максимальному значению 0,2967, и будут получены новые коэффициенты

$$\tilde{b}_{01} = \tilde{b}_{21} = 0,1743 / 0,2967 \approx 0,5875,$$

а во *втором* — к максимальному значению 1,0327, и будет получен новый коэффициент

$$\tilde{b}_{12} = 0,915 / 1,0327 = 0,886.$$

Нормирующий множитель $G_{\text{вых}}$ будет равен произведению:

$$G_{\text{вых}} = 0,2967 \cdot 1,0327 = 0,3064.$$

После нормирования передаточная функция примет вид:

$$H(z) = 0,58 \cdot \frac{0,5875 + 1z^{-1} + 0,5875z^{-2}}{1 - 0,6106z^{-1} + 0,3029z^{-2}} \cdot \frac{1 + 0,886z^{-1} + 1z^{-2}}{1 - 0,0013z^{-1} + 0,8093z^{-2}} \cdot 0,3064. \blacktriangleleft \quad (8.51)$$

Помимо рассмотренного варианта нормирования, предусмотрено нормирование коэффициентов числителей и коэффициентов усиления s_L в (8.41) и G'' в (8.44) к *степени двойки* (Power of Two), которое удобно реализовать поразрядным сдвигом.

Проиллюстрируем эту процедуру на примере нормирования коэффициентов усиления в (8.51), хотя в данном примере они не превысили единицы. При нормировании

рассчитываются *новые* коэффициенты усиления для *всех* звеньев, *равные степени двойки*, и нормирующий множитель на выходе, *не равный степени двойки*, такой, чтобы произведение коэффициентов усиления сохранилось таким же, как до нормирования.

Пример 8.11. Выполним нормирование коэффициентов усиления к степени двойки $2^{-1} = 0,5$. Это значение присваивается наибольшему коэффициенту усиления (в данном случае, равному единице, у 2-го звена). После нормирования передаточная функция примет вид:

$$H(z) = 0,25 \cdot \frac{0,5875 + 1z^{-1} + 0,5875z^{-2}}{1 - 0,6106z^{-1} + 0,3029z^{-2}} \cdot 0,5 \cdot \frac{1 + 0,886z^{-1} + 1z^{-2}}{1 - 0,0013z^{-1} + 0,8093z^{-2}} \cdot 1,4217.$$

Произведение коэффициентов усиления $0,25 \cdot 0,5 \cdot 1,4217 = 0,1777$ осталось таким же, как до нормирования в (8.51): $0,58 \cdot 0,3064 = 0,1777$. ◀

В GUI FDATool предусмотрены средства автоматического нормирования (см. разд. П1.4.1 приложения 1).

8.8.4. Оценивание собственного шума после масштабирования

В разд. 8.5.6 были получены аналитические формулы для дисперсии собственного шума каскадных структур с передаточной функцией (8.30):

$$H(z) = G \prod_{k=1}^L \left(\frac{1 + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right), \quad (8.52)$$

в предположении, что остальные источники ошибок квантования отсутствуют. Однако на практике моделирование каскадных структур с ФТ выполняется *после масштабирования*, процедура которого предусматривает одновременное уменьшение дисперсии собственного шума (см. разд. 8.8.1). После масштабирования вид передаточных функций несколько изменится, поэтому полученные ранее аналитические формулы необходимо скорректировать.

При *прямой* структуре звеньев *без учета масштабирования* имели формулы (8.32) и (8.33):

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{4Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h_s^k(n)]^2;$$

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h_s^k(n)]^2.$$

После масштабирования передаточная функция (8.52) примет вид (8.41):

$$H(z) = \left(\prod_{k=1}^L \frac{b'_{0k} + b'_{1k}z^{-1} + b'_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right) s_L, \quad (8.53)$$

и получим скорректированные формулы:

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{5Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h_s^k(n)]^2 + \frac{LQ_y^2}{12}. \quad (8.54)$$

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h_s^k(n)]^2 + \frac{LQ_y^2}{12}, \quad (8.55)$$

где учтены следующие изменения в эквивалентной линейной модели (см. рис. 18.19):

- отсутствие умножителя G на входе структуры;
- дополнительные умножители $b'_{0k} \neq 1$ в рекурсивной части структуры звеньев;
- умножитель s_L на выходе структуры, шум которого поступает непосредственно на выход каскадной структуры, но учитывается в каждой сумме первого слагаемого, поэтому добавлен множитель L .

При *прямой канонической* структуре звеньев *без учета масштабирования* имели формулы (8.34) и (8.35):

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{2Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{2Q_y^2}{12} \sum_{k=2}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{2Q_y^2}{12};$$

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{Q_y^2}{12} \sum_{k=2}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{Q_y^2}{12}.$$

После масштабирования передаточная функция (8.52) примет вид (8.44):

$$H(z) = G'' \prod_{k=1}^L \left(\frac{b''_{0k} + b''_{1k} z^{-1} + b''_{2k} z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \right), \quad (8.56)$$

и получим скорректированные формулы:

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{2Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{3Q_y^2}{12} \sum_{k=2}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{3Q_y^2}{12}; \quad (8.57)$$

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{Q_y^2}{12} \sum_{k=2}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{Q_y^2}{12}, \quad (8.58)$$

где учтены дополнительные умножители $b'_{0k} \neq 1$ в структуре звеньев.

В разд. 20.2 приводятся алгоритм и программы расчета дисперсии собственного шума каскадных структур в MATLAB.

8.9. Предельные циклы

Теоретический анализ эффектов квантования основывался на принятых в разд. 8.3.1 предположениях. В частности, игнорировалась связь собственного шума с квантуемыми сигналами. Однако в *рекурсивных* цифровых системах эта связь при-

малом уровне воздействия или даже в его отсутствии может привести к установлению *незатухающей реакции*.

Проиллюстрируем этот эффект на простых примерах.

Пример 8.12. Определим реакцию рекурсивного звена 1-го порядка

$$y(n) = x(n) - 0,8y(n-1)$$

в отсутствии воздействия $x(n) = 0$ и *ненулевом* начальном условии $y(-1) = 1$ с округлением реакции до одной значащей цифры после запятой.

Результаты расчета приведены в табл. 8.3: значения $y(n)$ *до округления* и $y_u(n)$ *после округления*. Реакция $y_u(n)$, начиная с момента $n = 6$, переходит в *режим незатухающего колебания*. ◀

Пример 8.13. Определим импульсную характеристику рекурсивного звена 1-го порядка

$$h(n) = u_0(n) - 0,8h(n-1),$$

при *нулевом* начальном условии $h(-1) = 0$ с округлением значений до одной значащей цифры после запятой.

Результаты расчета приведены в табл. 8.2. Импульсная характеристика ЛДС $h(n) = (-0,8)^n$ с течением времени затухает, в то время как ИХ цифровой системы $h_u(n)$, начиная с момента $n = 6$, имеет характер *незатухающего колебания*. ◀

Таблица 8.2. Иллюстрация установления незатухающей реакции

<i>n</i>	Реакция в отсутствии воздействия и ненулевых начальных условиях		Импульсная характеристика		Реакция при малом уровне воздействия и нулевых начальных условиях	
	<i>y(n)</i>	<i>y_u(n)</i>	<i>h(n)</i>	<i>h_u(n)</i>	<i>y(n)</i>	<i>y_u(n)</i>
0	-0,8	-0,8	1	1	0,05	0,05
1	0,64	0,6	-0,8	-0,8	0,01	0,01
2	-0,48	-0,5	0,64	0,6	0,042	0,04
3	0,4	0,4	-0,48	0,5	0,018	0,02
4	-0,32	-0,3	0,4	0,4	0,034	0,03
5	0,24	0,2	-0,32	-0,3	0,026	0,03
6	-0,16	-0,2	0,24	0,2	0,026	0,03
7	0,16	0,2	-0,16	-0,2	0,026	0,03
8	-0,16	-0,2	0,16	0,2	0,026	0,03
9	0,16	0,2	-0,16	-0,2	0,026	0,03

Пример 8.14. Определим реакцию рекурсивного звена 1-го порядка

$$y(n) = x(n) - 0,8y(n-1)$$

при малом уровне воздействия $x(n) = 0,05$ и нулевом начальном условии $y(-1) = 0$ с округлением значений до одной значащей цифры после запятой.

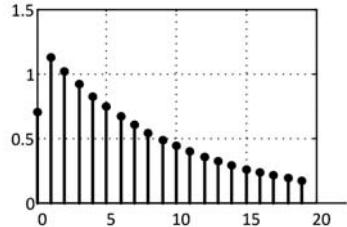
Результаты расчета приведены в табл. 8.2. Реакция $y_u(n)$, начиная с момента $n = 4$, имеет *незатухающий характер*. ▲

Эффект, возникающий в рекурсивной цифровой системе вследствие связи собственного шума (шума умножителей) с квантуемыми сигналами, называют *пределальным циклом низкого уровня*.

Пределальным циклом высокого уровня называют эффект неконтролируемой возрастающей реакции, возникающий в *рекурсивной* цифровой системе вследствие переполнения сумматоров [34].

Предельные циклы являются серьезной проблемой цифровых систем и требуют глубокого исследования. Отметим лишь, что их предупреждению способствует увеличение разрядности цифрового устройства и масштабирование (см. разд. 8.8). В MATLAB для анализа цифровой системы на наличие предельных циклов предусмотрена функция `limitcycle` [38].

ГЛАВА 9



Описание дискретных сигналов в частотной области

Подобно описанию линейных дискретных систем, дискретные сигналы описываются в трех областях: временной, z -области и частотной области.

Во временной области дискретный сигнал описывается последовательностью¹ $x(nT) = x(n)$, а z -области — ее z -изображением (3.5):

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}. \quad (9.1)$$

В разд. 3.8 рассматривалась связь преобразования Фурье с Z -преобразованием, что подготовило автоматический переход от описания дискретного сигнала в z -области к его описанию в частотной области.

9.1. Спектральная плотность

В частотной области дискретный сигнал описывается своим Фурье-изображением, которое определяется с помощью преобразования Фурье (3.43)

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega T}. \quad (9.2)$$

и называется *спектральной плотностью* дискретного сигнала.

В шкале нормированных частот $\hat{\omega}$ (1.4) формула (9.2) принимает вид

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-jn\hat{\omega}}. \quad (9.3)$$

Автоматический переход из z -области в частотную область при подстановке $z = e^{j\omega T} = e^{j\hat{\omega}}$ позволяет:

¹ Напомним, что в теории ЦОС термины "дискретный сигнал" и "последовательность" тождественны.

- установить связь спектральной плотности дискретного сигнала с его z -изображением (9.1) на основании (3.42):

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}} . \quad (9.4)$$

Они совпадают на *единичной окружности комплексной z -плоскости*;

- определить условие абсолютной сходимости ряда (9.3) на основании (3.44):

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)| < \infty , \quad (9.5)$$

которое гарантируется для *конечного* сигнала:

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\hat{\omega}n} ; \quad (9.6)$$

- представить спектральную плотность в виде ряда Фурье на основании (3.45) и (3.46):

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\hat{\omega}n} , \quad (9.7)$$

для которого должно выполняться условие абсолютной сходимости

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty ;$$

- определить *обратное преобразование Фурье* (3.47):

$$x(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega T n} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_0^{2\pi/T} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega T n} d\omega \quad (9.8)$$

и его эквивалент в шкале нормированных частот $\hat{\omega}$:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\hat{\omega}}) e^{j\hat{\omega}n} d\hat{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\hat{\omega}}) e^{j\hat{\omega}n} d\hat{\omega} . \quad (9.9)$$

Как любую комплексную функцию, спектральную плотность можно выразить через ее модуль и аргумент:

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = |X(e^{j\hat{\omega}})| e^{j \arg\{X(e^{j\hat{\omega}})\}} . \quad (9.10)$$

9.2. Свойства спектральной плотности

Перечислим основные свойства спектральной плотности дискретного сигнала.

- Непрерывность.

Спектральная плотность *дискретных* сигналов — *непрерывная* функция частоты по определению.

□ Периодичность.

Спектральная плотность — периодическая функция частоты вследствие периодичности ее аргумента (3.45). В зависимости от используемой шкалы частот ее период будет равен:

$$f \Rightarrow f_d; \quad (9.11)$$

$$\hat{f} \Rightarrow 1; \quad (9.12)$$

$$\omega \Rightarrow \omega_d; \quad (9.13)$$

$$\hat{\omega} \Rightarrow 2\pi. \quad (9.14)$$

Таким образом, следствием перехода от непрерывного времени к дискретному $t \rightarrow nT$ оказывается *периодичность спектральной плотности*.

□ Четность модуля и нечетность аргумента.

Для *вещественного* дискретного сигнала модуль спектральной плотности (9.10) — *четная*, а аргумент — *нечетная* функция частоты.

Доказательство. Применим к спектральной плотности (9.3) формулу Эйлера:

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-jn\hat{\omega}} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\cos(\hat{\omega}n) - j\sum_{n=0}^{\infty} x(n)\sin(\hat{\omega}n) = \operatorname{Re} -j\operatorname{Im}.$$

Изменим знак аргумента:

$$X(e^{-j\hat{\omega}}) = \operatorname{Re} + j\operatorname{Im}.$$

Для *модуля* спектральной плотности справедливо равенство

$$|X(e^{j\hat{\omega}})| = |X(e^{-j\hat{\omega}})| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 + \operatorname{Im}^2}.$$

Следовательно, это — *четная* функция частоты, а для аргумента, принимая во внимание, что арктангенс — нечетная функция, — равенство

$$\arg\{X(e^{j\hat{\omega}})\} = -\arg\{X(e^{-j\hat{\omega}})\} = -\operatorname{arctg}(\operatorname{Im}/\operatorname{Re}).$$

Следовательно, это — *нечетная* функция частоты.

С учетом этого спектральную плотность *вещественного* сигнала достаточно определить в *основной полосе частот* (5.12) — (5.15).

□ Линейность.

Спектральная плотность линейной комбинации дискретных сигналов равна линейной комбинации их спектральных плотностей¹:

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) + \dots \Leftrightarrow X(e^{j\hat{\omega}}) = a_1 X_1(e^{j\hat{\omega}}) + a_2 X_2(e^{j\hat{\omega}}) + \dots \quad (9.15)$$

¹ Двусторонняя стрелка отображает взаимно однозначную связь.

Доказательство следует из свойства линейности Z -преобразования (3.17) и его связи с преобразованием Фурье (9.4).

□ Сдвиг (перенос, смещение) спектральной плотности.

Сдвиг спектральной плотности *вправо* на частоту $\hat{\omega}_0$ соответствует умножению дискретного сигнала $x(n)$ на комплексную экспоненту $e^{j\hat{\omega}_0 n}$:

$$x(n)e^{j\hat{\omega}_0 n} \Leftrightarrow X[e^{j(\hat{\omega}-\hat{\omega}_0)}]. \quad (9.16)$$

Доказательство. Подставив в правую часть (9.3) сигнал $x(n)e^{j\hat{\omega}_0 n}$, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{j\hat{\omega}_0 n} e^{-j\hat{\omega} n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-j(\hat{\omega}-\hat{\omega}_0)n} = X[e^{j(\hat{\omega}-\hat{\omega}_0)}].$$

Аналогично, сдвиг спектральной плотности *влево* на частоту $\hat{\omega}_0$ соответствует умножению дискретного сигнала на комплексную экспоненту $e^{-j\hat{\omega}_0 n}$:

$$x(n)e^{-j\hat{\omega}_0 n} \Leftrightarrow X[e^{j(\hat{\omega}+\hat{\omega}_0)}]. \quad (9.17)$$

Поэтому в общем случае *модуль и аргумент спектральной плотности комплексного сигнала $x(n)e^{\pm j\hat{\omega}_0 n}$ утрачивают свойство четности и нечетности соответственно*.

□ Расщепление спектральной плотности вещественного дискретного сигнала.

Расщепление спектральной плотности на две части, симметрично смещенные *вправо и влево* на частоту $\hat{\omega}_0$, соответствует умножению *вещественного* дискретного сигнала на $\cos(\hat{\omega}_0 n)$:

$$x(n)\cos(\hat{\omega}_0 n) \Leftrightarrow \frac{1}{2}X[e^{j(\hat{\omega}-\hat{\omega}_0)}] + \frac{1}{2}X[e^{j(\hat{\omega}+\hat{\omega}_0)}]. \quad (9.18)$$

Доказательство. Подставив в правую часть (9.3) сигнал $x(n)\cos(\hat{\omega}_0 n)$ и применив формулу Эйлера для косинуса, получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\cos(\hat{\omega}_0 n)e^{-j\hat{\omega} n} &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \frac{e^{j\hat{\omega}_0 n} + e^{-j\hat{\omega}_0 n}}{2} e^{-j\hat{\omega} n} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-j(\hat{\omega}-\hat{\omega}_0)n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-j(\hat{\omega}+\hat{\omega}_0)n} = \frac{1}{2}X[e^{j(\hat{\omega}-\hat{\omega}_0)}] + \frac{1}{2}X[e^{j(\hat{\omega}+\hat{\omega}_0)}]. \end{aligned}$$

Свойства *четности модуля и нечетности аргумента спектральной плотности вещественного сигнала сохраняются*.

□ Сдвиг (задержка) дискретного сигнала.

Задержка дискретного сигнала соответствует умножение спектральной плотности на комплексную экспоненту $e^{-j\hat{\omega} m}$:

$$x(n-m) \Leftrightarrow X(e^{j\hat{\omega}})e^{-j\hat{\omega} m}. \quad (9.19)$$

Модуль спектральной плотности не меняется, а аргумент получает линейное приращение:

$$|X(e^{j\hat{\omega}})|e^{j\arg\{X(e^{j\hat{\omega}})\}}e^{-j\hat{\omega}m} = |X(e^{j\hat{\omega}})|e^{j\arg\{X(e^{j\hat{\omega}})\}-j\hat{\omega}m}.$$

Доказательство следует из теоремы о задержке (3.18) и связи Z-преобразования с преобразованием Фурье (9.4):

$$x(n-m) \Rightarrow X(z)z^{-m} \Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}} = X(e^{j\hat{\omega}})e^{-j\hat{\omega}m}.$$

□ Равенство Парсеваля

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |X(e^{j\omega T})|^2 d\omega, \quad (9.20)$$

позволяющее вычислять энергию дискретного сигнала как во временной, так и в частотной области.

Доказательство. Умножим спектральную плотность (9.2) на комплексно сопряженную функцию (справа комплексно сопряженный сигнал с символом *):

$$X(e^{j\omega T})X(e^{-j\omega T}) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-j\omega T n} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^*(n)e^{j\omega T n} \right].$$

С учетом свойств комплексных функций имеем

$$|X(e^{j\omega T})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|^2 + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{\infty} x(n)x^*(m)e^{-j\omega T(n-m)}.$$

Умножим обе части равенства на $T/2\pi$ и проинтегрируем в пределах периода:

$$\frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |X(e^{j\omega T})|^2 d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|^2 \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} d\omega + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{\infty} x(n)x^*(m) \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{-j\omega T(n-m)} d\omega.$$

Вычислив простейшие интегралы в правой части:

$$\frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} d\omega = 1 \quad \text{и} \quad \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{-j\omega T(n-m)} d\omega = 0,$$

получаем равенство Парсеваля (9.20), которое, согласно (9.5), справедливо только для дискретных сигналов с конечной энергией.

□ Спектральная плотность свертки дискретных сигналов.

Спектральная плотность *свертки* дискретных сигналов равна *произведению* спектральных плотностей сворачиваемых сигналов:

$$x(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) \\ \sum_{m=0}^{\infty} x_1(n-m)x_2(m) \end{cases} \Leftrightarrow X(e^{j\hat{\omega}}) = X_1(e^{j\hat{\omega}})X_2(e^{j\hat{\omega}}). \quad (9.21)$$

Доказательство следует из теоремы о свертке (3.19) и связи Z -преобразования с преобразованием Фурье (9.4).

□ Спектральная плотность произведения дискретных сигналов.

Спектральная плотность *произведения* дискретных сигналов равна *свертке* спектральных плотностей данных сигналов:

$$x(n) = x_1(n)x_2(n) \Leftrightarrow X(e^{j\hat{\omega}}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_1(e^{j\varphi})X_2(e^{j(\hat{\omega}-\varphi)})d\varphi; \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_1(e^{j(\hat{\omega}-\varphi)})(e^{j\varphi})X_2(e^{j\varphi})d\varphi. \end{cases} \quad (9.22)$$

Доказательство. Определим оригинал $x_1(n)$ по формуле (9.9), выполнив замену переменных $\hat{\omega} \rightarrow \varphi$:

$$x_1(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_1(e^{j\varphi})e^{jn\varphi} d\varphi;$$

Подставим произведение $x_1(n)x_2(n)$ в (9.3):

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n)x_2(n)e^{-jn\hat{\omega}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_1(e^{j\varphi})e^{jn\varphi} d\varphi \right] x_2(n)e^{-jn\hat{\omega}}.$$

Изменим порядок суммирования и интегрирования:

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_1(e^{j\varphi})d\varphi \left[\sum_{n=0}^{\infty} x_2(n)e^{-jn(\hat{\omega}-\varphi)} \right].$$

Квадратные скобки содержат Фурье-изображение $X_2(e^{j(\hat{\omega}-\varphi)})$, следовательно:

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_1(e^{j\varphi})X_2(e^{j(\hat{\omega}-\varphi)})d\varphi.$$

9.3. Связь спектральных плотностей дискретного и аналогового сигналов

Для установления связи между спектральными плотностями дискретного $x(nT)$ и аналогового $x(t)$ сигналов:

$$x(nT) = x(t)|_{t=nT}$$

применим математический аппарат классического преобразования Фурье (3.38) — (3.39) к взвешенной последовательности δ -функций:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT). \quad (9.23)$$

Спектральная плотность (Фурье-изображение) δ -функции равна единице [19]:

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1. \quad (9.24)$$

Сдвиг δ -функции на nT соответствует умножению ее спектральной плотности на комплексную экспоненту $e^{-j\omega nT}$:

$$\delta(t - nT) \Leftrightarrow e^{-j\omega nT}. \quad (9.25)$$

Применяя свойство линейности преобразования Фурье, получим:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega Tn} = X(e^{j\omega T}), \quad (9.26)$$

где учтено равенство $x(nT) = x(n)$ (1.2).

Односторонняя стрелка означает, что преобразование Фурье функции $X(e^{j\omega T})$ (9.7) связано *взаимно однозначно* с последовательностью $x(n)$ (9.8), а следовательно, не может соответствовать последовательности δ -функций.

О взаимно однозначной связи последовательности δ -функций с ее отображением в частотной области пойдет речь в *разд. 10.2*.

По определению δ -функция во всех точках, кроме $t = nT$, равна нулю, поэтому (9.23) имеет следующие тождественные записи:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (9.27)$$

Представим периодическую последовательность δ -функций в виде ряда Фурье¹

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

и запишем (9.27) в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)e^{jk\frac{2\pi}{T}t}. \quad (9.28)$$

Умножение функции $x(t)$ на экспоненту $e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$ приводит к сдвигу ее спектральной плотности $X_a(j\omega)$ вправо на частоту $k2\pi/T$:

$$x(t)e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \Leftrightarrow X_a\left[j\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)\right].$$

¹ Спектральная плотность одиночной δ -функции и коэффициенты Фурье ее периодического повторения с периодом T совпадают в дискретных точках с точностью до множителя $1/T$ [19].

Применяя свойство линейности преобразования Фурье к (9.28) и выполнив замену $k \rightarrow m$, получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-nT) \Rightarrow \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a \left[j \left(\omega - m \frac{2\pi}{T} \right) \right]. \quad (9.29)$$

Односторонняя стрелка означает, что при *обратном* преобразовании Фурье (3.39) не будет получена последовательность δ -функций.

Совпадения левых частей (9.26) и (9.29) позволяют установить *связь между спектральными плотностями дискретного и аналогового сигналов*:

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a \left[j \left(\omega + m \frac{2\pi}{T} \right) \right]. \quad (9.30)$$

Спектральная плотность дискретного сигнала равна (с точностью до множителя $1/T$) бесконечной сумме копий спектральной плотности аналогового сигнала, сдвинутых друг относительно друга на частоту дискретизации $\omega_d = 2\pi/T$.

Исследуем влияние частоты дискретизации ω_d на соотношение между спектральными плотностями (9.30), полагая, что спектральная плотность $X_a(j\omega)$ вещественного аналогового сигнала ограничена верхней частотой $\omega_b = 2\pi f_b$.

На рис. 9.1, *a*—*г* приведены условные графики модулей спектральных плотностей:

- аналогового сигнала (рис. 9.1, *a*);
- дискретного сигнала при частотах дискретизации: $\omega_d = 2\omega_b$ (рис. 9.1, *б*), $\omega_d > 2\omega_b$ (рис. 9.1, *в*) и $\omega_d < 2\omega_b$ (рис. 9.1, *г*).

Приведенные графики позволяют сделать следующие выводы:

- если частота дискретизации $\omega_d \geq 2\omega_b$, то на интервале $[-\omega_d/2; \omega_d/2]$ спектральные плотности аналогового и дискретного сигналов совпадают;
- если частота дискретизации $\omega_d < 2\omega_b$, происходит *наложение спектральных плотностей*, называемое *элайсингом (aliasing)*, поэтому на интервале $[-\omega_d/2; \omega_d/2]$ спектральная плотность дискретного сигнала представляет собой *искаженную спектральную плотность* аналогового сигнала.

Учитывая взаимно однозначную связь спектральной плотности с сигналом, данные выводы согласуются с теоремой Котельникова: аналоговый сигнал с финитным спектром, ограниченным верхней частотой f_b , полностью определяется последовательностью своих отсчетов, взятых с частотой дискретизации $f_d \geq 2f_b$, т. к. их спектральные плотности совпадают. Элайсинг означает необратимую потерю такой возможности.

Реальные сигналы конечной длительности теоретически имеют бесконечную спектральную плотность (см. рис. 1.2, *а*). Следовательно, частота дискретизации

$f_d \rightarrow \infty$ и при любом конечном значении f_d принципиально существует элайсинг. Практически, однако, всегда можно определить частоту f_b так, чтобы энергией сигнала, соответствующей отсеченному "хвосту" спектральной плотности, можно было пренебречь. Предварительное ограничение спектральной плотности обрабатываемого сигнала выполняется с помощью *антиэлайсингового* аналогового фильтра (см. рис. 1.2). Например, при формировании стандартного телефонного сигнала исходный речевой сигнал пропускается через полосовой антиэлайсинговый фильтр с полосой пропускания 0,3—3,4 кГц. Нижняя граница обусловлена необходимостью устранения постоянной составляющей и подавлением гармоник промышленных частот, а верхняя — заданным качеством восприятия речевого сигнала (сохранением полной разборчивости, тембра голоса и т. п.). Минимально допустимой частотой дискретизации будет $f_d = 6,8$ кГц, а в качестве стандартной выбрана $f_d = 8$ кГц.

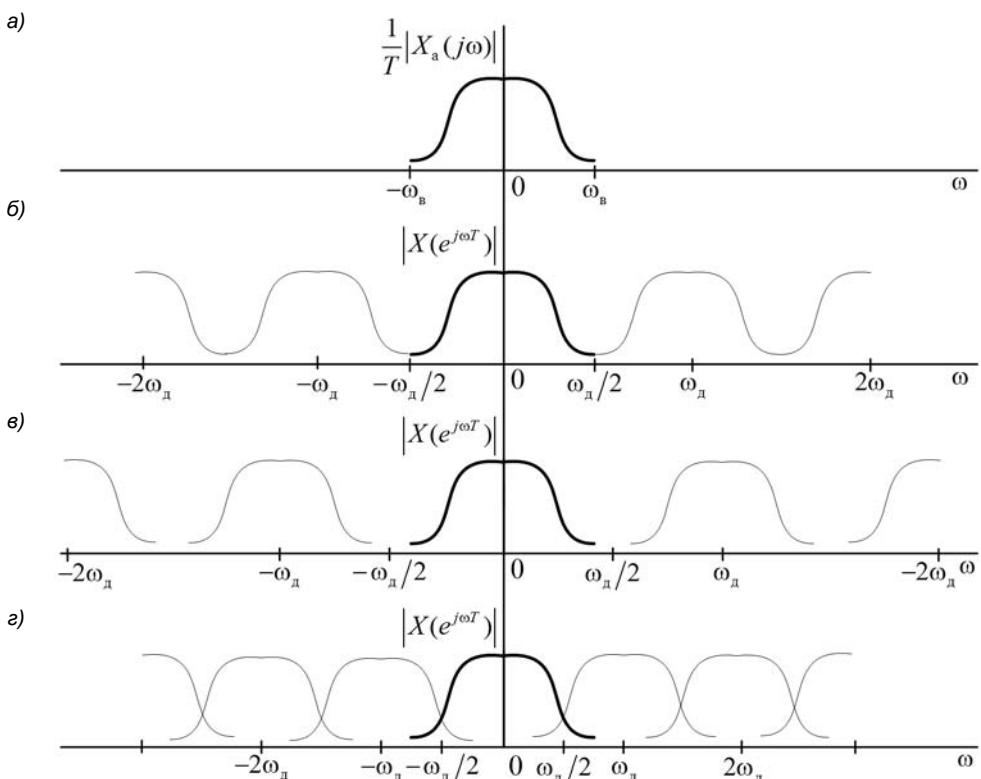


Рис. 9.1. Модули спектральных плотностей аналогового сигнала (a), дискретного сигнала с $\omega_d = 2\omega_b$ (б), с $\omega_d > 2\omega_b$ (в), с $\omega_d < 2\omega_b$ (г)

9.4. Дискретизация относительно узкополосных сигналов

Узкополосным (относительно узкополосным) называют сигнал, ширина спектральной плотности ΔF которого значительно меньше его средней частоты f_{cp} [46]:

$$\frac{\Delta F}{f_{\text{cp}}} \ll 1, \quad (9.31)$$

что практически всегда имеет место в радиоканалах и в многоканальных системах с частотным разделением.

Например, тот же стандартный телефонный сигнал можно трактовать как узкополосный при его передаче на несущей частоте 128 кГц с использованием амплитудной модуляции, поскольку его спектральная плотность (допустим, верхняя боковая полоса) сосредоточена в области

$$\text{от } f_{\min} = 128 + 0,3 = 128,3 \text{ кГц до } f_{\max} = 128 + 3,4 = 131,4 \text{ кГц}$$

и, соответственно, имеет ширину

$$\Delta F = f_{\max} - f_{\min} = 3,1 \text{ кГц}$$

и среднюю частоту

$$f_{\text{cp}} = \frac{f_{\max} + f_{\min}}{2} = \frac{131,4 + 128,3}{2} = 129,85 \text{ кГц.}$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta F}{f_{\text{cp}}} = \frac{3,1}{129,85} \approx 0,024 \ll 1,$$

и по определению (9.31) сигнал является узкополосным.

ПРИМЕЧАНИЕ

Иногда сигнал называют узкополосным, если отношение максимальной частоты спектральной плотности к минимальной не больше двух: $\frac{f_{\max}}{f_{\min}} \leq 2$. Такое определение не противоречит (9.31).

В подобных случаях частота дискретизации, выбираемая непосредственно из условия

$$f_{\text{д}} \geq 2f_{\max}, \quad (9.32)$$

будет избыточно высокой, особенно для радиосигналов, когда она может составить сотни мегагерц, в результате чего обработка в реальном времени окажется сомнительной либо по причине сложности алгоритма, либо вследствие ограниченности технических возможностей существующей элементной базы. Кроме того, очевидна и нецелесообразность такого подхода к дискретизации, поскольку информация о сигнале содержится не в частоте f_{\max} , а в огибающей или фазе $\phi(t)$ (при угловой

модуляции), которые изменяются во времени медленно при относительно низких частотах модуляции [19].

Обобщенная теорема Котельникова приводит к другому условию выбора частоты дискретизации [52]:

$$\frac{2f_{\max}}{q} \leq f_d \leq \frac{2f_{\min}}{q-1}, \quad (9.33)$$

где q имеет смысл *номера диапазона частот* и может принимать только целые значения

$$q = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{f_{\max}}{f_{\max} - f_{\min}} \right\rfloor, \quad (9.34)$$

где $\lfloor x \rfloor$ — ближайшее целое, не превосходящее x , т. е.

$$q_{\max} \leq \frac{f_{\max}}{f_{\max} - f_{\min}}.$$

Следовательно, значение f_d может выбираться из ряда допустимых диапазонов. В частности, при $q=1$ имеем условие (9.32).

Интересно, что с ростом номера q частота f_d уменьшается и спектральная плотность сигнала, оставаясь неизменной, пропорционально сдвигается влево в новой основной полосе частот $[0; f_d/2]$ (рис. 9.2, $a-\varepsilon$). Это обстоятельство позволяет выбрать такую частоту f_d , при которой расстояние $\Delta f_{\text{ср}}$ между средними частотами соседних копий спектральной плотности дискретного сигнала будет максимальным и составит $f_d/2$ (рис. 9.2, ε). Последнее же возможно лишь в том случае, когда средняя частота $f_{\text{ср}}$ спектральной плотности сигнала окажется в точке $f_{\text{ср}} = f_d/4$. Этот практически важный результат будет использован в дальнейшем (см. пример 9.1).

Рассмотрим выбор частоты f_d из условия (9.33) на реальном примере.

Пример 9.1. Известен частотно-модулированный аналоговый радиосигнал $x(t)$ на выходе приемного тракта промежуточной частоты ПЧ-2 (рис. 9.3). Частота ПЧ-2 равна 70 МГц и является средней частотой спектральной плотности сигнала, расположенного в полосе 65—75 МГц (ширина спектральной плотности $\Delta F = 10$ МГц). На выходе тракта ПЧ-2 установлен аналоговый полосовой антиэлайсинговый фильтр с переходными полосами 63—65 и 75—77 МГц. Найти ряд допустимых диапазонов для выбора частоты дискретизации этого сигнала.

Решение. Ширина общей спектральной плотности $\Delta F_{\text{общ}}$, в которую помимо спектральной плотности сигнала включены переходные полосы антиэлайсингового фильтра (см. рис. 9.3), составляет

$$\Delta F_{\text{общ}} = 10 + 4 = 14 \text{ МГц}.$$

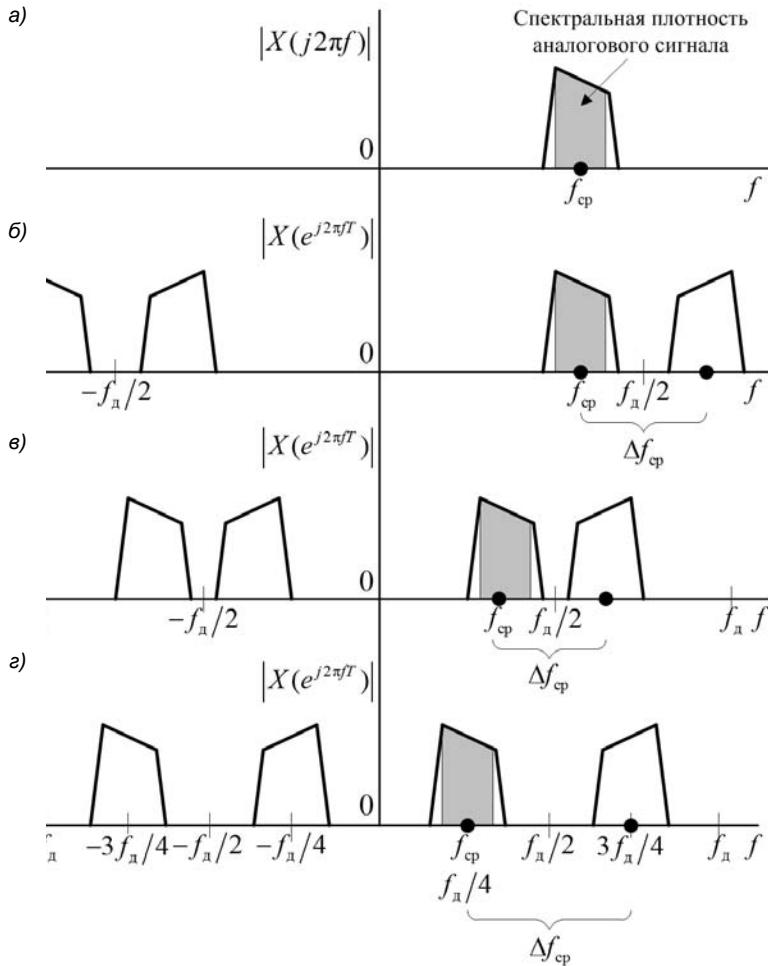


Рис. 9.2. Модули спектральной плотности узкополосного вещественного аналогового сигнала (a), дискретного сигнала при $q_1 = 1$ (б), при $q_2 > 1$ (в), при $q_3 > q_2$ и $f_{\text{cp}} = f_d/4$ (г)

Ясно, что рассматриваемый сигнал является относительно узкополосным по определению

$$\frac{\Delta F_{\text{общ}}}{f_{\text{cp}}} = \frac{14}{70} = 0,2 \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{f_{\text{max}}}{f_{\text{min}}} = \frac{77}{63} = 1,2, \dots < 2,$$

поэтому для решения поставленной задачи используем условие (9.33). Сначала вычислим q_{max} для (9.34):

$$q_{\text{max}} = \left\lfloor \frac{f_{\text{max}}}{f_{\text{max}} - f_{\text{min}}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{77}{77 - 63} \right\rfloor = \left\lfloor 5,5 \right\rfloor = 5.$$

Из этого следует, что существует 5 допустимых диапазонов для выбора частоты дискретизации. Определим их (в мегагерцах), подставив необходимые данные в (9.33):

$$\begin{aligned} q = 1 &\Rightarrow 154 \leq f_d < \infty; \\ q = 2 &\Rightarrow 77 \leq f_d \leq 126; \\ q = 3 &\Rightarrow 51,333 \leq f_d \leq 63; \\ q = 4 &\Rightarrow 38,5 \leq f_d \leq 42; \\ q = 5 &\Rightarrow 30,8 \leq f_d \leq 31,5. \end{aligned}$$

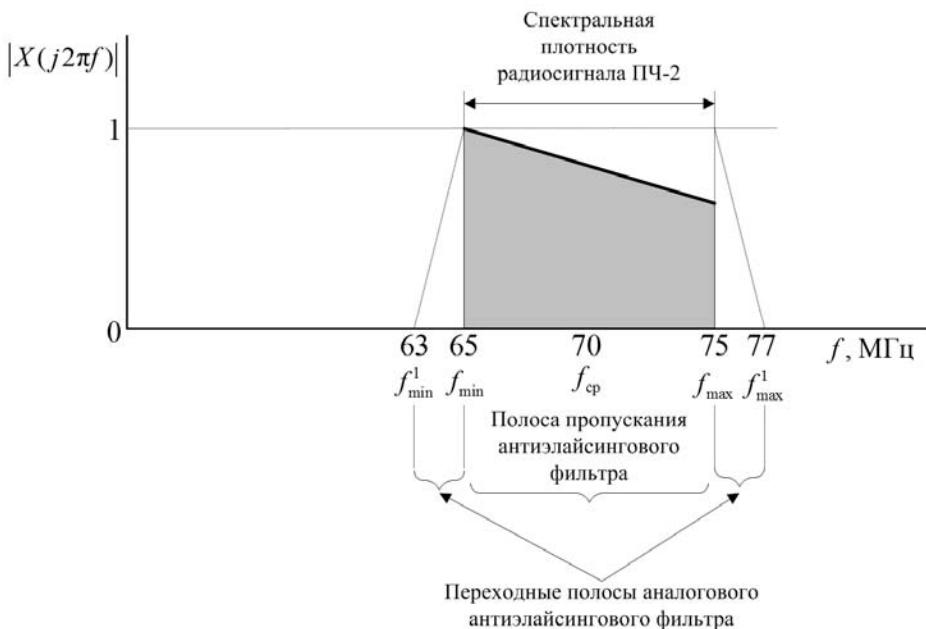


Рис. 9.3. Модуль спектральной плотности узкополосного сигнала

Диапазоны с номерами $q = 1$ и $q = 2$ трудно реализуемы, если вообще могут быть использованы на практике вследствие чрезвычайно высокой частоты дискретизации для существующей элементной базы. Остальные допустимые диапазоны, соответствующие $q = 3, 4, 5$, с точки зрения обобщенной теоремы Котельникова равнозначны — все они обеспечивают корректную дискретизацию заданного относительно узкополосного сигнала. Однако выбор f_d зависит также от конкретной задачи обработки сигнала, и с этой точки зрения диапазоны с номерами $q = 3, 4, 5$ дают различный эффект, что будет показано в дальнейшем на примере переноса спектральной плотности в область низких частот и последующей фильтрации сигнала (см. пример 9.2). ▲

Дополнительная информация по данной теме содержится в [38].

9.5. Операции со спектральной плотностью

В этом разделе рассмотрены некоторые операции со спектральной плотностью, связанные с ее смещением по оси частот. В частности, такие операции типичны для систем многоканальной связи как при формировании группового сигнала с частотным разделением каналов (ЧРК) из отдельных канальных сигналов, так и при выделении отдельных канальных сигналов из группового сигнала с ЧРК.

Будем иметь в виду, что терминология "операции со спектральной плотностью" принята для краткости. На самом деле, естественно, операции выполняются с сигналом, вследствие чего изменяется его спектральная плотность.

9.5.1. Перенос спектральной плотности

Допустим, имеется вещественный дискретный сигнал $x(nT)$ и известна его спектральная плотность $|X(e^{j\omega T})|$ в основной полосе частот $[0; \omega_d/2]$, занимающая полосу $[\omega_1; \omega_2]$ (рис. 9.4, а). Требуется сместить (перенести) его спектральную плотность на некоторую частоту $\pm\omega_0$, выбираемую из условия $0 < (\omega_0 + \omega_2) \leq \omega_d/2$.

Признаком вещественного сигнала служит *симметрия* модуля его спектральной плотности $|X(e^{j\omega T})|$ относительно оси ординат. На рис. 9.4, б и в изображены спектральные плотности $|X[e^{j(\omega-\omega_0)T}]|$ и $|X[e^{j(\omega+\omega_0)T}]|$, смещенные вправо и влево на

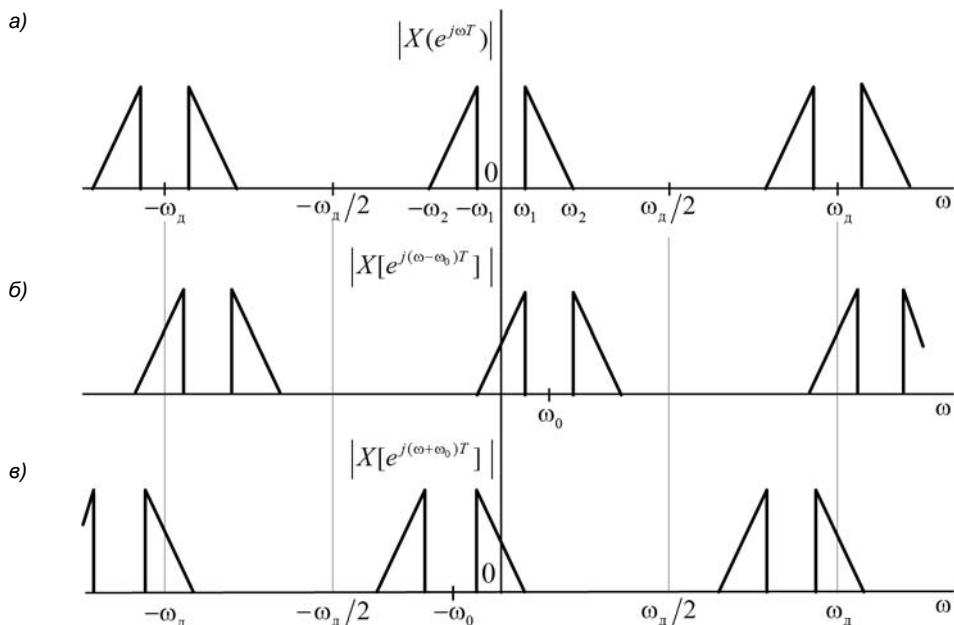


Рис. 9.4. Перенос спектральной плотности вещественного сигнала:
модуль спектральной плотности исходного сигнала (а),
смещенный на частоту ω_0 вправо (б) и влево (в)

частоту ω_0 соответственно. Согласно свойствам спектральной плотности, это реализуется умножением сигнала $x(nT)$ на комплексную экспоненту $e^{j\omega_0 Tn}$ и $e^{-j\omega_0 Tn}$ соответственно. На рис. 9.5, а, б представлены схемы, отображающие соответствующие операции с вещественным сигналом. На входе имеем вещественный $x(nT)$, а на выходе — комплексный сигнал $y(nT)$.

Например, сдвигу спектральной плотности вправо соответствует комплексный сигнал $y(nT) = x(nT)e^{j\omega_0 Tn}$ с вещественной и мнимой составляющими:

$$y(nT) = y_1(nT) + jy_2(nT) = x(nT)\cos(\omega_0 nT) + jx(nT)\sin(\omega_0 nT).$$

При этом модуль его спектральной плотности $Y(e^{j\omega T}) = X[e^{j(\omega - \omega_0)nT}]$ утрачивает свойство четности (рис. 9.4, б), а аргумент — нечетности.

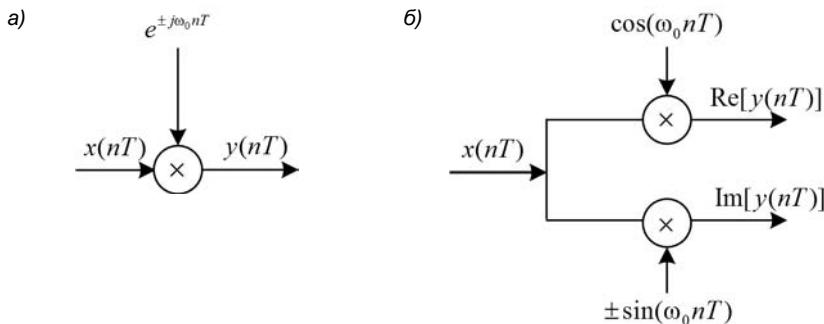


Рис. 9.5. Условная (а) и фактическая (б) схемы формирования сигнала при переносе спектральной плотности

Перенос спектральной плотности комплексного сигнала принципиально ничем не отличается, за исключением того, что при исходном комплексном сигнале

$$x(nT) = x_1(nT) + jx_2(nT)$$

формирование результирующего сигнала $y(nT)$ потребует большего объема вычислений.

Например, при переносе спектральной плотности вправо (рис. 9.6):

$$\begin{aligned} y(nT) &= [x_1(nT) + jx_2(nT)]e^{j\omega_0 nT} = [x_1(nT) + jx_2(nT)] [\cos(\omega_0 nT) + j\sin(\omega_0 nT)] = \\ &= \underbrace{[x_1(nT)\cos(\omega_0 nT) - x_2(nT)\sin(\omega_0 nT)]}_{\text{Re}[y(nT)]} + j\underbrace{[x_1(nT)\sin(\omega_0 nT) + x_2(nT)\cos(\omega_0 nT)]}_{\text{Im}[y(nT)]} = \\ &= y_1(nT) + jy_2(nT). \end{aligned}$$

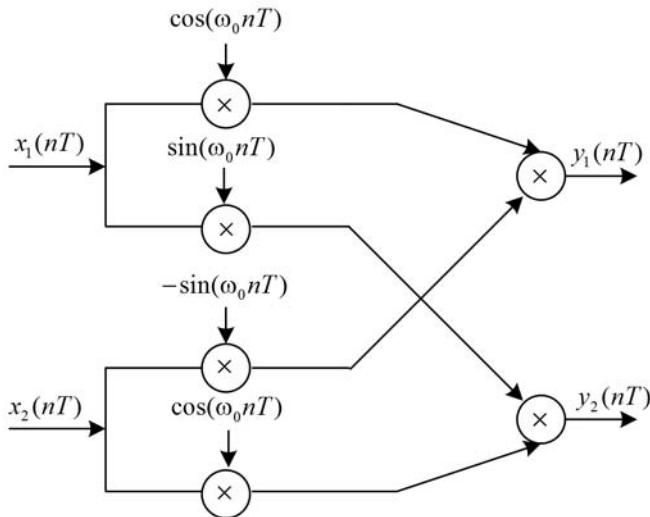


Рис. 9.6. Схема формирования сигнала при переносе спектральной плотности (исходный сигнал комплексный)

9.5.2. Инверсия спектральной плотности вещественного сигнала

Для ряда практических задач представляет интерес операция *инверсии спектральной плотности*. Ее суть заключается в том, что в *основной полосе частот* любая спектральная составляющая на частоте $\hat{\omega}_0$ должна оказаться на "противоположной" частоте $(\pi - \hat{\omega}_0)$ — как бы "перевернуться" (инвертироваться). Символически это можно записать следующим образом:

$$\hat{\omega}_0 \Rightarrow \pi - \hat{\omega}_0;$$

$$X[e^{j\hat{\omega}_0}] \Rightarrow X[e^{j(\pi - \hat{\omega}_0)}].$$

При этом модуль спектральной плотности будет инвертирован, а у аргумента дополнительно изменится знак:

$$|X[e^{j\hat{\omega}_0}]| \Rightarrow |X[e^{j(\pi - \hat{\omega}_0)}]|;$$

$$\arg\{X(e^{j\hat{\omega}_0})\} \Rightarrow -\arg\{X[e^{j(\pi - \hat{\omega}_0)}]\}.$$

Покажем, что операция инверсии спектральной плотности эквивалентна ее сдвигу вправо (или влево) на частоту $\hat{\omega}_0 = \pi$. Запишем смешенную вправо спектральную плотность $X[e^{j(\hat{\omega}-\pi)}]$, используя разложение экспоненты по Эйлеру:

$$X[e^{j(\hat{\omega}-\pi)}] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-j(\hat{\omega}-\pi)n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cos(\hat{\omega} - \pi) - j \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \sin(\hat{\omega} - \pi) = \operatorname{Re} - j \operatorname{Im}.$$

Запишем в аналогичном виде инверсную спектральную плотность $X[e^{j(\pi-\hat{\omega})}]$, учитывая четность косинуса и нечетность синуса:

$$X[e^{j(\pi-\hat{\omega})}] = X[e^{-j(\hat{\omega}-\pi)}] = \operatorname{Re} + j \operatorname{Im}.$$

Модули смещенной и инверсной спектральных плотностей совпадают (рис. 9.7), а аргументы отличаются знаком.

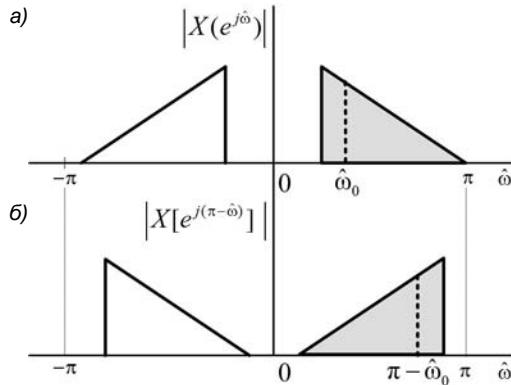


Рис. 9.7. Модули исходной (а) и инверсной (б) спектральных плотностей

Перенос спектральной плотности вправо на частоту $\hat{\omega}_0 = \pi$ реализуется умножением сигнала $x(n)$ на комплексную экспоненту $e^{j\pi n}$:

$$x(n)e^{j\pi n} = x(n)\cos(\pi n) = x(n)(-1)^n, \quad (9.35)$$

следовательно, для инверсии спектральной плотности достаточно изменить знак нечетных отсчетов исходного сигнала (рис. 9.8).

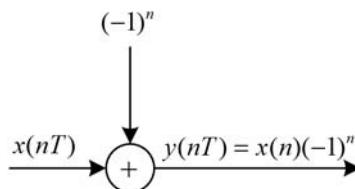


Рис. 9.8. Схема формирования сигнала с инверсной спектральной плотностью

9.5.3. Формирование сигнала с одной боковой полосой

Как известно, при обычной амплитудной модуляции имеем спектральную плотность с двумя боковыми полосами относительно некоторой несущей частоты [19]. Для техники связи представляют интерес сигналы, спектральные плотности которых содержат только одну боковую полосу (ОБП), — сигналы с ОБП. Такая задача

возникает, например, в многоканальной связи с частотным разделением каналов (ЧРК) при формировании группового сигнала, когда в заданной полосе частот требуется передать максимальное число отдельных канальных сигналов.

На рис. 9.9, *a* изображен модуль спектральной плотности $|X(e^{j\omega T})|$ исходного вещественного сигнала $x(nT)$ с двумя боковыми полосами, симметричными относительно несущей частоты ω_0 . Требуется получить сигнал с ОБП, что означает: преобразовать сигнал $x(nT)$ так, чтобы его спектральная плотность содержала только одну боковую полосу. Для примера будем выделять *верхнюю* боковую полосу $[\omega_1; \omega_2]$, отмеченную на графике серым цветом.

Процедура формирования сигнала с ОБП включает в себя три этапа:

1. Сдвиг спектральной плотности $X(e^{j\omega T})$ влево на частоту $\omega_* = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ таким образом, чтобы верхняя боковая полоса оказалась разделенной осью ординат пополам.

После операции сдвига имеем спектральную плотность (рис. 9.9, *б*)

$$Y_1(e^{j\omega T}) = X[e^{j(\omega + \omega_*)nT}]$$

комплексного сигнала (рис. 9.10, *a*)

$$y_1(nT) = x(nT)e^{-j\omega_* nT}.$$

Формирование вещественной $\text{Re}[y_1]$ и мнимой $\text{Im}[y_1]$ частей комплексного сигнала $y_1(nT)$ показано на рис. 9.10, *б*.

2. Выделение смещенной верхней боковой полосы спектральной плотности $Y_1(e^{j\omega T})$ комплексным фильтром нижних частот (КФНЧ) (рис. 9.10, *a*).

Сдвиг спектральной плотности в область низких частот позволяет вместо сложного полосового фильтра использовать существенно более простой ФНЧ.

Фактически фильтрация выполняется *двумя* ФНЧ: отдельно для вещественной $\text{Re}[y_1]$ и мнимой $\text{Im}[y_1]$ частей сигнала $y_1(nT)$. Ширина полосы пропускания

ФНЧ в основной полосе частот равна $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$. Идеальная АЧХ каждого из ФНЧ показана на рис. 9.9, *в*.

На выходе КФНЧ имеем комплексный сигнал $y_2(nT)$ (рис. 9.10, *a*, *б*) со спектральной плотностью $Y_2(e^{j\omega T})$ (рис. 9.9, *г*).

3. Сдвиг спектральной плотности $Y_2(e^{j\omega T})$ вправо на частоту ω_* , т. е. возврат верхней боковой полосы в исходное положение, в результате чего имеем спектральную плотность $Y(e^{j\omega T}) = Y_2[e^{j(\omega - \omega_*)nT}]$ с ОБП (рис. 9.9, *д*) комплексного сигнала $y(nT) = y_2(nT)e^{j\omega_* nT}$ (см. рис. 9.10, *a*), схема формирования которого (см. рис. 9.10, *б*) совпадает с представленной на рис. 9.6.

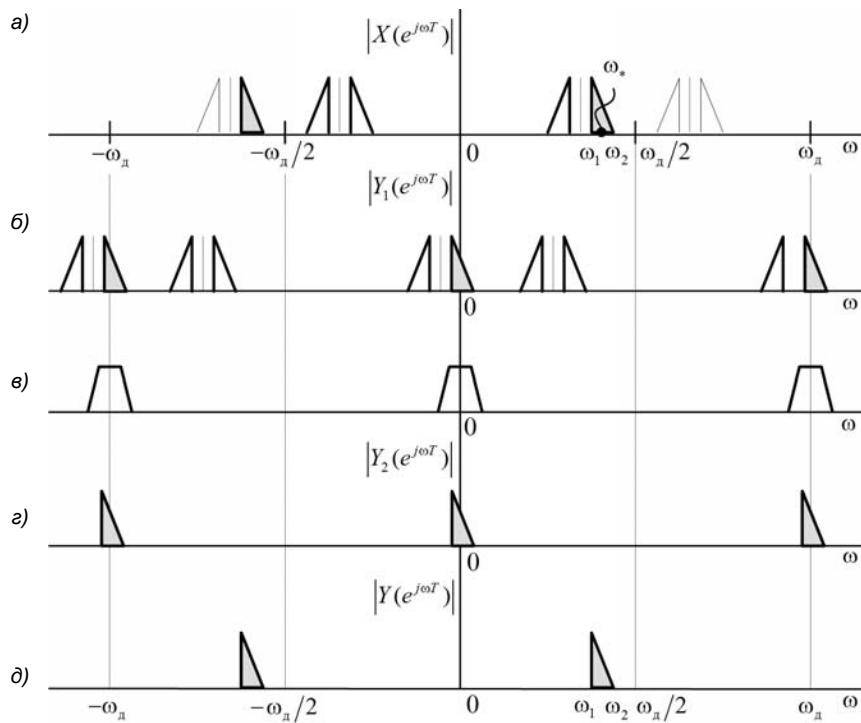


Рис. 9.9. Операции со спектральной плотностью при формировании сигнала с ОБП

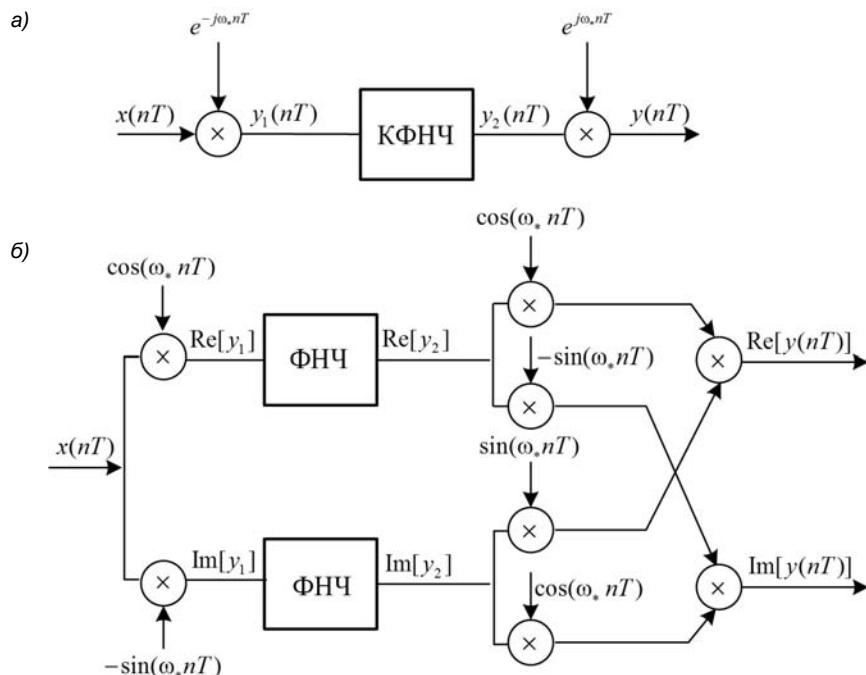


Рис. 9.10. Условная (а) и фактическая (б) схемы формирования сигнала с ОБП

9.5.4. Перенос спектральной плотности узкополосного высокочастотного сигнала в область низких частот

Перенос спектральной плотности узкополосного ВЧ-сигнала в область низких частот (НЧ) рассмотрим на конкретном примере [46].

Пример 9.2. Имеется относительно узкополосный ВЧ-сигнал (см. рис. 9.3) с шириной спектральной плотности 14 МГц и средней частотой $f_{\text{ср}} = 70$ МГц. Средняя частота совпадает с промежуточной (см. пример 9.1).

Перенести спектральную плотность сигнала в область НЧ с целью его последующей фильтрации КФНЧ (см. разд. 9.5.3). При этом необходимо:

1. Исключить операцию умножения на дискретную комплексную экспоненту

$$y(n) = x(n)e^{-j\hat{\omega}_0 n} = x(n)\cos\hat{\omega}_0 n - jx(n)\sin\hat{\omega}_0 n, \quad (9.36)$$

где

$$\hat{\omega}_0 = 2\pi f_0 T = 2\pi f_0 / f_d.$$

2. Обеспечить условия, при которых может быть получен КФНЧ (по существу — два ФНЧ, см. рис. 9.10, б) наименьшей сложности.

Решение. Для решения поставленной задачи необходимо:

- выбрать частоту дискретизации f_d ;
- перенести спектральную плотность дискретного сигнала в область НЧ на некоторую частоту f_0 , такую, чтобы это не сопровождалось умножением сигнала на дискретную комплексную экспоненту (9.36);
- сформулировать требования к КФНЧ;
- синтезировать КФНЧ.

О формулировке требований к ФНЧ в составе КФНЧ пойдет речь в главах, посвященных синтезу цифровых фильтров, здесь же определим частоту дискретизации f_d и частоту переноса f_0 при заданных ограничениях.

В примере 9.1 были найдены пять допустимых диапазонов для выбора f_d , из них практически важными оказались только три с номерами $q = 3, 4, 5$. Выбор частоты дискретизации определяется, исходя из следующих соображений.

- Чем выше частота дискретизации, тем более высокой вычислительной мощностью должно обладать устройство последующей обработки. С этой точки зрения, казалось бы, естественно выбрать минимально возможную частоту f_d из диапазона $30,8 \leq f_d \leq 31,5$ МГц с номером $q = 5$ (см. разд. 9.4), но этому препятствует дополнительное требование — исключить умножение сигнала на комплексную экспоненту при переносе спектральной плотности в область НЧ.
- Комплексный сигнал, получаемый в результате переноса спектральной плотности в область НЧ, необходимо отфильтровать КФНЧ, сложность которого зависит

сит, в том числе, и от ширины переходной полосы: чем она уже, тем сложнее КФНЧ.

Прежде чем вычислять частоту дискретизации, остановимся на процедуре сдвига спектральной плотности на f_0 влево, которая, согласно (9.36), реализуется умножением на комплексную экспоненту. Такое умножение занимает много времени, поэтому обычно строят таблицы значений $\cos \hat{\omega}_0 n$ и $\sin \hat{\omega}_0 n$ с учетом периодичности данных функций и организуют вычисления путем обращения к этим таблицам. Однако при высокой частоте дискретизации (мегагерцах, как в нашем примере) и большом объеме обрабатываемых данных этот способ зачастую оказывается неэффективным, вплоть до невозможности обработки сигнала в реальном времени. Поэтому необходимо найти такую частоту сдвига f_0 , которая, с одной стороны, позволила бы исключить операцию умножения на комплексную экспоненту, а с другой — упростить вычислительную процедуру. Этим условиям отвечает значение нормированной частоты $\hat{\omega}_0 = \pi/2$ или соответствующее ей значение $f_0 = f_d/4$.

Тогда экспонента имеет вид

$$e^{-j\pi n/2} = \cos(\pi n/2) - j \sin(\pi n/2)$$

и на периоде $N = 4$ в точках $n = 0, 1, 2, 3$ принимает значения $1, -j, -1, j$ соответственно. В результате получаем четыре значения $y(n)$ (9.36), приведенные в табл. 9.1, где $n \bmod 4$ — номер отсчета n , взятый по модулю 4, т. е. точки $n = 0, 1, 2, 3$ на каждом периоде.

Таблица 9.1. Умножение на экспоненту $e^{-j\pi n/2}$

$n \bmod 4$	0	1	2	3
Значение экспоненты	1	$-j$	-1	j
Значение сигнала $y(n)$	$x(n)$	$-jx(n)$	$-x(n)$	$jx(n)$

Таким образом, выбираем частоту сдвига спектральной плотности дискретного сигнала в область НЧ, равную $f_0 = f_d/4$.

Теперь определим частоту дискретизации.

Рассмотрим варианты сдвига спектральной плотности в область НЧ на частоту $f_d/4$ при различном положении частоты f_{cp} относительно $f_d/4$:

- при $f_{cp} > f_d/4$ (рис. 9.11, *a*) после переноса в область НЧ переходная полоса, обозначенная стрелкой (рис. 9.11, *б*), оказывается узкой, а значит, порядок синтезируемого фильтра — большим;
- при $f_{cp} = f_d/4$ (рис. 9.11, *в*) после переноса в область НЧ переходная полоса (рис. 9.11, *г*) оказывается не просто широкой, а максимально возможной, а значит, порядок синтезируемого фильтра — наименьшим (при прочих равных

условиях). Спектральная плотность оказывается разделенной осью ординат пополам.

Вывод: для исключения операции умножения на комплексную экспоненту и достижения максимальной переходной полосы фильтра НЧ частота сдвига и средняя частота сдвигаемой спектральной плотности должны совпадать и равняться четверти частоты дискретизации¹:

$$f_0 = f_{\text{cp}} = f_d / 4 .$$

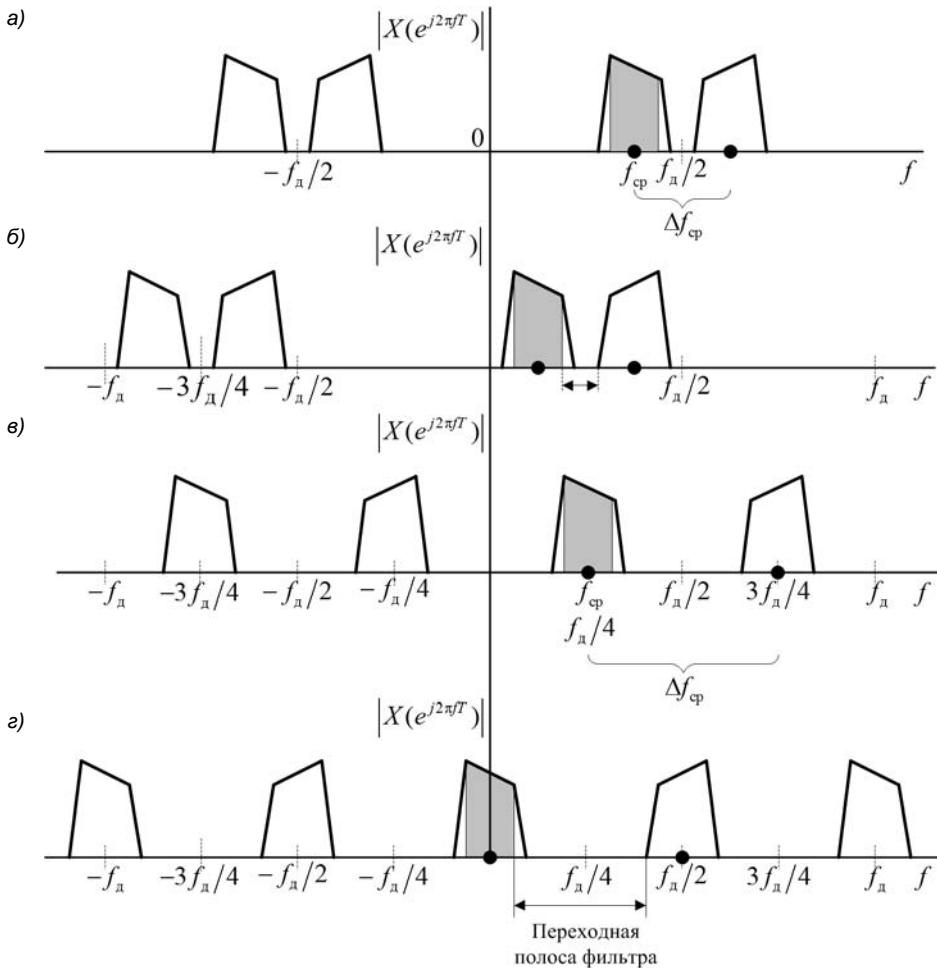


Рис. 9.11. Варианты сдвига спектральной плотности относительно узкополосного сигнала

в область НЧ: $f_{\text{cp}} > f_d / 4$ (a) и переходная полоса (б), $f_{\text{cp}} = f_d / 4$ (в) и переходная полоса (г)

¹ Данный результат получен совместно доцентом Д. А. Улаховичем и инженером Д. С. Мальцевым.

В нашем примере при использовании первого диапазона ($q=1$) частота сдвига и средняя частота (назовем их исходными) должны быть одинаковыми и равными 70 МГц:

$$f_{0 \text{ исх}} = f_{\text{ср исх}} = 70 \text{ МГц},$$

а частота дискретизации (исходная) — 280 МГц:

$$f_{d \text{ исх}} = 4f_{0 \text{ исх}} = 4f_{\text{ср исх}} = 4 \cdot 70 = 280 \text{ МГц}.$$

Выше было показано (см. разд. 9.4), что при выборе частоты дискретизации в других допустимых диапазонах с номерами $q = 2, 3, 4, 5$ происходит пропорциональное смещение спектра по оси частот влево. При этом всякий раз необходимо выдерживать два условия:

1. Отношение S исходной частоты сдвига $f_{0 \text{ исх}}$ (или равной ей исходной средней частоты $f_{\text{ср исх}}$) к частоте сдвига f_{0q} (или равной ей средней частоте $f_{\text{ср } q}$) должно быть *целым* числом:

$$S = \frac{f_{0 \text{ исх}}}{f_{0q}} = \frac{f_{\text{ср исх}}}{f_{\text{ср } q}}, \quad q = 2, 3, 4, 5.$$

2. Значение частоты сдвига f_{0q} (и равной ей $f_{\text{ср } q}$) не должно выражаться иррациональным числом.

Рассчитанные значения S , f_{0q} и $f_{dq} = 4f_{0q}$ приведены в табл. 9.2.

Таблица 9.2. Соотношения частот

Отношение S	f_{0q} , МГц	f_{dq} , МГц	Номер допустимого диапазона q	Связь между S и q
1	$f_{0q} = 70$	$f_{dq} = 280$	1 (исходные данные)	$1 = 2 \cdot 1 - 1 = 2q - 1$
2	35	140		Вне допустимых диапазонов
3	23,33...	93,33...	2 (иррациональное число не используется)	$3 = 2 \cdot 2 - 1 = 2q - 1$
4	17,5	70		Вне допустимых диапазонов
5	14	56	3	$5 = 2 \cdot 3 - 1 = 2q - 1$
7	10	40	4	$7 = 2 \cdot 4 - 1 = 2q - 1$
10	7	28		Вне допустимых диапазонов

Как следует из табл. 9.2, при произвольном целом значении S некоторые частоты дискретизации f_{dq} оказываются вне допустимых диапазонов (см. разд. 9.4).

Получена простая формула, связывающая S и q

$$S = 2q - 1,$$

которая позволяет для каждого номера q по известному значению $f_{0\text{ исх}}$ рассчитать частоту сдвига f_{0q}

$$f_{0q} = \frac{f_{0\text{ исх}}}{2q - 1}$$

и частоту дискретизации $f_{\Delta q}$

$$f_{\Delta q} = 4f_{0q} = \frac{4f_{0\text{ исх}}}{2q - 1}.$$

Например, для $q = 2$ имеем иррациональные числа (см. табл. 9.2):

$$f_{02} = \frac{70}{4 - 1} = 23,33\dots \quad \text{и} \quad f_{\Delta 2} = 4 \cdot 23,33\dots = \frac{280}{4 - 1} = 93,33\dots$$

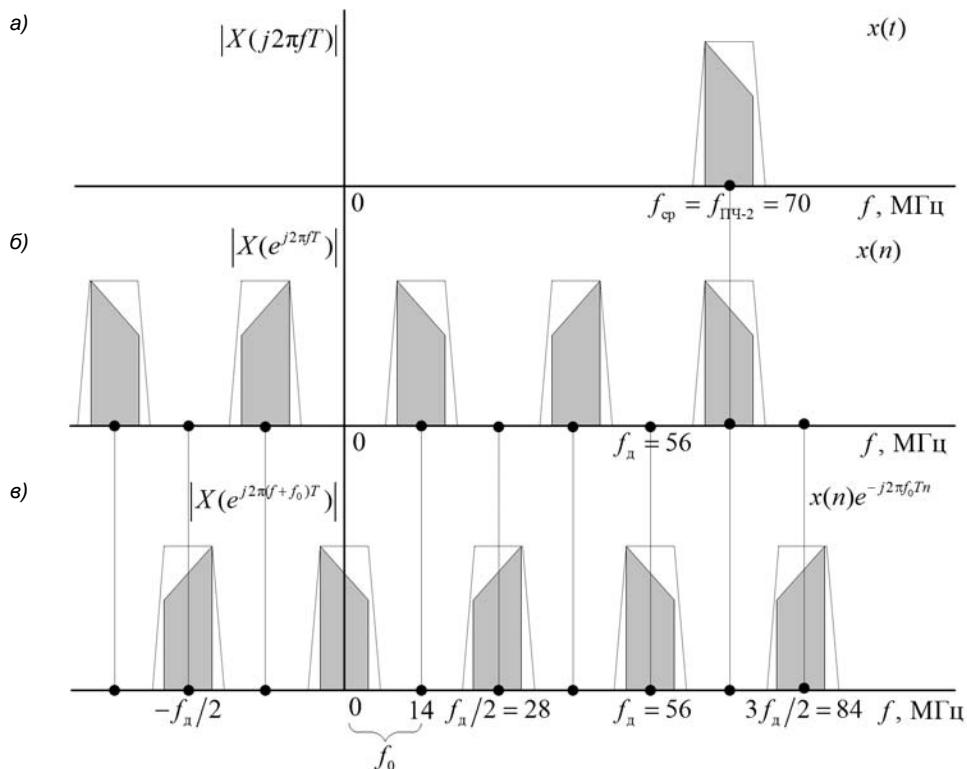
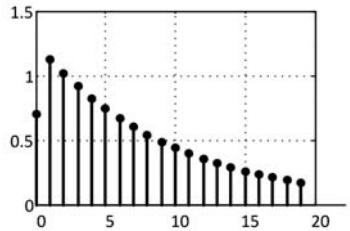


Рис. 9.12. Модули спектральной плотности аналогового сигнала $x(t)$ (a), дискретного сигнала $x(n)$ при $f_{\Delta} = 56$ МГц (б), дискретного сигнала $y(n)$ (в)

Заметим, что пятый допустимый диапазон $30,8 \leq f_d \leq 31,5$ МГц оказался вообще исключенным из рассмотрения.

Таким образом, получены две допустимые частоты дискретизации: 56 и 40 МГц. Выбор между ними определяется только удобством дальнейшей обработки, в частности, в нашем примере частота $f_d = 56$ МГц кратна общей ширине спектральной плотности $\Delta F_{\text{общ}} = 14$ МГц, что позволяет упростить вычисления. На рис. 9.12, *a*–*в* показан сдвиг спектральной плотности в область НЧ ($f_0 = f_d/4$) при $f_d = 56$ МГц с учетом переходных полос антиэлайсингового фильтра. ▲

ГЛАВА 10



Дискретное преобразование Фурье

Практическое применение формул прямого (9.6) и обратного (9.8) преобразования Фурье конечной последовательности $x(n)$ длины N :

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jn\omega T};$$
$$x(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j\omega T}) e^{jn\omega T} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_0^{2\pi/T} X(e^{j\omega T}) e^{jn\omega T} d\omega,$$

связано с необходимостью *дискретизации частоты*. От непрерывной функции частоты $X(e^{j\omega T})$ следует перейти к последовательности ее отсчетов и получить формулы, в которых вычисления выполняются *методом прямой подстановки*, т. е. формулы, непосредственно описывающие *алгоритм вычислений*¹.

Такие формулы впервые были получены математиками и названы *дискретным преобразованием Фурье* (ДПФ).

В литературе известны различные простые подходы к выводу формул ДПФ, и можно выбрать любой из них. Однако сами эти формулы, простые по виду, несут в себе глубокий смысл, отображают явную и неявную взаимосвязи преобразований "время—частота" непрерывных функций и последовательностей, периодических и конечных, содержат много "подводных камней" и т. д. В общем, эти простые формулы "совсем не просты". И чтобы убедиться в этом, подойдем к их выводу с позиций классического математического аппарата рядов Фурье и преобразования Фурье, который применим к последовательностям δ -функций, и в результате формулы ДПФ проявятся автоматически.

¹ Подобно тому, как это было в формуле свертки или разностном уравнении.

10.1. Симметричные ряды Фурье

Под симметрией рядов Фурье периодических функций времени и частоты понимают взаимозаменяемость независимых переменных "время—частота" (с инверсией знака экспоненты), что обеспечивается при равенстве

$$T_s \Delta\omega = \omega_d T = 2\pi,$$

где:

- $T_s = NT$ — период функции времени;
- T — период дискретизации последовательности;
- N — количество отсчетов последовательности на периоде T_s ;
- $\omega_d = 2\pi/T$ — период функции частоты;
- $\Delta\omega$ — период дискретизации по частоте:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{NT}. \quad (10.1)$$

Ряду Фурье периодической функции частоты $X(e^{j\omega T})$ (9.7)

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega T n} \quad (10.2)$$

с коэффициентами Фурье (9.8)

$$x(n) = \frac{T}{2\pi} \int_0^{2\pi/T} X(e^{j\omega T}) e^{jn\omega T} d\omega \quad (10.3)$$

симметричен ряд Фурье периодической функции времени $x_p(t)$

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(k) e^{jk\Delta\omega t}, \quad (10.4)$$

с коэффициентами Фурье $X_a(k) = X_a(k\Delta\omega)$:

$$X_a(k) = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} x_p(t) e^{-jk\Delta\omega t} dt, \quad (10.5)$$

где $k\Delta\omega$ — дискретная частота; $k = k\Delta\omega/\Delta\omega$ — дискретная нормированная частота (подобная дискретному нормированному времени $n = nT/T$).

Совокупность коэффициентов Фурье $X_a(k)$, $-\infty < k < \infty$, называют спектром периодической функции $x_p(t)$ (периодического аналогового сигнала).

По определению ряд Фурье должен быть абсолютно сходящимся. Условие абсолютной сходимости ряда (10.2)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

гарантируется для конечного (финитного) сигнала длины N :

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn\omega T}, \quad (10.6)$$

а абсолютной сходимости ряда (10.4)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_a(k)| < \infty$$

для финитного спектра ширины¹ N :

$$x_p(t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X_a(k)e^{jk\Delta\omega t}. \quad (10.7)$$

10.2. Взаимно однозначные преобразования "время—частота"

Рассмотрим периодические последовательности взвешенных δ -функций во временной области

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(t)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(nT)\delta(t-nT) \quad (10.8)$$

и частотной области

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega T})\delta(\omega-k\Delta\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)\delta(\omega-k\Delta\omega). \quad (10.9)$$

где учтено, что δ -функция $\delta(t-nT)$ равна нулю во всех точках, кроме $t=nT$, а $\delta(\omega-k\Delta\omega)$ — во всех точках, кроме $\omega=k\Delta\omega=\frac{2\pi}{NT}k$.

Данные последовательности условно изображены на рис. 10.1, *a*, а наличие множителя $2\pi/T_s$ в (10.9) поясняется далее.

Известный феномен последовательностей δ -функций

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT);$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-k\Delta\omega)$$

¹ Здесь и далее пределы суммирования указаны для четного N , при нечетном N они будут равны $k=-(N-1)/2$ и $k=(N-1)/2$.

заключается в том, что их можно рассматривать одновременно и как непрерывную функцию, и как периодическую последовательность. Поэтому к ним применим и математический аппарат рядов Фурье, и классического преобразования Фурье (3.38)–(3.39).

Применим его к последовательностям *взвешенных* δ -функций (10.8) и (10.9).

Рассмотрим возможность представления функции (10.8) в виде ряда Фурье (10.4). Определим его коэффициенты $X_a(k)$ (10.5):

$$X_a(k) \Rightarrow \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(nT) \delta(t - nT) \right] e^{-jk\Delta\omega t} dt = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(nT) e^{-jk\Delta\omega nT} \int_0^{T_s} \delta(t - nT) dt.$$

С учетом равенства

$$\int_0^{T_s} \delta(t - nT) dt = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \dots, (N-1); \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

подставляя $\Delta\omega = 2\pi/NT$ (10.1) и $x_p(nT) = x_p(n)$, получим коэффициенты

$$X_a(k) \Rightarrow \frac{1}{T_s} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},$$

которые, вследствие периодичности экспоненты по переменной k с периодом N :

$$e^{j\frac{2\pi}{N}n(k+mN)} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk} e^{j2\pi km} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk},$$

оказались периодическими:

$$X_a(k) \Rightarrow X_p(k) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{T_s} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right), \quad (10.10)$$

откуда имеем взаимно однозначную связь отсчетов спектральной плотности $X(e^{j\omega T})$ (10.6) в точках $\Delta\omega = 2\pi k/NT$, $k = 0, 1, \dots, (N-1)$, на периоде $\omega_d = 2\pi/T$ с отсчетами периодической последовательности на ее периоде:

$$X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, 1, \dots, (N-1). \quad (10.11)$$

Совокупность периодических коэффициентов $X_p(k)$ (10.10) с периодом N называют спектром периодической последовательности $x_p(n)$ (периодического дискретного сигнала).

Периодичность коэффициентов означает, что последовательности δ -функций (10.8) соответствует абсолютно расходящийся ряд:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(nT) \delta(t - nT) \Rightarrow \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) e^{jk\frac{2\pi}{T_s}t}. \quad (10.12)$$

Условие его абсолютной сходимости гарантируется для периода коэффициентов, или, что равнозначно, интервала $-N/2 \leq k \leq (N/2 - 1)$, где, согласно (10.10), они совпадают с *финитным спектром* $X_a(k)$:

$$X_a(k) = X_p(k) = \frac{1}{T_s} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right), \quad -N/2 \leq k \leq (N/2 - 1),$$

связанным взаимно однозначно с периодической функцией $x_p(t)$ (10.7):

$$x_p(t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X_a(k) e^{jk\frac{2\pi}{T_s}t}, \quad (10.13)$$

а следовательно, не могут соответствовать последовательности δ -функций, поэтому стрелка односторонняя.

Таким образом, в эквивалентном представлении (10.8)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(t) \delta(t - nT) \Rightarrow \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) e^{jk\frac{2\pi}{T_s}t}$$

соотношение (10.13) описывает взаимно однозначную связь *непрерывной периодической* функции $x_p(t)$ с *финитной последовательностью* в частотной области (рис. 10.1, б).

Применим *классическое обратное преобразование Фурье* к функции (10.9). Определим ее оригинал с учетом взаимно однозначной связи [19]:

$$\delta(\omega) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}.$$

Сдвигу δ -функции $\delta(\omega)$ на $k\Delta\omega$ соответствует умножение оригинала на комплексную экспоненту $e^{jk\Delta\omega t} = e^{jk\frac{2\pi}{T_s}t}$:

$$\delta(\omega - k\Delta\omega) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} e^{jk\Delta\omega t} = \frac{1}{2\pi} e^{jk\frac{2\pi}{T_s}t}.$$

Свойство линейности преобразования Фурье позволяет поставить в соответствие последовательности δ -функций (10.9) *абсолютно расходящийся ряд*:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) \delta(\omega - k\Delta\omega) \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) e^{jk\frac{2\pi}{T_s}t}. \quad (10.14)$$

Коэффициенты данного ряда совпадают (с точностью до множителя $2\pi/T_s$) с коэффициентами ряда (10.12), и подобно им связаны взаимно однозначно с периодической функцией $x_p(t)$ (10.13), а следовательно, не могут соответствовать последовательности δ -функций, поэтому стрелка односторонняя.

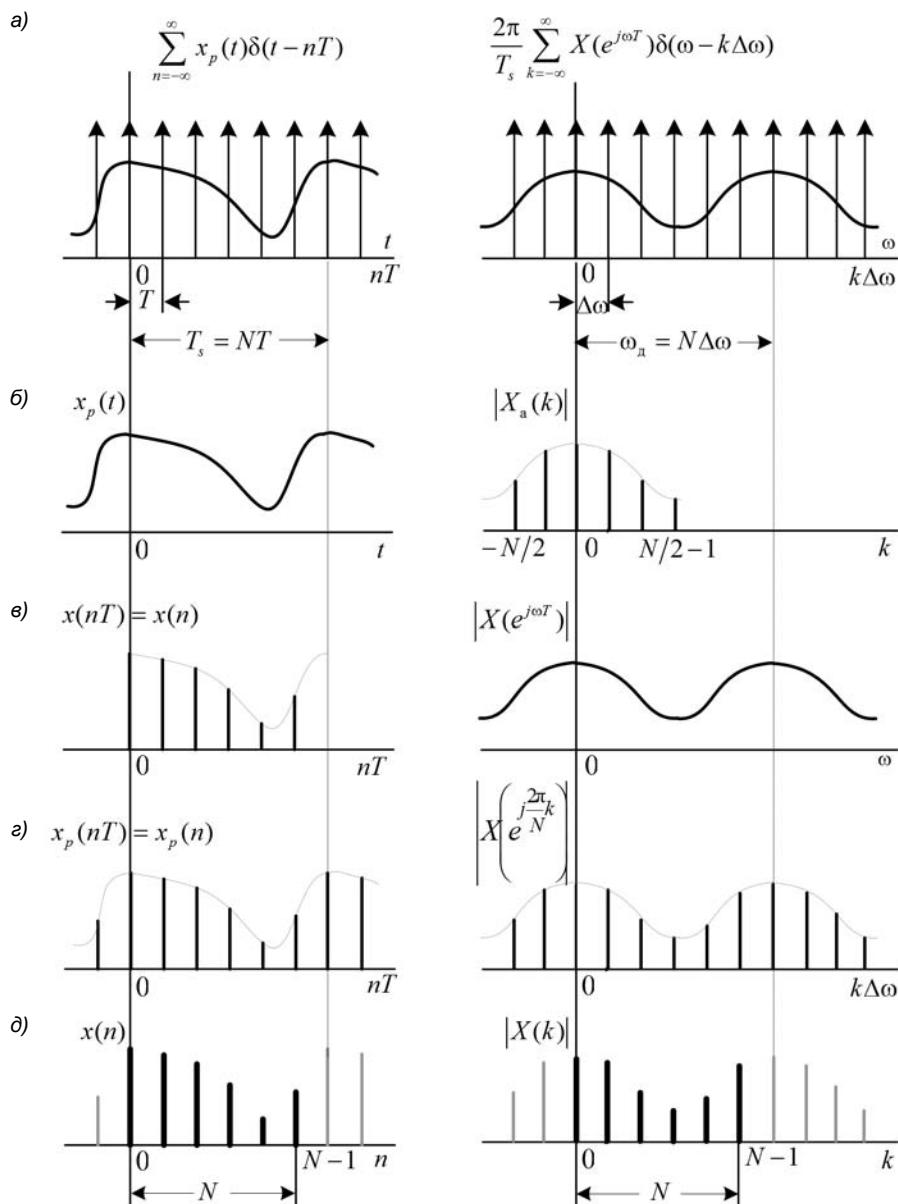


Рис. 10.1. Взаимно однозначные преобразования "время–частота" периодической последовательности δ -функций (α), непрерывной периодической функции времени (β), конечной последовательности (γ), периодической последовательности (δ), ДПФ (δ)

На основании равенства (с точностью до множителя $2\pi/T_s$) правых частей (10.12) и (10.14) устанавливается *взаимно однозначная связь периодических последовательностей δ -функций* (см. рис. 10.1, а):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(nT)\delta(t-nT) \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) \delta(\omega - k\Delta\omega). \quad (10.15)$$

Применим *классическое преобразование Фурье* к функции (10.8) с учетом (9.24) и (9.25):

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1;$$

$$\delta(t-nT) \Leftrightarrow e^{-j\omega nT}.$$

Свойство линейности преобразования Фурье и равенство $x_p(nT) = x_p(n)$ позволяют поставить в соответствие последовательности δ -функций (10.8) *абсолютно расходящийся ряд*:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(nT)\delta(t-nT) \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(n)e^{-j\omega Tn}. \quad (10.16)$$

Условие абсолютной сходимости данного ряда гарантируется для периода коэффициентов, где они совпадают с *финитной* (конечной) последовательностью $x(n)$:

$$x(n) = x_p(n), \quad n = 0, 1, \dots, (N-1),$$

связанной *взаимно однозначно* с периодической функцией $X(e^{j\omega T})$ (10.6):

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega Tn}, \quad (10.17)$$

а следовательно, не могут соответствовать последовательности δ -функций, поэтому стрелка односторонняя.

Таким образом, в эквивалентном представлении (10.9):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(nT)\delta(t-nT) \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega T})\delta(\omega - k\Delta\omega),$$

соотношение (10.17) описывает взаимно однозначную связь *непрерывной периодической* функции частоты $X(e^{j\omega T})$ с *финитной* последовательностью (рис. 10.1, в).

Рассмотрим возможность представления функции (10.9) в виде ряда Фурье (10.2). Определим его коэффициенты $x(n)$ (10.3):

$$\begin{aligned} x(n) &\Rightarrow \frac{T}{2\pi} \int_0^{2\pi/T} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) \delta(\omega - k\Delta\omega) \right] e^{j\omega nT} d\omega = \\ &= \frac{T}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) e^{jk\Delta\omega nT} \int_0^{2\pi/T} \delta(\omega - k\Delta\omega) d\omega. \end{aligned}$$

С учетом равенства

$$\int_0^{2\pi/T} \delta(\omega - k\Delta\omega) d\omega = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, \dots, (N-1); \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

подставляя $\Delta\omega = 2\pi/NT$ (10.1), получим коэффициенты

$$x(n) = \frac{T}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad (10.18)$$

которые вследствие периодичности экспоненты по переменной n с периодом N

$$e^{j\frac{2\pi}{N}k(n+mN)} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk} e^{j2\pi km} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

оказались *периодическими*.

Периодичность коэффициентов означает, что последовательности δ -функций (10.9) соответствует *абсолютно расходящийся ряд*:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) \delta(\omega - k\Delta\omega) \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega nT}. \quad (10.19)$$

Условие абсолютной сходимости данного ряда гарантируется для *периода* коэффициентов $x(n)$ (конечной последовательности длины N), где они связаны взаимно однозначно с функцией $X(e^{j\omega T})$ (10.17), а следовательно, не могут соответствовать последовательности δ -функций, поэтому стрелка односторонняя.

На основании взаимно однозначной связи (10.15) последовательностей δ -функций в левых частях (10.16) и (10.19) устанавливаем взаимно однозначную связь коэффициентов $x_p(n)$ и $x(n)$ (10.18) в правых частях:

$$x_p(n) = \frac{2\pi}{T_s} x(n) = \frac{2\pi}{NT} \cdot \frac{T}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}nk},$$

и получаем *взаимно однозначную связь* отсчетов последовательности $x_p(n)$ на ее *периоде* с отсчетами спектральной плотности (10.11):

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, 1, \dots, (N-1). \quad (10.20)$$

Таким образом, паре связанных взаимно однозначно *периодических последовательностей* δ -функций

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(nT) \delta(t - nT) \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) \delta(\omega - k\Delta\omega)$$

соответствует пара (10.11) и (10.20) связанных взаимно однозначно *периодических последовательностей* (рис. 10.1, ε):

$$X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, 1, \dots, (N-1); \quad (10.21)$$

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, 1, \dots, (N-1), \quad (10.22)$$

которая и представляет собой *дискретное преобразование Фурье*.

10.3. Дискретное преобразование Фурье

Дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) называется пара связанных взаимно однозначно преобразований (10.21)–(10.22), которую принято записывать в виде (см. рис. 10.1, δ):

- прямое ДПФ (Discrete Fourier Transform, DFT):

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, (N-1); \quad (10.23)$$

- обратное ДПФ (ОДПФ — Inverse Discrete Fourier Transform, IDFT):

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, (N-1), \quad (10.24)$$

где:

- n — дискретное нормированное время $n = nT/T$;
- k — дискретная нормированная частота $k = k\Delta\omega/\Delta\omega$;
- N — одинаковые периоды последовательностей $x(n)$ и $X(k)$;
- $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, (N-1)$, — *периодическая* последовательность на периоде, которую называют *N-точечной* последовательностью;
- $X(k)$, $k = 0, 1, \dots, (N-1)$ — *периодическая* последовательность в частотной области, которую называют *N-точечным* ДПФ или просто ДПФ;

- $W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ — поворачивающий множитель:

$$W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}; \quad (10.25)$$

- $X(k)W_N^{-nk} = X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ — k -я дискретная гармоника.

10.3.1. Дискретное преобразование Фурье периодической последовательности

Для периодической последовательности $x(n)$ с периодом N ДПФ $X(k)$ (10.23) совпадает с ее спектром $X_p(k)$ (10.10) с точностью до множителя $1/N$:

$$X_p(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} X(k). \quad (10.26)$$

Модуль ДПФ $|X_p(k)|$ называют *амплитудным спектром*, а аргумент $\arg\{X_p(k)\}$ — *фазовым спектром* периодической последовательности.

Амплитудный спектр *вещественной* периодической последовательности равен модулю ДПФ $|X(k)|$ с точностью до множителя:

$$\begin{cases} 1/N, & k = 0; \\ 2/N, & k \neq 0. \end{cases}$$

Для установления связи между спектрами дискретного и аналогового сигналов определим значения функции $x_p(t)$ (10.4) в точках $t = nT$ на периоде:

$$x_p(t)|_{t=nT} = x_p(nT) = x_p(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, 1, \dots, (N-1).$$

Представим бесконечную сумму в виде бесконечного числа конечных сумм, сдвинутых друг относительно друга по частоте k на N :

$$x_p(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} X_a(k + mN) e^{j\frac{2\pi}{N}n(k+mN)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} X_a(k + mN) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

и изменим порядок суммирования:

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(k + mN) \right] e^{j\frac{2\pi}{N}nk}. \quad (10.27)$$

Запишем (10.22) с учетом принятого для ДПФ обозначения (10.23) и определения спектра $X_p(k)$ (10.26):

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{k=0}^{N-1} [X_p(k)] e^{j\frac{2\pi}{N}nk}. \quad (10.28)$$

Сравнивая (10.28) с (10.27), получаем искомую связь между спектрами:

$$X_p(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(k + mN). \quad (10.29)$$

Спектр дискретного сигнала $X_p(k)$ с периодом N равен бесконечной сумме копий спектра аналогового сигнала $X_a(k)$, сдвинутых друг относительно друга на N .

Отсутствие элайсинга (наложения спектров) в (10.29) гарантируется для *финитного* спектра $X_a(k)$ ширины N .

В этом случае гарантируется точное восстановление аналогового сигнала по отсчетам ДПФ:

$$x_p(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{NT} kt},$$

где (см. рис. 10.1, б, д):

$$X(k) = \begin{cases} X(k+N), & -N/2 \leq k \leq -1; \\ X(k), & 0 \leq k \leq (N/2-1). \end{cases}$$

ДПФ $X(k)$ связано взаимно однозначно с периодической последовательностью $x(n)$ (10.24). Значит, по отсчетам данной последовательности также гарантируется точное восстановление аналогового сигнала с финитным спектром, что согласуется с теоремой Котельникова.

10.3.2. Дискретное преобразование Фурье конечной последовательности

Для установления связи между периодической и конечной последовательностями определим значения функции $X(e^{j\omega T})$ (10.2) в точках $\omega = k \frac{2\pi}{NT}$ на периоде $\omega_d = 2\pi/T$:

$$X(e^{j\omega T}) \Big|_{\omega=k \frac{2\pi}{NT}} = X\left(e^{j \frac{2\pi}{N} k}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad k = 0, 1, \dots, (N-1).$$

Представим бесконечную сумму в виде бесконечного числа конечных сумм, сдвинутых друг относительно друга по времени n на N :

$$X\left(e^{j \frac{2\pi}{N} k}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} x(n+mN) e^{-j \frac{2\pi}{N} k(n+mN)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} x(n+mN) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}$$

и изменим порядок суммирования:

$$X\left(e^{j \frac{2\pi}{N} k}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+mN) \right] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}.$$

Сравнивая это равенство с (10.21), получаем искомую связь между последовательностями:

$$x_p(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+mN). \quad (10.30)$$

Периодическая последовательность $x_p(n)$ с периодом N может быть представлена в виде бесконечной суммы копий конечной последовательности $x(n)$, сдвинутых друг относительно друга на N .

Отсутствие элайсинга (наложения последовательностей) в (10.30) гарантируется для конечной последовательности $x(n)$ длины N .

В этом случае в ДПФ (10.23)–(10.24) периодическую последовательность $x(n)$ можно трактовать как *периодическое продолжение конечной последовательности длины N* , а ДПФ $X(k)$ — как *равноотстоящие отсчеты ее спектральной плотности $X(e^{j\omega T})$ на периоде $\omega_d = 2\pi/T$* :

$$X(k) = X(e^{j\omega T}) \Bigg|_{\omega=k\frac{2\pi}{NT}} = X\left(e^{j\frac{2\pi k}{N}}\right), \quad k = 0, 1, \dots, (N-1). \quad (10.31)$$

В соответствии с теоремой Котельникова в частотной области, для финитной последовательности длительности $T_s = NT$ гарантируется точное восстановление непрерывной спектральной плотности по ее отсчетам, взятым с периодом дискретизации $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{NT}$.

Следовательно, по отсчетам ДПФ $X(k)$ (10.31) гарантируется точное восстановление спектральной плотности $X(e^{j\omega T})$ на периоде $\omega_d = 2\pi/T$.

Отметим, что модуль ДПФ $|X(k)|$ конечной последовательности совпадает с амплитудным спектром *периодической* последовательности $|X_p(k)|$ с точностью до множителя $1/N$.

10.3.3. Разрешение по частоте и растекание спектра

Разрешением по частоте называют минимальное расстояние между дискретными гармониками в ДПФ, равное

$$\Delta f = f_d / N. \quad (10.32)$$

Значения абсолютных частот дискретных гармоник связаны со значениями дискретных нормированных частот соотношением:

$$f = k f_d / N.$$

Растеканием спектра называют появление дополнительных составляющих в спектральном составе последовательности при вычислении ДПФ.

Точное (без растекания спектра) выделение гармоник последовательности $x(n)$ с частотами f_i гарантируется только в том случае, если они кратны разрешению по частоте (10.32):

$$f_i = P_i \Delta f, \quad P_i \in [0; (N-1)], \quad (10.33)$$

где целое число P_i — значение дискретной нормированной частоты, соответствующей частоте f_i .

Эффект растекания спектра наблюдается в том случае, если хотя бы для одной из дискретных гармоник, входящих в спектральный состав последовательности, значение P_i оказывается не целым числом, и частота гармоники f_i — не кратной разрешению по частоте (10.32).

В этом случае на периоде NT последовательности укладывается не целое число периодов T_i дискретной гармоники:

$$P_i = \frac{NT}{T_i} = \frac{Nf_i}{f_{\Delta}} = \frac{f_i}{\Delta f}. \quad (10.34)$$

По определению последовательность в ДПФ (10.23) является периодической, поэтому в периодическом продолжении гармоники с частотой f_i возникают разрывы (скачки) на границах периода, вследствие чего спектр расширяется (появляются дополнительные составляющие).

Для уменьшения эффекта растекания спектра (полностью он принципиально неустраним) применяют *весовые функции* (окна) — вещественные неотрицательные последовательности, максимальные в центре и монотонно спадающие к границам. Это ослабляет влияние разрывов при периодическом продолжении последовательности, но одновременно сопровождается искажениями сигнала и его амплитудного спектра, зависящими от параметров окна.

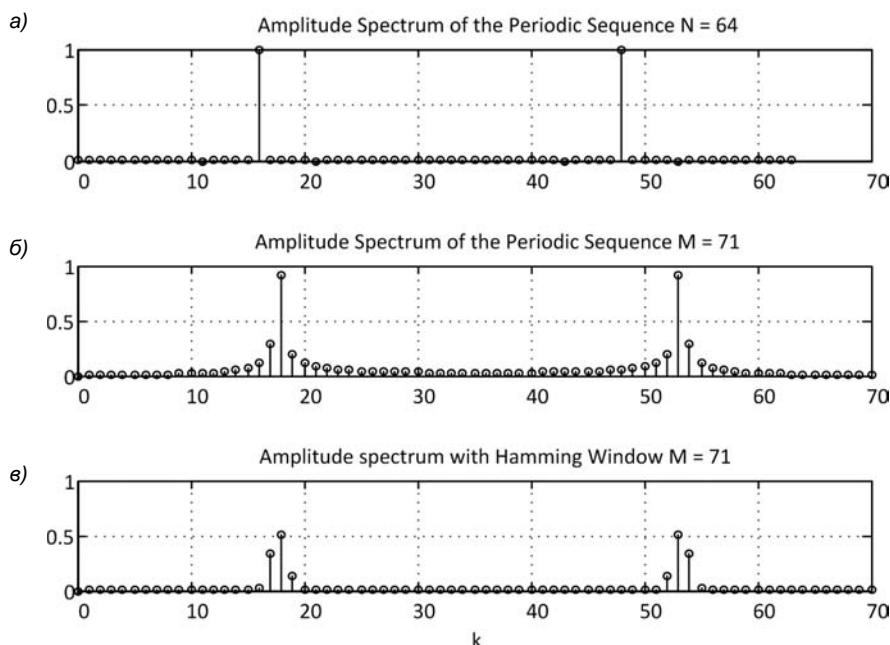


Рис. 10.2. Амплитудные спектры дискретной синусоиды без растекания спектра (a), с растеканием спектра (б), после применения окна Хэмминга (в)

Пример 10.1. Определить, при каком периоде ДПФ, $N = 64$ или $N = 71$, в спектре дискретной гармоники с частотой $f_1 = 1000$ Гц, амплитудой $A_1 = 1$ и частотой дискретизации $f_d = 4000$ Гц будет наблюдаться растекание спектра. Для его уменьшения применить окно Хэмминга.

Решение. При $N = 64$ значение P_1 в (10.33) равно целому числу $P_1 = 16$, поэтому растекания спектра нет, а при $N = 71$ это значение оказывается не целым числом $P_1 = 17,75$ и должен наблюдаться эффект растекания спектра.

На рис. 10.2 представлены рассчитанные в MATLAB [42] амплитудные спектры дискретной гармоники без растекания, с растеканием спектра и после применения окна Хэмминга, в результате чего количество дополнительных составляющих уменьшилось, но при этом спектр исказился. ◀

10.3.4. Восстановление спектральной плотности

Под *восстановлением спектральной плотности* $X(e^{j\omega T})$ (10.2) понимают вычисление ее отсчетов в промежутке между отсчетами ДПФ, т. е. в $L > N$ равнотстоящих точках на периоде ω_d :

$$X\left(e^{j\frac{2\pi}{L}l}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{L}ln}, \quad l = 0, 1, \dots, L-1, \quad (10.35)$$

где l — дискретная нормированная частота, $\Delta\tilde{\omega} = \omega_d/L = 2\pi/LT$ — период дискретизации по частоте, соответствующий $\Delta\tilde{f} = f_d/L$.

Тот же результат будет получен, если последовательность $x(n)$ длины N дополнить нулями до длины L :

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq (N-1); \\ 0, & N \leq n \leq (L-1), \end{cases}$$

и вычислить ее L -точечное ДПФ:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{L-1} \tilde{x}(n)W_L^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, L-1. \quad (10.36)$$

Подставляя $\tilde{x}(n)$, получаем спектральную плотность (10.35):

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_L^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{L}kn}, \quad k = 0, 1, \dots, L-1. \quad (10.37)$$

Следует понимать, что уменьшение периода дискретизации по частоте при восстановлении спектральной плотности не меняет разрешения по частоте Δf (10.32), а лишь улучшает условия различения близко расположенных частот дискретных гармоник.

Частоты дискретных гармоник f_1 и f_2 считают близко расположеными, если расстояние между ними больше разрешения по частоте Δf , но меньше его удвоенного значения:

$$\Delta f < |f_1 - f_2| < 2\Delta f.$$

Для улучшения различия гармоник с близко расположеными частотами восстанавливают спектральную плотность, дополняя исходную последовательность длины N нулями до длины $L > N$:

$$L \geq \frac{f_{\Delta}}{|f_1 - f_2| - \Delta f},$$

и по графику модуля спектральной плотности (или автоматически) определяют ближайшие пики [42], при этом точность определения частот будет зависеть от периода дискретизации $\tilde{\Delta}f = f_{\Delta}/L$.

10.4. Свойства дискретного преобразования Фурье

Свойства ДПФ удобно объединить в две группы:

- основные свойства, которые являются прямым следствием свойств спектральных плотностей дискретных сигналов при переходе от непрерывной частоты ω к дискретной нормированной частоте $k = k\Delta\omega/\Delta\omega$.

Доказательства данных свойств аналогичны приводимым в разд. 9.2;

- дополнительные свойства, связанные со спецификой ДПФ.

Перечислим основные свойства ДПФ.

- Периодичность.

По определению ДПФ $X(k)$ — периодическая последовательность с периодом N , совпадающим с периодом (длиной) последовательности $x(n)$.

- Четность модуля и нечетность аргумента.

Для вещественной последовательности $x(n)$ модуль ДПФ $|X(k)|$ — четная, а аргумент $\arg\{X(k)\}$ — нечетная функция частоты k , следовательно:

$$|X(k)| = |X(N-k)|;$$

$$\arg\{X(k)\} = -\arg\{X(N-k)\},$$

и ДПФ вещественной последовательности достаточно определить в основной полосе частот $[0; N/2]$.

□ Линейность.

ДПФ линейной комбинации последовательностей равно линейной комбинации их ДПФ:

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) + \dots \Leftrightarrow X(k) = a_1 X_1(k) + a_2 X_2(k) + \dots \quad (10.38)$$

□ Сдвиг (смещение) ДПФ.

Сдвиг ДПФ $X(k)$ вправо на частоту k_0 соответствует умножению последовательности $x(n)$ на поворачивающий множитель $W_N^{-k_0 n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k_0 n}$:

$$x(n) W_N^{-k_0 n} \Leftrightarrow X(k - k_0), \quad (10.39)$$

а сдвиг влево — умножению на поворачивающий множитель $W_N^{k_0 n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k_0 n}$:

$$x(n) W_N^{k_0 n} \Leftrightarrow X(k + k_0). \quad (10.40)$$

Поэтому в общем случае модуль и аргумент ДПФ комплексной последовательности $x(n)e^{\pm j\frac{2\pi}{N}k_0 n}$ утрачивают свойство четности и нечетности соответственно.

□ Расщепление ДПФ вещественной последовательности.

Расщепление ДПФ на две части, симметрично смещенные вправо и влево на частоту k_0 , соответствует умножению вещественной последовательности $x(n)$ на $\cos(k_0 n)$:

$$x(n) \cos(k_0 n) \Leftrightarrow \frac{1}{2} X(k - k_0) + \frac{1}{2} X(k + k_0). \quad (10.41)$$

Свойства четности модуля и нечетности аргумента ДПФ вещественной последовательности сохраняются.

□ Сдвиг (задержка) последовательности.

Задержка дискретного сигнала $x(n-m)$ соответствует умножение ДПФ на поворачивающий множитель W_N^{mk} :

$$x(n-m) \Leftrightarrow X(k) W_N^{mk}. \quad (10.42)$$

□ Равенство (теорема) Парсеваля

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (10.43)$$

позволяет определить энергию дискретного сигнала (слева) по отсчетам ДПФ (справа).

Дополним этот список специальными свойствами ДПФ.

□ ДПФ круговой свертки последовательностей.

ДПФ круговой свертки равно произведению ДПФ сворачиваемых последовательностей:

$$x(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2[(n-m) \bmod N] \\ \sum_{m=0}^{N-1} x_1[(n-m) \bmod N]x_2(m) \end{cases} \Leftrightarrow X(k) = X_1(k)X_2(k). \quad (10.44)$$

В левой части (10.44) имеем последовательность $x(n)$, представляющую собой *круговую свертку* последовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$, где запись $(n-m) \bmod N$ соответствует значению $(n-m)$ по модулю N .

Доказательство. Подставим в (10.23) верхнюю формулу свертки:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2[(n-m) \bmod N] \right] W_N^{nk}$$

и изменим порядок суммирования

$$X(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \sum_{n=0}^{N-1} \{x_2[(n-m) \bmod N]\} W_N^{nk}.$$

При $n = 0, 1, \dots, (N-1)$ имеем $x_2[(n-m) \bmod N] = x_2(n-m)$, следовательно:

$$X(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_2(n-m) W_N^{nk} \right].$$

Применяя свойство (10.42) к содержимому в квадратных скобках, получаем

$$X(k) = X_2(k) \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) W_N^{mk} = X_2(k) X_1(k).$$

□ ДПФ произведения последовательностей.

ДПФ произведения последовательностей равно *круговой свертке* их ДПФ:

$$x(n) = x_1(n)x_2(n) \Leftrightarrow X(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_1(m) X_2[(k-m) \bmod N]; \\ \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_1[(k-m) \bmod N] X_2(m). \end{cases} \quad (10.45)$$

Доказательство. Подставим в (10.24) верхнюю формулу свертки:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_1(m) X_2[(k-m) \bmod N] \right\} W_N^{-nk}$$

и изменим порядок суммирования

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_1(m) \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_2[(k-m) \bmod N] \right\} W_N^{-nk}.$$

При $k = 0, 1, \dots, (N-1)$ имеем $X_2[(k-m) \bmod N] = X_2(k-m)$, следовательно:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_1(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_2(k-m) W_N^{-nk} \right].$$

Применяя свойство (10.39) при $k_0 = m$ к содержимому в квадратных скобках, получаем

$$x(n) = x_2(n) \left[\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_1(m) W_N^{-mk} \right] = x_2(n) x_1(n).$$

□ ДПФ вещественной симметричной последовательности.

Вещественная симметричная последовательность

$$x(n) = x(N-n) \quad (10.46)$$

с осью симметрии в точке $n = N/2$ имеет *вещественное* ДПФ.

Доказательство. Допустим, что N — четное. Определим ДПФ.

С учетом (10.31) и тождества для экспоненты $e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-n)k} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$, получим:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = x(0) + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{N}k} + x(2)e^{-j\frac{2\pi}{N}2k} + \dots + x\left(\frac{N}{2}\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}k} + \dots + \\ &+ x(2)e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-2)k} + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)k} = x(0) - x\left(\frac{N}{2}\right) + \sum_{n=1}^{N/2-1} x(n) \left[e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \right], \end{aligned}$$

откуда имеем *вещественное* ДПФ:

$$X(k) = 2 \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) - x(0) - x\left(\frac{N}{2}\right), \quad k = 0, 1, \dots, (N-1), \quad (10.47)$$

где первое слагаемое — удвоенная *вещественная* часть ДПФ (10.23) длины N последовательности $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, (N/2-1)$.

Аналогично, для N нечетного получим:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = x(0) + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{N}k} + x(2)e^{-j\frac{2\pi}{N}2k} + \dots + \\ &+ \dots + x(2)e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-2)k} + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)k} = x(0) + \sum_{n=1}^{(N-1)/2} x(n) \left[e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \right], \end{aligned}$$

откуда имеем *вещественное* ДПФ:

$$X(k) = 2 \sum_{n=0}^{(N-1)/2} x(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) - x(0), \quad k = 0, 1, \dots, (N-1), \quad (10.48)$$

где первое слагаемое — удвоенная *вещественная* часть ДПФ (10.23) длины N последовательности $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, (N-1)/2$.

В MATLAB ДПФ (10.23) вычисляется с помощью функции¹ [42]:

`X = fft(x)`

где x и X — N -точечные последовательность $x(n)$ и ее ДПФ $X(k)$ — векторы, нижняя граница индексов которых равна единице, в отличие от ДПФ (10.23), где она равна нулю.

Для вычисления вещественной симметричной последовательности *четной* длины N эта функция принимает вид:

`X = 2*real(fft(x(1:(N/2)),N))-x(1)-x(N/2)`

а нечетной длины N :

`X = 2*real(fft(x(1:(N+1)/2),N))-x(1)-x(N/2)`

Пример 10.2. Вычислим ДПФ простейшей последовательности четной длины $N = 8$:

```
>> x = [1 2 3 4 4 3 2 1];
>> N = 8;
>> X = 2*real(fft(x(1:(N/2)),N))-x(1)-x(N/2)
X =
15.0000 -5.8284 -9.0000 -0.1716 -9.0000 -0.1716 -9.0000 -5.8284
```

Вычислим первые два отсчета ДПФ по формуле (10.47) — идентификаторы x_0 и x_1 :

```
>> n = 1:(N/2);
>> X0 = 2.* (sum(x(n)) - x(1)-x(4))
X0 =
15
>> X1 = 2.* (sum(x(n).*cos((n-1).*2*pi/N))) - x(1)-x(4)
X1 =
-5.8284
```

Результаты совпали. Аналогично легко проверить вычисление ДПФ (10.48). ▲

10.5. Дискретное косинус-преобразование

Дискретное косинус-преобразование (ДКП), применяемое во многих приложениях обработки вещественных последовательностей, представляет собой частный случай ДПФ (10.23) — (10.24), в котором базовой функцией является не комплексная экспонента, а вещественный косинус, как в ДПФ (10.47) и (10.48).

Существует несколько вариантов формул ДКП [34]. Приведем один из них, наиболее распространенный, реализованный в MATLAB:

□ прямое ДКП (Discrete Cosine Transform, DCT):

$$X(k) = 2 \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2N} k, \quad k = 0, 1, \dots, (N-1);$$

¹ Для вычисления ДПФ в этом случае применяются быстрые алгоритмы (БПФ), о чем пойдет речь в следующей главе.

□ обратное ДКП (ОДКП — Inverse Discrete Cosine Transform, IDCT):

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \beta(k) X(k) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2N} k\right), \quad n = 0, 1, \dots, (N-1),$$

где:

$$\beta(k) = \begin{cases} 1/2, & k = 0; \\ 1, & k = 1, \dots, (N-1). \end{cases}$$

Вывод данных формул основан на свойстве вещественности ДПФ вещественной симметричной последовательности (свойство 10 в предыдущем разделе), для чего к вещественной конечной последовательности добавляется ее зеркальное отображение.

10.6. Вычисление линейной свертки с помощью дискретного преобразования Фурье

В разд. 2.2.1 была рассмотрена процедура вычисления реакции при *конечных* длинах воздействия и импульсной характеристики с помощью *линейной* свертки:

$$y(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{L-1} x(m)h(n-m); \\ \sum_{m=0}^{L-1} h(m)x(n-m), \end{cases} \quad (10.49)$$

где N_1 и N_2 — длины воздействия и импульсной характеристики соответственно; $L = N_1 + N_2 - 1$ — длина линейной свертки.

Для сокращения вычислительных затрат линейную свертку рассчитывают с помощью ДПФ в соответствии со следующим *алгоритмом*:

1. Переходят от *линейной* свертки (10.49) к *круговой*:

$$y(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{x}(m)\tilde{h}[(n-m) \bmod L]; \\ \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{h}(m)\tilde{x}[(n-m) \bmod L]. \end{cases} \quad (10.50)$$

Для этого конечные последовательности $\tilde{h}(n)$ и $\tilde{x}(n)$ дополняют нулями до длины L (периода круговой свертки).

2. Рассчитывают L -точечное ДПФ $Y(k)$ круговой свертки (10.50).

Согласно (10.44), оно равно произведению L -точечных ДПФ сворачиваемых последовательностей:

$$Y(k) = \tilde{H}(k)\tilde{X}(k), \quad k = 0, 1, \dots, L-1.$$

3. Рассчитывают реакцию $y(n)$ с помощью ОДПФ.
4. Ограничивают длину реакции $y(n)$ (периода круговой свертки L) до длины воздействия N_1 .

Для быстрого расчета ДПФ и ОДПФ используют алгоритмы БПФ и ОБПФ (см. главу 11). Для реализации рассмотренного алгоритма в MATLAB предусмотрена функция `fftfilt` [42].

Убедимся на примере в том, что результаты вычислений круговой и линейной сверток совпадают.

Пример 10.3. Вычислить реакцию ЛДС $y(n)$ по верхней формуле свертки (10.50). Воздействие $x(n) = \{x_0; x_1; x_2\} = \{1; 2; 2\}$ имеет длину $N_1 = 3$, импульсная характеристика $h(n) = \{h_0; h_1\} = \{2; 1\}$ — длину $N_2 = 2$. Сравнить с результатом вычисления $y(n)$ с помощью линейной свертки, полученным в примере 2.1.

Решение. Процедуру вычисления реакции по формуле круговой свертки иллюстрирует рис. 10.3. На рис. 10.3, *a*, *b* представлены воздействие $\tilde{x}(m) = \{x_0; x_1; x_2; 0\}$ и ИХ $\tilde{h}(m) = \{h_0; h_1; 0; 0\}$, дополненные нулями до длины $L = N_1 + N_2 - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$ — периода круговой свертки. Согласно (10.50), реакция $y(n)$ равна сумме локальных произведений отсчетов фиксированного воздействия $\tilde{x}(m)$ на периоде (рис. 10.4, *a*) и смещаемой по оси времени периодической ИХ $\tilde{h}[(n-m)\bmod 4]$, где $\tilde{h}(0-m)$ — зеркальное отображение ИХ $\tilde{h}(m)$ на периоде (рис. 10.4, *б*). На рис. 10.3, *в* представлена периодическая ИХ $\tilde{h}[(0-m)\bmod 4]$, а на рис. 10.3, *г—з* — результаты последовательного скольжения периодической ИХ $\tilde{h}[(n-m)\bmod 4]$ слева направо при $n = 1, 2, 3, 4$. Отсчеты ИХ и воздействия на периоде круговой свертки выделены черным, а вне периода — серым цветом. Отсчеты ИХ, совпадающие по времени с отсчетами воздействия на периоде, выделены жирными черными линиями и точками.

Справа на рис. 10.3, *г—з* представлены результаты расчета реакции $\tilde{y}(n)$: в каждый момент времени n значение реакции равно сумме локальных произведений совпадающих по времени отсчетов воздействия и смещенной ИХ на периоде.

Очевидно, что вычисление реакции $\tilde{y}(n)$ следует прекратить, как только ее значения начнут периодически повторяться, что произойдет в момент времени $n = 4$.

Сравнивая результаты вычислений круговой свертки $\tilde{y}(n)$ и линейной свертки $y(n)$ (см. рис. 2.3, *з*), убеждаются в том, что они совпадают.

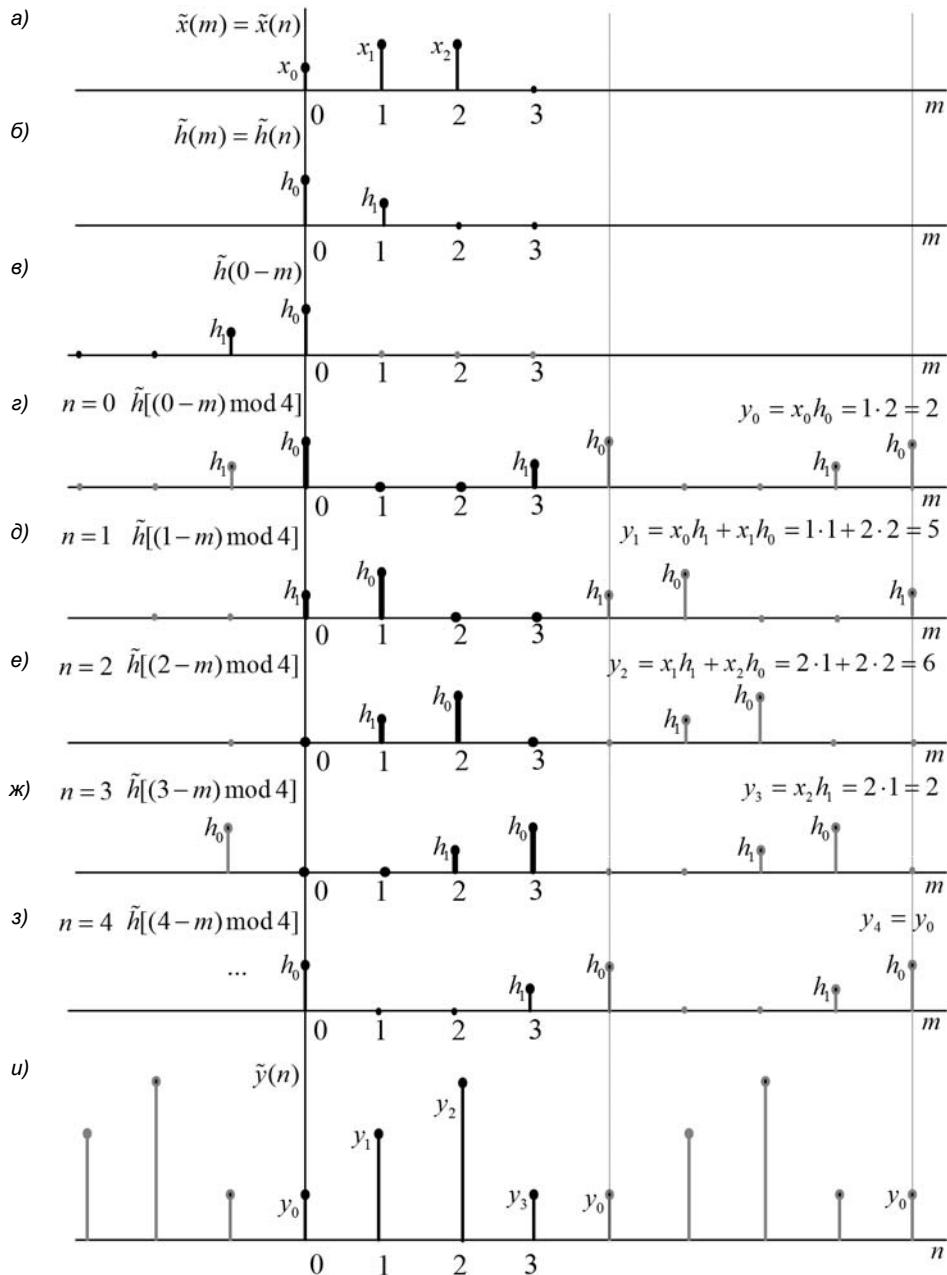


Рис. 10.3. Вычисление реакции с помощью круговой свертки

10.7. Секционированные свертки

При большой и/или заранее неизвестной длине N_1 воздействия $x(n)$ линейная свертка (10.49) вычисляется путем разбиения *воздействия* на короткие части — *секции* — и определения *секционированных сверток*, на основе которых формируется искомая линейная свертка.

Этот случай особо важен для практических задач ЦОС при вычислении реакции по формуле свертки (2.10)

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)h(n-m) \quad (10.51)$$

при поступлении отсчетов воздействия $x(n)$ в реальном времени, когда их длина заранее неизвестна.

Известны два метода вычисления свертки с секционированием: метод перекрытия с суммированием и метод перекрытия с накоплением.

Рассмотрим *метод перекрытия с накоплением*, получивший наибольшее распространение и реализуемый в MATLAB с помощью функции `fftfilt` [42].

Процедуру вычисления реакции $y(n)$ (10.51) иллюстрирует рис. 10.4. На рис. 10.4, *a* изображена импульсная характеристика $h(n)$ длины N_2 , а рис. 10.4, *б* — воздействие, разделенное на секции длины N_1 , сравнимой с длиной N_2 .

Первая секционированная свертка $y_1(n)$ (рис. 10.4, *в*) представляет собой *круговую свертку первой секции* воздействия с ИХ с периодом $L = (N_1 + N_2 - 1)$. Круговая свертка вычисляется с использованием рассмотренного алгоритма (см. разд. 10.6).

На его последнем этапе период круговой свертки ограничивается до длины воздействия N_1 , и формируется *первое перекрытие* — $(N_2 - 1)$ "лишних" отсчетов, которые отбрасываются.

Аналогично вычисляется *вторая секционированная свертка* $y_2(n)$ и формируется второе перекрытие (рис. 10.4, *г*) и т. д. Искомая *линейная свертка* $y(n)$ (10.51) формируется в результате накопления секционированных сверток $y_k(n)$, $k = 1, 2, \dots$, длины N_1 с отброшенными отсчетами перекрытия (рис. 10.4, *д*).

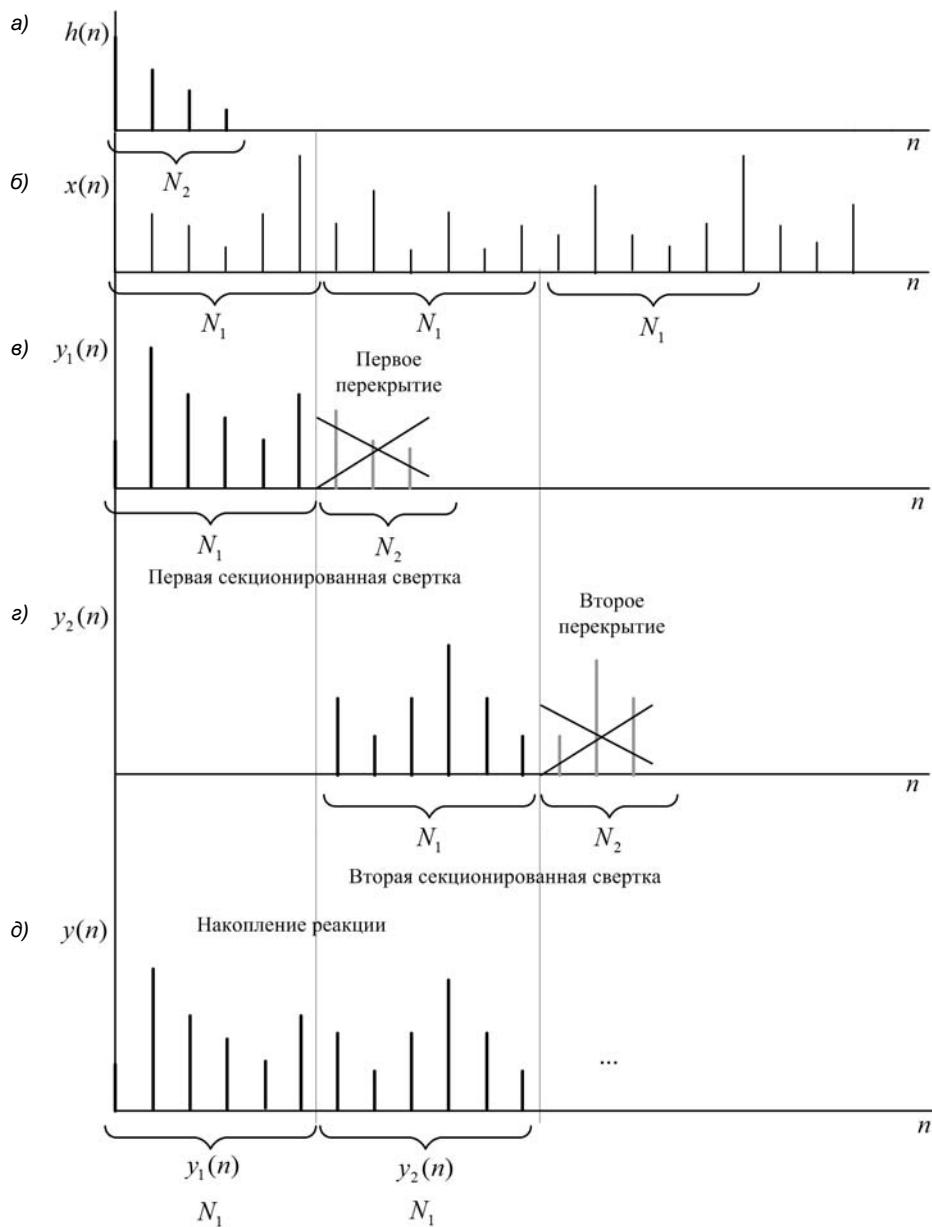
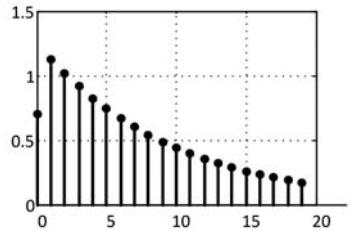


Рис. 10.4. Вычисление свертки методом перекрытия с накоплением

ГЛАВА 11



Быстрое преобразование Фурье

Оценим вычислительную сложность алгоритма ДПФ (10.23):

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, (N-1), \quad (11.1)$$

где W_N^{nk} — поворачивающий множитель:

$$W_N^{nk} = e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}. \quad (11.2)$$

При фиксированном значении k для вычисления суммы потребуется N операций сложения и $(N-1) \approx N$ операций умножения, всего $2N$ операций. В целом, при $k = 0, 1, \dots, (N-1)$ потребуется $2N^2$ арифметических операций с комплексными числами.

Порядок вычислительной сложности ДПФ (11.1) относительно длины N исходной последовательности равен (от англ. *Order* — порядок)

$$O(N^2).$$

Быстрым преобразованием Фурье (БПФ — Fast Fourier Transform, FFT) называют набор алгоритмов, предназначенных для быстрого вычисления ДПФ, поэтому после аббревиатуры БПФ ставят уточнение: алгоритм БПФ с основанием 2, 4, 8, 16, с взаимно-простыми делителями и др. [18, 33].

Наибольшее распространение получил алгоритм БПФ с основанием 2, известный как алгоритм БПФ Кули—Тьюки (Cooley—Tukey), впервые опубликованный в 1965 г. в США. Существуют два эквивалентных по эффективности алгоритма БПФ с основанием 2: с прореживанием по времени и прореживанием по частоте. В любом из них длина N исходной последовательности должна быть целой степенью двойки:

$$N = 2^v, \quad (11.3)$$

и если это условие не выполняется, последовательность дополняют нулями или усекают до ближайшей степени двойки.

Далее по умолчанию речь пойдет об этом алгоритме БПФ.

11.1. Алгоритм быстрого преобразования Фурье с прореживанием по времени

Основная идея алгоритма БПФ с прореживанием по времени заключается в поэтапном вычислении N -точечного ДПФ на v этапах, на каждом из которых *текущее ДПФ вычисляется через ДПФ вдвое меньшей размерности*.

Для понимания того, как реализуется эта идея, рассмотрим *одноэтапный* алгоритм БПФ.

Начальные условия одноэтапного алгоритма БПФ формируются в результате разбиения исходной N -точечной последовательности на две $N/2$ -точечные (рис. 11.1):

- *четных* отсчетов:

$$x(0), x(2), \dots, x(N-2); \quad (11.4)$$

- *нечетных* отсчетов:

$$x(1), x(3), \dots, x(N-1). \quad (11.5)$$

Кратность разбиения	Алгоритм разбиения N -точечной последовательности	Число групп чет/неч	Размерность чет и неч
1	N ↓ ↓ $\frac{N}{2}$ чет $\frac{N}{2}$ неч	1	$\frac{N}{2} = 2^{v-1}$
2	↓ ↓ ↓ ↓ $\frac{N}{4}$ чет $\frac{N}{4}$ неч $\frac{N}{4}$ чет $\frac{N}{4}$ неч	2	$\frac{N}{4} = 2^{v-2}$
3	↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ $\frac{N}{8}$ чет $\frac{N}{8}$ неч $\frac{N}{8}$ чет $\frac{N}{8}$ неч $\frac{N}{8}$ чет $\frac{N}{8}$ неч $\frac{N}{8}$ чет $\frac{N}{8}$ неч	4	$\frac{N}{8} = 2^{v-3}$
⋮	⋮	⋮
v	↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ чет неч чет неч чет неч чет неч	$\frac{N}{2}$	$1 = 2^{v-v}$

$N/2$ групп 2-точечных последовательностей
(прореженная последовательность)

Рис. 11.1. Разбиение N -точечной последовательности на группы четных и нечетных отсчетов

В этом случае сумма в ДПФ (11.1) разбивается на две:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_N^{(2n+1)k} = \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_N^{2nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_N^{2nk}, \quad k = 0, 1, \dots, (N-1), \end{aligned} \quad (11.6)$$

где $x(2n)$ и $x(2n+1)$ — $N/2$ -точечные последовательности четных (11.4) и нечетных (11.5) отсчетов соответственно.

Представим поворачивающий множитель W_N^{2nk} в виде

$$W_N^{2nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}nk} = W_{N/2}^{nk} \quad (11.7)$$

и выполним соответствующую замену в ДПФ (11.6):

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_{N/2}^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (11.8)$$

Согласно (11.1), каждая из сумм справа представляет собой $N/2$ -точечное ДПФ: первая сумма — $N/2$ -точечное ДПФ четных отсчетов, а вторая — нечетных.

Введем обозначения:

$$X_0^v(k) = X(k); \quad (11.9)$$

$$X_0^{v-1}(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_{N/2}^{nk}; \quad (11.10)$$

$$X_1^{v-1}(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_{N/2}^{nk} \quad (11.11)$$

и перепишем ДПФ (11.18) в виде

$$X_0^v(k) = X_0^{v-1}(k) + W_N^k X_1^{v-1}(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (11.12)$$

Здесь и далее верхний индекс будет отображать номер этапа алгоритма БПФ, а нижний — номер ДПФ, четный и нечетный.

Период N -точечного ДПФ $X_0^v(k)$ (11.9) равен N :

$$X_0^v(k) = X_0^v(k+N), \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

а $N/2$ -точечных ДПФ $X_0^{v-1}(k)$ (11.10) и $X_1^{v-1}(k)$ (11.11) — $N/2$:

$$X_0^{v-1}(k) = X_0^{v-1}(k+N/2), \quad k = 0, 1, \dots, N/2-1; \quad (11.13)$$

$$X_1^{v-1}(k) = X_1^{v-1}(k+N/2), \quad k = 0, 1, \dots, N/2-1, \quad (11.14)$$

поэтому $N/2$ -точечные ДПФ $X_0^{v-1}(k)$ (11.13) и $X_1^{v-1}(k)$ (11.14) достаточно вычислить на *первой половине* периода ДПФ $X_0^v(k)$, а на второй — *продублировать*.

Определим *поворачивающий множитель* (11.2) на второй половине периода ДПФ $X_0^v(k)$ (11.9):

$$W_N^{k+N/2} = W_N^k W_N^{N/2} = W_N^k e^{-j \frac{2\pi N}{N/2}} = -W_N^k, \quad k = 0, 1, \dots, N/2-1. \quad (11.15)$$

Оказывается, что и его значения достаточно вычислить на *первой половине* периода, а на второй — *продублировать, изменив знак*.

Следовательно, *последовательное* вычисление отсчетов N -точечного ДПФ $X_0^v(k)$ (11.12) на периоде N можно заменить их *параллельным* вычислением на первой и второй половинах периода по формулам, отличающимся только знаком:

$$\begin{cases} X_0^v(k) = X_0^{v-1}(k) + W_N^k X_1^{v-1}(k); \\ X_0^v(k+N/2) = X_0^{v-1}(k) - W_N^k X_1^{v-1}(k); \\ k = 0, 1, \dots, N/2-1. \end{cases} \quad (11.16)$$

Сокращение объема вычислений достигается за счет синхронного (одновременного) вычисления отсчетов ДПФ, сдвинутых на $N/2$:

$$\begin{aligned} & X_0^v(0) \text{ и } X_0^v(N/2); \\ & X_0^v(1) \text{ и } X_0^v(1+N/2); \\ & \dots \\ & X_0^v(N/2-1) \text{ и } X_0^v(N-1). \end{aligned}$$

На рис. 11.2 *одноэтапному* алгоритму БПФ соответствует *последний*, v -й этап.

Вычисление ДПФ через ДПФ вдвое меньшей размерности стало возможным при разбиении исходной последовательности на группы четных и нечетных отсчетов.

Очевидно, что этой идеей можно воспользоваться и для расчета $N/2$ -точечных ДПФ $X_0^{v-1}(k)$ и $X_1^{v-1}(k)$, каждого через $N/4$ -точечные ДПФ, в *двуэтапном* алгоритме БПФ (на рис. 11.2 это $(v-1)$ -й и v -й этапы).

Начальные условия двухэтапного алгоритма БПФ формируются в результате *двоекратного* разбиения исходной N -точечной последовательности: *каждая* из $N/2$ -точечных последовательностей разбивается на *две* $N/4$ -точечные четных и нечетных отсчетов *в порядке их следования, считая от нуля*, а именно (см. рис. 11.1):

□ $N/2$ -точечная последовательность четных отсчетов (11.4) — на две $N/4$ -точечные:

- четных отсчетов:

$$x(0), x(4), \dots, x(N-4); \quad (11.17)$$

- нечетных отсчетов:

$$x(2), x(6), \dots, x(N-2); \quad (11.18)$$

Номер этапа i	Алгоритм БПФ	Размерность ДПФ L	Количество ДПФ M
v	$X_0^v(k) = X(k)$	$2^v = N$	$2^{v-v} = 1$
$v-1$	X_0^{v-1} X_1^{v-1}	$2^{v-1} = \frac{N}{2}$	$2^{v-(v-1)} = 2$
$v-2$	X_0^{v-2} X_1^{v-2} X_2^{v-2} X_3^{v-2}	$2^{v-2} = \frac{N}{4}$	$2^{v-(v-2)} = 4$
$v-3$	X_0^{v-3} X_1^{v-3} X_2^{v-3} X_3^{v-3} X_4^{v-3} X_5^{v-3} X_6^{v-3} X_7^{v-3}	$2^{v-3} = \frac{N}{8}$	$2^{v-(v-3)} = 8$
\vdots
1	X_0^1 X_1^1 $X_{N/2-1}^1$ $X_{N/2}^1$	$2^1 = 2$	$2^{v-1} = \frac{N}{2}$
	чет неч чет неч чет неч чет неч		

$N/2$ групп 2-точечных последовательностей

(прореженная последовательность)

Рис. 11.2. Этапы вычисления ДПФ в алгоритме БПФ с прореживанием по времени

- $N/2$ -точечная последовательность нечетных отсчетов (11.5) — на две $N/4$ -точечные:

- четных отсчетов:

$$x(1), x(5), \dots, x(N-3); \quad (11.19)$$

- нечетных отсчетов:

$$x(3), x(7), \dots, x(N-1). \quad (11.20)$$

На $(v-1)$ -м этапе (см. рис. 11.2) рассчитываются $N/2$ -точечные ДПФ $X_0^{v-1}(k)$ и $X_1^{v-1}(k)$ по формулам, подобным (11.16) при замене $N \rightarrow N/2$ (размерность ДПФ сокращается вдвое):

$$\begin{cases} X_0^{v-1}(k) = X_0^{v-2}(k) + W_{N/2}^k X_1^{v-2}(k); \\ X_0^{v-1}(k + N/4) = X_0^{v-2}(k) - W_{N/2}^k X_1^{v-2}(k); \\ k = 0, 1, \dots, N/4 - 1; \end{cases} \quad (11.21)$$

$$\begin{cases} X_1^{\nu-1}(k) = X_2^{\nu-2}(k) + W_{N/2}^k X_3^{\nu-2}(k); \\ X_1^{\nu-1}(k+N/4) = X_2^{\nu-2}(k) - W_{N/2}^k X_3^{\nu-2}(k); \\ k = 0, 1, \dots, N/4 - 1, \end{cases} \quad (11.22)$$

где $X_0^{v-2}(k)$ и $X_1^{v-2}(k)$ — $N/4$ -точечные ДПФ $N/4$ -точечных последовательностей четных (11.17) и нечетных (11.18) отсчетов, а $X_2^{v-2}(k)$ и $X_3^{v-2}(k)$ — $N/4$ -точечные ДПФ $N/4$ -точечных последовательностей четных (11.19) и нечетных (11.20) отсчетов.

На следующем, v -м, этапе вычисляется N -точечное ДПФ $X_0^v(k)$ по формуле (11.16).

Распространим отмеченную закономерность на v -этапный алгоритм БПФ.

Начальные условия v -этапного алгоритма БПФ формируются в результате v -кратного разбиения исходной последовательности до тех пор, пока не будет получено $N/2$ групп 2-точечных последовательностей, каждая из которых содержит один четный и один нечетный отсчет (см. рис. 11.1).

Полученную последовательность называют *прореженной*, и отсюда название алгоритма БПФ — с прореживанием по времени.

На каждом этапе (кроме первого) ДПФ вычисляется через ДПФ *вдвое меньшей размерности* (см. рис. 11.2) по формуле, подобной (11.6):

$$\begin{cases} X_m^i(k) = X_{2m}^{i-1}(k) + W_L^k X_{2m+1}^{i-1}(k); \\ X_m^i(k + L/2) = X_{2m}^{i-1}(k) - W_L^k X_{2m+1}^{i-1}(k); \\ m = 0, 1, \dots, (M-1); \\ k = 0, 1, \dots, L/2-1, \end{cases} \quad (11.23)$$

где:

- $i = 1, 2, \dots, v$ — номер этапа БПФ;
- M — количество L -точечных ДПФ на i -м этапе:

$$M = 2^{v-i}; \quad (11.24)$$

- L — размерность ДПФ на i -м этапе:

$$L = 2^i; \quad (11.25)$$

- m — номера L -точечных ДПФ на i -м этапе;
- $2m$ и $(2m+1)$ — номера $L/2$ -точечных ДПФ на $(i-1)$ -м этапе.

На *последнем* этапе, подставляя в (11.23) $i = v$, получим значения $L = 2^v = N$, $M = 1$, $m = 0$ и формулу (11.16), где отсчеты N -точечного ДПФ следуют в *естественном порядке*:

$$X_0^v(k) = X(k), \quad k = 0, 1, \dots, (N-1).$$

Легко убедиться в том, что, подставляя $i = v-1$, получим значения $L = 2^{v-1} = N/2$, $M = 2$, $m = 0, 1$ и формулы (11.21) и (11.22).

Первый этап, как в любом циклическом алгоритме, — особенный: перед его выполнением переменным присваиваются начальные значения. В алгоритме БПФ им соответствуют *начальные условия* — прореженная последовательность (см. рис. 1.2).

Подставляя в (11.23) $i=1$, получим $L=2$, $k=0$, $M=2^{v-1}=N/2$ и $m=0, 1, \dots, (N/2-1)$ — $N/2$ 2-точечных ДПФ, вычисляемых по $N/2$ группам 2-точечных последовательностей по формулам:

$$\begin{cases} X_m^1(0) = X_{2m}^0(0) + W_2^0 X_{2m+1}^0(0); \\ X_m^1(1) = X_{2m}^0(0) - W_2^0 X_{2m+1}^0(0). \end{cases}$$

Верхний индекс $i=0$ соответствует *начальным условиям*: перед началом первого этапа этим переменным присваиваются значения *четного и нечетного* отсчетов *прореженной* последовательности с условными обозначениями \tilde{x}_{2m} и \tilde{x}_{2m+1} :

$$\begin{cases} X_{2m}^0(0) = \tilde{x}_{2m}; \\ X_{2m+1}^0(0) = \tilde{x}_{2m+1}. \end{cases}$$

Базовой операцией алгоритма БПФ является одновременное вычисление двух отсчетов ДПФ по верхней и нижней формулам (11.23) при *фиксированных* значениях m и k . Эту операцию принято изображать в виде направленного графа¹ (рис. 11.3). Узел обозначает операцию сложения/вычитания, верхний выход соответствует сумме, нижний — разности, а стрелка обозначает операцию умножения на поворачивающий множитель, стоящий над ней.

По ассоциации с изображением графа эту операцию назвали "*бабочкой*".

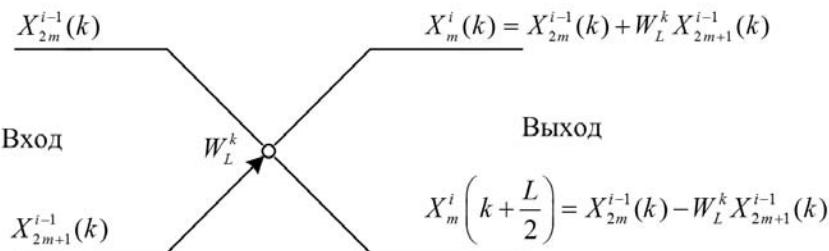


Рис. 11.3. Направленный график базовой операции "бабочка" в алгоритме БПФ с прореживанием по времени

Количество "бабочек" на любом этапе будет одинаковым. Согласно (11.23), для вычисления ДПФ на i -м этапе при фиксированном значении m и $k=0, 1, \dots, L/2$ требуется $L/2$ "бабочек", а для всех значений $m=0, 1, \dots, (M-1)$, — $ML/2$ "бабочек". Подставляя значения L (11.25) и M (11.24), получим количество "бабочек" на любом i -м этапе

$$M \frac{L}{2} = 2^{v-i} \frac{2^i}{2} = \frac{N}{2}. \quad (11.26)$$

¹ Который также называют сигнальным потоковым графиком [34].

Проиллюстрируем алгоритм БПФ на примере вычисления ДПФ 8-точечной последовательности — $N^v = N^3$. В трехэтапном алгоритме БПФ (11.23) имеем:

- номера этапов $i = 1, 2, 3$;
- количество L -точечных ДПФ на i -х этапах:

$$M = 2^{v-i} \Rightarrow M = 4, 2, 1;$$

- размерности ДПФ на i -х этапах:

$$L = 2^i \Rightarrow L = 2, 4, 8;$$

- номера L -точечных ДПФ на i -х этапах:

$$i = 1 \Rightarrow m = 0, 1, 2, 3;$$

$$i = 2 \Rightarrow m = 0, 1;$$

$$i = 3 \Rightarrow m = 0;$$

- количество "бабочек" (11.26) на любом этапе равно $N/2 = 4$.

На рис. 11.4 представлено формирование прореженной последовательности с трехкратным разбиением на группы четных и нечетных отсчетов, а на рис. 11.5 изображен направленный граф трехэтапного алгоритма БПФ.

Кратность разбиения	Алгоритм разбиения 8-точечной последовательности	Число групп чет/неч	Размерность чет и неч
	x(0) x(1) x(2) x(3) x(4) x(5) x(6) x(7)		
1	x(0) x(2) x(4) x(6) x(1) x(3) x(5) x(7)	1	4
2	x(0) x(4) x(2) x(6) x(1) x(5) x(3) x(7)	2	2
3	x(0) x(4) x(2) x(6) x(1) x(5) x(3) x(7)	4	1

4 группы 2-точечных последовательностей
(прореженная последовательность)

Рис. 11.4. Формирование прореженной 8-точечной последовательности

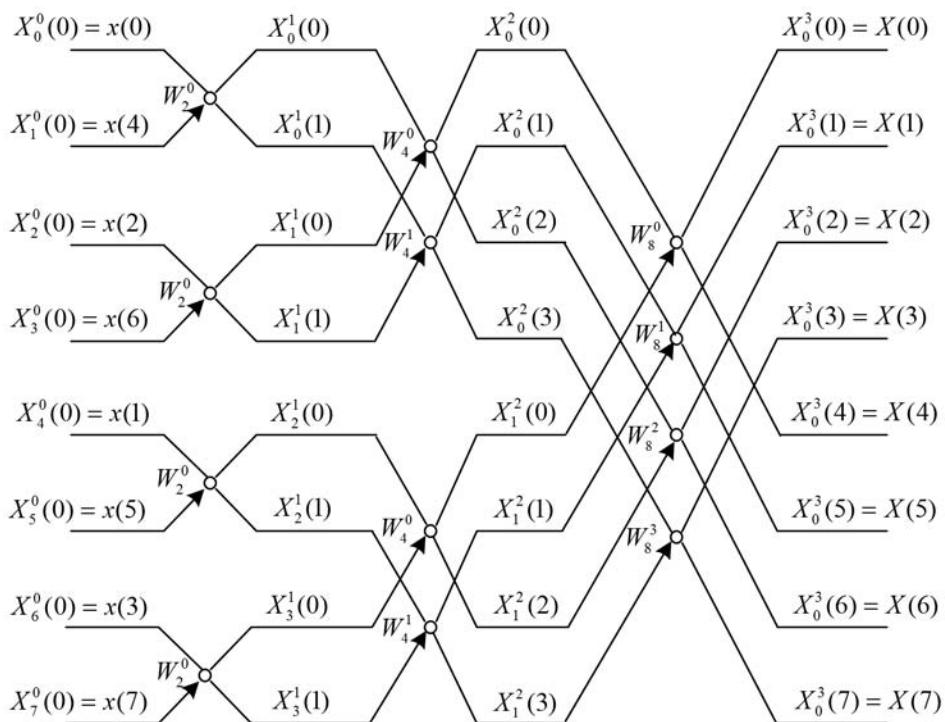


Рис. 11.5. Направленный график алгоритма БПФ с прореживанием по времени

11.1.1. Формирование прореженной последовательности

Формирование прореженной последовательности — v -кратное разбиение исходной последовательности на группы четных и нечетных отсчетов — рассмотрим на примере 8-точечной последовательности (см. рис. 11.4).

В табл. 11.1 представлены исходная и прореженная последовательности с двоичными номерами отсчетов, откуда очевиден *алгоритм формирования прореженной последовательности*: отсчеты исходной последовательности расставляются в *бит-реверсивном* (зеркальном) порядке их двоичных номеров.

Таблица 11.1. Формирование прореженной 8-точечной последовательности

Исходная последовательность		Последовательность в бит-реверсивном порядке двоичных номеров	
отсчет	двоичный номер	двоичный номер	отсчет
$x(0)$	000	000	$x(0)$
$x(1)$	001	100	$x(4)$
$x(2)$	010	010	$x(2)$

Таблица 11.1 (окончание)

Исходная последовательность		Последовательность в бит-реверсивном порядке двоичных номеров	
отсчет	двоичный номер	двоичный номер	отсчет
$x(3)$	011	110	$x(6)$
$x(4)$	100	001	$x(1)$
$x(5)$	101	101	$x(5)$
$x(6)$	110	011	$x(3)$
$x(7)$	111	111	$x(7)$

11.1.2. Обратное быстрое преобразование Фурье

Под обратным быстрым преобразованием Фурье (ОБПФ — Inverse Fast Fourier Transform, IFFT) понимают быстрое вычисление ОДПФ (10.24):

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Покажем, как это реализуется с помощью алгоритма БПФ.

Выполним операцию комплексного сопряжения правой и левой частей равенства (символ $*$) и умножим обе части на N :

$$Nx^*(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk}.$$

Правая часть равенства представляет собой N -точечное ДПФ последовательности $X^*(k)$, для вычисления которого применяют *алгоритм БПФ* с прореживанием по времени. После этого, вновь выполнив операцию комплексного сопряжения и разделив обе части равенства на N , получаем искомую последовательность:

$$x(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk} \right]^*, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

В MATLAB предусмотрены стандартные функции вычисления ДПФ и ОДПФ с помощью БПФ и ОБПФ с автоматическим формированием прореженной последовательности [42], а в современных цифровых процессорах обработки сигналов для этого разработаны готовые подпрограммы.

11.1.3. Оценка вычислительной сложности алгоритма быстрого преобразования Фурье

Оценим выигрыш в количестве арифметических операций при вычислении N -точечного ДПФ с помощью алгоритма БПФ (11.23).

Согласно (11.3), количество этапов алгоритма равно $v = \log_2 N$. Количество "бабочек" на любом этапе равно $N/2$ (11.26). Одна операция "бабочка" включает в себя две операции сложения и одну умножения, всего три арифметические операции. В целом потребуется $(3/2)N \log_2 N$ арифметических операций с комплексными числами.

Порядок вычислительной сложности алгоритма БПФ равен

$$O(N \log_2 N).$$

Представление о получаемом выигрыше в объеме вычислений, по сравнению с алгоритмом ДПФ, с ростом длины исходной последовательности N можно получить из табл. 11.2.

Таблица 11.2. Оценка выигрыша в количестве операций в алгоритме БПФ

N	Порядок вычислительной сложности		Оценка выигрыша $N/\log_2 N$
	прямое вычисление ДПФ $O(N^2)$	вычисление с помощью БПФ $O(N \log_2 N)$	
8	64	24	2,7
16	256	64	4,0
32	1024	160	6,4
64	4096	384	10,7
128	16 384	896	18,3
256	65 536	1024	32,0
512	262 144	4096	56,9
1024	1048 576	10 240	102,4

Среди алгоритмов БПФ алгоритм Кули—Тьюки — самый простой, тем не менее его вычислительная эффективность достаточно высока, благодаря чему он получил широкое распространение на практике, в частности, при реализации на ЦПОС, быстродействие которых постоянно возрастает.

11.2. Алгоритм быстрого преобразования с прореживанием по частоте

Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте является *дуальным* по отношению к алгоритму БПФ с прореживанием по времени.

В соответствии с принципом дуальности, меняя местами вход с выходом и направления стрелок в направленном графе базовой операции "бабочка" на рис. 11.3, получим направленный граф базовой операции "бабочка" для алгоритма БПФ с прореживанием по частоте (рис. 11.6).

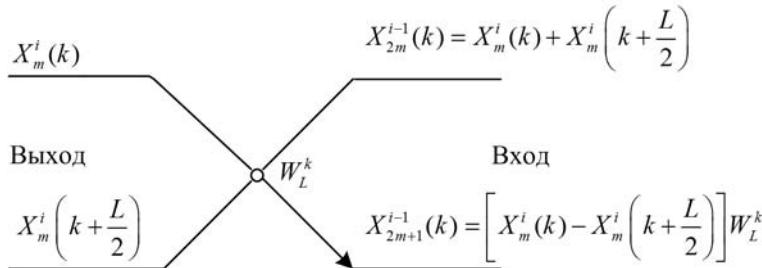


Рис. 11.6. Направленный граф базовой операции "бабочка" в алгоритме БПФ с прореживанием по частоте

На каждом этапе (кроме первого) ДПФ вычисляется через ДПФ *вдвое большей размерности*:

$$\begin{cases} X_{2m}^{i-1}(k) = X_m^i(k) + X_m^i(k + L/2); \\ X_{2m+1}^{i-1}(k) = [X_m^i(k) - X_m^i(k + L/2)]W_L^k; \\ m = 0, 1, \dots, (M-1); \\ k = 0, 1, \dots, L/2 - 1, \end{cases} \quad (11.27)$$

где переменные M и L определены в (10.23), а номера этапов i , в соответствии с принципом дуальности, следуют в *обратном* порядке $i = v, v-1, \dots, 1$: *первому* этапу соответствует $i = v$, *второму* $i = v-1$, и т. д., *последнему* — $i=1$ (см. рис. 11.2 с изменением направления стрелок).

Количество "бабочек" на любом i -м этапе остается неизменным, равным $N/2$ (11.26).

Подставляя $i = v$ в (11.25) и (11.24), получим $L = 2^v = N$, $M = 2^{v-v} = 1$, $m = 0$, и запишем формулу (11.27) для *первого* этапа:

$$\begin{cases} X_0^{v-1}(k) = X_0^v(k) + X_0^v(k + N/2); \\ X_1^{v-1}(k) = [X_0^v(k) - X_0^v(k + N/2)]W_N^k; \\ k = 0, 1, \dots, N/2 - 1. \end{cases}$$

В правой части, согласно принятым обозначениям, $X_0^v(k)$ и $X_0^v(k + N/2)$ — отсчеты N -точечного ДПФ, которые неизвестны и будут определены по завершении алгоритма (на последнем этапе при $i=1$). Поэтому им соответствуют *начальные условия* алгоритма — *исходная последовательность* $x(n)$ в естественном порядке следования (см. рис. 11.1 с изменением направления стрелок):

$$\begin{cases} X_0^v(k) = x(k); \\ X_0^v(k + N/2) = x(k + N/2); \\ k = 0, 1, \dots, (N-1). \end{cases}$$

Таким образом, на *первом* этапе вычисляются два $N/2$ -точечных ДПФ $X_0^{v-1}(k)$ и $X_1^{v-1}(k)$ двух $N/2$ -точечных последовательностей, полученных при разделении исходной последовательности $x(n)$ пополам.

Подставляя в (11.25) и (11.24) $i=1$, получим $L=2$, $M=2^{v-1}=N/2$. Запишем формулу (11.27) для *последнего* этапа алгоритма:

$$\begin{cases} X_{2m}^0(0) = X_m^1(0) + X_m^1(1); \\ X_{2m+1}^0(0) = [X_m^1(0) - X_m^1(1)]W_2^0; \\ m = 0, 1, \dots, (N/2-1). \end{cases}$$

Верхний индекс $i=0$ в левой части равенств соответствует искомому N -точечному ДПФ, отсчеты которого, в соответствии с принципом дуальности, соответствуют *прореженной* последовательности в частотной области, для 2-точечной пары которых примем условные обозначения \tilde{X}_{2m} и \tilde{X}_{2m+1} :

$$\begin{cases} \tilde{X}_{2m} = X_{2m}^0(0); \\ \tilde{X}_{2m+1} = X_{2m+1}^0(0); \\ m = 0, 1, \dots, (N/2-1). \end{cases}$$

На рис. 11.7 представлен направленный граф алгоритма БПФ с прореживанием по частоте для 8-точечного ДПФ, дуальный по отношению к графу алгоритма БПФ с прореживанием по времени (см. рис. 11.5).

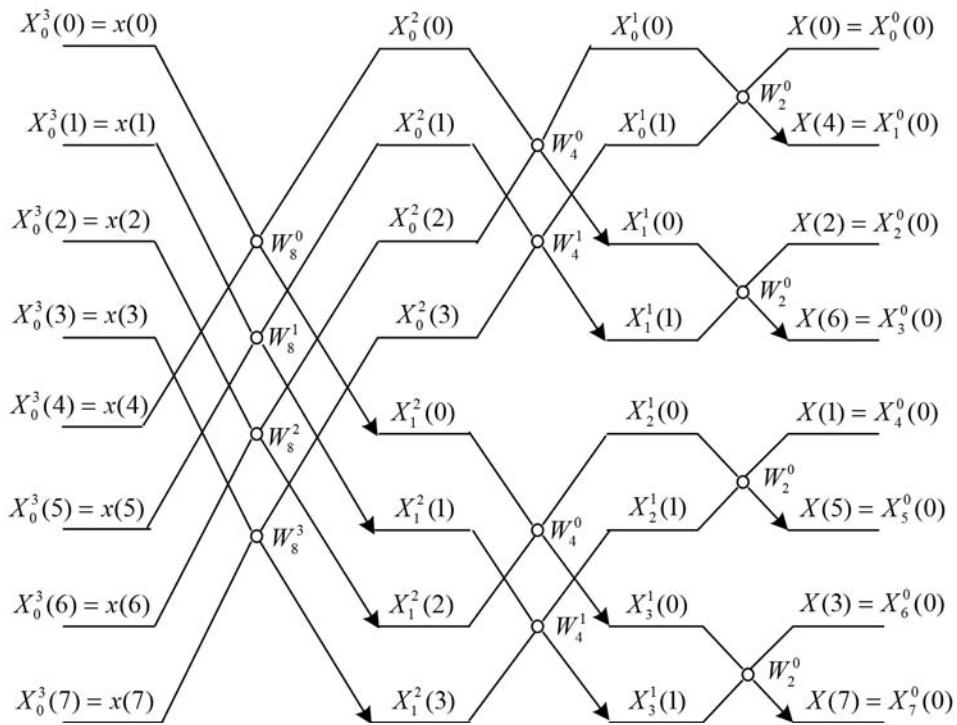
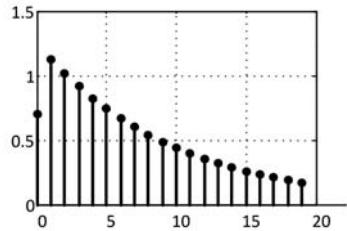


Рис. 11.7. Направленный граф алгоритма БПФ с прореживанием по частоте

ГЛАВА 12



Случайные процессы

Анализ и обработка аналоговых и дискретных сигналов зависят от значений сигнала в любой фиксированный момент времени, а именно:

- если значения сигнала в любой фиксированный момент времени заранее *известны* или могут быть определены точно по заданной математической модели, то значения сигнала называют *детерминированными величинами*, а сигнал — *детерминированным сигналом*.

Детерминированный *аналоговый* сигнал описывается функцией времени $x(t)$, а детерминированный *дискретный* — последовательностью $x(nT)$ или $x(n)$, при этом термин "детерминированный" принято опускать, если соответствующий сигнал подразумевается по умолчанию;

- если значения сигнала в любой фиксированный момент времени заранее *неизвестны* и могут быть предсказаны лишь с некоторой вероятностью, то значения сигнала называют *случайными величинами*, а их *изменение во времени* — *случайным (стохастическим) процессом*.

12.1. Случайный процесс

Случайный процесс $\mathbf{x}(t)$ описывают совокупностью функций времени $x_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, K$ (теоретически $K \rightarrow \infty$):

$$\mathbf{x}(t) \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ \vdots \\ x_K(t) \end{bmatrix} \quad (12.1)$$

с общими законами распределения их мгновенных значений — *случайных величин*.

Закон распределения устанавливает связь между значениями случайной величины и вероятностью их появления. Для *непрерывных* случайных величин законы распределения характеризуют *плотностью вероятности*.

В любой фиксированный момент времени t значение любой функции $x_k(t)$ является непрерывной случайной величиной x , и закон распределения задается одномерной плотностью вероятности $p(x, t)$.

В любые фиксированные моменты времени t_1 и t_2 значения любой функции $x_k(t_1)$ и $x_k(t_2)$ являются непрерывными случайными величинами x_1 и x_2 , и закон распределения задается двумерной плотностью вероятности $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$.

На любом конечном множестве фиксированных моментов времени t_1, t_2, \dots, t_v значения любой функции $x_k(t_1), x_k(t_2), \dots, x_k(t_v)$ являются непрерывными случайными величинами x_1, x_2, \dots, x_v , и закон распределения задается v -мерной плотностью вероятности $p(x_1, x_2, \dots, x_v, t_1, t_2, \dots, t_v)$.

Законы распределения случайного процесса $\mathbf{x}(t)$ включают в себя совокупность плотностей вероятности всех размерностей v , но, как правило, ограничиваются одномерной и двумерной плотностями вероятности.

Реализацией случайного процесса $\mathbf{x}(t)$ называют одну из функций $x_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, K$, которая стала известной, — *детерминированной* функцией.

Ансамблем реализаций называют совокупность детерминированных функций $x_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, K$.

Случайный процесс $\mathbf{x}(t)$ (12.1) можно определить двояко:

- *до наблюдения* — как совокупность функций времени, *неизвестные* значения которых в любом временном сечении (по вертикали) являются случайными величинами с общими законами распределения;
- *после наблюдения* — как ансамбль реализаций, *известные* значения которых в любом временном сечении подчиняются общим законам распределения.

Введенные понятия распространяются на область дискретного времени, далее по умолчанию *нормированного*.

Случайный процесс $\mathbf{x}(n)$ описывают совокупностью последовательностей $x_k(n)$, $k = 1, 2, \dots, K$ (теоретически $K \rightarrow \infty$):

$$\mathbf{x}(n) \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(n) \\ \vdots \\ x_k(n) \\ \vdots \\ x_K(n) \end{bmatrix} \quad (12.2)$$

с общими законами распределения их *отсчетов* — *случайных величин*.

В любой фиксированный момент времени n отсчет любой последовательности $x_k(n)$ является непрерывной случайной величиной¹ x , и закон распределения задается одномерной плотностью вероятности $p(x, n)$.

¹ В квантованных последовательностях, которые здесь не рассматриваются, эта величина может принимать фиксированное множество значений.

В любые фиксированные моменты времени n_1 и n_2 отсчеты любой последовательности $x_k(n_1)$ и $x_k(n_2)$ являются непрерывными случайными величинами x_1 и x_2 , и закон распределения задается двумерной плотностью вероятности $p[x_1, x_2, n_1, n_2]$. Реализацией случайного процесса $\mathbf{x}(n)$ называют одну из последовательностей $x_k(n)$, $k = 1, 2, \dots, K$, которая стала известной, — детерминированной последовательностью.

Ансамблем реализаций называют совокупность детерминированных последовательностей $x_k(n)$, $k = 1, 2, \dots, K$.

Подобно $\mathbf{x}(t)$ (12.1), случайный процесс $\mathbf{x}(n)$ (12.2) можно определить двояко:

- до наблюдения — как совокупность последовательностей, неизвестные отсчеты которых в любом n -м сечении являются случайными величинами с общими законами распределения;
- после наблюдения — как ансамбль реализаций, известные отсчеты которых в любом n -м сечении подчиняются общим законам распределения.

На рис. 12.1, а представлен пример ансамбля реализаций случайного процесса $\mathbf{x}(t)$ типа "нормальный белый шум" длительности T_s , а на рис. 12.1, б — его эквивалент в области дискретного времени $\mathbf{x}(n)$ длины N (длительности $T_s = NT$).

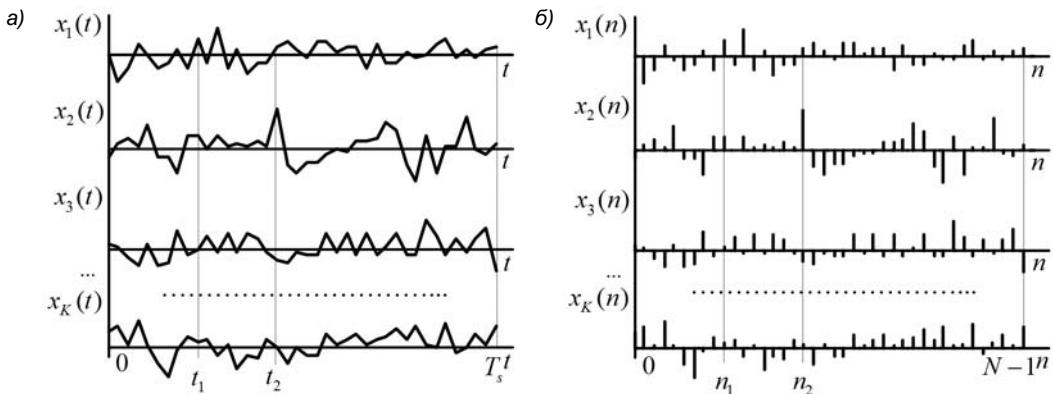


Рис. 12.1. Ансамбль реализаций нормального белого шума в области непрерывного (а) и дискретного (б) времени

12.2. Статистические характеристики случайного процесса

Статистическим усреднением называют усреднение случайных величин по ансамблю реализаций в фиксированный момент (моменты) времени.

Статистические характеристики случайного процесса $\mathbf{x}(n)$ получают путем статистического усреднения случайных величин в n -м сечении (n -х сечениях).

При известных плотностях вероятностей их можно определить аналитически, где статистическому усреднению соответствует интегрирование.

Одномерная плотность вероятности $p(x, n)$ случайного процесса $\mathbf{x}(n)$, где x — непрерывная случайная величина (отсчет) в момент времени n , позволяет определить следующие *статистические характеристики*:

- *математическое ожидание* $\mu_x(n)$ — среднее значение отсчетов в n -м сечении случайного процесса (постоянная составляющая в n -м сечении):

$$\mu_x(n) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, n) dx; \quad (12.3)$$

- *дисперсию* $\sigma_x^2(n)$ — среднее значение квадрата отклонения от среднего $\mu_x(n)$ отсчетов в n -м сечении случайного процесса (средняя мощность флюктуаций относительно среднего значения в n -м сечении):

$$\sigma_x^2(n) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mu_x(n)]^2 p(x, n) dx. \quad (12.4)$$

Среднеквадратическое (стандартное) отклонение (СКО) $\sigma_x(n)$ отображает среднюю амплитуду флюктуаций в n -м сечении случайного процесса.

Двумерная плотность вероятности $p(x_1, x_2, n_1, n_2)$ случайного процесса $\mathbf{x}(n)$, где x_1, x_2 — непрерывные случайные величины (отсчеты) в моменты времени n_1 и n_2 (см. рис. 12.1, б), позволяет определить следующие *статистические характеристики*:

- *автокорреляционную функцию*¹ (АКФ) $R_x(n_1, n_2)$ — среднее значение произведения $x_1 x_2$ в моменты времени n_1 и n_2 , позволяющее оценить зависимость между отсчетами в n_1 -м и n_2 -м сечениях случайного процесса:

$$R_x(n_1, n_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2; \quad (12.5)$$

- *автоковариационную функцию* $r_x(n_1, n_2)$ — среднее значение произведения $[x_1 - \mu_x(n_1)][x_2 - \mu_x(n_2)]$ в моменты времени n_1 и n_2 , позволяющее оценить зависимость между отклонениями отсчетов от среднего в n_1 -м и n_2 -м сечениях случайного процесса:

$$r_x(n_1, n_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \mu_x(n_1)][x_2 - \mu_x(n_2)] p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2. \quad (12.6)$$

¹ Во многих источниках эту характеристику называют корреляционной функцией, а следующую — ковариационной функцией.

При теоретически бесконечном ансамбле реализаций $K \rightarrow \infty$ статистические характеристики (12.3)–(12.6) будут тождественны характеристикам, полученным путем непосредственного усреднения по ансамблю реализаций (верхняя черта):

$$\mu_x(n) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_k(n) = \overline{x_k(n)}; \quad (12.7)$$

$$\sigma_x^2(n) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K [x_k(n) - \mu_x(n)]^2 = \overline{[x_k(n) - \mu_x(n)]^2}; \quad (12.8)$$

$$R_x(n_1, n_2) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_k(n_1)x_k(n_2) = \overline{x_k(n_1)x_k(n_2)}; \quad (12.9)$$

$$\begin{aligned} r_x(n_1, n_2) &= \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^K [x_k(n_1) - \mu_x(n_1)][x_k(n_2) - \mu_x(n_2)] = \\ &= \overline{[x_k(n_1) - \mu_x(n_1)][x_k(n_2) - \mu_x(n_2)]}. \end{aligned} \quad (12.10)$$

При конечном значении K будем иметь их оценки.

12.3. Стационарный случайный процесс

Случайный процесс $x(n)$ называют *стационарным в широком смысле* (стационарным по Хинчину), если его одномерная и двумерная плотности вероятности не зависят от временного сечения случайного процесса (времени n), а двумерная — зависит только от *сдвига по времени* $m = (n_1 - n_2)$ [32].

Случайный процесс $x(n)$ называют *стационарным в узком смысле* (строго стационарным), если сказанное справедливо для его v -мерной плотности вероятности любой размерности v : она не зависит от временных сечений случайного процесса, а зависит только от их одновременного и одинакового сдвига по времени.

Случайный процесс, стационарный в узком смысле, всегда стационарен в широком смысле, но не наоборот.

По умолчанию под *стационарностью* случайного процесса будем подразумевать его стационарность в широком смысле.

Следствием *стационарности* случайного процесса $x(n)$ будет *независимость от времени* n его статистических характеристик:

□ математического ожидания (12.7):

$$\mu_x = \overline{x_k(n)}; \quad (12.11)$$

□ дисперсии (12.8):

$$\sigma_x^2 = \overline{[x_k(n) - \mu_x]^2};$$

- *автокорреляционной функции* (12.9):

$$R_x(m) = \overline{x_k(n)x_k(n+m)}; \quad (12.12)$$

- *автоковариационной функции* (12.10):

$$r_x(m) = \overline{[x(n) - \mu_x][x(n+m) - \mu_x]}.$$

Это означает, что статистические характеристики *стационарного* случайного процесса дискретного сигнала обладают свойством *инвариантности*¹ во времени.

Статистические характеристики *нестационарного* случайного процесса будут зависеть от времени n (не обладают свойством инвариантности во времени).

12.4. Эргодический случайный процесс

В теории ЦОС понятие ансамбля реализаций широко используется как удобная математическая концепция, позволяющая определять статистические характеристики случайного процесса. Однако на практике, как правило, доступна для наблюдения лишь *одна реализация* случайного процесса.

Стационарный случайный процесс называется *эргодическим*, если при определении его статистических характеристик *усреднение по ансамблю реализаций* (теоретически $K \rightarrow \infty$) эквивалентно *усреднению по времени* одной реализации, теоретически бесконечной длины ($N \rightarrow \infty$).

Эргодический случайный процесс описывают неиндексированной последовательностью $x(n)$, отсчеты которой являются *случайными величинами*.

Статистические характеристики эргодического случайного процесса $x(n)$ определяют путем *усреднения по времени* его отсчетов. При конечной длине N говорят об их *оценках*.

Определим статистические характеристики эргодического случайного процесса $x(n)$ и приведем их *оценки*:

- *математическое ожидание* μ_x — среднее значение отсчетов (постоянная составляющая):

$$\mu_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n)$$

и его *оценка*:

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n); \quad (12.13)$$

¹ Неизменности.

- **дисперсия** σ_x^2 — среднее значение квадрата отклонений отсчетов от среднего μ_x (средняя мощность флюктуаций относительно среднего значения):

$$\sigma_x^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N [x(n) - \mu_x]^2$$

и ее оценка:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - \hat{\mu}_x]^2. \quad (12.14)$$

Среднеквадратическое (стандартное) отклонение (*СКО*) σ_x отображает среднюю амплитуду флюктуаций эргодического случайного процесса;

- **средняя мощность** $P_{x \text{ cp}}$ — среднее значение квадратов отсчетов:

$$P_{x \text{ cp}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^2(n) \quad (12.15)$$

и ее оценка:

$$\hat{P}_{x \text{ cp}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n); \quad (12.16)$$

- **автокорреляционная функция** (АКФ) $R_x(m)$ — среднее значение произведения $x(n)x(n+m)$, позволяющее оценить зависимость между отсчетами при различных сдвигах по времени m :

$$R_x(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n)x(n+m), \quad -\infty < m < \infty,$$

и ее оценка:

$$\hat{R}_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n+m), \quad -(N-1) \leq m \leq (N-1). \quad (12.17)$$

При вычислении по формуле (12.17) неизвестные $(N-1)$ отсчетов в начале и в конце эргодического случайного процесса $x(n) = x_n$ полагаются *равными нулю*:

$$\underbrace{x_{-(N-1)} \dots x_{-1}}_{N-1} \underbrace{x_0 \ x_1 \dots x_{N-1}}_N \underbrace{x_N \dots x_{2N-2}}_{N-1}; \\ \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{N-1} \underbrace{x_0 \ x_1 \dots x_{N-1}}_N \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{N-1},$$

что эквивалентно вычислению оценки АКФ по формуле:

$$\hat{R}_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+m), \quad -(N-1) \leq m \leq (N-1); \quad (12.18)$$

- *автоковариационная функция* $r_x(m)$ — среднее значение произведения $[x(n) - \mu_x][x(n+m) - \mu_x]$, позволяющее оценить зависимость между отклонениями отсчетов от среднего μ_x при различных сдвигах по времени m :

$$r_x(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N [x(n) - \mu_x][x(n+m) - \mu_x], \quad -\infty < m < \infty,$$

и ее оценка:

$$\hat{r}_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} [x(n) - \hat{\mu}_x][x(n+m) - \hat{\mu}_x], \quad -(N-1) \leq m \leq (N-1). \quad (12.19)$$

12.4.1. Характеристики детерминированных последовательностей

Характеристики *детерминированной последовательности* $x(n)$ длины N подобны оценкам характеристик эргодического случайного процесса (12.13)–(12.19), а именно:

- среднее значение отсчетов последовательности (постоянная составляющая):

$$\mu_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n);$$

- средний квадрат отклонения от среднего μ_x отсчетов последовательности:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - \mu_x]^2;$$

- средняя мощность последовательности:

$$P_{\text{хр}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n);$$

- *автокорреляционная функция* (АКФ), позволяющая оценить зависимость между отсчетами последовательности при различных сдвигах по времени m :

$$R_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+m), \quad -(N-1) \leq m \leq (N-1);$$

- *автоковариационная функция*, позволяющая оценить зависимость между отклонениями отсчетов последовательности от среднего значения μ_x при различных сдвигах по времени m :

$$r_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} [x(n) - \mu_x][x(n+m) - \mu_x], \quad -(N-1) \leq m \leq (N-1).$$

Свойства автокорреляционной $R_x(m)$ и автоковариационной $r_x(m)$ функций вещественных последовательностей $x(n)$ сохраняются для соответствующих *оценок*

вещественного эргодического случайного процесса $\hat{R}_x(m)$ (12.18) и $\hat{r}_x(m)$ (12.19), а именно:

- по определению, функции $R_x(m)$ и $r_x(m)$ — четные, центрированные относительно $m = 0$:

$$R_x(m) = R_x(-m);$$

$$r_x(m) = r_x(-m);$$

- длина L функций $R_x(m)$ и $r_x(m)$ равна

$$L = 2N - 1;$$

- значения функций $R_x(m)$ и $r_x(m)$ в точке $m = 0$ равны:

$$R_x(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = P_{x \text{ cp}} = \sigma_x^2 + \mu_x^2; \quad (12.20)$$

$$r_x(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - \mu_x]^2 = \sigma_x^2;$$

- значения функций $R_x(m)$ и $r_x(m)$ максимальны в точке $m = 0$.

12.4.2. Смешенные и несмешенные оценки

Смещением оценки статистической характеристики эргодического случайного процесса длины N называют математическое ожидание разности между истинной характеристикой и ее оценкой, и если оно равно нулю, то оценку называют *несмешенной*.

Теоретический анализ несмешенности/смешенности для различных оценок статистических характеристик весьма непрост и выходит за рамки данной книги, поэтому приведем лишь известные результаты.

Оценка математического ожидания $\hat{\mu}_x$ (12.13) является *несмешенной*.

Оценка дисперсии $\hat{\sigma}^2$ (12.14) является *смешенной*, а *несмешенная* оценка равна

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - \hat{\mu}_x]^2. \quad (12.21)$$

Оценки автокорреляционной $\hat{R}_x(m)$ (12.18) и авт covариационной, $\hat{r}_x(m)$ (12.19) функций являются *смешенными*, а *несмешенные* оценки имеют вид:

$$\hat{R}_x(m) = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+m); \quad (12.22)$$

$$\hat{r}_x(m) = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} [x(n) - \hat{\mu}_x][x(n+m) - \hat{\mu}_x].$$

12.5. Спектральная плотность мощности

Рассмотрим описание *стационарного* случайного процесса $\mathbf{x}(n)$ (12.2) в частотной области. Каждой его реализации $x_k(n)$, в общем случае заданной на интервале $-\infty < n < \infty$, соответствует своя спектральная плотность $X_k(e^{j\omega T})$ (9.2):

$$X_k(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_k(n)e^{-j\omega Tn}, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Выразим комплексную функцию $X_k(e^{j\omega T})$ через ее модуль и аргумент:

$$X_k(e^{j\omega T}) = |X_k(e^{j\omega T})| e^{j\arg\{X_k(e^{j\omega T})\}}$$

и определим усредненную спектральную плотность (верхняя черта)

$$\overline{X(e^{j\omega T})} = \overline{X_k(e^{j\omega T})} = \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_k(n)e^{-j\omega Tn}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{x_k(n)} e^{-j\omega Tn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_x e^{-j\omega Tn}$$

и усредненный модуль спектральной плотности

$$\left| \overline{X(e^{j\omega T})} \right| = \left| \overline{X_k(e^{j\omega T})} \right| = \left| \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_k(n)e^{-j\omega Tn}} \right| = \left| \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_k(n)} \right|.$$

Усредненная спектральная плотность $\overline{X(e^{j\omega T})}$ представляет собой детерминированную функцию — спектральную плотность среднего значения μ_x случайного процесса, и не содержит никакой информации о флуктуациях реализаций $x_k(n)$ относительно среднего, определяющих *случайные составляющие* функций $X_k(e^{j\omega T})$, и необходимо получить характеристику для их усредненной оценки.

В усредненном модуле спектральной плотности $\left| \overline{X(e^{j\omega T})} \right|$ исключено влияние фазовых составляющих $\arg\{X_k(e^{j\omega T})\}$. Оказывается, что именно они определяют случайный характер спектральных плотностей $X_k(e^{j\omega T})$, в то время как квадрат усредненного модуля $\left| \overline{X(e^{j\omega T})} \right|^2$ стремится к некоторому пределу — *функции частоты*, которую и выбрали в качестве статистической характеристики случайного процесса в частотной области и назвали спектральной плотностью мощности (СПМ)¹.

Покажем преемственность определения СПМ для стационарных случайных процессов $\mathbf{x}(t)$ (12.1) и $\mathbf{x}(n)$ (12.2).

Спектральная плотность мощности $S(\omega)$ стационарного случайного процесса $\mathbf{x}(t)$ определяется как предел усредненного квадрата модуля спектральной плотности $X_a(j\omega)$ [28, 38]:

¹ Power Spectral Density (PSD).

$$S(\omega) = \lim_{T_s \rightarrow \infty} \frac{\overline{|X_a(j\omega)|^2}}{T_s} = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

где T_s и $R(\tau)$ — соответственно, длительность и АКФ случайного процесса $\mathbf{x}(t)$.

Соотношение

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

известно как *теорема Винера—Хинчина*.

Спектральная плотность мощности $S_x(\omega)$ *стационарного* случайного процесса $\mathbf{x}(n)$ определяется аналогично [32]. При этом его длительность полагается равной $T_s = (2N+1)T$ и учитывается коэффициент пропорциональности T между спектральными плотностями дискретного $X(e^{j\omega T})$ и аналогового $X_a(j\omega)$ сигналов (см. (9.30)):

$$S_x(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T^2 \overline{|X(e^{j\omega T})|^2}}{(2N+1)T} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T}{2N+1} \overline{|X(e^{j\omega T})|^2}. \quad (12.23)$$

Запишем равенство Парсеваля (9.20) для случайного процесса $\mathbf{x}(n)$ на интервале $[-N; N]$:

$$\frac{1}{2N+1} \overline{\sum_{n=-N}^N |x_k(n)|^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{T}{2N+1} \overline{|X(e^{j\omega T})|^2} d\omega.$$

Слева имеем среднюю мощность P случайного процесса $\mathbf{x}(n)$, а справа, под интегралом, — оценку спектральной плотности мощности $\hat{S}_x(\omega)$ на заданном интервале:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \hat{S}_x(\omega) d\omega.$$

Площадь под кривой характеризует среднюю мощность на заданном интервале, а оценка СПМ описывает ее распределение по частоте и поэтому измеряется в ваттах на герц (Вт/Гц) или децибелах на герц (дБ/Гц).

С увеличением длины N значение средней мощности P стремится к некоторому пределу, а оценка СПМ $\hat{S}_x(\omega)$ — к своему пределу $S_x(\omega)$ (12.23). Для того чтобы его найти, определим усредненный квадрат модуля спектральной плотности:

$$\begin{aligned} \overline{|X(e^{j\omega T})|^2} &= \overline{X(e^{j\omega T}) \times X^*(e^{j\omega T})} = \overline{\sum_{m=-N}^N x_k(m) e^{-j\omega T m} \sum_{n=-N}^N x_k(n) e^{j\omega T n}} = \\ &= \sum_{m=-N}^N \overline{x_k(m)} e^{-j\omega T m} \sum_{n=-N}^N \overline{x_k(n)} e^{j\omega T n} = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=-N}^N \overline{x_k(m) x_k(n)} e^{-j\omega T(m-n)}. \end{aligned}$$

Согласно (12.12):

$$\overline{x_k(n)x_k(m)} = R_x(m-n),$$

с учетом чего получим:

$$\overline{|X(e^{j\omega T})|^2} = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=-N}^N R_x(m-n) e^{-j\omega T(m-n)}. \quad (12.24)$$

Используя известное равенство, вывод которого приводится, например в [55]:

$$\sum_{m=-N}^N \sum_{n=-N}^N R_x(m-n) e^{-j\omega T(m-n)} = \sum_{m=-2N}^{2N} (2N+1-|m|) R_x(m) e^{-j\omega Tm},$$

запишем (12.24):

$$\overline{|X(e^{j\omega T})|^2} = \sum_{m=-2N}^{2N} (2N+1-|m|) R_x(m) e^{-j\omega Tm}$$

и СПМ (12.23):

$$S_x(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} T \sum_{m=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|m|}{2N+1}\right) R_x(m) e^{-j\omega Tm}.$$

Поскольку при любом m предельное значение множителя в скобках будет равно единице (второе слагаемое равно нулю), окончательно имеем:

$$S_x(\omega) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(m) e^{-j\omega Tm}.$$

Полученное соотношение представляет собой *теорему Винера—Хинчина* в области дискретного времени.

Для эргодического случайного процесса $x(n)$ СПМ $S_x(\omega)$ определяется подобно (12.23), но без усреднения по ансамблю реализаций:

$$S_x(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T}{2N+1} |X(e^{j\omega T})|^2, \quad (12.25)$$

и *теорема Винера—Хинчина* принимает вид:

$$S_x(\omega) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(m) e^{-j\omega Tm}. \quad (12.26)$$

По определению СПМ $S_x(\omega)$ является *неотрицательной, четной, периодической* функцией частоты с периодом, равным периоду $\omega_d = 2\pi f_d = 2\pi/T$ спектральной плотности $X(e^{j\omega T})$.

В соответствии с теоремой Винера—Хинчина, СПМ $S_x(\omega)$ представляет собой ряд Фурье (3.46), в котором коэффициенты (3.47) равны отсчетам АКФ $R_x(m)$ эргодического случайного процесса, теоретически бесконечной длины:

$$S_x(\omega) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(m) e^{-j\omega mT}; \quad (12.27)$$

$$R_x(m) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} S_x(\omega) e^{j\omega mT} d\omega. \quad (12.28)$$

Четность вещественных СПМ и АКФ позволяет в обеих формулах перейти к нулевому нижнему пределу с добавлением коэффициента 2:

$$S_x(\omega) = 2T \sum_{m=0}^{\infty} R_x(m) \cos(\omega mT); \quad (12.29)$$

$$R_x(m) = \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} S_x(\omega) \cos(\omega mT) d\omega. \quad (12.30)$$

12.6. Обработка случайного процесса линейной дискретной системой

Установим связи между статистическими характеристиками входного $x(n)$ и выходного $y(n)$ эргодических случайных процессов ЛДС.

Запишем соотношение вход/выход в виде формулы свертки (2.11) при ННУ:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) x(n-m) \quad (12.31)$$

и его отображение в частотной области:

$$Y(e^{j\omega T}) = H(e^{j\omega T}) X(e^{j\omega T}), \quad (12.32)$$

где:

- $X(e^{j\omega T})$ и $Y(e^{j\omega T})$ — соответственно, спектральные плотности эргодических случайных процессов $x(n)$ и $y(n)$;
- $H(e^{j\omega T})$ — частотная характеристика ЛДС (5.1) и одновременно, согласно (9.2), спектральная плотность импульсной характеристики $h(n)$ (дeterminированная функция частоты).

На основе (12.25) и (12.32) определим СПМ $S_y(\omega)$ эргодического случайного процесса $y(n)$:

$$S_y(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T}{2N+1} |X(e^{j\omega T}) H(e^{j\omega T})|^2 = |H(e^{j\omega T})|^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T}{2N+1} |X(e^{j\omega T})|^2,$$

откуда, с учетом определения $S_x(\omega)$ (12.25), имеем связь между СПМ выходного и входного эргодических случайных процессов:

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) |H(e^{j\omega T})|^2. \quad (12.33)$$

Детерминированную функцию $|H(e^{j\omega T})|^2$ можно трактовать как СПМ $S_h(\omega)$ импульсной характеристики $h(n)$:

$$S_h(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T}{2N+1} |H(e^{j\omega T})|^2 = |H(e^{j\omega T})|^2,$$

поэтому соотношение (12.33) можно представить в виде:

$$S_y(\omega) = S_h(\omega)S_x(\omega). \quad (12.34)$$

Согласно теореме Винера—Хинчина (12.26), во временной области СПМ $S_y(\omega)$, $S_h(\omega)$ и $S_x(\omega)$ соответствуют АКФ $R_y(m)$, $R_h(m)$ и $R_x(m)$.

Фактически в соотношении (12.34) все СПМ являются функциями аргумента $e^{j\omega T}$, поэтому, подставляя $z = e^{j\omega T}$, можно перейти к соотношению в z -области:

$$S_y(z) = S_h(z)S_x(z),$$

что позволит на основании теоремы о свертке (3.19) установить связь между АКФ выходного и входного эргодических случайных процессов:

$$R_y(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_h(k)R_x(m-k), \quad (12.35)$$

где АКФ $R_h(k)$ называют [9] *системной корреляционной функцией* (СКФ) и с учетом ее четности $R_h(k) = R_h(-k)$ определяют при ННУ для импульсной характеристики:

$$R_h(k) = \sum_{l=0}^{\infty} h(l)h(l+k), \quad 0 \leq k < \infty. \quad (12.36)$$

Математическое ожидание μ_y определим, используя свойство линейности оператора математического ожидания $M\{\cdot\}$ (8.18), с учетом чего для эргодического случайного процесса $y(n)$ (12.31) получим:

$$\mu_y = M \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)M\{x(n-m)\}.$$

Задержка эргодического случайного процесса $x(n)$ не меняет его статистических характеристик, что позволяет установить *связь между математическими ожиданиями выходного и входного эргодических случайных процессов*:

$$\mu_y = \mu_x \sum_{n=0}^{\infty} h(n). \quad (12.37)$$

Определить подобным образом связь между дисперсиями σ_y^2 и σ_x^2 невозможно, т. к. свойства оператора дисперсии $D\{\cdot\}$ (8.20) справедливы лишь для независимых случайных величин, а отсчеты $x(n)$ в общем случае коррелированы.

Среднюю мощность определим на основании (12.20)

$$R_y(0) = P_{y \text{ cp}} = \sigma_y^2 + \mu_y^2,$$

и, согласно (12.35), она будет равна

$$P_{y \text{ cp}} = R_y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_h(k) R_x(k). \quad (12.38)$$

При нулевом среднем $\mu_y = 0$ получим соотношение для дисперсии

$$\sigma_y^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_h(k) R_x(k).$$

12.7. Белый шум

По аналогии с определением белого шума $x(t)$ [28, 38], *белым шумом* $x(n)$ называют стационарный случайный процесс с равномерной СПМ.

По умолчанию будем подразумевать эргодический случайный процесс $x(n)$.

Для значений СПМ $S_x(\omega)$ в этом случае приняты условные обозначения:

- $N_0/2$ — для двусторонней СПМ в области $-\infty < \omega < \infty$;
- N_0 — для односторонней СПМ в области $\omega \geq 0$.

На основании (12.28) определим АКФ белого шума:

$$\begin{aligned} R_x(m) &= N_0/2 \left[\frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{j\omega m T} d\omega \right] = N_0/2 \left[\frac{T}{2\pi} \cdot \frac{e^{j\omega m T}}{jmT} \Big|_{-\pi/T}^{\pi/T} \right] = \\ &= N_0/2 \left[\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{jm\pi} - e^{-jm\pi}}{jm} \right] = N_0/2 \left[\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin(m\pi)}{m} \right]. \end{aligned}$$

Раскрывая неопределенность в точке $m = 0$, получаем:

$$R_x(m) = \begin{cases} N_0/2 \left[\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin(m\pi)}{m} \right], & m = 0; \\ 0, & m \neq 0. \end{cases} \quad (12.39)$$

Отсюда имеем *второе определение белого шума* — это эргодический случайный процесс $x(n)$, отсчеты которого не коррелированы друг с другом.

Компактно АКФ (12.39) представляют в виде взвешенного цифрового единичного импульса:

$$R_x(m) = (N_0/2) u_0(m). \quad (12.40)$$

В отличие от белого шума $x(t)$ с АКФ [28]:

$$R_x(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau) = \begin{cases} \infty, & \tau = 0; \\ 0, & \tau \neq 0, \end{cases}$$

белый шум $x(n)$ с АКФ (12.40) является физически реализуемым эргодическим случайным процессом.

Согласно (12.20), значение АКФ (12.40) в точке $m = 0$ равно средней мощности:

$$R_x(0) = N_0/2 = P_{x_{\text{ср}}} = \sigma_x^2 + \mu_x^2, \quad (12.41)$$

откуда, на основании теоремы Винера—Хинчина (12.26), определим значение СПМ белого шума:

$$S_x(\omega) = N_0/2 = T \cdot R_x(0) = T \cdot P_{x_{\text{ср}}} = \frac{P_{x_{\text{ср}}}}{f_d}. \quad (12.42)$$

Для белого шума с нулевым средним $\mu_x = 0$ получим:

$$\begin{aligned} R_x(0) &= \sigma_x^2; \\ S_x(\omega) &= \frac{\sigma_x^2}{f_d}. \end{aligned} \quad (12.43)$$

12.7.1. Обработка белого шума линейной дискретной системой

Определим статистические характеристики белого шума на выходе ЛДС на основе связей, установленных в разд. 12.3.

Подставляя в (12.33) СПМ белого шума $S_x(\omega)$ (12.42), определим СПМ белого шума на выходе ЛДС

$$S_y(\omega) = \frac{P_{x_{\text{ср}}}}{f_d} \left| H(e^{j\omega T}) \right|^2.$$

Для белого шума с нулевым средним $\mu_x = 0$ она будет равна

$$S_y(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{f_d} \left| H(e^{j\omega T}) \right|^2. \quad (12.44)$$

Согласно (12.40), АКФ белого шума $R_x(m - k)$ равна

$$R_x(m - k) = (N_0/2)u_0(m - k) = \begin{cases} N_0/2, & m = k; \\ 0, & m \neq k, \end{cases}$$

откуда на основании (12.35) имеем АКФ белого шума на выходе ЛДС:

$$R_y(m) = \begin{cases} N_0/2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_h(k), & m=k; \\ 0, & m \neq k, \end{cases}$$

которая с учетом (12.41) будет равна:

$$R_y(m) = \begin{cases} P_{x_{cp}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_h(k), & m=k; \\ 0, & m \neq k, \end{cases} \quad (12.45)$$

где СКФ $R_h(k)$ определена в (12.36).

Для белого шума с нулевым средним $\mu_x = 0$ получим АКФ:

$$R_y(m) = \begin{cases} \sigma_x^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_h(k), & m=k; \\ 0, & m \neq k. \end{cases}$$

Математическое ожидание белого шума на выходе ЛДС определяется по формуле (12.37):

$$\mu_y = \mu_x \sum_{n=0}^{\infty} h(n),$$

а средняя мощность — по формуле (12.38):

$$P_{y_{cp}} = R_y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_h(k) R_x(k),$$

и с учетом (12.45) она будет равна

$$P_{y_{cp}} = P_{x_{cp}} R_h(0) = P_{x_{cp}} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n),$$

где значение $R_h(0)$ определено по формуле (12.36).

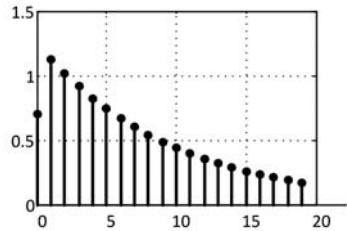
Для белого шума с нулевым средним $\mu_x = 0$ получим соотношение для дисперсии

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n). \quad (12.46)$$

Тот же результат легко получить непосредственно на основе формулы свертки (12.31), используя свойства оператора дисперсии $D\{\cdot\}$ (8.20) для некоррелированных отсчетов нормального белого шума:

$$\sigma_y^2 = D\{y(n)\} = D\left\{ \sum_{m=0}^{\infty} h(m) x(n-m) \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) D\{x(n-m)\} = \sigma_x^2 \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m).$$

ГЛАВА 13



Спектральный анализ

Спектральный анализ предназначен для оценивания спектральной плотности мощности случайного процесса.

В большинстве практических приложений вводится допущение о стационарности и эргодичности случайного процесса, и далее это принято по умолчанию.

Спектральная плотность мощности (СПМ) эргодического случайного процесса $S_x(\omega) = S(\omega)$ определена в (12.25)–(12.26):

$$S(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T}{2N+1} |X(e^{j\omega T})|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \frac{|X(e^{j\omega T})|^2}{f_d}; \quad (13.1)$$

$$S(\omega) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(m) e^{-j\omega T m}, \quad (13.2)$$

где соотношение (13.2) известно как *теорема Винера—Хинчина*.

При *конечной* длине N эргодического случайного процесса $x(n)$ говорят об *оценке СПМ* $\hat{S}(\omega)$, которая (см. разд. 12.5) дает *картину распределения средней мощности по частоте* и измеряется в ваттах на герц (Вт/Гц) или децибелах на герц (дБ/Гц).

По определению СПМ $S(\omega)$ — *неотрицательная, четная, периодическая* функция частоты с периодом, равным $\omega_d = 2\pi f_d = 2\pi/T$, и эти свойства сохраняются для ее оценки $\hat{S}(\omega)$.

Далее термины "*эргодический случайный процесс*" и "*последовательность*" будем считать тождественными, если смысл ясен из контекста.

Методы спектрального анализа (вычисления оценки СПМ) разделяют на две группы:

- непараметрические;
- параметрические.

13.1. Непараметрические методы

Непараметрические методы спектрального анализа основаны на вычислении оценок СПМ по отсчетам последовательности $x(n)$, прямо или косвенно, что определяет их основные достоинства — применимость к широкому классу сигналов и высокую вычислительную эффективность за счет применения алгоритмов БПФ.

Классические методы непараметрического спектрального анализа включают в себя:

- метод периодограмм (periodogram);
- методы модифицированных периодограмм (modified periodogram), в том числе:
 - метод периодограмм Даньелла (Daniell periodogram);
 - метод периодограмм Бартлетта (Bartlett periodogram);
 - метод периодограмм Уэлча (Welch periodogram);
- методы коррелограмм (correlogram).

Методы периодограмм называют *прямыми*, т. к. в них рассчитывается оценка СПМ (13.1) непосредственно (прямо) по отсчетам последовательности, а методы коррелограмм — *косвенными*, т. к. в них рассчитывается оценка СПМ (13.2), для которой предварительно необходимо определить оценку АКФ последовательности.

13.1.1. Метод периодограмм

Метод периодограмм заключается в вычислении оценки СПМ (13.1) последовательности $x(n)$ конечной длины N , которая называется *периодограммой*:

$$\hat{S}(\omega) = \frac{|X(e^{j\omega T})|^2}{Nf_d}, \quad (13.3)$$

где $X(e^{j\omega T})$ — спектральная плотность последовательности:

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega T n}.$$

Периодограмма рассчитывается с помощью ДПФ с использованием алгоритмов БПФ. Разрешение по частоте $\Delta f = f_d/N$ (10.32) будет зависеть от длины последовательности и частоты дискретизации.

Одним из инструментов коррекции оценок СПМ в непараметрических методах является применение весовых функций (окон). Видоизмененная периодограмма (13.3), называемая *модифицированной периодограммой* $\hat{S}_w(\omega)$, в этом случае принимает вид:

$$\hat{S}_w(\omega) = \frac{\frac{1}{f_d} |X_w(e^{j\omega T})|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} |w(n)|^2}, \quad (13.4)$$

где $w(n)$ — весовая функция (окно) длины N ; $X_w(e^{j\omega T})$ — спектральная плотность произведения $x(n)w(n)$:

$$X_w(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)w(n)e^{-j\omega Tn},$$

согласно (9.22), равная *свертке* спектральной плотности $X(e^{j\omega T})$ с частотной характеристикой окна $W(e^{j\hat{\omega}})$:

$$W(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)e^{-j\hat{\omega}n}.$$

Окна и их основные параметры рассматриваются далее в разд. 16.3. С их влиянием на оценку СПМ можно познакомиться в [32, 54]. Суть этого влияния сводится к *сглаживанию пиков* оценки СПМ, что сопровождается их *расширением* и, как следствие, *увеличением разрешения по частоте*.

Сглаживание (расширение) пиков взаимосвязано с параметрами окон, в частности, с *шириной главного лепестка*, различной у разных окон при их одинаковой длине. При этом для любого окна с *уменьшением* его длины ширина главного лепестка будет *возрастать*, и разрешение по частоте оценки СПМ — *увеличиваться*.

В рассматриваемых далее иллюстративных примерах в качестве *модели* исходной последовательности $x(n)$ выбран небелый шум, полученный на основе нормально-го белого шума с заданной АКФ. Алгоритм его формирования и script-файл расчета оценок СПМ с помощью стандартных функций MATLAB приводятся в [42]. Здесь же ограничимся анализом результатов.

Пример 13.1. На рис. 13.1 приведена периодограмма (13.3) небелого шума длины $N = 1000$ на периоде $f_d = 2000$ Гц.

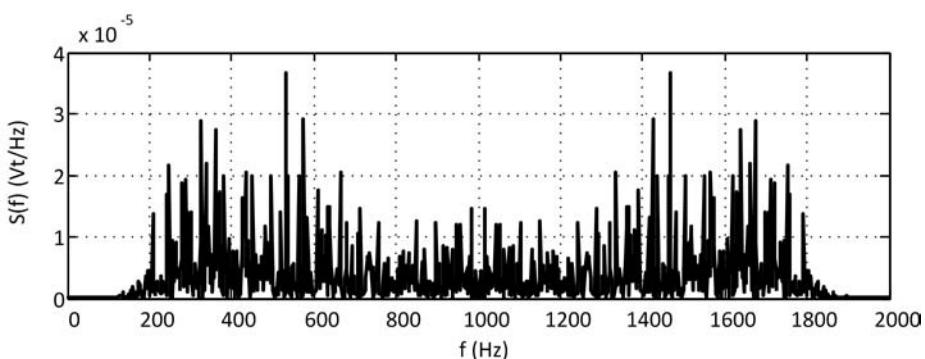


Рис. 13.1. Периодограмма небелого шума

Периодограмма имеет сильно выраженный осциллирующий характер, что затрудняет ее восприятие — в "деталях" теряется общее (интегральное) представление о характере распределения средней мощности по частоте. Отсюда возникает жела-

ние сгладить периодограмму, очевидным следствием которого станет *увеличение разрешения по частоте*.

С другой стороны, некоторые "детали" могут оказаться существенными, и их сглаживание приведет к потере информации. Отсюда возникает необходимость гибкого подхода к сглаживанию с *варьируемым разрешением по частоте*. ◀

Реализация такого компромиссного подхода к сглаживанию периодограммы предполагает знакомство с основными показателями качества оценок СПМ.

13.1.2. Основные показатели качества оценок СПМ

Для сравнения различных оценок СПМ применяются следующие основные показатели качества.

- Несмешенность/смещение оценки СПМ.

Смещением β некоторого параметра α называют разность между истинным значением данного параметра и математическим ожиданием его оценки $\hat{\alpha}$ [4, 32]:

$$\beta = \alpha - M\{\hat{\alpha}\},$$

где $M\{\cdot\}$ — оператор математического ожидания.

С учетом равенства $\alpha = M\{\alpha\}$ имеем:

$$\beta = M\{\alpha\} - M\{\hat{\alpha}\} = M\{\alpha - \hat{\alpha}\}. \quad (13.5)$$

Оценку параметра $\hat{\alpha}$ называют *несмешенной*, если при усреднении по ансамблю реализаций с возрастанием их числа смещение β стремится к нулю.

Для эргодического случайного процесса длины N *смещение* β оценки СПМ $\hat{S}(\omega)$ равно математическому ожиданию разности между истинной СПМ $S(\omega)$ и ее оценкой $\hat{S}(\omega)$ [42]:

$$\beta = M\{S(\omega) - \hat{S}(\omega)\}.$$

Оценку СПМ называют *несмешенной*, если смещение $\beta = 0$, и *асимптотически несмешенной*, если при длине $N \rightarrow \infty$ смещение β (скаляр) стремится к нулю:

$$\beta = M\{S(\omega) - \hat{S}(\omega)\} \rightarrow 0.$$

- Состоятельность/несостоятельность оценки СПМ.

Оценку параметра $\hat{\alpha}$ называют *состоятельной*, если при усреднении по ансамблю реализаций с возрастанием их числа математическое ожидание квадрата отклонения истинного значения параметра α от его оценки $\hat{\alpha}$ стремится к нулю [4, 32]:

$$M\{(\alpha - \hat{\alpha})^2\} = D\{\hat{\alpha}\} + \beta^2 \rightarrow 0.$$

Для эргодического случайного процесса длины N оценку СПМ $\hat{S}(\omega)$ называют *состоятельной*, если с увеличением длины N математическое ожидание квадрата отклонения истинной СПМ $S(\omega)$ от ее оценки $\hat{S}(\omega)$ (скаляр) стремится к нулю [42]:

$$M\left\{\left[S(\omega)-\hat{S}(\omega)\right]^2\right\}=D\left\{\hat{S}(\omega)\right\}+\beta^2 \rightarrow 0, \quad (13.6)$$

где $D\{\cdot\}$ — оператор дисперсии.

Убедимся в равенстве левой и правой частей (13.6), используя краткие обозначения: $\alpha = S(\omega)$ и $\hat{\alpha} = \hat{S}(\omega)$.

Согласно свойству линейности оператора $M\{\cdot\}$ (8.18), в левой части (13.6) имеем:

$$M\left\{(\alpha-\hat{\alpha})^2\right\}=M\left\{\alpha^2\right\}-2M\left\{\alpha\right\}M\left\{\hat{\alpha}\right\}+M\left\{\hat{\alpha}^2\right\}.$$

Согласно свойству оператора $D\{\cdot\}$:

$$D\left\{\hat{\alpha}\right\}=M\left\{\hat{\alpha}^2\right\}-M^2\left\{\hat{\alpha}\right\}$$

и равенству β (13.5), справа в (13.6) имеем тождественный результат:

$$D\left\{\hat{\alpha}\right\}+M\left\{(\alpha-\hat{\alpha})^2\right\}=M\left\{\hat{\alpha}^2\right\}-\underline{M^2\left\{\hat{\alpha}\right\}}+M\left\{\alpha^2\right\}-2M\left\{\alpha\right\}M\left\{\hat{\alpha}\right\}+\underline{M^2\left\{\hat{\alpha}\right\}}.$$

Из (13.6) следует, что *смещенная* оценка СПМ свидетельствует о ее *несостоятельности*, а при *несмешенной* оценке СПМ ее *состоятельность* определяется стремлением *дисперсии оценки СПМ к нулю* с увеличением длины эргодического случайного процесса.

Следствием *несостоятельности* оценки СПМ является эффект *изрезанности* периодограммы, *усиливающийся с увеличением длины последовательности $x(n)$* .

Признаком улучшения качества оценки СПМ является ослабление данного эффекта с увеличением длины последовательности $x(n)$.

Теоретический анализ приведенных показателей качества для различных оценок СПМ весьма непрост и выходит за рамки данной книги, поэтому далее будут приведены лишь известные результаты [32, 54].

Оценки СПМ (13.3) и (13.4) являются *асимптотически несмешенными*, но при этом *несостоятельными*, вследствие чего периодограммы оказываются сильно осциллирующими (изрезанными) и с увеличением длины последовательности этот эффект усиливается. Для *сглаживания* периодограммы применяют то или иное ее *усреднение*, реализованное в периодограммах Даньелла, Бартлетта и Уэлча.

- Добротность оценки СПМ — отношение квадрата ее математического ожидания (среднего значения) \hat{S}_{cp} к дисперсии $\sigma_{\hat{S}}^2$:

$$Q=\hat{S}_{\text{cp}}^2/\sigma_{\hat{S}}^2. \quad (13.7)$$

Несмешенная оценка дисперсии $\sigma_{\hat{S}}^2$ вычисляется по формуле, подобной (12.21):

$$\sigma_{\hat{S}}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (\hat{S}(\omega_k) - \hat{S}_{\text{cp}})^2,$$

где ω_k — значения частот в N равноотстоящих точках на периоде СПМ; \hat{S}_{cp} — среднее значение оценки СПМ:

$$\hat{S}_{\text{cp}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{S}(\omega_k).$$

Добротность характеризует отношение квадрата постоянной составляющей оценки СПМ к среднему квадрату амплитуд осцилляций, поэтому *чем больше добротность, тем выше качество оценки СПМ*.

- Среднеквадратическое (стандартное) отклонение СКО¹ оценки СПМ $\sigma_{\hat{S}}$:

$$\sigma_{\hat{S}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (\hat{S}(\omega_k) - \hat{S}_{\text{cp}})^2}, \quad (13.8)$$

которое совпадает с размерностью оценки СПМ и характеризует интенсивность (усредненную амплитуду) ее осцилляций, поэтому *чем меньше СКО, тем выше качество оценки СПМ*.

13.1.3. Метод периодограмм Даньелла

В методе периодограмм Даньелла [32] сглаживание исходной периодограммы $\hat{S}(\omega)$ (13.3) достигается за счет ее усреднения по $(2K+1)$ соседним частотам, симметричным относительно текущей частоты ω_k :

$$[\omega_{k-K} \dots \omega_{k-1} \underline{\omega_k} \omega_{k+1} \dots \omega_{k+K}].$$

Периодограмма Даньелла вычисляется на основе исходной периодограммы по формуле:

$$\hat{S}_{\text{DANIELL}}(\omega_i) = \frac{1}{2K+1} \sum_{k=i-K}^{i+K} \hat{S}(\omega_k), \quad i = K, K+1, \dots, (N-1-K), \quad (13.9)$$

где N — длина (количество отсчетов) исходной периодограммы, совпадающая с длиной последовательности $x(n)$; ω_k — значения усредняемых частот в исходной периодограмме; ω_i — значения частот в периодограмме Даньелла; для каждого значения i количество усредняемых частот равно $M = (2K+1)$.

Согласно (13.9), периодограмма Даньелла имеет длину $(N-2K)$. Для того чтобы ее длина была равна N , следует N отсчетов исходной периодограммы дополн-

¹ Standard Deviation (STD).

нить K отсчетами в начале и в конце с учетом ее периодичности, с тем, чтобы ее длина стала равной $(N + 2K)$.

Периодограмму Даньелла можно интерпретировать как реакцию КИХ-фильтра длины $M = (2K + 1)$ с одинаковыми коэффициентами $1/M$ на воздействие в виде исходной периодограммы длины $(N + 2K)$. В этом случае первые $2K$ отсчетов реакции следует отбросить, т. к. она рассчитывается при ННУ.

Оценка СПМ (13.9) является асимптотически несмещенной. За счет операции усреднения по соседним частотам периодограмма Даньелла будет менее осциллирующей (изрезанной), чем периодограмма (13.3).

Эффект сглаженности периодограммы Даньелла усиливается с ростом количества усредняемых частот, что сопровождается *увеличением разрешения по частоте*.

Пример 13.2. На рис. 13.2 представлены исходная периодограмма небелого шума $N = 1000$ на периоде $f_d = 2000$ Гц и периодограммы Даньелла с различным количеством усредняемых частот $(2K + 1)$, а в табл. 13.1 приведены значения их добротностей (13.7) и СКО (13.8).

Визуальный анализ и анализ показателей качества (лучшие выделены цветом) подтверждают, что эффект сглаженности исходной периодограммы в периодограммах

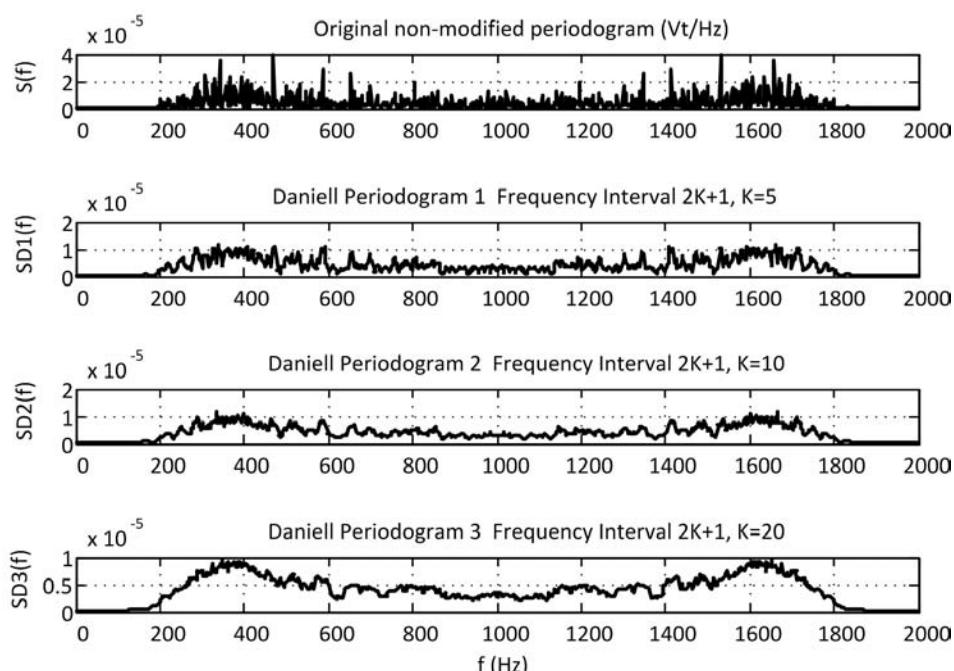


Рис. 13.2. Исходная периодограмма и периодограммы Даньелла с различным количеством усредняемых частот

Даньелла усиливается с ростом количества усредняемых частот при одновременном увеличении разрешения по частоте. ▲

Таблица 13.1. Добротность и СКО периодограммы и периодограмм Даньелла

Оценка СПМ	Добротность	СКО
Периодограмма	0,6010	$5,091 \cdot 10^{-6}$
Периодограмма Даньелла, $K = 5$	1,8700	$2,9077 \cdot 10^{-6}$
Периодограмма Даньелла, $K = 10$	2,2295	$2,6663 \cdot 10^{-6}$
Периодограмма Даньелла, $K = 20$	2,5544	$2,4878 \cdot 10^{-6}$

13.1.4. Метод периодограмм Бартлетта

В методе периодограмм Бартлетта [32] сглаживание исходной периодограммы $\hat{S}(\omega)$ (13.3) достигается за счет разбиения последовательности $x(n)$ длины N на *неперекрывающиеся* фрагменты $x^{(p)}(n)$ длины $L < N$:

$$x^{(p)}(n) = x(n + pL), \quad n = 0, \dots, (L-1), \quad p = 0, \dots, (P-1),$$

где p — номер фрагмента, $P = N/L$ — их количество¹, вычисления периодограмм $\hat{S}(\omega)$ (13.3) фрагментов:

$$\hat{S}^{(p)}(\omega), \quad p = 0, \dots, (P-1), \quad (13.10)$$

и их усреднения.

Периодограмма Бартлетта определяется как усредненная сумма периодограмм фрагментов (13.10):

$$\hat{S}_{BARTLETT}(\omega) = \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} \hat{S}^{(p)}(\omega). \quad (13.11)$$

Оценка СПМ (13.11) является *асимптотически несмещенной* и при этом *состоит* за счет деления исходной последовательности на фрагменты и усреднения периодограмм фрагментов.

Если АКФ $R(m)$ фрагментов затухает до пренебрежимо малых величин:

$$R(m) \approx 0 \text{ при } |m| > L,$$

то периодограммы фрагментов можно считать независимыми. Доказано [32], что в этом случае дисперсия периодограммы Бартлетта будет обратно пропорциональна количеству фрагментов P , и как следствие, периодограмма Бартлетта будет

¹ При необходимости последний фрагмент дополняется нулями до длины L .

более сглаженной (менее осциллирующей), чем периодограмма Даньелла (13.9). По этой причине количество фрагментов P стремится увеличивать. С другой стороны, это приводит к уменьшению длины фрагмента L , а следовательно, и к увеличению разрешения по частоте $\Delta f = f_d/L$. Поэтому количество фрагментов P выбирается из соображений компромисса между сглаженностью периодограммы и разрешением по частоте.

Пример 13.3. На рис. 13.3 представлены исходная периодограмма небелого шума $N = 1000$ на периоде $f_d = 2000$ Гц и периодограммы Бартлетта при различных длинах L фрагментов, а в табл. 13.2 приведены значения добротностей (13.7) и СКО (13.8) оценок СПМ.

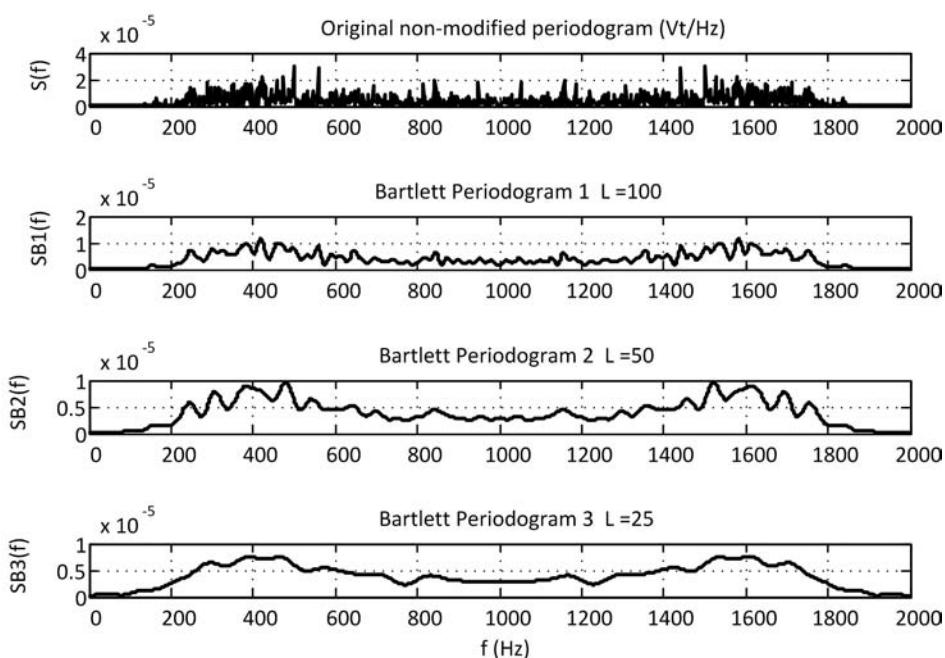


Рис. 13.3. Исходная периодограмма и периодограммы Бартлетта с различными длинами фрагментов

Таблица 13.2. Добротность и СКО периодограммы и периодограмм Бартлетта

Оценка СПМ	Добротность	СКО
Периодограмма	0,6010	$5,091 \cdot 10^{-6}$
Периодограмма Бартлетта, $L = 100$	2,2116	$2,6359 \cdot 10^{-6}$
Периодограмма Бартлетта, $L = 50$	2,6955	$2,3876 \cdot 10^{-6}$
Периодограмма Бартлетта, $L = 25$	3,5970	$2,0668 \cdot 10^{-6}$

Визуальный анализ и анализ показателей качества подтверждают, что периодограммы Бартлетта являются более сглаженными по сравнению с периодограммами Даньелла, и этот эффект усиливается с уменьшением длин фрагментов при одновременном увеличении разрешения по частоте. ◀

13.1.5. Метод периодограмм Уэлча

В методе периодограмм Уэлча сглаживание исходной периодограммы (13.3) достигается за счет разбиения последовательности $x(n)$ длины N на *перекрывающиеся* фрагменты $x^{(p)}(n)w(n)$ длины $L < N$ с величиной перекрытия $Q < L$, применения сглаживающего окна $w(n)$ длины L :

$$x^{(p)}(n)w(n) = x(n + pQ)w(n), \quad n = 0, \dots, (L-1), \quad p = 0, \dots, (P-1),$$

где p — номер фрагмента, P — их количество, равное

$$P = \text{int}\left(\frac{N-Q}{L-Q}\right),$$

вычисления модифицированных периодограмм $\hat{S}_w(\omega)$ (13.4) перекрывающихся фрагментов:

$$\hat{S}_w^{(p)}(\omega), \quad p = 0, \dots, (P-1), \quad (13.12)$$

и их усреднения.

Периодограмма Уэлча определяется как усредненная сумма периодограмм фрагментов (13.12):

$$\hat{S}_{WELCH}(\omega) = \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} \hat{S}_w^{(p)}(\omega). \quad (13.13)$$

Оценка СПМ (13.13) является *асимптотически несмещенной* и при этом *состоятельной* за счет деления последовательности на *перекрывающиеся* фрагменты и усреднения периодограмм фрагментов.

При одинаковой длине фрагмента периодограмма Уэлча будет *более сглаженной*, чем периодограмма Бартлетта, за счет увеличения *количество* фрагментов при их *перекрытии* и применения окна.

Например, для последовательности длины $N = 1000$ при длине фрагментов $L = 100$ в периодограмме Бартлетта будем иметь $P = N/L = 1000/100 = 10$ фрагментов, а в периодограмме Уэлча с величиной перекрытия $Q = 50$ — почти вдвое больше:

$$P = \text{int}\left(\frac{N-Q}{L-Q}\right) = \text{int}\left(\frac{1000-50}{100-50}\right) = \text{int}\left(\frac{900}{50}\right) = 18.$$

Применение окна усиливает эффект сглаженности ценой дополнительного увеличения разрешения по частоте (см. разд. 13.1.1).

Пример 13.4. На рис. 13.4 представлены исходная периодограмма небелого шума длины $N = 1000$ на периоде $f_d = 2000$ Гц и периодограммы Уэлча при различных длинах L фрагментов, величинах перекрытий $Q \approx 0,5L$ и окне Хэмминга, а в табл. 13.3 приведены значения их добротностей (13.7) и СКО (13.8) оценок СПМ.

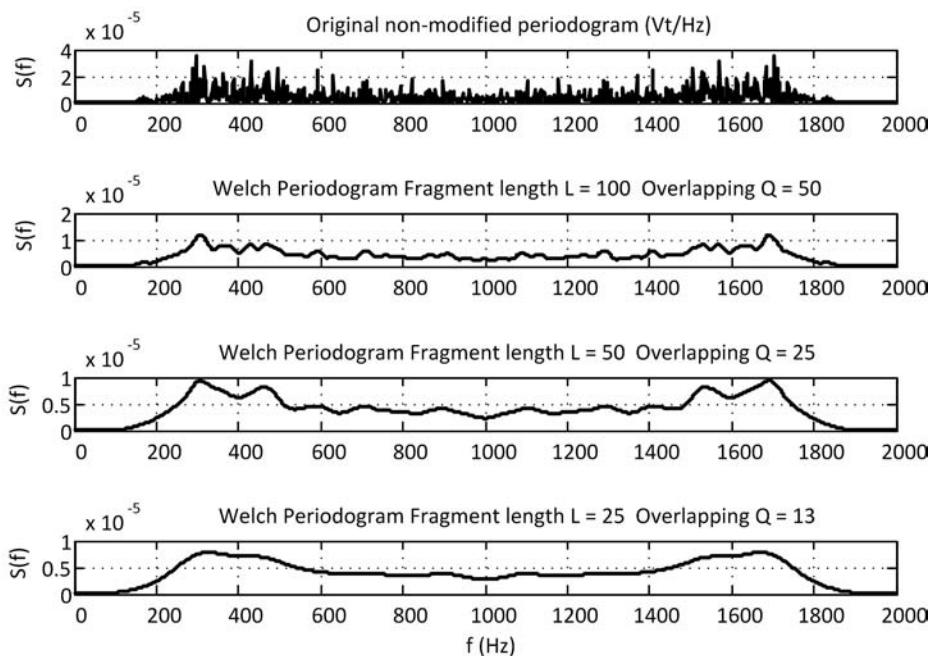


Рис. 13.4. Исходная периодограмма и периодограммы Уэлча при различных длинах фрагментов, величинах перекрытия и окне Хэмминга

Таблица 13.3. Добротность и СКО периодограммы и периодограмм Уэлча

Оценка СПМ	Добротность	СКО
Периодограмма	0,6010	$5,091 \cdot 10^{-6}$
Периодограмма Уэлча, $L = 100, Q = 50$	2,3922	$2,5942 \cdot 10^{-6}$
Периодограмма Уэлча, $L = 50, Q = 25$	2,6820	$2,4508 \cdot 10^{-6}$
Периодограмма Уэлча, $L = 25, Q = 13$	3,1286	$2,2511 \cdot 10^{-6}$

Визуальный анализ и анализ показателей качества подтверждают, что при одинаковой длине фрагмента периодограммы Уэлча являются более сглаженными по сравнению с периодограммами Бартлетта, и этот эффект усиливается с уменьшением длин фрагментов при одновременном увеличении разрешения по частоте. ▲

13.1.6. Методы коррелограмм

Методы коррелограмм [32] заключаются в вычислении оценок СПМ на основе теоремы Винера—Хинчина (13.2):

$$S(\omega) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(m) e^{-j\omega m T},$$

в соответствии с которой, СПМ представляет собой ряд Фурье с коэффициентами, равными отсчетам АКФ $R_x(m)$ последовательности $x(n)$ теоретически бесконечной длины.

При конечной длине N говорят об оценке СПМ, которую называют *коррелограммой*:

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{f_d} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{R}_x(m) e^{-j\omega m T}, \quad (13.14)$$

где $\hat{R}_x(m)$ — оценка АКФ последовательности $x(n)$ — четная функция длины $L = (2N - 1)$, центрированная относительно $m = 0$.

Фактически в (13.14) имеем усечение ряда Фурье с помощью окна Дирихле (прямоугольного) $w_R(m)$ длины L :

$$R_x(m)w_R(m) = \begin{cases} R_x(m), & -(N-1) \leq m \leq (N-1); \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где:

$$w_R(m) = \begin{cases} 1, & -(N-1) \leq m \leq (N-1); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Такого рода усечение сопровождается появлением в оценке СПМ $\hat{S}(\omega)$ пульсаций, максимум которых не зависит от длины окна. Это феномен, известный как *эффект Гиббса*, рассматривается в разд. 16.2. Здесь же отметим, что для устранения эффекта Гиббса применяют другие окна, что и было предложено Блэкманом и Тьюки. Соответствующую оценку СПМ называют *модифицированной коррелограммой*:

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{f_d} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{R}_x(m) w(m) e^{-j\omega m T},$$

где $w(m)$ — окно длины $L = (2N - 1)$ — неотрицательная вещественная последовательность, максимальная в центре $m = 0$ и монотонно спадающая к границам.

Кроме того, они предложили учесть быстро затухающий характер АКФ и ограничить длину окна до $L_1 = (2N_1 - 1)$, где $N_1 = \text{int}(N/10)$. Соответствующую модифицированную коррелограмму называют *оценкой СПМ Блэкмана—Тьюки*:

$$\hat{S}_{BT}(\omega) = \frac{1}{f_d} \sum_{m=-(N_1-1)}^{N_1-1} \hat{R}_x(m) w(m) e^{-j\omega m T}, \quad (13.15)$$

где $\hat{R}_x(m)$ — оценка АКФ длины $L_1 = (2N_1 - 1)$, центрированная относительно $m = 0$; $w(m)$ — окно той же длины.

При одинаковой длине окна наиболее сглаженной будет оценка СПМ с наибольшей шириной главного лепестка окна, что сопровождается увеличением разрешения по частоте (см. разд. 13.1.1). Уменьшение длины окна в оценке СПМ Блэкмана—Тьюки, по сравнению с модифицированной коррелограммой, усиливает эффект сглаженности ценой дополнительного увеличения разрешения по частоте.

Смещенная оценка АКФ вычисляется по формуле (12.18):

$$\hat{R}_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+m), \quad -(N_1 - 1) \leq m \leq (N_1 - 1), \quad (13.16)$$

а несмещенная — по формуле (12.22):

$$\hat{R}_x(m) = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+m), \quad -(N_1 - 1) \leq m \leq (N_1 - 1). \quad (13.17)$$

Доказано [32], что смещенная оценка АКФ гарантирует неотрицательную оценку СПМ (13.15), в то время как несмещенная может привести к отрицательной оценке СПМ, что противоречит физическому смыслу СПМ, неотрицательной по определению. Кроме того, в [34] показано, что при $N_1 \ll N$ в смещенной оценке АКФ смещение незначительно.

Другой причиной получения отрицательной оценки СПМ (13.15) может стать неудачный выбор окна $w(m)$, в том случае если его амплитудная функция имеет отрицательные значения [4, 32, 34]. В частности, это возможно, но не обязательно, например, для прямоугольного окна, окон Хэмминга, Хэннинга, но исключено, например, для окна Бартлетта.

При быстро затухающей оценке АКФ оценка СПМ Блэкмана—Тьюки является *асимптотически несмещенной и состоятельной*.

Коррелограмма и ее модификации рассчитываются с помощью ДПФ с использованием алгоритмов БПФ. В этом случае имеем вещественное ДПФ симметричной последовательности нечетной длины, подобное (10.48).

Пример 13.5. На рис. 13.5 представлены периодограмма небелого шума длины $N = 1000$ на периоде $f_d = 2000$ Гц и оценки СПМ Блэкмана—Тьюки (13.15) с применением различных окон, а в табл. 13.4 приведены значения их добротностей (13.7) и СКО (13.8).

Визуальный анализ оценок СПМ Блэкмана—Тьюки подтверждает, что наиболее сглаженной будет оценка с наибольшей шириной главного лепестка, которую в данном случае имеет окно Блэкмана, при одновременном увеличении разрешения по частоте. Минимально возможная ширина главного лепестка соответствует окну Дирихле (прямоугольному).

Среди непараметрических методов наибольшее распространение получил метод периодограмм Уэлча. Данный метод, наряду с методом периодограмм, реализован в GUI SPTool (см. разд. П2.1.3 приложения 2).

Таблица 13.4. Добротность и СКО периодограммы и оценок СПМ Блэкмана—Тьюки

Оценка СПМ	Добротность	СКО
Периодограмма	0,6010	$5,091 \cdot 10^{-6}$
Оценка Блэкмана—Тьюки с прямоугольным окном	1,9457	$3,0111 \cdot 10^{-6}$
Оценка Блэкмана—Тьюки с окном Хэмминга	2,4290	$2,6100 \cdot 10^{-6}$
Оценка Блэкмана—Тьюки с окном Блэкмана	2,5245	$2,5295 \cdot 10^{-6}$

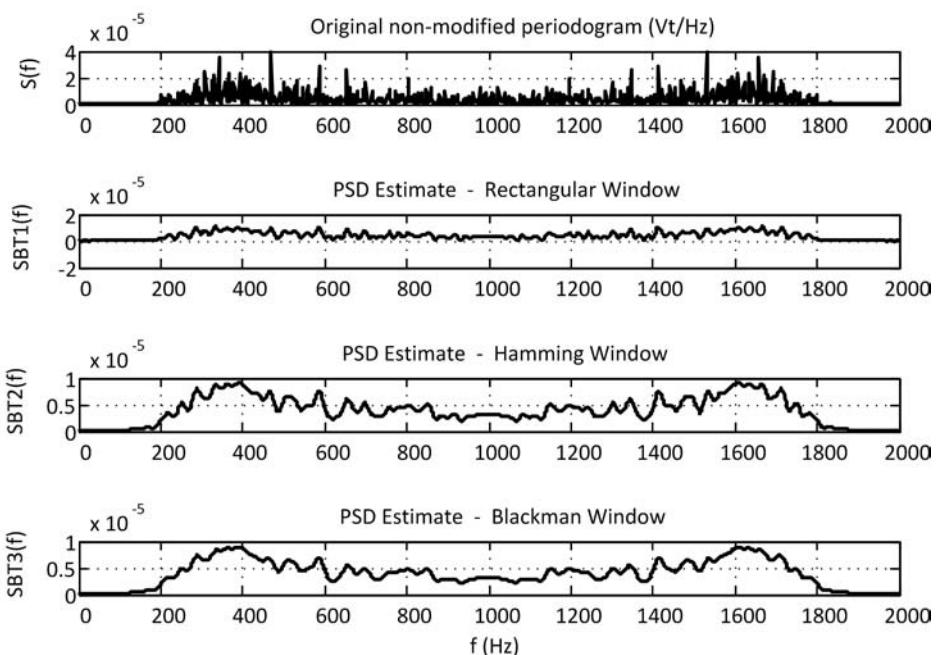


Рис. 13.5. Периодограмма и оценки СПМ Блэкмана—Тьюки при различных окнах: прямоугольном (Rectangular), Хэмминга и Блэкмана

13.2. Параметрические методы

Параметрические методы оценки СПМ основаны на построении математической модели анализируемой последовательности (эргодического случайного процесса) и оценке параметров модели, при которых обеспечивается наилучшее приближение моделируемой последовательности к анализируемой по заданному критерию.

Параметрические методы обеспечивают возможность получения более достоверных оценок СПМ в отсутствии осциляций (изрезанности) и искажений, связанных с применением окон, характерных для непараметрических методов.

Основная сложность параметрических методов заключается в выборе математической модели, адекватной анализируемой последовательности, и оценке ее параметров.

В зависимости от вида математической модели различают следующие группы параметрических методов оценивания СПМ:

- авторегрессии скользящего среднего (APCC) — на основе APCC-модели (Autoregressive Moving Average, ARMA model);
- скользящего среднего (CC) — на основе CC-модели (Moving Average, MA model);
- авторегрессионные (AP) — на основе AP-модели (Autoregressive, AR model).

13.2.1. Математические модели случайного процесса

APCC-модель описывается разностным уравнением (РУ) БИХ-фильтра, представленным в виде:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k) + \sum_{i=0}^{N-1} b_i e(n-i), \quad (13.18)$$

где:

- $e(n)$ — входной сигнал (воздействие), в качестве которого используется белый шум, обычно нормальный, с нулевым средним и дисперсией σ_e^2 ;
- $y(n)$ — входной сигнал (реакция) — модель анализируемой последовательности, которую, во избежание путаницы, будем называть *моделируемой последовательностью*;
- a_k и b_i — параметры APCC-модели, где $b_0 = 1$;
- $(M-1)$ — порядок APCC-модели при $(N-1) \leq (M-1)$ по умолчанию.

APCC-модели (13.18) соответствует БИХ-фильтр с дробно-рациональной передаточной функцией:

$$H(z) = \frac{1 + \sum_{i=1}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}.$$

Структура (структурная схема) APCC модели представлена на рис. 13.6, а.

AP-модель описывается РУ (13.8) при $b_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, (N-1)$:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k) + e(n), \quad (13.19)$$

где a_k — параметры AP-модели; $(M-1)$ — порядок AP-модели.

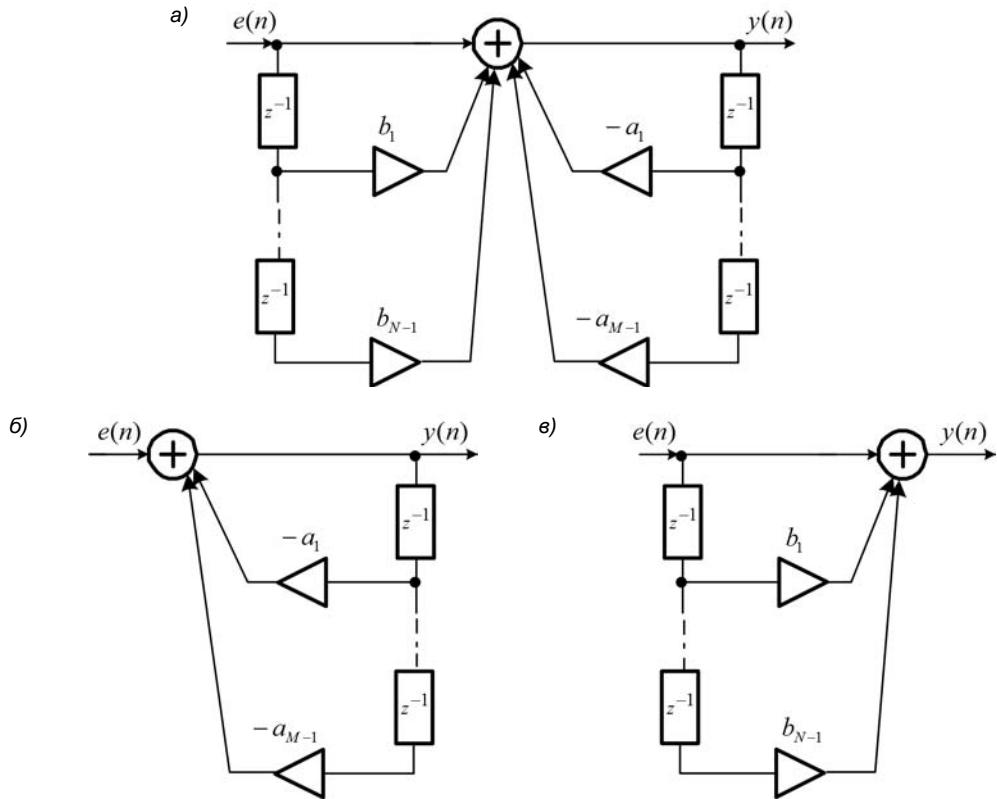


Рис. 13.6. Структуры APCC- (a), AP- (б) и СС-моделей (в)

АР-модели (13.19) соответствует *БИХ-фильтр полюсного вида* ("чисто рекурсивный") с передаточной функцией (4.33) при $b_0 = 1$:

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} = \frac{1}{A(z)}. \quad (13.20)$$

Структура АР-модели представлена на рис. 13.6, б.

СС-модель описывается РУ (13.18) при $a_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, (M-1)$:

$$y(n) = e(n) + \sum_{i=1}^{N-1} b_i e(n-i), \quad (13.21)$$

где b_i — параметры СС-модели; $(N-1)$ — порядок СС-модели.

СС-модели (13.21) соответствует КИХ-фильтр с передаточной функцией

$$H(z) = 1 + \sum_{i=1}^{N-1} b_i z^{-i} = B(z).$$

Структура СС-модели представлена на рис. 13.6, в.

При известных параметрах модели и дисперсии σ_e^2 можно путем подстановки $z = e^{j\omega T}$ в передаточную функцию $H(z)$ определить частотную характеристику фильтра $H(e^{j\omega T})$ и вычислить СПМ $S_y(\omega)$ моделируемой последовательности $y(n)$ по формуле (12.44), где $\sigma_x^2 = \sigma_e^2$:

$$S_y(\omega) = \frac{\sigma_e^2}{f_d} |H(e^{j\omega T})|^2. \quad (13.22)$$

Основная идея параметрических методов заключается в вычислении *оценок* параметров модели и *оценки* дисперсии $\hat{\sigma}_e^2$ на основе *анализируемой* последовательности $x(n)$ и использовании формулы (13.32) для расчета ее *оценки* СПМ $\hat{S}_x(\omega)$.

Таким образом, решение задачи вычисления оценки СПМ $\hat{S}_x(\omega)$ включает в себя следующие этапы:

- выбор модели (AP, CC или APCC);
- оценку порядка модели;
- расчет оценок параметров модели;
- расчет оценки дисперсии нормального белого шума;
- расчет оценки СПМ по формуле (13.22).

Выбор модели определяется требованиями конкретной задачи и обычно предполагает сведения о возможном характере СПМ.

AP-модель считается наиболее подходящей для оценки СПМ с острыми пиками, но без глубоких впадин, а CC-модель, наоборот, — с глубокими впадинами, но без острых пиков.

APCC-модель, как наиболее общая, может использоваться для оценки СПМ с пиками и с впадинами, однако при наличии острых пиков она обеспечивает меньшую точность, чем AP-модель, а при наличии глубоких впадин — меньшую точную, чем CC-модель.

По вычислительным затратам наиболее простой будет AP-модель, т. к. расчет оценок ее параметров сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, в то время как для CC- и APCC-моделей — к решению системы нелинейных алгебраических уравнений.

В общем случае выбору модели должна предшествовать ее проверка на адекватность анализируемому сигналу. Для этого разработаны специальные критерии [8].

На практике наибольшее распространение получила *AP-модель*, которая далее будет рассматриваться по умолчанию¹. Это обусловлено ее адекватностью широкому классу реальных сигналов, наименьшими вычислительными затратами и наличием стандартных средств MATLAB для расчета оценок СПМ.

¹ С использованием APCC- и CC-моделей можно познакомиться в [32, 54].

13.2.2. Оценка параметров авторегрессионной модели

Среди методов оценки параметров АР-модели, реализованных в MATLAB, выделим следующие основные:

- автокорреляционный метод, также известный как метод Юла—Уолкера (Yule-Walker Method);
- ковариационный метод (Covariance Method);
- модифицированный ковариационный метод (Modified covariance Method);
- метод Берга (Burg Method).

Во всех методах используются N доступных для наблюдения отсчетов анализируемой последовательности $x(n)$, и рассматривается ее представление с линейным предсказанием по $(M - 1)$ отсчетам, где $(M - 1)$ — порядок АР-модели.

В книге будут рассмотрены первые три метода, концептуально объединенные тем, что в каждом из них расчет оценок параметров АР-модели сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений порядка $(M - 1)$, в которой матрица коэффициентов и вектор свободных членов формируются из отсчетов оценки АКФ последовательности $x(n)$. Отличие методов определяется вариантами расчета оценки АКФ.

В методе Берга для расчета оценок параметров АР-модели используется рекуррентная формула. С этим методом можно познакомиться самостоятельно в [32, 54].

13.2.3. Метод Юла—Уолкера (автокорреляционный)

Автокорреляционный метод (метод Юла—Уолкера) основан на представлении анализируемой последовательности $x(n)$ с линейным предсказанием вперед (Forward linear prediction) — линейной комбинации $(M - 1)$ предшествующих отсчетов:

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k) + \varepsilon(n), \quad (13.23)$$

где a_k , $k = 1, 2, \dots, (M - 1)$, — параметры линейного предсказания; $\varepsilon(n)$ — ошибка линейного предсказания, равная

$$\varepsilon(n) = x(n) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k). \quad (13.24)$$

Сравним представление анализируемой последовательности $x(n)$ (13.23) с моделируемой последовательностью $y(n)$ (13.19)

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k) + e(n).$$

Они отличаются только тем, что уравнение (13.23) содержит ошибку линейного предсказания $\varepsilon(n)$, а разностное уравнение АР-модели — нормальный белый шум.

Ошибка линейного предсказания $\varepsilon(n)$ не обязательно является нормальным белым шумом, однако близка к нему, поэтому ее средний квадрат можно считать *оценкой* дисперсии нормального белого шума $\hat{\sigma}_e^2$ в АР-модели¹, и выбрать в качестве критерия наилучшего приближения моделируемой последовательности к анализируемой равенство

$$\hat{\sigma}_e^2 = M\{\varepsilon^2(n)\}, \quad (13.25)$$

где $M\{\cdot\}$ — оператор математического ожидания.

В этом случае, вычислив параметры линейного предсказания a_k , получим *оценки* параметров АР-модели \hat{a}_k , и на их основе — *оценку* дисперсии $\hat{\sigma}_e^2$.

Параметры линейного предсказания рассчитываются в результате решения оптимизационной задачи — поиска *минимума среднего квадрата ошибки линейного предсказания* (13.24):

$$M\{\varepsilon^2(n)\} = M\left\{ \left[x(n) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k) \right]^2 \right\} \rightarrow \min_a, \quad (13.26)$$

где \mathbf{a} — вектор параметров линейного предсказания a_k , $k = 0, 1, \dots, (M-1)$.

Для последовательности $x(n)$ длины N средний квадрат ошибки $\varepsilon(n)$ будет равен:

$$M\{\varepsilon^2(n)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon^2(n),$$

с учетом чего в (13.26) имеем:

$$M\{\varepsilon^2(n)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[x(n) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k) \right]^2. \quad (13.27)$$

Минимум оптимизируемой (*целевой*) функции (13.27) достигается при равенстве нулю ее частных производных по всем a_k в момент времени n ; их совокупность можно записать в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[x(n) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k) \right] x(n-k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, (M-1).$$

Выполним замену $k \rightarrow m$ в $x(n-k)$ *вне* квадратных скобок и разделим обе части равенства на 2:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[x(n) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k) \right] x(n-m) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, (M-1). \quad (13.28)$$

¹ Именно этим объясняется выбор нормального белого шума в качестве воздействия в АР-модели.

Оставим в левой части неизвестные параметры a_k :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k) \right] x(n-m) = -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-m), \quad m=1, 2, \dots, (M-1),$$

и изменим порядок суммирования:

$$\sum_{k=1}^{M-1} a_k \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n-k)x(n-m) \right] = -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-m), \quad m=1, 2, \dots, (M-1). \quad (13.29)$$

Справа имеем значения оценки АКФ последовательности $x(n)$:

$$-R_x(m) = -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-m), \quad m=1, 2, \dots, (M-1)$$

а слева, в квадратных скобках, — значения оценки АКФ $R_x(m-k)$ последовательности $x(n-k)$:

$$R_x(m-k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n-k)x(n-m), \quad m=1, \dots, (M-1), \quad k=1, \dots, (M-1). \quad (13.30)$$

С учетом этого СЛАУ (13.29) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{M-1} a_k R_x(m-k) = -R_x(m), \quad m=1, 2, \dots, (M-1). \quad (13.31)$$

На рис. 13.7 изображены графики оценки АКФ $R_x(m)$, $m=1, 2, \dots, (M-1)$, и ее смещенных копий $R_x(m-k)$ (13.30).

Значения оценки АКФ $R_x(m-k)$ (на рис. 13.7 они выделены жирными линиями) представляют в виде *корреляционной матрицы* — *матрицы Телица*: первая строка — $R_x(m-1)$, вторая — $R_x(m-2)$ и т. д.:

$$\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & \dots & R_x(M-2) \\ R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(M-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_x(M-2) & R_x(M-3) & \dots & R_x(0) \end{bmatrix},$$

с учетом чего получим матричную запись СЛАУ (13.31), известную как *система уравнений Юла—Уолкера* (Yule—Walker), где принято обозначение $p=(M-1)$:

$$\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & \dots & R_x(p-1) \\ R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(p-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_x(p-1) & R_x(p-2) & \dots & R_x(0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} R_x(1) \\ R_x(2) \\ \vdots \\ R_x(p) \end{bmatrix}. \quad (13.32)$$

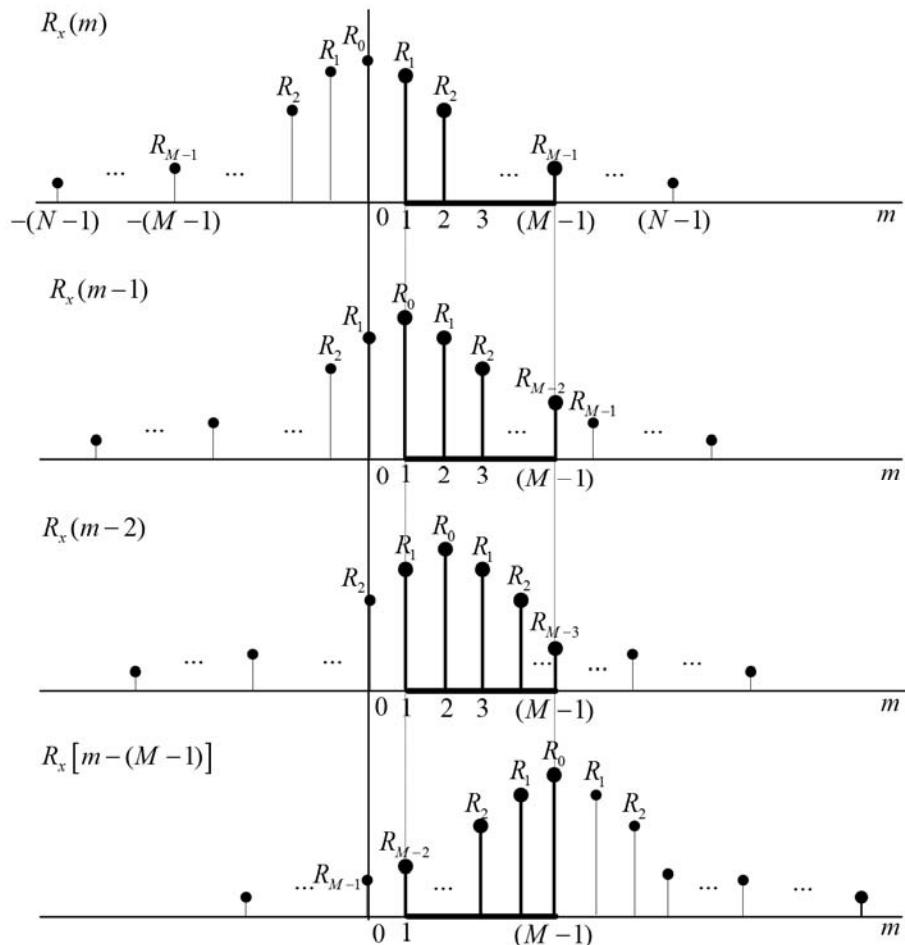


Рис. 13.7. Оценка АКФ и ее смещенные копии

Для решения данной системы уравнений разработан рекуррентный алгоритм Левинсона—Дарбина (Levinson—Darbin)¹, реализованный в MATLAB.

Решением системы уравнений является вектор параметров линейного предсказания \mathbf{a} — оценок параметров AP -модели $\hat{\mathbf{a}}$.

Автокорреляционный метод основан на традиционном вычислении оценки АКФ $R_x(m)$ по формуле (12.17)

$$R_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-m), \quad m = 0, 1, \dots, (M-1), \quad (13.33)$$

¹ С ним можно познакомиться в [38, 46].

в предположении, что *неизвестные* ($M - 1$) отсчетов в начале последовательности *равны нулю*:

$$\underbrace{0 \dots 0}_{M-1} \underbrace{x_0 x_1 \dots x_{N-1}}_N .$$

Пример 13.6. Проиллюстрируем вычисление оценки АКФ автокорреляционным методом на примере последовательности $x(n) = x_n$ длины $N = 7$ и порядка АР-модели $p = (M - 1) = 2$.

В этом случае СЛАУ (13.32) будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) \\ R_x(1) & R_x(0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} R_x(1) \\ R_x(2) \end{bmatrix},$$

а значения оценки АКФ (13.33) без учета нормирующего множителя:

$$R_x(m) = \sum_{n=0}^6 x(n)x(n-m), \quad m = 0, 1, 2,$$

будут равны:

$$R_x(0) = \sum_{n=0}^6 x(n)x(n) = \sum_{n=0}^6 x_n^2;$$

$$R_x(1) = \sum_{n=0}^6 x(n)x(n-1) = x_0\underline{x_{-1}} + x_1x_0 + x_2x_1 + x_3x_2 + x_4x_3 + x_5x_4 + x_6x_5;$$

$$R_x(2) = \sum_{n=0}^6 x(n)x(n-2) = x_0\underline{x_{-2}} + x_1\underline{x_{-1}} + x_2x_0 + x_3x_1 + x_4x_2 + x_5x_3 + x_6x_4.$$

Неизвестные ($M - 1 = 2$) отсчета в начале последовательности x_{-1} и x_{-2} полагаются равными нулю. ◀

13.2.4. Ковариационный метод

Ковариационный метод отличается от автокорреляционного *вычислением оценки АКФ*, значений которой рассчитываются только по *известным* отсчетам последовательности $x(n)$ (без добавления нулей).

Так же как автокорреляционный, ковариационный метод основан на представлении последовательности $x(n)$ с *линейным предсказанием вперед* (13.23), однако при определении среднего квадрата ошибки линейного предсказания отбрасываются ($M - 1$) *первых* отсчетов последовательности:

$$\underbrace{x(M-1) \ x(M) \dots x(N-1)}_{N-(M-1)},$$

и оптимизируемая функция (13.27) принимает вид:

$$M\{\varepsilon^2(n)\} = \frac{1}{N-(M-1)} \sum_{n=M-1}^{N-1} \left[x(n) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k) \right]^2. \quad (13.34)$$

В результате решения оптимизационной задачи:

$$M\{\varepsilon^2(n)\} \rightarrow \min_a$$

будет получена СЛАУ, подобная (13.31):

$$\sum_{k=1}^{M-1} a_k R_x(k, m) = -R_x(m, 0), \quad m = 1, 2, \dots, (M-1), \quad (13.35)$$

с оценкой АКФ, подобной (13.33):

$$R_x(k, m) = \frac{1}{N - (M-1)} \sum_{n=M-1}^{N-1} x(n-k)x(n-m), \quad m = 0, 1, \dots, (M-1), \quad (13.36)$$

и матричной записью СЛАУ (13.35), подобной (13.32), где $p = (M-1)$:

$$\begin{bmatrix} R_x(1,1) & R_x(1,2) & \dots & R_x(1,p) \\ R_x(2,1) & R_x(2,2) & \dots & R_x(2,p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_x(p,1) & R_x(p,2) & \dots & R_x(p,p) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_x(1,0) \\ R_x(2,0) \\ \vdots \\ R_x(p,0) \end{bmatrix}, \quad (13.37)$$

однако корреляционная матрица здесь *не является матрицей Теплица*.

Для вещественной последовательности корреляционная матрица будет *симметричной*, а для комплексной — эрмитовой, положительно определенной. В обоих случаях это позволяет для решения СЛАУ использовать эффективный численный метод с разложением Холецкого [41].

Решением системы уравнений является вектор параметров линейного предсказания **a** — *оценок параметров AR-модели* $\hat{\mathbf{a}}$. Значения вектора $\hat{\mathbf{a}}$ в автокорреляционном и ковариационном методах будут несколько отличаться, т. к. отличаются их оценки АКФ.

Пример 13.7. Проиллюстрируем вычисление оценки АКФ ковариационным методом на примере последовательности $x(n) = x_n$ длины $N = 7$ и порядка AR-модели $p = (M-1) = 2$.

В этом случае СЛАУ (13.37) будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} R_x(1,1) & R_x(1,2) \\ R_x(2,1) & R_x(2,2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_x(1,0) \\ R_x(2,0) \end{bmatrix},$$

а значения оценки АКФ (13.36) без учета нормирующего множителя:

$$R_x(k, m) = \sum_{n=2}^6 x(n-k)x(n-m), \quad k = 1, 2, \quad m = 0, 1, 2,$$

будут равны:

$$R_x(1,0) = \sum_{n=2}^6 x(n-1)x(n) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_6;$$

$$R_x(2,0) = \sum_{n=2}^6 x(n-2)x(n) = x_0x_2 + x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_5 + x_4x_6;$$

$$R_x(1,1) = \sum_{n=2}^6 x(n-1)x(n-1) = x_1x_1 + x_2x_2 + x_3x_3 + x_4x_4 + x_5x_5;$$

$$R_x(1,2) = \sum_{n=2}^6 x(n-1)x(n-2) = x_1x_0 + x_2x_1 + x_3x_2 + x_4x_3 + x_5x_4;$$

$$R_x(2,1) = \sum_{n=2}^6 x(n-2)x(n-1) = x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5;$$

$$R_x(2,2) = \sum_{n=2}^6 x(n-2)x(n-2) = x_0x_0 + x_1x_1 + x_2x_2 + x_3x_3 + x_4x_4.$$

Как видим, $R_x(1,1) \neq R_x(2,2)$, поэтому корреляционная матрица не является матрицей Теплица, при этом $R_x(1,2) = R_x(2,1)$, значит, матрица симметрична. ◀

13.2.5. Модифицированный ковариационный метод

Модифицированный ковариационный метод отличается от ковариационного вычислением оценки АКФ, значения которой, также как в ковариационном методе, рассчитываются только по известным отсчетам последовательности $x(n)$.

Модификация же заключается в следующем.

Наряду с представлением последовательности $x(n)$ с линейным предсказанием вперед (13.23), где добавлен верхний индекс "f" (forward):

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{M-1} a_k^f x(n-k) + \varepsilon^f(n),$$

и определения среднего квадрата ошибки линейного предсказания (13.34) с отбрасыванием ($M-1$) первых отсчетов последовательности:

$$M \left\{ \left[\varepsilon^f(n) \right]^2 \right\} = \frac{1}{N-(M-1)} \sum_{n=M-1}^{N-1} \left[x(n) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k^f x(n-k) \right]^2,$$

рассматривается представление последовательности $x(n)$ с линейным предсказанием назад (Backward linear prediction) — линейной комбинацией ($M-1$) последующих отсчетов, где добавлен верхний индекс "b" (backward):

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{M-1} a_k^b x(n+k) + \varepsilon^b(n)$$

и определяется средний квадрат ошибки линейного предсказания с отбрасыванием $(M-1)$ последних отсчетов последовательности:

$$\underbrace{x(0) \ x(1) \dots x(N-(M-1))}_{N-(M-1)},$$

равный

$$M \left\{ \left[\varepsilon^b(n) \right]^2 \right\} = \frac{1}{N-(M-1)} \sum_{n=0}^{N-(M-1)} \left[x(n) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k^b x(n+k) \right]^2.$$

В результате решения оптимизационной задачи:

$$M \left\{ \varepsilon^2(n) \right\} = \frac{1}{2} M \left\{ \left[\varepsilon^f(n) \right]^2 + \left[\varepsilon^b(n) \right]^2 \right\} \rightarrow \min_a, \quad (13.38)$$

где, обозначив $p = (M-1)$, (13.38) примет вид

$$\frac{1}{2(N-p)} M \left\{ \sum_{n=p}^{N-1} \left[x(n) + \sum_{k=1}^p a_k^f x(n-k) \right]^2 + \sum_{n=0}^{N-1-p} \left[x(n) + \sum_{k=1}^p a_k^b x(n+k) \right]^2 \right\} \rightarrow \min_a,$$

после тождественных преобразований с учетом связи параметров a_k^b с параметрами $a_k^f = a_k$ (подробный вывод приводится в [32, 54]) будет получена СЛАУ, подобная (13.35):

$$\sum_{k=1}^{M-1} a_k \tilde{R}_x(k, m) = -\tilde{R}_x(m, 0), \quad m = 1, 2, \dots, (M-1) \quad (13.39)$$

с оценкой АКФ, подобной (13.36):

$$\tilde{R}_x(k, m) = \frac{1}{2[N-(M-1)]} \left[\sum_{n=M-1}^{N-1} x(n-k)x(n-m) + \sum_{n=0}^{N-1-(M-1)} x(n+k)x(n+m) \right],$$

и матричной записью СЛАУ (13.39), подобной (13.37):

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_x(1,1) & \tilde{R}_x(1,2) & \dots & \tilde{R}_x(1,p) \\ \tilde{R}_x(2,1) & \tilde{R}_x(2,2) & \dots & \tilde{R}_x(2,p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{R}_x(p,1) & \tilde{R}_x(p,2) & \dots & \tilde{R}_x(p,p) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{R}_x(1,0) \\ \tilde{R}_x(2,0) \\ \vdots \\ \tilde{R}_x(p,0) \end{bmatrix},$$

в которой корреляционная матрица также не является матрицей Таплица и для вещественной последовательности будет симметричной, а для комплексной — эрмитовой, положительно определенной. Для решения СЛАУ используется метод с разложением Холецкого.

Решением системы уравнений является вектор параметров линейного предсказания \mathbf{a} — оценок параметров AR-модели $\hat{\mathbf{a}}$. Значения вектора $\hat{\mathbf{a}}$ в автокорреляционном, ковариационном и модифицированном ковариационном методах будут несколько различаться, т. к. различаются их оценки АКФ.

13.2.6. Расчет оценки СПМ

Рассчитанные оценки параметров АР-модели $\hat{\mathbf{a}}$ обеспечивают наилучшее приближение анализируемой $x(n)$ и моделируемой $y(n)$ последовательностей по заданному критерию (13.25):

$$\hat{\sigma}_e^2 = M\{\varepsilon^2(n)\},$$

поэтому для расчета *оценки СПМ* $\hat{S}_x(\omega)$ анализируемой последовательности можно воспользоваться формулой (13.22):

$$\hat{S}_x(\omega) = \frac{\hat{\sigma}_e^2}{f_d} |H(e^{j\omega T})|^2. \quad (13.40)$$

Остается определить оценку дисперсии нормального белого шума $\hat{\sigma}_e^2$ — средний квадрат ошибки линейного предсказания.

Значение $M\{\varepsilon^2(n)\}$ рассчитывается при *известных* параметрах линейного предсказания (после решения СЛАУ) на основе соответствующих соотношений в каждом из методов, а именно:

- в *автокорреляционном* методе — на основе (13.27) при следующем преобразовании:

$$\begin{aligned} M\{\varepsilon^2(n)\} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[x(n) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k) \right] \left[x(n) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k) \right] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[x(n) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k) \right] x(n) + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[x(n) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k) \right] \sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k). \end{aligned}$$

Согласно (13.28), где $m = k$, вторая сумма равна нулю для всех k , следовательно:

$$M\{\varepsilon^2(n)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-k) \right],$$

откуда окончательно имеем:

$$M\{\varepsilon^2(n)\} = R_x(0) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k R_x(k);$$

- в *ковариационном* методе — на основе (13.34) с аналогичным преобразованием к виду:

$$M\{\varepsilon^2(n)\} = R_x(0,0) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k R_x(0,k);$$

- в *модифицированном ковариационном* методе — на основе (13.38):

$$M\{\varepsilon^2(n)\} = \tilde{R}_x(0,0) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k \tilde{R}_x(0,k).$$

Таким образом, и оценки параметров \hat{a}_k , и оценка дисперсии нормального белого шума $\hat{\sigma}_e^2$ АР-модели рассчитываются на основе оценки АКФ анализируемой последовательности.

Методы оценки СПМ отождествляют с методами оценки параметров АР-модели, а именно:

- автокорреляционный метод (метод Юла—Уолкера);
- ковариационный метод;
- модифицированный ковариационный метод;
- метод Берга.

Оценки СПМ для каждого из этих методов подробно анализируются в [32]. Отметим лишь некоторые ключевые моменты.

- БИХ-фильтр, соответствующий АР-модели с рассчитанными оценками параметров $\hat{\mathbf{a}}$, должен быть устойчивым.
- Оценка СПМ в каждом из методов зависит от длины N последовательности $x(n)$ и порядка АР-модели ($M - 1$).
- Выбор (оценка) порядка АР-модели рассматривается в разд. 13.7.
- При фиксированном порядке АР-модели ($M - 1$) оценка СПМ в каждом из методов зависит от длины N последовательности $x(n)$.
- Для "длинной" $N \gg (M - 1)$ последовательности $x(n)$ оценки СПМ будут практически одинаковыми.

Это следует из сравнения средних квадратов ошибки линейного предсказания (13.27), (13.34) и (13.38). При $N \gg (M - 1)$ влияние отбрасываемых ($M - 1$) отсчетов становится незначительным, и средний квадрат ошибки линейного предсказания стремится к (13.27).

- Для "короткой" последовательности $x(n)$ в оценках СПМ могут наблюдаться аномалии: смещение пиков и/или впадин, расщепление пиков, появление ложных пиков и/или впадин, искажение значений пиков и впадин.

Понятия "длинной" и "короткой" последовательностей не формализованы, поэтому возможные аномалии желательно отследить на этапе моделирования при выборе метода оценки СПМ.

В табл. 13.5 даются краткие характеристики методов оценки СПМ. С ними можно познакомиться, обращаясь к системе помощи MATLAB.

В рассматриваемых далее иллюстративных примерах в качестве *модели* анализируемой последовательности используется реакция АР-модели *порядка* ($M - 1 = 6$) на воздействие в виде нормального белого шума с нулевым средним и единичной дисперсией при *заданных* параметрах модели.

В этом случае *анализируемая* последовательность $x(n)$ совпадает с *моделируемой* $y(n)$, поэтому СПМ (13.22) можно считать *истинной*. С ней будут сравниваться оценки СПМ (13.40), рассчитанные различными методами.

Таблица 13.5. Сравнение методов оценки СПМ

Метод оценки СПМ	Достоинства	Недостатки
Юла—Уолкера	Хороший результат при анализе "длинных" последовательностей. Гарантирует устойчивость БИХ-фильтра, соответствующего АР-модели	Для "коротких" последовательностей завышенный порядок АР-модели может сопровождаться смешением и расщеплением пиков
Ковариационный	Более высокая точность при анализе "коротких" последовательностей по сравнению с методом Юла—Уолкера с тем же порядком АР-модели	Требуют проверки фильтра на устойчивость БИХ-фильтра, соответствующего АР-модели
Модифицированный ковариационный	Более высокая точность при анализе "коротких" последовательностей по сравнению с методом Юла—Уолкера с тем же порядком АР-модели. Как правило, не приводит к расщеплению пиков и по сравнению с ковариационным методом обеспечивает их меньшее смешение	Требуют проверки фильтра на устойчивость БИХ-фильтра, соответствующего АР-модели
Берга	Хороший результат при анализе "длинных" последовательностей и удовлетворительный при анализе "коротких" последовательностей. Гарантирует устойчивость БИХ-фильтра, соответствующего АР-модели	Для "коротких" последовательностей завышенный порядок АР-модели может сопровождаться смешением и расщеплением пиков

Расчет оценки СПМ выполняется *после* вычисления оценок параметров АР-модели $\hat{\mathbf{a}}$ и оценки дисперсии $\hat{\sigma}_e^2$. Для ковариационного и модифицированного ковариационного метода контролируется устойчивость БИХ-фильтра, соответствующего АР-модели.

В [42] приводятся стандартные функции и script-файл для вычисления оценок СПМ. Здесь же ограничимся анализом некоторых результатов.

Пример 13.8. На рис. 13.8 представлены истинная СПМ "длинной" последовательности длины $N = 10000$ и различные оценки СПМ на периоде $f_d = 2000$ Гц, которые практически совпали. ◀

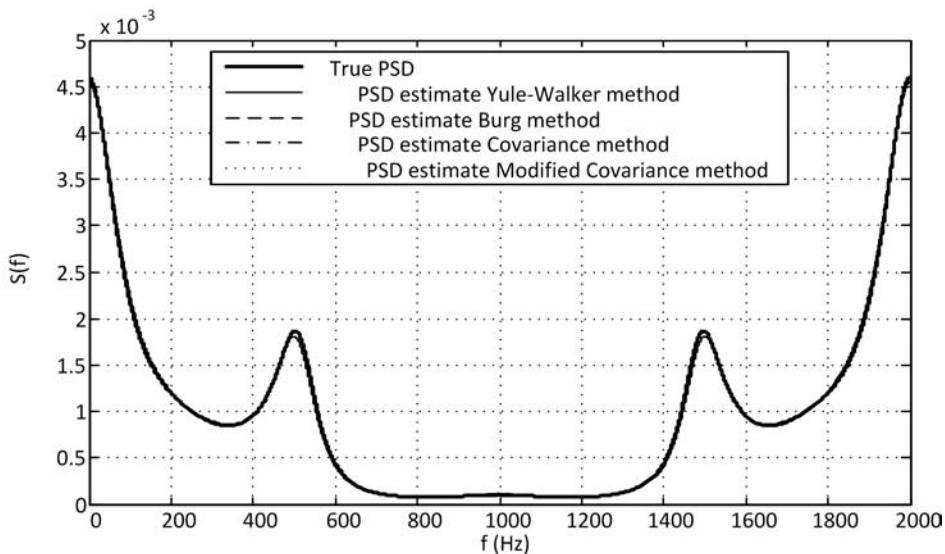


Рис. 13.8. Истинная СПМ и оценки СПМ "длинной" последовательности

Пример 13.9. На рис. 13.9 представлены истинная СПМ "короткой" последовательности длины $N = 100$ и различные оценки СПМ на периоде $f_d = 2000$ Гц.

В оценках СПМ проявились аномалии: смещение пиков и впадин и искажение их значений. ▲

Все рассмотренные параметрические методы оценивания СПМ реализованы в GUI SPTool (см. разд. П2.1.3 приложения 2).

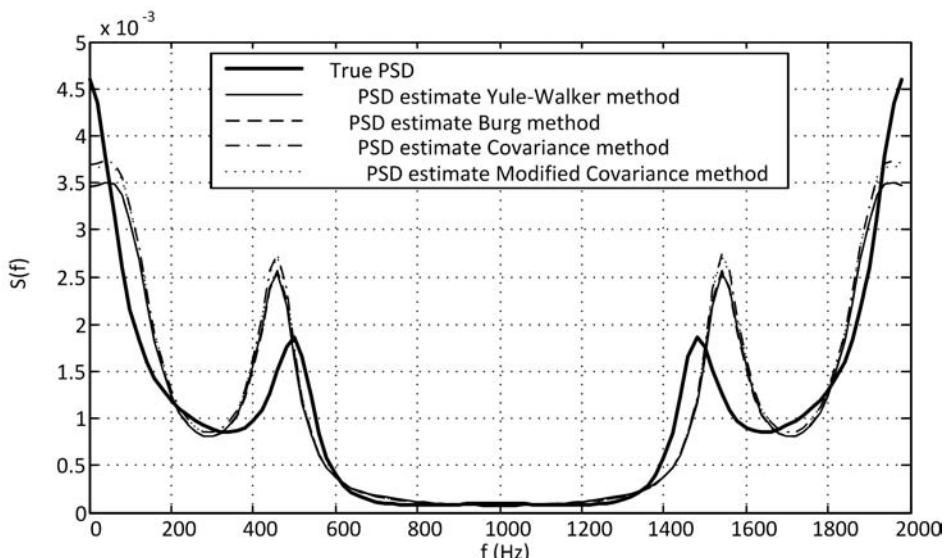


Рис. 13.9. Истинная СПМ и оценки СПМ "короткой" последовательности

13.2.7. Оценка порядка авторегрессионной модели

Порядок АР-модели ($M - 1$) обычно заранее неизвестен, поэтому приходится испытывать его различные значения. Заниженный порядок АР-модели может привести к сглаживанию оценки СПМ (неразличимости малых пиков), а завышенный — к появлению ложных пиков, наряду с возрастанием трудоемкости оценки параметров при большом порядке СЛАУ и риском неустойчивости ее решения при плохо обусловленной матрице¹.

Интуитивно ясно, что с увеличением порядка АР-модели ($M - 1$) — количества отсчетов ($M - 1$) в линейном предсказании — средний квадрат ошибки линейного предсказания будет уменьшаться. Однако представляет интерес *скорость* этого уменьшения, под которой понимают уменьшение *разности* между соседними значениями среднего квадрата ошибки линейного предсказания. Начиная с некоторого порядка ($M - 1$), она начнет резко снижаться: все более удаленные отсчеты будут оказывать все меньшее влияние на изменение ошибки линейного предсказания, и наконец, это влияние станет исчезающим малым.

Именно это положено в основу *оценки* порядка АР-модели: его выбирают из соображений компромисса между уменьшением среднего квадрата ошибки линейного предсказания и увеличением порядка модели, и проблема состоит в том, что значение порядка, начиная с которого скорость уменьшения среднего квадрата ошибки начнет резко снижаться, заранее неизвестно.

Для оптимальной оценки порядка АР-модели применяют различные критерии.

Критерий формулируется следующим: оптимальному порядку АР-модели соответствует минимум некоторой целевой функции $f(N, p, \sigma_{\varepsilon}^2)$:

$$p_{\text{opt}} \rightarrow \min_p f(N, p, \sigma_{\varepsilon}^2), \quad p \in [p_{\min}; p_{\max}], \quad (13.41)$$

где N — длина последовательности; $p = (M - 1)$ — порядок АР-модели; σ_{ε}^2 — средний квадрат ошибки линейного предсказания:

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = M \left\{ \varepsilon^2(n) \right\}.$$

Значения минимального p_{\min} и максимального p_{\max} порядков обычно выбирают эмпирически.

В зависимости от вида целевой функции (13.41) различают следующие основные критерии оптимальной оценки порядка АР-модели [32, 54]:

критерий окончательной ошибки предсказания (ООП):

$$\text{ООП}(N, p, \sigma_{\varepsilon}^2) = \sigma_{\varepsilon}^2 \frac{N + p + 1}{N - p - 1};$$

¹ Оценка обусловленности матрицы рассматривается в [41]. В плохо обусловленной матрице малые погрешности исходных данных могут привести к существенному результату и его недостоверности.

- информационный критерий Акаике (ИКА):

$$\text{ИКА}(N, p, \sigma_{\epsilon}^2) = N \ln(\sigma_{\epsilon}^2) + 2p ;$$

- модифицированный критерий ИКА — длина минимального описания (ДМО):

$$\text{ДМО}(N, p, \sigma_{\epsilon}^2) = N \ln \sigma_{\epsilon}^2 + p \ln N . \quad (13.42)$$

Аналитически эти задачи не решены, но их легко решить численным методом в MATLAB, суть которого состоит в следующем. При фиксированной длине N и выбранном методе оценки параметров AR-модели для всех значений $p \in [p_{\min}; p_{\max}]$ с помощью стандартной функции MATLAB рассчитываются соответствующие значения σ_{ϵ}^2 (они выводятся вместе с оценками параметров AR-модели) и значения целевой функции. Строится график ее зависимости от p , и определяется порядок p_{opt} , при котором она достигает своего минимума.

Пример 13.10. Оценим оптимальный порядок AR-модели в методе Юла—Уолкера по критерию ДМО (13.42). Зададим длину анализируемой последовательности $N=10000$ и диапазон значений порядка $p \in [1; 50]$. Результаты моделирования в MATLAB приведены на рис. 13.10.

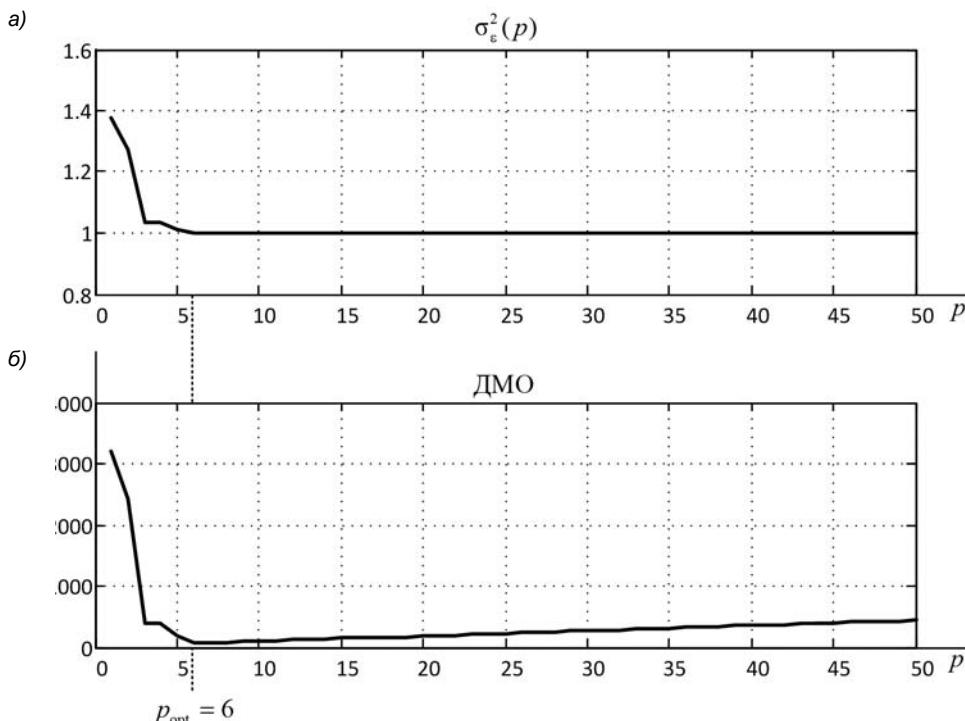
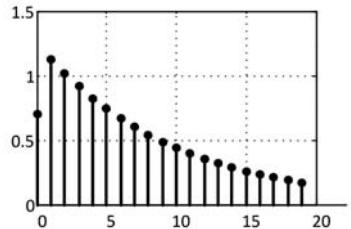


Рис. 13.10. Зависимость среднего квадрата ошибки линейного предсказания от порядка AR-модели (а) и оценка оптимального порядка по критерию ДМО (б)

На рис. 13.10, *a* изображена зависимость среднего квадрата ошибки линейного предсказания σ_e^2 от порядка АР-модели $p = (M - 1)$, подтверждающая, что с его возрастанием значение σ_e^2 уменьшается, но *скорость* его уменьшения резко снижается, начиная с $p = 3$, а начиная с $p = 6$, практически не меняется, и именно этому порядку соответствует минимум значения ДМО (рис. 13.10, *b*). ▀

Для "длинных" последовательностей оценки оптимального порядка на основе различных критериев могут различаться, но незначительно. Однако для "коротких" целевая функция в любом критерии, как правило, не имеет ярко выраженного глобального минимума, поэтому оптимальный порядок p_{opt} выбирается эмпирически, а затем может уточняться по результатам эксперимента.

ГЛАВА 14



Введение в цифровые фильтры

Цифровым фильтром (ЦФ) называют систему, выполняющую преобразование входного сигнала в выходной в соответствии с алгоритмом, отображаемым заданной структурой, реализованной на базе цифрового устройства.

До реализации ЦФ представляет собой стационарную линейную дискретную систему (ЛДС), соотношение вход/выход которой описывается уравнением (2.5)

$$y(nT) = F \{x(nT)\}$$

с линейным оператором F , параметры которого полностью определяются передаточной функцией $H(z)$ и неизменны во времени (рис. 14.1).

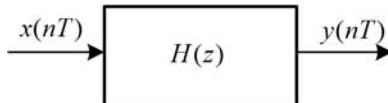


Рис. 14.1. Цифровой фильтр до реализации (линейная дискретная система)

Структура ЦФ (структуре ЛДС) определяется видом (математическим представлением) передаточной функции $H(z)$ и отображает алгоритм вычисления реакции $y(nT)$, описываемый в виде линейного разностного уравнения или системы таких уравнений (см. главу 6).

Реализация структуры ЦФ связана с необходимостью квантования данных (входных, выходных, результатов арифметических операций). При реализации структуры ЦФ на базе цифрового устройства с фиксированной точкой (ФТ) необходимо учитывать последствия неточного представления данных, которые называют эффектами квантования (см. главу 8).

По умолчанию будем подразумевать реализацию структуры ЦФ с ФТ.

После реализации ЦФ будет представлять собой стационарную *нелинейную цифровую систему*, соотношение вход/выход которой описывается уравнением (8.1):

$$y_{\text{п}}(nT) = \tilde{F} \{x_{\text{п}}(nT)\} \quad (14.1)$$

с *нелинейным* оператором \tilde{F} , параметры которого полностью определяются передаточной функцией $\tilde{H}(z)$ с новыми (*квантованными*) коэффициентами, *неизменными во времени* (рис. 14.2).

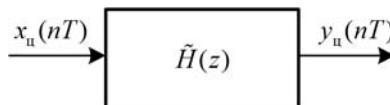


Рис. 14.2. Цифровой фильтр после реализации (цифровая система)

Структура ЦФ с ФТ определяется видом передаточной функции $\tilde{H}(z)$, который *не изменился*, однако *алгоритм вычисления* реакции $y_u(nT)$ будет описываться в виде *нелинейного* разностного уравнения или системы таких уравнений. В этом случае оператор \tilde{F} , определяющий нелинейное математическое преобразование, не удается формализовать вследствие сложных взаимосвязях эффектов квантования.

Эффекты квантования обусловлены ошибками квантования от различных источников при реализации структуры ЦФ с ФТ. В теории ЦОС они исследуются отдельно на *линейных* моделях (см. главу 8).

Нелинейная модель структуры ЦФ с ФТ создается на основе исходной структуры ЦФ с установкой параметров квантования. Обычно моделирование структуры ЦФ с ФТ выполняется в MATLAB средствами GUI FDATool.

Моделирование структуры ЦФ с ФТ позволяет оценить влияние эффектов квантования на характеристики ЦФ, что необходимо перед его реализацией на базе конкретного цифрового устройства.

В ряде источников вводят понятия дискретного фильтра (до реализации) и цифрового фильтра (после реализации), однако в большинстве классических первоисточников такого разделения нет. Понятие цифрового фильтра объединяет в себе и исходный ЦФ (ЛДС), и ЦФ с ФТ¹ (цифровую систему), и из контекста всегда ясно, о чём идет речь.

Цифровой фильтрацией называют процесс обработки сигнала цифровым фильтром.

В теории ЦОС цифровым фильтрам уделяется особое внимание, т. к. их применение, самостоятельное или в составе более сложных систем, позволяет решить многие задачи обработки сигналов, и некоторые из них будут рассмотрены в этой книге.

14.1. Классификация цифровых фильтров

Двум типам ЛДС, КИХ- и БИХ-системам, соответствуют два типа ЦФ:

- КИХ-фильтр (FIR Filter, Finite Impulse Response Filter);
- БИХ-фильтр (IIR Filter, Infinite Impulse Response Filter).

¹ Или с плавающей точкой — ПТ.

Синонимы этих наименований — соответственно, нерекурсивный и рекурсивный фильтр.

Приведенное в начале главы определение цифрового фильтра является общим определением ЦФ в широком смысле. В узком смысле под ЦФ по умолчанию подразумеваются *частотно-избирательный фильтр*.

Частотно-избирательные цифровые фильтры предназначены для селекции спектральных составляющих входной последовательности: их выделения в полосе пропускания и подавления в полосе задерживания, причем эти полосы частот *заранее известны и разнесены*.

Выделяют четыре основных типа избирательности ЦФ:

- ФНЧ — фильтр нижних частот (Lowpass Filter);
- ФВЧ — фильтр верхних частот (Highpass Filter);
- ПФ — полосовой фильтр (Bandpass Filter);
- РФ — режекторный фильтр (Bandstop Filter).

Частотно-избирательный фильтр может быть реализован на базе КИХ и БИХ-фильтра. Выбор типа фильтра будет обсуждаться в последующем после знакомства со спецификой каждого из них. Пока же отметим только суть их различий в контексте классификации ЦФ.

КИХ-фильтры с рациональной передаточной функцией (4.6)

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}$$

не имеют аналоговых прототипов и обладают уникальной возможностью обеспечить строго линейную ФЧХ, исключающую фазовые искажения реакции, благодаря чему они оказались востребованными во многих приложениях ЦОС.

Среди КИХ-фильтров с линейной ФЧХ выделяют *специальные* КИХ-фильтры с особым видом АЧХ, определяющим их специальное назначение. Группа таких фильтров будет рассмотрена в книге:

- однородный фильтр;
- триангулярный фильтр;
- полуполосные фильтры;
- фильтр Найквиста;
- квадратурно-зеркальные фильтры;
- цифровой преобразователь Гильберта;
- цифровой дифференциатор.

БИХ-фильтры с дробно-рациональной передаточной функцией (4.5)

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}$$

имеют аналоговые прототипы, и это позволило применить хорошо развитый математический аппарат при переходе к адекватному БИХ-фильтру.

Подобно аналоговым фильтрам, различают четыре стандартных типа БИХ-фильтров:

- фильтры Баттервортса;
- фильтры Чебышева I рода;
- фильтры Чебышева II рода;
- фильтры Золотарева—Кауэра (эллиптические).

По мере более подробного знакомства с цифровыми фильтрами их классификация будет расширена.

14.2. Проектирование цифровых фильтров

Проектированием цифрового фильтра называют процесс, по завершении которого предъявляется его реализация на базе конкретного цифрового устройства.

Проектирование ЦФ выполняется в три этапа:

1. Синтез ЦФ, включающий следующие основные шаги:

- Выбор типа ЦФ (КИХ или БИХ).

Выбор типа ЦФ, в первую очередь, определяется его назначением, с которым, как правило, связано требование к линейности ФЧХ (строго линейная или это требование можно игнорировать).

- Выбор метода синтеза ЦФ.

Выбор метода зависит от типа ЦФ, а в рамках одного типа — от специфики дополнительных требований (простоты метода, оптимальности порядка фильтра и др.).

- Задание требований к АЧХ.

Требования к АЧХ зависят от типа ЦФ и его назначения (частотно-избирательный, преобразователь Гильберта и др.).

- Расчет передаточной функции ЦФ.

- Выбор структуры ЦФ.

Структура ЦФ зависит от его типа, а в рамках одного типа — от дополнительных требований (скорость обработки сигналов, экономия памяти, минимизация собственного шума и др.).

2. Моделирование структуры ЦФ.

Этот этап необходим перед реализацией структуры ЦФ с ФТ.

3. Реализация структуры ЦФ на базе цифрового устройства.

Структура ЦФ может быть реализована программно, например, на базе цифрового процессора обработки сигналов (ЦПОС), аппаратно, например, на про-

граммируемой логической интегральной схеме (ПЛИС), или аппаратно-программно, когда часть операций реализуется аппаратно, а часть — программно.

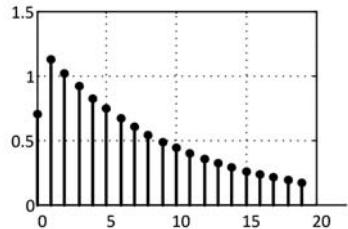
Рассмотрение этого этапа выходит за рамки данной книги. Ограничимся лишь подготовкой к нему — созданием в GUI FDATool модели Simulink структуры ЦФ с ФТ для ее последующей реализации на базе ЦПОС с применением технологии автоматической генерации и оптимизации программного кода в среде MATLAB.

Приведенная процедура проектирования ЦФ является общей, и в дальнейшем будет детализирована для различных типов ЦФ и методов синтеза.

В процедуре выделены курсивом два ключевых шага: для любого типа ЦФ и метода синтеза *задаются требования к АЧХ* и на их основе *рассчитывается передаточная функция*.

Синтез ЦФ и моделирование его структуры с ФТ обычно выполняются в MATLAB средствами GUI FDATool. Описание методов синтеза будет ориентировано на применение данных средств, а сами средства рассматриваются в *приложении 1*.

ГЛАВА 15



КИХ-фильтры с линейной ФЧХ

КИХ-фильтр описывается передаточной функцией (4.7)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^R h(n)z^{-n}. \quad (15.1)$$

Длину N импульсной характеристики и порядок R передаточной функции называют, соответственно, *длиной и порядком КИХ-фильтра*.

КИХ-фильтры характеризуются следующими особенностями:

- устойчивостью по определению;
- возможностью обеспечить строго линейную ФЧХ (ЛФЧХ).

В разд. 5.6 было определено условие, при котором исключаются фазовые искажения реакции, — это строго линейная ФЧХ (5.24):

$$\phi(\hat{\omega}) = \alpha - \tau\hat{\omega}. \quad (15.2)$$

Возможностью обеспечить строго линейную ФЧХ обладают только КИХ-фильтры и только при определенных условиях.

15.1. Условия линейности ФЧХ КИХ-фильтров

КИХ-фильтр обладает строго линейной ФЧХ (с точностью до скачков на π), если для его импульсной характеристики выполняется одно из двух условий:

- симметрия:

$$h(n) = h(N - 1 - n);$$

- антисимметрия:

$$h(n) = -h(N - 1 - n).$$

Этим условиям отвечают *четыре вида* импульсных характеристик (рис. 15.1):

- симметричная:

- нечетной длины N (порядок R четный) — рис. 15.1, а;
- четной длины N (порядок R нечетный) — рис. 15.1, б;

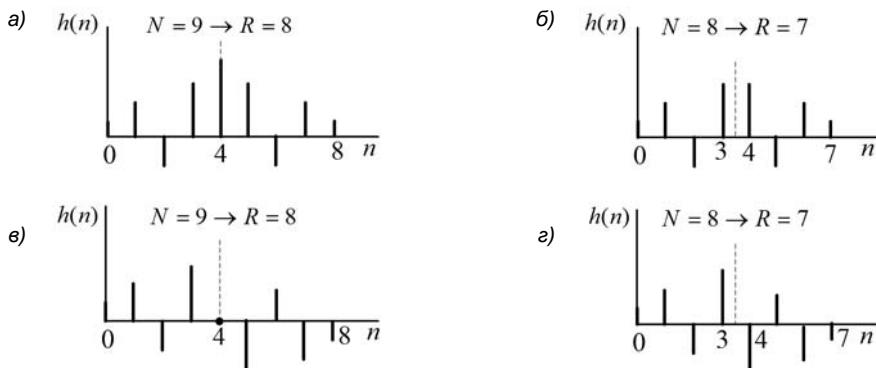


Рис. 15.1. Импульсные характеристики КИХ-фильтров с линейной ФЧХ: симметрична нечетной (*а*) и четной (*б*) длины, антисимметрична нечетной (*в*) и четной (*г*) длины

□ антисимметричная:

- нечетной длины N (порядок R четный) — рис. 15.1, *в*;
- четной длины N (порядок R нечетный) — рис. 15.1, *г*.

15.2. Четыре типа КИХ-фильтров с линейной ФЧХ

Тип КИХ-фильтра с линейной ФЧХ (ЛФЧХ) определяется видом его импульсной характеристики. Четырьем видам ИХ (см. рис. 15.1) соответствуют четыре типа КИХ-фильтров (табл. 15.1).

Таблица 15.1. Четыре типа КИХ-фильтров с ЛФЧХ

Тип КИХ-фильтра	Импульсная характеристика	Длина фильтра N	Порядок фильтра R
1	Симметричная	Нечетная	Четный
2		Четная	Нечетный
3	Антисимметричная	Нечетная	Четный
4		Четная	Нечетный

Определим частотные характеристики данных КИХ-фильтров.

Представим *симметричную* импульсную характеристику КИХ-фильтра *типа 1* в виде (см. рис. 15.1, *а*):

$$\begin{cases} h\left(\frac{R}{2}-n\right)=h\left(\frac{R}{2}+n\right), & n=1, 2, \dots, R/2; \\ h\left(\frac{R}{2}\right), & n=0, \end{cases}$$

и запишем частотную характеристику (5.6):

$$\begin{aligned} H(e^{j\hat{\omega}}) &= \sum_{n=0}^R h(n)e^{-j\hat{\omega}n} = h\left(\frac{R}{2}\right)e^{-j\frac{R}{2}\hat{\omega}} + \sum_{n=1}^{R/2} h\left(\frac{R}{2}-n\right) \left[e^{-j\hat{\omega}\left(\frac{R}{2}-n\right)} + e^{-j\hat{\omega}\left(\frac{R}{2}+n\right)} \right] = \\ &= h\left(\frac{R}{2}\right)e^{-j\frac{R}{2}\hat{\omega}} + \left\{ \sum_{n=1}^{R/2} h\left(\frac{R}{2}-n\right) [e^{jn\hat{\omega}} + e^{-jn\hat{\omega}}] \right\} e^{-j\frac{R}{2}\hat{\omega}}. \end{aligned}$$

Применив формулу Эйлера для косинуса, получаем частотную характеристику КИХ-фильтра *типа 1*:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \left[h\left(\frac{R}{2}\right) + 2 \sum_{n=1}^{R/2} h\left(\frac{R}{2}-n\right) \cos n\hat{\omega} \right] e^{-j\frac{R}{2}\hat{\omega}}. \quad (15.3)$$

Представим *симметричную* импульсную характеристику КИХ-фильтра *типа 2* в виде (см. рис. 15.1, 6):

$$h\left(\frac{R-1}{2}-n\right) = h\left(\frac{R+1}{2}+n\right), \quad n = 0, 1, \dots, (R-1)/2,$$

и запишем частотную характеристику (5.6):

$$\begin{aligned} H(e^{j\hat{\omega}}) &= \sum_{n=0}^R h(n)e^{-j\hat{\omega}n} = \sum_{n=0}^{(R-1)/2} h\left(\frac{R-1}{2}-n\right) \left[e^{-j\hat{\omega}\left(\frac{R-1}{2}-n\right)} + e^{-j\hat{\omega}\left(\frac{R+1}{2}+n\right)} \right] = \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^{(R-1)/2} h\left(\frac{R-1}{2}-n\right) \left[e^{j\left(\frac{n+1}{2}\right)\hat{\omega}} + e^{-j\left(\frac{n+1}{2}\right)\hat{\omega}} \right] \right\} e^{-j\frac{R}{2}\hat{\omega}}. \end{aligned}$$

Применив формулу Эйлера для косинуса, получаем частотную характеристику КИХ-фильтра *типа 2*:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \left[2 \sum_{n=0}^{(R-1)/2} h\left(\frac{R-1}{2}-n\right) \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{\omega} \right] e^{-j\frac{R}{2}\hat{\omega}}. \quad (15.4)$$

Представим *антисимметричную* импульсную характеристику КИХ-фильтра *типа 3* в виде (см. рис. 15.1, 6):

$$\begin{cases} h\left(\frac{R}{2}-1-n\right) = -h\left(\frac{R}{2}+1+n\right), & n = 0, 1, \dots, R/2-1; \\ h\left(\frac{R}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

и запишем частотную характеристику (5.6):

$$\begin{aligned} H(e^{j\hat{\omega}}) &= \sum_{n=0}^R h(n)e^{-j\hat{\omega}n} = \sum_{n=0}^{R/2-1} h\left(\frac{R}{2}-1-n\right) \left[e^{-j\hat{\omega}\left(\frac{R}{2}-1-n\right)} - e^{-j\hat{\omega}\left(\frac{R}{2}+1+n\right)} \right] = \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^{R/2-1} h\left(\frac{R}{2}-1-n\right) \left[e^{j(n+1)\hat{\omega}} - e^{-j(n+1)\hat{\omega}} \right] \right\} e^{-j\frac{R}{2}\hat{\omega}}. \end{aligned}$$

Применив формулу Эйлера для синуса и тождество $j = e^{j\pi/2}$, получаем частотную характеристику КИХ-фильтра *типа 3*:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \left[2 \sum_{n=0}^{R/2-1} h\left(\frac{R}{2} - 1 - n\right) \sin(n+1)\hat{\omega} \right] e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{R}{2}\hat{\omega}\right)}. \quad (15.5)$$

Представим *антисимметричную* импульсную характеристику КИХ-фильтра *типа 4* в виде (см. рис. 15.1, ε):

$$h\left(\frac{R-1}{2} - n\right) = -h\left(\frac{R+1}{2} + n\right), \quad n = 0, 1, \dots, (R-1)/2,$$

и запишем частотную характеристику (5.6):

$$\begin{aligned} H(e^{j\hat{\omega}}) &= \sum_{n=0}^R h(n) e^{-j\hat{\omega}n} = \sum_{n=0}^{(R-1)/2} h\left(\frac{R-1}{2} - n\right) \left[e^{-j\hat{\omega}\left(\frac{R-1}{2}-n\right)} - e^{-j\hat{\omega}\left(\frac{R+1}{2}+n\right)} \right] = \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^{(R-1)/2} h\left(\frac{R-1}{2} - n\right) \left[e^{j\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{\omega}} - e^{-j\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{\omega}} \right] \right\} e^{-j\frac{R}{2}\hat{\omega}}. \end{aligned}$$

Применив формулу Эйлера для синуса и тождество $j = e^{j\pi/2}$, получаем частотную характеристику КИХ-фильтра *типа 4*:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \left[2 \sum_{n=0}^{(R-1)/2} h\left(\frac{R-1}{2} - n\right) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\hat{\omega} \right] e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{R}{2}\hat{\omega}\right)}. \quad (15.6)$$

Обобщенная частотная характеристика КИХ-фильтров имеет вид:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = B(\hat{\omega}) e^{j\varphi(\hat{\omega})} = B(\hat{\omega}) e^{j\left(\alpha - \frac{R}{2}\hat{\omega}\right)}, \quad (15.7)$$

где $B(\hat{\omega})$ — *амплитудная функция*, связанная с АЧХ соотношением

$$A(\hat{\omega}) = |H(e^{j\hat{\omega}})| = |B(\hat{\omega})|;$$

$\varphi(\hat{\omega}) = \alpha - R\hat{\omega}/2$ — *линейная ФЧХ* со скачками на π на тех частотах, где амплитудная функция меняет знак (АЧХ равна нулю).

При *симметричной* импульсной характеристике (типы 1, 2) приращение $\alpha = 0$, и (15.7) принимает вид

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = B(\hat{\omega}) e^{j\varphi(\hat{\omega})} = B(\hat{\omega}) e^{-j\frac{R}{2}\hat{\omega}}. \quad (15.8)$$

При *антисимметричной* импульсной характеристике (типы 3, 4) приращение $\alpha = \pi/2$, и (15.7) имеет вид

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = B(\hat{\omega}) e^{j\varphi(\hat{\omega})} = B(\hat{\omega}) e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{R}{2}\hat{\omega}\right)}. \quad (15.9)$$

15.3. Амплитудные функции КИХ-фильтров с линейной ФЧХ

Представим амплитудные функции $B(\hat{\omega})$ КИХ-фильтров в общепринятом для тригонометрических полиномов виде.

Амплитудную функцию КИХ-фильтра *типа 1* в (15.3):

$$B(\hat{\omega}) = h\left(\frac{R}{2}\right) + 2 \sum_{n=1}^{R/2} h\left(\frac{R}{2} - n\right) \cos n\hat{\omega}$$

путем следующих замен:

$$\begin{cases} M = R/2; \\ a_0 = h(M); \\ a_k = 2h(M-k), \quad k = 1, 2, \dots, M \end{cases}$$

приведем к виду:

$$B(\hat{\omega}, \mathbf{a}) = \sum_{k=0}^M a_k \cos k\hat{\omega},$$

где \mathbf{a} — вектор коэффициентов тригонометрического полинома.

Амплитудную функцию КИХ-фильтра *типа 2* в (15.4):

$$B(\hat{\omega}) = 2 \sum_{n=0}^{(R-1)/2} h\left(\frac{R-1}{2} - n\right) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\hat{\omega}$$

путем следующих замен:

$$\begin{cases} M = (R-1)/2; \\ a_k = 2h(M-k), \quad k = 0, 1, \dots, M \end{cases}$$

приведем к виду:

$$B(\hat{\omega}, \mathbf{a}) = \sum_{k=0}^M a_k \cos(k + 1/2)\hat{\omega}.$$

Амплитудную функцию КИХ-фильтра *типа 3* в (15.5):

$$B(\hat{\omega}) = 2 \sum_{n=0}^{R/2-1} h\left(\frac{R}{2} - 1 - n\right) \sin(n + 1)\hat{\omega}$$

путем следующих замен:

$$\begin{cases} M = R/2 - 1; \\ a_k = 2h(M-k), \quad k = 0, 1, \dots, M \end{cases}$$

приведем к виду:

$$B(\hat{\omega}, \mathbf{a}) = \sum_{k=0}^M a_k \sin(k + 1)\hat{\omega}.$$

И наконец, амплитудную функцию КИХ-фильтра *типа 4* в (15.6):

$$B(\hat{\omega}) = 2 \sum_{n=0}^{(R-1)/2} h\left(\frac{R-1}{2} - n\right) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \hat{\omega}$$

путем следующих замен:

$$\begin{cases} M = (R-1)/2; \\ a_k = 2h(M-k), \quad k = 0, 1, \dots, M \end{cases}$$

приведем к виду:

$$B(\hat{\omega}, \mathbf{a}) = \sum_{k=0}^M a_k \sin(k + 1/2) \hat{\omega}.$$

Амплитудные функции и ФЧХ КИХ-фильтров представлены в табл. 15.2. В последнем столбце приведены типы избирательности, возможные для данного типа КИХ-фильтра. Для КИХ-фильтров типов 3 и 4 добавлены цифровой преобразователь Гильберта (ЦПГ) и цифровой дифференциатор (ЦД), которые будут рассматриваться в главе 18.

Таблица 15.2. Основные характеристики КИХ-фильтров с ЛФЧХ

Тип КИХ-фильтра	Амплитудная функция $B(\hat{\omega}, \mathbf{a})$	ЛФЧХ $\phi(\hat{\omega})$	Применение
Тип 1 ИХ симметричная. Порядок R четный	$\sum_{k=0}^M a_k \cos k \hat{\omega}$ $M = R/2$ $a_0 = h(M)$ $a_k = 2h(M - k), k \neq 0$	$-\frac{R}{2} \hat{\omega}$	ФНЧ. ФВЧ. ПФ. РФ
Тип 2 ИХ симметричная. Порядок R нечетный	$\sum_{k=0}^M a_k \cos(k + 1/2) \hat{\omega}$ $M = (R-1)/2$ $a_k = 2h(M - k)$	$-\frac{R}{2} \hat{\omega}$	ФНЧ. ПФ
Тип 3 ИХ антисимметрич- ная. Порядок R четный	$\sum_{k=0}^M a_k \sin(k + 1) \hat{\omega}$ $M = R/2 - 1$ $a_k = 2h(M - k)$	$\frac{\pi}{2} - \frac{R}{2} \hat{\omega}$	ПФ. ЦПГ. ЦД
Тип 4 ИХ антисимметрич- ная. Порядок R нечетный	$\sum_{k=0}^M a_k \sin(k + 1/2) \hat{\omega}$ $M = (R-1)/2$ $a_k = 2h(M - k)$	$\frac{\pi}{2} - \frac{R}{2} \hat{\omega}$	ФВЧ. ПФ. ЦПГ. ЦД

Ограничения на *тип избирательности* поясним на простых примерах, записывая для каждого типа КИХ-фильтра передаточную функцию $H(z)$ и определяя АЧХ на границах основной полосы частот $[0; \pi]$:

$$A(0) = |H(z)|_{z=e^{j0}} = 1; \quad (15.10)$$

$$A(\pi) = |H(z)|_{z=e^{j\pi}} = -1. \quad (15.11)$$

Пример 15.1. Запишем передаточную функцию $H(z)$ КИХ-фильтра *типа 1* длины $N = 9$ (см. рис. 15.1, а), используя краткие обозначения $h(n) = h_n$:

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} + h_4 z^{-4} + h_3 z^{-5} + h_2 z^{-6} + h_1 z^{-7} + h_0 z^{-8},$$

и определим значения АЧХ (15.10) и 15.11):

$$A(0) = |2h_0 + 2h_1 + 2h_2 + 2h_3 + h_4| \geq 0;$$

$$A(\pi) = |2h_0 - 2h_1 + 2h_2 - 2h_3 + h_4| \geq 0.$$

На границах основной полосы частот значения АЧХ не тождественны нулю, поэтому КИХ-фильтры *типа 1* не имеют ограничений на тип избирательности. ◀

Пример 15.2. Запишем передаточную функцию $H(z)$ КИХ-фильтра *типа 2* длины $N = 8$ (см. рис. 15.1, б):

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} + h_3 z^{-4} + h_2 z^{-5} + h_1 z^{-6} + h_0 z^{-7}$$

и определим значения АЧХ (15.10) и 15.11):

$$A(0) = |2h_0 + 2h_1 + 2h_2 + 2h_3| \geq 0;$$

$$A(0) = |h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_3 + h_2 + h_1 + h_0| = |2h_0 + 2h_1 + 2h_2 + 2h_3| \geq 0;$$

$$A(\pi) = |h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + h_3 - h_2 + h_1 - h_0| \equiv 0.$$

На границе основной полосы частот $\hat{\omega} = \pi$ значение АЧХ тождественно нулю, поэтому тип избирательности КИХ-фильтров *типа 2* ограничен ФНЧ и ПФ. ◀

Пример 15.3. Запишем передаточную функцию $H(z)$ КИХ-фильтра *типа 3* длины $N = 9$ (см. рис. 15.1, в):

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} + \mathbf{0} z^{-4} - h_3 z^{-5} - h_2 z^{-6} - h_1 z^{-7} - h_0 z^{-8}$$

и определим значения АЧХ (15.10) и (15.11):

$$A(0) = |h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + \mathbf{0} - h_3 - h_2 - h_1 - h_0| \equiv 0;$$

$$A(\pi) = A(0) = |h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + 0 + h_3 - h_2 + h_1 - h_0| \equiv 0.$$

На обеих границах основной полосы частот значения АЧХ тождественны нулю, поэтому тип избирательности КИХ-фильтров *типа 3* ограничен ПФ. ◀

Пример 15.4. Запишем передаточную функцию $H(z)$ КИХ-фильтра *типа 4* длины $N = 8$ (см. рис. 15.1, ε):

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} - h_3 z^{-4} - h_2 z^{-5} - h_1 z^{-6} - h_0 z^{-7}$$

и определим значения АЧХ (15.10) и 15.11):

$$A(0) = |h_0 + h_1 + h_2 + h_3 - h_3 - h_2 - h_1 - h_0| \equiv 0 ;$$

$$A(\pi) = |2h_0 - 2h_1 + 2h_2 - 2h_3| \geq 0 .$$

На границе основной полосы частот $\hat{\omega} = 0$ значение АЧХ тождественно нулю, поэтому тип избирательности КИХ-фильтров *типа 4* ограничен ФВЧ и ПФ. ▲

15.4. Требования к АЧХ КИХ-фильтров

Требования к АЧХ КИХ-фильтра $A(f)$ (нормированной по умолчанию) задаются в основной полосе частот $[0; f_d/2]$ и включают в себя:

- *частоту дискретизации* f_d ;
- *границные частоты* полос пропускания (ПП) и полос задерживания (ПЗ):
 - f_χ — граничная частота ПП для ФНЧ и ФВЧ;
 - f_k — граничная частота ПЗ для ФНЧ и ФВЧ;
 - $f_{-\chi}, f_\chi$ — левая и правая граничные частоты ПП для ПФ и РФ;
 - f_{-k}, f_k — левая и правая граничные частоты ПЗ для ПФ и РФ;
- *максимально допустимые отклонения* АЧХ $A(f)$:
 - δ_1 — от единицы в ПП;
 - δ_2 — от нуля в ПЗ.

На рис. 15.2—15.5 изображены идеальные АЧХ $A_n(f)$ КИХ-фильтров различного типа избирательности и требования к их АЧХ. Для ПФ заданы одинаковые максимально допустимые отклонения в ПЗ1 и ПЗ2, а для РФ — одинаковые в ПП1 и ПП2, однако в общем случае они могут отличаться.

Требования могут задаваться к АЧХ в децибелах — *характеристике затухания*:

$$a(f) (\text{дБ}) = -20 \lg A(f) . \quad (15.12)$$

В этом случае вместо значений максимально допустимых отклонений δ_1 и δ_2 задаются:

- a_{\max} (дБ) — максимально допустимое затухание в ПП;
- a_{\min} (дБ) — минимально допустимое затухание в ПЗ.

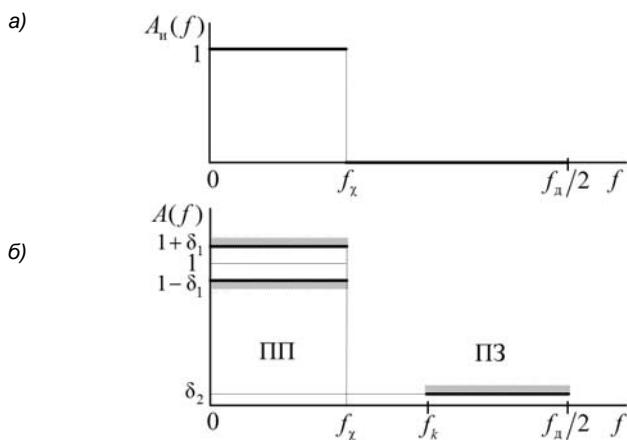


Рис. 15.2. Идеальная АЧХ ФНЧ (а) и требования к АЧХ КИХ-фильтра ФНЧ (б)

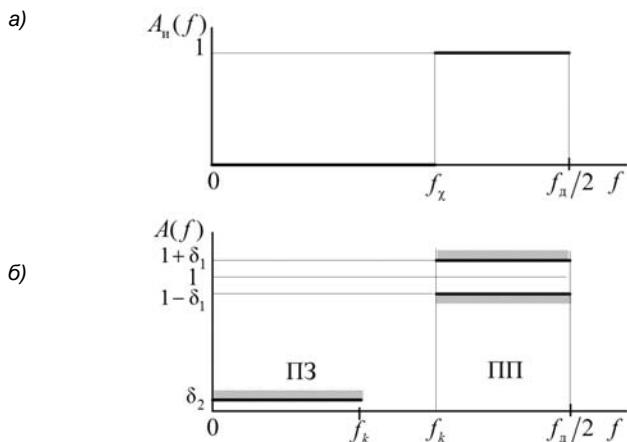


Рис. 15.3. Идеальная АЧХ ФВЧ (а) и требования к АЧХ КИХ-фильтра ФВЧ (б)

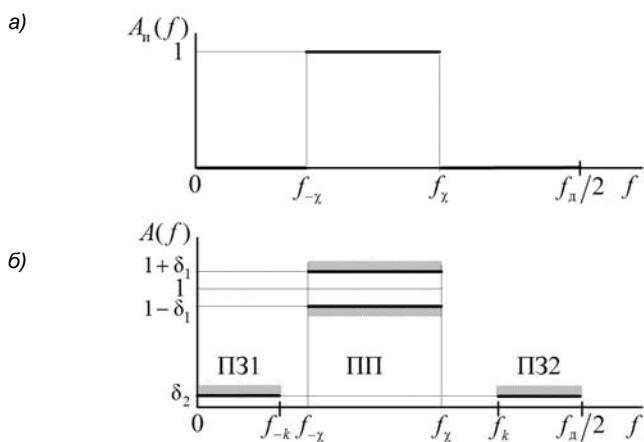


Рис. 15.4. Идеальная АЧХ ПФ (а) и требования к АЧХ КИХ-фильтра ПФ (б)

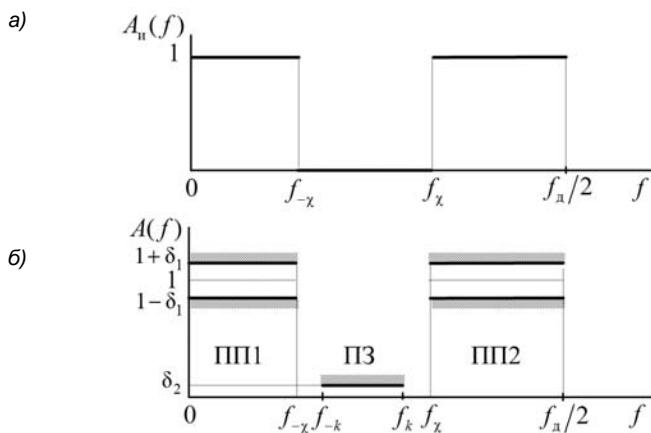


Рис. 15.5. Идеальная АЧХ РФ (a) и требования к АЧХ КИХ-фильтра РФ (б)

Взаимосвязь между соответствующими значениями устанавливается формулами:

$$a_{\max} = -20 \lg(1 - \delta_1) \text{ (дБ);}$$

$$a_{\min} = -20 \lg(\delta_2) \text{ (дБ),}$$

и наоборот:

$$\delta_1 = 1 - 10^{-a_{\max}/20};$$

$$\delta_2 = 10^{-a_{\min}/20}.$$

На рис. 15.6, а приведены требования к *характеристике затухания* КИХ-фильтра ФНЧ.

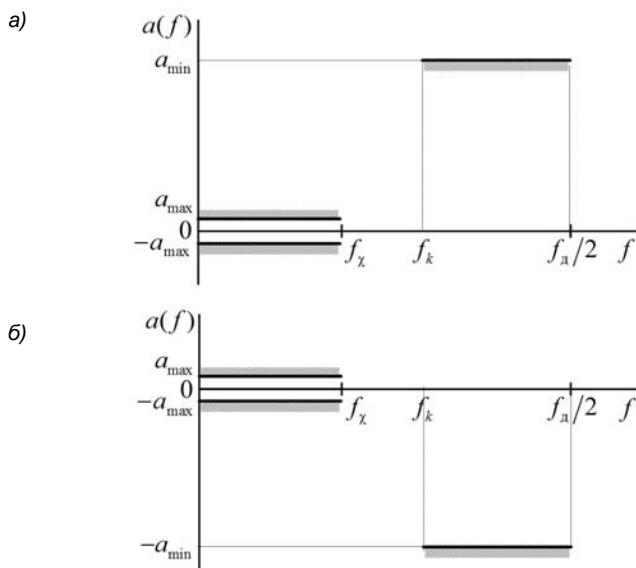


Рис. 15.6. Требования к характеристике затухания КИХ-фильтра ФНЧ (а) и их соответствие для характеристики ослабления (б)

Характеристика ослабления отличается от характеристики затухания только знаком (рис. 15.6, б):

$$a(f) \text{ (дБ)} = 20 \lg A(f). \quad (15.13)$$

В этом случае отрицательное значение $-a_{\min}$ (дБ) будет соответствовать максимально допустимому ослаблению в ПЗ, а положительное значение $a_{\max} = 20 \lg(1 + \delta_1)$ — максимально допустимому ослаблению в ПП.

15.5. Структуры КИХ-фильтров с линейной ФЧХ

В прямой структуре КИХ-фильтра (см. рис. 6.9) с симметричной или антисимметричной импульсной характеристикой число умножителей можно сократить практически вдвое, если в его передаточной функции (15.1) привести подобные слагаемые. Структуру, определяемую видом передаточной функции с приведением подобных слагаемых, называют *прямой приведенной*.

В англоязычной литературе и в MATLAB ей соответствуют две разновидности структур (см. табл. 6.1):

- прямая структура с *симметричной* импульсной характеристикой — Direct-Form Symmetric FIR;
- прямая структура с *антисимметричной* импульсной характеристикой — Direct-Form Antisymmetric FIR.

Представим примеры простейших приведенных структур КИХ-фильтров с линейной ФЧХ.

Пример 15.5. Прямая приведенная структура КИХ-фильтра *типа 1* длины $N = 7$ определяется передаточной функцией (15.1) с приведением подобных слагаемых с симметричными отсчетами ИХ:

$$\begin{aligned} H(z) &= h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} + h_2 z^{-4} + h_1 z^{-5} + h_0 z^{-6} = \\ &= h_0(1 + z^{-6}) + h_1(z^{-1} + z^{-5}) + h_2(z^{-2} + z^{-4}) + h_3 z^{-3}, \end{aligned}$$

и отображает алгоритм вычисления реакции в виде разностного уравнения при ННУ:

$$y(n) = h_0 [x(n) + x(n-6)] + h_1 [x(n-1) + x(n-5)] + h_2 [x(n-2) + x(n-4)] + h_3 x(n-3).$$

На рис. 15.7 представлена прямая приведенная структура КИХ-фильтра типа 1 произвольной длины N .

В структуре КИХ-фильтра типа 2 будем иметь последний сумматор с умножителем $h_{(R-1)/2}$. ◀

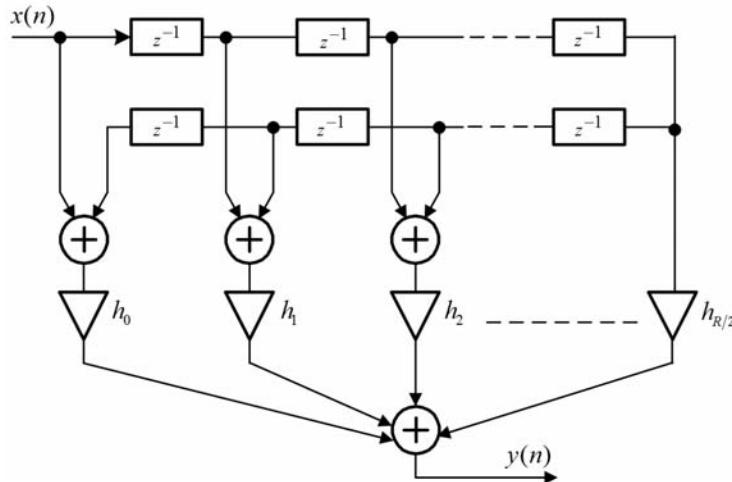


Рис. 15.7. Прямая приведенная структура КИХ-фильтра типа 1

Пример 15.6. Прямая приведенная структура КИХ-фильтра *типа 3* длины $N = 7$ определяется передаточной функцией (15.1) с приведением подобных слагаемых с антисимметричными отсчетами ИХ:

$$\begin{aligned} H(z) &= h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \mathbf{0} z^{-3} - h_2 z^{-4} - h_1 z^{-5} - h_0 z^{-6} = \\ &= h_0(1 - z^{-6}) + h_1(z^{-1} - z^{-5}) + h_2(z^{-2} - z^{-4}), \end{aligned}$$

и отображает алгоритм вычисления реакции в виде разностного уравнения при ННУ:

$$y(n) = h_0[x(n) - x(n-6)] + h_1[x(n-1) - x(n-5)] + h_2[x(n-2) - x(n-4)].$$

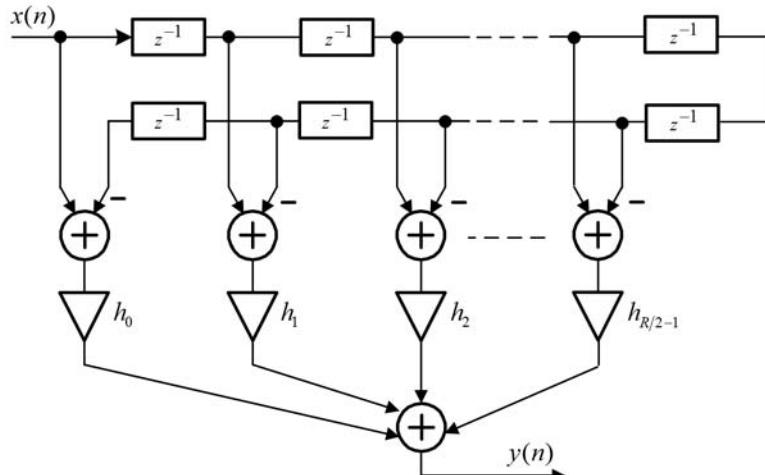


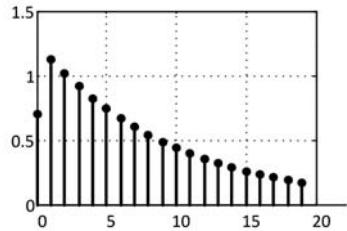
Рис. 15.8. Прямая приведенная структура КИХ-фильтра типа 3

На рис. 15.8 представлена прямая приведенная структура КИХ-фильтра типа 3 произвольной длины N .

В структуре КИХ-фильтра типа 4 будем иметь последний сумматор с умножителем $h_{(R-1)/2} \cdot \blacktriangleleft$.

В прямых приведенных структурах за счет сокращения числа умножителей повышается скорость обработки сигналов — для вычисления реакции требуется практически вдвое меньше операций умножения.

ГЛАВА 16



Синтез КИХ-фильтров методом окон

Синтез КИХ-фильтра с передаточной функцией (15.1)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = H(z) = \sum_{n=0}^R h(n)z^{-n} \quad (16.1)$$

сводится к расчету его *импульсной характеристики* $h(n)$, и при *линейной* ФЧХ достаточно определить половину ее отсчетов.

Среди методов синтеза КИХ-фильтров на практике наибольшее распространение получили два "классических": метод окон и метод наилучшей равномерной (чебышевской) аппроксимации.

В данной главе изучается первый метод, а второму посвящена следующая глава.

Для того чтобы понять идею метода окон, определим импульсную характеристику *идеального* КИХ-фильтра.

16.1. Импульсная характеристика идеального КИХ-фильтра

Под идеальным КИХ-фильтром подразумевают КИХ-фильтр с идеальной АЧХ.

Без потери общности рассмотрим возможность синтеза идеального ФНЧ на базе КИХ-фильтра типа 1 с частотной характеристикой $H_u(e^{j\hat{\omega}})$ (15.8):

$$H_u(e^{j\hat{\omega}}) = B_u(\hat{\omega})e^{-j\frac{R}{2}\hat{\omega}} = A_u(\hat{\omega})e^{-j\frac{R}{2}\hat{\omega}}, \quad (16.2)$$

где $A_u(\hat{\omega})$ — идеальная АЧХ с *частотой разрыва* $\hat{\omega}_c$:

$$A_u(\hat{\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \hat{\omega} \leq \hat{\omega}_c; \\ 0, & \hat{\omega}_c < \hat{\omega} \leq \pi. \end{cases} \quad (16.3)$$

На рис. 16.1 изображена идеальная АЧХ ФНЧ на периоде $[-\pi; \pi]$ с разрывами 1-го рода на частотах $\pm \hat{\omega}_c$.

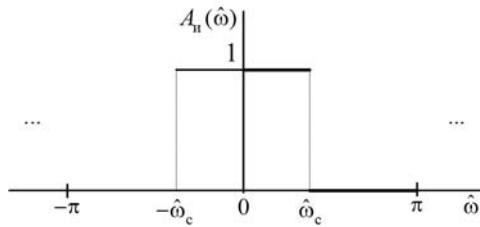


Рис. 16.1. Идеальная АЧХ КИХ-фильтра ФНЧ

Свойство *периодичности* частотной характеристики (16.2) позволяет представить ее в виде ряда Фурье (3.46):

$$H_u(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_u(n) e^{-jn\hat{\omega}}, \quad (16.4)$$

с коэффициентами, равными отсчетам импульсной характеристики (ИХ) идеально-го КИХ-фильтра:

$$h_u(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_u(e^{j\hat{\omega}}) e^{jn\hat{\omega}} d\hat{\omega}. \quad (16.5)$$

Подставляя в (16.5) $H_u(e^{j\hat{\omega}})$ (16.2) и $A_u(\hat{\omega})$ (16.3), определим $h_u(n)$:

$$\begin{aligned} h_u(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A_u(\hat{\omega}) e^{-jn\frac{R}{2}\hat{\omega}} e^{jn\hat{\omega}n} d\hat{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\hat{\omega}_c}^{\hat{\omega}_c} e^{jn\hat{\omega}\left(n - \frac{R}{2}\right)} d\hat{\omega} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{jn\hat{\omega}\left(n - \frac{R}{2}\right)}}{j\left(n - \frac{R}{2}\right)} \Bigg|_{-\hat{\omega}_c}^{\hat{\omega}_c} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin\left[\hat{\omega}_c\left(n - \frac{R}{2}\right)\right]}{\left(n - \frac{R}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Раскрывая неопределенность в точке $n = R/2$, окончательно имеем:

$$h_u(n) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin\left[\hat{\omega}_c\left(n - R/2\right)\right]}{\left(n - R/2\right)}, & n \neq R/2; \\ \frac{\hat{\omega}_c}{\pi}, & n = R/2. \end{cases} \quad (16.6)$$

Проанализируем полученный результат (рис. 16.2, а).

По определению импульсная характеристика представляет собой реакцию ЛДС на цифровой единичный импульс $u_0(n)$ (1.6) при *нулевых начальных условиях*, что эквивалентно *усечению* $h_u(n)$ слева:

$$h_u(n)|_{n<0} = 0,$$

т. к. в противном случае будет нарушено условие *физической реализуемости*: реакция будет предшествовать воздействию.

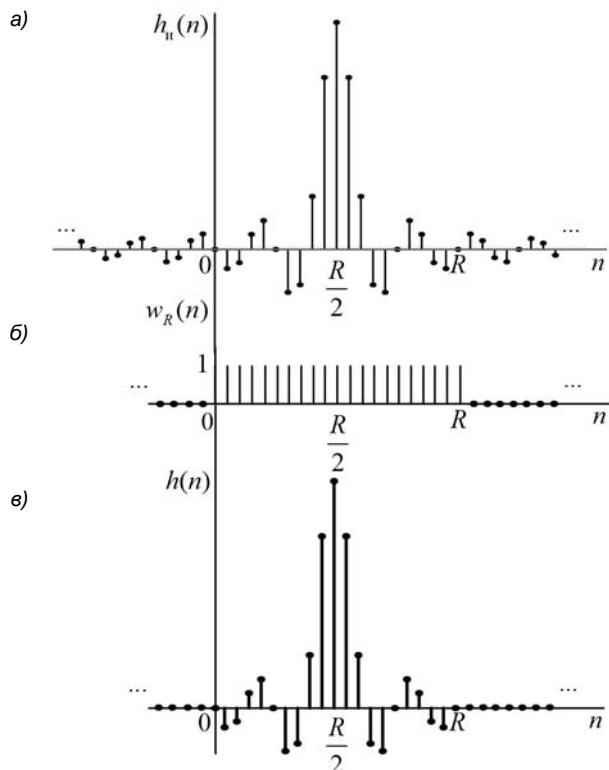


Рис. 16.2. Импульсная характеристика идеального КИХ-фильтра типа 1 (а), прямоугольное окно (б) и фрагмент импульсной характеристики, выделенный окном (в)

С другой стороны, для того чтобы ФЧХ была *линейной*, импульсная характеристика должна быть *конечной* и *симметричной* относительно $n = (R/2)$, что эквивалентно *усечению* $h_u(n)$ *справа*:

$$h_u(n)|_{n>R} = 0.$$

В результате получим *фрагмент* импульсной характеристики идеального КИХ-фильтра на интервале $[0; R] = [0; N - 1]$, представленный на рис. 16.2, в.

Идея метода окон состоит в выделении данного фрагмента путем умножения ИХ идеального КИХ-фильтра $h_u(n)$ (рис. 16.2, а) на весовую функцию (*окно*) $w_R(n)$ (рис. 16.2, б):

$$h_u(n)w_R(n) = \begin{cases} h_u(n), & 0 \leq n \leq N - 1; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (16.7)$$

где:

$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N - 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (16.8)$$

Окно $w_R(n)$ называют *прямоугольным* или *окном Дирихле*, а отсчеты фрагмента ИХ представляют собой коэффициенты передаточной функции КИХ-фильтра (16.1).

Аналитические формулы импульсных характеристик идеальных КИХ-фильтров с другими типами избирательности легко получить по аналогии. Для КИХ-фильтра типа 1 с симметричной ИХ $h_u(R/2 - n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm R/2$, они приводятся в табл. 16.1 [4, 46].

Таблица 16.1. Аналитические формулы импульсных характеристик

Тип избирательности	Импульсная характеристика идеального КИХ-фильтра	Частота разрыва
ФНЧ	$h_u(n) = \begin{cases} \frac{\sin \hat{\omega}_c n}{\pi n}, & n \neq 0; \\ \hat{\omega}_c / \pi, & n = 0 \end{cases}$	
ФВЧ	$h_u(n) = \begin{cases} -\frac{\sin \hat{\omega}_c n}{\pi n}, & n \neq 0; \\ 1 - \hat{\omega}_c / \pi, & n = 0 \end{cases}$	$\hat{\omega}_c = \frac{\hat{\omega}_k + \hat{\omega}_\chi}{2}$
ПФ	$h_u(n) = \begin{cases} \frac{\sin \hat{\omega}_{c2} n - \sin \hat{\omega}_{c1} n}{\pi n}, & n \neq 0; \\ \hat{\omega}_{c2} / \pi - \hat{\omega}_{c1} / \pi, & n = 0 \end{cases}$	$\hat{\omega}_{c1} = \frac{\hat{\omega}_{-k} + \hat{\omega}_{-\chi}}{2};$
РФ	$h_u(n) = \begin{cases} \frac{\sin \hat{\omega}_{c1} n - \sin \hat{\omega}_{c2} n}{\pi n}, & n \neq 0; \\ \hat{\omega}_{c1} / \pi - \hat{\omega}_{c2} / \pi, & n = 0 \end{cases}$	$\hat{\omega}_{c2} = \frac{\hat{\omega}_k + \hat{\omega}_\chi}{2}$

16.2. Окно Дирихле и эффект Гиббса

Представим импульсную характеристику, усеченную с помощью окна Дирихле, в виде произведения (16.7):

$$h(n) = \begin{cases} h_u(n)w_R(n), & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (16.9)$$

Частотную характеристику КИХ-фильтра (5.6) в этом случае можно интерпретировать как *усечение ряда Фурье* (16.4) с помощью окна Дирихле:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\hat{\omega}n}. \quad (16.10)$$

Для того чтобы оценить возникающие при этом эффекты, определим частотную характеристику произведения в (16.9), применив свойство Фурье-преобразования

ния (9.22), в соответствии с которым она будет равна свертке Фурье-изображений сомножителей:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_u(e^{j\varphi}) W_R(e^{j(\hat{\omega}-\varphi)}) d\varphi. \quad (16.11)$$

Определим Фурье-изображение окна Дирихле, которое обычно называют его *частотной характеристикой*:

$$W_R(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{N-1} w_R(n) e^{-jn\hat{\omega}} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-jn\hat{\omega}})^n. \quad (16.12)$$

Воспользуемся формулой для суммы конечной геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}. \quad (16.13)$$

Подставим $q = e^{-j\hat{\omega}}$ и выполним тождественные преобразования:

$$W_R(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{1 - e^{-jN\hat{\omega}}}{1 - e^{-j\hat{\omega}}} = \frac{e^{-j\frac{\hat{\omega}N}{2}} \left(e^{j\frac{\hat{\omega}N}{2}} - e^{-j\frac{\hat{\omega}N}{2}} \right)}{e^{-j\frac{\hat{\omega}}{2}} \left(e^{j\frac{\hat{\omega}}{2}} - e^{-j\frac{\hat{\omega}}{2}} \right)}.$$

Применив формулу Эйлера для синуса, получим частотную характеристику окна, известную как *ядро Дирихле*:

$$W_R(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sin\left(\frac{\hat{\omega}N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)} e^{-j\frac{R}{2}\hat{\omega}}. \quad (16.14)$$

Представим ее в виде

$$W_R(e^{j\hat{\omega}}) = W_R(\hat{\omega}) e^{-j\frac{R}{2}\hat{\omega}}, \quad (16.15)$$

где $W_R(\hat{\omega})$ — амплитудная функция окна Дирихле:

$$W_R(\hat{\omega}) = \frac{\sin(\hat{\omega}N/2)}{\sin(\hat{\omega}/2)} = \begin{cases} \frac{\sin(\hat{\omega}N/2)}{\sin(\hat{\omega}/2)}, & \hat{\omega} \neq 0; \\ N, & \hat{\omega} = 0. \end{cases} \quad (16.16)$$

Подставляя в (16.11) $H_u(e^{j\hat{\omega}})$ (16.2) и $W_R(e^{j\hat{\omega}})$ (16.15), получим обобщенную частотную характеристику КИХ-фильтра ФНЧ в виде (15.8):

$$\begin{aligned} H(e^{j\hat{\omega}}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A_u(\varphi) e^{-j\frac{R}{2}\varphi} W_R(\hat{\omega}-\varphi) e^{-j\frac{R}{2}(\hat{\omega}-\varphi)} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\hat{\omega}_c}^{\hat{\omega}_c} e^{-j\frac{R}{2}\varphi} W_R(\hat{\omega}-\varphi) e^{-j\frac{R}{2}\hat{\omega}} e^{j\frac{R}{2}\varphi} d\varphi = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\hat{\omega}_c}^{\hat{\omega}_c} W_R(\hat{\omega}-\varphi) d\varphi \right] e^{-j\frac{R}{2}\hat{\omega}} = B(\hat{\omega}) e^{-j\frac{R}{2}\hat{\omega}}, \end{aligned}$$

где:

- $B(\hat{\omega})$ — амплитудная функция КИХ-фильтра, представляющая собой свертку идеальной АЧХ $A_u(\hat{\omega})$ с амплитудной функцией окна Дирихле $W_R(\hat{\omega})$.

Эту операцию иллюстрирует рис. 16.3;

- $R\hat{\omega}/2$ — линейная ФЧХ, такая же, как у идеального КИХ-фильтра.

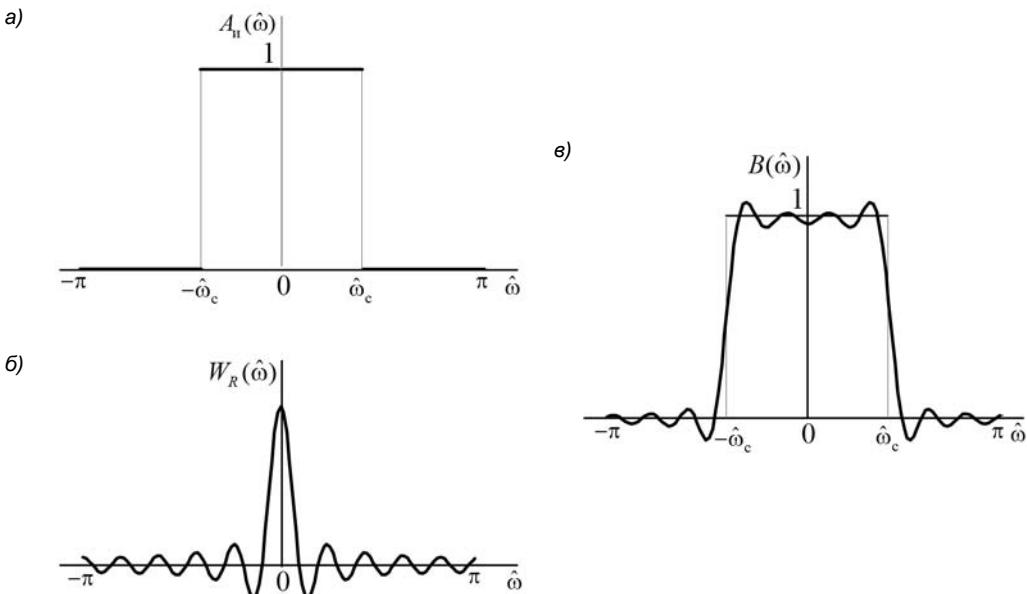


Рис. 16.3. Идеальная АЧХ ФНЧ (а), амплитудная функция окна Дирихле (б) и их свертка — амплитудная функция КИХ-фильтра ФНЧ (в)

Рассмотрим амплитудную функцию окна Дирихле $W_R(\hat{\omega})$. Она имеет *главный* и *боковые лепестки* (рис. 16.3, б).

Боковые лепестки расположены между нулями функции $W_R(\hat{\omega})$ (16.16), которым соответствуют значения

$$\hat{\omega}N/2 = k\pi.$$

Отсюда получаем частоты *нулей* $W_R(\hat{\omega})$ в *основной полосе частот* $[0; \pi]$:

$$\hat{\omega} = k2\pi/N, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

где $K = N/2$ при N четном и $K = (N-1)/2 = R/2$ при N нечетном, и *ширину боковых лепестков* (расстояние между нулями):

$$\Delta\hat{\omega} = 2\pi/N. \quad (16.17)$$

Ширина главного лепестка (расстояние между его нулями) вдвое большая:

$$\Delta\hat{\omega}_r = 4\pi/N,$$

но в основной полосе частот она совпадает с шириной бокового лепестка (16.17).

Амплитуды боковых лепестков — значения $|W_R(\hat{\omega})|$ посередине между нулями в точках $\hat{\omega} = k\pi/N$, $k = 1, 2, \dots, N$, — равны:

$$|W_R(\hat{\omega})|_{\hat{\omega}=k\pi/N} = \left| \frac{\sin(k\pi/2)}{\sin(k\pi/2N)} \right| = \frac{1}{|\sin(k\pi/2N)|}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Максимальная амплитуда боковых лепестков на частоте $\hat{\omega} = 3\pi/N$ равна:

$$\max |W_R(\hat{\omega})|_6 = |W_R(\hat{\omega})|_{\hat{\omega}=3\pi/N} = \frac{1}{|\sin(3\pi/2N)|}. \quad (16.18)$$

Применим разложение синуса в ряд:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

где $x = 3\pi/2N$. Поскольку длина реальных КИХ-фильтров $N \gg 1$, можно ограничиться одним членом ряда:

$$\max |W_R(\hat{\omega})|_6 \approx \frac{2N}{3\pi}.$$

Отсюда следует, что отношение максимальной амплитуды боковых лепестков к амплитуде N главного лепестка — *относительное ослабление боковых лепестков* — практически не зависит от длины фильтра:

$$k_3 = \frac{\max |W_R(\hat{\omega})|_6}{W_R(0)} \approx \frac{2N/3\pi}{N} \approx \frac{2}{3\pi} \approx 0,2122. \quad (16.19)$$

Для нормированной характеристики ослабления окна Дирихле (см. (15.13)):

$$\hat{W}_R(\hat{\omega}) \text{ (дБ)} = 20 \lg |\hat{W}_R(\hat{\omega})|, \quad (16.20)$$

где

$$|\hat{W}_R(\hat{\omega})| = \frac{|W_R(\hat{\omega})|}{W_R(0)},$$

относительное ослабление боковых лепестков k_3 (16.19) в децибелах будет равно:

$$k_3 \text{ (дБ)} = 20 \lg \frac{\max |W_R(\hat{\omega})|_6}{W_R(0)} \approx 20 \lg(0,2122) \approx -13 \text{ дБ.} \quad (16.21)$$

На рис. 16.4 представлены графики модуля нормированной амплитудной функции и нормированной характеристики ослабления (16.20) окна Дирихле с различными длинами.

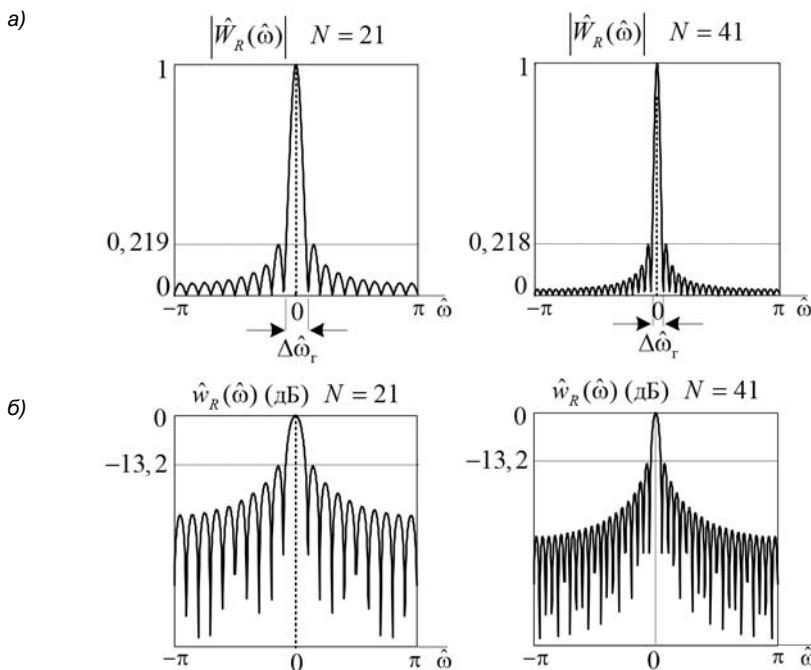


Рис. 16.4. Модули нормированных амплитудных функций (а) и нормированных характеристик ослабления (б) окна Дирихле с длинами $N = 21$ и $N = 41$

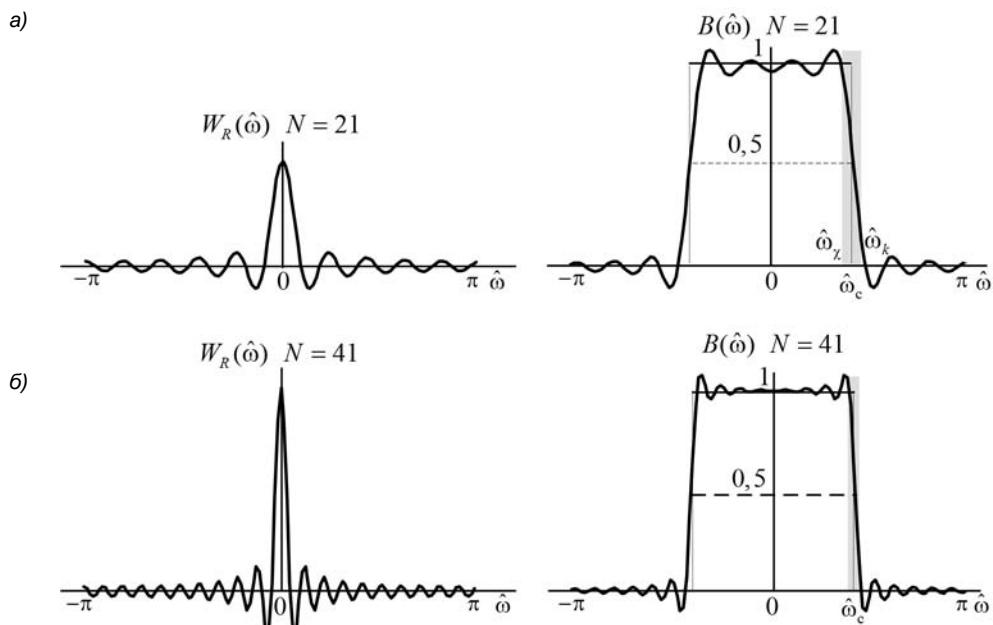


Рис. 16.5. Амплитудные функции окна Дирихле и КИХ-фильтра ФНЧ при длине окна $N = 21$ (а) и $N = 41$ (б)

На рис. 16.5 приведены амплитудные функции окна Дирихле и КИХ-фильтра ФНЧ при тех же длинах окна.

Эффекты усечения ряда Фурье с помощью окна Дирихле хорошо изучены в математике. При усечении ряда Фурье в (16.10) они сводятся к следующему.

- Вместо идеальной АЧХ $A_u(\hat{\omega})$ с разрывами 1-го рода получаем непрерывную амплитудную функцию $B(\hat{\omega})$ (см. рис. 16.3, а, б).
- В точках разрыва значение функции $B(\hat{\omega})$ сходится к среднему значению функции $A_u(\hat{\omega})$ слева и справа (см. рис. 16.5, а, б):

$$B(\hat{\omega}_c) = (1 + 0)/2 = 0,5.$$

- Разрыву функции $A_u(\hat{\omega})$ — "вертикали" — соответствует сглаживающая *переходная полоса* функции $B(\hat{\omega})$, симметричная относительно частоты разрыва $\hat{\omega}_c$:

$$\hat{\omega}_c = \frac{\hat{\omega}_k + \hat{\omega}_\chi}{2}, \quad (16.22)$$

где $\hat{\omega}_k$ и $\hat{\omega}_\chi$ — условные обозначения граничных частот переходной полосы.

Ширина переходной полосы определяется шириной главного лепестка $\Delta\hat{\omega}_r$ амплитудной функции окна $W_R(\hat{\omega})$ (16.16) и близка к ее половине $\Delta\hat{\omega}_r/2 = 2\pi/N$.

С ростом длины окна ширина переходной полосы уменьшается (см. рис. 16.5, а, б).

- Значениям $A_u(\hat{\omega})=1$ и $A_u(\hat{\omega})=0$ функции $A_u(\hat{\omega})$ — "горизонталям" — соответствуют *пульсации* функции $B(\hat{\omega})$ в полосах пропускания и задерживания, обусловленные *боковыми лепестками* функции $W_R(\hat{\omega})$.

С ростом длины окна ширина боковых лепестков (16.17) уменьшается, и частота пульсаций возрастает (см. рис. 16.5, а, б).

- *Всплеск* пульсаций наблюдается вблизи точек разрыва, и их максимумы слева и справа, сравнимые по величине, составляют $\approx 0,09$ относительно идеальной АЧХ.

С ростом длины окна максимумы пульсаций остаются практически неизменными.

Этот феномен подтверждается аналитическими выводами, приведенными в различных источниках, в том числе [46], и известен как *эффект Гиббса* (явление Гиббса).

Косвенно эффект Гиббса подтверждается практически не зависящим от длины окна Дирихле относительным ослаблением боковых лепестков (16.19).

Для КИХ-фильтра с характеристикой ослабления (15.13):

$$a(\hat{\omega}) \text{ (дБ)} = 20 \lg A(\hat{\omega})$$

при сравнимых безразмерных отклонениях в ПП и ПЗ, максимальное ослабление принято оценивать в полосе задерживания (см. рис. 15.6, б). При окне Дирихле оно составляет

$$-a_{\min} (\text{дБ}) = 20 \lg 0,09 \approx -21 \text{ дБ.}$$

С эффектом Гиббса связана основная проблема применения окна Дирихле: максимальное ослабление не может опуститься ниже -21 дБ, в то время как на практике требуется, по крайней мере, -40 или -60 дБ и менее.

Для того чтобы понять идею устранения эффекта Гиббса, мысленно представим функцию $B(\hat{\omega})$ (см. рис. 16.5, а) в виде гибкой проволоки. Если синхронно сжать ее пики по вертикали, то это автоматически приведет к растяжению по горизонтали, т. е. платой за уменьшение максимумов пульсаций будет расширение переходной полосы. Математически это реализуется применением вместо окна Дирихле других окон.

16.3. Окна

Окно $w(n)$ представляет собой неотрицательную вещественную последовательность на интервале $[0; (N-1)]$, симметричную относительно центра $(N-1)/2$, где ее значения максимальны, монотонно спадающую к границам и равную нулю вне интервала.

Синтез КИХ-фильтра сводится к расчету его импульсной характеристики, подобной (16.9):

$$h(n) = \begin{cases} h_w(n)w(n), & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Симметричному окну $w(n)$ должна соответствовать симметричная ИХ $h_w(n)$, поэтому в методе окон используют только КИХ-фильтры типов 1, 2.

Окна и их влияние на характеристики КИХ-фильтра будем анализировать в GUI FDATool. С аналитическими формулами окон можно познакомиться, обращаясь к справочной системе MATLAB.

В качестве примеров будут рассмотрены следующие типовые окна:

- окно Хэнна (Hann) с аналитической формулой

$$w_{HN}(n) = 0,5 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right);$$

- окно Хэмминга (Hamming) с аналитической формулой

$$w_{HM}(n) = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right);$$

□ окно Блэкмана (Blackman) с аналитической формулой

$$w_B(n) = 0,42 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right).$$

Все три окна определены при $0 \leq n \leq (N-1)$ и являются частными случаями *обобщенного косинусного окна*:

$$w(n) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right),$$

а их коэффициенты (табл. 16.2) отвечают условию

$$a_0 + |a_1| + a_2 = 1.$$

Таблица 16.2. Коэффициенты обобщенного косинусного окна

Окно $w(n)$	Коэффициенты окна $w(n)$		
	a_0	a_1	a_2
Хэнна	0,5	-0,5	0
Хэмминга	0,54	-0,46	0
Блэкмана	0,42	-0,5	0,08

Применив формулу Эйлера для косинуса и обозначив $R = (N-1)$, получим:

$$w(n) = a_0 + \frac{a_1}{2} \left(e^{j\frac{2\pi n}{R}} + e^{-j\frac{2\pi n}{R}} \right) + \frac{a_2}{2} \left(e^{j\frac{4\pi n}{R}} + e^{-j\frac{4\pi n}{R}} \right). \quad (16.23)$$

Для записи частотной характеристики $W(e^{j\hat{\omega}})$ окна $w(n)$ воспользуемся свойствами умножения на комплексную экспоненту (9.16)–(9.17) для окна Дирихле:

$$w_R(n)e^{j\hat{\omega}_0 n} = e^{j\hat{\omega}_0 n} \Leftrightarrow W_R \left[e^{j(\hat{\omega}-\hat{\omega}_0)} \right];$$

$$w_R(n)e^{-j\hat{\omega}_0 n} = e^{-j\hat{\omega}_0 n} \Leftrightarrow W_R \left[e^{j(\hat{\omega}+\hat{\omega}_0)} \right].$$

Это позволит, применив свойство линейности (9.15), представить частотную характеристику $W(e^{j\hat{\omega}})$ окна $w(n)$ (16.23) в виде линейной комбинации частотной характеристики окна Дирихле $W_R(e^{j\hat{\omega}})$ и ее сдвинутых копий:

$$\begin{aligned} W(e^{j\hat{\omega}}) = a_0 W_R(e^{j\hat{\omega}}) &+ \frac{a_1}{2} \left\{ W_R \left[e^{j(\hat{\omega}-\frac{2\pi}{R})} \right] + W_R \left[e^{j(\hat{\omega}+\frac{2\pi}{R})} \right] \right\} + \\ &+ \frac{a_2}{2} \left\{ W_R \left[e^{j(\hat{\omega}-\frac{4\pi}{R})} \right] + W_R \left[e^{j(\hat{\omega}+\frac{4\pi}{R})} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (16.24)$$

Представим частотную характеристику окна Дирихле в виде (16.15):

$$W_R(e^{j\hat{\omega}}) = W_R(\hat{\omega}) e^{-j\frac{R}{2}\hat{\omega}} \quad (16.25)$$

и в аналогичном виде частотные характеристики ее сдвинутых копий:

$$W_R\left[e^{j\left(\hat{\omega} \mp \frac{2\pi}{R}\right)}\right] = W_R\left(\hat{\omega} \mp \frac{2\pi}{R}\right) e^{-j\frac{R}{2}\left(\hat{\omega} \mp \frac{2\pi}{R}\right)} = W_R\left(\hat{\omega} \mp \frac{2\pi}{R}\right) e^{-j\frac{R}{2}\hat{\omega}};$$

$$W_R\left[e^{j\left(\hat{\omega} \mp \frac{4\pi}{R}\right)}\right] = W_R\left(\hat{\omega} \mp \frac{4\pi}{R}\right) e^{-j\frac{R}{2}\left(\hat{\omega} \mp \frac{4\pi}{R}\right)} = W_R\left(\hat{\omega} \mp \frac{4\pi}{R}\right) e^{-j\frac{R}{2}\hat{\omega}}.$$

При подстановке их в (16.24) получим аргумент, совпадающий с аргументом частотной характеристики окна Дирихле (16.25), и амплитудную функцию $W(\hat{\omega})$ окна $w(n)$ в виде линейной комбинации амплитудной функции окна Дирихле и ее сдвинутых копий:

$$\begin{aligned} W(\hat{\omega}) = & a_0 W_R(\hat{\omega}) + \frac{a_1}{2} \left[W_R\left(\hat{\omega} - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\hat{\omega} + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right] + \\ & + \frac{a_2}{2} \left[W_R\left(\hat{\omega} - \frac{4\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\hat{\omega} + \frac{4\pi}{N-1}\right) \right]. \end{aligned}$$

Амплитудные функции окон Хэнна, Хэмминга и Блэкмана различаются значениями коэффициентов (см. табл. 16.2).

Эффекты усечения ряда Фурье с помощью данных окон подобны рассмотренным для окна Дирихле и различаются следующим.

- При одинаковой длине окна *ширина главного лепестка* его амплитудной функции $W(\hat{\omega})$ будет *больше*, чем у окна Дирихле, для которого она *минимальна*.

Вследствие этого расширится переходная полоса КИХ-фильтра.

- При любой длине окна *максимумы пульсаций* слева и справа вблизи точек разрыва, сравнимые по величине, будут *меньше*, чем при окне Дирихле, для которого они *максимальны*.

Вследствие этого уменьшится максимальное ослабление в ПЗ КИХ-фильтра.

Для ряда приложений представляют интерес окна с *неотрицательной* амплитудной функцией. Этому требованию удовлетворяет *треугольное окно* (Triangular). При нечетной длине N оно представляет собой свертку окон Дирихле четной длины $(N+1)/2$, нормированную к их длине.

Проиллюстрируем на примере треугольного окна длины $N=7$ с вычислением свертки в MATLAB с помощью функции conv:

```
>> N = 7; %длина треугольного окна
>> NR = (N+1)/2; %длина окон Дирихле
```

```
>> wR = ones(1,NR); %окно Дирихле
>> wT = (1/NR)*conv(wR,wR) %свертка окон Дирихле - треугольное окно
wT = 0.2500 0.5000 0.7500 1.0000 0.7500 0.5000 0.2500
```

Аналитическая формула треугольного окна *нечетной* длины N имеет вид:

$$w_T(n) = \begin{cases} \frac{2(n+1)}{N+1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2}; \\ 2 - \frac{2(n+1)}{N+1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1. \end{cases}$$

Согласно (9.22), частотная характеристика свертки равна произведению частотных характеристик сворачиваемых последовательностей. Следовательно, свертке окон Дирихле длины $(N+1)/2$ будут соответствовать квадрат $W_R(e^{j\hat{\omega}})$ (16.14) при замене $N \rightarrow (N+1)/2$ с учетом нормирующего множителя

$$W_T(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{2}{N+1} \left\{ \frac{\sin[\hat{\omega}(N+1)/4]}{\sin(\hat{\omega}/2)} \right\}^2 e^{-j2\left(\frac{N+1}{2}-1\right)\hat{\omega}} = \frac{2}{N+1} \left\{ \frac{\sin[\hat{\omega}(N+1)/4]}{\sin(\hat{\omega}/2)} \right\}^2 e^{-jR\hat{\omega}}$$

и неотрицательная амплитудная функция

$$W_T(\hat{\omega}) = \frac{2}{N+1} \left\{ \frac{\sin[\hat{\omega}(N+1)/4]}{\sin(\hat{\omega}/2)} \right\}^2 = \begin{cases} \frac{2}{N+1} \left\{ \frac{\sin[\hat{\omega}(N+1)/4]}{\sin(\hat{\omega}/2)} \right\}^2, & \hat{\omega} \neq 0; \\ (N+1)/2, & \hat{\omega} = 0. \end{cases}$$

На практике обычно применяют треугольное окно с *нулевыми* граничными отсчетами — окно *Бартлетта* (Bartlett) с аналитической формулой при *нечетной* длине N :

$$w_{TB}(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2}; \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1. \end{cases}$$

Это окно представляет собой свертку окон Дирихле длины $(N-1)/2$, нормированную к их длине, с добавлением нуля в начале одного окна и в конце другого. Продемонстрируем на примере окна Бартлетта длины $N=7$:

```
>> N = 7; %длина окна Бартлетта
>> NR = (N-1)/2; %длина окон Дирихле
>> wR1 = [0 ones(1,NR)]; %добавление нуля в начале
>> wR2 = [ones(1,NR) 0]; %добавление нуля в конце
>> wTB = (1/NR)*conv(wR1,wR2) %свертка окон Дирихле - окно Бартлетта
wTB = 0 0.3333 0.6667 1.0000 0.6667 0.3333 0
```

Неотрицательная амплитудная функция окна имеет вид:

$$W_{TB}(\hat{\omega}) = \frac{2}{N-1} \left\{ \frac{\sin[\hat{\omega}(N-1)/4]}{\sin(\hat{\omega}/2)} \right\}^2 = \begin{cases} \frac{2}{N-1} \left\{ \frac{\sin[\hat{\omega}(N-1)/4]}{\sin(\hat{\omega}/2)} \right\}^2, & \hat{\omega} \neq 0; \\ (N-1)/2, & \hat{\omega} = 0. \end{cases}$$

С аналитическими формулами треугольных окон четной длины N можно познакомиться, обращаясь к справочной системе MATLAB. В этом случае будем иметь свертку окон Дирихле с длинами $N/2$ и $(N+2)/2$.

16.3.1. Основные параметры окон

В GUI FDATool для каждого окна выводятся его графики: во временной области — нормированная последовательность $\hat{w}(n)$; в частотной области — характеристика ослабления окна

$$w(\hat{\omega}) \text{ (дБ)} = 20 \lg |W(\hat{\omega})|.$$

Под графиками указываются *три основных параметра окна*:

- Leakage Factor (Коэффициент утечки) — доля энергии боковых лепестков в общей энергии окна в процентах:

$$\alpha = \frac{\text{Энергия боковых лепестков}}{\text{Общая энергия окна}} \cdot 100\%;$$

- Relative sidelobe attenuation (Относительное ослабление боковых лепестков) — относительное ослабление боковых лепестков в децибелах, подобное (16.21):

$$k_s \text{ (дБ)} = 20 \lg \frac{\max |W(\hat{\omega})|_6}{W(0)},$$

нормированной характеристики ослабления окна, подобной (16.20):

$$\hat{w}(\hat{\omega}) \text{ (дБ)} = 20 \lg |\hat{W}(\hat{\omega})|; \quad (16.26)$$

- Mainlobe width (Ширина главного лепестка) — ширина (полная) главного лепестка $\Delta\Omega$ (рад) нормированной характеристики ослабления окна $\hat{w}(\hat{\omega})$ (дБ) (16.26) на уровне -3 дБ.

Выводимое по умолчанию в шкале нормированных частот $\hat{\omega}$ значение $\Delta\Omega$ следует умножить на π , поэтому далее в таблицах указывается $\Delta\Omega \cdot \pi$ (рад).

Можно автоматически перейти к шкале абсолютных частот f и, задавая частоту дискретизации f_d , вывести соответствующее значение

$$\Delta F = \Delta\Omega \frac{f_d}{2} \text{ (Гц)}.$$

Основные параметры окон взаимосвязаны с характеристиками КИХ-фильтра, а именно:

- параметр α — с *площадью пульсаций АЧХ в ПП и ПЗ*.

Меньшему значению α соответствует меньшая площадь пульсаций.

Максимальная площадь пульсаций наблюдается при окне Дирихле вследствие эффекта Гиббса;

- параметр k_3 (дБ) — с *максимальным ослаблением* КИХ-фильтра $-a_{\min}$ (дБ) в ПЗ.

Меньшему значению k_3 (дБ) соответствует меньшее значение $-a_{\min}$ (дБ).

Максимальное ослабление $-a_{\min} \approx -21$ дБ наблюдается при окне Дирихле с относительным ослаблением боковых лепестков (16.21) $k_3 \approx -13$ дБ;

- параметр $\Delta\Omega$ — с *шириной переходной полосы* КИХ-фильтра $\Delta\hat{\omega}$.

Большему значению $\Delta\Omega$ соответствует более широкая переходная полоса $\Delta\hat{\omega}$.

При одинаковой длине окна *минимальная* ширина переходной полосы наблюдается при окне Дирихле.

В табл. 16.3 приведены основные параметры типовых окон *одинаковой* длины $N = 41$.

Таблица 16.3. Основные параметры окон одинаковой длины $N = 0$

Окно	Коэффициент утечки α , %	Относительное ослабление боковых лепестков k_3 , дБ	Ширина главного лепестка $\Delta\Omega \cdot \pi$ (рад) на уровне -3 дБ
Дирихле (Rectangular)	9,33	-13,3	0,043
Бартлетта (Bartlett)	0,29	-26,5	0,0625
Хэнна (Hann)	0,05	-31,5	0,07
Хэмминга (Hamming)	0,04	-42,1	0,0625
Блэкмана (Blackman)	0	-58,1	0,082

Отмеченная связь параметров окна с характеристиками КИХ-фильтра означает, что *синхронному уменьшению* параметров α и k_3 (дБ) при *одновременном увеличении* параметра $\Delta\Omega$ (см. табл. 16.3) будет соответствовать уменьшение площади пульсаций АЧХ и максимального ослабления в ПЗ $-a_{\min}$ (дБ) при одновременном расширении переходной полосы.

Эта связь иллюстрируется на рис. 16.6—16.10 для типовых окон *одинаковой* длины $N = 41$ и соответствующих им характеристик КИХ-фильтра ФНЧ.

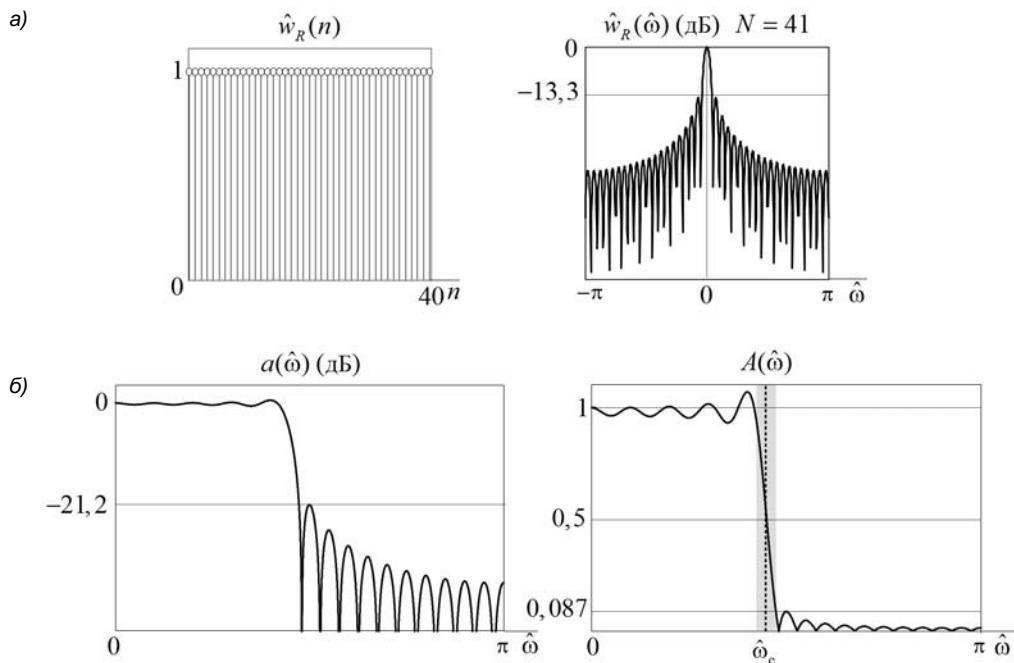


Рис. 16.6. Нормированное окно Дирихле длины $N = 41$ и его нормированная характеристика ослабления (а); характеристика ослабления и АЧХ КИХ-фильтра ФНЧ (б)

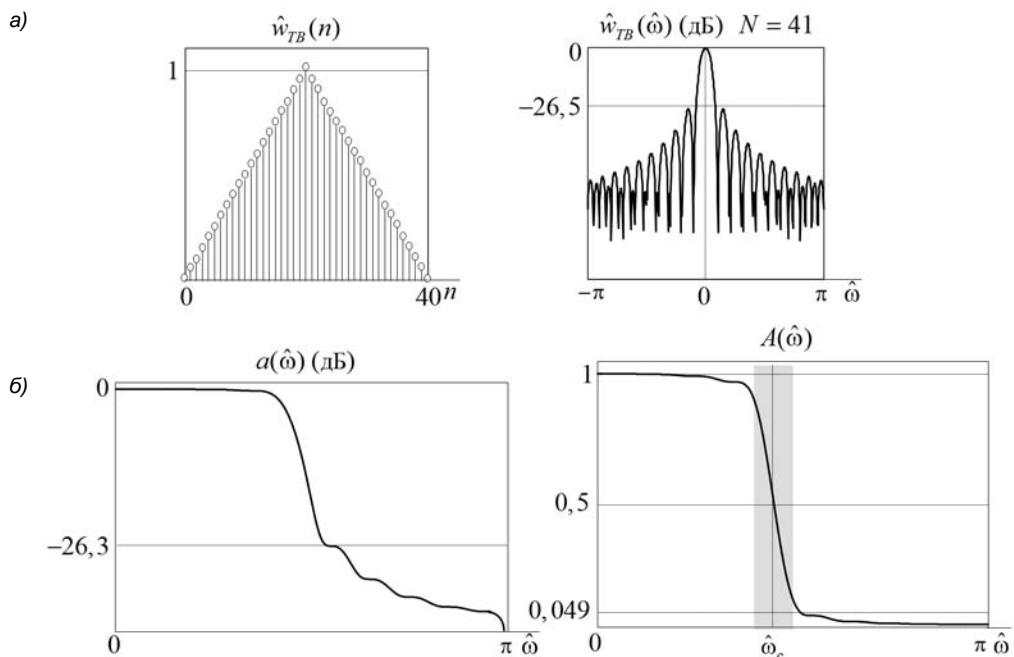


Рис. 16.7. Нормированное окно Бартлетта длины $N = 41$ и его нормированная характеристика ослабления (а); характеристика ослабления и АЧХ КИХ-фильтра ФНЧ (б)

При окне Дирихле $w_R(n)$ (рис. 16.6) площадь пульсаций АЧХ и ослабление в ПЗ максимальны, а ширина переходной полосы минимальна.

При окне Бартлетта $w_{TB}(n)$ (рис. 16.7) площадь пульсаций АЧХ, по сравнению с окном Дирихле, существенно уменьшается и максимальное ослабление в ПЗ снижается приблизительно на 5 дБ при одновременном расширении переходной полосы.

При окне Хэнна $w_{HN}(n)$ (рис. 16.8), по сравнению с окном Бартлетта, площадь пульсаций АЧХ существенно уменьшается и максимальное ослабление в ПЗ снижается приблизительно на 18 дБ при одновременном расширении переходной полосы.

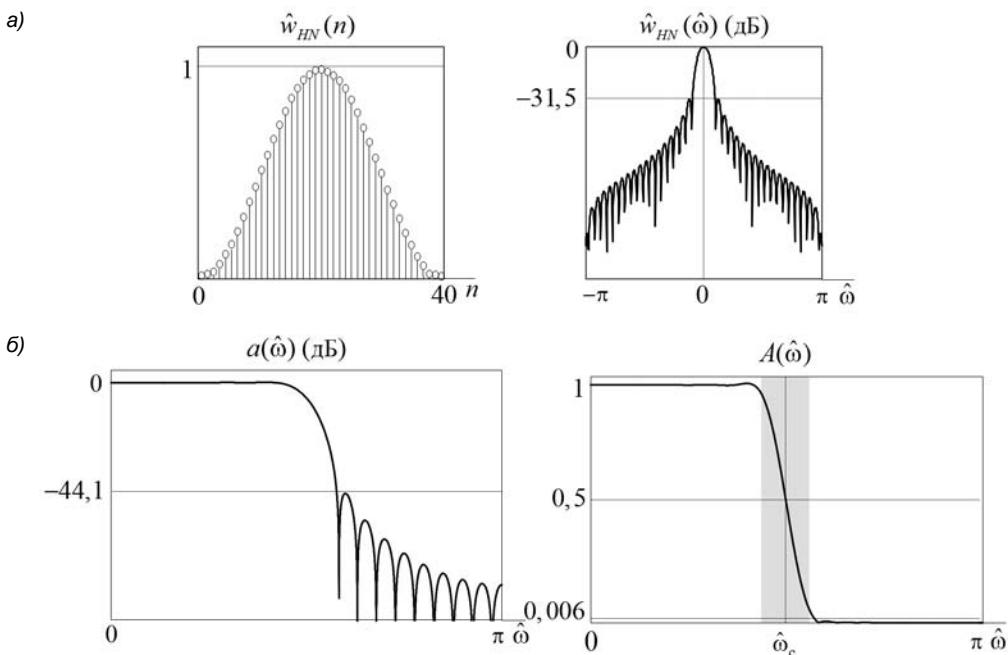


Рис. 16.8. Нормированное окно Хэнна длины $N = 41$ и его нормированная характеристика ослабления (а); характеристика ослабления и АЧХ КИХ-фильтра ФНЧ (б)

При окне Хэмминга $w_{HM}(n)$ (рис. 16.9), по сравнению с окном Хэнна, площадь пульсаций АЧХ уменьшается и максимальное ослабление в ПЗ снижается приблизительно на 10 дБ, а ширина переходной полосы близка к ширине полосы при окне Бартлетта.

При окне Блэкмана $w_B(n)$ (рис. 16.10) площадь пульсаций АЧХ близка к нулю, поэтому АЧХ в ПП и ПЗ близка к плоской. Максимальное ослабление в ПЗ, по сравнению с окном Хэмминга, снижается приблизительно на 11 дБ при одновременном расширении переходной полосы.

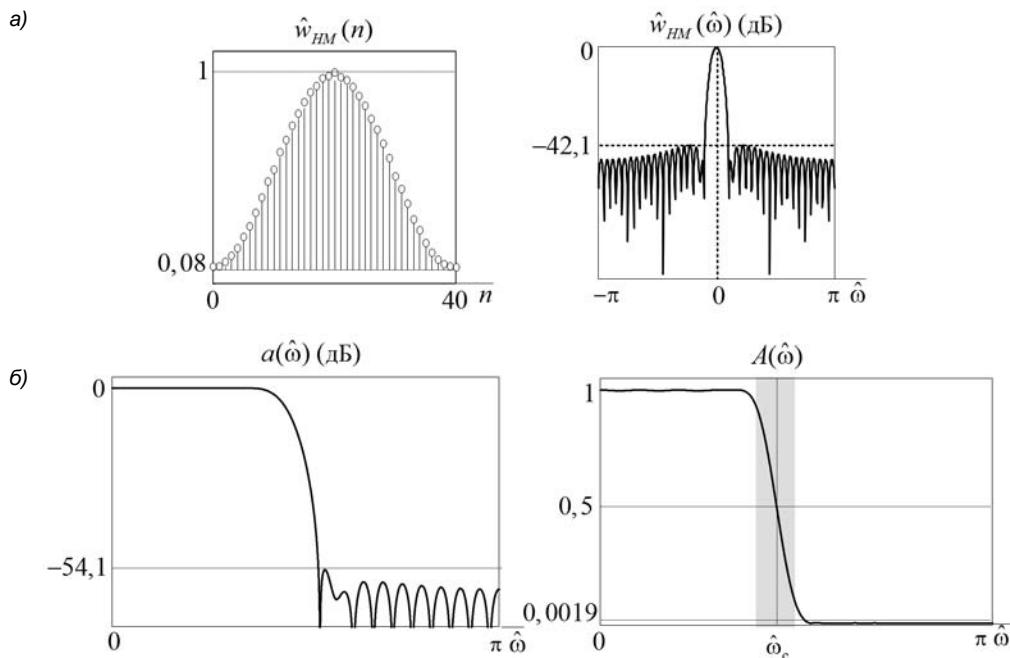


Рис. 16.9. Нормированное окно Хэмминга длины $N = 41$ и его нормированная характеристика ослабления (a); характеристика ослабления и АЧХ КИХ-фильтра ФНЧ (δ)

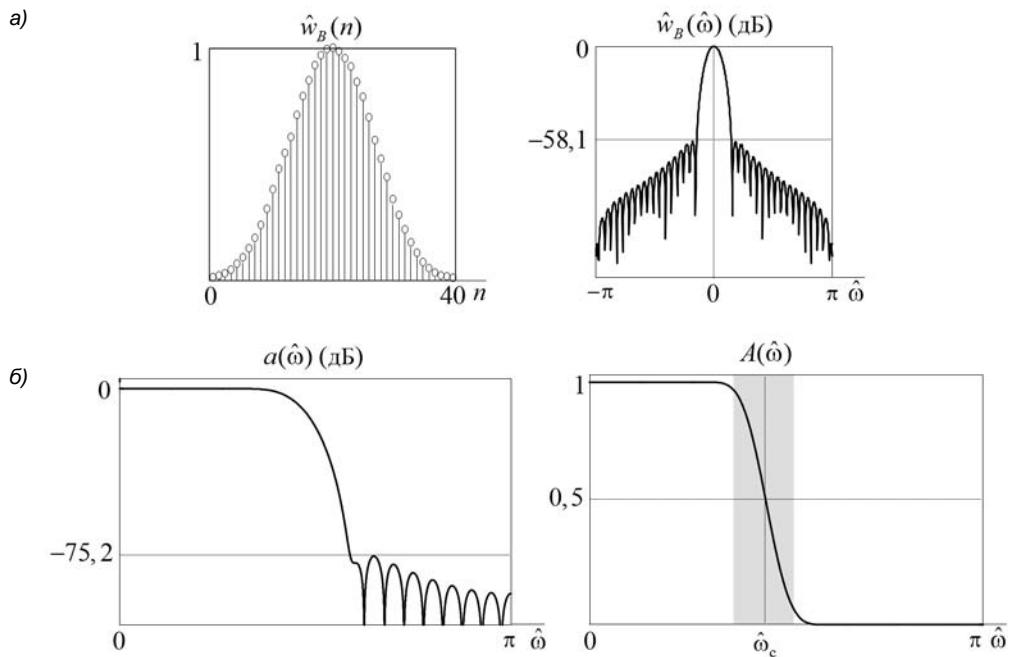


Рис. 16.10. Нормированное окно Блэкмана длины $N = 41$ и его нормированная характеристика ослабления (a); характеристика ослабления и АЧХ КИХ-фильтра ФНЧ (δ)

Проанализируем влияние длины окна на его основные параметры. В табл. 16.4 они приведены для окон Хэмминга и Блэкмана, однако отмеченные тенденции будут справедливы и для других окон.

Таблица 16.4. Основные параметры окон Хэмминга и Блэкмана различных длин

Окно	Хэмминга					Блэкмана				
Длина	31	41	51	61	71	31	41	51	61	71
α , %	0,04	0,04	0,04	0,03	0,04	0	0	0	0	0
k_3 , дБ	-41,7	-42,1	-42,3	-42,4	-42,5	-58,2	-58,1	-58,1	-58,1	-58,1
$\Delta\Omega \cdot \pi$, рад	0,086	0,0625	0,051	0,043	0,037	0,109	0,082	0,066	0,055	0,047

Как видим, значения параметров α и k_3 (дБ) практически не зависят от длины окна, однако от нее существенно зависит значение параметра $\Delta\Omega$.

В табл. 16.5, составленной по результатам экспериментов для типовых окон [1, 4], приведена ориентировочная связь между значениями параметра окна k_3 (дБ) и минимального затухания в ПЗ a_{min} (дБ) (15.12) КИХ-фильтра, и связь между шириной главного лепестка окна $\Delta\hat{\omega}_r$ и шириной переходной полосы КИХ-фильтра $\Delta\hat{\omega}$ (рад), которой в шкале абсолютных частот соответствует значение $\Delta f = \frac{\Delta\hat{\omega}f_d}{2\pi}$ (Гц). Последний столбец рассматривается в разд. 16.4.

Таблица 16.5. Ширина главного лепестка основных окон

Окно	Относительное ослабление боковых лепестков k_3 , дБ	Минимальное затухание в ПЗ a_{min} , дБ	Ширина главного лепестка $\Delta\hat{\omega}_r$, рад	Ширина переходной полосы $\Delta\hat{\omega}$, рад	Ширина переходной полосы Δf , Гц	Оценка длины окна N
Дирихле	-13	21	$\frac{4\pi}{N}$	$\frac{1,8\pi}{N}$	$\frac{0,9f_d}{N}$	$\frac{0,9f_d}{\Delta f}$
Бартлетта	-25	27	$\frac{8\pi}{N}$	$\frac{6,1\pi}{N}$	$\frac{3,05f_d}{N}$	$\frac{3,05f_d}{\Delta f}$
Хэнна	-31	44	$\frac{8\pi}{N}$	$\frac{6,2\pi}{N}$	$\frac{3,1f_d}{N}$	$\frac{3,1f_d}{\Delta f}$
Хэмминга	-42	54	$\frac{8\pi}{N}$	$\frac{6,6\pi}{N}$	$\frac{3,3f_d}{N}$	$\frac{3,3f_d}{\Delta f}$
Блэкмана	-58	75	$\frac{12\pi}{N}$	$\frac{11\pi}{N}$	$\frac{5,5f_d}{N}$	$\frac{5,5f_d}{\Delta f}$

При выборе окна в первую очередь обращают внимание на подходящее значение минимального затухания a_{\min} (дБ), а затем оценивают длину окна, которая обеспечит требуемую ширину переходной полосы КИХ-фильтра $\Delta\hat{\omega}$.

Основная проблема синтеза КИХ-фильтров методом окон связана с *оценкой* длины окна. Эта задача, в общем случае решаемая путем итераций — неоднократных проб, успешно решена Кайзером.

16.3.2. Окно Кайзера

Кайзер предложил аналитическую формулу окна, названного в его честь *окном Кайзера* (Kaiser):

$$w_K(n) = \frac{I_0\left[\beta \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1}\right)^2}\right]}{I_0[\beta]}, \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

где:

- N — длина окна;
- $I_0[\cdot]$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, для вычисления которой применяют ее разложение в быстро сходящийся степенной ряд:

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^L \left[\frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2,$$

при этом обычно $L < 25$ [4];

- β — параметр окна Кайзера — положительная константа, управляющая крутизной монотонного спадания отсчетов окна от центра к границам: меньшему значению β соответствует меньшая крутизна; при $\beta = 0$ получим окно Дирихле.

По результатам многочисленных экспериментов Кайзер вывел две *эмпирические формулы*:

$$\beta = \begin{cases} 0,1102(a_{\min} - 8,7), & a_{\min} > 50; \\ 0,5842(a_{\min} - 21)^{0,4} + 0,07886(a_{\min} - 21), & 21 \leq a_{\min} \leq 50; \\ 0, & a_{\min} < 21; \end{cases}$$

$$R = \frac{a_{\min} - 7,95}{2,285\Delta\hat{\omega}}.$$

Первая из них позволяет определить *независящее от длины окна N* значение параметра β при заданном минимальном затухании КИХ-фильтра a_{\min} (дБ), а вторая — оценить порядок КИХ-фильтра $R = (N - 1)$ при заданной ширине переходной полосы $\Delta\hat{\omega}$ для ФНЧ и ФВЧ. (Для ПФ и РФ получены аналогичные формулы.)

При синтезе КИХ-фильтра в GUI FDATool окно Кайзера выбирается по умолчанию. Следует задать требования к АЧХ и при установке переключателя **Minimum order** (Минимальный порядок) будет автоматически синтезирован КИХ-фильтр минимального порядка $R = R_{\min}$, удовлетворяющий заданным требованиям.

Процедура синтеза КИХ-фильтра методом окон с окном Кайзера *не требует итераций* (в чем легко убедиться самостоятельно, увеличивая и уменьшая порядок), поэтому в следующем разделе по умолчанию речь пойдет о *других окнах*.

16.4. Итерационная процедура синтеза КИХ-фильтра методом окон

Рассматриваемая процедура синтеза ориентирована на применение средств GUI FDATool (*см. приложение 1*).

Итерационная процедура синтеза КИХ-фильтра методом окон (Window) включает в себя следующие шаги:

1. Задание требований к АЧХ.

В методе окон вводится частота дискретизации f_d и частота (частоты) разрыва в группе **Frequency Specifications** (Требования к частотам).

Для ФНЧ и ФВЧ задается одна частота разрыва (см. табл. 16.1):

$$f_c = \frac{f_\chi + f_k}{2},$$

а для ПФ и РФ — две:

$$f_{c1} = \frac{f_{-k} + f_{-\chi}}{2};$$

$$f_{c2} = \frac{f_k + f_\chi}{2}.$$

2. Выбор окна и оценка его длины.

При выборе окна в первую очередь обращают внимание на приемлемое значение затухания a_{\min} (дБ); для типовых окон оно приводится в табл. 16.5.

Для *выбранного* окна при известной ширине переходной полосы Δf оценивается длина окна по формуле

$$N = \text{int}\left(\frac{\lambda f_d}{\Delta f}\right), \quad (16.27)$$

где λ — коэффициент пропорциональности, значение которого для конкретного окна определено в последнем столбце табл. 16.5.

Оценка *порядка* КИХ-фильтра $R = (N - 1)$ задается в поле ввода переключателя **Specify order** (Произвольный порядок).

3. Расчет передаточной функции КИХ-фильтра.

В методе окон расчет передаточной функции КИХ-фильтра $H(z)$ (16.1) сводится к расчету его импульсной характеристики в виде произведения:

$$h(n) = h_u(n)w(n), \quad n = 0, 1, \dots, (N - 1),$$

при известных аналитических формулах окна $w(n)$ и ИХ идеального КИХ-фильтра $h_u(n)$.

4. Проверка выполнения требований к АЧХ.

Проверка заключается в сравнении *фактических* максимальных отклонений АЧХ от идеальной АЧХ в ПП и ПЗ с *заданными* максимально допустимыми отклонениями.

В методе окон обычно проверяется выполнение требований на границах переходной полосы, симметричных относительно частоты разрыва, причем, достаточно их проверить *на границе ПЗ*, поскольку максимальные отклонения в ПП и ПЗ сравнимы по величине.

Возможны две ситуации.

- Требования к АЧХ не выполняются.

В этом случае следует *увеличить* порядок R и вернуться к п. 3.

- Требования к АЧХ выполняются.

В этом случае следует *уменьшить* порядок R и вернуться к п. 3.

В обоих случаях увеличение/уменьшение порядка R продолжается до тех пор, пока не будет найден *минимальный порядок* R_{\min} , при котором выполняются требования к АЧХ.

При увеличении/уменьшении порядка необходимо помнить, что КИХ-фильтр типа 2 можно использовать только для синтеза ФНЧ и ПФ (см. табл. 15.2).

5. Выбор структуры КИХ-фильтра — обычно прямой или прямой приведенной с симметричной ИХ (см. табл. 6.1).

Пример 16.1. Синтезировать КИХ-фильтр ФНЧ с окном Кайзера при заданных требованиях к АЧХ¹ (см. рис. 15.2):

- частота дискретизации $f_d = 2000$ Гц;
- граничная частота ПП $f_\chi = 450$ Гц;
- граничная частота ПЗ $f_k = 550$ Гц;
- максимально допустимое отклонение АЧХ в ПП $\delta_1 = 0,1$;
- максимально допустимое отклонение АЧХ в ПЗ $\delta_2 = 0,05$.

¹ В иллюстративных примерах задаются нежесткие требования для наглядности вида АЧХ в ПП и ПЗ.

При окне Кайзера достаточно задать требования к АЧХ и установить переключатель **Minimum order** — будет синтезирован КИХ-фильтр минимального порядка $R_{\min} = 26$ (тип 1), характеристики которого представлены на рис. 16.11.

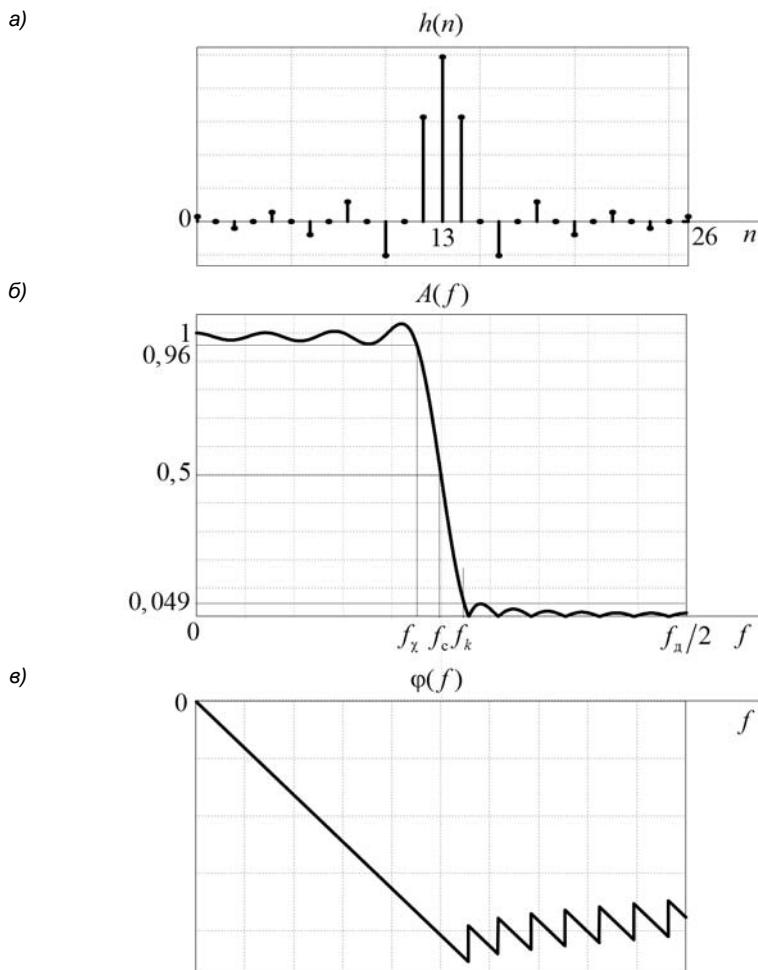


Рис. 16.11. Импульсная характеристика (а), АЧХ (б) и ФЧХ (в) КИХ-фильтра ФНЧ, синтезированного методом окон Кайзера

Импульсная характеристика КИХ-фильтра с четным порядком R симметрична относительно $n = R/2 = 13$. В АЧХ наблюдаются пульсации, характерные для метода окон, со сравнимыми по величине максимумами на границах ПП и ПЗ. Поэтому в ПП, где задано максимально допустимое отклонение АЧХ $\delta_1 = 2\delta_2$, они выполняются более чем с двойным запасом, и это специфика метода окон.

Для компактного графического представления ЛФЧХ ее "приподнимают", добавляя к скачкам на π значения, кратные 2π . ◀

Пример 16.2. Синтезировать КИХ-фильтр ФНЧ при тех же требованиях к АЧХ с окном Хэмминга.

При окне Хэмминга вводится частота дискретизации $f_s = 2000$ Гц и частота разрыва

$$f_c = \frac{f_\chi + f_k}{2} = \frac{450 + 550}{2} = 500 \text{ Гц.}$$

При известной ширине переходной полосы $\Delta f = f_k - f_\chi = 100$ Гц оценивается длина окна по формуле (16.27), где $\lambda = 3,3$ (см. табл. 16.5):

$$N = \text{int}\left(\frac{3,3 f_d}{\Delta f}\right) = \text{int}\left(\frac{3,3 \cdot 2000}{100}\right) = 66.$$

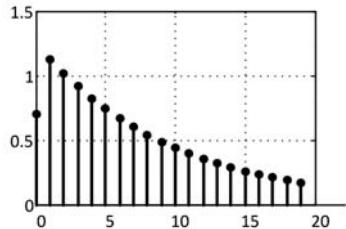
Затем выполняются действия в соответствии с итерационной процедурой синтеза, по завершении которой получим КИХ-фильтр порядка $R_{\min} = 48$ (тип 1), почти в два раза большего, чем при окне Кайзера. ◀

Основным достоинством метода окон является его *простота*, поэтому алгоритм синтеза легко реализовать в любой программной среде, в том числе в реальном времени.

Основной недостаток метода окон заключается в том, что порядок синтезированного КИХ-фильтра R_{\min} не является оптимальным (минимально возможным) при заданных требованиях к АЧХ.

Метод синтеза оптимального КИХ-фильтра рассматривается в следующей главе.

ГЛАВА 17



Синтез КИХ-фильтров методом наилучшей равномерной (чебышевской) аппроксимации

Метод наилучшей равномерной (чебышевской) аппроксимации позволяет синтезировать оптимальный КИХ-фильтр минимально возможного (оптимального) порядка при заданных требованиях к АЧХ.

Оптимальным называют КИХ-фильтр минимально возможного (оптимального) порядка при заданных требованиях к АЧХ.

Во избежание путаницы с минимальным порядком R_{\min} КИХ-фильтра, синтезированного методом окон при тех же требованиях к АЧХ, введем обозначение оптимального порядка R_{opt} :

$$R_{\text{opt}} < R_{\min}.$$

17.1. Формулировка задачи

Формулировка задачи аппроксимации в приложении к синтезу КИХ-фильтра включает в себя следующие шаги.

1. Задание аппроксимируемой функции.

Аппроксимируемая функция, по определению *непрерывная* на интервале $[\alpha_1; \alpha_2]$, может задаваться на всем интервале или множестве его непересекающихся отрезков и произвольно доопределяется в их промежутках.

Множество отрезков интервала $[\alpha_1; \alpha_2]$, представленное *вектором* Ω , образует *интервал аппроксимации*.

Для КИХ-фильтров *аппроксимируемая функция* $\xi(\hat{\omega})$ задается в основной полосе частот $[0; \pi]$ на совокупности ПП и ПЗ, где она совпадает с *идеальной АЧХ*, и доопределяется в переходных полосах путем линейной интерполяции.

Интервал аппроксимации Ω включает в себя совокупность ПП и ПЗ.

В переходных полосах задача аппроксимации не решается.

На рис. 17.1 приведен пример аппроксимируемой функции $\xi(\hat{\omega})$ КИХ-фильтра ФНЧ. Интервал аппроксимации $\Omega = [\Omega_1; \Omega_2]$ включает в себя ПП $\Omega_1 \in [0; \hat{\omega}_\chi]$ и ПЗ $\Omega_2 \in [\hat{\omega}_k; \pi]$.

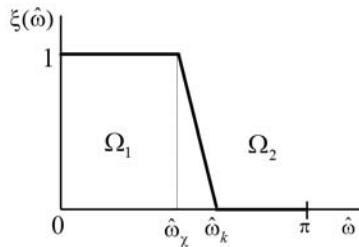


Рис. 17.1. Аппроксимируемая функция для ФНЧ

2. Выбор *типа* аппроксимирующей функции.

Выбор типа аппроксимирующей функции определяется конкретными задачами аппроксимации.

Для КИХ-фильтров тип аппроксимирующей функции определяется требуемой амплитудной функцией $B(\hat{\omega}, \mathbf{a})$; их совокупность можно представить в виде *обобщенного тригонометрического полинома* (см. табл. 15.2):

$$B(\hat{\omega}, \mathbf{a}) = \sum_{k=0}^M a_k \cos[(k\hat{\omega} + \lambda(\hat{\omega})], \quad (17.1)$$

где M — порядок полинома; \mathbf{a} — вектор коэффициентов полинома; $\lambda(\hat{\omega})$ — функция управления типом КИХ-фильтра, представленная в табл. 17.1, где для КИХ-фильтров типов 3 и 4 учтено тождество:

$$\sin(x) = \cos(\pi/2 - x) = \cos(x - \pi/2). \quad (17.2)$$

Эквивалентное представление тригонометрического полинома (17.2) имеет вид:

$$B(\hat{\omega}, \tilde{\mathbf{a}}) = \cos \lambda(\hat{\omega}) \sum_{k=0}^M \tilde{a}_k \cos k\hat{\omega}, \quad (17.3)$$

где $\cos \lambda(\hat{\omega})$ — функция управления типом КИХ-фильтра (см. табл. 17.1); $\tilde{\mathbf{a}}$ — вектор новых коэффициентов.

Значения функции $\cos \lambda(\hat{\omega})$ на границах основной полосы частот $[0; \pi]$ (см. табл. 17.1) подтверждают ограничения на *тип избирательности*, установленные ранее для КИХ-фильтров (см. табл. 15.2).

Определим связь между коэффициентами a_k и \tilde{a}_k .

Для КИХ-фильтров *типа 1*, где $\lambda(\hat{\omega}) = 0$ и $\cos \lambda(\hat{\omega}) = 1$, правые части (17.1) и (17.3) совпадают, следовательно, $a_k = \tilde{a}_k$.

Для остальных типов КИХ-фильтра рассмотрим простые примеры с порядком $M = 3$ и результаты обобщим.

Таблица 17.1. Функция управления типом КИХ-фильтра и коэффициенты полинома

Тип КИХ-фильтра	$\lambda(\hat{\omega})$	$\cos \lambda(\hat{\omega})$	$\cos \lambda(\hat{\omega})$		Коэффициенты a_k
			$\hat{\omega} = 0$	$\hat{\omega} = \pi$	
Тип 1 ИХ симметричная. Порядок R четный	0	1	1	1	$a_k = \tilde{a}_k$
Тип 2 ИХ симметричная. Порядок R нечетный	$\frac{\hat{\omega}}{2}$	$\cos \frac{\hat{\omega}}{2}$	1	0	$a_0 = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1/2$ $a_k = (\tilde{a}_k + \tilde{a}_{k+1})/2$ $k = 1, \dots, (M-1)$ $a_M = \tilde{a}_M/2$
Тип 3 ИХ антисимметричная. Порядок R четный	$\hat{\omega} - \frac{\pi}{2}$	$\sin \hat{\omega}$	0	0	$a_0 = \tilde{a}_0 - \tilde{a}_2/2$ $a_k = (\tilde{a}_k - \tilde{a}_{k+2})/2$ $k = 1, \dots, (M-2)$ $a_{M-1} = \tilde{a}_{M-1}/2$ $a_M = \tilde{a}_M/2$
Тип 4 ИХ антисимметричная. Порядок R нечетный	$\frac{\hat{\omega}}{2} - \frac{\pi}{2}$	$\sin \frac{\hat{\omega}}{2}$	0	1	$a_0 = \tilde{a}_0 - \tilde{a}_1/2$ $a_k = (\tilde{a}_k - \tilde{a}_{k+1})/2$ $k = 1, \dots, (M-1)$ $a_M = \tilde{a}_M/2$

Для КИХ-фильтров *типа 2*, где $\cos \lambda(\hat{\omega}) = \cos \hat{\omega}/2$, (17.3) принимает вид:

$$\tilde{a}_0 \cos \hat{\omega}/2 + \tilde{a}_1 \cos \hat{\omega}/2 \cos \hat{\omega} + \tilde{a}_2 \cos \hat{\omega}/2 \cos 2\hat{\omega} + \tilde{a}_3 \cos \hat{\omega}/2 \cos 3\hat{\omega}.$$

Применив тождество

$$\cos k\hat{\omega} \cos \hat{\omega}/2 = \frac{\cos[k\hat{\omega} + \hat{\omega}/2] + \cos[k\hat{\omega} - \hat{\omega}/2]}{2} = \frac{\cos[k\hat{\omega} + \hat{\omega}/2] + \cos[(k-1)\hat{\omega} + \hat{\omega}/2]}{2},$$

получим:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 \cos \hat{\omega}/2 + \sum_{k=1}^3 \frac{\tilde{a}_k}{2} \cos(k\hat{\omega} + \hat{\omega}/2) + \sum_{k=1}^3 \frac{\tilde{a}_k}{2} \cos[(k-1)\hat{\omega} + \hat{\omega}/2] = \\ = \left(\tilde{a}_0 + \frac{\tilde{a}_1}{2} \right) \cos \hat{\omega}/2 + \left(\frac{\tilde{a}_1}{2} + \frac{\tilde{a}_2}{2} \right) \cos(2\hat{\omega} + \hat{\omega}/2) + \\ + \left(\frac{\tilde{a}_2}{2} + \frac{\tilde{a}_3}{2} \right) \cos(3\hat{\omega} + \hat{\omega}/2). \end{aligned}$$

Сравнивая результат с (17.1), где $\lambda(\hat{\omega}) = \hat{\omega}/2$:

$$a_0 \cos \hat{\omega}/2 + a_1 \cos(\hat{\omega} + \hat{\omega}/2) + a_2 \cos(2\hat{\omega} + \hat{\omega}/2) + a_3 \cos(3\hat{\omega} + \hat{\omega}/2),$$

определяем соотношения для коэффициентов, представленные в табл. 17.1.

Для КИХ-фильтров *типа 3*, где $\cos \lambda(\hat{\omega}) = \sin \hat{\omega}$, (17.3) принимает вид:

$$\tilde{a}_0 \sin \hat{\omega} + \tilde{a}_1 \sin \hat{\omega} \cos \hat{\omega} + \tilde{a}_2 \sin \hat{\omega} \cos 2\hat{\omega} + \tilde{a}_3 \sin \hat{\omega} \cos 3\hat{\omega}.$$

Применив тождество

$$\sin \hat{\omega} \cos k\hat{\omega} = \frac{\sin(k\hat{\omega} + \hat{\omega}) - \sin(k\hat{\omega} - \hat{\omega})}{2} = \frac{\sin(k+1)\hat{\omega} - \sin(k-1)\hat{\omega}}{2},$$

получим:

$$\begin{aligned} a_0 \sin \hat{\omega} + \sum_{k=1}^3 \frac{\tilde{a}_k}{2} \sin(k+1)\hat{\omega} - \sum_{k=1}^3 \frac{\tilde{a}_k}{2} \sin(k-1)\hat{\omega} = \\ = \left(\tilde{a}_0 - \frac{\tilde{a}_2}{2} \right) \sin \hat{\omega} + \left(\frac{\tilde{a}_1}{2} - \frac{\tilde{a}_3}{2} \right) \sin 2\hat{\omega} + \frac{\tilde{a}_2}{2} \sin 3\hat{\omega} + \frac{\tilde{a}_3}{2} \sin 4\hat{\omega}. \end{aligned}$$

Сравнивая результат с (17.1), где $\lambda(\hat{\omega}) = \hat{\omega} - \pi/2$ и учтено тождество (17.2):

$$a_0 \sin \hat{\omega} + a_1 \sin 2\hat{\omega} + a_2 \sin 3\hat{\omega} + a_3 \sin 4\hat{\omega},$$

определяем соотношения для коэффициентов, представленные в табл. 17.1.

Для КИХ-фильтров *типа 4*, где $\cos \lambda(\hat{\omega}) = \sin \hat{\omega}/2$, (17.3) принимает вид:

$$\tilde{a}_0 \sin \hat{\omega}/2 + \tilde{a}_1 \sin \hat{\omega}/2 \cos \hat{\omega} + \tilde{a}_2 \sin \hat{\omega}/2 \cos 2\hat{\omega} + \tilde{a}_3 \sin \hat{\omega}/2 \cos 3\hat{\omega}.$$

Применив тождество

$$\sin \hat{\omega}/2 \cos k\hat{\omega} = \frac{\sin(k\hat{\omega} + \hat{\omega}/2) - \sin(k\hat{\omega} - \hat{\omega}/2)}{2} = \frac{\sin(k\hat{\omega} + \hat{\omega}/2) - \sin[(k-1)\hat{\omega} + \hat{\omega}/2]}{2},$$

получим:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 \sin \hat{\omega}/2 + \sum_{k=1}^3 \frac{\tilde{a}_k}{2} \sin(k\hat{\omega} + \hat{\omega}/2) - \sum_{k=1}^3 \frac{\tilde{a}_k}{2} \sin[(k-1)\hat{\omega} + \hat{\omega}/2] = \\ = \left(\tilde{a}_0 - \frac{\tilde{a}_1}{2} \right) \sin \hat{\omega}/2 + \left(\frac{\tilde{a}_1}{2} - \frac{\tilde{a}_2}{2} \right) \sin(\hat{\omega} + \hat{\omega}/2) + \\ + \left(\frac{\tilde{a}_2}{2} - \frac{\tilde{a}_3}{2} \right) \sin(2\hat{\omega} + \hat{\omega}/2) + \frac{\tilde{a}_3}{2} \sin(3\hat{\omega} + \hat{\omega}/2). \end{aligned}$$

Сравнивая результат с (17.1), где $\lambda(\hat{\omega}) = \hat{\omega}/2 - \pi/2$ и учтено тождество (17.2):

$$a_0 \sin \hat{\omega}/2 + a_1 \sin(\hat{\omega} + \hat{\omega}/2) + a_2 \sin(2\hat{\omega} + \hat{\omega}/2) + a_3 \sin(3\hat{\omega} + \hat{\omega}/2),$$

определяем соотношения для коэффициентов, представленные в табл. 17.1.

Таким образом, между коэффициентами a_k и \tilde{a}_k установлена *линейная связь*.

Далее по умолчанию будем говорить о полиноме $B(\hat{\omega}, \mathbf{a})$ (17.1), а его эквивалентным представлением (17.3) воспользуемся при необходимости.

3. Выбор аппроксимирующей функции.

Среди аппроксимирующих функций заданного типа — тригонометрических полиномов $B(\hat{\omega}, \mathbf{a})$ — необходимо выбрать полином *наилучшего приближения* к аппроксимируемой функции $\xi(\hat{\omega})$:

$$B(\hat{\omega}, \mathbf{a}) \approx \xi(\hat{\omega}).$$

4. Выбор критерия аппроксимации.

Критерий аппроксимации уточняет (формализует) смысл наилучшего приближения.

При синтезе КИХ-фильтра контролируется максимальное отклонение амплитудной функции $B(\hat{\omega}, \mathbf{a})$ от идеальной АЧХ $\xi(\hat{\omega})$ на совокупности ПП и ПЗ — $\max |\xi(\hat{\omega}) - B(\hat{\omega}, \mathbf{a})|$, которое в математике называют расстоянием в равномерной метрике [49]. Ясно, что наилучшее приближение функции $B(\hat{\omega}, \mathbf{a})$ к функции $\xi(\hat{\omega})$ обеспечивается при минимальном расстоянии.

Этому отвечает *наилучший равномерный (чебышевский) критерий аппроксимации*:

$$\max_{\hat{\omega} \in \Omega} |\delta(\hat{\omega})| = \max_{\hat{\omega} \in \Omega} w(\hat{\omega}) |\xi(\hat{\omega}) - B(\hat{\omega}, \mathbf{a})| \rightarrow \min_{\mathbf{a}}, \quad (17.4)$$

где:

- Ω — интервал аппроксимации;
- $[\xi(\hat{\omega}) - B(\hat{\omega}, \mathbf{a})]$ — ошибка аппроксимации;
- $w(\hat{\omega})$ — весовая функция, по определению положительная;
- $\delta(\hat{\omega}) = w(\hat{\omega}) [\xi(\hat{\omega}) - B(\hat{\omega}, \mathbf{a})]$ — взвешенная ошибка аппроксимации.

Согласно критерию (17.4), среди всех полиномов *порядка M* полиномом *наилучшего равномерного (чебышевского) приближения* $B(\hat{\omega}, \mathbf{a})$ называют полином с таким вектором коэффициентов \mathbf{a} , при котором *максимум модуля взвешенной ошибки аппроксимации будет минимальным*.

Отсюда еще одно название данного критерия — *минимаксный*.

5. Расчет весовой функции.

Весовая функция $w(\hat{\omega})$ представляет собой набор весовых коэффициентов (весов), необходимых для выравнивания максимумов ошибок $\max |\delta(\hat{\omega})|$ на интервале аппроксимации Ω .

При синтезе КИХ-фильтра весовая функция $w(\hat{\omega})$ выравнивает максимальные отклонения амплитудной функции $B(\hat{\omega}, \mathbf{a})$ от идеальной АЧХ $\xi(\hat{\omega})$ на совокупности ПП и ПЗ в соответствии с заданными требованиями к АЧХ.

Веса — числа, всегда большие единицы, — рассчитываются следующим образом:

- вес, равный единице, присваивается полосе с наибольшим максимально допустимым отклонением;
- веса в остальных полосах рассчитываются как отношение наибольшего максимально допустимого отклонения к максимально допустимому отклонению в данной полосе.

Это позволяет ввести понятие *взвешенного максимально допустимого отклонения АЧХ* δ_{\max} на совокупности ПП и ПЗ, величина которого определяется следующим образом:

- для ФНЧ и ФВЧ с максимально допустимыми отклонениями в ПП δ_1 и ПЗ δ_2 :

$$\delta_{\max} = \max\{\delta_1, \delta_2\}; \quad (17.5)$$

- для ПФ с максимально допустимыми отклонениями в ПП δ_1 и ПЗ δ_{21} и δ_{22} :

$$\delta_{\max} = \max\{\delta_{21}, \delta_1, \delta_{22}\}; \quad (17.6)$$

- для РФ с максимально допустимыми отклонениями в ПЗ δ_2 и ПП δ_{11} и δ_{12} :

$$\delta_{\max} = \max\{\delta_{11}, \delta_2, \delta_{12}\}. \quad (17.7)$$

Пример 17.1. Рассчитать весовую функцию $w(\hat{\omega})$ для КИХ-фильтра ФНЧ при заданных максимально допустимых отклонениях $\delta_1 = 0,1$ в ПП и $\delta_2 = 0,05$ в ПЗ.

Решение. Вес, равный 1, присваивается ПП, а в ПЗ рассчитывается как отношение $\delta_1/\delta_2 = 2$, откуда получаем весовую функцию:

$$w(\hat{\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{ПП;} \\ 2, & \text{ПЗ.} \end{cases} \quad (17.8)$$

Взвешенное максимально допустимое отклонение АЧХ на совокупности ПП и ПЗ равно $\delta_{\max} = \max\{\delta_1; \delta_2\} = 0,1$. ◀

17.1.1. Проблемы решения задачи

Решение задачи аппроксимации сводится к *поиску вектора* \mathbf{a} полинома наилучшего равномерного приближения $B(\hat{\omega}, \mathbf{a})$ порядка M в соответствии с критерием (17.4):

$$\max_{\hat{\omega} \in \Omega} |\delta(\hat{\omega})| = |\delta(\hat{\omega}_i)| = \min, \quad \hat{\omega}_i \in \Omega. \quad (17.9)$$

Синтез КИХ-фильтра с передаточной функцией (16.1):

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^R h(n)z^{-n} \quad (17.10)$$

сводится к расчету его импульсной характеристики $h(n)$, отсчеты которой связаны линейно с коэффициентами тригонометрического полинома $B(\hat{\omega}, \mathbf{a})$ (см. табл. 15.2). Следовательно, синтез КИХ-фильтра методом чебышевской аппроксимации сводится к расчету вектора \mathbf{a} .

Вектор \mathbf{a} рассчитывается в результате решения оптимизационной задачи (17.4), однако ее решение связано со следующими проблемами:

- заранее неизвестно, что существует единственный полином $B(\hat{\omega}, \mathbf{a})$, который при заданном порядке M обеспечивает минимальную ошибку $|\delta(\hat{\omega}_i)|$ (17.9), поэтому не гарантирована однозначность решения;
- непонятно, как решать оптимизационную задачу, если целевая функция содержит модуль (производная от модуля равна модулю).

Синтез оптимального КИХ-фильтра заключается в *расчете вектора \mathbf{a}* полинома $B(\hat{\omega}, \mathbf{a})$ *наименьшего порядка* $M = M_{\min}$, при котором значение $|\delta(\hat{\omega}_i)|$ (17.9) не превосходит взвешенного максимально допустимого отклонения АЧХ δ_{\max} (17.5) — (17.7):

$$|\delta(\hat{\omega}_i)| \leq \delta_{\max}. \quad (17.11)$$

В данном случае сталкиваемся со следующими проблемами:

- заранее неизвестно, что существует единственный полином $B(\hat{\omega}, \mathbf{a})$, который при заданной ошибке $|\delta(\hat{\omega}_i)|$ (17.9) обеспечивает минимальный порядок полинома M_{\min} , поэтому не гарантирована однозначность решения;
- не формализована оптимизационная задача — неизвестна целевая функция с *двумя* оптимизируемыми параметрами, M и \mathbf{a} .

Следовательно, эту задачу придется решать путем *итераций* — неоднократных проб с уменьшением/увеличением порядка M до тех пор, пока не будет найдено его *наименьшее* значение, при котором выполняется условие (17.11).

Обозначенные проблемы поможет снять теорема Чебышева.

17.2. Теорема Чебышева

Обобщенная теорема об альтернансе (теорема Чебышева) устанавливает признак, выделяющий полином наилучшего равномерного приближения среди всех полиномов заданного типа.

Для того чтобы тригонометрический полином $B(\hat{\omega}, \mathbf{a})$ был полиномом наилучшего равномерного приближения непрерывной функции $\xi(\hat{\omega})$ на интервале аппроксимации Ω , необходимо и достаточно, чтобы взвешенная ошибка аппроксимации $\delta(\hat{\omega})$ принимала наибольшие и равные по абсолютной величине и чередующиеся по знаку значения не менее чем в $\hat{\omega} = \pi$ последовательно расположенных точках $\hat{\omega}_1 < \hat{\omega}_2 < \dots < \hat{\omega}_i < \dots < \hat{\omega}_{M+2}$:

$$\max_{\hat{\omega} \in \Omega} |\delta(\hat{\omega})| = |\delta(\hat{\omega}_i)| = |\delta|, \quad i = 1, 2, \dots, (M+2); \quad (17.12)$$

$$|\delta| = \min; \quad (17.13)$$

$$\delta(\hat{\omega}_i) = (-1)^{i-1} \delta, \quad i = 1, 2, \dots, (M+2). \quad (17.14)$$

Систему точек $\{\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \dots, \hat{\omega}_i, \dots, \hat{\omega}_{M+2}\} \in \Omega$, в которых взвешенная ошибка аппроксимации $\delta(\hat{\omega})$ принимает равные по абсолютной величине и чередующиеся по знаку значения, называют *чебышевским альтернансом*, а сами точки — *точками (частотами) альтернанса*.

Согласно теореме Чебышева, *максимум* модуля взвешенной ошибки аппроксимации в этих точках достигает своего *минимума* $|\delta|$, поэтому *чебышевский альтернанс* является необходимым и достаточным *признаком* полинома наилучшего равномерного (чебышевского) приближения.

Как следует из теоремы Чебышева, число точек альтернанса m должно быть *равным* $(M+2)$:

$$m = M + 2, \quad (17.15)$$

поэтому порядок КИХ-фильтра R , связанный линейно с порядком полинома M (см. табл. 15.2), не может быть меньшим, чем представленный в табл. 17.2.

В ряде случаев, при определенных дополнительных условиях для полинома $B(\hat{\omega}, \mathbf{a})$, число точек альтернанса может оказаться *равным* $(M+3)$. Такой пример будет приведен в разд. 18.1.3 для полуполосных фильтров.

Таблица 17.2. Число точек альтернанса и порядок КИХ-фильтра

Тип КИХ-фильтра	Порядок полинома M	Число точек альтернанса $m = M + 2$	Порядок КИХ-фильтра R
Тип 1 ИХ симметричная. Порядок R четный	$M = \frac{R}{2}$	$m = \frac{R}{2} + 2$	$R = 2m - 4$
Тип 2 ИХ симметричная. Порядок R нечетный	$M = \frac{R-1}{2}$	$m = \frac{R-1}{2} + 2$	$R = 2m - 3$
Тип 3 ИХ антисимметричная. Порядок R четный	$M = \frac{R}{2} - 1$	$m = \frac{R}{2} + 1$	$R = 2m - 2$
Тип 4 ИХ антисимметричная. Порядок R нечетный	$M = \frac{R-1}{2}$	$m = \frac{R-1}{2} + 2$	$R = 2m - 3$

Следствия из теоремы Чебышева:

1. Существует *единственный* полином наилучшего равномерного приближения $B(\hat{\omega}, \mathbf{a})$, который при *заданном* (одинаковом) порядке M гарантирует *минимум* максимума модуля взвешенной ошибки аппроксимации $|\delta|$.
2. Существует *единственный* полином наилучшего равномерного приближения $B(\hat{\omega}, \mathbf{a})$, который при *заданном* (одинаковом) максимуме модуля взвешенной ошибки аппроксимации $|\delta|$ гарантирует *минимальный* порядок полинома $M = M_{\min}$.

Тем самым гарантируется возможность синтеза *оптимального* КИХ-фильтра порядка R_{opt} .

3. Взвешенная ошибка аппроксимации $\delta(\hat{\omega})$ полинома наилучшего равномерного приближения имеет равноволновый (равнопульсирующий) характер.

Этому соответствует англоязычный термин "*equiripple*", который также используют для краткого наименования метода наилучшей равномерной (чебышевской) аппроксимации.

4. Точки альтернанса могут быть эквидистантными, т. е. располагаться на равном расстоянии друг от друга, или не эквидистантными.

5. Границы интервала Ω не обязательно относятся к точкам альтернанса.

Для КИХ-фильтров — это границы основной полосы частот $[0; \pi]$.

17.3. Решение задачи

Соотношения (17.12)–(17.14) позволяют записать целевую функцию в оптимизационной задаче (17.4) для точек альтернанса¹:

$$(-1)^{i-1} \delta = w(\hat{\omega}_i) [\xi(\hat{\omega}_i) - B(\hat{\omega}_i, \tilde{\mathbf{a}})], \quad i = 1, 2, \dots, (M+2),$$

или, что эквивалентно:

$$B(\hat{\omega}_i, \tilde{\mathbf{a}}) + \frac{(-1)^{i-1} \delta}{w(\hat{\omega}_i)} = \xi(\hat{\omega}_i), \quad i = 1, 2, \dots, (M+2), \quad (17.16)$$

где использовано представление тригонометрического полинома $B(\hat{\omega}_i, \tilde{\mathbf{a}})$ (17.3).

Подставим $B(\hat{\omega}_i, \tilde{\mathbf{a}})$ (17.3):

$$\cos \lambda(\hat{\omega}_i) \sum_{k=0}^M \tilde{a}_k \cos k \hat{\omega}_i + \frac{(-1)^{i-1} \delta}{w(\hat{\omega}_i)} = \xi(\hat{\omega}_i), \quad i = 1, 2, \dots, (M+2),$$

¹ И тем самым избавиться от модуля взвешенной ошибки аппроксимации в (17.4).

и разделим обе части равенства на $\cos \lambda(\hat{\omega}_i)$:

$$\sum_{k=0}^M \tilde{a}_k \cos k\hat{\omega}_i + \frac{(-1)^{i-1} \delta}{\tilde{w}(\hat{\omega}_i)} = \tilde{\xi}(\hat{\omega}_i), \quad i = 1, 2, \dots, (M+2), \quad (17.17)$$

где:

$$\tilde{w}(\hat{\omega}_i) = \cos \lambda(\hat{\omega}_i) w(\hat{\omega}_i);$$

$$\tilde{\xi}(\hat{\omega}_i) = \xi(\hat{\omega}_i) / \cos \lambda(\hat{\omega}_i).$$

Точки, где $\cos \lambda(\hat{\omega}_i) = 0$, не могут быть точками альтернансы, иначе получим деление на нуль. Анализируя функцию $\cos \lambda(\hat{\omega})$ в табл. 17.1, определим частоты на границах основной полосы частот $[0; \pi]$, которые не являются частотами альтернансы (табл. 17.3).

Таблица 17.3. Ограничения для частот альтернансы

Тип КИХ-фильтра	$\cos \lambda(\hat{\omega})$	$\cos \lambda(\hat{\omega})$		Не являются частотами альтернансы
		$\hat{\omega} = 0$	$\hat{\omega} = \pi$	
Тип 2	$\cos \frac{\hat{\omega}}{2}$	1	0	$\hat{\omega} = \pi$
Тип 3	$\sin \hat{\omega}$	0	0	$\hat{\omega} = 0$ и $\hat{\omega} = \pi$
Тип 4	$\sin \frac{\hat{\omega}}{2}$	0	1	$\hat{\omega} = \pi$

Соотношение (17.17) образует систему из $(M+2)$ линейных уравнений с $(M+2)$ неизвестными: $(M+1)$ коэффициентами \tilde{a}_k и величиной δ .

Матричная запись системы линейных уравнений (СЛУ) имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos \hat{\omega}_1 & \cdots & \cos k\hat{\omega}_1 & \cdots & \cos M\hat{\omega}_1 & 1/\tilde{w}(\hat{\omega}_1) \\ 1 & \cos \hat{\omega}_2 & \cdots & \cos k\hat{\omega}_2 & \cdots & \cos M\hat{\omega}_2 & -1/\tilde{w}(\hat{\omega}_2) \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \hat{\omega}_{M+2} & \cdots & \cos k\hat{\omega}_{M+2} & \cdots & \cos M\hat{\omega}_{M+2} & (-1)^{M+2}/\tilde{w}(\hat{\omega}_{M+2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_k \\ \vdots \\ \tilde{a}_M \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}(\hat{\omega}_1) \\ \tilde{\xi}(\hat{\omega}_2) \\ \vdots \\ \tilde{\xi}(\hat{\omega}_i) \\ \vdots \\ \tilde{\xi}(\hat{\omega}_{M+1}) \\ \tilde{\xi}(\hat{\omega}_{M+2}) \end{bmatrix}. \quad (17.18)$$

В результате решения данной СЛУ будут найдены:

- вектор коэффициентов $\tilde{\mathbf{a}}$ полинома чебышевского приближения $B(\hat{\omega}, \tilde{\mathbf{a}})$;
- величина δ чебышевского альтернансы.

Такое решение называют *оптимальным*.

Задача синтеза *оптимального* КИХ-фильтра сводится к поиску *оптимального решения*, удовлетворяющего условию (17.11):

$$|\delta| \leq \delta_{\max} \quad (17.19)$$

при *наименьшем порядке полинома* $M = M_{\min}$.

Для поиска оптимального решения разработаны эффективные *численные методы*, рассматриваемые далее.

17.3.1. Полиномиальный алгоритм Ремеза

Полиномиальный алгоритм Ремеза (коротко — *алгоритм Ремеза*) предназначен для поиска *оптимального решения* при заранее *неизвестных* частотах альтернанса.

Суть этого алгоритма сводится к последовательной модификации вектора коэффициентов $\tilde{\mathbf{a}}$ до тех пор, пока при заданной степени точности не будет найдено *оптимальное решение*.

Алгоритм Ремеза представляет собой итерационную процедуру¹, включающую в себя следующие шаги:

1. Задание начальной (пробной) сетки частот альтернанса:

$$S^{(j)} \Rightarrow S^{(0)} = \left\{ \hat{\omega}_1^{(0)}, \dots, \hat{\omega}_i^{(0)}, \dots, \hat{\omega}_{M+2}^{(0)} \right\} \in \Omega,$$

где верхний индекс j отображает номер итерации.

Частоты могут задаваться произвольно, но с учетом ограничений в табл. 17.3.

2. Решение СЛУ (17.18) — вычисление $\tilde{\mathbf{a}}^{(j)} \Rightarrow \tilde{\mathbf{a}}^{(0)}$ и $\delta^{(j)} \Rightarrow \delta^{(0)}$.

3. Вычисление на густой сетке частот:

$$S = \left\{ \hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_l, \dots, \hat{\omega}_L \right\} \in \Omega, \quad L \gg M, \quad (17.20)$$

значений полинома и взвешенной ошибки аппроксимации:

$$\begin{aligned} B(\hat{\omega}_l, \tilde{\mathbf{a}}^{(j)}) &\Rightarrow B(\hat{\omega}_l, \tilde{\mathbf{a}}^{(0)}); \\ \delta^{(j)}(\hat{\omega}_l) = w(\hat{\omega}_l) [\xi(\hat{\omega}_l) - B(\hat{\omega}_l, \tilde{\mathbf{a}})] &\Rightarrow \delta^{(0)}(\hat{\omega}_l). \end{aligned}$$

4. Определение максимума модуля взвешенной ошибки аппроксимации:

$$\max |\delta^{(j)}(\hat{\omega})| \Rightarrow \max |\delta^{(0)}(\hat{\omega})|. \quad (17.21)$$

5. Проверка на необходимость следующей итерации:

- если значение (17.21) совпадает с $|\delta^{(j)}|$ с заданной степенью точности ε :

$$\max |\delta^{(j)}(\hat{\omega})| - |\delta^{(j)}| \leq \varepsilon, \quad (17.22)$$

¹ Итерационный цикл с заранее неизвестным числом повторений (итераций).

то это означает, что найден чебышевский альтернанс $S^{(j)}$, а следовательно, получено *оптимальное решение* — вектор $\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{a}}^{(j)}$ полинома чебышевского приближения $B(\hat{\omega}, \tilde{\mathbf{a}})$ и величина $\delta = \delta^{(j)}$;

- если условие (17.22) не выполняется, то оптимальное решение не найдено и итерационная процедура продолжается.

Переходят к *следующей итерации с номером* $j = j + 1$, для которой назначается новая сетка частот альтернанса:

$$S^{(j)} = \left\{ \hat{\omega}_1^{(j)}, \dots, \hat{\omega}_i^{(j)}, \dots, \hat{\omega}_{M+2}^{(j)} \right\} \in \Omega.$$

Среди них обязательно должны быть частоты *предыдущей* итерации, где имели $\max |\delta^{(j-1)}(\hat{\omega})|$, а также частоты наибольших (по модулю) локальных экстремумов с чередованием знака.

После этого процедура повторяется, начиная с шага 2.

На каждой следующей итерации значение $\max |\delta^{(j)}(\hat{\omega})|$ будет уменьшаться, а величина $|\delta^{(j)}|$ — возрастать до тех пор, пока на последней итерации с *условным* номером J они не окажутся *выровненными* с заданной степенью точности, т. е. будет выполнено условие (17.22).

По завершении итерационной процедуры будет найдено *оптимальное решение* — вектор $\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{a}}^{(J)}$ полинома $B(\hat{\omega}, \tilde{\mathbf{a}})$ и величина $\delta = \delta^{(J)}$.

При известном векторе $\tilde{\mathbf{a}}$ рассчитывается вектор \mathbf{a} полинома $B(\hat{\omega}, \mathbf{a})$ (17.1) (см. табл. 17.1), к поиску которого сводится синтез оптимального КИХ-фильтра.

Алгоритм Ремеза обладает высокой скоростью сходимости, и обычно решение задачи достигается за небольшое число итераций при любом порядке полинома.

17.3.2. Пример поиска оптимального решения с помощью алгоритма Ремеза

Поиск оптимального решения с помощью итерационной процедуры алгоритма Ремеза проиллюстрируем на простом примере аппроксимации параболы прямой линией [46].

Пример 17.2. Задана аппроксимируемая функция $\xi(x)$ (парабола) и интервал аппроксимации:

$$\xi(x) = x^2, \quad x \in [0, 1].$$

Найти коэффициенты полинома $B(x, \mathbf{a})$ наилучшего равномерного (чебышевского) приближения порядка $M = 1$ (прямой линии) к функции $\xi(x)$:

$$B(x, \mathbf{a}) = \sum_{k=0}^M a_k x^k = \sum_{k=0}^1 a_k x^k = a_0 + a_1 x.$$

Решение. В данном случае имеем один интервал аппроксимации, поэтому весовая функция равна единице. Порядок полинома равен $M=1$, следовательно, число точек альтернансы равно $m = M + 2 = 3$, и соотношение (17.17) принимает вид:

$$\sum_{k=0}^1 a_k x_i^k + (-1)^{i-1} \delta = \xi(x_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

или, раскрывая сумму:

$$a_0 + a_1 x_i + (-1)^{i-1} \delta = \xi(x_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

откуда получаем СЛУ, подобную (17.18):

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & 1 \\ 1 & x_2 & -1 \\ 1 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi(x_1) \\ \xi(x_2) \\ \xi(x_3) \end{bmatrix}. \quad (17.23)$$

Найдем оптимальное решение с помощью алгоритма Ремеза. Во избежание путаницы с повторяющимися шагами итерации будем использовать нумерацию из двух цифр: *первая цифра — номер итерации, вторая — шаг итерации*.

1.1. Зададим начальную сетку точек альтернанса (рис. 17.2, *a*):

$$S^{(j)} \Rightarrow S^{(0)} = \{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\} = \{0, 0, 25; 0, 5; 1\} \in [0, 1].$$

1.2. Решим СЛУ (17.23):

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1^{(j)} & 1 \\ 1 & x_2^{(j)} & -1 \\ 1 & x_3^{(j)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^{(j)} \\ a_1^{(j)} \\ \delta^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi(x_1^{(j)}) \\ \xi(x_2^{(j)}) \\ \xi(x_3^{(j)}) \end{bmatrix}. \quad (17.24)$$

Подставив $S^{(0)}$ и $\xi(S^{(0)})$, получим СЛУ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,25 & 1 \\ 1 & 0,5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^{(0)} \\ a_1^{(0)} \\ \delta^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0625 \\ 0,25 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и ее решение: $\mathbf{a}^{(j)} \Rightarrow \mathbf{a}^{(0)} = [-0,3125 \quad 1,25]$ и $\delta^{(j)} \Rightarrow \delta^{(0)} = -0,0625$.

1.3. Вычислим на густой сетке $S \in [0, 1]$ с шагом $\Delta x = 0,0001$ ошибку аппроксимации $\delta^{(j)}(x) \Rightarrow \delta^{(0)}(x)$.

1.4. Определим ее максимум модуля:

$$\max |\delta^{(j)}(x)| \Rightarrow \max |\delta^{(0)}(x)| = 0,3125.$$

1.5. Проверим на необходимость следующей итерации при заданной степени точности $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$\max |\delta^{(j)}(x)| - |\delta^{(j)}| \Rightarrow \max |\delta^{(0)}(x)| - |\delta^{(0)}| = 0,3125 - 0,0625 = 0,25 > \varepsilon.$$

Заданная точность не достигнута, и процедура повторяется при $j = j + 1 = 1$.

2.1. Назначается новая сетка точек альтернанса (рис. 17.2, б):

$$S^{(1)} = \{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}\} = \{0; 0,625; 1\}.$$

2.2. СЛУ (17.24) принимает вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1^{(1)} & 1 \\ 1 & x_2^{(1)} & -1 \\ 1 & x_3^{(1)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^{(1)} \\ a_1^{(1)} \\ \delta^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi(x_1^{(1)}) \\ \xi(x_2^{(1)}) \\ \xi(x_3^{(1)}) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0,625 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^{(1)} \\ a_1^{(1)} \\ \delta^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,390625 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и имеет решение $\mathbf{a}^{(1)} = [0,1328125 \quad 1]$ и $\delta^{(1)} = 0,1171875$.

2.3. На густой сетке вычисляем ошибку аппроксимации $\delta^{(1)}(x)$.

2.4. Определяем ее максимум модуля:

$$\max |\delta^{(1)}(x)| = 0,1328125.$$

2.5. Проверяем на необходимость следующей итерации:

$$\max |\delta^{(1)}(x)| - |\delta^{(1)}| = 0,1328125 - 0,1171875 = 0,0156 > \varepsilon.$$

Заданная точность не достигнута, и процедура повторяется при $j = j + 1 = 2$.

3.1. Назначается новая сетка точек альтернанса (рис. 17.2, б):

$$S^{(2)} = \{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}\} = \{0; 0,5; 1\}.$$

3.2. СЛУ (17.24) принимает вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1^{(2)} & 1 \\ 1 & x_2^{(2)} & -1 \\ 1 & x_3^{(2)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^{(2)} \\ a_1^{(2)} \\ \delta^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi(x_1^{(2)}) \\ \xi(x_2^{(2)}) \\ \xi(x_3^{(2)}) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0,5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^{(2)} \\ a_1^{(2)} \\ \delta^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,25 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и имеет решение $\mathbf{a}^{(2)} = [-0,125 \quad 1]$ и $\delta^{(2)} = 0,125$.

3.3. На густой сетке вычисляем ошибку аппроксимации $\delta^{(2)}(x)$.

3.4. Определяем ее максимум модуля:

$$\max |\delta^{(2)}(x)| = 0,125.$$

3.5. Проверяем на необходимость следующей итерации:

$$\max |\delta^{(2)}(x)| - |\delta^{(2)}| = 0,125 - 0,125 = 0 < \varepsilon.$$

Заданная точность достигнута. Итерационная процедура завершается. Найден чебышевский альтернанс $S^{(2)}$, а следовательно, получено *оптимальное решение* — вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{(2)}$ и величина $\delta = \delta^{(2)}$. На рис. 17.2, ε представлены аппроксимируемая (парабола) и аппроксимирующая (прямая) функции. ▲

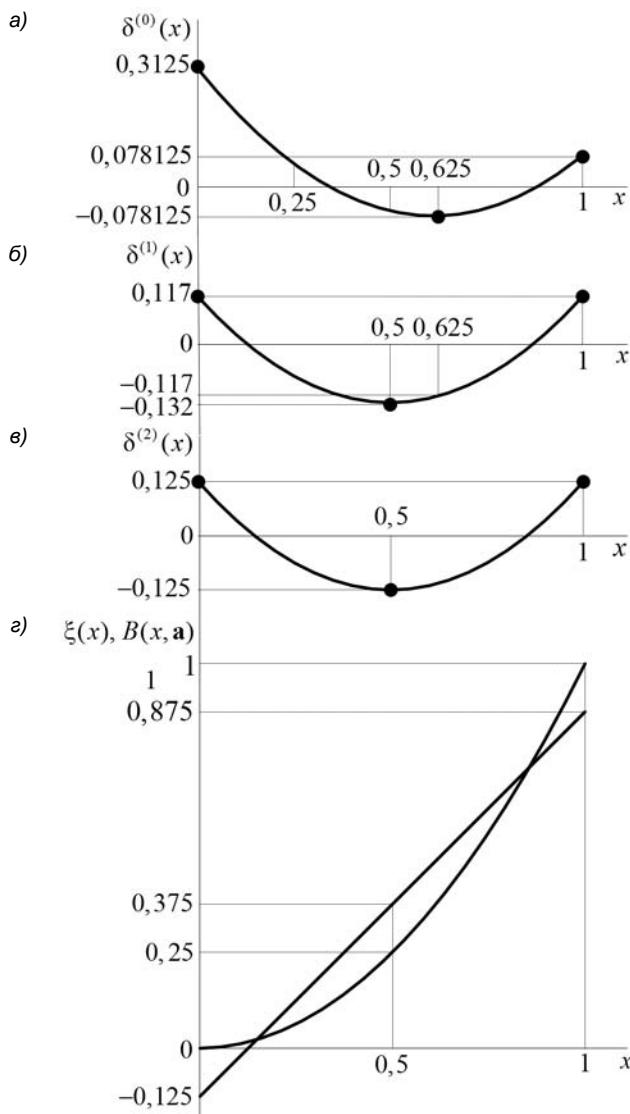


Рис. 17.2. Иллюстрация итерационной процедуры алгоритма Ремеза при аппроксимации параболы прямой линией: первая итерация (а),

вторая итерация (б), третья итерация (в),

оптимальное решение — аппроксимируемая парабола и аппроксимирующая прямая (г)

17.3.3. Обменный алгоритм Ремеза

Обменный алгоритм Ремеза предназначен для поиска *оптимального решения*, удовлетворяющего условию (17.19) при *наименьшем* порядке полинома $M = M_{\min}$.

Обменный алгоритм Ремеза представляет собой итерационную процедуру, включающую в себя следующие шаги:

1. Задание начального значения порядка M .
2. Поиск оптимального решения с помощью алгоритма Ремеза — вектора $\tilde{\mathbf{a}}$ и величины δ .
3. Проверка выполнения условия (17.19):

$$|\delta| \leq \delta_{\max} \quad (17.25)$$

с разветвлением итерационной процедуры:

- если условие выполняется, то порядок полинома *уменьшается* на единицу и процесс повторяется, начиная с шага 2, до тех пор, пока условие при порядке M не перестанет выполняться, следовательно, наименьший порядок, при котором оно еще выполнялось, равен $M_{\min} = (M + 1)$, после чего переходят к шагу 4;
 - если условие не выполняется, то переходят к шагу 6.
4. Поиск оптимального решения для порядка M_{\min} с помощью алгоритма Ремеза.
 5. Завершение итерационной процедуры.
 6. Увеличение порядка полинома на единицу и поиск оптимального решения с помощью алгоритма Ремеза.
 7. Проверка выполнения условия

$$|\delta| > \delta_{\max}$$

с разветвлением итерационной процедуры:

- если это условие не выполняется, то это означает, что порядок, при котором выполнялось условие (17.25), равен $M_{\min} = (M - 1)$, и переходят к шагу 4;
- если это условие выполняется, то процесс повторяется, начиная с шага 6, до тех пор, пока не будет найден наименьший порядок $M_{\min} = M$, при котором оно перестанет выполняться, т. е. будет выполняться условие (17.25), после чего переходят к шагу 5.

Уменьшение порядка M сопровождается увеличением величины $|\delta|$ и, наоборот, — между ними как бы происходит обмен, поэтому алгоритм назван *обменным*.

На практике эквивалентом этого алгоритма является итерационная процедура (см. разд. 17.4), когда порядок КИХ-фильтра сначала оценивается по эмпирической формуле, а затем путем уменьшения/увеличения его значения уточняется по

результатам проверки выполнения требований к АЧХ, что позволяет сократить объем вычислений.

Тем не менее, и в этом случае итерационная процедура будет связана с необходимостью применения алгоритма Ремеза с повторением трудоемкой операции решения СЛУ (17.18) на каждой итерации. Повысить его вычислительную эффективность позволяет интерполяционный метод Паркса—Мак-Клеллана (Parks—McClellan).

17.3.4. Интерполяционный метод Паркса—Мак-Клеллана

В *интерполяционном методе Паркса—Мак-Клеллана* [23, 34] предложено вычислять взвешенную ошибку аппроксимации $\delta^{(j)}$ на каждой итерации алгоритма Ремеза без решения СЛУ (17.18). В этом случае СЛУ решается один раз по завершении интерполяционной процедуры.

Применение данного метода приведет к модификации *шагов 2 и 3* алгоритма Ремеза (см. разд. 17.3.1):

1. Задание начальной сетки частот альтернанса (см. шаг 1 алгоритма Ремеза).
2. Вычисление оценки величины $\delta^{(j)} \Rightarrow \delta^{(0)}$ по известной в численных методах аналитической формуле [6]:

$$\delta^{(j)} \Rightarrow \delta^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{M+2} \alpha_i \xi(\hat{\omega}_i)}{\sum_{i=1}^{M+2} \frac{\alpha_i (-1)^{i-1}}{w(\hat{\omega}_i)}},$$

где $\hat{\omega}_i$ и $\hat{\omega}_k$ — частоты сетки $S^{(j)} \Rightarrow S^{(0)}$; α_i — связанный с ними коэффициент

$$\alpha_i = \prod_{i=1, i \neq k}^{M+2} \frac{1}{\cos \hat{\omega}_i - \cos \hat{\omega}_k}.$$

3. Вычисление на густой сетке частот (17.20) значений полинома $B(\hat{\omega}_l)$ с помощью интерполяционной формулы Лагранжа:

$$B(\hat{\omega}_l) = \frac{\sum_{i=1}^{M+1} \frac{\beta_i}{\cos \hat{\omega}_l - \cos \hat{\omega}_i} B(\hat{\omega}_i)}{\sum_{i=1}^{M+1} \frac{\beta_i}{\cos \hat{\omega}_l - \cos \hat{\omega}_i}}, \quad l = 1, 2, \dots, L,$$

где

$$\beta_i = \prod_{i=1, i \neq k}^{M+1} \frac{1}{\cos \hat{\omega}_i - \cos \hat{\omega}_k},$$

и значений взвешенной ошибки аппроксимации:

$$\delta^{(j)}(\hat{\omega}_l) = w(\hat{\omega}_l) [\xi(\hat{\omega}_l) - B(\hat{\omega}_l)] \Rightarrow \delta^{(0)}(\hat{\omega}_l).$$

В интерполяционной формуле Лагранжа восстановление полинома $B(\hat{\omega})$ порядка M выполняется по любым $(M+1)$ известным отсчетам $B(\hat{\omega}_i)$, в данном случае вычисляемым непосредственно по формуле (17.16):

$$B(\hat{\omega}_i) = \xi(\hat{\omega}_i) - \frac{(-1)^{i-1} \delta^{(j)}}{w(\hat{\omega}_i)} \Rightarrow \xi(\hat{\omega}_i) = \frac{(-1)^{i-1} \delta^{(0)}}{w(\hat{\omega}_i)}.$$

Далее переходят к шагу 4 алгоритма Ремеза.

По завершении итерационной процедуры решается СЛУ (17.18) — рассчитывается вектор $\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{a}}^{(J)}$ полинома чебышевского приближения $B(\hat{\omega}, \tilde{\mathbf{a}})$ и величина $\delta = \delta^{(J)}$.

Интерполяционный метод Паркса—Мак-Клеллана применяется в алгоритме Ремеза, реализованном в GUI FDATool.

17.4. Итерационная процедура синтеза оптимального КИХ-фильтра

Рассматриваемая процедура синтеза ориентирована на применение средств GUI FDATool (см. *приложение 1*).

Итерационная процедура синтеза оптимального КИХ-фильтра методом наилучшей равномерной (чебышевской) аппроксимации (Equiripple) включает в себя следующие шаги:

1. Задание требований к АЧХ.
2. Оценка порядка фильтра.

Оценкой порядка R называют его начальное значение, которое рассчитывается автоматически по эмпирическим формулам на основе требований к АЧХ.

Для этого достаточно установить переключатель **Minimum order** (Минимальный порядок).

3. Расчет передаточной функции КИХ-фильтра.

В методе чебышевской аппроксимации расчет передаточной функции КИХ-фильтра $H(z)$ (17.10) сводится к расчету вектора коэффициентов \mathbf{a} , который выполняется автоматически с помощью алгоритма Ремеза с применением интерполяционного метода Паркса—Мак-Клеллана.

4. Проверка выполнения требований к АЧХ.

Проверка заключается в сравнении *фактических* максимальных по модулю отклонений АЧХ от идеальной АЧХ в ПП и ПЗ с *заданными* максимально допустимыми отклонениями.

Возможны две ситуации.

- Требования к АЧХ не выполняются.

В этом случае следует *увеличить* порядок R и вернуться к п. 3.

- Требования к АЧХ выполняются.

В этом случае следует уменьшить порядок R и вернуться к п. 3.

В обоих случаях увеличение/уменьшение порядка R продолжается до тех пор, пока не будет найден *минимальный (оптимальный) порядок* R_{opt} , при котором выполняются требования к АЧХ.

Порядок КИХ-фильтра R задается в поле ввода переключателя **Specify order** (Произвольный порядок). При этом задаются *веса* (weight value) в ПП и ПЗ.

При увеличении/уменьшении порядка необходимо иметь в виду, что для КИХ-фильтров типов 2, 3 и 4 имеются ограничения на *тип избирательности* (см. табл. 15.2).

5. Выбор структуры КИХ-фильтра — обычно прямой или прямой приведенной (см. табл. 6.1).

Пример 17.3. Синтезировать КИХ-фильтр ФНЧ при заданных требованиях к АЧХ (см. рис. 15.2):

- частота дискретизации $f_d = 2000 \text{ Гц}$;
- граничная частота ПП $f_x = 450 \text{ Гц}$;
- граничная частота ПЗ $f_k = 550 \text{ Гц}$;
- максимально допустимое отклонение АЧХ в ПП $\delta_1 = 0,1$;
- максимально допустимое отклонение АЧХ в ПЗ $\delta_2 = 0,05$.

Решение. Выполняя действия в соответствии с итерационной процедурой синтеза, по ее завершении получим оптимальный КИХ-фильтр порядка $R_{\text{opt}} = 19$ (тип 2), характеристики которого представлены на рис. 17.3.

На графике АЧХ отмечены частоты альтернанса, число которых равно $m = 11$. Отметим, что правая граница основной полосы частот $f_d/2$ ($\hat{\omega} = \pi$) для КИХ-фильтра типа 2 не является частотой альтернанса (см. табл. 17.3).

Оптимальный порядок КИХ-фильтра типа 2, рассчитанный по формуле в табл. 17.2, совпадает с определенным в итерационной процедуре:

$$R = 2m - 3 = 22 - 3 = 19.$$

При тех же требованиях к АЧХ в методе окон с окном Кайзера (см. пример 16.1) имели порядок $R_{\text{min}} = 26$, а с окном Хэмминга (см. пример 16.2) — $R_{\text{min}} = 48$. ▲

Основное достоинство метода чебышевской аппроксимации очевидно — это возможность синтеза оптимального КИХ-фильтра.

Основным недостатком метода является его существенно более высокая, по сравнению с методом окон, вычислительная сложность, поэтому этот метод не применяют для синтеза КИХ-фильтров в реальном времени.

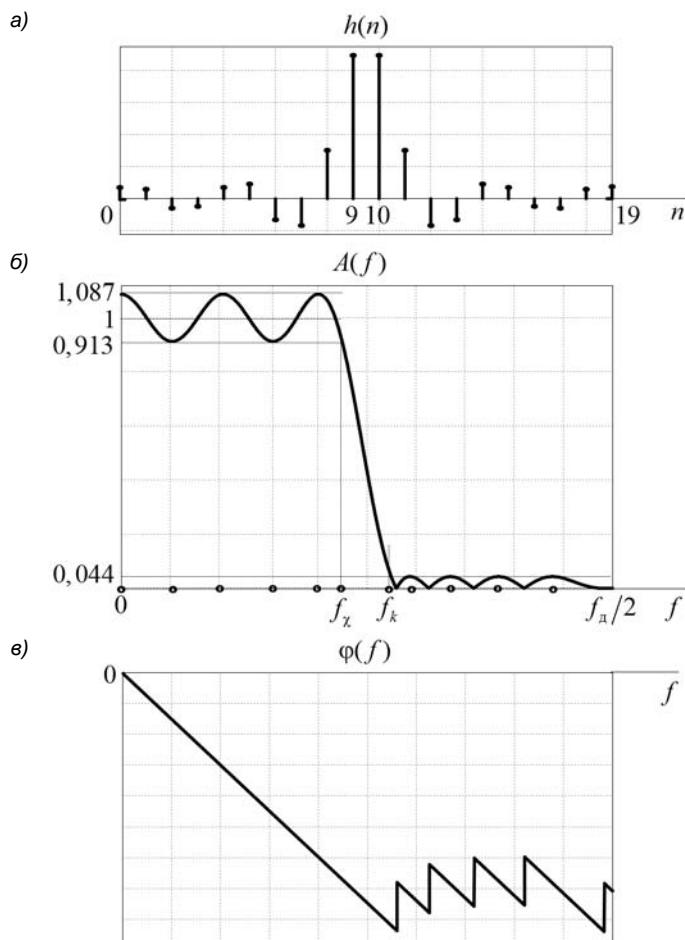
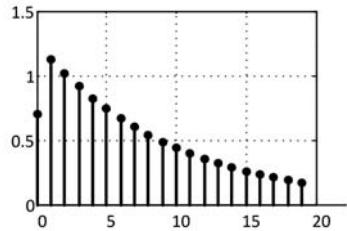


Рис. 17.3. Импульсная характеристика (a), АЧХ (б) и ФЧХ (в)
оптимального КИХ-фильтра ФНЧ

ГЛАВА 18



Специальные КИХ-фильтры с линейной ФЧХ

Обобщенная частотная характеристика КИХ-фильтров с линейной ФЧХ имеет вид (15.7):

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = B(\hat{\omega}) e^{j\varphi(\hat{\omega})} = B(\hat{\omega}) e^{j\left(\alpha - \frac{R\hat{\omega}}{2}\right)},$$

где $B(\hat{\omega})$ — амплитудная функция; $\varphi(\hat{\omega}) = \alpha - R\hat{\omega}/2$ — линейная (с точностью до скачков на π) ФЧХ; α — приращение ФЧХ, равное нулю при симметричной импульсной характеристики и $\pi/2$ — при антисимметричной.

Специальные КИХ-фильтры обладают амплитудной функцией $B(\hat{\omega})$ особого вида, который может быть реализован на базе КИХ-фильтров с симметричной или антисимметричной импульсной характеристикой.

18.1. Специальные КИХ-фильтры с симметричной импульсной характеристикой

Обобщенная частотная характеристика КИХ-фильтров с симметричной импульсной характеристикой имеет вид (15.8):

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = B(\hat{\omega}) e^{-j\frac{R\hat{\omega}}{2}}. \quad (18.1)$$

Специальные КИХ-фильтры отличаются видом амплитудных функций $B(\hat{\omega})$ и особыми признаками соответствующих импульсных характеристик.

18.1.1. Однородный фильтр

Однородным фильтром называют КИХ-фильтр типа 1 или 2, амплитудная функция $B(\hat{\omega})$ которого совпадает (с точностью до множителя $1/N$) с амплитудной функцией окна Дирихле $W_R(\hat{\omega})$ (16.16):

$$B(\hat{\omega}) = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin(\hat{\omega}N/2)}{\sin(\hat{\omega}/2)} = \begin{cases} \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin(\hat{\omega}N/2)}{\sin(\hat{\omega}/2)}, & \hat{\omega} \neq 0; \\ 1, & \hat{\omega} = 0, \end{cases} \quad (18.2)$$

а импульсная характеристика — с окном Дирихле $w_R(n)$ (16.8) с весовым коэффициентом $1/N$, где N — длина фильтра:

$$h(n) = \begin{cases} 1/N, & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (18.3)$$

Передаточная функция такого фильтра имеет *два эквивалентных представления*: одно из них по определению соответствует нерекурсивной ЛДС (16.1):

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n},$$

а второе, полученное в результате применения формулы для суммы конечной геометрической прогрессии (16.13), — рекурсивной ЛДС:

$$H(z) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}.$$

Им соответствуют два эквивалентных разностных уравнения при ННУ:

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(n-i);$$

$$y(n) = \frac{1}{N} [x(n) - x(n-N)] - y(n-1)$$

и две эквивалентные структуры (рис. 18.1).

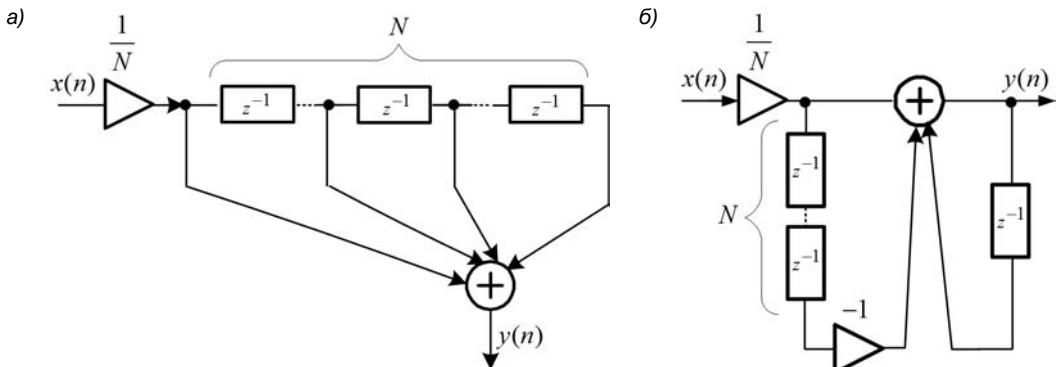


Рис. 18.1. Эквивалентные структуры однородного фильтра: нерекурсивная (а) и рекурсивная (б) ЛДС

Для реализации однородного фильтра выбирают рекурсивную структуру с минимальным числом операций сложения, что повышает скорость обработки сигналов.

Подобно амплитудной функции окна Дирихле $W_R(\hat{\omega})$, амплитудная функция однородного фильтра $B(\hat{\omega})$ имеет следующие отличительные признаки в основной полосе частот $[0; \pi]$:

- одинаковую ширину главного и бокового лепестков $\Delta\hat{\omega} = 2\pi/N$ (16.17);
- нули на частотах

$$\hat{\omega} = k2\pi/N, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

где $K = N/2$ при N четном и $K = (N-1)/2 = R/2$ при N нечетном.

В линейной ФЧХ фильтра на этих частотах наблюдаются скачки на π ;

- практически не зависящее от длины фильтра относительное ослабление боковых лепестков, подобно (16.19) и (16.21):

$$k_3 = \frac{\max|B(\hat{\omega})|_0}{B(0)} = \frac{\max|B(\hat{\omega})|_0}{1} \approx 0,2122; \quad (18.4)$$

$$k_3 (\text{дБ}) \approx 20 \lg(0,2122) \approx -13 \text{ дБ.}$$

Характеристики фильтра удобно анализировать в GUI FDA Tool, импортируя коэффициенты $H(z)$ (отсчеты ИХ) из Workspace. На рис. 18.2 они представлены для однородного фильтра длины $N=16$.

Однородный фильтр успешно применяется для подавления белого шума. Дисперсия шума на выходе фильтра оценивается по формуле (12.46):

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \sigma_{\text{вх}}^2 \sum_{n=0}^{N-1} h^2(n) = \sigma_{\text{вх}}^2 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N^2} = \frac{\sigma_{\text{вх}}^2}{N}, \quad (18.5)$$

следовательно, на выходе однородного фильтра ее можно уменьшить в N раз.

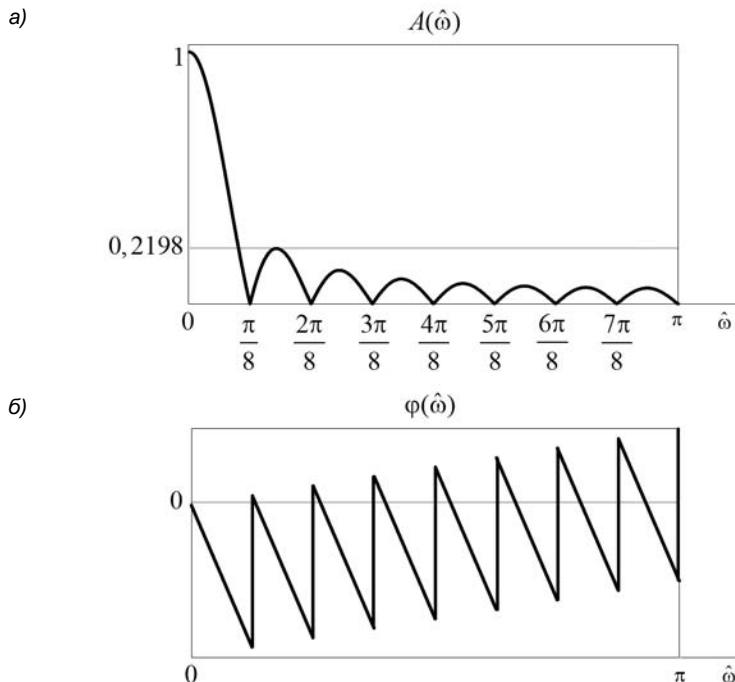


Рис. 18.2. АЧХ (а) и ФЧХ (б) однородного фильтра длины $N = 16$

18.1.2. Триангулярный фильтр

Триангулярный фильтр представляет собой каскадное соединение двух однородных фильтров длины N .

Его передаточная функция $H_t(z)$ равна произведению передаточных функций однородных фильтров:

$$H_t(z) = H(z)H(z),$$

импульсная характеристика $h_t(n)$ — свертка импульсных характеристик (18.3):

$$h_t(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)h(n-m), \quad (18.6)$$

а частотная характеристика $H_t(e^{j\hat{\omega}})$ — произведению частотных характеристик (18.1):

$$H_t(e^{j\hat{\omega}}) = B^2(\hat{\omega})e^{-jR\hat{\omega}} = B_t(\hat{\omega})e^{-jR\hat{\omega}}.$$

Соответственно, триангулярный фильтр имеет длину, равную длине свертки $L = (2N - 1)$, неотрицательную амплитудную функцию $B_t(\hat{\omega})$, строго линейную ФЧХ $\varphi(\hat{\omega}) = -R\hat{\omega}$ и относительное ослабление боковых лепестков, равное квадрату k_3 (18.4):

$$k_3 \approx 0,045 \Rightarrow k_3 (\text{дБ}) \approx -27 \text{ дБ}.$$

На рис. 18.3 представлены характеристики однородного и триангулярного¹ фильтров при $N = 8$.

Вычисляя значения свертки (18.6), можно получить аналитическую формулу симметричной ИХ $h_t(n)$ длины $L = (2N - 1)$:

$$h_t\left(\frac{L-1}{2} \pm n\right) = \frac{N-n}{N^2}, \quad n = 0, 1, \dots, (N-1).$$

Это позволит представить сумму ее отсчетов в виде:

$$\sum_{n=0}^{L-1} h_t(n) = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{n=1}^{N-1} n, \quad (18.7)$$

и, применив формулу для числового ряда [24]:

$$\sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{N-1} n = \frac{(N-1)N}{2},$$

¹ Его коэффициенты передаточной функции (отсчеты ИХ) рассчитываются в Workspace с помощью функции `conv` и импортируются в GUI FDATool.

определить ее значение:

$$\sum_{n=0}^{L-1} h_r(n) = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \frac{(N-1)N}{2} = \frac{1}{N} + \frac{N^2 - N}{N^2} = 1,$$

такое же, как в однородном фильтре:

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} = 1.$$

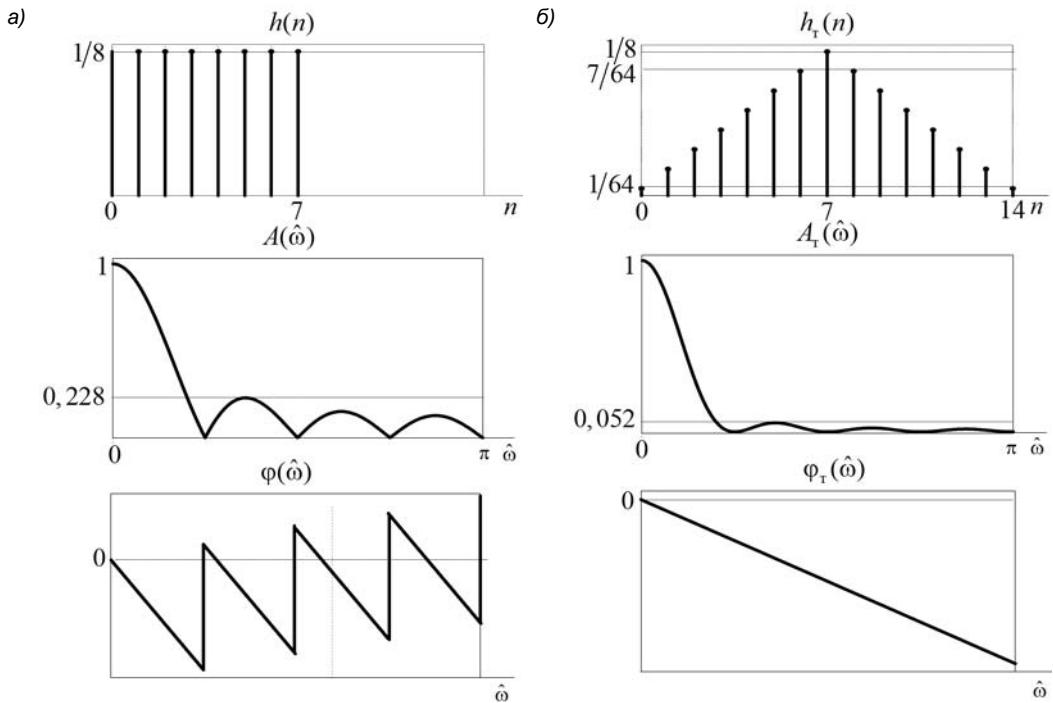


Рис. 18.3. Импульсные характеристики, АЧХ и ФЧХ однородного (а) и триангулярного (б) фильтров

Дисперсия белого шума на выходе триангулярного фильтра оценивается по формуле, подобной (18.5):

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \sigma_{\text{вх}}^2 \sum_{n=0}^{L-1} h_r^2(n).$$

Для оценки эффективности подавления белого шума триангулярным фильтром определим сумму квадратов $h_r^2(n)$ на основании (18.7):

$$\sum_{n=0}^{L-1} h_r^2(n) = \frac{1}{N^2} + \frac{2}{N^4} \sum_{n=1}^{N-1} n^2$$

и сравним ее с суммой квадратов $h^2(n)$ для однородного фильтра в (18.5)

$$\sum_{n=0}^{N-1} h^2(n) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N}.$$

Применив формулу для числового ряда [24]:

$$\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \Rightarrow \sum_{n=1}^{N-1} n^2 = \frac{(N-1)N[2(N-1)+1]}{6} = \frac{N(N-1)(2N-1)}{6},$$

после простейших преобразований получим:

$$\sum_{n=0}^{L-1} h_r^2(n) = \frac{1}{N^2} + \frac{(N-1)(2N-1)}{3N^3} = \frac{1}{N^2} + \frac{2}{3N} - \frac{1}{N^2} + \frac{1}{3N^3} \approx \frac{2}{3N}.$$

Отношение сравниваемых сумм равно

$$k \approx \frac{1/N}{2/3N} \approx 1,5,$$

следовательно, дисперсия белого шума на выходе триангулярного фильтра будет в полтора раза меньшей, чем в однородном фильтре:

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \sigma_{\text{bx}}^2 \sum_{n=0}^{N-1} h_r^2(n) = \frac{\sigma_{\text{bx}}^2}{1,5N}.$$

Подтвердим это результатами моделирования в MATLAB. Вычислим суммы квадратов отсчетов ИХ однородного и триангулярного фильтров и определим их отношение:

```
>> N = 10; %длина однородного фильтра
>> h = (1/N) * [ones(1,N)]; %ИХ однородного фильтра
>> ht = conv(h,h); %ИХ триангулярного фильтра - свертка
>> s = sum(h.^2) %сумма квадратов отсчетов ИХ однородного фильтра
>> st = sum(ht.^2) %сумма квадратов отсчетов ИХ триангулярного фильтра
>> k = s/st %отношение сумм
s =
0.1000
st =
0.0670
k =
1.4925
```

18.1.3. Полуполосные фильтры

Полуполосным фильтром называют КИХ-фильтр типа 1 с амплитудной функцией $B(\hat{\omega})$, удовлетворяющей критерию:

$$B(\hat{\omega}) + B(\hat{\omega} + \pi) = 1. \quad (18.8)$$

Это означает, что амплитудная функция $B(\hat{\omega})$ и ее смещенная копия в сумме дают единицу.

Для того чтобы оценить особые свойства полуполосных фильтров, рассмотрим идеальный ФНЧ с амплитудной функцией $B_u(\hat{\omega})$ и ее смещенную копию $B_u(\hat{\omega} + \pi)$ на периоде 2π (рис. 18.4).

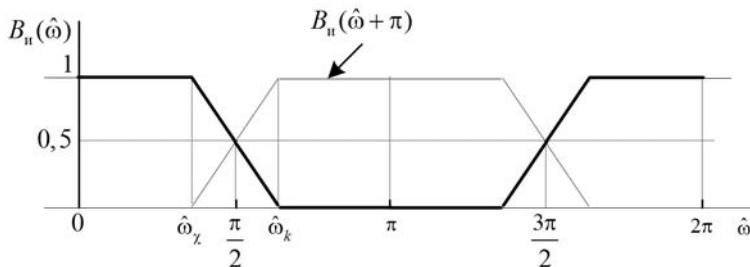


Рис. 18.4. Амплитудная функция идеального ФНЧ и ее смещенная копия

Смещенная копия $B_u(\hat{\omega} + \pi)$ соответствует идеальному ФВЧ и дополняет амплитудную функцию ФНЧ $B_u(\hat{\omega})$ до единицы на всех частотах, при этом в основной полосе частот $[0; \pi]$ их частоты разрыва $\hat{\omega}_c$ (16.22) оказываются равными половине частоты Найквиста $\hat{\omega} = \pi$:

$$\hat{\omega}_c = \frac{\hat{\omega}_k + \hat{\omega}_\chi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

поэтому эти фильтры называют *полуполосными*, а их пару — *строго дополнительной*.

Отсюда вытекают отличительные признаки амплитудных функций полуполосных фильтров:

$$\begin{aligned} B\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2}; \\ B\left(\frac{\pi}{2} + \hat{\omega}\right) + B\left(\frac{\pi}{2} - \hat{\omega}\right) &= 1; \\ \hat{\omega}_\chi + \hat{\omega}_k &= \pi; \\ 0 < \Delta\hat{\omega} < \pi, \end{aligned} \tag{18.9}$$

где $\Delta\hat{\omega} = (\hat{\omega}_k - \hat{\omega}_\chi)$ — ширина переходной полосы.

Соотношение (18.9) отображает *свойство дополнительности до единицы* амплитудной функции полуполосного фильтра на частотах, симметричных относительно частоты разрыва $\hat{\omega}_c = \pi/2$.

На рис. 18.5 приведен пример амплитудных функций строго дополнительной пары полуполосных ФНЧ $B(\hat{\omega})$ и ФВЧ $B(\hat{\omega} + \pi)$, иллюстрирующих это свойство.

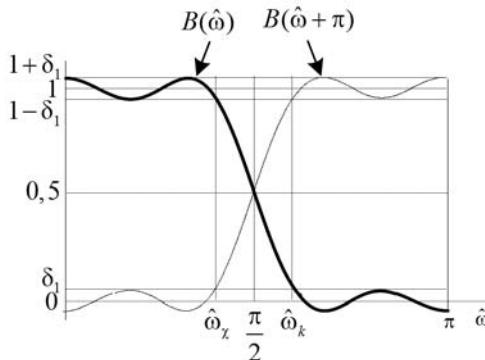


Рис. 18.5. Амплитудные функции строго дополнительной пары полуполосных ФНЧ и ФВЧ

Установим отличительные признаки импульсных характеристик полуполосных фильтров. Для этого подставим в (18.8) амплитудную функцию $B(\hat{\omega})$ КИХ-фильтра типа 1 из табл. 15.2:

$$\sum_{k=0}^M a_k \cos k\hat{\omega} + \sum_{k=0}^M a_k \cos(\hat{\omega} + \pi)k = 1,$$

где:

$$\begin{cases} a_0 = h(M) = h(R/2); \\ a_k = 2h(M-k) = 2h(R/2-k), \quad k \neq 0. \end{cases} \quad (18.10)$$

Порядок КИХ-фильтра R по определению *четный*, а порядок полинома $M = R/2$ может быть как *четным*, так и *нечетным*.

Применив формулу для косинуса суммы:

$$\cos(\hat{\omega}k + \pi k) = \cos(\hat{\omega}k)\cos(\pi k) - \sin(\hat{\omega}k)\sin(\pi k) = (-1)^k \cos(\hat{\omega}k),$$

получим соотношение:

$$\sum_{k=0}^M a_k \cos k\hat{\omega} + \sum_{k=0}^M a_k (-1)^k \cos(\hat{\omega}k) = 1,$$

где все слагаемые с *нечетными* номерами k сокращаются, а с *четными* удваиваются, что эквивалентно равенству:

$$2a_0 + \sum_{k=2, 4, \dots, K} 2a_k \cos k\hat{\omega} = 1,$$

которое гарантируется при $a_0 = 1/2$ и $a_k = 0$, $k = 2, 4, \dots, K$, где K — ближайшее к M *четное*.

Отсюда на основании (18.10) получаем *отличительные признаки импульсных характеристик* полуполосных фильтров:

$$\begin{cases} h(R/2) = 1/2; \\ h(R/2 - 2k) = 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases} \quad (18.11)$$

в соответствии с которыми в симметричной импульсной характеристики КИХ-фильтра типа 1 (см. рис. 15.1, а)

$$h\left(\frac{R}{2} - n\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm R/2,$$

каждый второй отсчет, симметричный относительно центрального отсчета $h(R/2) = 1/2$, будет равен нулю.

Найдем эквивалент критерию (18.8) во временной области.

На основании свойств линейности (9.15) и смещения (9.17) Фурье-преобразования запишем взаимно однозначное соответствие для строго дополнительной пары полуполосных фильтров:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) + H[e^{j(\hat{\omega}+\pi)}] \Leftrightarrow h\left(\frac{R}{2} - n\right) + h\left(\frac{R}{2} - n\right)e^{-j\pi\left(\frac{R}{2} - n\right)}, \quad (18.12)$$

амплитудные функции которых удовлетворяют условию (18.8), а импульсные характеристики — условию (18.11).

Значения суммы справа будут зависеть от показателя экспоненты, а именно:

$$\begin{cases} h\left(\frac{R}{2} - n\right) + h\left(\frac{R}{2} - n\right) = 2h\left(\frac{R}{2} - n\right), & \text{при } \left(\frac{R}{2} - n\right) = 0, \pm 2, \pm 4, \dots; \\ h\left(\frac{R}{2} - n\right) - h\left(\frac{R}{2} - n\right) = 0, & \text{при } \left(\frac{R}{2} - n\right) = \pm 1, \pm 3, \dots, \end{cases}$$

поэтому достаточно их определить в верхней строке, а они, согласно (18.11), будут отличаться от нуля только в одной точке:

$$\begin{cases} 2h\left(\frac{R}{2}\right) = 1, & \text{при } n = 0; \\ 2h\left(\frac{R}{2} - n\right) = 0, & \text{при } n = \pm 2, \pm 4, \dots. \end{cases}$$

Вне интервала $n \in [0; R]$ отсчеты импульсной характеристики по определению равны нулю, следовательно, *сумма импульсных характеристик строго дополнительной пары полуполосных фильтров будет равна задержанному цифровому единичному импульсу*:

$$h_0(n) + h_1(n) = h\left(\frac{R}{2} - n\right) + h\left(\frac{R}{2} - n\right)e^{-j\pi\left(\frac{R}{2} - n\right)} = u_0(n - R/2), \quad (18.13)$$

что, в z -области эквивалентно равенству для суммы передаточных функций:

$$u_0(n - R/2) \Leftrightarrow H_0(z) + H_1(z) = z^{-\frac{R}{2}}. \quad (18.14)$$

Параллельное соединение строго дополнительной пары полуполосных фильтров приведет к задержке воздействия — $x(n - R/2)$.

В GUI FDATool полуполосные ФНЧ и ФВЧ можно синтезировать методом чебышевской аппроксимации или методом окон.

При синтезе методом чебышевской аппроксимации и методом окон с окном Кайзера задаются одинаковые требования к АЧХ $A(f)$, включающие в себя:

- частоту дискретизации f_d ;
- граничную частоту ПП f_χ ;
- максимально допустимое отклонение АЧХ в ПП δ_1 .

В ПЗ граничная частота и максимально допустимое отклонение АЧХ определяются автоматически: $f_k = f_d/2 - f_\chi$ и $\delta_2 = \delta_1$.

При установке переключателя **Minimum order** (Минимальный порядок) в методе окон с окном Кайзера будет *автоматически* синтезирован полуполосный фильтр *минимального* порядка, а в методе чебышевской аппроксимации — *оптимального* порядка.

При выборе другого окна задается только частота дискретизации f_d , а частота разрыва $f_c = f_d/4$ рассчитывается автоматически. При известной ширине переходной полосы Δf оценивается длина КИХ-фильтра (16.27), после чего выполняются действия в соответствии с итерационной процедурой синтеза (*см. разд. 16.4*).

В методе чебышевской аппроксимации число точек альтернанса $m = (M + 2)$ (17.6) делится поровну между ПП и ПЗ, поэтому это значение должно быть *четным*. Для КИХ-фильтра типа 1, где $M = R/2$ (см. табл. 17.2), при *четном* $R/2$ оно будет равно $m = (M + 2)$, а при *нечетном* — $m = (M + 3)$. Следовательно, порядок полуполосного фильтра не может быть меньшим, чем

$$R = 2m - 6, \quad (18.15)$$

и этим объясняется *автоматический* выбор порядка R с *нечетным* значением $R/2$.

На рис. 18.6 представлены характеристики строго дополнительной пары полуполосных фильтров, синтезированных методом чебышевской аппроксимации при следующих требованиях к АЧХ: $f_d = 2000$ Гц; $f_\chi = 400$ Гц для ФНЧ и $f_\chi = 600$ Гц для ФВЧ; $\delta_1 = 0,05$.

Порядок синтезированных фильтров равен $R = 10$ при числе точек альтернанса (они отмечены на графиках АЧХ) $m = 8$, что соответствует его оптимальному значению (18.15): $R = 2m - 6 = 2 \cdot 8 - 6 = 10$.

В импульсных характеристиках полуполосных фильтров каждый второй отсчет, симметричный относительно центрального отсчета $h(R/2) = h(5) = 1/2$, равен нулю.

Все ненулевые отсчеты импульсных характеристик ФНЧ и ФВЧ, кроме центрального, имеют противоположные знаки, и их сумма равна задержанному цифровому единичному импульсу $u_0(n-5)$.

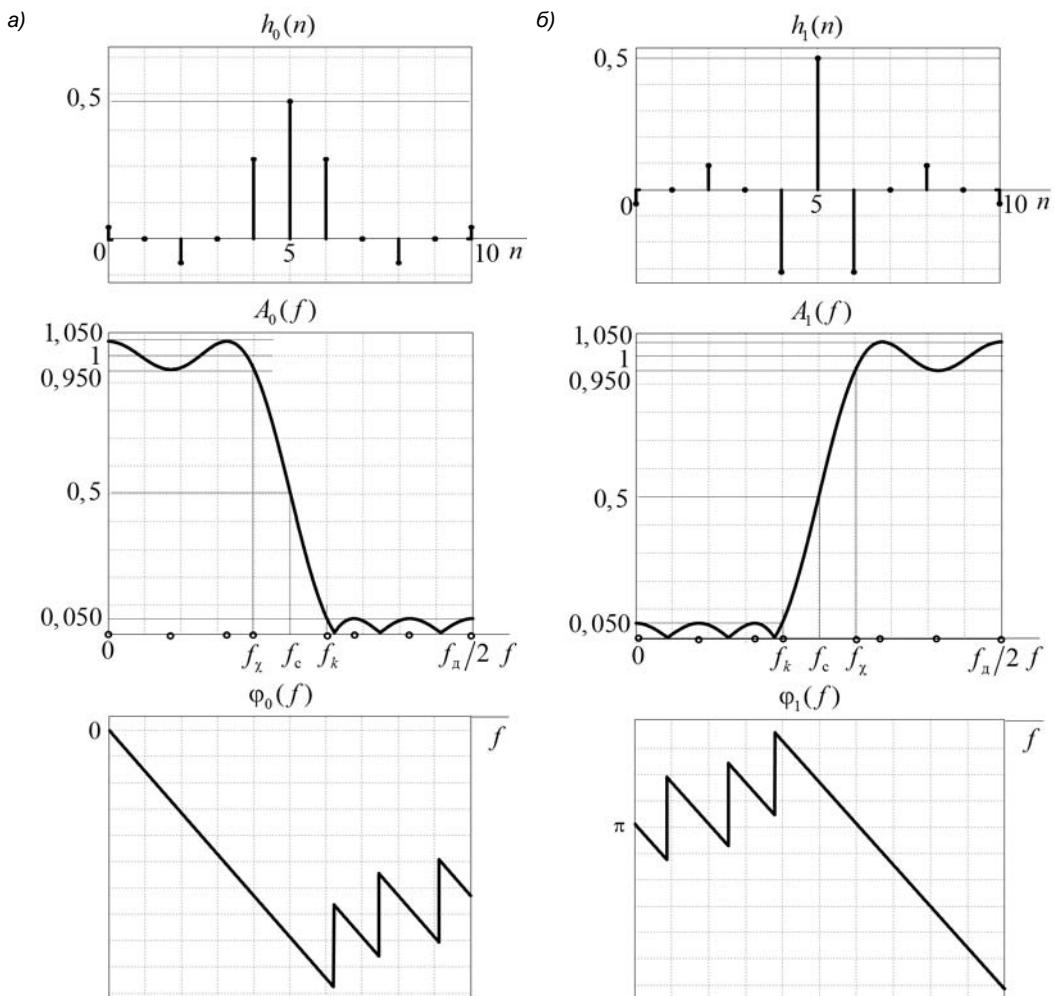


Рис. 18.6. Импульсные характеристики, АЧХ и ФЧХ строго дополнительной пары полуполосных ФНЧ (а) и ФВЧ (б)

В структуре полуполосных фильтров (см. рис. 15.7) за счет нулей ИХ число умножителей сокращается приблизительно вдвое, вследствие чего повышается скорость обработки сигналов и уменьшается собственный шум.

18.1.4. Фильтр Найквиста

Фильтром Найквиста (Nyquist) называют КИХ-фильтр ФНЧ типа 1 с амплитудной функцией $B(\hat{\omega})$, удовлетворяющей критерию Найквиста:

$$\sum_{l=0}^{L-1} B\left(\hat{\omega} + \frac{2\pi}{L}l\right) = 1. \quad (18.16)$$

Это означает, что амплитудная функция $B(\hat{\omega})$ и ее $(L-1)$ равномерно смещенных копий в сумме дают единицу.

Критерий Найквиста обобщает критерий (18.8) и совпадает с ним при $L = 2$.

Для того чтобы оценить особые свойства фильтра Найквиста, рассмотрим *идеальный* ФНЧ с амплитудной функцией $B_n(\hat{\omega})$ и ее смещенные копии $B_n\left(\hat{\omega} + \frac{2\pi}{L}l\right)$, $l = 1, 2, \dots, (L-1)$, на периоде 2π . На рис. 18.7, *a* они представлены для $L = 4$, а на рис. 18.7, *б* — для $L = 5$.

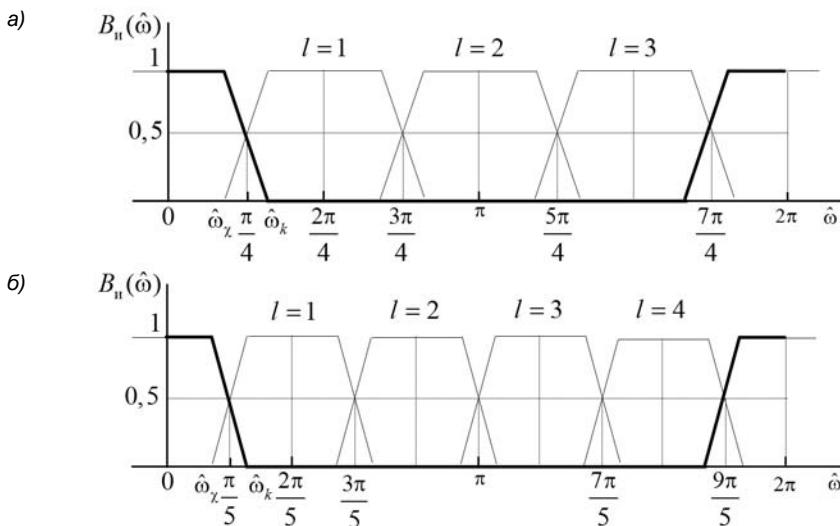


Рис. 18.7. Амплитудная функция идеального ФНЧ и ее смещенные копии при $L = 4$ (*а*) и $L = 5$ (*б*)

Смещенные копии $B_n\left(\hat{\omega} + \frac{2\pi}{L}l\right)$, $l = 1, 2, \dots, (L-1)$, соответствуют полосовым фильтрам (ПФ) и дополняют амплитудную функцию ФНЧ $B_n(\hat{\omega})$ до единицы на всех частотах, при этом в основной полосе частот $[0; \pi]$ частота разрыва $\hat{\omega}_c$ (16.22) ФНЧ (фильтра Найквиста) оказывается равной L -й части частоты Найквиста $\hat{\omega} = \pi$:

$$\hat{\omega}_c = \frac{\hat{\omega}_k + \hat{\omega}_\chi}{2} = \frac{\pi}{L},$$

поэтому этот фильтр также называют *L-полосным*, а набор ФНЧ и ПФ — *строго дополнительным*.

Отсюда вытекают отличительные признаки амплитудной функции фильтра Найквиста:

$$\begin{aligned} B\left(\frac{\pi}{L}\right) &= \frac{1}{2}; \\ \hat{\omega}_x + \hat{\omega}_k &= \frac{2\pi}{L}; \\ 0 < \Delta\hat{\omega} &< \frac{2\pi}{L}, \end{aligned} \quad (18.17)$$

где $\Delta\hat{\omega} = (\hat{\omega}_k - \hat{\omega}_x)$ — ширина переходной полосы, границы которой при известной величине $\Delta\hat{\omega}$ определяются автоматически:

$$\hat{\omega}_x = \frac{\pi}{L} - \frac{\Delta\hat{\omega}}{2}; \quad (18.18)$$

$$\hat{\omega}_k = \frac{\pi}{L} + \frac{\Delta\hat{\omega}}{2}. \quad (18.19)$$

Вследствие наложения смещенных копий в ПЗ, максимальные отклонения АЧХ в ПП и ПЗ будут различными, зависящими от величины $\Delta\hat{\omega}$.

Установим отличительные признаки импульсной характеристики фильтра Найквиста. Для этого подставим в (18.16) амплитудную функцию $B(\hat{\omega})$ КИХ-фильтра типа 1 из табл. 15.2:

$$\sum_{l=0}^{L-1} \sum_{k=0}^M a_k \cos\left(\hat{\omega} + \frac{2\pi}{L} l\right) k = 1. \quad (18.20)$$

Применив формулу для косинуса суммы:

$$\cos\left(\hat{\omega}k + \frac{2\pi}{L} lk\right) = \cos(\hat{\omega}k) \cos\left(\frac{2\pi}{L} lk\right) - \sin(\hat{\omega}k) \sin\left(\frac{2\pi}{L} lk\right),$$

запишем сумму (18.20):

$$\sum_{l=0}^{L-1} \left[\sum_{k=0}^M a_k \cos(\hat{\omega}k) \cos\left(\frac{2\pi}{L} lk\right) - \sum_{k=0}^M a_k \sin(\hat{\omega}k) \sin\left(\frac{2\pi}{L} lk\right) \right] = 1$$

и, выделив слагаемые с $k = 0$, представим ее в виде:

$$\sum_{l=0}^{L-1} a_0 + \sum_{l=0}^{L-1} \left[\sum_{k=1}^M a_k \cos(\hat{\omega}k) \cos\left(\frac{2\pi}{L} lk\right) - \sum_{k=1}^M a_k \sin(\hat{\omega}k) \sin\left(\frac{2\pi}{L} lk\right) \right] = 1.$$

При значении k , кратном L , вторая сумма в квадратных скобках будет равна нулю, что эквивалентно равенству:

$$\sum_{l=0}^{L-1} a_0 + \sum_{k=L, 2L, \dots, K} a_k \cos(\hat{\omega}k) = 1,$$

которое гарантируется при $a_0 = 1/L$ и $a_k = 0$, $k = L, 2L, \dots, K$, где K — ближайшее к M , кратное L .

Отсюда на основании (18.10) получаем отличительные признаки импульсной характеристики фильтра Найквиста:

$$\begin{cases} h(R/2) = 1/L; \\ h(R/2 - Lk) = 0, k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases} \quad (18.21)$$

в соответствии с которыми в симметричной импульсной характеристике КИХ-фильтра типа 1

$$h\left(\frac{R}{2} - n\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm R/2,$$

каждый L -й отсчет, симметричный относительно центрального отсчета $h(R/2) = 1/L$, будет равен нулю.

Найдем эквивалент критерию (18.16) во временной области.

Подобно (18.12), запишем взаимно однозначное соответствие характеристик строго дополнительного набора ФНЧ и ПФ:

$$\sum_{l=0}^{L-1} H[e^{j\left(\frac{2\pi}{L}l\right)}] \Leftrightarrow \sum_{l=0}^{L-1} h\left(\frac{R}{2} - n\right) e^{-j\frac{2\pi}{L}\left(\frac{R}{2}-n\right)}, \quad (18.22)$$

амплитудные функции которых удовлетворяют условию (18.16), а импульсные характеристики — условию (18.21).

Значения суммы справа будут зависеть от показателя экспоненты, а именно:

$$\begin{cases} h\left(\frac{R}{2} - n\right) \sum_{l=0}^{L-1} 1 = Lh\left(\frac{R}{2} - n\right), & \text{при } \left(\frac{R}{2} - n\right) = 0, \pm L, \pm 2L, \dots; \\ h\left(\frac{R}{2} - n\right) \sum_{l=0}^{L-1} e^{-j\frac{2\pi}{L}\left(\frac{R}{2}-n\right)} = 0, & \text{при } \left(\frac{R}{2} - n\right) \neq 0, \pm L, \pm 2L, \dots. \end{cases} \quad (18.23)$$

Здесь значения нижней суммы определены на основании формулы (16.13) для суммы конечной геометрической прогрессии:

$$\sum_{l=0}^{L-1} e^{-j\frac{2\pi}{L}\left(\frac{R}{2}-n\right)} = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{L}\left(\frac{R}{2}-n\right)L}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{L}\left(\frac{R}{2}-n\right)}} = \frac{1 - e^{-j2\pi\left(\frac{R}{2}-n\right)}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{L}\left(\frac{R}{2}-n\right)}},$$

которая равна нулю при всех значениях $\left(\frac{R}{2} - n\right)$, кроме $0, \pm L, \pm 2L, \dots$, где имеем неопределенность $0/0$.

Поэтому достаточно определить значения суммы в *верхней* строке (18.23), а они, согласно (18.21), будут отличаться от нуля только в одной точке:

$$\begin{cases} Lh\left(\frac{R}{2}\right) = 1, & \text{при } n = 0; \\ Lh\left(\frac{R}{2} - n\right) = 0, & \text{при } n = \pm L, \pm 2L, \dots. \end{cases}$$

Вне интервала $n \in [0; R]$ отсчеты импульсной характеристики по определению равны нулю, следовательно, *сумма импульсных характеристик строго дополнительного набора ФНЧ и ПФ будет равна задержанному цифровому единичному импульсу*:

$$\sum_{l=0}^{L-1} h_l(n) = \sum_{l=0}^{L-1} h\left(\frac{R}{2} - l\right) e^{-j\frac{2\pi}{L}(l - n)} = u_0(n - R/2),$$

что в z -области эквивалентно равенству для суммы передаточных функций:

$$u_0(n - R/2) \Leftrightarrow \sum_{l=0}^{L-1} H_l(z) = z^{-\frac{R}{2}}.$$

Данные равенства представляют собой обобщенную запись равенств (18.13) и (18.14) и совпадают с ними при $L = 2$.

Параллельное соединение строго дополнительного набора ФНЧ и ПФ приведет к задержке воздействия — $x(n - R/2)$.

В GUI FDATool фильтр Найквиста можно синтезировать методом чебышевской аппроксимации или методом окон.

При синтезе методом чебышевской аппроксимации вводятся следующие данные:

- частота дискретизации f_d ;
- значение L (Band);
- ширина переходной полосы Δf (Bandwidth) в диапазоне (18.17):

$$0 < \Delta f < \frac{f_d}{L}.$$

Вместо значения Δf можно задавать связанное с ним взаимно однозначное значение коэффициента уменьшения ширины переходной полосы r (Rolloff) в диапазоне $0 < r < 1$, где $r = 1$ соответствует f_d/L .

При синтезе фильтра Найквиста методом чебышевской аппроксимации его порядок сначала оценивается, а затем уточняется до тех пор, пока не будет определен наименьший порядок, при котором выполняются требования к АЧХ.

При синтезе фильтра Найквиста методом окон с окном Кайзера дополнительно указывается максимально допустимое отклонение АЧХ в ПП δ_1 , и при установке

переключателя **Minimum order** автоматически синтезируется фильтр минимального порядка.

При выборе другого окна задается частота дискретизации f_d и значение L , а частота разрыва $f_c = f_d/2L$ рассчитывается автоматически. При известной ширине переходной полосы Δf оценивается длина КИХ-фильтра (16.27), после чего выполняются действия в соответствии с итерационной процедурой синтеза (см. разд. 16.4).

На рис. 18.8 представлены характеристики фильтра Найквиста, синтезированного методом чебышевской аппроксимации при следующих требованиях к АЧХ: частота дискретизации $f_d = 2000$ Гц; $L = 4$; граничные частоты ПП $f_\chi = 200$ Гц и ПЗ $f_k = 300$ Гц; максимально допустимые отклонения АЧХ в ПП $\delta_1 = 0,05$ и ПЗ $\delta_2 = 0,02$.

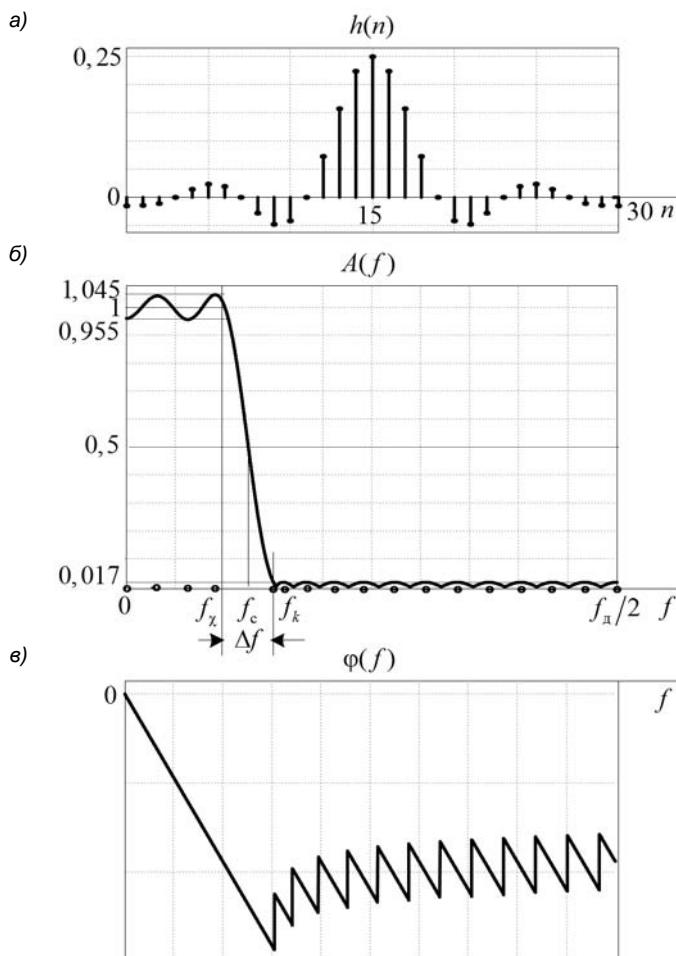


Рис. 18.8. Импульсная характеристика (а), АЧХ (б) и ФЧХ (в) фильтра Найквиста с $L = 4$

В соответствии с требованиями к АЧХ вводились следующие данные:

- частота дискретизации $f_d = 2000$ Гц;
- значение $L = 4$ (Band);
- ширина переходной полосы $\Delta f = 100$ Гц (Bandwidth).

Границные частоты рассчитываются автоматически по формулам (18.18) и (18.19):

$$f_x = \frac{f_d/2}{L} - \frac{\Delta f}{2} = \frac{1000}{4} - \frac{100}{2} = 200 \text{ Гц};$$

$$f_k = \frac{f_d/2}{L} + \frac{\Delta f}{2} = \frac{1000}{4} + \frac{100}{2} = 300 \text{ Гц}.$$

Максимальные отклонения АЧХ в ПП и ПЗ, зависящие от величины Δf , сравнивались с заданными значениями δ_1 и δ_2 в соответствии с итерационной процедурой синтеза (см. разд. 17.4).

Порядок синтезированного фильтра Найквиста равен $R = 30$ при числе точек альтернанса (они отмечены на графике АЧХ) $m = 17$, что соответствует его оптимальному значению (см. табл. 17.2): $R = 2m - 4 = 2 \cdot 17 - 4 = 30$.

В импульсной характеристике фильтра Найквиста каждый четвертый отсчет, симметричный относительно центрального отсчета $h(R/2) = h(15) = 1/L = 1/4$, равен нулю.

В структуре фильтра Найквиста (см. рис. 15.7) за счет нулей ИХ сокращается число умножителей, вследствие чего повышается скорость обработки сигналов и уменьшается собственный шум.

Фильтр Найквиста обычно используется для моделирования полифазных структур систем однократной интерполяции, децимации и передискретизации (см. разд. 21.4).

Параллельное соединение строго дополнительного набора фильтров ФНЧ и ПФ применяется для разложения сигнала на субполосные сигналы в банках фильтров анализа и их объединения в один сигнал в банках фильтров синтеза (см. разд. 21.5).

18.1.5. Квадратурно-зеркальные фильтры

Квадратурно-зеркальные фильтры (Quadrature Mirror Filters, OMF) получают на основе строго дополнительной пары полуполосных ФНЧ и ФВЧ при замене $R \rightarrow 2R$.

Во избежание путаницы и для сохранения преемственности соотношений, в обозначениях характеристик квадратурно-зеркальных фильтров добавим тильду.

При замене $R \rightarrow 2R$ в (18.11) установим отличительные признаки импульсных характеристик квадратурно-зеркальных фильтров:

$$\begin{cases} \tilde{h}(R) = 1/2; \\ \tilde{h}(R - 2k) = 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases} \quad (18.24)$$

в соответствии с которыми в симметричной импульсной характеристики КИХ-фильтра типа 1

$$h(R - n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, R,$$

каждый второй отсчет, симметричный относительно центрального отсчета $h(R) = 1/2$, будет равен нулю.

При замене $R \rightarrow 2R$ в (18.12) имеем

$$\tilde{H}(e^{j\hat{\omega}}) + \tilde{H}[e^{j(\hat{\omega}+\pi)}] \Leftrightarrow \tilde{h}(R - n) + \tilde{h}(R - n)e^{-j\pi(R-n)},$$

где R четное, следовательно

$$e^{-j\pi(R-n)} = e^{-j\pi R} e^{j\pi n} = \cos \pi n = (-1)^n,$$

откуда получаем взаимно однозначное соответствие для строго дополнительной пары квадратурно-зеркальных фильтров:

$$\tilde{H}(e^{j\hat{\omega}}) + \tilde{H}[e^{j(\hat{\omega}+\pi)}] \Leftrightarrow \tilde{h}(R - n) + (-1)^n \tilde{h}(R - n), \quad (18.25)$$

амплитудные функции фильтров удовлетворяют условию (18.8):

$$\tilde{B}(\hat{\omega}) + \tilde{B}(\hat{\omega} + \pi) = 1,$$

импульсные характеристики — условию (18.24), а их сумма равна задержанному цифровому единичному импульсу:

$$\tilde{h}_0(n) + \tilde{h}_1(n) = \tilde{h}(R - n) + (-1)^n \tilde{h}(R - n) = u_0(n - R) \quad (18.26)$$

с задержкой вдвое большей, чем у полуполосных фильтров, что равносильно замене в (18.13) $R \rightarrow 2R$.

В z -области (18.26) соответствует равенству для суммы передаточных функций, подобное (18.14), при замене $R \rightarrow 2R$:

$$u_0(n - R) \Leftrightarrow \tilde{H}_0(z) + \tilde{H}_1(z) = z^{-R}.$$

Параллельное соединение строго дополнительной пары квадратурно-зеркальных фильтров приведет к задержке воздействия — $x(n - R)$.

Определим частотные характеристики квадратурно-зеркальных фильтров в (18.25).

Согласно (18.1), замена $R \rightarrow 2R$ эквивалентна возведению в квадрат частотных характеристик полуполосных фильтров:

$$\tilde{H}(e^{j\hat{\omega}}) = B^2(\hat{\omega}) e^{-jR\hat{\omega}};$$

$$\tilde{H}[e^{j(\hat{\omega}+\pi)}] = B^2(\hat{\omega} + \pi) e^{-jR(\hat{\omega}+\pi)} = B^2(\hat{\omega} + \pi) e^{-jR\hat{\omega}} e^{-jR\pi} = B^2(\hat{\omega} + \pi) e^{-jR\hat{\omega}}.$$

Следовательно, амплитудные функции квадратурно-зеркальных фильтров — *неотрицательные*:

$$\tilde{B}(\hat{\omega}) = B^2(\hat{\omega});$$

$$\tilde{B}(\hat{\omega} + \pi) = B^2(\hat{\omega} + \pi),$$

а их ФЧХ — строго линейные:

$$\tilde{\phi}(\hat{\omega}) = -R\hat{\omega}.$$

В GUI FDATool синтез квадратурно-зеркальных фильтров не предусмотрен, однако их легко получить на основе *фильтра Найквиста с $L = 2$* , устанавливая в группе **Magnitude Specifications** (Требования к АЧХ) переключатель **Nonnegative** (Неотрицательная).

Синтезированный фильтр Найквиста будет соответствовать квадратурно-зеркальному ФНЧ, для которого будет выведена АЧХ, *нормированная к единице*.

Для синтеза квадратурно-зеркального ФВЧ необходимо выполнить следующие действия:

1. Экспортировать коэффициенты $\tilde{h}_0(n)$ квадратурно-зеркального ФНЧ в *Work-space*.
2. Изменить знаки всех коэффициентов, кроме центрального $\tilde{h}_0(R) = 1/2$.

Тем самым будут определены коэффициенты $\tilde{h}_1(n)$ квадратурно-зеркального ФВЧ.

3. Импортировать коэффициенты $\tilde{h}_1(n)$ в GUI FDATool и проанализировать характеристики квадратурно-зеркального ФВЧ.

На рис. 18.6 представлены характеристики строго дополнительной пары полуполосных фильтров оптимального *порядка $R = 10$* , синтезированных методом чебышевской аппроксимации.

При тех же требованиях к АЧХ синтезируем фильтр Найквиста *порядка $2R = 20$* — *квадратурно-зеркальный ФНЧ* — при установке переключателя **Nonnegative** и вводе следующих данных:

- частота дискретизации $f_d = 2000$ Гц;
- значение $L = 2$ (Band);
- ширина переходной полосы $\Delta f = f_k - f_\chi = 200$ Гц (Bandwidth).

Выполнив указанные выше действия, получим *квадратурно-зеркальный ФВЧ*.

На рис. 18.9 представлены характеристики строго дополнительной пары квадратурно-зеркальных фильтров (сравните с рис. 18.6).

Максимальные отклонения АЧХ в ПП и ПЗ у квадратурно-зеркальных фильтров порядка $2R$ оказались более чем в 2 раза меньшими, чем у полуполосных фильтров порядка R (сравните с рис. 18.6). Следовательно, при одинаковых требованиях

к АЧХ порядок квадратурно-зеркальных фильтров можно уменьшить, т. е. он будет соответствовать удвоенному порядку полуполосных фильтров с менее жесткими требованиями.

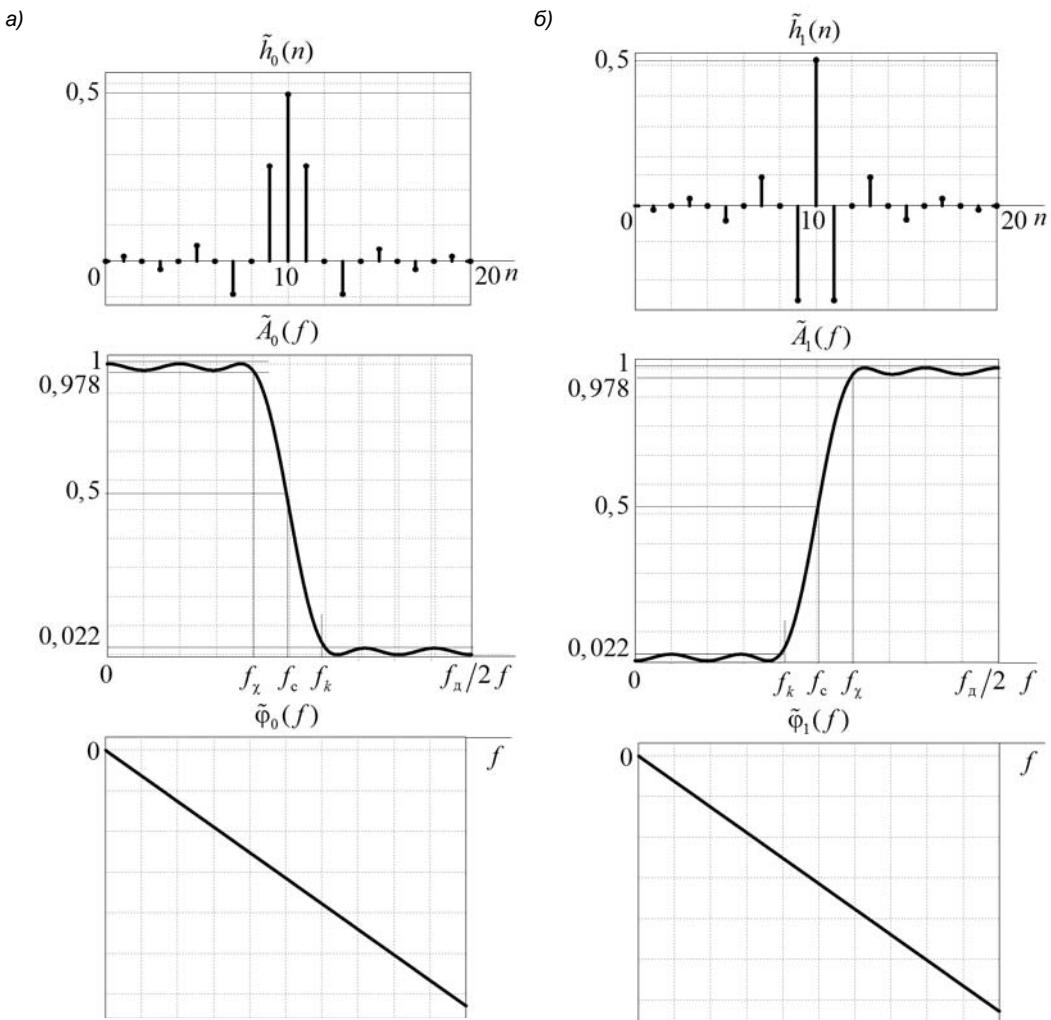


Рис. 18.9. Импульсные характеристики, нормированные АЧХ и ФЧХ строгого дополнительной пары квадратурно-зеркальных ФНЧ (a) и ФВЧ (б)

Структура квадратурно-зеркальных фильтров будет такой же, как представленная на рис. 15.7 при заменах $R \rightarrow 2R$ и $h_n \rightarrow \tilde{h}_n$, при этом число умножителей сократится приблизительно вдвое.

18.2. Специальные КИХ-фильтры с антисимметричной импульсной характеристикой

Обобщенная частотная характеристика КИХ-фильтров с антисимметричной импульсной характеристикой имеет вид (15.9):

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = B(\hat{\omega}) e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{R}{2}\hat{\omega}\right)}. \quad (18.27)$$

Специальные КИХ-фильтры с антисимметричной импульсной характеристикой отличаются особым видом амплитудных функций $B(\hat{\omega})$ в заданной рабочей полосе, и этот вид определяет их специальное назначение:

- цифровой преобразователь Гильберта;
- цифровой дифференциатор.

18.2.1. Цифровой преобразователь Гильберта

Цифровым преобразователем Гильберта (ЦПГ) называют линейную дискретную систему (ЛДС), формирующую на выходе пару дискретных сигналов, сопряженных по Гильберту (фазы сигналов отличаются на $\pi/2$), в заданной рабочей полосе частот.

Для того чтобы оценить возможность реализации ЦПГ на базе КИХ-фильтра с антисимметричной импульсной характеристикой, достаточно проанализировать его реакцию на воздействие в виде одной гармоники¹:

$$x(n) = C e^{j\hat{\omega}n}.$$

Согласно (5.8), реакция КИХ-фильтра с частотной характеристикой (18.27) будет равна

$$y(n) = x(n)H(e^{j\hat{\omega}}) = C e^{j\hat{\omega}n} B(\hat{\omega}) e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{R}{2}\hat{\omega}\right)} = \left\{ C e^{j\left(n - \frac{R}{2}\right)\hat{\omega}} \right\} B(\hat{\omega}) e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad (18.28)$$

где в фигурных скобках имеем задержанное воздействие:

$$y(n) = x(n)H(e^{j\hat{\omega}}) = x\left(n - \frac{R}{2}\right) e^{j\frac{\pi}{2}} B(\hat{\omega}).$$

Следовательно, на базе КИХ-фильтра типа 3 или 4 с АЧХ, близкой к единице:

$$A(\hat{\omega}) = B(\hat{\omega}) \approx 1,$$

¹ Фазы гармоник реакции сдвигаются относительно фаз гармоник воздействия пропорционально в соответствии с ЛФЧХ фильтра, а амплитуды изменяются в соответствии с АЧХ.

в заданной рабочей полосе можно реализовать ЛДС, формирующую в установившемся режиме пару сигналов, сопряженных по Гильберту:

задержанный входной сигнал $x(n - R/2)$;

выходной сигнал $y(n) \approx x(n - R/2)e^{j\pi/2}$,

что функционально соответствует ЦПГ.

Таким образом, структура ЦПГ включает в себя две части:

согласующую линию задержки для формирования воздействия $x(n - R/2)$;

КИХ-фильтр типа 3 или 4 с АЧХ в заданной рабочей полосе, близкой к единице.

Требования к максимально допустимому отклонению АЧХ в рабочей полосе должны быть достаточно жесткими, а вне полосы относительно менее жесткими.

Рабочая полоса ЦПГ обычно совпадает с полосой пропускания КИХ-фильтра.

Структуру ЦПГ можно реализовать на базе прямой приведенной структуры КИХ-фильтра типа 3 или 4 с дополнительным выходом для задержанного воздействия. На рис. 18.10 она приведена для ЦПГ, реализованного на базе КИХ-фильтра типа 3 (см. рис. 15.8).

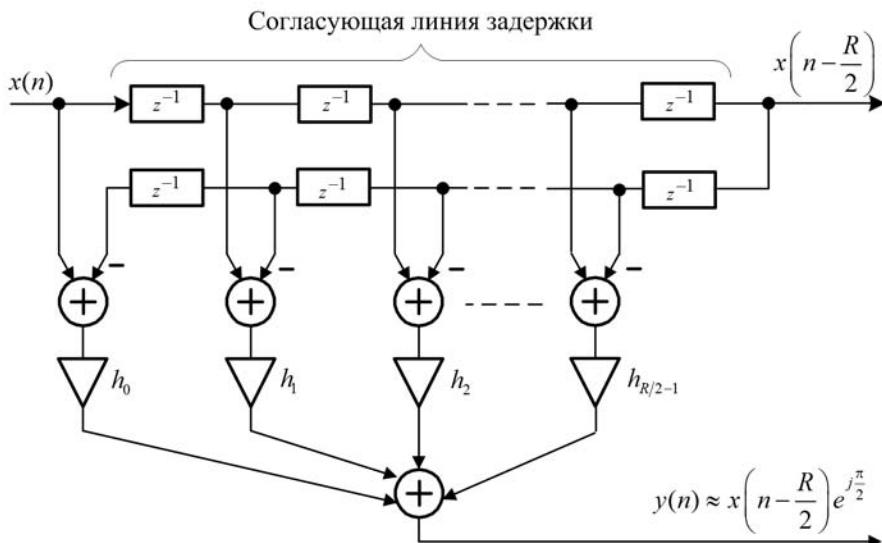


Рис. 18.10. Структура ЦПГ, реализованного на базе КИХ-фильтра типа 3

Как правило, предпочтение отдается КИХ-фильтру типа 3, т. к. для него имеется возможность практически вдвое сократить число умножителей. Это обеспечивается в том случае, если в *полосовом фильтре*, соответствующем КИХ-фильтру типа 3 (см. табл. 15.2), АЧХ будет *симметричной* относительно середины основной полосы частот $\hat{\omega} = \pi/2$:

$$A(\hat{\omega}) = A(\pi - \hat{\omega}), \quad (18.29)$$

что эквивалентно условию для амплитудной функции:

$$B(\hat{\omega}) - B(\pi - \hat{\omega}) = 0. \quad (18.30)$$

Установим отличительные признаки соответствующей импульсной характеристики. Для этого подставим в (18.30) амплитудную функцию КИХ-фильтра типа 3 из табл. 15.2:

$$\sum_{k=0}^M a_k \sin(k+1)\hat{\omega} - \sum_{k=0}^M a_k \sin[(k+1)(\pi - \hat{\omega})] = 0,$$

откуда имеем:

$$\sum_{k=0}^M a_k \sin(k+1)\hat{\omega} - \sum_{k=0}^M a_k \sin[(k+1)\pi - (k+1)\hat{\omega}] = 0, \quad (18.31)$$

где:

$$\begin{cases} M = R/2 - 1; \\ a_k = 2h(M - k). \end{cases} \quad (18.32)$$

Порядок КИХ-фильтра R по определению *четный*, а порядок полинома $M = (R/2 - 1)$ может быть как *четным*, так и *нечетным*.

Применив формулу для синуса суммы:

$$\begin{aligned} \sin[(k+1)\pi - (k+1)\hat{\omega}] &= \sin(k+1)\pi \cos(k+1)\hat{\omega} + \cos(k+1)\pi \sin(k+1)\hat{\omega} = \\ &= \cos(k+1)\pi \sin(k+1)\hat{\omega} = (-1)^{k+1} \sin(k+1)\hat{\omega}, \end{aligned}$$

представим соотношение (18.31) в виде:

$$\sum_{k=0}^M a_k \sin(k+1)\hat{\omega} - \sum_{k=0}^M (-1)^{k+1} \sin(k+1)\hat{\omega} = 0,$$

где все слагаемые с *нечетными* номерами k сокращаются, а с *четными* удваиваются, что эквивалентно равенству:

$$\sum_{k=0, 2, \dots, K} 2a_k \sin(k+1)\hat{\omega} = 0,$$

которое гарантируется при $a_k = 0$, $k = 0, 2, 4, \dots, K$, где K — ближайшее к M *четное*.

Отсюда на основании (18.32) установим *отличительные признаки импульсных характеристик* КИХ-фильтров типа 3, удовлетворяющих условию (18.30):

$$\begin{cases} h(R/2) = 0; \\ h[(R/2 - 1) - 2k] = 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases} \quad (18.33)$$

в соответствии с которыми в антисимметричной импульсной характеристике КИХ-фильтра типа 3 (см. рис. 15.1, в)

$$\begin{cases} h\left(\frac{R}{2}-1-n\right) = -h\left(\frac{R}{2}+1+n\right), \quad n = 0, 1, \dots, R/2-1; \\ h\left(\frac{R}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

каждый второй отсчет, симметричный относительно центрального нулевого отсчета $h(R/2) = 0$, будет равен нулю.

Далее по умолчанию будем синтезировать ЦПГ на базе КИХ-фильтра типа 3 с АЧХ, симметричной относительно середины основной полосы частот.

По сложившейся традиции под ЦПГ подразумеваются КИХ-фильтры, на базе которых он реализуется. При этом, однако, необходимо иметь в виду, что АЧХ КИХ-фильтра и ЦПГ совпадают в рабочей полосе, а ФЧХ ЦПГ будет равна разности между ФЧХ КИХ-фильтра и ФЧХ согласующей линии задержки:

$$\Phi_{\text{ЦПГ}}(\hat{\omega}) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{R}{2} \hat{\omega} \right) - \left(-\frac{R}{2} \hat{\omega} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Вследствие скачков ФЧХ КИХ-фильтра знак ФЧХ ЦПГ в рабочей полосе может измениться, что не меняет смысла ЦПГ.

На рис. 18.11 представлены требования к АЧХ ЦПГ $A_{\text{ЦПГ}}(f)$, включающие в себя:

- частоту дискретизации f_d ;
- граничные частоты рабочей полосы ЦПГ $f_{\text{раб1}}$ и $f_{\text{раб2}}$, где

$$f_{\text{раб2}} = f_d/2 - f_{\text{раб1}}; \quad (18.34)$$

- граничные частоты ПЗ f_{-k} и f_k , где

$$f_k = f_d/2 - f_{-k}; \quad (18.35)$$

- максимально допустимые отклонения АЧХ в рабочей δ_1 и нерабочей $\delta_2 > \delta_1$ полосах.

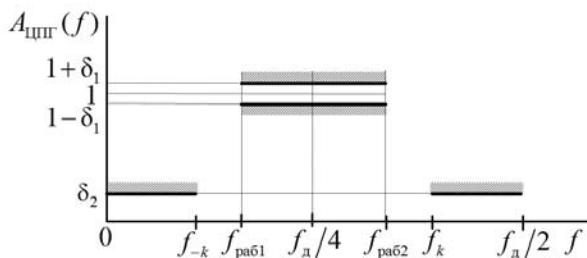


Рис. 18.11. Требования к АЧХ ЦПГ, реализуемого на базе КИХ-фильтра типа 3 с АЧХ, симметричной относительно середины основной полосы частот

В GUI FDATool ЦПГ синтезируется методом чебышевской аппроксимации. В соответствии с требованиями к АЧХ ЦПГ вводятся следующие данные:

- в поле ввода **Fs** — частота дискретизации f_d ;
- в поле ввода **Freqs. vector** — вектор частот $[0 \ f_{-k} \ f_{\text{раб1}} \ f_{\text{раб2}} \ f_k \ f_d/2]$;
- в поле ввода **Mag. vector** — вектор значений идеальной АЧХ $[0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]$;
- в поле ввода **Weight vector** — вектор весов $[1 \ w_1 \ 1]$.

Вес, равный 1, присваивается ПЗ, а в рабочей полосе определяется как отношение

$$w_1 = \delta_2 / \delta_1 . \quad (18.36)$$

При синтезе ЦПГ его порядок (*четное* значение R) сначала оценивается, а затем уточняется до тех пор, пока не будет определен наименьший порядок, при котором выполняются требования к АЧХ.

Число точек альтернанса $m = (M + 2)$ (17.6) делится поровну относительно середины основной полосы частот плюс одна точка в ее центре, поэтому значение m должно быть *нечетным*. Для КИХ-фильтра типа 3, где $M = (R/2 - 1)$ (см. табл. 17.2), при *четном* $R/2$ оно будет равно $m = (M + 2)$, а при *нечетном* — $m = (M + 3)$. Следовательно, порядок ЦПГ не может быть меньшим, чем

$$R = 2m - 4 . \quad (18.37)$$

На рис. 18.12 представлены характеристики ЦПГ, синтезированного при следующих требованиях к АЧХ:

- частота дискретизации $f_d = 2000$ Гц;
- граничные частоты рабочей полосы с учетом (18.34):

$$f_{\text{раб1}} = 200 \text{ Гц};$$

$$f_{\text{раб2}} = f_d/2 - f_{\text{раб1}} = 1000 - 200 = 800 \text{ Гц};$$

- граничные частоты ПЗ с учетом (18.35):

$$f_{-k} = 100 \text{ Гц};$$

$$f_k = f_d/2 - f_{-k} = 1000 - 100 = 900 \text{ Гц};$$

- максимально допустимое отклонение АЧХ в рабочей полосе $\delta_1 = 0,05$;
- максимально допустимое отклонение АЧХ в ПЗ $\delta_2 = 0,1$.

В соответствии с требованиями к АЧХ вводились следующие данные:

- в поле ввода **Fs** — частота дискретизации 2000 (Гц);
- в поле ввода **Freqs. vector** — вектор частот $[0 \ 100 \ 200 \ 800 \ 900 \ 1000]$;

- в поле ввода **Mag. vector** — вектор значений идеальной АЧХ $[0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0]$;
- в поле ввода **Weight vector** — вектор весов $[1\ 2\ 1]$.

Вес в рабочей полосе определен в соответствии с (18.36): $w_1 = \delta_2 / \delta_1 = 0,1 / 0,05 = 2$.

Порядок синтезированного ЦПГ равен $R = 22$ при числе точек альтернанса (они отмечены на графике АЧХ) $m = 13$, что соответствует его оптимальному значению: $R = 2m - 4 = 2 \cdot 13 - 4 = 22$.

В импульсной характеристике ЦПГ каждый второй отсчет, симметричный относительно центрального нулевого отсчета $h(R/2) = h(11) = 0$, равен нулю.

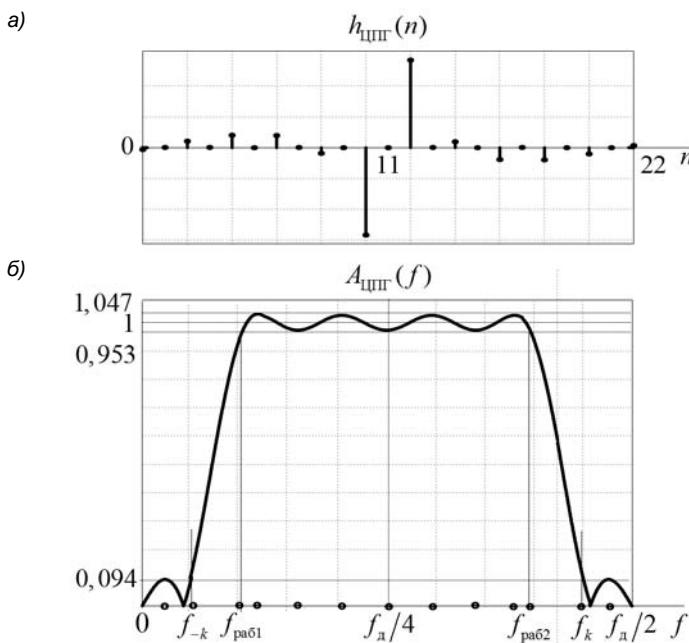


Рис. 18.12. Импульсная характеристика (а) и АЧХ (б) ЦПГ

18.2.2. Цифровой дифференциатор

Цифровым дифференциатором (ЦД) называют ЛДС, формирующую на выходе дискретный сигнал, отсчеты которого равны (с точностью до постоянного множителя) отсчетам производной исходного аналогового сигнала в заданной рабочей полосе частот.

Подобно ЦПГ, оценим возможность реализации ЦД на базе КИХ-фильтра с антисимметричной импульсной характеристикой, анализируя его реакцию на воздействие в виде одной гармоники:

$$x(n) = Ce^{j\omega n}. \quad (18.38)$$

На выходе ЦД должен формироваться дискретный сигнал, отсчеты которого в заданной рабочей полосе равны (с точностью до постоянного множителя k) отсчетам производной исходного аналогового сигнала $x(t)$:

$$\tilde{x}(nT) = x'(t) \Big|_{t=nT} = jk\omega C e^{j\omega t} \Big|_{t=nT} = jkC\omega e^{j\omega nT} = jkC \frac{\hat{\omega}}{T} e^{j\hat{\omega}n}.$$

В шкале нормированного времени ($T=1$) получим

$$\tilde{x}(n) = jkC\hat{\omega}e^{j\hat{\omega}n} = jk\hat{\omega}x(n). \quad (18.39)$$

Согласно (5.8), реакция КИХ-фильтра с частотной характеристикой (18.27) на воздействие $x(n)$ (18.38) будет равна

$$y(n) = x(n)H(e^{j\hat{\omega}}) = Ce^{j\hat{\omega}n}B(\hat{\omega})e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{R}{2}\hat{\omega}\right)} = \left\{Ce^{j\left(n-\frac{R}{2}\right)\hat{\omega}}\right\}B(\hat{\omega})e^{j\frac{\pi}{2}},$$

где в фигурных скобках имеем задержанное воздействие. Применив тождество $j = e^{j\pi/2}$, получим:

$$y(n) = jx\left(n - \frac{R}{2}\right)B(\hat{\omega}).$$

Следовательно, на базе КИХ-фильтра типа 3 или 4 с АЧХ в заданной рабочей полосе, близкой к линейной:

$$A(\hat{\omega}) = B(\hat{\omega}) \approx k\hat{\omega}, \quad (18.40)$$

можно реализовать ЛДС, формирующую в установившемся режиме из входного сигнала $x(n)$ (18.38) задержанный выходной сигнал $\tilde{x}(n-R/2)$ (18.39):

$$y(n) \approx jk\hat{\omega}x\left(n - \frac{R}{2}\right),$$

что функционально соответствует ЦД.

По сложившейся традиции под ЦД подразумевают КИХ-фильтр, на базе которого он реализуется. При этом необходимо иметь в виду, что АЧХ КИХ-фильтра и ЦД совпадают в рабочей полосе.

Рабочая полоса ЦД может совпадать с основной полосой частот $[0; f_d/2]$ либо располагаться внутри нее. В зависимости от этого различают четыре типа ЦД:

- широкополосный ЦД (ШЦД) — рабочая полоса $[0; f_d/2]$;
- низкочастотный ЦД (НЦД) — рабочая полоса $[0; f_{\text{раб}}]$;
- полосовой ЦД (ПЦД) — рабочая полоса $[f_{\text{раб1}}; f_{\text{раб2}}]$;
- высокочастотный ЦД (ВЦД) — рабочая полоса $[f_{\text{раб}}; f_d/2]$.

На рис. 18.13 представлены требования к АЧХ ЦД, в которых необходимо обратить внимание на следующее.

- ШЦД и ВЦД могут синтезироваться только на базе КИХ-фильтра типа 4, т. к. АЧХ КИХ-фильтра типа 3 равна нулю на границах основной полосы частот;
- НЦД и ПЦД могут синтезироваться на базе КИХ-фильтра типа 3 или 4.

При синтезе НЦД на базе КИХ-фильтра типа 4 значение АЧХ на частоте $f_d/2$ будет равно нулю, а на базе КИХ-фильтра типа 3 — отличным от нуля, чему соответствуют две штрихпунктирные линии в полосе $[f_{\text{нераб}}; f_d/2]$ (рис. 18.13, б).

Аналогично, для АЧХ ПЦД в полосе $[f_{\text{нераб}2}; f_d/2]$ (рис. 18.13, в).

- Требования к максимально допустимому отклонению АЧХ ЦД в рабочей полосе должны быть достаточно жесткими, а в нерабочей полосе — существенно менее жесткими.

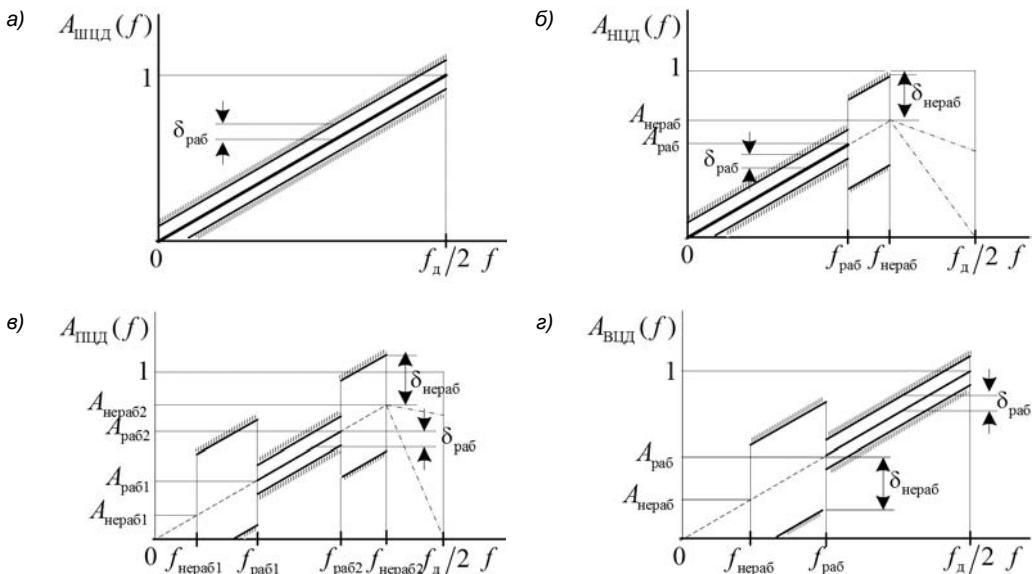


Рис. 18.13. Требования к АЧХ ЦД (а), НЦД (б), ПЦД (в), ВЦД (г)

В табл. 18.1 приведены требования к АЧХ ЦД четырех типов.

В GUI FDATool ЦД синтезируется методом чебышевской аппроксимации. В соответствии с требованиями к АЧХ ЦД вводятся следующие данные:

- в поле ввода **Fs** — частота дискретизации f_d ;
- в поле ввода **Freqs. vector** — вектор частот;
- в поле ввода **Mag. vector** — вектор значений идеальной АЧХ;

в поле ввода **Weight vector** — вектор весов.

Вес, равный 1, присваивается нерабочей полосе ЦД, а в рабочей определяется как отношение

$$w_1 = \delta_{\text{нераб}} / \delta_{\text{раб}} . \quad (18.41)$$

Таблица 18.1. Требования к АЧХ ЦД

Тип ЦД	Требования к АЧХ
ШЦД	<ul style="list-style-type: none"> Частота дискретизации f_d. Максимально допустимое отклонение АЧХ в рабочей полосе $\delta_{\text{раб}}$
НЦД	<ul style="list-style-type: none"> Частота дискретизации f_d. Границные частоты рабочей $f_{\text{раб}}$ и нерабочей $f_{\text{нераб}}$ полос. Максимально допустимые отклонения АЧХ в рабочей $\delta_{\text{раб}}$ и нерабочей $\delta_{\text{нераб}} \gg \delta_{\text{раб}}$ полосах
ПЦД	<ul style="list-style-type: none"> Частота дискретизации f_d. Границные частоты рабочей полосы $f_{\text{раб}1}$ и $f_{\text{раб}2}$. Границные частоты нерабочих полос $f_{\text{нераб}1}$ и $f_{\text{нераб}2}$. Максимально допустимые отклонения АЧХ в рабочей $\delta_{\text{раб}}$ и нерабочей $\delta_{\text{нераб}} \gg \delta_{\text{раб}}$ полосах
ВЦД	<ul style="list-style-type: none"> Частота дискретизации f_d. Границные частоты нерабочей $f_{\text{нераб}}$ и рабочей $f_{\text{раб}}$ полос. Максимально допустимые отклонения АЧХ в рабочей $\delta_{\text{раб}}$ и нерабочей $\delta_{\text{нераб}} \gg \delta_{\text{раб}}$ полосах

В табл. 18.2 представлены значения векторов для четырех разновидностей ЦД.

При синтезе ЦД его порядок сначала оценивается, а затем уточняется до тех пор, пока не будет определен наименьший порядок, при котором выполняются требования к АЧХ.

В НЦД, ПЦД и ВЦД требования к АЧХ вне рабочей полосы не контролируются.

Таблица 18.2. Требования к АЧХ ЦД в виде векторов

Вектор частот — Freqs. vector	Вектор значений идеальной АЧХ — Mag. vector	Вектор весов — Weight vector
ШЦД — рабочая полоса $[0; f_d/2]$, КИХ-фильтр типа 4		
$[0 \ f_d/2]$	$[0 \ 1]$	$[1]$
НЦД — рабочая полоса $[0; f_{раб}]$, КИХ-фильтр типа 3 или 4		
$[0 \ f_{раб} \ f_{нераб} \ f_d/2]$	$[0 \ A_{раб} \ A_{нераб} \ 0]$	$[w_1 \ 1]$
ПЦД — рабочая полоса $[f_{раб1}; f_{раб2}]$, КИХ-фильтр типа 3 или 4		
$[0 \ f_{нераб1} \ f_{раб1} \ f_{раб2} \ f_{нераб2} \ f_d/2]$	$[0 \ A_{нераб1} \ A_{раб1} \ A_{раб2} \ A_{нераб2} \ 0]$	$[1 \ w_1 \ 1]$
ВЦД — рабочая полоса $[f_{раб}; f_d/2]$, КИХ-фильтр типа 4		
$[0 \ f_{нераб} \ f_{раб} \ f_d/2]$	$[0 \ A_{нераб} \ A_{раб} \ 1]$	$[1 \ w_1]$

Значения $A_{раб}$ и $A_{нераб}$ идеальной АЧХ рассчитываются по формулам:

$$A_{раб} = k \frac{f_{раб}}{f_d/2}; \quad (18.42)$$

$$A_{нераб} = k \frac{f_{нераб}}{f_d/2}, \quad (18.43)$$

где k — коэффициент в (18.40). Для ШЦД этот коэффициент можно учесть, задавая вектор значений идеальной АЧХ $[0; k]$.

При синтезе ПЦД и НЦД, независимо от типа КИХ-фильтра, 3 или 4, значение идеальной АЧХ на границе основной полосы $f_d/2$ задается равным нулю. В процессе синтеза, в зависимости от величины порядка R , четного или нечетного, значение АЧХ в этой точке, соответственно, нулевое или ненулевое, будет определено автоматически.

На рис. 18.14 и 18.15 представлены характеристики синтезированных ЦД четырех разновидностей, где следующие значения заданы одинаковыми:

- частота дискретизации $f_d = 2000$ Гц;
- максимально допустимые отклонения АЧХ в рабочей $\delta_{раб} = 0,01$ и нерабочей $\delta_{нераб} = 0,1$ полосах.

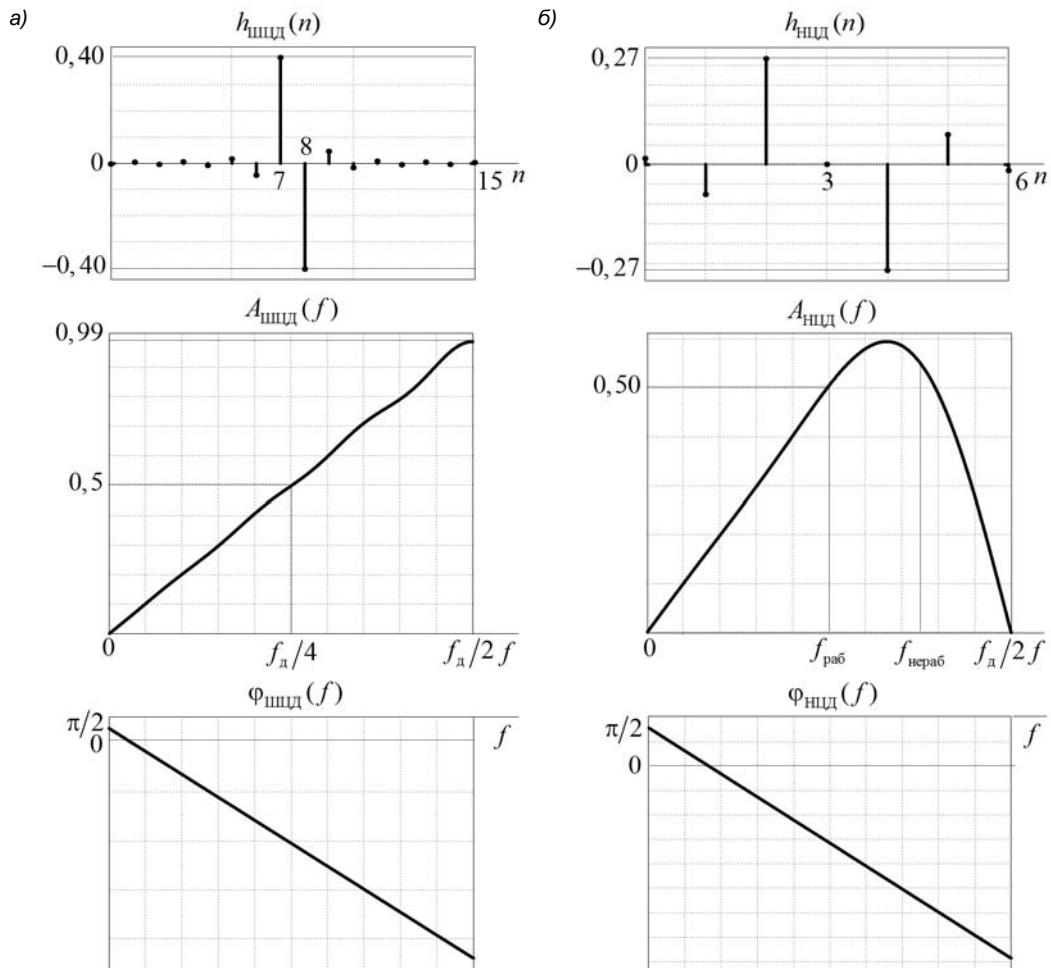


Рис. 18.14. Импульсная характеристика, АЧХ и ФЧХ ШЦД (а) и НЦД (б)

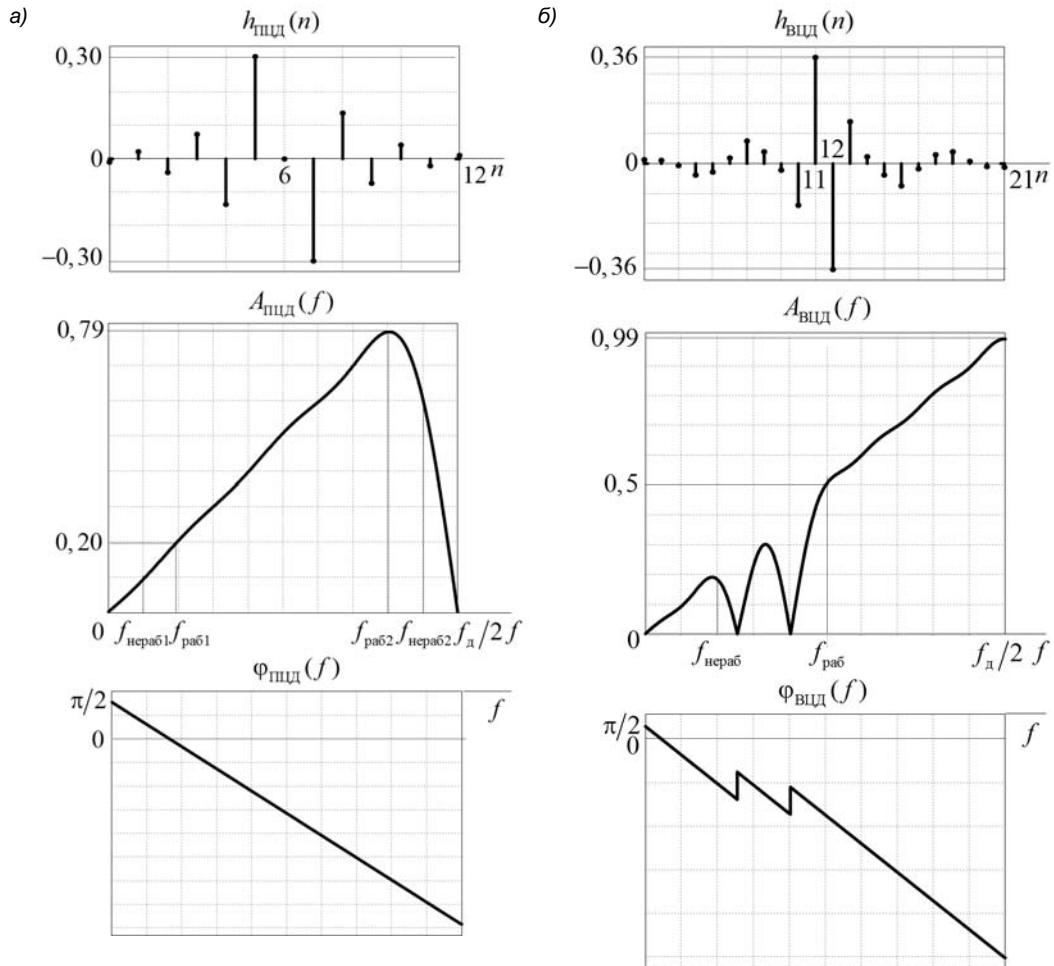


Рис. 18.15. Импульсная характеристика, АЧХ и ФЧХ ПЦД (a) и ВЦД (б)

В соответствии с (18.41) определен вес $w_1 = \delta_{\text{непраб}} / \delta_{\text{раб}} = 0,1/0,01 = 10$.

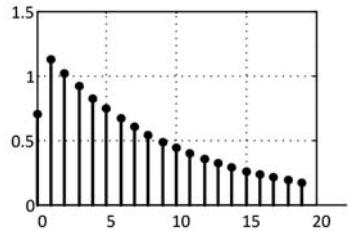
Векторы частот, значений идеальной АЧХ и весов ЦД приведены в табл. 18.3. Значения $A_{\text{раб}}$ и $A_{\text{непраб}}$ определены по формулам (18.42) и (18.43) при $k = 1$.

Таблица 18.3. Заданные в виде векторов требования к АЧХ ЦД

Вектор частот — Freqs. vector	Вектор значений идеальной АЧХ — Mag. vector	Вектор весов — Weight vector
ШЦД — порядок $R = 15$		
[0 1000]	[0 1]	[1]
НЦД — порядок $R = 6$		
[0 500 750 1000]	[0 0.5 0.75 0]	[10 1]
ПЦД — порядок $R = 12$		
[0 100 200 800 900 1000]	[0 0.1 0.2 0.8 0.9 0]	[1 10 1]
ВЦД — порядок $R = 21$		
[0 200 500 1000]	[0 0.2 0.5 1]	[1 10]

Структура ЦД совпадает с прямой приведенной структурой КИХ-фильтра типа 3 или 4 (см. рис. 15.8).

ГЛАВА 19



Синтез БИХ-фильтров

Синтез БИХ-фильтра заключается в расчете его передаточной функции (4.5):

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}. \quad (19.1)$$

Порядком БИХ-фильтра называют порядок рациональной функции знаменателя $R = (M - 1)$ при $(N - 1) \leq (M - 1)$ (по умолчанию).

БИХ-фильтры характеризуются следующими особенностями:

- нелинейной ФЧХ;
- необходимостью проверки на устойчивость.

Оптимальным называют БИХ-фильтр минимального порядка R при заданных требованиях к АЧХ.

19.1. Синтез БИХ-фильтра на основе аналогового прототипа

Методы синтеза частотно-избирательных БИХ-фильтров базируются на хорошо развитом аппарате расчета аналоговых фильтров.

Аналоговым фильтром-прототипом (АФП) называют аналоговый фильтр, рассчитываемый по требованиям, заданным к БИХ-фильтру.

Возможность воспользоваться известными методиками расчета АФП для синтеза БИХ-фильтров обоснована идентичностью вида их характеристик:

- передаточные функции АФП и БИХ-фильтров — дробно-рациональные;
- импульсные характеристики АФП и БИХ-фильтров — бесконечные.

19.1.1. Процедура синтеза БИХ-фильтра

Процедура синтеза БИХ-фильтров на основе АФП включает в себя:

1. Задание требований к АЧХ БИХ-фильтра.
2. Выбор метода синтеза БИХ-фильтра.
3. Выбор типа АФП.

Четырем разновидностям аппроксимирующих функций соответствуют четыре типа АФП:

- фильтр Баттервортса;
- фильтр Чебышева I рода;
- фильтр Чебышева II рода;
- фильтр Золотарева—Кауэра (эллиптический).

4. Формирование требований к АЧХ АФП.
5. Расчет передаточной функции АФП $H_a(p)$.
6. Расчет передаточной функции БИХ-фильтра $H(z)$ на основе $H_a(p)$.
7. Выбор структуры БИХ-фильтра.

Остановимся на этих этапах подробнее.

При формировании требований к АЧХ $A(f)$ БИХ-фильтров (этап 1) учитывается их преемственность с требованиями к АЧХ АФП, а именно:

- значения АЧХ в полосе пропускания *не должны превышать единицы*;
- значения максимально допустимых отклонений АЧХ в ПП и ПЗ указываются в децибелах, т. е. требования задаются к *характеристике затухания* (15.12):
 - a_{\max} (дБ) — максимально допустимое затухание в ПП;
 - a_{\min} (дБ) — минимально допустимое затухание в ПЗ.

На рис. 15.2—15.6 были изображены требования к АЧХ КИХ-фильтров. На рис. 19.1 приведен пример требований к АЧХ и характеристике затухания БИХ-фильтра ФНЧ. По аналогии задаются требования для остальных типов избирательности.

Среди методов синтеза БИХ-фильтров на основе АФП (этап 2) рассмотрим и сравним два следующих:

- метод инвариантности импульсной характеристики (метод стандартного Z-преобразования);
- метод билинейного Z-преобразования.

Выбор типа АФП (этап 3) автоматически определит тот же тип БИХ-фильтра. На рис. 19.2 приведены примеры АЧХ четырех типов БИХ-фильтров ФНЧ. Во всех фильтрах (кроме фильтра Баттервортса) максимальные отклонения, равные по вели-

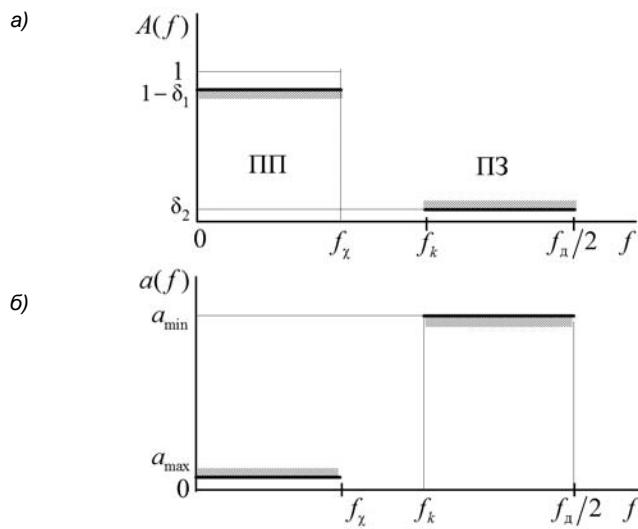


Рис. 19.1. Требования к АЧХ (а) характеристики затухания (б) БИХ-фильтра ФНЧ

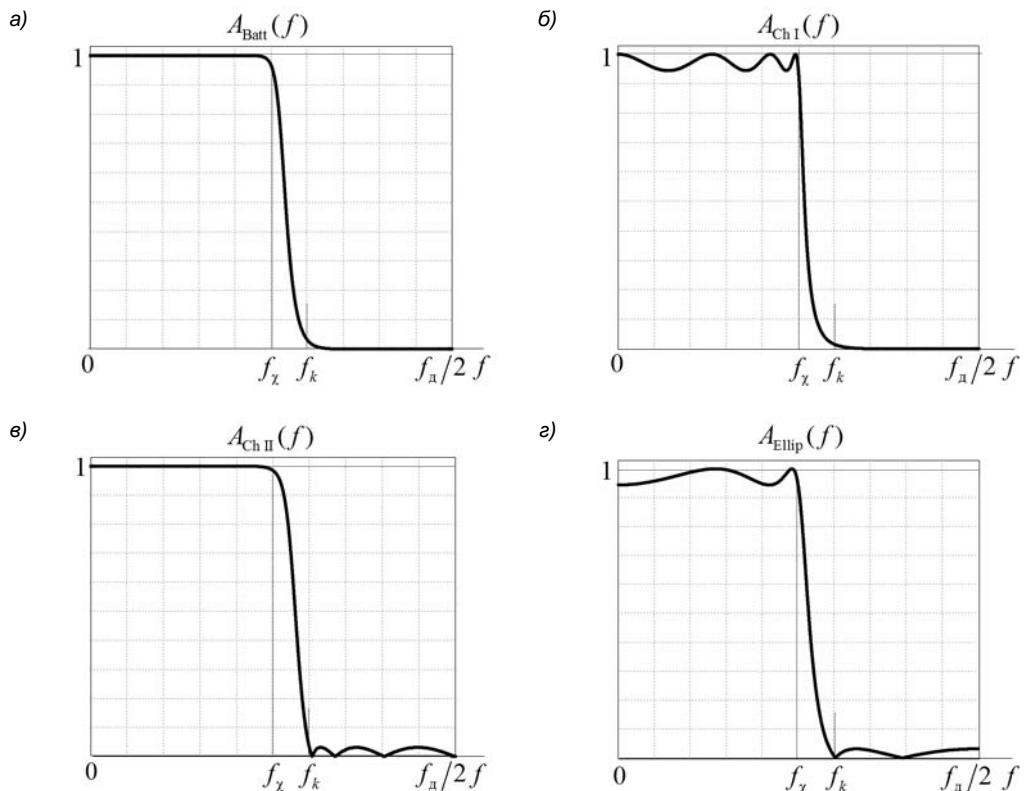


Рис. 19.2. Примеры АЧХ БИХ-фильтров ФНЧ: Баттерворт (а), Чебышева I рода (б), Чебышева II рода (с) и Золотарева—Кауэра (д)

чине и чередующиеся по знаку, в общем случае не являются эквидистантными, т. е. не располагаются на равном расстоянии друг от друга.

При формировании требований к АЧХ АФП (этап 4) значения *максимально допустимых отклонений АЧХ* (в децибелах), независимо от выбранного метода, совпадают с соответствующими значениями для БИХ-фильтра. Однако значения *граничных частот ПП и ПЗ* будут зависеть от выбранного метода синтеза.

Передаточная функция АФП $H_a(p)$ (этап 5) рассчитывается по известным методикам, в соответствии с которыми синтезируется *оптимальный* аналоговый фильтр (наименьшего порядка при заданных требованиях к АЧХ).

Методика расчета передаточной функции БИХ-фильтра $H(z)$ на основе $H_a(p)$ (этап 6) зависит от выбранного метода синтеза. При этом *свойства синтезированного БИХ-фильтра оказываются взаимосвязанными с отображением p-плоскости в z-плоскость в данном методе.*

Выбор структуры БИХ-фильтра (этап 7) будет зависеть от математического представления передаточной функции в выбранном методе синтеза.

19.2. Метод инвариантности импульсной характеристики

Метод инвариантности импульсной характеристики исторически является одним из первых методов синтеза БИХ-фильтров, и, как будет показано, обладает существенными недостатками, обусловленными отображением p -плоскости в z -плоскость при стандартном Z -преобразовании.

Определение "*стандартное*" добавлено для контраста с *билинейным Z-преобразованием*, о котором пойдет речь в разд. 19.3.

19.2.1. Теоретические основы метода

Основу разработки метода составляют две идеи.

Первая из них — получить передаточную функцию БИХ-фильтра $H(z)$ в результате стандартного Z -преобразования его импульсной характеристики $h(nT)$:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT)z^{-n}. \quad (19.2)$$

Отсюда название — *метод стандартного Z-преобразования*.

Вторая идея заключается в том, чтобы получить аналитическое представление $h(nT)$ на основе *известной* передаточной функции АФП $H_a(p)$, импульсная характеристика которого $h_a(t)$ совпадает с импульсной характеристикой БИХ-фильтра $h(nT)$ в дискретных точках $t = nT$:

$$h(nT) = h_a(t) \Big|_{t=nT}, \quad (19.3)$$

с тем чтобы далее определить $H(z)$ (19.2).

Отсюда название — *метод инвариантности импульсной характеристики*.

Под *инвариантностью* в данном случае понимают неизменность импульсной характеристики при переходе от АФП к БИХ-фильтру с учетом дискретизации по времени $t \rightarrow nT$ (рис. 19.3).

Оба названия метода равнозначны, но обычно предпочтение отдается второму.

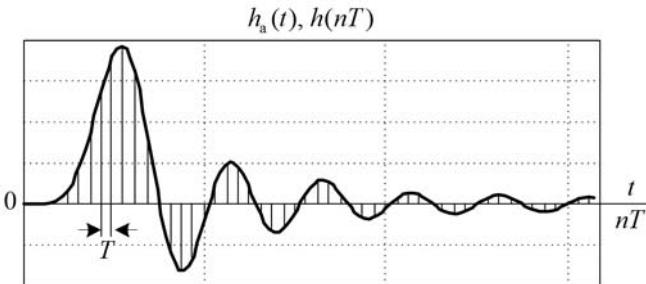


Рис. 19.3. Инвариантные импульсные характеристики АФП (непрерывная функция) и БИХ-фильтра (последовательность)

Для решения поставленной задачи дробно-рациональную передаточную функцию АФП $H_a(p)$ представляют в виде суммы простых дробей:

$$H_a(p) = \sum_{k=1}^{M-1} \frac{A_k}{p - p_{*k}}, \quad (19.4)$$

где $(M-1)$ — порядок передаточной функции; p_{*k} и A_k , $k = 1, 2, \dots, (M-1)$, — ее простые (не кратные) полюсы и константы разложения при полюсах, всегда числа одного типа, в общем случае попарно комплексно сопряженные.

По определению импульсная характеристика АФП $h_a(t)$ является обратным преобразованием Лапласа передаточной функции (19.4):

$$h_a(t) = L^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{M-1} \frac{A_k}{p - p_{*k}} \right\} = \sum_{k=1}^{M-1} A_k L^{-1} \left\{ \frac{1}{p - p_{*k}} \right\} = \sum_{k=1}^{M-1} A_k e^{ip_{*k}t},$$

откуда на основании (19.3) получаем аналитическое представление импульсной характеристики БИХ-фильтра:

$$h(nT) = \sum_{k=1}^{M-1} A_k e^{ip_{*k}nT}. \quad (19.5)$$

Подставим $h(nT)$ (19.5) в (19.2):

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{M-1} A_k e^{ip_{*k}nT} z^{-n}$$

и изменим порядок суммирования:

$$H(z) = \sum_{k=1}^{M-1} A_k \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{jp_{*k}T} z^{-1} \right)^n.$$

Определив сумму бесконечной геометрической прогрессии по формуле (3.22), справедливой в области абсолютной сходимости ряда:

$$\left| e^{jp_{*k}T} z^{-1} \right| < 1 \Rightarrow |z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > 1,$$

получим искомую передаточную функцию БИХ-фильтра, также в виде суммы простых дробей:

$$H(z) = \sum_{k=1}^{M-1} \frac{A_k}{1 - e^{jp_{*k}T} z^{-1}}.$$

Данное представление $H(z)$ эквивалентно сумме простых дробей (4.30), где $\alpha_k = e^{jp_{*k}T}$, от которого далее переходят к сумме дробей *второго* порядка (4.32) с *вещественными* коэффициентами. Такому представлению передаточной функции соответствует *параллельная структура* БИХ-фильтра (см. рис. 6.8).

19.2.2. Свойства БИХ-фильтров при стандартном Z-преобразовании

В методе инвариантности импульсной характеристики свойства синтезируемого БИХ-фильтра являются прямым следствием отображения p -плоскости в z -плоскость при *стандартном Z-преобразовании*, где комплексные переменные z и p связаны соотношением (3.13):

$$z = e^{pT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = r e^{j\hat{\omega}}. \quad (19.6)$$

Сформулируем эти свойства на основе рассмотренного ранее отображения p -плоскости в z -плоскость (см. разд. 3.4).

1. Между частотами БИХ-фильтра $\hat{\omega}$ и АФП ω существует *линейная зависимость*:

$$\hat{\omega} = \omega T, \quad (19.7)$$

что следует непосредственно из (19.6).

2. *Взаимно однозначная связь* между частотами (19.7) обеспечивается только в области частот АФП

$$-\pi < \hat{\omega} \leq \pi$$

и БИХ-фильтра

$$-\pi/T < \omega \leq \pi/T.$$

Это прямое следствие отображения оси частот $j\omega$ p -плоскости в *периодическое повторение единичной окружности* $e^{j\hat{\omega}}$ на z -плоскости, где один оборот окружности $\Delta\hat{\omega} = 2\pi$ соответствует отрезку оси $\Delta\omega = 2\pi/T$.

В шкалах частот ω и f данные области совпадают:

$$-\omega_d/2 < \omega \leq \omega_d/2;$$

$$-f_d/2 < f \leq f_d/2.$$

Следовательно, граничные частоты ПП и ПЗ АФП совпадают с граничными частотами БИХ-фильтра в основной полосе частот $[0; f_d/2]$.

3. При устойчивом АФП гарантируется устойчивость БИХ-фильтра.

Это прямое следствие отображения левой p -полуплоскости в единичный круг на z -плоскости.

Следовательно, устойчивому АФП в полюсами в левой p -полуплоскости будет соответствовать устойчивый БИХ-фильтр в полюсами внутри единичного круга.

4. Частотная характеристика БИХ-фильтра $H(e^{j\hat{\omega}}) = H(e^{j\omega T})$ представляет собой периодическое повторение частотной характеристики АФП $H_a(j\omega)$ с периодом $\omega_d = 2\pi/T$.

Это прямое следствие отображения оси частот $j\omega$ p -плоскости в *периодическое повторение единичной окружности* $e^{j\hat{\omega}}$ на z -плоскости.

5. Свойство оптимальности АФП для БИХ-фильтра в общем случае не сохраняется.

Последнее необходимо пояснить. Для этого воспользуемся определением частотной характеристики (5.1)

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-jn\omega T},$$

в соответствии с которым частотную характеристику можно трактовать как спектральную плотность (9.2) импульсной характеристики, что позволит установить связь между частотными характеристиками БИХ-фильтра и АФП, подобную (9.30):

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a \left[j \left(\omega + m \frac{2\pi}{T} \right) \right]. \quad (19.8)$$

Частотная БИХ-фильтра равна (с точностью до множителя $1/T$) бесконечной сумме копий частотных характеристик АФП, сдвинутых друг относительно друга на частоту дискретизации $\omega_d = 2\pi/T$.

Соотношение (19.8) фактически представляет собой формализованную запись свойства 4.

На рис. 19.4 иллюстрируется связь между АЧХ АФП и БИХ-фильтра на примере ФНЧ. При АЧХ АФП, *не финитной* по определению, возникает неизбежный и принципиально неустранимый эффект наложения ее копий в АЧХ БИХ-фильтра — *элайсинг* в области частот $\omega_d/2 \pm k\omega_d$, $k = 0, 1, \dots$

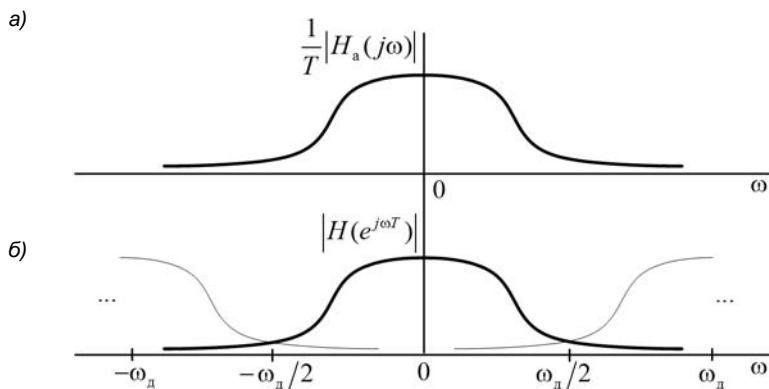


Рис. 19.4. АЧХ АФП (a) и ее периодическое повторение в АЧХ БИХ-фильтра (б)
ФНЧ с элайсингом

Вследствие элайсинга возникает *необратимое искажение* АЧХ БИХ-фильтра в основной полосе частот $[0; \omega_d/2]$ по сравнению с АЧХ АФП в той же полосе, наиболее существенное вблизи границы полосы $\omega_d/2$.

Это означает, что для выполнения требований к АЧХ БИХ-фильтра, возможно, придется увеличить его порядок, поэтому в общем случае *свойство оптимальности АФП для БИХ-фильтра не сохраняется*.

Элайсинг является основным *недостатком метода*, ограничивающим его применение. Тем не менее метод дает неплохие результаты для ФНЧ и ПФ Баттервортса и Чебышева I рода, если АЧХ исходного АФП *достаточно крутая*.

При синтезе ФВЧ и РФ элайсинг приводит к искажению АЧХ БИХ-фильтра в *полосе пропускания*, поэтому данный метод применять не рекомендуется.

К достоинству метода можно отнести линейную зависимость между частотами БИХ-фильтра и АФП, что не требует *пересчета граничных частот* ПП и ПЗ в требованиях к АЧХ БИХ-фильтра в основной полосе частот $[0; f_d/2]$ при формировании требований к АЧХ АФП.

19.2.3. Синтез БИХ-фильтра

В GUI FDATool синтез БИХ-фильтров методом инвариантности импульсной характеристики не поддерживается, однако для этого предусмотрены программные средства [41].

Процедура синтеза в этом случае состоит из трех этапов.

- При заданных требованиях к характеристике затухания определяется оптимальный порядок и частоты среза АФП Баттервортса, Чебышева I рода, II рода или Золотарева—Кауэра соответственно с помощью функций:

```
[R,Wn] = buttord(Wp, Ws, rp, rs, 's')
```

```
[R,Wn] = cheb1ord(Wp, Ws, rp, rs, 's')
```

```
[R,Wn] = cheb2ord(Wp,Ws,rp,rs,'s')
[R,Wn] = ellipord(Wp,Ws,rp,rs,'s')
```

где:

- W_p , W_s — соответственно векторы граничных частот ПП и ПЗ в порядке их следования слева направо в шкале частот $\omega = 2\pi f$ (рад/с);
- r_p , r_s — соответственно максимально и минимально допустимые затухания a_{max} (дБ) в ПП и a_{min} (дБ) в ПЗ;
- 's' — признак аналогового фильтра, при его отсутствии по умолчанию подразумевается ЦФ;
- R — оптимальный порядок АФП;
- W_n — вектор *частот среза* в шкале частот $\omega = 2\pi f$ (рад/с) с одним элементом для ФНЧ и двумя — для ПФ.

Частотами среза называют частоты, на которых нормированная АЧХ АФП равна $1/\sqrt{2} \approx 0,707$, а ее значение в децибелах — 3 дБ.

2. Синтез оптимального АФП Баттерворта, Чебышева I рода, II рода или Золотарева—Кауэра соответственно с помощью функций:

```
[bs,as] = butter(R,Wn,'s')
[bs,as] = cheby1(R,rp,Wn,'s')
[bs,as] = cheby2(R,rs,Wn,'s')
[bs,as] = ellip(R,rp,rs,Wn,'s')
```

где bs , as — векторы коэффициентов числителя и знаменателя дробно-рациональной передаточной функции АФП $H_a(p)$ в порядке возрастания степеней p ; $as(1)=1$.

3. Синтез БИХ-фильтра того же типа на основе АФП с помощью функции:

```
[b,a] = impinvar(bs,as,Fs)
```

где:

- F_s — частота дискретизации f_d (Гц);
- b , a — векторы коэффициентов числителя и знаменателя дробно-рациональной передаточной функции БИХ-фильтра $H(z)$ (19.1) в порядке возрастания отрицательных степеней z ; $a(1)=1$.

Обычно при синтезе БИХ-фильтра, во избежание слишком большого усиления АЧХ при высоких частотах дискретизации f_d (малых значениях T), в соотношение (19.8) добавляют множитель $T = 1/f_d$.

В MATLAB этот множитель введен по умолчанию, вследствие чего его следует учитывать в коэффициентах b_i числителя передаточной функции (19.1) при расчете импульсной характеристики БИХ-фильтра $h(nT)$: $b_i \Rightarrow f_d b_i$. При расчете АЧХ и ФЧХ данный множитель в коэффициентах b_i не учитывается.

Пример 19.1. Синтезировать БИХ-фильтр ФНЧ Чебышева I рода методом инвариантности импульсной характеристики при заданных требованиях к характеристике затухания (15.12):

- частота дискретизации $f_d = 2000$ Гц;
- граничная частота ПП $f_\chi = 450$ Гц;
- граничная частота ПЗ $f_k = 550$ Гц;
- максимально допустимое затухание в ПП $a_{\max} = 0,4455$ дБ;
- минимально допустимое затухание в ПЗ $a_{\min} = 40$ дБ.

Решение. Процедура синтеза выполняется в три этапа.

1. Определение оптимального порядка АФП (R) и частоты среза (Wn):

```
>> ft = 450; fk = 550; %границные частоты ПП и ПЗ
>> Wp = 2.*pi.*ft; Ws = 2.*pi.*fk; %расчет частот в требуемой шкале
>> rp = 0.4455; rs=40; %допустимые затухания в ПП и ПЗ
>> [R,Wn] = cheblord(Wp,Ws,rp,rs,'s');%расчет оптимального порядка R и
частоты среза Wn АФП
>> R % оптимальный порядок АФП
R = 10
```

2. Синтез оптимального АФП — расчет коэффициентов передаточной функции $H_a(p)$ — векторов bs , as :

```
>> [bs,as] = cheby1(R,rp,Wn,'s');
```

3. Синтез БИХ-фильтра — расчет коэффициентов передаточной функции $H(z)$ — векторов b , a :

```
>> Fs = 2000; %частота дискретизации
>> [b,a] = impinvar(bs,as,Fs);
```

Порядок БИХ-фильтра равен оптимальному порядку АФП — $R = 10$.

На рис. 19.5 представлены импульсные характеристики АФП и БИХ-фильтра, рассчитанные и построенные в MATLAB (в коэффициентах числителя передаточной функции БИХ-фильтра учитывается множитель f_d):

```
>> impulse(bs,as) %расчет ИХ АФП с одновременным выводом графика
>> hold on
>> [h,nT] = impz(Fs.*b,a,[],Fs); %расчет ИХ БИХ-фильтра
>> stem(nT,h,'fill','MarkerSize',3), grid %вывод графика ИХ БИХ-фильтра
```

Импульсные характеристики АФП и БИХ-фильтра удовлетворяют условию инвариантности (19.3).

На рис. 19.6 приведены графики АЧХ АФП и БИХ-фильтра ФНЧ Чебышева I рода, построенные в MATLAB:

```

>> f = 0:((Fs/2)/1000):Fs/2; %густая сетка частот
>> W = 2.*pi.*f; %расчет частот в требуемой шкале
>> MAGa= abs(freqs(bs,as,W)); %расчет АЧХ АФП
>> plot(f,MAGa), grid %вывод графика АЧХ АФП
>> MAG = abs(freqz(b,a,f,Fs)); %расчет АЧХ БИХ-фильтра
>> hold on
>> plot(f,MAG,':'), legend('Analog Filter','IIR Filter') %вывод графика АЧХ
    БИХ-фильтра

```

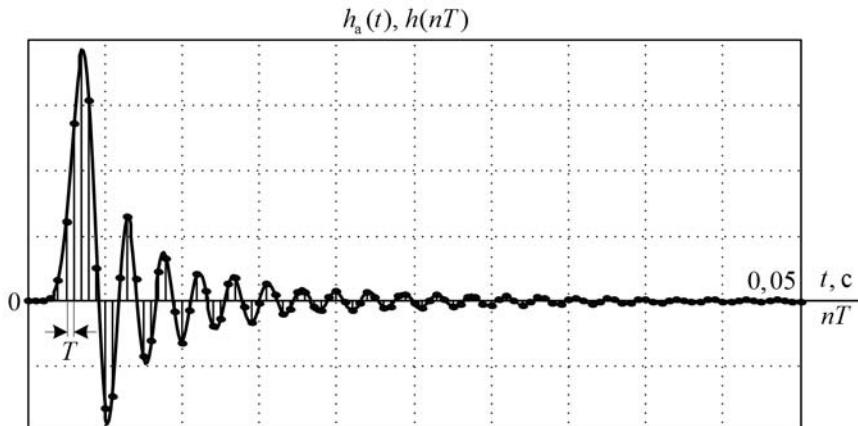


Рис. 19.5. Инвариантные импульсные характеристики АФП (непрерывная функция) и БИХ-фильтра (последовательность) ФНЧ Чебышева I рода
в методе инвариантности импульсной характеристики

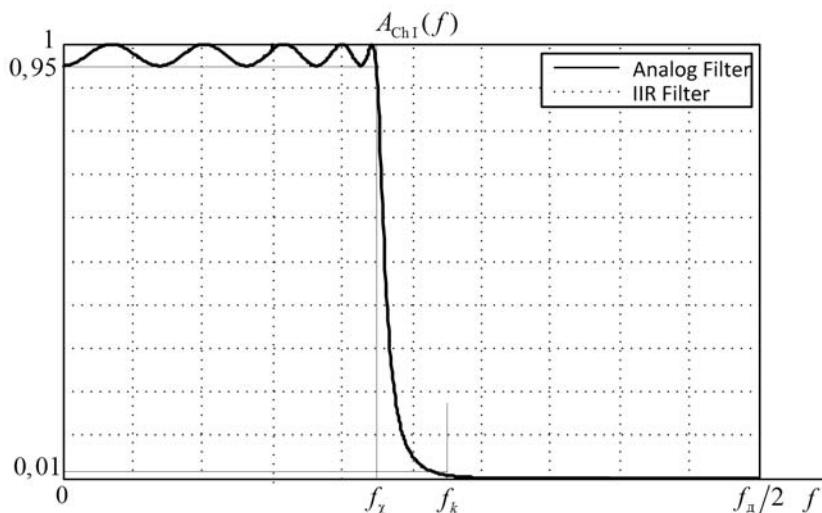


Рис. 19.6. АЧХ АФП и БИХ-фильтра ФНЧ Чебышева I рода

В данном случае АЧХ АФП и БИХ-фильтра практически совпали. Так как АЧХ АФП является достаточно крутой, элайсинг не привел к сколько-нибудь существенному искажению АЧХ БИХ-фильтра, поэтому для него сохранилось свойство оптимальности АФП. ◀

В рассмотренной процедуре синтеза рассчитывалась дробно-рациональная передаточная функция БИХ-фильтра. Для ее представления в виде простых дробей предусмотрены другие форматы функций на втором этапе синтеза; с ними можно познакомиться самостоятельно, обращаясь к справочной системе MATLAB.

19.3. Метод билинейного Z-преобразования

Основной недостаток метода инвариантности импульсной характеристики — элайсинг в АЧХ БИХ-фильтра — обусловлен отображением p -плоскости в z -плоскость при стандартном Z -преобразовании.

Этот недостаток устраняется в методе билинейного Z -преобразования.

19.3.1. Теоретические основы метода

Идея метода сформулирована в его названии: при отображении p -плоскости в z -плоскость вместо *стандартного* Z -преобразования применяют *билинейное* Z -преобразование.

Получим соотношения, связывающие комплексные переменные p и z при *билинейном* Z -преобразовании, на основании их связи в *стандартном* Z -преобразовании (19.6):

$$z = e^{pT},$$

где

$$p = \frac{1}{T} \ln z.$$

Представим $\ln z$ в виде ряда Тейлора

$$\ln z = 2 \left[\frac{z-1}{z+1} + \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \dots \right].$$

Взяв первый член этого ряда, получим

$$p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}.$$

Умножим числитель и знаменатель на z^{-1} и введем обозначение $\gamma = 2/T$:

$$p = \gamma \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}. \quad (19.9)$$

Обратная зависимость имеет вид:

$$z = \frac{\gamma + p}{\gamma - p}. \quad (19.10)$$

Получены *билинейные* представления переменных p и z , в которых числитель и знаменатель — функции первого порядка (*линейные*).

В этом случае, для того чтобы от известной дробно-рациональной передаточной функции АФП $H_a(p)$ перейти к дробно-рациональной передаточной функции БИХ-фильтра $H(z)$, достаточно выполнить замену переменных (19.9):

$$H(z) = H_a(p) \Big|_{p=\frac{\gamma^{1-z^{-1}}}{1+z^{-1}}}. \quad (19.11)$$

Преобразование (19.11) называют *билинейным Z-преобразованием*.

Методика расчета передаточной функции АФП $H_a(p)$ заключается в определении ее *нулей и полюсов*. В методе билинейного Z-преобразования это позволяет автоматически перевести их в z -область, применив формулу (19.10), и представить передаточную функцию БИХ-фильтра $H(z)$ в виде произведения простейших множителей (4.28), от которого далее переходят к произведению множителей второго порядка (4.29) с *вещественными* коэффициентами. Такому представлению $H(z)$ соответствует *каскадная структура* БИХ-фильтра (см. рис. 6.7).

19.3.2. Свойства БИХ-фильтров при билинейном Z-преобразовании

В методе билинейного Z-преобразования свойства синтезируемого БИХ-фильтра являются прямым следствием отображения p -плоскости в z -плоскость при *билинейном Z-преобразовании*, где комплексные переменные z и p связаны соотношением (19.10):

$$z = \frac{\gamma + p}{\gamma - p} = re^{j\hat{\omega}}. \quad (19.12)$$

Сформулируем эти свойства в той же последовательности, как при стандартном Z-преобразовании (см. разд. 19.2.2), обозначив, во избежание путаницы, ось частот p -плоскости $j\Omega$.

1. Между частотами БИХ-фильтра $\hat{\omega}$ и АФП Ω наблюдается *нелинейная зависимость*.

Для того чтобы ее найти, подставим $p = j\Omega$ в (19.12):

$$z = \frac{\gamma + j\Omega}{\gamma - j\Omega} = re^{j\hat{\omega}}$$

и с помощью известных соотношений определим модуль и аргумент — радиус r и угол (частоту) $\hat{\omega}$:

$$r = \sqrt{\frac{\gamma^2 + \Omega^2}{\gamma^2 + \Omega^2}} = 1; \quad (19.13)$$

$$\hat{\omega} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\Omega}{\gamma}, \quad (19.14)$$

откуда

$$\Omega = \gamma \operatorname{tg} \frac{\hat{\omega}}{2}. \quad (19.15)$$

2. Взаимно однозначная связь между частотами (19.14) и (19.15) обеспечивается в области частот АФП

$$-\infty < \Omega < \infty \quad (19.16)$$

и БИХ-фильтра

$$-\pi < \hat{\omega} \leq \pi, \quad (19.17)$$

чему соответствует отображение оси частот $j\Omega$ в один оборот единичной окружности $e^{j\hat{\omega}}$ на z -плоскости $\Delta\hat{\omega} = 2\pi$.

На рис. 19.7, а иллюстрируется нелинейная зависимость между частотами БИХ-фильтра $\hat{\omega}$ и АФП Ω (19.14), где очевидна их взаимно однозначная связь в областях (19.17) и (19.16).

Следовательно, бесконечная ось частот $j\Omega$ АФП в шкале частот БИХ-фильтра ω сжимается в конечный отрезок длиной $\Delta\omega = 2\pi/T = \omega_d$.

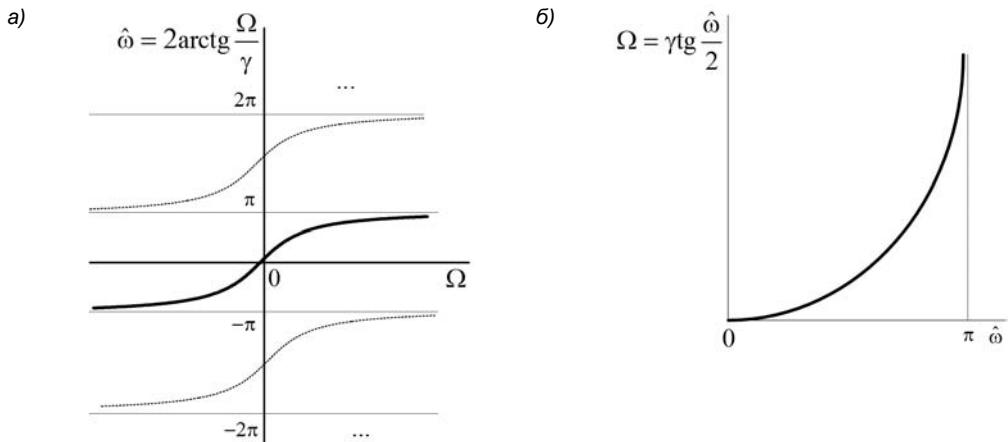


Рис. 19.7. Зависимость между частотами АФП и БИХ-фильтра

На рис. 19.7, б иллюстрируется нелинейная зависимость (19.15) между частотами АФП Ω и БИХ-фильтра $\hat{\omega}$ в основной полосе частот $[0; \pi]$.

Следовательно, в требованиях к АЧХ АФП граничные частоты ПП и ПЗ, заданные для БИХ-фильтра, придется пересчитать по формуле (19.15):

$$F = \frac{f_d}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi f}{f_d}, \quad (19.18)$$

где F и f — соответственно, частоты АФП и БИХ-фильтра.

3. При устойчивом АФП гарантируется устойчивость БИХ-фильтра.

Подставим $p = \sigma + j\Omega$ в (19.12):

$$z = \frac{\gamma + \sigma + j\Omega}{\gamma - j\Omega - \sigma} = re^{j\hat{\omega}}.$$

При $\sigma \leq 0$ получим радиус r

$$r = \sqrt{\frac{(\gamma + \sigma)^2 + \Omega^2}{(\gamma - \sigma)^2 + \Omega^2}} \leq 1 \quad (19.19)$$

и угол (частоту) $\hat{\omega}$

$$\hat{\omega} = \operatorname{arctg} \frac{\Omega}{\gamma + \sigma} + \operatorname{arctg} \frac{\Omega}{\gamma - \sigma}.$$

При $\Omega = \pm\infty$ имеем $\hat{\omega} = \pm\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} = \pm\pi$, т. е. сохранится взаимно однозначная связь

между частотами в областях (19.16) и (19.17).

При $r \leq 1$ левая p -полуплоскость отображается на z -плоскости в единичный круг, следовательно, устойчивому АФП в полюсами в левой p -полуплоскости будет соответствовать устойчивый БИХ-фильтр в полюсами внутри единичного круга.

4. Частотная характеристика БИХ-фильтра $H(e^{j\hat{\omega}}) = H(e^{j\omega T})$ представляет собой периодическое повторение частотной характеристики АФП $H_a(j\omega)$ с периодом $\omega_d = 2\pi/T$.

Связь (19.8) между частотными характеристиками $H(e^{j\omega T})$ и $H_a(j\omega)$ сохраняется, однако частотная характеристика АФП $H_a(j\omega)$ оказывается *финитной* вследствие того, что ось частот исходного АФП $j\Omega$ в шкале частот БИХ-фильтра ω сжимается в конечный отрезок $\Delta\omega = 2\pi/T = \omega_d$ (свойство 2).

5. Свойство оптимальности АФП сохраняется для БИХ-фильтра.

Это прямое следствие свойства 4.

На рис. 19.8, а представлена АЧХ ФНЧ исходного АФП $H_a(j\Omega)$, на рис. 19.8, б — *финитная* АЧХ АФП $H_a(j\omega)$ в шкале частот БИХ-фильтра ω , а на рис. 19.8, в — периодическая АЧХ БИХ-фильтра. $H_a(j\omega)$ (сравните с рис. 19.4).

При финитной АЧХ АФП $H_a(j\omega)$ элайсинг отсутствует, и поэтому свойство оптимальности АФП сохраняется для БИХ-фильтра.

Оптимальность БИХ-фильтра является основной причиной преимущественного применения метода билинейного Z -преобразования, реализованного в GUI FDATool.

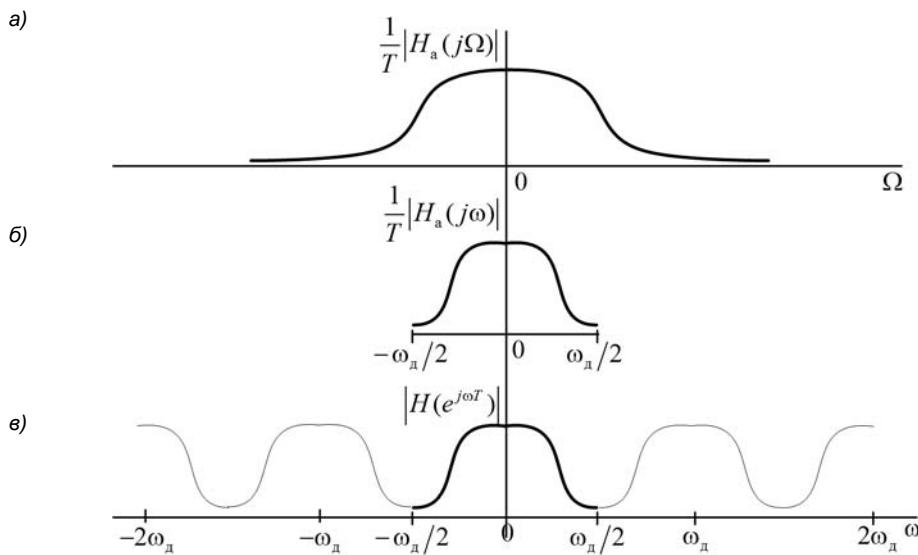


Рис. 19.8. АЧХ ФНЧ: исходного АФП (а), АЧХ АФП в шкале частот БИХ-фильтра (б) и АЧХ БИХ-фильтра (в)

К недостатку метода можно отнести нелинейную зависимость между частотами БИХ-фильтра и АФП, что *обязывает к пересчету граничных частот ПП и ПЗ в требованиях к АЧХ АФП*.

Кроме того, для импульсных характеристик АФП и БИХ-фильтра не соблюдается условие инвариантности (19.3), и их ФЧХ отличаются, но такая задача и не ставилась.

В качестве иллюстрации на рис. 19.9 приведены импульсные характеристики АФП и БИХ-фильтра Чебышева I рода (сравните с рис. 19.5). Они построены с помощью

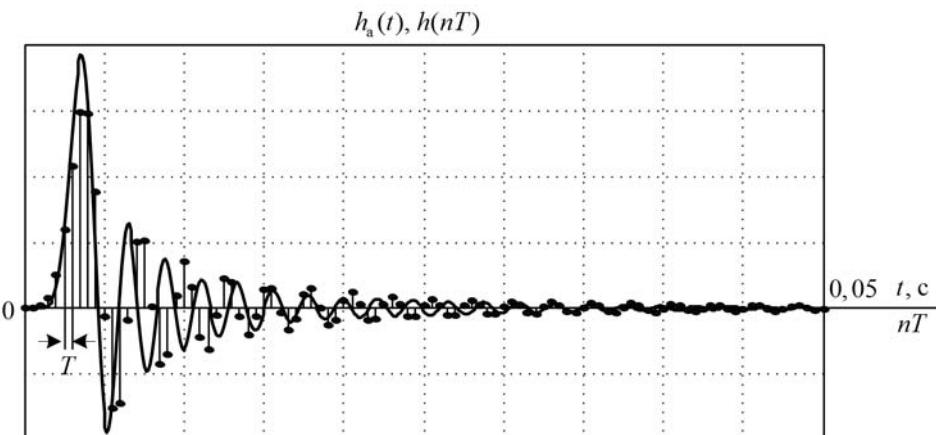


Рис. 19.9. Импульсные характеристики АФП (непрерывная функция) и БИХ-фильтра (последовательность) ФНЧ Чебышева I рода в методе билинейного Z-преобразования

программных средств MATLAB, как в примере 19.1, с заменой функции `impinvar` (этап 3) функцией

```
[b,a] = bilinear(bs,as,Fs)
```

19.3.3. Процедура синтеза оптимального БИХ-фильтра

Рассматриваемая процедура синтеза ориентирована на применение средств GUI FDATool (см. приложение 1).

Процедура синтеза оптимального БИХ-фильтра методом билинейного Z -преобразования включает в себя следующие шаги:

1. Задание требований к АЧХ (дБ) — характеристики затухания (15.12) БИХ-фильтра.

На их основе автоматически формируются требования к характеристике затухания АФП (пересчитываются граничные частоты ПП и ПЗ).

2. Выбор вида аппроксимирующей функции (типа БИХ-фильтра):

- Баттерворт — Butterworth;
- Чебышева I рода — Chebyshev Type I;
- Чебышева II рода — Chebyshev Type II;
- Золотарева—Кауэра (эллиптический) — Elliptic.

3. Расчет передаточной функции БИХ-фильтра.

Сначала автоматически рассчитывается передаточная функция АФП (нули и полюсы), а затем, на ее основе, — передаточная функция БИХ-фильтра в виде произведения множителей второго порядка.

При установке переключателя **Minimum order** (Минимальный порядок) автоматически синтезируется оптимальный БИХ-фильтр.

4. Выбор структуры БИХ-фильтра — каскадной с биквадратными звеньями заданной структуры (см. табл. 6.1).

Пример 19.2. Синтезировать БИХ-фильтр ФНЧ при заданных требованиях к характеристике затухания ФНЧ (см. рис. 19.1):

- частота дискретизации $f_d = 2000$ Гц;
- граничная частота ПП $f_\chi = 450$ Гц;
- граничная частота ПЗ $f_k = 550$ Гц;
- максимально допустимое затухание в ПП $a_{\max} = 0,9151$ дБ ($\delta_1 = 0,1$);
- минимально допустимое затухание в ПЗ $a_{\min} = 26$ дБ ($\delta_2 = 0,05$).

В скобках указаны соответствующие значения максимально допустимых отклонений АЧХ.

Решение. Заданные требования совпадают с требованиями к АЧХ оптимального КИХ-фильтра порядка $R_{\text{opt}} = 19$ (см. пример 17.3). В табл. 19.1 приведены порядки оптимальных БИХ-фильтров четырех типов, а на рис. 19.10 и 19.11 представлены их карты нулей и полюсов, АЧХ и ФЧХ. ◀

Таблица 19.1. Порядки оптимальных БИХ-фильтров

Оптимальный БИХ-фильтр	Баттерворт	Чебышева I	Чебышева II	Золотарева—Кауэра
Порядок	12	6	6	4

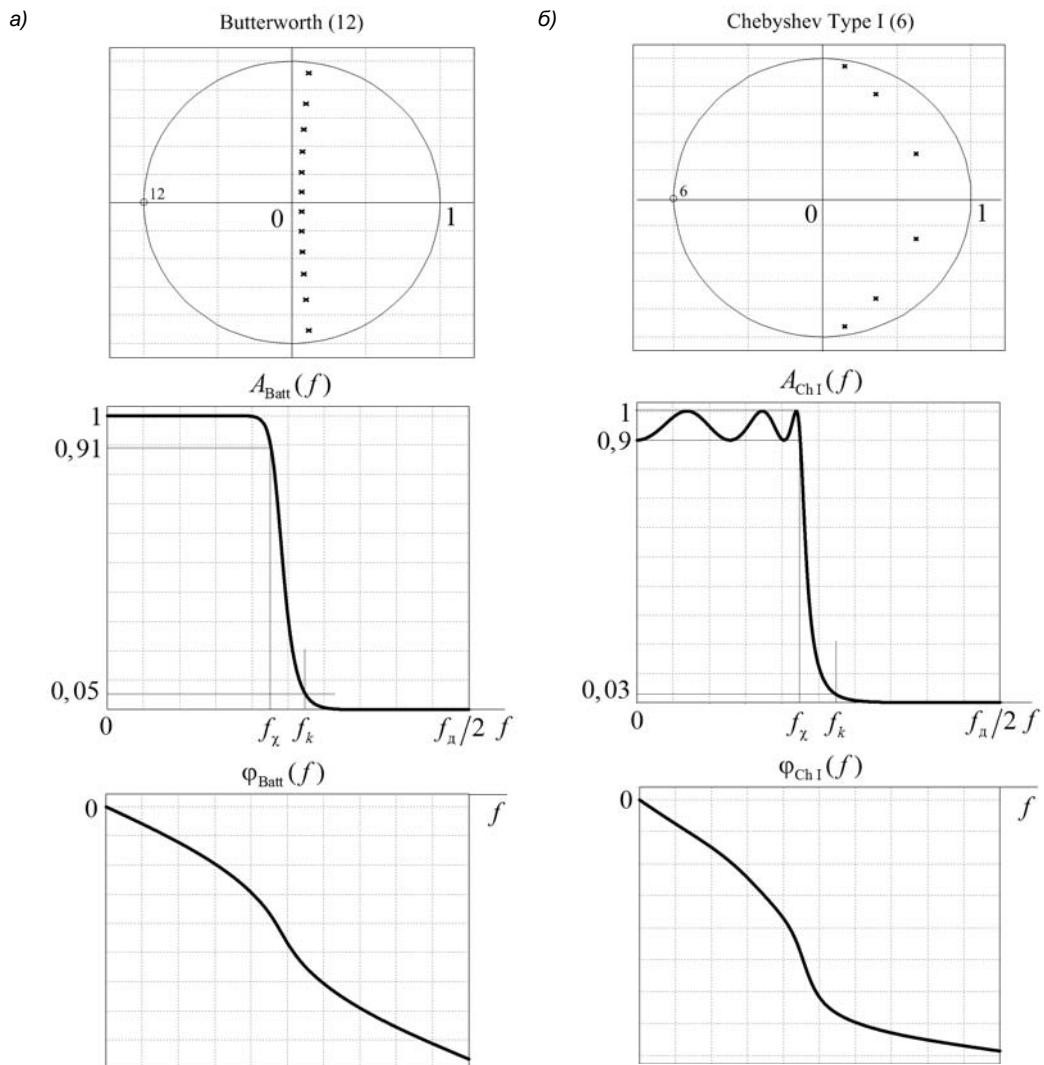


Рис. 19.10. Карта нулей и полюсов, АЧХ и ФЧХ БИХ-фильтра ФНЧ: Баттерворт (а) и Чебышева I рода (б)

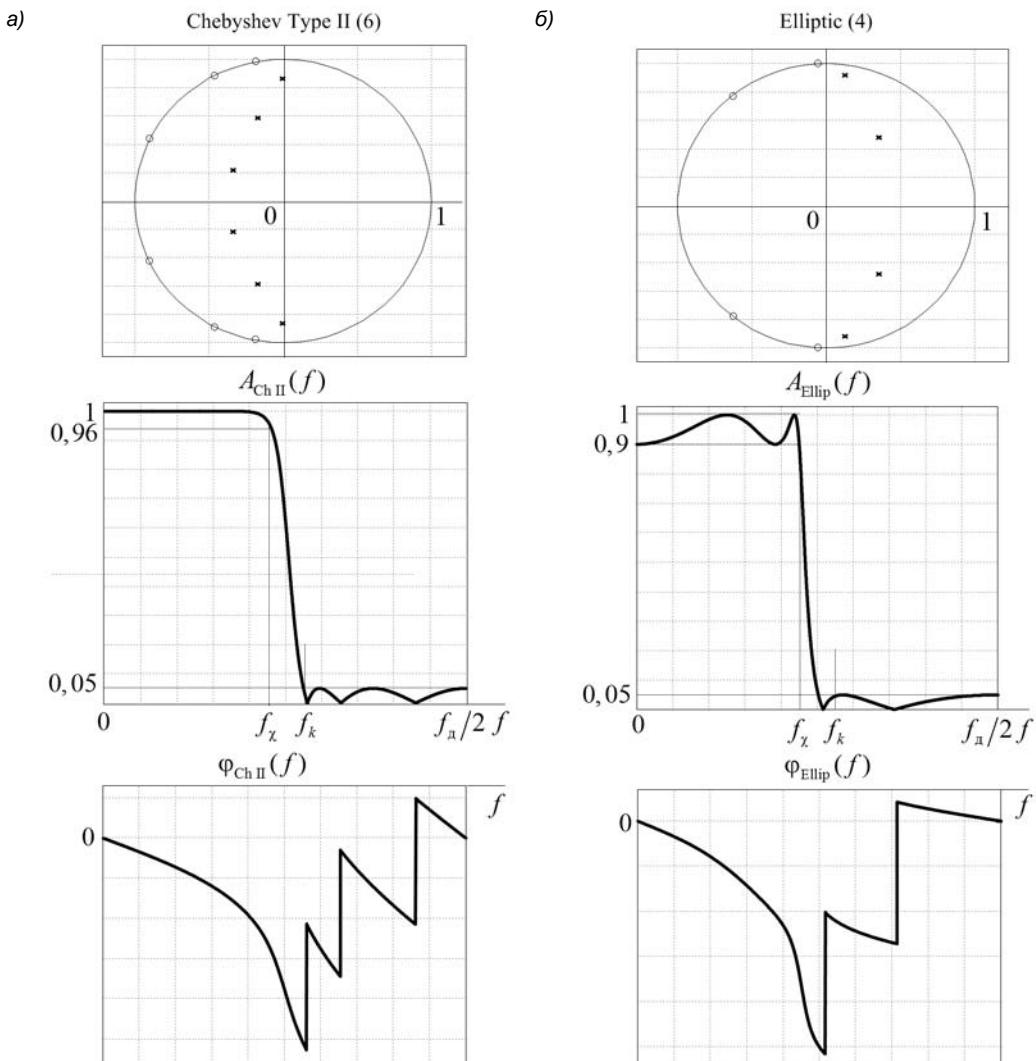


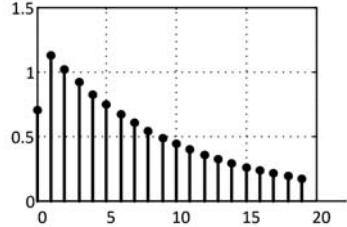
Рис. 19.11. Карта нулей и полюсов, АЧХ и ФЧХ БИХ-фильтра ФНЧ: Чебышева II рода (а) и Чебышева I рода (б)

Основным достоинством БИХ-фильтров является существенно меньший порядок, по сравнению с КИХ-фильтрами, особенно при достаточно жестких требованиях к АЧХ, что позволяет повысить скорость обработки сигналов.

Кроме того, БИХ-фильтры обеспечивают возможность адекватной замены аналоговых фильтров при переходе на цифровую элементную базу.

Основным недостатком БИХ-фильтров является существенно нелинейная ФЧХ, что ограничивает их применение в тех приложениях, где нежелательны фазовые искажения сигнала.

ГЛАВА 20



Оценивание собственного шума цифрового фильтра

При реализации структуры цифрового фильтра на базе цифрового устройства с фиксированной точной — реализации структуры ЦФ с ФТ — особый интерес и одновременно сложность представляет оценивание ее собственного шума. Методика его расчета рассматривается в разд. 8.5. В этой главе воспользуемся полученными аналитическими формулами для расчета дисперсии и СКО собственного шума структур КИХ-фильтров и каскадных структур БИХ-фильтров программными средствами MATLAB.

Сравнительный анализ значений СКО для различных структур ЦФ проиллюстрируем на примерах конкретных фильтров, синтезированных ранее при одинаковых требованиях к АЧХ, задавая одинаковый шаг квантования Q_y :

$$Q_y = 2^{-b_y} = 2^{-15}, \quad (20.1)$$

где $b_y = 15$ — число значащих битов цифрового устройства, на базе которого реализуется структура ЦФ.

20.1. Оценивание собственного шума структур КИХ-фильтра

Оценивание собственного шума структур КИХ-фильтров выполняется на основе линейной модели (см. разд. 8.5.4).

Дисперсия собственного шума *прямой структуры* КИХ-фильтра (Direct-form FIR, см. табл. 6.1) при округлении каждого локального произведения будет равна сумме дисперсий шумов умножителей:

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{NQ_y^2}{12}, \quad (20.2)$$

где N — длина КИХ-фильтра (число умножителей).

Дисперсия собственного шума *прямой приведенной структуры* КИХ-фильтра, где число умножителей сокращается практически вдвое, будет равна

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{(N/2)Q_y^2}{12} = \frac{NQ_y^2}{24}. \quad (20.3)$$

В обоих случаях при округлении *суммы локальных произведений* дисперсия собственного шума структур будет равна дисперсии шума *одного умножителя*:

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12}. \quad (20.4)$$

На основе (20.2)–(20.4), задавая шаг квантования Q_y (20.1), рассчитаем СКО собственного шума σ_{e_c} структур оптимального КИХ-фильтра ФНЧ порядка $R_{\text{opt}} = 19$, синтезированного ранее (см. пример 17.3):

```
>> N = 20; %длина КИХ-фильтра
>> Q = 2.^(-15); %шаг квантования
>> STD1 = sqrt(N*((Q.^2)/12)) %СКО собственного шума прямой структуры
>> STD2 = sqrt(N*((Q.^2)/24)) %СКО собственного шума прямой приведенной
структуры
>> STD3 = sqrt((Q.^2)/12) %СКО собственного шума при округлении суммы
локальных произведений
STD1 = 3.9398e-005
STD2 = 2.7859e-005
STD3 = 8.8097e-006
```

Оптимальной для КИХ-фильтра будет прямая приведенная структура с округлением *суммы локальных произведений*: число умножителей и СКО собственного шума будут минимальными.

20.2. Оценивание собственного шума каскадных структур БИХ-фильтра

Значительно сложнее обстоит дело с оцениванием собственного шума каскадных структур БИХ-фильтров. В разд. 8.8.4 приведены аналитические формулы для дисперсии собственного шума каскадных структур *после масштабирования*.

Приведем эти формулы, которые потребуются для разработки программ расчета дисперсии.

При *прямой* структуре звеньев и округлении *каждого* локального произведения дисперсия собственного шума определяется по формуле (8.54):

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{5Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h_s^k(n)]^2 + \frac{LQ_y^2}{12}, \quad (20.5)$$

а при округлении *суммы* локальных произведений — по формуле (8.55):

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h_s^k(n)]^2 + \frac{LQ_y^2}{12}, \quad (20.6)$$

где $h_s^k(n)$ — эквивалентная ИХ *части* структуры с эквивалентной передаточной функцией $H_s^k(z) \prod_{i=k+1}^L H_i(z)$, $H_s^k(z)$ — эквивалентная передаточная функция *рекур-сивной части* структуры k -го звена.

При *прямой канонической* структуре звеньев и округлении *каждого локального произведения* дисперсия собственного шума определяется по формуле (8.57):

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{2Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{3Q_y^2}{12} \sum_{k=2}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{3Q_y^2}{12}, \quad (20.7)$$

а при округлении *суммы локальных произведений* — по формуле (8.58):

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{Q_y^2}{12} \sum_{k=2}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{Q_y^2}{12}. \quad (20.8)$$

где $h(n)$ — ИХ каскадной структуры, $h^k(n)$ — эквивалентная ИХ части структуры с эквивалентной передаточной функцией $H^k(z) \prod_{i=k+1}^L H_i(z)$, $H^k(z)$ — эквивалентная передаточная функция *всей* структуры k -го звена.

Основная проблема при расчете формулам (20.5)–(20.8) связана с *ограничением длин теоретически бесконечных ИХ*.

Средства MATLAB позволяют эту проблему снять, если вычислять ИХ каскадной структуры и ее частей с помощью функции `impz(H)`, где `H` — имя объекта `dfilt`. Длины ИХ в этом случае будут *автоматически ограничиваться* при достижении *одинаковой*, задаваемой по умолчанию точности.

Алгоритм вычисления дисперсии собственного шума БИХ-фильтра включает в себя следующие основные этапы [43, 45]:

1. Описание каскадной структуры в виде объекта `dfilt` с матрицей коэффициентов

$$H(z) \Rightarrow \begin{bmatrix} b_{01} & b_{11} & b_{21} & 1 & a_{11} & a_{21} \\ b_{02} & b_{12} & b_{22} & 1 & a_{12} & a_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{0L} & b_{1L} & b_{2L} & 1 & a_{1L} & a_{2L} \end{bmatrix} \Rightarrow h(n). \quad (20.9)$$

Она отображает представление передаточной функции после масштабирования (8.53) или (8.56).

2. Формирование матриц коэффициентов эквивалентных передаточных функций.
3. Описание *частей* каскадной структуры с эквивалентными передаточными функциями в виде объектов `dfilt`.

Части каскадной структуры в виде объектов `dfilt` формируются в цикле и имеют одинаковое имя.

4. Определение эквивалентных ИХ объектов `dfilt` с помощью функции `impz`.

Эквивалентные ИХ объектов `dfilt` вычисляются в цикле и имеют одинаковое имя. Автоматически ограниченные длины *всех ИХ будут одинаковыми*.

5. Расчет дисперсии и СКО собственного шума каскадной структуры.

На основе данного алгоритма были разработаны программы расчета дисперсии собственного шума БИХ-фильтров с прямой и прямой канонической структурами звеньев.

Перед запуском программ (они приводятся далее) необходимо выполнить следующие действия в GUI FDATool (см. приложение 1):

- синтезировать БИХ-фильтр;
- выбрать структуру БИХ-фильтра¹:
 - при прямой структуре звеньев — Direct-Form I, SOS;
 - при прямой канонической — Direct-Form II, SOS;
- выполнить расстановку звеньев и масштабирование.

Если хотя бы один из коэффициентов числителей оказался больше единицы (по модулю), то все коэффициенты числителей нормируются к единице.

В этом случае на выходе структуры добавится нормирующий множитель (см. разд. 8.8.3), но его вклад в дисперсию собственного шума будет весьма незначительным, поэтому им можно пренебречь;

- экспортовать в Workspace структуру БИХ-фильтра в виде объекта `dfilt` с именем `h0`;
- сохранить объект `dfilt` на диске по команде:

```
save h0
```

Центральным моментом разработки программ является *формирование матриц коэффициентов эквивалентных передаточных функций*.

Для БИХ-фильтра с прямой структурой звеньев и эквивалентными передаточными функциями $H_s^k(z) \prod_{i=k+1}^L H_i(z)$ при формировании матриц коэффициентов учитывается, что $H_s^k(z)$ — эквивалентная передаточная функция рекурсивной части структуры k -го звена, следовательно, они должны иметь вид:

$$H_s^1(z) \prod_{i=2}^L H_i(z) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & a_{11} & a_{21} \\ b_{02} & b_{12} & b_{22} & 1 & a_{12} & a_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{0L} & b_{1L} & b_{2L} & 1 & a_{1L} & a_{2L} \end{bmatrix} \Rightarrow h_s^1(n);$$

¹ В разд. 8.2.5 показано, что при прямой транспонированной структуре звеньев (Direct-form I transposed) собственный шум будет таким же, как при прямой канонической структуре, а при прямой канонической транспонированной структуре (Direct-form II transposed) — таким же, как при прямой структуре.

$$H_3^2(z) \prod_{i=3}^L H_i(z) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_{12} & a_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{0L} & b_{1L} & b_{2L} & 1 & a_{1L} & a_{2L} \end{bmatrix} \Rightarrow h_3^2(n);$$

...

$$H_3^L(z) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_{1L} & a_{2L} \end{bmatrix} \Rightarrow h_3^L(n).$$

Данные матрицы легко получить путем поэлементного умножения исходной матрицы (20.9) на *матрицы маски* из нулей и единиц.

На основе предложенного алгоритма разработана следующая программа расчета дисперсии собственного шума $\sigma_{e_e}^2$ (20.5) и СКО σ_{e_e} БИХ-фильтра с *прямой* структурой звеньев и округлением *каждого* локального произведения при шаге квантования Q_y (20.1):

```

clear
load H0 %загрузка БИХ-фильтра в виде объекта dfilt
G = get(H0,'ScaleValues'); %вектор коэффициентов усиления звеньев
L = length(G)-1; %количество L биквадратных звеньев
Q = 2.^(-15); %шаг квантования
s0 = get(H0,'sosMatrix'); %исходная матрица коэффициентов

% Цикл для формирования матриц масок
A = ones(L, 6);
for i = 1:L
    for j = 2:3
        A(i,j) = 0;
    end
    B{i}= A; %вектор типа cell array (массив ячеек)
    for j = 5:6
        A(i,j) = 0;
    end
    B{i+1}= A;
    end
    for i = 1:L
        A = B{i}; %матрица маски
    end
    % Цикл для формирования матриц коэффициентов эквивалентных передаточных функций
    s0(1,1) = 1;
    for i = 1:L
        S{i} = s0.*B{i}; %вектор типа cell array (массив ячеек)
    end
end

```

```

if i<L
    s0(i+1,1) = 1;
end
G = 1; %коэффициент усиления
% Слагаемые первой суммы в (20.5)
for i = 1:L
    s = S{i}; %матрица коэффициентов эквивалентной
    передаточной функции
    H = dfilt.dflsos(s,G);
    h = impz(H); sh = sum(h.^2); %эквивалентная импульсная характеристика
    e(i) = ((5*Q.^2)/12)*sh;
end
% Первая сумма в (20.5)
e1 = 0;
for i = 1:L
    e1 = e1+e(i);
end
% Вторая сумма в (20.5)
e2 = L*((Q.^2)/12);
% Дисперсия собственного шума
e = e1+ e2;
STD = sqrt(e) %СКО собственного шума

```

Проиллюстрируем выполнение программы на примере БИХ-фильтра ФНЧ Чебышева I рода шестого порядка, синтезированного в примере 19.2. Выведем исходную матрицу коэффициентов s_0 (20.9), матрицы маски A и матрицы коэффициентов эквивалентных передаточных функций s . Для этого в операторах, выделенных полужирным шрифтом, удалим точку с запятой:

```

s0 =
    0.0620    0.1240    0.0620    1.0000   -1.2063    0.4557
    0.2292    0.4585    0.2292    1.0000   -0.6910    0.6496
    0.3741    0.7482    0.3741    1.0000   -0.2993    0.8806

A =
    1      0      0      1      1      1
    1      1      1      1      1      1
    1      1      1      1      1      1

A =
    1      0      0      1      0      0
    1      0      0      1      1      1
    1      1      1      1      1      1

A =
    1      0      0      1      0      0
    1      0      0      1      0      0
    1      0      0      1      1      1

```

```

s =
    1.0000      0      0   1.0000   -1.2063   0.4557
    0.2292  0.4585  0.2292   1.0000   -0.6910   0.6496
    0.3741  0.7482  0.3741   1.0000   -0.2993   0.8806

s =
    1.0000      0      0   1.0000      0      0
    1.0000      0      0   1.0000   -0.6910   0.6496
    0.3741  0.7482  0.3741   1.0000   -0.2993   0.8806

s =
    1.0000      0      0   1.0000      0      0
    1.0000      0      0   1.0000      0      0
    1.0000      0      0   1.0000   -0.2993   0.8806

STD = 1.0798e-004

```

Для расчета дисперсии собственного шума $\sigma_{e_c}^2$ (20.6) и СКО σ_{e_c} с округлением суммы локальных произведений достаточно удалить коэффициент, выделенный в программе серым цветом.

Во избежание конфликта переменных, перед запуском программы для следующего БИХ-фильтра предварительно следует удалить экспортированный ранее объект *dfilt* из *Workspace* и с диска.

На рис. 20.1 приведена диаграмма с СКО собственного шума БИХ-фильтров ФНЧ, синтезированных в примере 19.2, с прямой структурой звеньев. Для сравнения добавлено СКО собственного шума оптимального КИХ-фильтра ФНЧ с прямой приведенной структурой (см. разд. 20.1). Все фильтры синтезированы при одинаковых требованиях к АЧХ.

В иллюстративных примерах синтеза КИХ- и БИХ-фильтров задавались нежесткие требования к АЧХ, поэтому в данном случае при относительно невысоком порядке

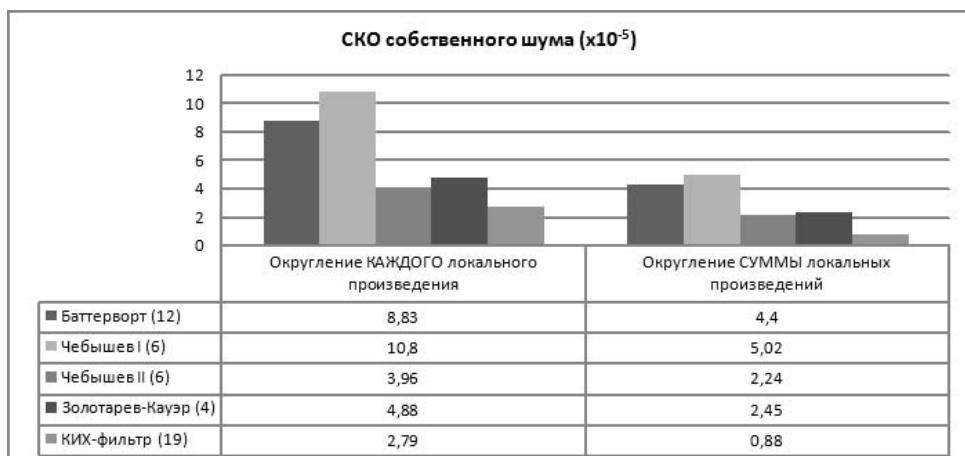


Рис. 20.1. СКО собственного шума БИХ-фильтров ФНЧ с прямой структурой звеньев и КИХ-фильтра с прямой приведенной структурой (в скобках указан порядок фильтра)

оптимального КИХ-фильтра его СКО собственного шума оказалась меньшей, чем у БИХ-фильтров. Однако на практике при более жестких требованиях к АЧХ порядок КИХ-фильтра обычно существенно превышает порядок БИХ-фильтров, что отразится и на его значении СКО.

Среди БИХ-фильтров наиболее шумящим оказался фильтр Чебышева I рода, а наименее шумящим — Чебышева II рода.

Этот результат можно объяснить, анализируя влияние нулей и полюсов, из которых формируются эквивалентные передаточные функции, на дисперсию собственного шума каскадных структур: меньшему расстоянию между нулями и полюсами соответствует меньшее СКО собственного шума (см. разд. 8.5.7). Карты нулей и полюсов БИХ-фильтров изображены на рис. 20.2.

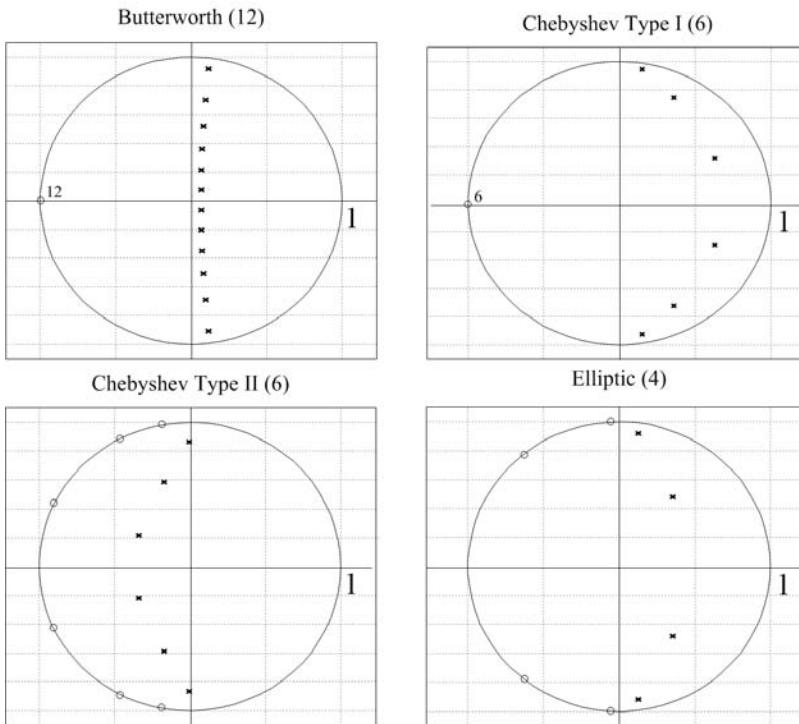


Рис. 20.2. Карты нулей и полюсов БИХ-фильтров ФНЧ

Наибольшие расстояния между нулями и полюсами наблюдаются в фильтре Чебышева I рода, поэтому его СКО собственного шума наибольшее. Наименьшие расстояния — в фильтре Чебышева II рода, поэтому его СКО — наименьшее.

Расстояния между нулями и полюсами в фильтре Баттерворта меньшие, чем в фильтре Чебышева I рода, поэтому даже при вдвое большем порядке его СКО собственного шума оказалось меньшим.

Расстояния между нулями и полюсами в фильтре Золотарева—Кауэра большие, чем в фильтре Чебышева II рода, поэтому даже при меньшем порядке его СКО собственного шума оказалось большим.

Для БИХ-фильтра с *прямой канонической* структурой звеньев и эквивалентными передаточными функциями $H^k(z) \prod_{i=k+1}^L H_i(z)$ при формировании матриц коэффициентов учитывается, что $H^k(z)$ — эквивалентная передаточная функция *всей* структуры k -го звена, следовательно, они должны иметь вид:

$$H^1(z) \prod_{i=2}^L H_i(z) = H(z) \Rightarrow \begin{bmatrix} b_{01} & b_{11} & b_{21} & 1 & a_{11} & a_{21} \\ b_{02} & b_{12} & b_{22} & 1 & a_{12} & a_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{0L} & b_{1L} & b_{2L} & 1 & a_{1L} & a_{2L} \end{bmatrix} \Rightarrow h^1(n) = h(n);$$

$$H^2(z) \prod_{i=3}^L H_i(z) \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ b_{02} & b_{12} & b_{22} & 1 & a_{12} & a_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{0L} & b_{1L} & b_{2L} & 1 & a_{1L} & a_{2L} \end{bmatrix} \Rightarrow h^2(n);$$

$$H^3(z) \prod_{i=4}^L H_i(z) \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{0L} & b_{1L} & b_{2L} & 1 & a_{1L} & a_{2L} \end{bmatrix} \Rightarrow h^3(n);$$

...

$$H^L(z) \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ b_{0L} & b_{1L} & b_{2L} & 1 & a_{1L} & a_{2L} \end{bmatrix} \Rightarrow h^L(n).$$

Эти матрицы также легко получить путем поэлементного умножения исходной матрицы (20.9) на матрицы маски из нулей и единиц, немного видоизмененные по сравнению с матрицами при прямой структуре звеньев.

На основе предложенного алгоритма разработана следующая программа расчета дисперсии собственного шума $\sigma_{e_c}^2$ (20.7) и СКО σ_{e_c} БИХ-фильтра с *прямой канонической* структурой звеньев и округлением *каждого* локального произведения при шаге квантования Q_y (20.1):

```
clear
load H0 %загрузка БИХ-фильтра в виде объекта dfilt
G = get(H0,'ScaleValues'); %вектор коэффициентов усиления звеньев
L = length(G)-1; %количество L биквадратных звеньев
Q = 2.^(-15); %шаг квантования
s0 = get(H0,'sosMatrix'); %исходная матрица коэффициентов
```

```
% Цикл для формирования матриц масок
A = ones(L,6);
B{1} = A;
for i = 1:L
for j = 2:3
    A(i,j) = 0;
end
for j = 5:6
A(i,j) = 0;
end
B{i+1}= A; %вектор типа cell array (массив ячеек)
end
for i = 1:L
A = B{i}; %матрица маски
end
G = 1; %коэффициент усиления

% Первая сумма в (20.7)
H0 = dfilt.df2sos(s0,G);
h0 = impz(H0); sh0 = sum(h0.^2);
e1 = ((Q.^2)/12)*sh0;
% Цикл для формирования матриц коэффициентов эквивалентных передаточных функций
S{1} = s0.*B{1};
s0(1,1) = 1;
for i = 2:L
    S{i} = s0.*B{i}; %вектор типа cell array (массив ячеек)
    if i<L
        s0(i+1,1) = 1;
    end
end
% Слагаемые второй суммы в (20.7)
for i = 1:L
    s = S{i}; %матрица коэффициентов эквивалентной передаточной функции
    H = dfilt.dflsos(s,G);
    h = impz(H); sh = sum(h.^2); %эквивалентная импульсная характеристика
    e(i) = ((2*Q.^2)/12)*sh;
end
% Вторая сумма в (20.7)
e2 = 0;
for i = 1:L
    e2 = e2+e(i);
end
% Слагаемые третьей суммы в (20.7)
for i = 2:L
    s = S{i};
    H = dfilt.df2sos(s,G);
    h = impz(H); sh = sum(h.^2);
    e(i) = ((3*Q.^2)/12)*sh;
end
```

```
% Третья сумма в (20.7)
e3 = 0;
for i = 2:L
    e3 = e3+e(i);
end
% Четвертое слагаемое в (20.7)
e4 = ((3*Q.^2)/12);
% Дисперсия собственного шума
e = e1+ e2+e3+e4;
STD = sqrt(e) %СКО собственного шума
```

Проиллюстрируем выполнение программы на примере того же БИХ-фильтра ФНЧ Чебышева I рода. Выведем исходную матрицу коэффициентов s_0 (20.9), матрицы маски A и матрицы коэффициентов эквивалентных передаточных функций s . Для этого в операторах, выделенных полужирным шрифтом, удалим точку с запятой:

```
s0 =
0.2244    0.4488    0.2244    1.0000   -1.2063    0.4557
0.2301    0.4602    0.2301    1.0000   -0.6910    0.6496
0.4212    0.8425    0.4212    1.0000   -0.2993    0.8806

A =
1    1    1    1    1    1
1    1    1    1    1    1
1    1    1    1    1    1

A =
1    0    0    1    0    0
1    1    1    1    1    1
1    1    1    1    1    1

A =
1    0    0    1    0    0
1    0    0    1    0    0
1    1    1    1    1    1

s =
0.2244    0.4488    0.2244    1.0000   -1.2063    0.4557
0.2301    0.4602    0.2301    1.0000   -0.6910    0.6496
0.4212    0.8425    0.4212    1.0000   -0.2993    0.8806

s =
1.0000      0      0    1.0000      0      0
0.2301    0.4602    0.2301    1.0000   -0.6910    0.6496
0.4212    0.8425    0.4212    1.0000   -0.2993    0.8806

s =
1.0000      0      0    1.0000      0      0
0.2301      0      0    1.0000      0      0
1.0000    0.8425    0.4212    1.0000   -0.2993    0.8806

STD = 6.7085e-005
```

Для расчета дисперсии собственного шума $\sigma_{e_c}^2$ (20.8) и СКО σ_{e_c} с округлением суммы локальных произведений достаточно удалить коэффициенты, выделенные в программе серым цветом.

На рис. 20.3 приведена диаграмма с СКО собственного шума БИХ-фильтров с прямой и прямой канонической структурами звеньев при округлении каждого локального произведения. В данном случае для фильтров Чебышева II рода и Золотарева—Кауэра с прямой канонической структурой звеньев потребовалось выполнить нормирование коэффициентов.



Рис. 20.3. СКО собственного шума БИХ-фильтров ФНЧ с прямой и прямой канонической структурами звеньев при округлении каждого локального произведения

Наиболее шумящим остается фильтр Чебышева I рода с прямой структурой звеньев, а наименее шумящим оказался фильтр Баттерворта с прямой канонической структурой звеньев.

В данном случае при неизменных нулях и полюсах эквивалентных передаточных функций СКО собственного шума будет зависеть от *структуры* звеньев, т. к. от этого зависят модули значений эквивалентных ИХ (см. разд. 8.5.7).

Данную зависимость иллюстрирует рис. 20.4, где представлены эквивалентные ИХ БИХ-фильтров Чебышева I рода с прямой и прямой канонической структурами звеньев. В обоих случаях имеются три эквивалентные ИХ (по количеству звеньев). Для их вывода в FVTool с автоматическим ограничением до одинаковой длины следует в цикле добавить команды:

```
impz(H)
pause
```

На графиках ИХ отмечены максимальные и минимальные отсчеты, что позволяет качественно оценить характер изменения модулей значений ИХ. В данном примере их меньшим значениям соответствует меньшее СКО собственного шума при прямой канонической структуре звеньев.

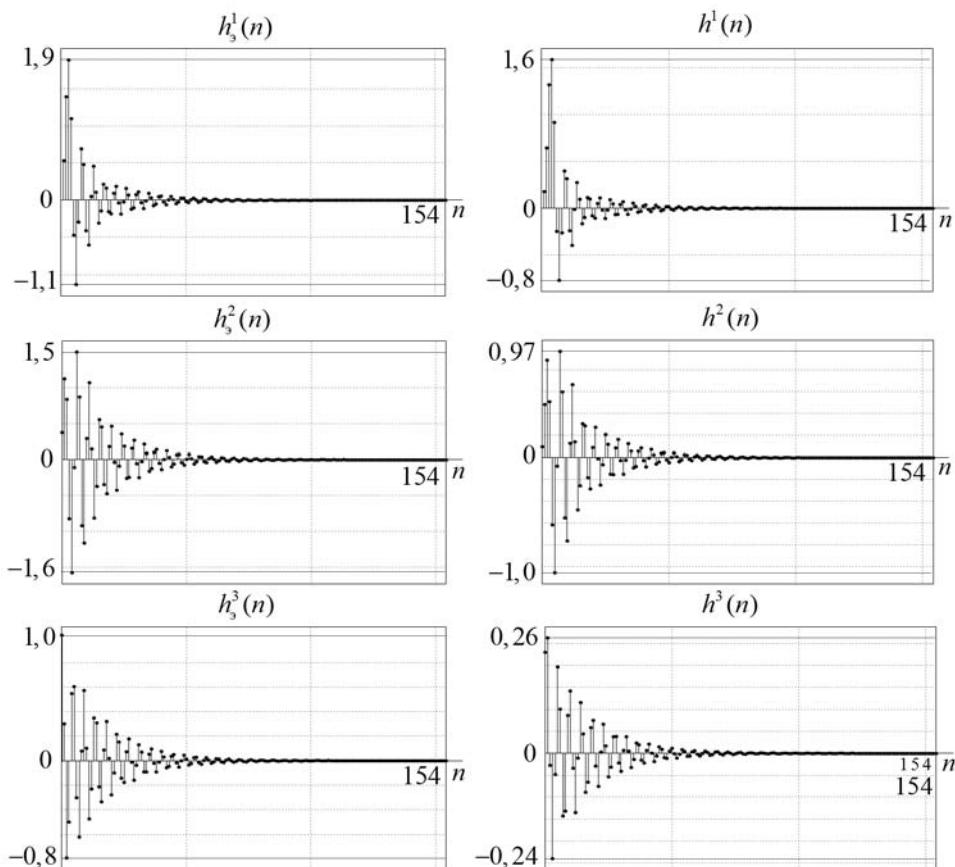


Рис. 20.4. Эквивалентные импульсные характеристики частей каскадной структуры БИХ-фильтра Чебышева I рода при прямой (слева) и прямой канонической (справа) структурах звеньев

На рис. 20.5 приведена диаграмма с СКО собственного шума БИХ-фильтров при округлении суммы локальных произведений с ожидаемым результатом: по сравнению с СКО тех же фильтров (см. рис. 20.3) все значения уменьшились.

Таким образом, в рассмотренных примерах среди БИХ-фильтров наименее шумящим оказался фильтр Баттерворта с прямой канонической структурой звеньев при округлении суммы локальных произведений. Логически предсказать такой результат было бы невозможно.

Приведенные программы позволяют оценить дисперсию и СКО собственного шума различных структур ЦФ с ФТ и принять во внимание этот критерий при выборе структуры для ее реализации на базе цифрового устройства.

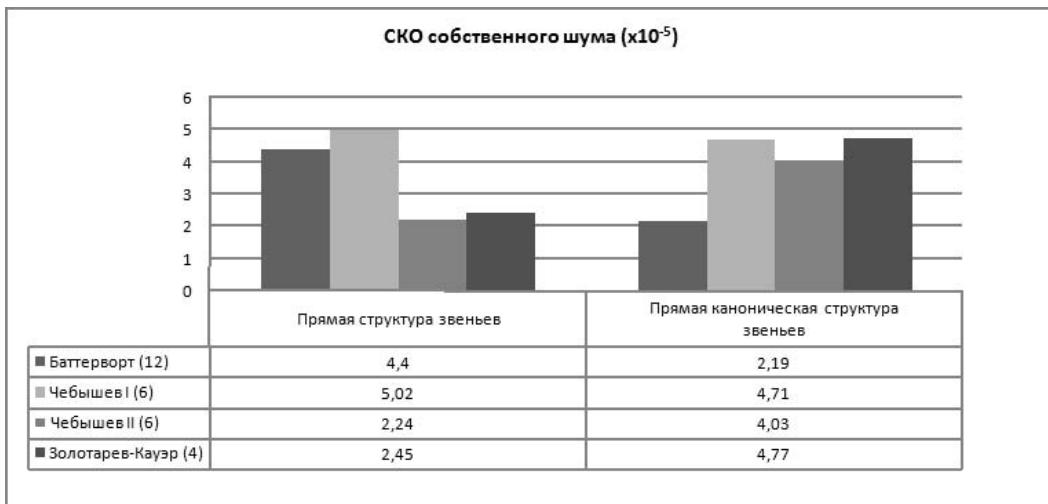
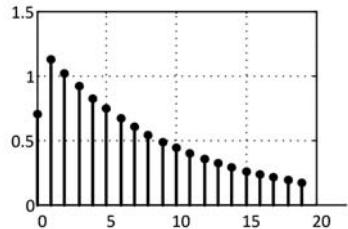


Рис. 20.5. СКО собственного шума БИХ-фильтров ФНЧ с прямой и прямой канонической структурами звеньев при округлении суммы локальных произведений

ГЛАВА 21



Многоскоростные системы

Многоскоростными называют системы ЦОС, в которых различные этапы цифровой обработки выполняются на разных частотах дискретизации — разных скоростях поступления отсчетов. В таких системах необходима "стыковка" соответствующих этапов цифровой обработки, которая сводится к *преобразованию частоты дискретизации* в одном из следующих вариантов или их комбинации:

- от меньшей к большей — повышение частоты дискретизации в *целое* число раз L , называемое *интерполяцией* (interpolation), реализуемое *системой интерполяции* с коэффициентом интерполяции L :

$$L = \frac{f'_d}{f_d} \Rightarrow f'_d = L f_d; \quad (21.1)$$

- от большей к меньшей — понижение частоты дискретизации в *целое* число раз M , называемое *децимацией* (decimation), реализуемое *системой децимации* с коэффициентом децимации M :

$$M = \frac{f_d}{f'_d} \Rightarrow f'_d = \frac{f_d}{M}, \quad (21.2)$$

где f_d и f'_d — частоты дискретизации сигналов на *входе* и *выходе* системы интерполяции или децимации.

Повышение или понижение частоты дискретизации на рациональный коэффициент L/M , называемое *передискретизацией* (resampling), реализуется каскадным соединением систем интерполяции с коэффициентом L и децимации с коэффициентом M .

Однократной многоскоростной системой называют систему, в которой преобразование частоты дискретизации выполняется один раз — однократно, а *многократной* — систему, в которой это выполняется несколько раз — многократно.

Многократное преобразование частоты дискретизации реализуется посредством каскадного соединения однократных систем, что оправдано при больших значениях L (M), т. к. требования к однократным системам с меньшими значениями данных коэффициентов существенно менее жесткие.

21.1. Система однократной интерполяции

Система однократной интерполяции включает в себя два блока (рис. 21.1):

- экспандер;
- цифровой ФНЧ.

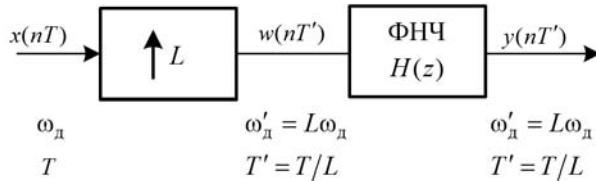


Рис. 21.1. Система однократной интерполяции

Экспандер (блок со стрелкой вверх) формирует промежуточный сигнал $w(nT')$ с периодом дискретизации $T' = T/L$ (частотой дискретизации $\omega'_\text{д} = L\omega_\text{д}$) путем добавления $(L-1)$ равноотстоящих нулей на каждом периоде дискретизации T входного сигнала $x(nT)$:

$$w(nT') = \begin{cases} x\left(\frac{nT}{L}\right), & n = 0, L, 2L, \dots; \\ 0 & \text{при других } n. \end{cases} \quad (21.3)$$

Соотношение между периодами дискретизации входного $x(nT)$ и промежуточного $w(nT')$ сигналов позволяет интерпретировать "новую" шкалу nT' как *растяжение* "старой" шкалы nT в L раз: периоду дискретизации T будет соответствовать L периодов дискретизации T' (рис. 21.2, а, б):

Соотношение между частотами дискретизации спектральных плотностей данных сигналов $X(e^{j\omega T})$ и $W(e^{j\omega' T})$ позволяет интерпретировать "новую" шкалу ω' , наоборот, как *сжатие* "старой" шкалы ω в L раз: периоду $\omega'_\text{д}$ будет соответствовать L периодов $\omega_\text{д}$ (рис. 21.3, а, б).

Цифровой ФНЧ предназначен для подавления $(L-1)$ "лишних" составляющих спектральной плотности промежуточного сигнала $W(e^{j\omega' T})$ на периоде $\omega'_\text{д}$, следовательно, его идеальная АЧХ должна удовлетворять требованиям (рис. 21.3, в):

$$A(\omega') = \begin{cases} L & \text{в полосе пропускания } 0 \leq \omega' \leq \omega'_\text{д}/2L; \\ 0 & \text{при других значениях } \omega'. \end{cases} \quad (21.4)$$

Растягивая шкалу ω' в L раз, представим соответствующие графики в шкале ω (рис. 21.3, д—ж), где идеальная АЧХ ФНЧ должна удовлетворять требованиям:

$$A(\omega) = \begin{cases} L & \text{в полосе пропускания } 0 \leq \omega \leq \omega_\text{д}/2; \\ 0 & \text{при других значениях } \omega. \end{cases} \quad (21.5)$$

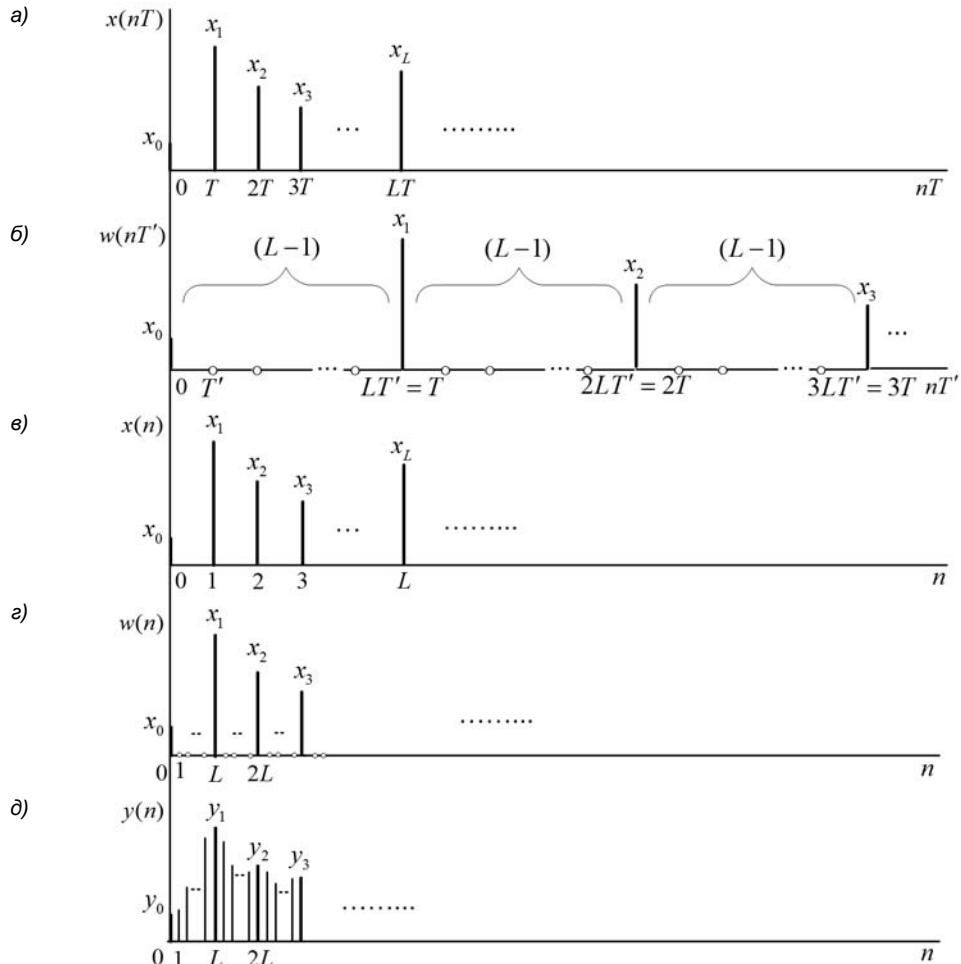


Рис. 21.2. Входной сигнал (а), промежуточный сигнал в "новой" шкале времени (б), входной промежуточный и выходной сигналы системы однократной интерполяции в шкале дискретного нормированного времени (в—д)

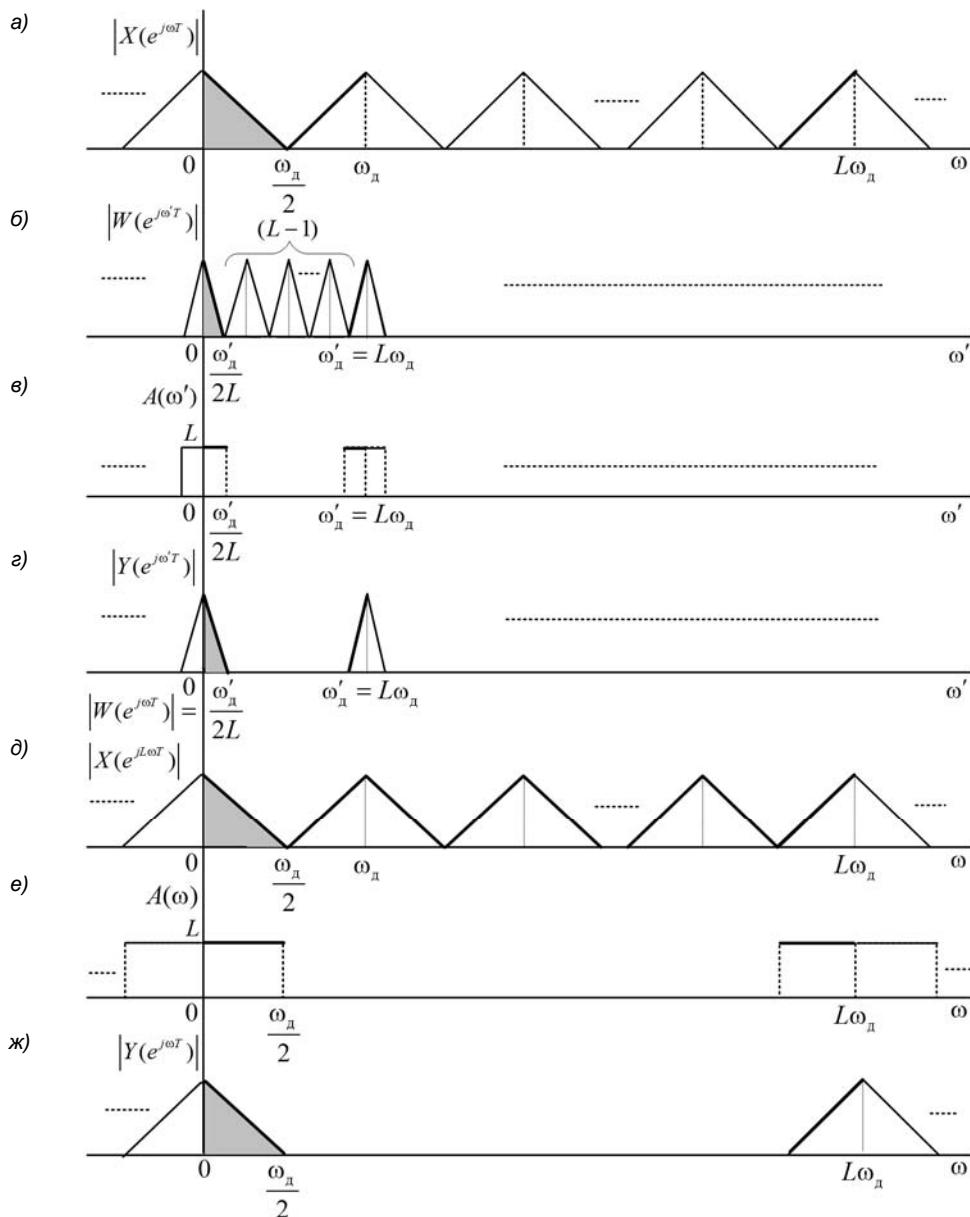


Рис. 21.3. Модуль спектральной плотности входного сигнала (а), модуль спектральной плотности промежуточного сигнала, идеальная АЧХ и модуль спектральной плотности выходного сигнала системы однократной интерполяции в "новой" шкале частот (б—г) и в "старой" шкале частот (д—ж)

Почему усиление в полосе пропускания равно L , станет понятным из дальнейших рассуждений.

Сжимая шкалу nT' в L раз, можно получить соответствующие графики в шкале nT . В области дискретного нормированного времени это эквивалентно сжатию шкалы n в L раз (см. рис. 21.2, в, г), где

$$w(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}\right), & n = 0, L, 2L, \dots; \\ 0 & \text{при других } n. \end{cases} \quad (21.6)$$

Сравнивая спектральные плотности $X(e^{j\omega T})$ и $Y(e^{j\omega T})$ (рис. 21.3, а, ж), видим, что период спектральной плотности $Y(e^{j\omega T})$ увеличился в L раз, следовательно, период дискретизации выходного сигнала уменьшился в L раз:

$$L\omega_d = \frac{L2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T/L}.$$

В шкале дискретного нормированного времени это означает, что на один отсчет входного сигнала $x(n)$ приходится L отсчетов выходного сигнала $y(n)$ (см. рис. 21.2, в, д), т. е. *скорость поступления выходных отсчетов в L раз возрастает*, что эквивалентно *увеличению в L раз частоты дискретизации*.

Запишем соотношение вход/выход ФНЧ в z -области (см. рис. 21.1):

$$Y(z) = W(z)H(z). \quad (21.7)$$

Определив z -изображение сигнала $w(n)$ (21.6):

$$W(z) = \sum_{n=0, L, 2L, \dots}^{\infty} x\left(\frac{n}{L}\right) z^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) z^{-Lm} = X(z^L), \quad (21.8)$$

получим соотношение вход/выход системы однократной интерполяции в z -области:

$$Y(z) = X(z^L)H(z). \quad (21.9)$$

Во временной области ему соответствует свертка:

$$y(n) = \sum_{m=0, L, 2L, \dots}^{\infty} x\left(\frac{m}{L}\right) h(n-m) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) h(n-Lm). \quad (21.10)$$

Значения первых $3L$ отсчетов $y(n)$ представлены в столбцах матрицы с использованием кратких обозначений $x(n) = x_n$, $y(n) = y_n$, $h(n) = h_n$:

$$\begin{bmatrix} y_0 & y_L & y_{2L} \\ y_1 & y_{L+1} & y_{2L+1} \\ y_2 & y_{L+2} & y_{2L+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{L-1} & y_{2L-1} & y_{3L-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 h_0 & x_0 h_L + x_1 h_0 & x_0 h_{2L} + x_1 h_L + x_2 h_0 \\ x_0 h_1 & x_0 h_{L+1} + x_1 h_1 & x_0 h_{2L+1} + x_1 h_{L+1} + x_2 h_1 \\ x_0 h_2 & x_0 h_{L+2} + x_1 h_2 & x_0 h_{2L+2} + x_1 h_{L+2} + x_2 h_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_0 h_{L-1} & x_0 h_{2L-1} + x_1 h_{L-1} & x_0 h_{3L-1} + x_1 h_{2L-1} + x_2 h_{L-1} \end{bmatrix}. \quad (21.11)$$

Результаты в одинаковых столбцах справа и слева можно трактовать следующим образом: одному отсчету входного сигнала соответствует L отсчетов выходного сигнала, т. е. *скорость поступления выходных отсчетов в L раз возрастает, что эквивалентно увеличению в L раз частоты дискретизации*.

Подставим в (21.9) $z = e^{j\omega T}$:

$$Y(e^{j\omega T}) = X(e^{jL\omega T})H(e^{j\omega T}).$$

Выразив частотную характеристику через ее модуль (АЧХ) и аргумент (ФЧХ):

$$H(e^{j\omega T}) = |H(e^{j\omega T})| e^{j \arg\{H(e^{j\omega T})\}} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (21.12)$$

получим соотношение вход/выход системы однократной интерполяции в частотной области:

$$Y(e^{j\omega T}) = X(e^{jL\omega T})A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}.$$

При $A(\omega)$ (21.5) в основной полосе частот $[0; L\omega_d/2]$ имеем (см. рис. 21.3, *e*, *ж*):

$$Y(e^{j\omega T}) = \begin{cases} LX(e^{jL\omega T})e^{j\varphi(\omega)} & \text{в полосе пропускания } 0 \leq \omega \leq \omega_d/2; \\ 0 & \text{при других значениях } \omega. \end{cases}$$

Спектральные плотности $X(e^{jL\omega T}) = W(e^{j\omega T})$ и $X(e^{j\omega T})$ с периодом дискретизации ω_d тождественны (см. рис. 21.3, *a*, *д*), следовательно:

$$Y(e^{j\omega T}) = \begin{cases} LX(e^{j\omega T})e^{j\varphi(\omega)} & \text{в полосе пропускания } 0 \leq \omega \leq \omega_d/2; \\ 0 & \text{при других значениях } \omega. \end{cases} \quad (21.13)$$

Спектральная плотность $X(e^{j\omega T})$ связана со спектральной плотностью аналогового сигнала $X_a(j\omega)$ соотношением (9.30):

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a[j(\omega + m\omega_d)].$$

В основной полосе частот $[0; \omega_d/2]$ при подстановке $m = 0$ и в отсутствие эйлинга (см. рис. 9.1) справедливо равенство

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} X_a(j\omega),$$

на основании чего определим спектральную плотность $Y(e^{j\omega T})$ (21.13) на интервале $[0; \omega_d/2]$:

$$Y(e^{j\omega T}) = \frac{L}{T} X_a(j\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (21.14)$$

Если бы дискретный сигнал был получен в результате непосредственной дискретизации аналогового сигнала $x_a(t)$ с частотой $\omega'_d = L\omega_d$ (периодом дискретизации

$T' = T/L$), то связь (9.30) между их спектральными плотностями $\tilde{X}(e^{j\omega T})$ и $X_a(j\omega)$ имела бы вид:

$$\tilde{X}(e^{j\omega T}) = \frac{L}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a[j(\omega + mL\omega_d)],$$

и на интервале $[0; \omega_d/2]$ было справедливо равенство (рис. 21.4, а, б):

$$\tilde{X}(e^{j\omega T}) = \frac{L}{T} X_a(j\omega). \quad (21.15)$$

Наличие множителя L в (21.15) объясняет необходимость его учета в АЧХ (21.5) и, как следствие, в $Y(e^{j\omega T})$ (21.13) и (21.14).

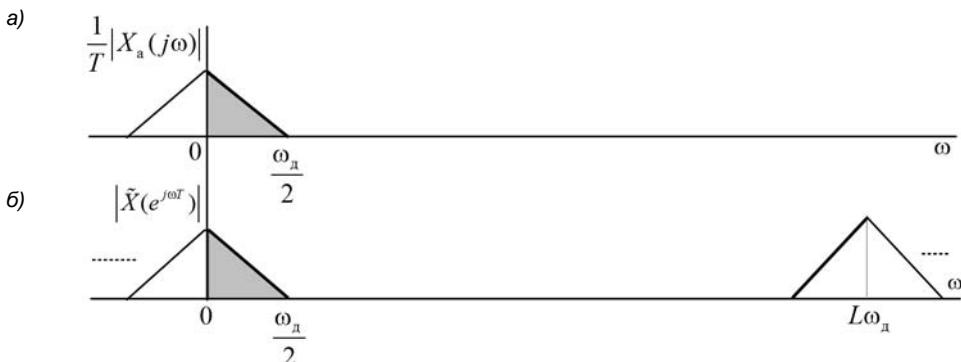


Рис. 21.4. Модули спектральной плотности аналогового сигнала (а) и дискретного сигнала (б), полученного в результате дискретизации аналогового сигнала

Сравнивая спектральные плотности $Y(e^{j\omega T})$ (21.14) и $\tilde{X}(e^{j\omega T})$ (21.15), видим, что их модули совпадают, а аргументы отличаются: аргумент спектральной плотности $Y(e^{j\omega T})$ оказывается измененным в соответствии с ФЧХ фильтра.

В действительности АЧХ не является идеальной, поэтому не только аргументы, но и модули спектральных плотностей будут отличаться. Для исключения влияния фазовых искажений используют КИХ-фильтр ФНЧ с линейной ФЧХ.

Пример 21.1. На рис. 21.5 приведены результаты моделирования в MATLAB [42] системы однократной интерполяции с коэффициентом $L = 2$.

На рис. 21.5, а представлен входной сигнал в виде суммы двух дискретных гармоник (представлено 32 отсчета) с амплитудами $A_1 = 2$ и $A_2 = 4$, частотами $f_1 = 50$ Гц и $f_2 = 100$ Гц и частотой дискретизации $f_d = 800$ Гц, а на рис. 21.5, б — его амплитудный спектр, вычисленный с помощью ДПФ.

На рис. 21.5, в представлен выходной сигнал, а на рис. 21.5, г — его амплитудный спектр. Скорость поступления выходных отсчетов в 2 раза возросла, что эквивалентно увеличению в 2 раза частоты дискретизации. ◀

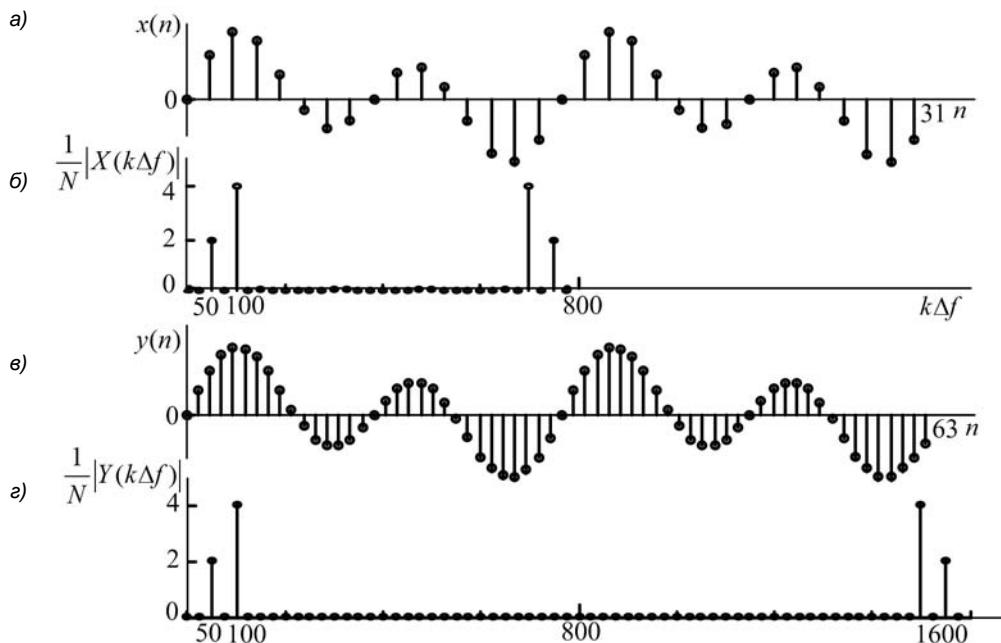


Рис. 21.5. Результаты моделирования системы однократной интерполяции с коэффициентом $L = 2$: входной сигнал (а) и его амплитудный спектр (б); выходной сигнал (в) и его амплитудный спектр (г)

21.2. Система однократной децимации

Система однократной децимации включает в себя два блока (рис. 21.6):

- цифровой ФНЧ;
- компрессор.

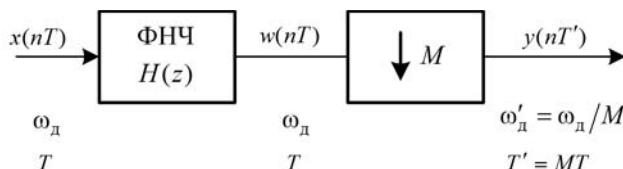


Рис. 21.6. Система однократной децимации

Цифровой ФНЧ предназначен для ограничения верхней частоты $\omega_d/2$ спектральной плотности $X(e^{j\omega T})$ входного сигнала $x(nT)$ до $\omega'_d/2 = \omega_d/2M$, что требует пояснения.

Соотношение между частотами дискретизации $\omega'_d = \omega_d/M$ спектральных плотностей данных сигналов позволяет интерпретировать "новую" шкалу частот ω' как *растяжение* "старой" шкалы ω в M раз: периоду ω_d будет соответствовать M периодов ω'_d (рис. 21.7, а, б).

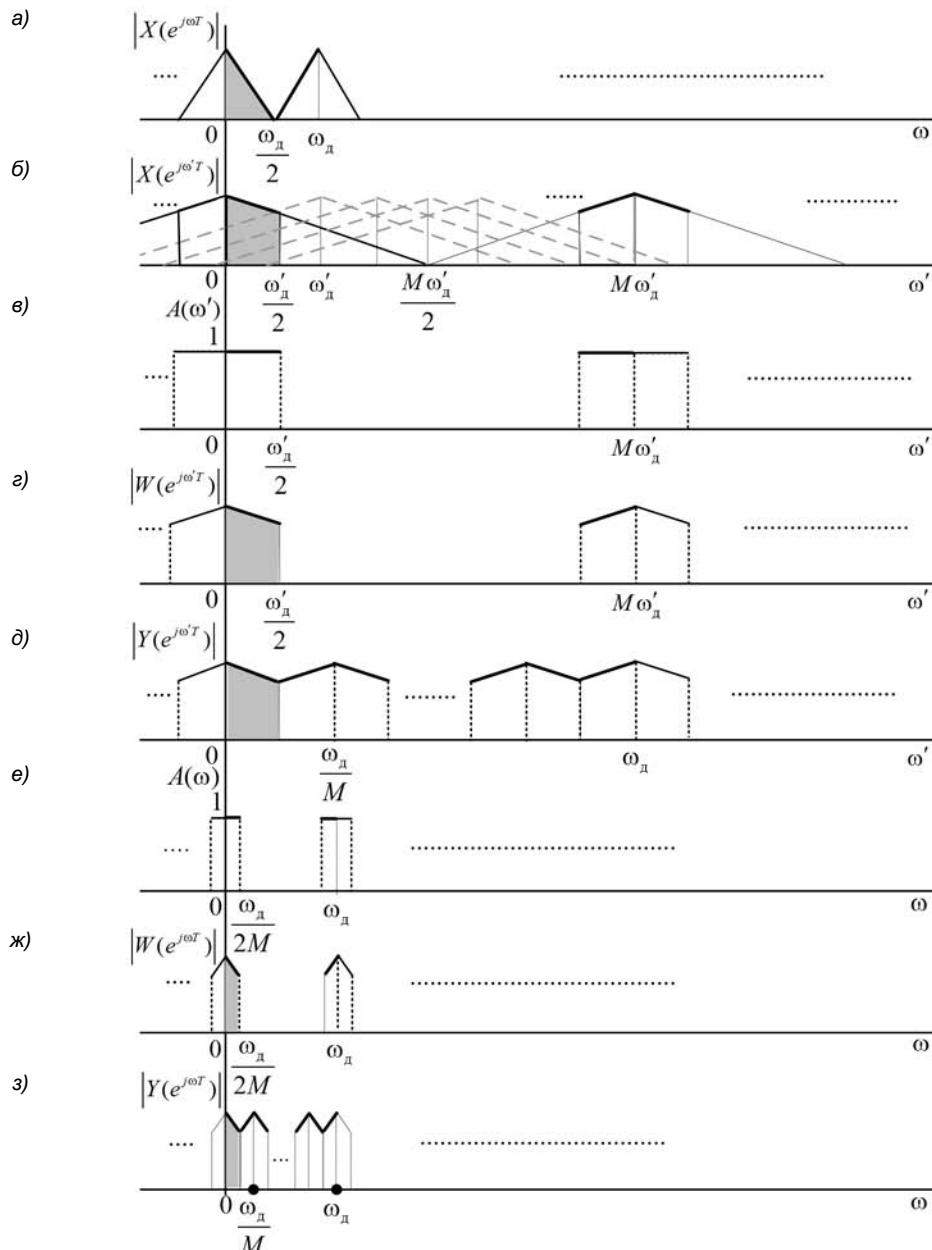


Рис. 21.7. Модули спектральной плотности входного сигнала в "старой" (а) и "новой" (б) шкалах частот; идеальная АЧХ (в); модули спектральных плотностей промежуточного (г) и выходного (д) сигналов в "новой" шкале частот; идеальная АЧХ (е) и модули спектральных плотностей промежуточного (ж) и выходного (з) сигналов в "старой" шкале частот

В общем случае "новая" частота дискретизации $\omega'_d = \omega_d/M$ может не удовлетворять условию теоремы Котельникова $\omega'_d \geq 2\omega_b$, где $\omega_b = \omega_d/2$, что приведет к элайсингу (серые пунктирные линии на рис. 21.7, б). Для того чтобы гарантировать его отсутствие, идеальная АЧХ ФНЧ должна удовлетворять требованиям (рис. 21.7, в):

$$A(\omega') = \begin{cases} 1 & \text{в полосе пропускания } 0 \leq \omega' \leq \omega'_d/2; \\ 0 & \text{при других значениях } \omega'. \end{cases}$$

На выходе ФНЧ формируется промежуточный сигнал $w(nT)$ (рис. 21.8, а) со спектральной плотностью $W(e^{j\omega T})$ (рис. 21.7, г).

Компрессор (блок со стрелкой вниз на рис. 21.6) формирует выходной сигнал $y(nT')$ путем прореживания промежуточного сигнала $w(nT)$: из него берется каждый M -й отсчет. В результате будет получена прореженная последовательность $y(nT')$ с периодом дискретизации в M раз большим (рис. 21.8, а, б):

$$y(nT') = w(MnT), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

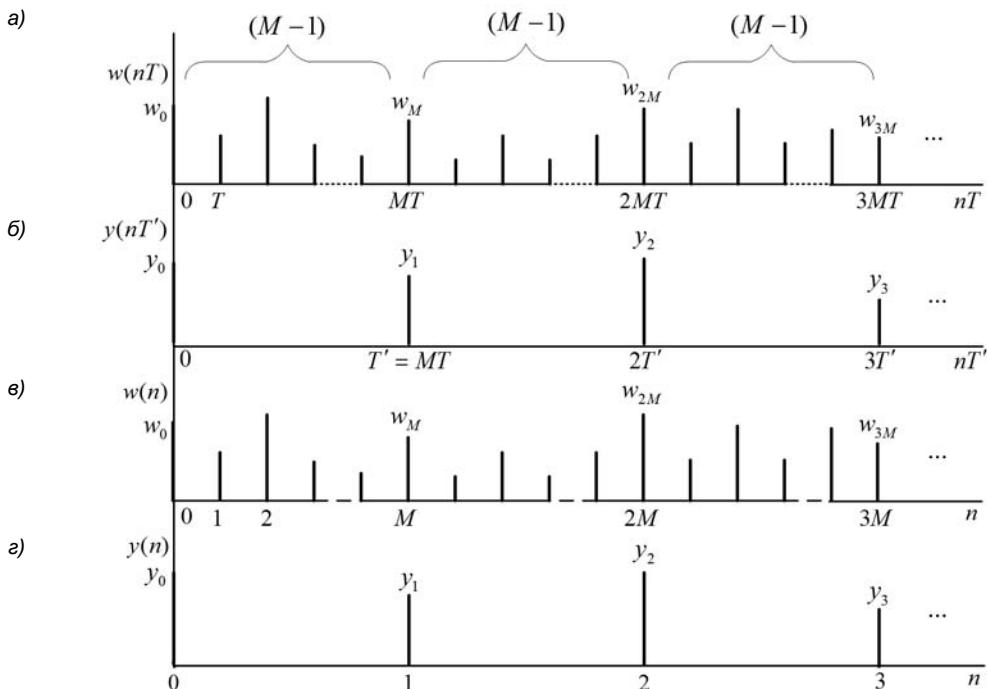


Рис. 21.8. Промежуточный сигнал (а); выходной сигнал в "новой" шкале времени (б); промежуточный (в) и выходной (г) сигналы в шкале дискретного нормированного времени

В области дискретного нормированного времени это эквивалентно прореживанию сигнала $w(n)$ и растяжению шкалы n в M раз для выходного сигнала $y(n)$ (рис. 21.8, в, г):

$$y(n) = w(Mn), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (21.16)$$

Запишем соотношение вход/выход ФНЧ в z -области (см. рис. 21.6):

$$W(z) = X(z)H(z). \quad (21.17)$$

Во временной области ему соответствует свертка

$$w(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(n-m)h(m).$$

С учетом (21.16), это позволяет записать соотношение вход/выход системы однократной децимации во временной области в виде свертки:

$$y(n) = w(Mn) = \sum_{m=0}^{\infty} x(Mn-m)h(m). \quad (21.18)$$

Приведем значения первых трех отсчетов $y(n)$, $n = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 h_0; \\ y_1 &= [x_M h_0 + x_{M-1} h_1 + \dots + x_0 h_M]; \\ y_2 &= [x_{2M} h_0 + x_{2M-1} h_1 + \dots + x_{M+1} h_{M-1}] + [x_M h_M + x_{M-1} h_{M+1} + \dots + x_0 h_{2M}]. \end{aligned} \quad (21.19)$$

Продолжая вычисления при $n = 3, 4, \dots$, результаты можно трактовать следующим образом: одному отсчету выходного сигнала соответствуют M вновь поступающих отсчетов входного сигнала, т. е. *скорость поступления выходных отсчетов уменьшается в M раз*, что эквивалентно *уменьшению в M раз частоты дискретизации*.

Сжимая шкалу ω' в M раз, получим спектральные плотности последовательностей $w(n)$ и $y(n)$ в шкале частот ω , где идеальная АЧХ ФНЧ должна удовлетворять требованиям (см. рис. 21.7, $e—\sigma$):

$$A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{в полосе пропускания } 0 \leq \omega \leq \omega_d / 2M; \\ 0 & \text{при других значениях } \omega. \end{cases} \quad (21.20)$$

Спектральную плотность $Y(e^{j\omega T})$ можно представить как усредненную сумму M спектральных плотностей $W(e^{j\omega T})$, сдвинутых друг относительно друга на частоту дискретизации $\frac{\omega_d}{M}$ (рис. 21.9, $a—\varepsilon$):

$$Y(e^{j\omega T}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W\left(e^{j\omega T - k \frac{\omega_d}{M}}\right), \quad k = 0, 1, \dots, (M-1). \quad (21.21)$$

Соотношению (21.17) в этом случае соответствует

$$W\left(e^{j\omega T - k \frac{\omega_d}{M}}\right) = H\left(e^{j\omega T - k \frac{\omega_d}{M}}\right)X\left(e^{j\omega T - k \frac{\omega_d}{M}}\right),$$

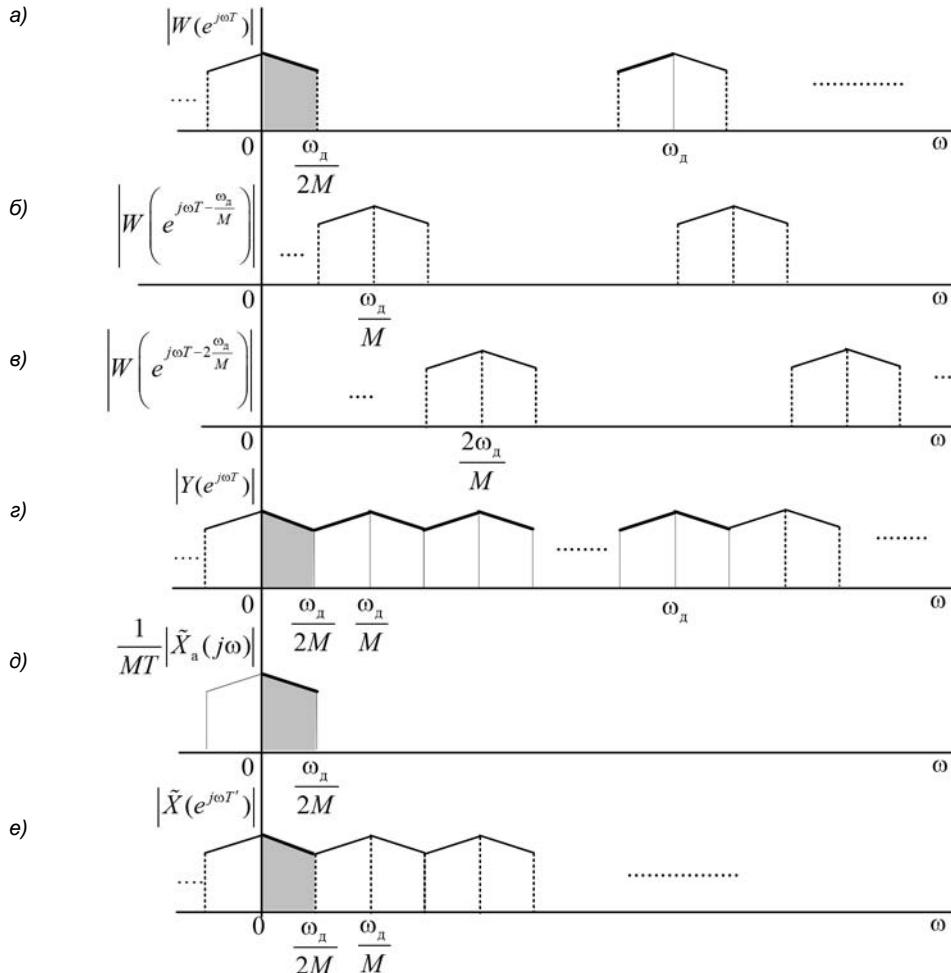


Рис. 21.9. Модули спектральных плотностей промежуточного сигнала (а—в); модуль спектральной плотности выходного сигнала (е); модули спектральной плотности аналогового сигнала (д) и дискретного сигнала, полученного в результате дискретизации аналогового сигнала (е)

а равенство (21.21) принимает вид:

$$Y(e^{j\omega T}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H\left(e^{j\omega T - k \frac{\omega_d}{M}}\right) X\left(e^{j\omega T - k \frac{\omega_d}{M}}\right).$$

Выразив частотную характеристику через ее модуль и аргумент, получим соотношение вход/выход системы однократной децимации в частотной области:

$$Y(e^{j\omega T}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} A\left(\omega - k \frac{\omega_d}{M}\right) e^{j\varphi\left(\omega - k \frac{\omega_d}{M}\right)} X\left(e^{j\omega T - k \frac{\omega_d}{M}}\right).$$

В основной полосе частот $\left[0; \frac{\omega_d}{2M}\right]$, при подстановке $k = 0$ и АЧХ $A(\omega)$ (21.20), имеем:

$$Y(e^{j\omega T}) = \frac{1}{M} X(e^{j\omega T}) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (21.22)$$

где (см. рис. 21.7, б, г):

$$X(e^{j\omega T}) = \begin{cases} W(e^{j\omega T}) & \text{в полосе пропускания } 0 \leq \omega \leq \omega_d / 2M; \\ 0 & \text{при других значениях } \omega. \end{cases}$$

Согласно (9.30), спектральная плотность $W(e^{j\omega T})$ связана с *финитной* спектральной плотностью $\tilde{X}_a(j\omega)$ аналогового сигнала соотношением (рис. 21.9, а, д):

$$W(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{X}_a[j(\omega + m\omega_d)],$$

и на интервале $\left[0; \frac{\omega_d}{2M}\right]$ при подстановке $m = 0$ справедливо равенство:

$$W(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \tilde{X}_a(j\omega).$$

С учетом этого, спектральную плотность $Y(e^{j\omega T})$ (21.22) в основной полосе частот $\left[0; \frac{\omega_d}{2M}\right]$ (рис. 21.9, г) можно представить в виде:

$$Y(e^{j\omega T}) = \frac{1}{MT} \tilde{X}_a(j\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (21.23)$$

Если бы дискретный сигнал был получен в результате непосредственной дискретизации с частотой $\omega'_d = \frac{\omega_d}{M}$ (периодом дискретизации $T' = MT$) аналогового сигнала $x_a(t)$ с *финитной* спектральной плотностью $\tilde{X}_a(j\omega)$, то связь между спектральной плотностью дискретного сигнала $\tilde{X}(e^{j\omega T'})$ и спектральной плотностью $\tilde{X}_a(j\omega)$ имела бы вид (рис. 21.9, д, е):

$$\tilde{X}(e^{j\omega T'}) = \frac{1}{MT} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{X}_a\left[j\left(\omega + m\frac{\omega_d}{M}\right)\right],$$

и в основной полосе частот $\left[0; \frac{\omega_d}{2M}\right]$ было справедливо равенство:

$$\tilde{X}(e^{j\omega T'}) = \frac{1}{MT} \tilde{X}_a(j\omega). \quad (21.24)$$

Сравнивая спектральные плотности $Y(e^{j\omega T})$ (21.23) и $\tilde{X}(e^{j\omega T'})$ (21.24), видим, что их модули *совпадают*, а аргументы *отличаются*: аргумент спектральной плотности $Y(e^{j\omega T})$ оказывается измененным в соответствии с ФЧХ фильтра.

В действительности АЧХ не является идеальной, поэтому не только аргументы, но и модули спектральных плотностей будут отличаться. Для исключения влияния фазовых искажений используют *КИХ-фильтр ФНЧ с линейной ФЧХ*.

Пример 21.2. На рис. 21.10 приведены результаты моделирования в MATLAB [42] системы однократной децимации с коэффициентом $M = 2$.

На рис. 21.10, *a* представлен *входной* сигнал в виде суммы двух дискретных гармоник (представлено 64 отсчета) с амплитудами $A_1 = 2$ и $A_2 = 4$, частотами $f_1 = 50$ Гц и $f_2 = 100$ Гц и частотой дискретизации $f_d = 800$ Гц, а на рис. 21.10, *б* — его амплитудный спектр, вычисленный с помощью ДПФ.

На рис. 21.10, *в* представлен *выходной* сигнал, а на рис. 21.10, *г* — его амплитудный спектр. Скорость поступления выходных отсчетов в 2 раза снизилась, что эквивалентно уменьшению в 2 раза частоты дискретизации. ◀

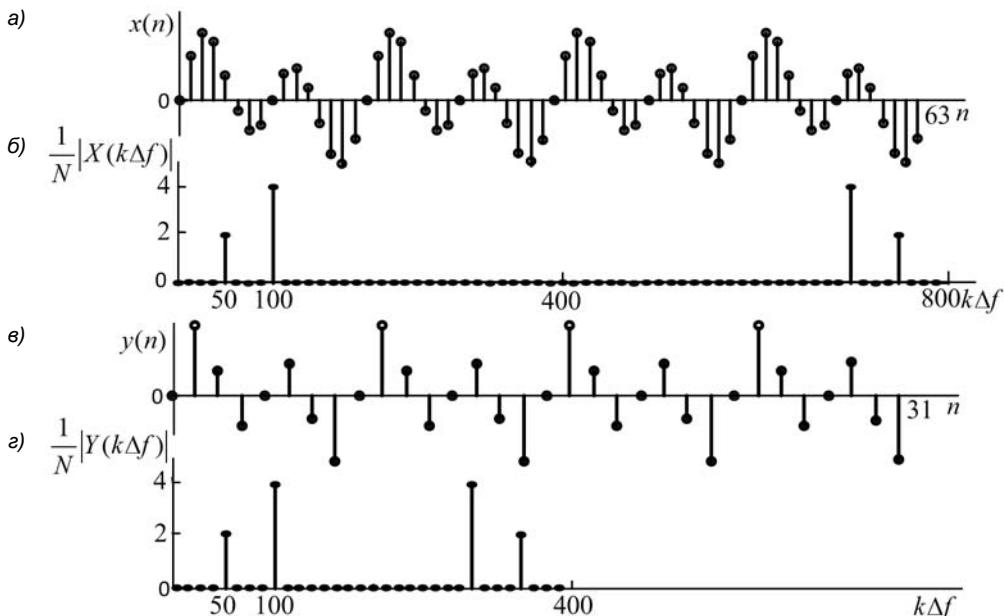


Рис. 21.10. Результаты моделирования системы однократной децимации с коэффициентом $M = 2$: входной сигнал (*а*) и его амплитудный спектр (*б*); выходной сигнал (*в*) и его амплитудный спектр (*г*)

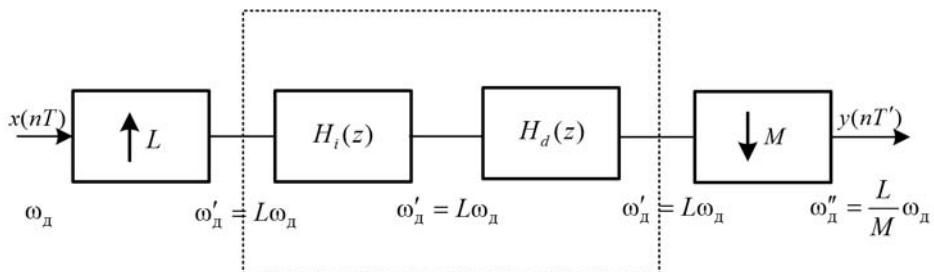
21.3. Система однократной передискретизации

Система однократной передискретизации представлена на рис. 21.11.

Повышение или понижение частоты дискретизации на коэффициент передискретизации в виде рациональной дроби L/M реализуется каскадным соединением систем интерполяции с коэффициентом L и децимации с коэффициентом M (рис. 21.11, а). В результате объединения двух каскадно включенных ФНЧ — блоков $H_i(z)$ и $H_d(z)$, работающих на одинаковой частоте дискретизации $L\omega_d$, переходят к системе однократной передискретизации с единственным ФНЧ (рис. 21.11, б). Его идеальная АЧХ, согласно (21.5) и (21.22), должна удовлетворять требованиям:

$$A(\omega) = \begin{cases} L & \text{в полосе пропускания } 0 \leq \omega \leq \min\{\omega_d/2; L\omega_d/2M\}; \\ 0 & \text{при других значениях } \omega. \end{cases}$$

а)



б)

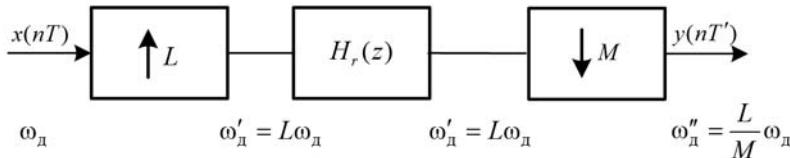


Рис. 21.11. Система однократной передискретизации с двумя ФНЧ (а) и одним ФНЧ (б)

21.4. Полифазные структуры многоскоростных систем

Полифазные структуры многоскоростных систем предназначены для повышения *быстродействия* обработки за счет распараллеливания вычислений и основаны на замещении одного сложного КИХ-фильтра ФНЧ, работающего на "высокой" частоте дискретизации, эквивалентной системой более простых КИХ-фильтров ФНЧ, работающих на "низкой" частоте дискретизации.

Фильтром-прототипом называют КИХ-фильтр ФНЧ, работающий на "высокой" частоте дискретизации, на основе которого формируется полифазная структура многоскоростной системы.

21.4.1. Полифазная структура системы однократной интерполяции

Рассмотрим, как эта идея реализована в полифазной структуре системы однократной интерполяции.

Запишем передаточную функцию $H(z)$ фильтра-прототипа — КИХ-фильтра ФНЧ длины N (см. рис. 21.1):

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_{N-1} z^{-(N-1)}. \quad (21.25)$$

Разобьем сумму (21.25) на $G = N/L$ (целое число) слагаемых, вынося за скобки общий множитель:

$$\begin{aligned} H(z) &= \left[h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_{L-1} z^{-(L-1)} \right] z^0 + \\ &+ \left[h_L + h_{L+1} z^{-1} + \dots + h_{2L-1} z^{-(L-1)} \right] z^{-L} + \dots \\ &+ \left[h_{(G-1)L} + h_{(G-1)L+1} z^{-1} + \dots + h_{GL-1} z^{-(L-1)} \right] z^{-(G-1)L}, \end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned} h_{GL-1} &= h_{N-1}; \\ z^{-(G-1)L} z^{-(L-1)} &= z^{-GL+L-L+1} = z^{-(GL-1)} = z^{-(N-1)}. \end{aligned}$$

Представим сгруппированные слагаемые в виде произведения *строки* матрицы размером $G \times L$ на одинаковый вектор-столбец длины L :

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{L-1} \\ h_L z^{-L} & h_{L+1} z^{-L} & \dots & h_{2L-1} z^{-L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{(G-1)L} z^{-(G-1)L} & h_{(G-1)L+1} z^{-(G-1)L} & \dots & h_{GL-1} z^{-(G-1)L} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z^0 \\ z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-(L-1)} \end{bmatrix}.$$

Столбцы матрицы соответствуют передаточным функциям

$$H_k(z^L) = \sum_{n=0}^{G-1} h_{Ln+k} z^{-Ln}, \quad k = 0, 1, \dots, (L-1), \quad (21.26)$$

что позволяет представить матрицу в виде вектора:

$$\begin{bmatrix} H_0(z^L) & H_1(z^L) & \dots & H_{L-1}(z^L) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z^0 \\ z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-(L-1)} \end{bmatrix},$$

и определить передаточную функцию $H(z)$ как произведение векторов (скаляр):

$$H(z) = \sum_{k=0}^{L-1} H_k(z^L) z^{-k}. \quad (21.27)$$

Данному представлению передаточной функции соответствует параллельная структура¹ с L ветвями, где каждая k -я ветвь содержит КИХ-фильтр длины G с передаточной функцией $H_k(z^L)$ (21.26) и линию задержки длины k (во избежание громоздкости ее отображают одним элементом задержки z^{-k}).

Представление передаточной функции фильтра-прототипа $H(z)$ (21.25) в виде (21.27) называют *полифазным*, соответствующую структуру — *полифазной*, ее ветви — *фазами*, а КИХ-фильтры — *полифазными фильтрами*.

Подставляя $H(z)$ (21.27) в (21.9), получаем полифазное представление z -изображения выходного сигнала полифазной структуры:

$$Y(z) = X(z^L)H(z) = \sum_{k=0}^{L-1} X(z^L)H_k(z^L)z^{-k} = \sum_{k=0}^{L-1} Y_k(z^L)z^{-k}. \quad (21.28)$$

Полифазная структура системы однократной интерполяции изображена на рис. 21.12. Полифазные фильтры работают на "низкой" частоте дискретизации *входного* сигнала. Экономия вычислительных ресурсов достигается за счет исключения из обработки ($L-1$) нулей промежуточного сигнала с "высокой" частотой дискретизации фильтра-прототипа (см. рис. 21.1), которые затем, *после* фильтрации, при переходе к "высокой" частоте дискретизации *выходного* сигнала, добавляются с помощью экспандеров.

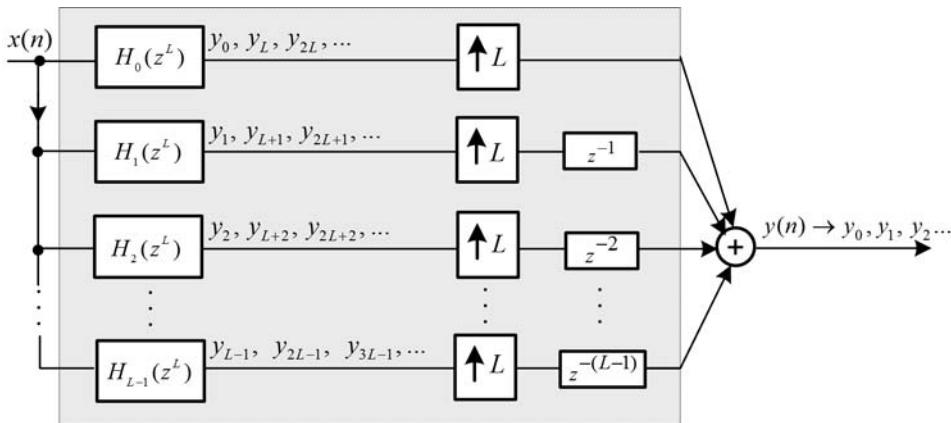


Рис. 21.12. Полифазная структура системы однократной интерполяции

Алгоритм однократной интерполяции, отображаемый полифазной структурой (см. рис. 21.12), включает в себя три этапа:

1. *Фильтрация на "низкой" частоте дискретизации входного сигнала.*

На входы фаз одновременно поступает сигнал $x(n)$ (рис. 21.13, а) с "низкой" частотой дискретизации (периодом дискретизации T). На выходах полифазных

¹ Аналогично рекурсивной ЛДС с передаточной функцией в виде суммы (6.15).

фильтров с передаточными функциями $H_k(z^L)$ (21.26) и импульсными характеристиками h_{Ln+k} формируются сигналы $y_k(n)$, $k = 0, 1, \dots, (L-1)$, в соответствии с разностным уравнением

$$y_k(n) = y(Ln + k) = \sum_{i=0}^{G-1} h_{Li+k} x(n-i), \quad (21.29)$$

представленные в строках матрицы:

$$\begin{bmatrix} y_0(n) = y_{Ln} \\ y_1(n) = y_{Ln+1} \\ \dots \\ y_{L-1}(n) = y_{Ln+(L-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 & y_L & y_{2L} & \dots \\ y_1 & y_{L+1} & y_{2L+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{L-1} & y_{2L-1} & y_{3L-1} & \dots \end{bmatrix}.$$

Определим значения первых трех отсчетов y_{Ln+k} (21.29) в строках матрицы справа (рис. 21.13, б):

$$\begin{bmatrix} y_0 & y_L & y_{2L} & \dots \\ y_1 & y_{L+1} & y_{2L+1} & \dots \\ y_2 & y_{L+2} & y_{2L+2} & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 x_0 & h_0 x_1 + h_L x_0 & h_0 x_2 + h_L x_1 + h_{2L} x_0 & \dots \\ h_1 x_0 & h_1 x_1 + h_{L+1} x_0 & h_1 x_2 + h_{L+1} x_1 + h_{2L+1} x_0 & \dots \\ h_2 x_0 & h_2 x_1 + h_{L+2} x_0 & h_2 x_2 + h_{L+2} x_1 + h_{2L+2} x_0 & \dots \end{bmatrix}.$$

Они совпадают со значениями (21.11), определенными непосредственно по формуле свертки (21.10).

2. Переход к "высокой" частоте дискретизации.

Переход к "высокой" частоте дискретизации (периоду дискретизации $T' = T/L$) реализуется экспандерами, которые формируют сигналы $\tilde{y}_k(n)$, $k = 0, 1, \dots, (L-1)$, путем добавления $(L-1)$ нулей между каждой парой отсчетов сигнала $y_k(n)$ (рис. 21.13, в):

$$\tilde{y}_k(n) = \begin{cases} y_k\left(\frac{n}{L}\right), & n = 0, L, 2L, \dots; \\ 0 & \text{при других } n. \end{cases}$$

3. Формирование выходного сигнала.

На выходы элементов задержки одновременно поступают сигналы $\tilde{y}_k(n-k)$, $k = 0, 1, \dots, (L-1)$, сдвинутые друг относительно друга на один отсчет (период дискретизации $T' = T/L$). В каждый момент дискретного времени только один из них содержит ненулевой отсчет (рис. 21.13, г), и его суммирование с остальными, нулевыми, отсчетами фаз формирует отсчет выходного сигнала полифазной структуры (рис. 21.13, д):

$$y(n) = \sum_{k=0}^{L-1} \tilde{y}_k(n-k). \quad (21.30)$$

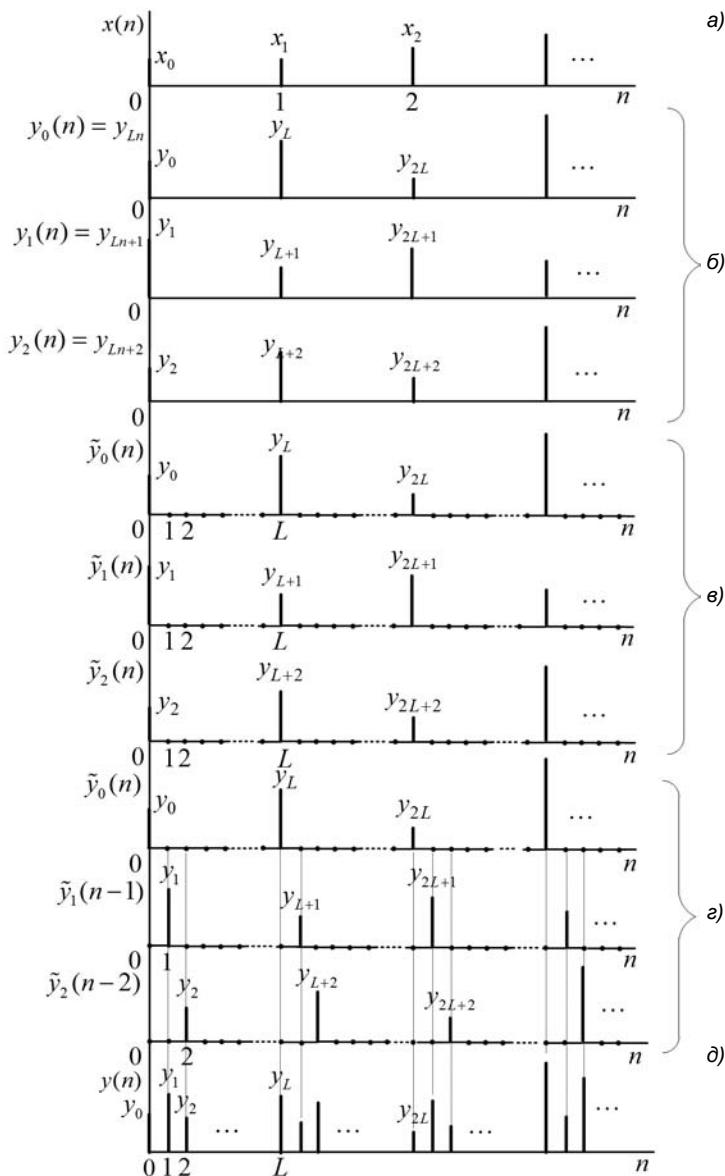


Рис. 21.13. Иллюстрация процедуры интерполяции для первых трех фаз полифазной структуры: входной сигнал (а); сигналы на выходах полифазных фильтров (б); экспандеров (в); линий задержки (г) и выходной сигнал (д)

Z -изображение сигнала $\tilde{y}_k(n)$ равно

$$\tilde{Y}_k(z) = \sum_{n=0, L, 2L, \dots}^{\infty} y_k\left(\frac{n}{L}\right) z^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} y_k(m) z^{-Lm} = Y_k(z^L),$$

откуда, на основании свойства линейности и теоремы о задержке Z -преобразования, имеем полифазное представление z -изображения выходного сигнала $y(n)$ (21.28):

$$Y(z) = Z\left\{\sum_{k=0}^{L-1} \tilde{y}_k(n-k)\right\} = \sum_{k=0}^{L-1} \tilde{Y}_k(z) z^{-k} = \sum_{k=0}^{L-1} Y_k(z^L) z^{-k}.$$

Пример 21.3. В полифазной структуре системы однократной интерполяции с коэффициентом $L=3$ фильтр-прототип длины $N=9$ заменяется L полифазными фильтрами длины $G=N/L=3$.

Записать передаточную функцию фильтра-прототипа и ее полифазное представление. Определить передаточные функции, импульсные характеристики и выходные сигналы полифазных фильтров.

Решение. Передаточная функция фильтра-прототипа (21.25) равна

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} + h_4 z^{-4} + h_5 z^{-5} + h_6 z^{-6} + h_7 z^{-7} + h_8 z^{-8}.$$

Ее полифазное представление (21.27) имеет вид:

$$H(z) = \sum_{k=0}^2 H_k(z^3) z^{-k}.$$

Передаточные функции полифазных фильтров (21.26)

$$H_k(z^3) = \sum_{n=0}^2 h_{3n+k} z^{-3n}, \quad k = 0, 1, 2,$$

равны:

$$H_0(z^3) = h_0 + h_3 z^{-3} + h_6 z^{-6};$$

$$H_1(z^3) = h_1 + h_4 z^{-3} + h_7 z^{-6};$$

$$H_2(z^3) = h_2 + h_5 z^{-3} + h_8 z^{-6}.$$

Импульсные характеристики h_{3n+k} представлены в строках матрицы:

$$\begin{bmatrix} h_{3n} \\ h_{3n+1} \\ h_{3n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & h_3 & h_6 \\ h_1 & h_4 & h_7 \\ h_2 & h_5 & h_8 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с разностным уравнением (21.29):

$$y_k(n) = y(3n+k) = \sum_{i=0}^2 h_{3i+k} x(n-i), \quad k = 0, 1, 2,$$

выходные сигналы полифазных фильтров равны:

$$y_0(n) = y(3n) = h_0x(n) + h_3x(n-1) + h_6x(n-2);$$

$$y_1(n) = y(3n+1) = h_1x(n) + h_4x(n-1) + h_7x(n-2);$$

$$y_2(n) = y(3n+2) = h_2x(n) + h_5x(n-1) + h_8x(n-2). \blacktriangleleft$$

Эквивалентный вариант полифазной структуры системы однократной интерполяции и ее коммутационная модель, в которой фазы переключаются в направлении против часовой стрелки с частотой $f'_d = Lf_d$, приведены на рис. 21.14.

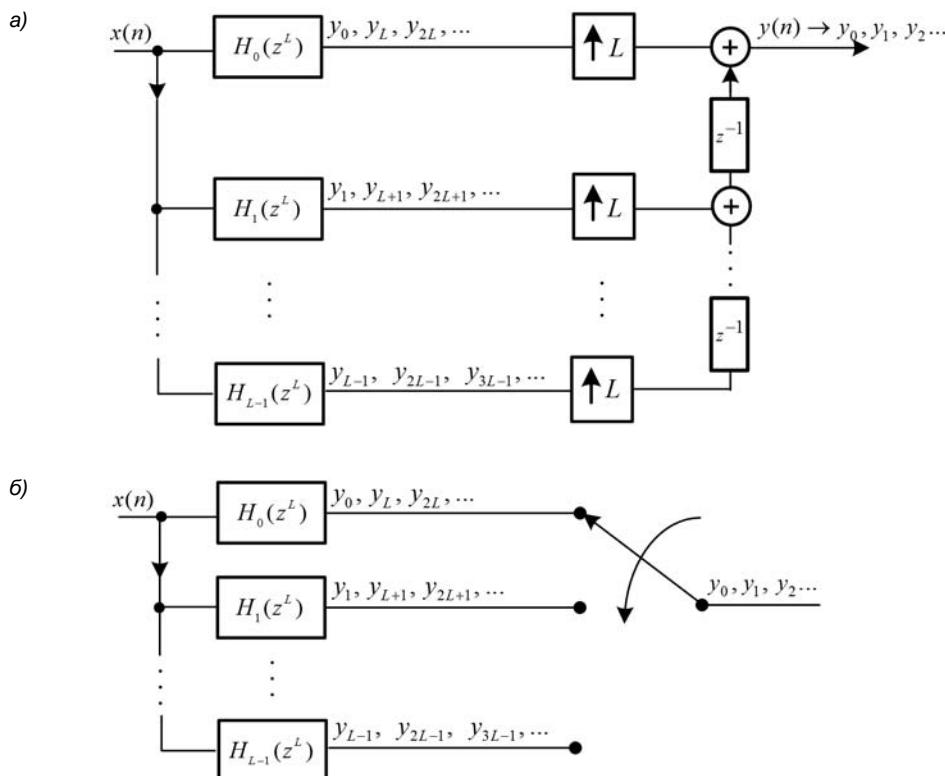


Рис. 21.14. Эквивалентный вариант (а) и коммутационная модель (б) полифазной структуры системы однократной интерполяции

21.4.2. Полифазная структура системы однократной децимации

При равенстве $M=L$ фазы (ветви) полифазных структур систем однократной децимации и интерполяции являются *дуальными*. В соответствии с принципом *дuality*, меняя местами вход с выходом и направления стрелок в фазах полифазной структуры интерполяции (на рис. 21.12 они выделены цветом), получаем

полифазную структуру системы однократной децимации (рис. 21.15). В ней полифазное представление имеет z -изображение входного сигнала (сравните с (21.28)):

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M-1} X_k(z^M) z^{-k}.$$

Полифазные фильтры работают на "низкой" частоте дискретизации *выходного* сигнала. Экономия вычислительных ресурсов достигается за счет исключения из обработки ($M - 1$) "лишних" отсчетов входного сигнала с "высокой" частотой дискретизации фильтра-прототипа (см. рис. 21.6), которые предварительно, *перед* фильтрацией, при переходе к "низкой" частоте дискретизации *выходного* сигнала отбрасываются с помощью компрессоров.

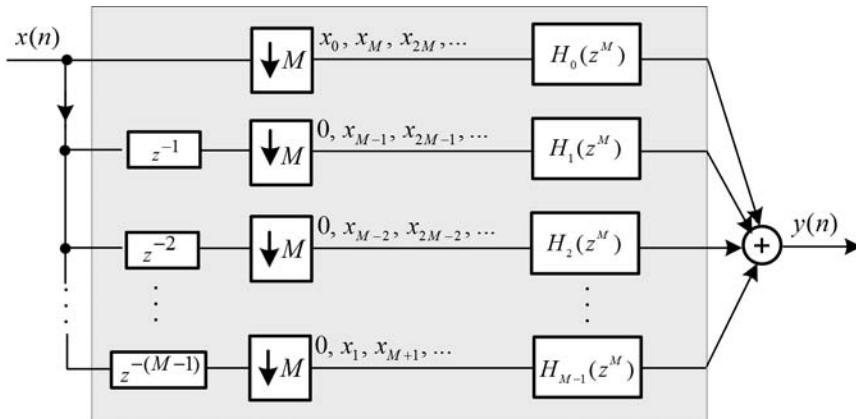


Рис. 21.15. Полифазная структура системы однократной децимации

Алгоритм однократной децимации, отображаемый полифазной структурой (см. рис. 21.15), включает в себя три этапа:

1. Переход к "низкой" частоте дискретизации.

На входы фаз поступают сигналы $x(n-k)$, $k = 0, 1, \dots, (M-1)$, с "высокой" частотой дискретизации (периодом дискретизации T).

На рис. 21.16, а представлены сигналы $x(n-k)$, $k = 0, 1, 2$.

Переход к "низкой" частоте дискретизации (периоду дискретизации $T' = MT$) реализуется *компрессорами* путем *прореживания* входных сигналов фаз. На выходах компрессоров формируются *прореженные* сигналы $x_k(n)$:

$$x_k(n) = x(Mn - k), \quad k = 0, 1, \dots, (M-1),$$

представленные в строках матрицы (рис. 21.16, б):

$$\begin{bmatrix} x_0(n) = x_{Mn} \\ x_1(n) = x_{Mn-1} \\ \dots \\ x_{M-1}(n) = x_{Mn-(M-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & x_M & x_{2M} & \dots \\ 0 & x_{M-1} & x_{2M-1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x_1 & x_{M+1} & \dots \end{bmatrix}. \quad (21.31)$$

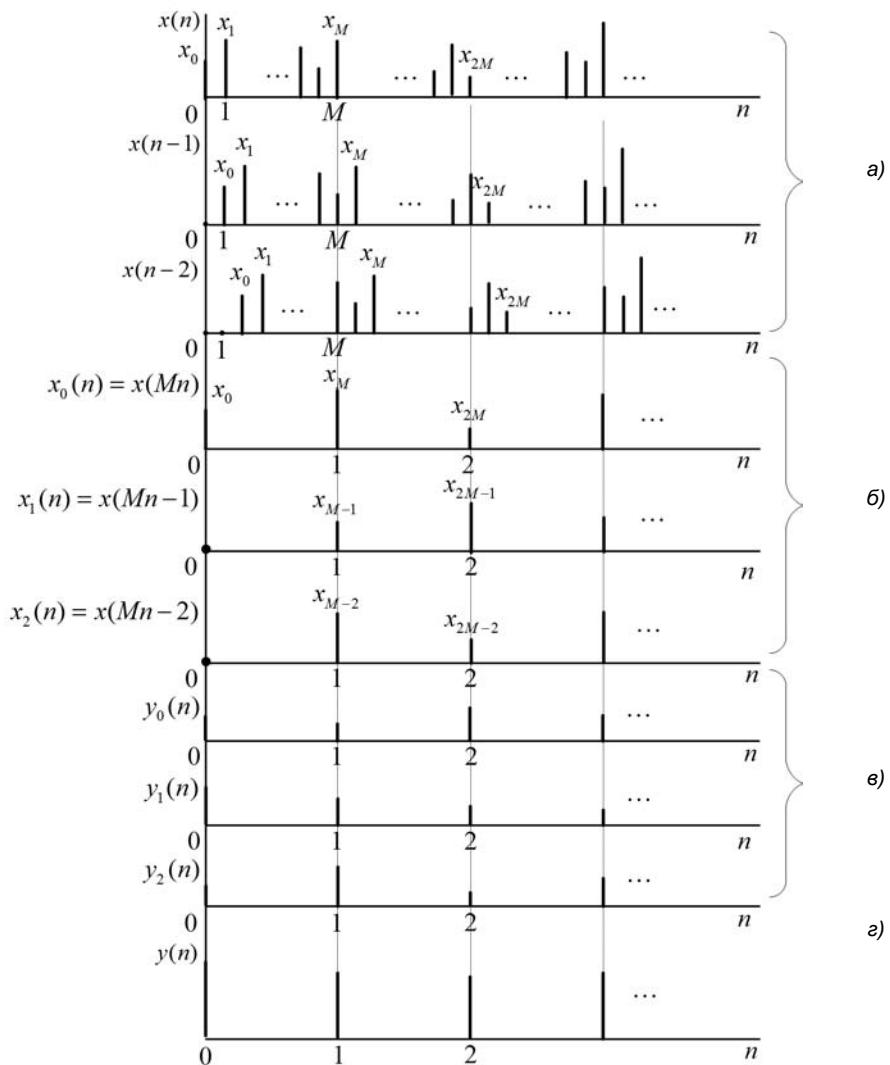


Рис. 21.16. Иллюстрация процедуры децимации для первых трех фаз полифазной структуры: входной (а) и прореженный (б) сигналы, выходные сигналы полифазных фильтров (в) и полифазной структуры (г)

2. Фильтрация на "низкой" частоте дискретизации.

Полифазные фильтры работают на "низкой" частоте дискретизации выходного сигнала и имеют передаточные функции, подобные (21.26), где $G = N/M$ (целое число):

$$H_k(z^M) = \sum_{n=0}^{G-1} h_{Mn+k} z^{-Mn}, \quad k = 0, 1, \dots, (M-1), \quad (21.32)$$

и полифазное представление передаточной функции фильтра-прототипа, подобное (21.27):

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} H_k(z^M) z^{-k}.$$

На *входы* полифазных фильтров с передаточными функциями $H_k(z^M)$ и импульсными характеристиками h_{Mn+k} одновременно поступают сигналы $x_k(n)$, а на *выходах* формируются сигналы $y_k(n)$, $k = 0, 1, \dots, (M-1)$, в соответствии с разностным уравнением (рис. 21.16, б)

$$y_k(n) = \sum_{i=0}^{G-1} h_{Mi+k} x[M(n-i)-k]. \quad (21.33)$$

3. Формирование выходного сигнала.

Выходной сигнал полифазной структуры $y(n)$ формируется на выходе сумматора:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} y_k(n).$$

Представим слагаемые сигналов $y_k(n)$ (21.33) в виде строк матрицы:

$$\begin{bmatrix} y_0(n) \\ y_1(n) \\ \dots \\ y_{M-1}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 x(Mn) & h_M x(Mn-M) & \dots & h_{(G-1)M} x[Mn-(G-1)M] \\ h_1 x(Mn-1) & h_{M+1} x(Mn-M-1) & \dots & h_{(G-1)M+1} x[Mn-(G-1)M-1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{M-1} x[Mn-(M-1)] & h_{2M-1} x[Mn-(2M-1)] & \dots & h_{GM-1} x[Mn-(GM-1)] \end{bmatrix}$$

и запишем выходной сигнал $y(n)$, суммируя элементы *столбцов* матрицы (рис. 21.16, г):

$$y(n) = \sum_{k=0}^{GM-1} h_k x(Mn-k), \quad (21.34)$$

где $GM = N$ — длина фильтра-прототипа.

Определим значения первых трех отсчетов $y(n)$ (21.34), $n = 0, 1, 2$:

$$y_0 = h_0 x_0;$$

$$y_1 = h_0 x_M + h_1 x_{M-1} + \dots + h_M x_0;$$

$$y_2 = [h_0 x_{2M} + h_1 x_{2M-1} + \dots + h_{M-1} x_{M+1}] + [h_M x_M + h_{M+1} x_{M-1} + \dots + h_{2M} x_0].$$

Они совпадают со значениями (21.19), определенными непосредственно по формуле свертки (21.18).

Пример 21.4. В полифазной структуре системы однократной децимации с коэффициентом $M = 3$ фильтр-прототип длины $N = 9$ заменяется M полифазными фильтрами длины $G = N/M = 3$.

Записать входные и выходные сигналы полифазных фильтров и выходной сигнал полифазной структуры системы однократной децимации.

Решение. Входные сигналы полифазных фильтров (21.31) представлены в строках матрицы:

$$\begin{bmatrix} x_0(n) = x_{3n} \\ x_1(n) = x_{3n-1} \\ x_2(n) = x_{3n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & x_3 & x_6 & \dots \\ 0 & x_2 & x_5 & \dots \\ 0 & x_1 & x_4 & \dots \end{bmatrix}.$$

В соответствии с разностным уравнением (21.33):

$$y_k(n) = \sum_{i=0}^2 h_{3i+k} x[3(n-i)-k], \quad k = 0, 1, 2,$$

выходные сигналы полифазных фильтров равны:

$$\begin{aligned} y_0(n) &= h_0 x(3n) + h_3 x(3n-3) + h_6 x(3n-6); \\ y_1(n) &= h_1 x(3n-1) + h_4 x(3n-4) + h_7 x(3n-7); \\ y_2(n) &= h_2 x(3n-2) + h_5 x(3n-4) + h_8 x(3n-8). \end{aligned}$$

На основании (21.34):

$$y(n) = \sum_{k=0}^8 h_k x(3n-k)$$

получаем выходной сигнал полифазной структуры системы однократной децимации:

$$\begin{aligned} y(n) &= h_0 x(3n) + h_1 x(3n-1) + h_2 x(3n-2) + \\ &+ h_3 x(3n-3) + h_4 x(3n-4) + h_5 x(3n-4) + \\ &+ h_6 x(3n-6) + h_7 x(3n-7) + h_8 x(3n-8). \end{aligned} \blacktriangleleft$$

Эквивалентный вариант полифазной структуры системы однократной децимации и ее коммутационная модель, в которой фазы переключаются в направлении *по часовой стрелке* с частотой $f'_d = f_d/M$, приведены на рис. 21.17.

Полифазная структура *системы однократной передискретизации* реализуется каскадным соединением полифазных структур однократной системы интерполяции и децимации и их объединением.

В разд. П1.5 приложения 1 рассматриваются средства GUI FDAool для моделирования полифазных структур многоскоростных систем с выбором в качестве фильтра-прототипа КИХ-фильтра ФНЧ, синтезируемого при заданных требованиях к АЧХ, или фильтра Найквиста, синтезируемого автоматически.

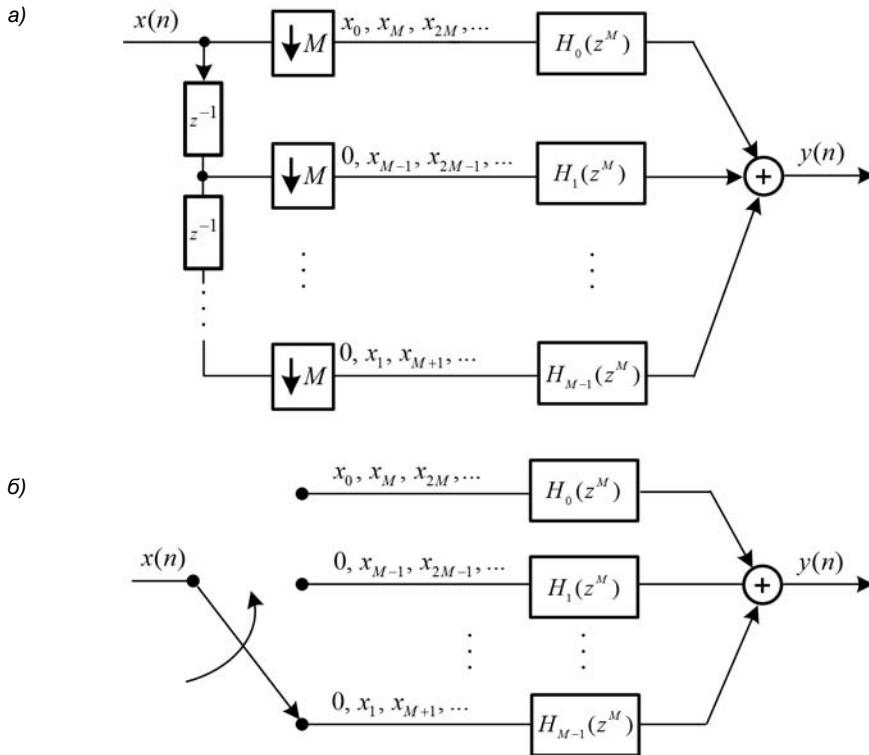


Рис. 21.17. Эквивалентный вариант (а) и коммутационная модель (б) полифазной структуры системы однократной децимации

21.4.3. Описание полифазных структур в MATLAB

В MATLAB полифазная структура, соответственно системы однократной интерполяции, децимации и передискретизации, описывается в виде объекта `mfilt` (от англ. *Multirate filter object*):

```
Hi = mfilt.firinterp(L,Num)
Hd = mfilt.firdecim(M,Num)
Hr = mfilt.firsfc(L,M,Num)
```

где L , M — коэффициенты интерполяции L и децимации M ; Num — коэффициенты передаточной функции фильтра-прототипа.

Представленным объектам `mfilt` соответствуют следующие полифазные структуры многоскоростных систем с полифазными фильтрами *прямой* структуры:

- Direct-Form FIR Polyphase Interpolator — полифазная структура системы однократной интерполяции с полифазными фильтрами, работающими на "низкой" частоте дискретизации *входного* сигнала;
- Direct-Form FIR Polyphase Decimator — полифазная структура системы однократной децимации с полифазными фильтрами, работающими на "низкой" частоте дискретизации *выходного* сигнала;

□ Direct-Form FIR Polyphase Sample-Rate Converter — полифазная структура системы однократной передискретизации с полифазными фильтрами, частота дискретизации которых зависит от соотношения L и M , а именно:

- при $L > M$ они работают на "низкой" частоте дискретизации *входного* сигнала;
- при $L < M$ они работают на "низкой" частоте дискретизации *выходного* сигнала.

Свойства объекта `mfilt` выводятся по его имени.

При известной полифазной структуре многоскоростной системы вычисление ее реакции выполняется с помощью функции:

`y = filter(H, x)`

где `H` — имя объекта `mfilt`; `x, y` — векторы отсчетов входного и выходного сигналов.

21.5. Банки фильтров

Банком фильтров называют систему, предназначенную для преобразования одного сигнала в несколько субполосных сигналов или наоборот.

Соответственно, различают две разновидности банка фильтров:

- *банк фильтров анализа* — для разложения исходного сигнала на субполосные сигналы;
- *банк фильтров синтеза* — для объединения субполосных сигналов в один сигнал.

Под *субполосными сигналами* понимают сигналы, полосы частот которых занимают части (субполосы) полосы частот исходного сигнала, обычно неперекрывающиеся, равномерно сдвинутые друг относительно друга.

Исходный сигнал $x(nT)$ имеет *периодическую* спектральную плотность $X(e^{j\omega T})$

с периодом $\omega_d = \frac{2\pi}{T}$. *Разложение* исходного сигнала на M субполосных сигналов выполняет *банк фильтров анализа* с частотными характеристиками (ЧХ), сдвинутыми *вправо* на частоту $k \frac{2\pi}{MT}$ относительно ЧХ *фильтра-прототипа* $H_0(e^{j\omega T})$

с полосой $\left[0; \frac{\pi}{MT}\right]$ в основной полосе частот $\left[0; \frac{\omega_d}{2}\right]$ (рис. 21.18):

$$H_0 \left[e^{j\left(\omega T - k \frac{2\pi}{MT}\right)} \right], \quad k = 0, 1, \dots, (M-1). \quad (21.35)$$

Фильтр-прототип является фильтром *нижних* частот (ФНЧ), а остальные фильтры анализа — *полосовыми* фильтрами (ПФ).

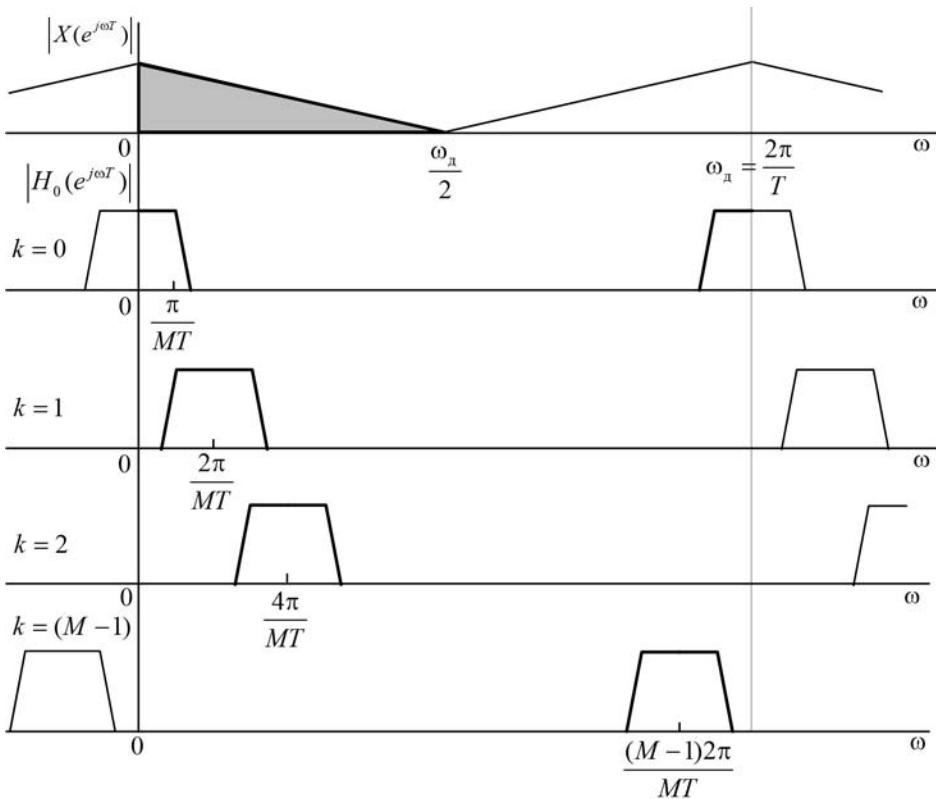


Рис. 21.18. Спектральная плотность исходного сигнала и АЧХ банка фильтров анализа

Субполосные сигналы являются более узкополосными по сравнению с исходным сигналом, поэтому их *частоту дискретизации* можно понизить: скорость поступления отсчетов субполосных сигналов уменьшится, а время цикла (период дискретизации) для их последующей многоканальной обработки увеличится.

Таким образом, *банк фильтров анализа* преобразует сигнал с "высокой" частотой дискретизации в субполосные сигналы с "низкой" частотой дискретизации, а *банк фильтров синтеза* выполняет обратное преобразование, т. е. *банки фильтров* являются *многоскоростными системами*. Для распараллеливания операций при обработке субполосных сигналов банки фильтров создают на основе *полифазных структур* многоскоростных систем.

Еще одна идея, которой воспользовались при создании банков фильтров, — применение ДПФ или ОДПФ для одновременного преобразования группы сигналов. Отсюда называние — *банки ДПФ-фильтров*¹.

¹ В отечественной литературе англоязычному термину "DFT filter bank" соответствуют различные эквиваленты: "банк фильтров на основе ДПФ", "банк ДПФ-модулированных фильтров", "банк DFT фильтров".

Банк ДПФ-фильтров анализа представлен на рис. 21.19. Он создан на основе полифазной структуры системы однократной децимации (см. рис. 21.17, а) и выполняет разложение исходного сигнала $x(n)$ с "высокой" частотой дискретизации на M субполосных сигналов $y_k(n)$, $k = 0, 1, \dots, (M-1)$, с "низкой" частотой дискретизации.

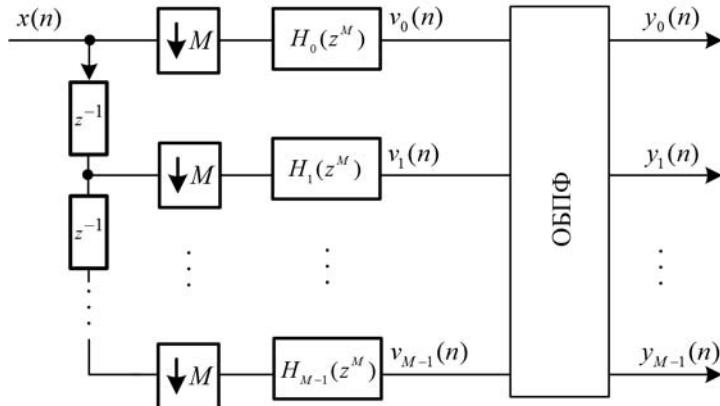


Рис. 21.19. Банк ДПФ-фильтров анализа

Передаточные функции полифазных фильтров имеют вид (21.32):

$$H_k(z^M) = \sum_{n=0}^{G-1} h_{Mn+k} z^{-Mn}, \quad k = 0, 1, \dots, (M-1).$$

Подставляя $z = e^{j\omega T}$, получаем частотные характеристики полифазных фильтров:

$$H_k(e^{jM\omega T}) = \sum_{n=0}^{G-1} h_{Mn+k} e^{-jM\omega nT}, \quad k = 0, 1, \dots, (M-1), \quad (21.36)$$

где h_{Mn+k} , $k = 0, 1, \dots, (M-1)$, — их импульсные характеристики.

Согласно (9.16), сдвигу частотной характеристики (21.36) вправо в (21.35) соответствует умножение импульсной характеристики на комплексную экспоненту $e^{j\frac{2\pi}{MT}knT} = e^{j\frac{2\pi}{M}kn} = W_M^{-nk}$, где W_M^{-nk} — поворачивающий множитель в ОДПФ (10.24).

Следовательно, в банке фильтров анализа импульсные характеристики фильтров должны быть равными

$$h_{Mn+k} W_M^{-nk}, \quad k = 0, 1, \dots, (M-1). \quad (21.37)$$

На выходах полифазных фильтров с импульсными характеристиками h_{Mn+k} формируются сигналы $v_k(n)$, $k = 0, 1, \dots, (M-1)$, в соответствии с разностным уравнением (21.33):

$$v_k(n) = \sum_{i=0}^{G-1} h_{Mi+k} x[M(n-i) - k],$$

а на выходах банка фильтров анализа с импульсными характеристиками фильтров (21.37) должны формироваться субполосные сигналы $y_k(n)$, $k = 0, 1, \dots, (M-1)$, в соответствии с разностным уравнением

$$y_k(n) = \sum_{i=0}^{G-1} h_{Mi+k} W_M^{-nk} x[M(n-i)-k] = W_M^{-nk} \sum_{i=0}^{G-1} h_{Mi+k} x[M(n-i)-k],$$

т. е.

$$y_k(n) = v_k(n) W_M^{-nk}, \quad k = 0, 1, \dots, (M-1).$$

Матричная запись этого уравнения для вычисления M -точечных субполосных сигналов, $n = 0, 1, \dots, (M-1)$, имеет вид:

$$\begin{bmatrix} y_0(0) & \dots & y_0(M-1) \\ y_1(0) & \dots & y_1(M-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_k(0) & \dots & y_k(M-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{M-1}(0) & \dots & y_{M-1}(M-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0(0) & \dots & v_0(M-1) \\ v_1(0) & \dots & v_1(M-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ v_k(0) & \dots & v_k(M-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{M-1}(0) & \dots & v_{M-1}(M-1) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_M^{-0\cdot0} & \dots & W_M^{-(M-1)\cdot0} \\ W_M^{-0\cdot1} & \dots & W_M^{-(M-1)\cdot1} \\ \dots & \dots & \dots \\ W_M^{-0\cdot k} & \dots & W_M^{-(M-1)\cdot k} \\ \dots & \dots & \dots \\ W_M^{-0\cdot(M-1)} & \dots & W_M^{-(M-1)\cdot(M-1)} \end{bmatrix}.$$

M-точечный субполосный сигнал $y_k(n)$ — k -я строка матрицы в левой части уравнения — равен сумме локальных произведений элементов k -й строки и k -го столбца матриц в правой части уравнения:

$$y_k(n) = \sum_{k=0}^{M-1} v_k(n) W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, (M-1),$$

что формально, с вычислительной точки зрения, соответствует M -точечному ОДПФ (10.24).

Решением матричного уравнения станет одновременное вычисление M -точечных субполосных сигналов $y_k(n)$, $k = 0, 1, \dots, (M-1)$, на основе матрицы M -точечного ОДПФ.

При $n = 0, 1, \dots, M$ -точечные субполосные сигналы вычисляют пофрагментно:

$$y_k(n+pM) = \sum_{k=0}^{M-1} v_k(n+pM) W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, (M-1), \quad p = 0, 1, \dots,$$

где p — номер фрагмента, в результате решения аналогичных матричных уравнений на основе матрицы M -точечного ОДПФ. Для быстрого вычисления ОДПФ применяют алгоритм ОБПФ (см. блок на рис. 21.19).

Банк ДПФ-фильтров синтеза представлен на рис. 21.20. Он создан на основе полифазной структуры системы однократной интерполяции (см. рис. 21.14, а) и выполняет объединение M субполосных сигналов $x_k(n)$, $k = 0, 1, \dots, M-1$, с "низкой" частотой дискретизации в один сигнал $y(n)$ с "высокой" частотой дискретизации.

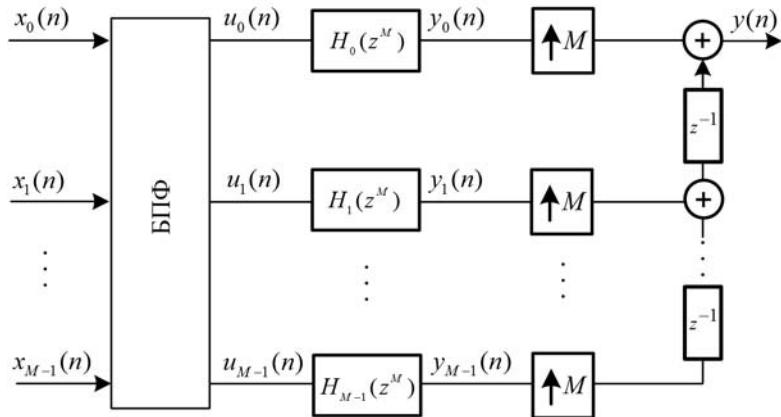


Рис. 21.20. Банк ДПФ-фильтров синтеза

Субполосные сигналы объединяются *снизу вверх* (см. стрелку в линии задержки на рис. 21.20), следовательно, частотные характеристики банка фильтров *синтеза* должны соответствовать частотным характеристикам банка фильтров *анализа* (см. рис. 21.18), рассматриваемым *снизу вверх*:

$$H_0 \left[e^{j\left(\omega T - k \frac{2\pi}{MT}\right)} \right], \quad k = (M-1), (M-2), \dots, 0,$$

которые, в силу их периодичности с периодом $\omega_d = \frac{2\pi}{T}$, тождественны частотным характеристикам

$$H_0 \left[e^{j\left(\omega T + k \frac{2\pi}{MT}\right)} \right], \quad k = 0, 1, \dots, (M-1). \quad (21.38)$$

Согласно (9.17), сдвигу частотной характеристики *влево* в (21.38) соответствует умножение импульсной характеристики на комплексную экспоненту $e^{-j\frac{2\pi}{MT}knT} = e^{-j\frac{2\pi}{M}kn} = W_M^{nk}$, где W_M^{nk} — поворачивающий множитель в ДПФ (10.23). Следовательно, в банке фильтров синтеза импульсные характеристики фильтров должны быть равными

$$h_{Mn+k} W_M^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, (M-1). \quad (21.39)$$

На выходах полифазных фильтров с импульсными характеристиками h_{Mn+k} формируются сигналы $y_k(n)$, $k = 0, 1, \dots, (M-1)$, в соответствии с разностным уравнением (21.29):

$$y_k(n) = \sum_{i=0}^{G-1} h_{Mi+k} u_k(n-i).$$

Поворачивающий множитель W_M^{nk} в (21.39) учитывается во входных субполосных сигналах:

$$u_k(n) = x_k(n)W_M^{nk},$$

что эквивалентно их обработке фильтрами с импульсными характеристиками (21.39) в соответствии с разностным уравнением

$$y_k(n) = \sum_{i=0}^{G-1} h_{Mi+k} \left[x_k(n-i)W_M^{nk} \right] = \sum_{i=0}^{G-1} h_{Mi+k} W_M^{nk} x_k(n-i).$$

Матричная запись уравнения для вычисления M -точечных сигналов $u_k(n)$, $n = 0, 1, \dots, (M-1)$, имеет вид:

$$\begin{bmatrix} u_0(0) & \dots & u_0(M-1) \\ u_1(0) & \dots & u_1(M-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_k(0) & \dots & u_k(M-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{M-1}(0) & \dots & u_{M-1}(M-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0(0) & \dots & x_0(M-1) \\ x_1(0) & \dots & x_1(M-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_k(0) & \dots & x_k(M-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{M-1}(0) & \dots & x_{M-1}(M-1) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_M^{0-0} & \dots & W_M^{(M-1)-0} \\ W_M^{0-1} & \dots & W_M^{(M-1)-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ W_M^{0-k} & \dots & W_M^{(M-1)-k} \\ \dots & \dots & \dots \\ W_M^{0-(M-1)} & \dots & W_M^{(M-1)-(M-1)} \end{bmatrix}.$$

M-точечный сигнал $u_k(n)$ — k -я строка матрицы в левой части уравнения — равен сумме локальных произведений элементов k -й строки и k -го столбца матриц в правой части уравнения:

$$u_k(n) = \sum_{k=0}^{M-1} x_k(n)W_N^{nk}, \quad n = 0, 1, \dots, (M-1),$$

что формально, с вычислительной точки зрения, соответствует M -точечному ДПФ (10.23).

При $n = 0, 1, \dots, M$ -точечные сигналы $u_k(n)$ вычисляют пофрагментно:

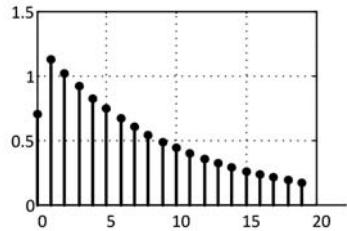
$$u_k(n+pM) = \sum_{k=0}^{M-1} x_k(n+pM)W_N^{nk}, \quad n = 0, 1, \dots, (M-1), \quad p = 0, 1, \dots,$$

где p — номер фрагмента, в результате решения аналогичных матричных уравнений на основе матрицы M -точечного ДПФ. Для быстрого вычисления ДПФ применяют алгоритм БПФ (см. блок на рис. 21.20).

Переход к "высокой" частоте дискретизации и объединение субполосных сигналов $y_k(n)$, $k = 0, 1, \dots, (M-1)$, в один сигнал $y(n)$ выполняется так же, как в полифазной структуре системы однократной интерполяции (третий этап алгоритма однократной интерполяции в разд. 21.4.2).

Для повышения вычислительной эффективности в банках фильтров анализа и синтеза используют строго дополнительный набор ФНЧ (фильтра Найквиста) и ПФ (см. разд. 18.4).

ГЛАВА 22



Адаптивные фильтры

До сих пор рассматривались задачи цифровой обработки сигналов с применением цифровых фильтров (ЦФ) — линейных дискретных систем¹ с параметрами, *неизменными во времени*.

Для формирования требуемого *выходного* сигнала задавались требования к АЧХ и тем или иным методом рассчитывались параметры фильтра (коэффициенты передаточной функции) *до* обработки *входного* сигнала.

Однако во многих случаях ставится задача формирования требуемого *выходного* сигнала при заранее не определенных (не формализуемых) требованиях к характеристикам фильтра.

В условиях, когда *входной* сигнал является случайным процессом с заранее неизвестной статистической моделью², параметры фильтра приходится рассчитывать *в процессе* его обработки с тем, чтобы обеспечить максимальную близость (по заданному критерию) выходного сигнала к требуемому сигналу.

Для решения подобных задач применяют адаптивные фильтры.

22.1. Структурная схема адаптивного фильтра

Адаптивным фильтром (АФ) называют систему, параметры которой подстраиваются (адаптируются) в соответствии с требованиями к выходному сигналу при заранее неизвестных статистических характеристиках входного сигнала.

На практике широкое распространение получили адаптивные фильтры, реализованные на базе КИХ-фильтра, которые далее будут рассматриваться по умолчанию.

Структурная схема адаптивного фильтра представлена на рис. 22.1.

Адаптивный фильтр включает в себя:

- КИХ-фильтр;
- алгоритм адаптации.

¹ Без учета эффектов квантования, влияние которых исследуется отдельно.

² Стационарность/нестационарность, статистические характеристики.

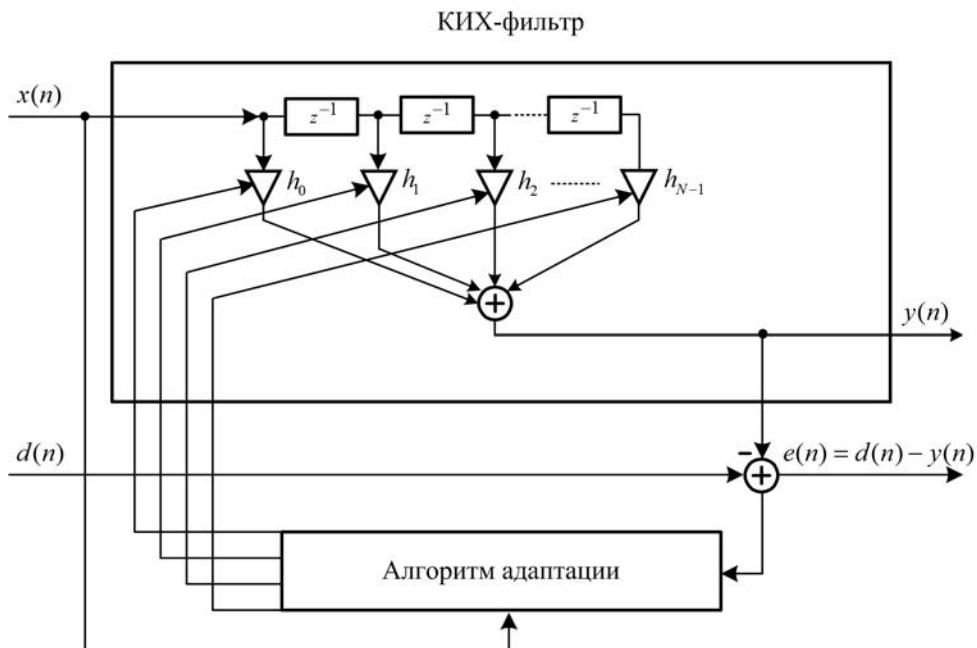


Рис. 22.1. Структурная схема адаптивного фильтра

Параметрами АФ¹ называют коэффициенты КИХ-фильтра, подстраиваемые с помощью алгоритма адаптации.

На вход АФ одновременно поступают два сигнала:

- входной сигнал* $x(n)$ — заранее неизвестный;
- образцовый сигнал* $d(n)$ — заранее известный.

Пока мы не ставим вопрос о получении образцового сигнала, а лишь констатируем его доступность в ряде задач, решаемых средствами адаптивной фильтрации.

Сигнал $x(n)$ подается одновременно на вход КИХ-фильтра и алгоритма адаптации.

На выходе АФ формируются два сигнала.

- Выходной сигнал* $y(n)$.

Согласно разностному уравнению (РУ), выходной сигнал КИХ-фильтра равен линейной комбинации отсчетов входного сигнала:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i x(n-i), \quad (22.1)$$

где h_i , $i = 0, 1, \dots, (N-1)$, — коэффициенты КИХ-фильтра, по определению совпадающие с отсчетами его импульсной характеристики $h(n)$, $n = 0, 1, \dots, (N-1)$.

¹ Их также называют весовыми коэффициентами.

□ Сигнал ошибки $e(n)$ — разность между образцовым и выходным сигналами:

$$e(n) = d(n) - y(n). \quad (22.2)$$

Подставляя (22.1), получим

$$e(n) = d(n) - \sum_{i=0}^{N-1} h_i x(n-i). \quad (22.3)$$

Адаптивный фильтр, представленный на рис. 22.1, называют "линейным адаптивным фильтром с обратной связью". Поясним смысл данных определений.

Под линейностью АФ понимают линейность входящего в его состав КИХ-фильтра, соотношение вход/выход которого в любой фиксированный момент времени n описывается линейным РУ (22.1) с коэффициентами, не зависящими от времени. Этому соответствует уравнение (2.5) с линейным оператором F

$$y(n) = F\{x(n)\},$$

удовлетворяющим условиям однородности и аддитивности.

В процессе адаптации каждому моменту времени n будет соответствовать свой набор фиксированных коэффициентов $h_i(n)$ — параметров АФ, поэтому соотношение вход/выход будет описываться нелинейным РУ с коэффициентами, зависящими от времени:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i(n) x(n-i),$$

т. е. уравнением с нелинейным оператором \tilde{F} , не удовлетворяющим условиям однородности и аддитивности.

Таким образом, в каждый фиксированный момент времени АФ представляет собой линейную систему, а в процессе адаптации он функционирует как нелинейная система.

Под обратной связью в АФ понимают связь алгоритма адаптации с сигналом ошибки $e(n)$, благодаря которой обеспечивается подстройка (расчет) параметров АФ.

Помимо линейности и обратной связи, для АФ вводится понятие устойчивости, которое также связано с алгоритмом адаптации. Под его устойчивостью понимают сходимость рассчитываемых параметров АФ к оптимальным (по заданному критерию) параметрам. При этом для КИХ-фильтра в составе АФ устойчивость гарантируется для любого набора фиксированных коэффициентов.

Адаптивной фильтрацией называют процесс обработки сигнала $x(n)$ адаптивным фильтром.

Целью адаптивной фильтрации является обеспечение наилучшего приближения выходного сигнала $y(n)$ к образцовому сигналу¹ $d(n)$ по заданному критерию.

¹ В англоязычной литературе этот сигнал прямо так и называют — желаемым или требуемым (desired signal).

Основная сложность в проектировании АФ связана с разработкой алгоритмов адаптации.

22.2. Фильтр Винера

Фильтром Винера (Wiener filter) называют АФ с *оптимальными* параметрами при выборе в качестве *критерия* наилучшего приближения выходного сигнала $y(n)$ (22.1) к образцовому сигналу $d(n)$ *минимума среднего квадрата сигнала ошибки* $e(n)$ (22.3):

$$M\{e^2(n)\} = M\left\{ \left[d(n) - \sum_{i=0}^{N-1} h_i x(n-i) \right]^2 \right\} \rightarrow \min_{\mathbf{h}}, \quad (22.4)$$

где $M\{\cdot\}$ — оператор математического ожидания; \mathbf{h} — вектор параметров АФ h_i , $i = 0, 1, \dots, (N-1)$.

В предположении, что входной $x(n)$ и образцовый $d(n)$ сигналы — совместно *эргоидические случайные процессы* длины L , средний квадрат сигнала ошибки определяется посредством его усреднения на интервале $[0; L]$:

$$M\{e^2(n)\} = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} e^2(n) = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \left[d(n) - \sum_{i=0}^{N-1} h_i x(n-i) \right]^2. \quad (22.5)$$

Вектор \mathbf{h} находится в результате решения оптимизационной задачи — поиска *минимума оптимизируемой (целевой) функции* $F_1(\mathbf{h})$, *не зависящей от времени*:

$$F_1(\mathbf{h}) = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} e^2(n) = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \left[d(n) - \sum_{i=0}^{N-1} h_i x(n-i) \right]^2 \rightarrow \min_{\mathbf{h}}. \quad (22.6)$$

Минимум функции $F_1(\mathbf{h})$ (22.6) достигается при равенстве нулю ее частных производных по всем h_i в момент времени n ; их совокупность можно записать в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\frac{2}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \left[d(n) - \sum_{i=0}^{N-1} h_i x(n-i) \right] x(n-i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, (N-1).$$

Выполним замену $i \rightarrow m$ в $x(n-i)$ *вне* квадратных скобок и разделим обе части равенства на 2:

$$\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \left[d(n) - \sum_{i=0}^{N-1} h_i x(n-i) \right] x(n-m) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, (N-1).$$

Оставим в левой части неизвестные параметры h_i :

$$\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \left[\sum_{i=0}^{N-1} h_i x(n-i) \right] x(n-m) = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} d(n)x(n-m), \quad m = 0, 1, \dots, (N-1),$$

и изменим порядок суммирования:

$$\sum_{i=0}^{N-1} h_i \left[\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x(n-i)x(n-m) \right] = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} d(n)x(n-m), \quad m = 0, 1, \dots, (N-1). \quad (22.7)$$

Справа имеем значения оценки взаимной корреляционной функции (ВКФ) $R_{dx}(m)$ образцового $d(n)$ и входного $x(n)$ сигналов:

$$R_{dx}(m) = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} d(n)x(n-m), \quad m = 0, 1, \dots, (N-1),$$

которая позволяет оценить зависимость между отсчетами *коррелированных* сигналов $x(n)$ и $d(n)$ при различных сдвигах по времени m . Для *некоррелированных* сигналов $R_{dx}(m) = 0$.

Слева в квадратных скобках имеем значения оценки АКФ $R_x(m-i)$, $m = 0, 1, \dots, (N-1)$, входного сигнала $x(n-i)$, $i = 0, 1, \dots, (N-1)$:

$$R_x(m-i) = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x(n-i)x(n-m), \quad m = 0, 1, \dots, (N-1), \quad i = 0, 1, \dots, (N-1). \quad (22.8)$$

С учетом этого СЛАУ (22.7) можно записать в виде

$$\sum_{i=0}^{N-1} h_i R_x(m-i) = R_{dx}(m), \quad m = 0, 1, \dots, (N-1). \quad (22.9)$$

На рис. 22.2 изображены графики оценки АКФ $R_x(m)$, $m = 0, 1, \dots, (N-1)$, и ее смещенных копий $R_x(m-i)$ (22.8).

Значения оценки АКФ $R_x(m-i)$ (на рис. 22.2 они выделены жирными линиями) представляют в виде *корреляционной матрицы — матрицы Теплица*: первая строка — $R_x(m=0)$, вторая — $R_x(m=1)$ и т. д.:

$$\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & \dots & R_x(N-1) \\ R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(N-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_x(N-1) & R_x(N-2) & \dots & R_x(0) \end{bmatrix},$$

с учетом чего получим матричную запись СЛАУ (22.9), известную как *система уравнений Винера—Хонфа* (Wiener—Hopf):

$$\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & \dots & R_x(N-1) \\ R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(N-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_x(N-1) & R_x(N-2) & \dots & R_x(0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{dx}(0) \\ R_{dx}(1) \\ \vdots \\ R_{dx}(N-1) \end{bmatrix}. \quad (22.10)$$

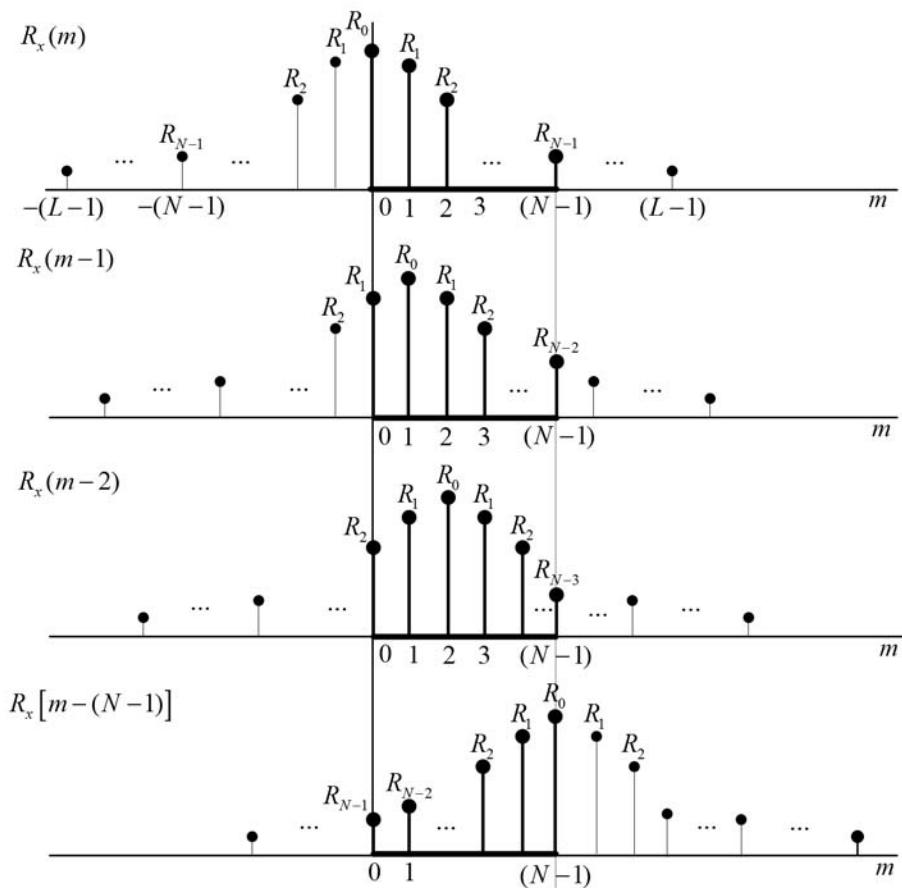


Рис. 22.2. Оценка АКФ и ее смещенные копии

Краткая запись (22.10) имеет вид:

$$\mathbf{R}_x \mathbf{h} = \mathbf{R}_{dx}, \quad (22.11)$$

где:

- \mathbf{R}_x — корреляционная матрица значений АКФ входного сигнала;
- \mathbf{h} — вектор-столбец параметров АФ;
- \mathbf{R}_{dx} — вектор-столбец значений ВКФ образцового и входного сигналов.

Решением СЛАУ (22.11) является вектор *оптимальных* (по критерию минимума среднего квадрата сигнала ошибки) параметров АФ \mathbf{h}_{opt} :

$$\mathbf{h}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{R}_{dx}, \quad (22.12)$$

где \mathbf{R}_x^{-1} — обратная корреляционная матрица.

Практическое применение фильтра Винера ограничено тем, что оценки АКФ \mathbf{R}_x и ВКФ \mathbf{R}_{dx} заранее неизвестны, и в условиях, когда входной сигнал $x(n)$ является

случайным процессом с заранее неизвестной статистической моделью, их придется вычислять каждый раз заново с поступлением нового отсчета сигнала и каждый раз повторять трудоемкую операцию обращения матрицы.

Для сокращения вычислительных затрат была предложена идея вычисления параметров АФ по мере поступления отсчетов входного и образцового сигналов *без вычисления статистических характеристик*.

Это оказалось возможным при выборе *других критерии*ев наилучшего приближения выходного сигнала $y(n)$ к образцовому сигналу $d(n)$ и позволило установить *рекуррентную* связь параметров АФ при переходе от текущего к следующему моменту времени.

Среди алгоритмов *рекуррентного* вычисления параметров АФ наибольшее распространение получили два следующих:

алгоритм LMS (Least Mean Squares) и его модификация NLMS (Normalized LMS).

В литературе они также известны как метод наименьших квадратов (МНК) и нормированный метод наименьших квадратов (НМНК);

алгоритм RLS (Recursive Least Squares).

В литературе он также известен как рекуррентный метод наименьших квадратов (РНК).

22.3. Алгоритм LMS

В алгоритме LMS реализовано *рекуррентное* вычисление *оценок* параметров АФ $\hat{\mathbf{h}}(n)$.

В качестве *критерия* наилучшего приближения выходного сигнала $y(n)$ к образцовому сигналу $d(n)$ выбран *минимум квадрата сигнала ошибки* $e(n)$ (22.3):

$$e^2(n) = \left[d(n) - \sum_{i=0}^{N-1} h_i x(n-i) \right]^2 \rightarrow \min_{\mathbf{h}} .$$

Вектор \mathbf{h} находится в результате решения оптимизационной задачи — поиска минимума целевой функции $F_2(n, \mathbf{h})$, зависящей от времени:

$$F_2(n, \mathbf{h}) = e^2(n) = \left[d(n) - \sum_{i=0}^{N-1} h_i x(n-i) \right]^2 \rightarrow \min_{\mathbf{h}} . \quad (22.13)$$

Для поиска минимума функции $F_2(n, \mathbf{h})$ (22.13) используют *градиентный метод* (метод наискорейшего спуска) — итерационную процедуру, определяющую траекторию пошагового приближения (спуска) к минимуму, где шагам итерации соответствуют моменты дискретного нормированного времени n .

На каждом шаге итерации оценивается вектор $\hat{\mathbf{h}}(n+1)$, смещаемый относительно вектора $\hat{\mathbf{h}}(n)$ на величину, пропорциональную *градиенту*¹ функции $F_2(n, \mathbf{h})$ в точке n :

$$\hat{\mathbf{h}}(n+1) = \hat{\mathbf{h}}(n) + \frac{\mu}{2} \nabla_n, \quad (22.14)$$

где:

- $\hat{\mathbf{h}}(n)$ и $\hat{\mathbf{h}}(n+1)$ — векторы *оценок* параметров АФ в моменты времени n и $(n+1)$;
- μ — положительная константа, называемая *шагом адаптации*;
- ∇_n — градиент функции $F_2(n, \mathbf{h})$ (22.13), определяемый как вектор, элементами которого являются частные производные данной функции по всем h_i в момент времени n :

$$\nabla_n = 2 \left[d(n) - \sum_{i=0}^{N-1} h_i x(n-i) \right] x(n-i), \quad i = 0, 1, \dots, (N-1),$$

или, с учетом (22.3):

$$\nabla_n = 2e(n)x(n-i), \quad i = 0, 1, \dots, (N-1). \quad (22.15)$$

Подставляя (22.15) в (22.14), получаем *рекуррентную формулу* для вычисления *оценок* параметров АФ:

$$\hat{\mathbf{h}}(n+1) = \hat{\mathbf{h}}(n) + \mu e(n) \mathbf{x}(n), \quad (22.16)$$

где $\mathbf{x}(n)$ — вектор отсчетов входного сигнала $x(n-i)$, $i = 0, 1, \dots, (N-1)$.

Итерационная процедура вычисления оценок параметров АФ в алгоритме LMS включает в себя следующие шаги:

1. Присваивание $n = 0$ и задание начальных (обычно нулевых) значений оценок параметров АФ $\hat{\mathbf{h}}(0)$.
2. Вычисление выходного сигнала $y(n)$ (22.1).
3. Вычисление сигнала ошибки $e(n)$ (22.3).
4. Обновление оценок параметров АФ $\hat{\mathbf{h}}(n+1)$ (22.16).
5. Присваивание $n = n + 1$.
6. Повторение пп. 2—5.

Несмотря на простоту алгоритма LMS, анализ его сходимости — сходимости *оценок* параметров АФ к оптимальным параметрам \mathbf{h}_{opt} фильтра Винера — оказывает-

¹ От лат. *gradiens* — шагающий.

ся весьма сложной задачей, рассмотрение которой выходит за рамки данной книги, поэтому далее будут приведены лишь некоторые известные результаты [20, 38].

Основной вопрос в данном случае связан с выбором величины шага адаптации μ , гарантирующим сходимость алгоритма.

При этом необходимо иметь в виду, что под сходимостью алгоритма LMS понимают *приближение* значений *оценок* параметров $\hat{\mathbf{h}}(n+1)$ (22.16) к значениям вектора \mathbf{h}_{opt} . В процессе адаптации они будут флюктуировать относительно значений данного вектора, хаотично приближаться к ним, находясь в их окрестности, но не достигнут этих значений (не сойдутся к ним), даже теоретически при $n \rightarrow \infty$.

Поэтому при выборе шага адаптации μ анализируется сходимость *средних* (математических ожиданий) и *средних квадратов* (дисперсий) значений вектора $\hat{\mathbf{h}}(n+1)$, которые сходятся к соответствующим значениям вектора \mathbf{h}_{opt} при $n \rightarrow \infty$. В первом случае говорят о сходимости алгоритма *в среднем*, а во втором — *в среднем квадрате*.

Сходимость в среднем гарантируется при выборе значения μ из диапазона

$$0 < \mu < 2/\lambda_{\max},$$

где λ_{\max} — максимальное собственное значение корреляционной матрицы \mathbf{R}_x в (21.13).

Сходимость в среднем квадрате гарантируется при выборе значения μ из более узкого диапазона

$$0 < \mu \leq \frac{2}{NP_x}, \quad (22.17)$$

где P_x — средняя мощность входного сигнала $x(n)$ длины L :

$$P_x = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x^2(n). \quad (22.18)$$

Сходимость в среднем квадрате гарантирует сходимость в среднем, но не наоборот, поэтому на практике шаг адаптации выбирают в диапазоне (22.17), если заранее известна оценка значения P_x (22.18).

В установившемся режиме значение дисперсии сигнала ошибки в АФ с алгоритмом LMS будет больше минимально достижимого в фильтре Винера, т. к. значения вектора $\hat{\mathbf{h}}(n+1)$ (22.16) не достигают значений вектора \mathbf{h}_{opt} , и ее значение будет зависеть от шага адаптации.

Поэтому шаг адаптации μ выбирается из компромиссных соображений: с одной стороны, его величина влияет на *скорость сходимости* (чем больше μ , тем она выше), а с другой — на *дисперсию сигнала ошибки* (чем больше μ , тем больше она отличается от дисперсии в фильтре Винера).

Обычно значение μ выбирают равным половине максимального шага в (22.17).

В том случае, если значение P_x (22.18) невозможно оценить заранее или оно меняется в процессе обработки сигнала, применяется *нормированный алгоритм NLMS* с шагом адаптации, нормируемым к энергии сигнала $x(n-i)$, $i = 0, 1, \dots, (N-1)$:

$$\mu(n) = \frac{\mu_0}{\mathbf{x}'(n)\mathbf{x}(n) + \varepsilon}, \quad (22.19)$$

где:

- $\mathbf{x}'(n)\mathbf{x}(n)$ — энергия сигнала, равная произведению вектора-строки¹ $\mathbf{x}'(n)$ на вектор-столбец $\mathbf{x}(n)$;
- μ_0 — фиксированное значение шага, влияющее на сходимость алгоритма адаптации, выбираемое из диапазона $0 < \mu_0 < 2$;
- ε — малая положительная константа, определяющая максимальное значение $\mu(n)$, равное μ_0/ε при нулевом входном сигнале.

В этом случае *рекуррентная формула* для вычисления *оценок* параметров АФ (22.16) принимает вид:

$$\hat{\mathbf{h}}(n+1) = \hat{\mathbf{h}}(n) + \mu(n)e(n)\mathbf{x}(n).$$

В итерационной процедуре вычисления оценок параметров АФ, приведенной выше для алгоритма LMS, изменится лишь формула обновления оценок параметров АФ.

В MATLAB структура АФ (см. рис. 22.1) с *алгоритмом LMS* описывается в виде объекта *adaptfilt* (от англ. *Adaptive Filter*):

```
Hlms = adaptfilt.lms(N, step, leakage, coeffs, states)
```

где:

- *Hlms* — имя объекта — АФ с алгоритмом адаптации LMS;
- *N* — длина КИХ-фильтра N , по умолчанию, в отсутствии данного параметра, $N = 10$;
- *step* — шаг адаптации μ , по умолчанию, в отсутствии данного параметра, $step = 0.1$;
- *leakage* — коэффициент утечки (Leakage Factor), регулирующий шаг адаптации при плохо обусловленной корреляционной матрице R_x ; выбирается из диапазона $0 < leakage \leq 1$, по умолчанию, в отсутствии данного параметра, $leakage = 1$;
- *coeffs* — вектор длины N начальных значений оценок параметров АФ $\hat{\mathbf{h}}(0)$, по умолчанию, в отсутствии данного параметра, нулевых;
- *states* — вектор длины $(N-1)$ начальных условий КИХ-фильтра, по умолчанию, в отсутствии данного параметра, ННУ.

¹ Здесь и далее символ "апостроф" соответствует операции транспонирования вектора или матрицы.

Свойства объекта `adaptfilt.lms`, выводимые по его имени, включают в себя:

- `Algorithm` — структура КИХ-фильтра и алгоритм адаптации;
- `FilterLength` — значение параметра `N`;
- `StepSize` — значение параметра `step`;
- `Leakage` — значение параметра `leakage`;
- `PersistentMemory` — начальные условия `states`; значение `false` соответствует ННУ.

Структура АФ (см. рис. 22.1) с алгоритмом NLMS описывается в виде объекта:

```
Hnlms = adaptfilt.nlms(N, step, leakage, offset, coeffs, states)
```

где:

- `Hnlms` — имя объекта — АФ с алгоритмом адаптации NLMS;
- `step` — значение μ_0 в (22.19), выбираемое из диапазона $0 < \text{step} < 2$, по умолчанию, в отсутствии данного параметра, `step = 1`;
- `offset` — константа ϵ в (22.19), по умолчанию, в отсутствии данного параметра, `offset = 0`.

Остальные параметры определены ранее для объекта `adaptfilt.lms`.

Свойства объекта `adaptfilt.nlms` дублируют свойства объекта `adaptfilt.lms` и дополнительно в свойстве `Offset` отображается значение параметра `offset`.

При известной структуре АФ вычисление выходного сигнала $y(n)$ и сигнала ошибки $e(n)$ выполняется с помощью функции:

```
[y, e] = filter(H, x, d)
```

где `H` — имя объекта `adaptfilt`; `x, d` — векторы отсчетов входного и образцового сигналов; `y, e` — векторы отсчетов выходного сигнала и сигнала ошибки.

По завершении адаптивной фильтрации можно вывести параметры АФ:

```
H.coefficients
```

Основным достоинством алгоритма LMS является его простота (на каждом шаге требуется всего N операций умножения-сложения), а недостатком — относительно медленная сходимость к оптимальным параметрам фильтра Винера, для которых принципиально могут быть получены только их оценки, и большее значение дисперсии сигнала ошибки (в установившемся режиме), чем минимально достижимое в фильтре Винера.

22.4. Алгоритм RLS

В алгоритме RLS реализовано *рекуррентное* вычисление *оптимальных* параметров АФ $\mathbf{h}(n)$ (в установившемся режиме).

В качестве *критерия* наилучшего приближения выходного сигнала $y(n)$ к образцовоому сигналу $d(n)$ выбран *минимум суммы квадратов* сигнала ошибки $e(n)$ (22.3):

$$\sum_{n=0}^{L-1} e^2(n) = \sum_{n=0}^{L-1} \left[d(n) - \sum_{i=0}^{N-1} h_i x(n-i) \right]^2 \rightarrow \min_{\mathbf{h}}, \quad (22.20)$$

где L — длина входного сигнала $x(n)$; \mathbf{h} — вектор параметров АФ.

Вектор \mathbf{h} находится в результате решения оптимизационной задачи — поиска минимума целевой функции $F_3(\mathbf{h})$, не зависящей от времени:

$$F_3(\mathbf{h}) = \sum_{n=0}^{L-1} e^2(n) = \sum_{n=0}^{L-1} \left[d(n) - \sum_{i=0}^{N-1} h_i x(n-i) \right]^2 \rightarrow \min_{\mathbf{h}}. \quad (22.21)$$

Минимум функции $F_3(\mathbf{h})$ (22.21) достигается при равенстве нулю частных производных по всем h_i в момент времени n ; их совокупность можно записать в виде СЛАУ:

$$2 \sum_{n=0}^{L-1} \left[d(n) - \sum_{i=0}^{N-1} h_i x(n-i) \right] x(n-i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, (N-1).$$

Выполним замену $i \rightarrow m$ в $x(n-i)$ вне квадратных скобок и разделим обе части равенства на 2:

$$\sum_{n=0}^{L-1} \left[d(n) - \sum_{i=0}^{N-1} h_i x(n-i) \right] x(n-m) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, (N-1).$$

После переноса суммы с неизвестными параметрами h_i в левую часть и изменения порядка суммирования получим СЛАУ

$$\sum_{i=0}^{N-1} h_i \left[\sum_{n=0}^{L-1} x(n-i)x(n-m) \right] = \sum_{n=0}^{L-1} d(n)x(n-m), \quad m = 0, 1, \dots, (N-1). \quad (22.22)$$

Полагая начальные условия нулевыми:

$$x(n) \Big|_{(n-i)<0} = 0,$$

запишем в матричном виде левую часть (22.22) с использованием кратких обозначений $x(0) = x_0$ и т. д.:

$$\begin{bmatrix} x_0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & x_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{L-1} & x_{(L-1)-1} & \dots & x_{(L-1)-(N-1)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{L-1} \\ 0 & x_0 & \dots & x_{(L-1)-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{(L-1)-(N-1)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{bmatrix} = \mathbf{X}\mathbf{X}'\mathbf{h}$$

и аналогично — правую часть:

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{L-1} \\ 0 & x_0 & \dots & x_{(L-1)-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{(L-1)-(N-1)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{L-1} \end{bmatrix} = \mathbf{X}\mathbf{d},$$

откуда имеем краткую матричную запись СЛАУ (22.22)

$$\mathbf{XX}'\mathbf{h} = \mathbf{Xd} \quad (22.23)$$

и ее решение

$$\mathbf{h}_{opt} = (\mathbf{XX}')^{-1} \mathbf{Xd}, \quad (22.24)$$

где:

- \mathbf{X} — матрица размером $N \times L$ отсчетов входного сигнала $x(n)$ длины L ;
- \mathbf{X}' — транспонированная матрица \mathbf{X} размером $L \times N$;
- \mathbf{XX}' — квадратная матрица порядка N ;
- \mathbf{h} — вектор-столбец параметров АФ длины N ;
- $\mathbf{XX}'\mathbf{h}$ — вектор-столбец длины N ;
- \mathbf{d} — вектор-столбец отсчетов образцового сигнала $d(n)$ длины L ;
- \mathbf{Xd} — вектор-столбец длины N .

Решением СЛАУ (22.24) будет вектор *оптимальных* параметров АФ, поскольку система уравнений (22.22) совпадает с системой (22.7) в фильтре Винера с точностью до множителя $1/L$.

В то же время отсутствие этого множителя (минимизация *не усредненного* квадрата сигнала ошибки) позволяет рассчитывать параметры АФ непосредственно по отсчетам входного $x(n)$ и образцового $d(n)$ сигналов без вычисления АКФ \mathbf{R}_x и ВКФ \mathbf{R}_{dx} , как в фильтре Винера.

Это стало основой для вывода *рекуррентной* формулы вычисления *оптимальных* параметров АФ (в установившемся режиме). Ее вывод потребует достаточно нетривиальных матричных преобразований, которые приведены в [20, 38] и рассматриваются далее.

Определим значения вектора параметров АФ (22.24) в момент времени n :

$$\mathbf{h}(n) = [\mathbf{X}(n)\mathbf{X}'(n)]^{-1} \mathbf{X}(n)\mathbf{d}(n), \quad (22.25)$$

где матрица $\mathbf{X}(n)$ и вектор $\mathbf{d}(n)$ вычисляются на *текущем* интервале $[0; n]$:

$$\mathbf{X}(n) = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ 0 & x_0 & \dots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{n-(N-1)} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d}(n) = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}. \quad (22.26)$$

Запишем (22.25) для следующего момента времени ($n+1$) :

$$\mathbf{h}(n+1) = [\mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}'(n+1)]^{-1} \mathbf{X}(n+1)\mathbf{d}(n+1). \quad (22.27)$$

В этом случае в матрице $\mathbf{X}(n)$ появится дополнительный столбец $\mathbf{x}(n+1)$:

$$\mathbf{x}(n+1) = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{(n+1)-1} \\ \vdots \\ x_{(n+1)-(N-1)} \end{bmatrix}, \quad (22.28)$$

и в векторе $\mathbf{d}(n)$ — дополнительный элемент $d(n+1) = d_{n+1}$. Это позволит установить рекуррентную связь произведения $\mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}'(n+1)$ с произведением $\mathbf{X}(n)\mathbf{X}'(n)$:

$$\mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}'(n+1) = \mathbf{X}(n)\mathbf{X}'(n) + \mathbf{x}(n+1)\mathbf{x}'(n+1), \quad (22.29)$$

а также рекуррентную связь произведения $\mathbf{X}(n+1)\mathbf{d}(n+1)$ с произведением $\mathbf{X}(n)\mathbf{d}(n)$:

$$\mathbf{X}(n+1)\mathbf{d}(n+1) = \mathbf{X}(n)\mathbf{d}(n) + \mathbf{x}(n+1)d(n+1). \quad (22.30)$$

Для того чтобы определить рекуррентную связь обратной матрицы $[\mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}'(n+1)]^{-1}$ в (22.37) с матрицей $[\mathbf{X}(n)\mathbf{X}'(n)]^{-1}$, введем краткие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(n) &= [\mathbf{X}(n)\mathbf{X}'(n)]^{-1}; \\ \mathbf{P}(n+1) &= [\mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}'(n+1)]^{-1} \end{aligned} \quad (22.31)$$

и воспользуемся тождеством из линейной алгебры¹:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}, \quad (22.32)$$

где \mathbf{A} и \mathbf{C} — квадратные матрицы; \mathbf{B} и \mathbf{D} — матрицы согласованных размерностей.

Проиллюстрируем тождественность результатов в (22.32) на примере операций с простейшими произвольными матрицами согласованных размерностей:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

Выполним операции в MATLAB, применяя для обращения матрицы функцию `inv`.

¹ Леммой об обращении матрицы (Matrix Inversion Lemma).

Результат выполнения операций в левой части (22.32):

```
>> A = [1 2 3;3 4 6;5 7 2];
>> B = [5 6;7 8;9 1];
>> C = [3 5;7 9];
>> D = [2 4 6;8 10 12];
>> inv(A+B*C*D)
ans =
-1.4579    1.0710    0.0101
 1.7488   -1.3368    0.0947
 -0.5365    0.4358   -0.0806
```

совпадает с результатом в правой части:

```
>> inv(A)-(inv(A)*B)*(inv(inv(C)+D*inv(A)*B))*D*inv(A)
ans =
-1.4579    1.0710    0.0101
 1.7488   -1.3368    0.0947
 -0.5365    0.4358   -0.0806
```

Сопоставляя левую часть (22.32) с правой частью (22.29):

$$\mathbf{A} + \mathbf{BCD} \Rightarrow \mathbf{X}(n)\mathbf{X}'(n) + \mathbf{x}(n+1)\mathbf{x}'(n+1),$$

получим следующее соответствие:

- $\mathbf{A} = \mathbf{X}(n)\mathbf{X}'(n)$ — квадратная матрица размером $N \times N$ (см. (22.26));
- $\mathbf{B} = \mathbf{x}(n+1)$ — вектор-столбец (22.28) длины N ;
- $\mathbf{C} = 1$ — скаляр;
- $\mathbf{D} = \mathbf{x}'(n+1)$ — вектор-строка длины N .

На основании тождества (22.32) и соотношения (22.29) запишем обратную матрицу $[\mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}'(n+1)]^{-1}$ с учетом обозначений (22.31):

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n) - \mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)[1 + \mathbf{x}'(n+1)\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)]^{-1}\mathbf{x}'(n+1)\mathbf{P}(n).$$

Результатом выполнения операций в квадратных скобках будет *скаляр* (проверьте самостоятельно), для которого операции обращения соответствует возвведение в минус первую степень:

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n) - \frac{\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)\mathbf{x}'(n+1)\mathbf{P}(n)}{1 + \mathbf{x}'(n+1)\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)}. \quad (22.33)$$

Проиллюстрируем операцию обращения скаляра с помощью функции `inv` на примере двойки — $2^{-1} = 1/2$:

```
>> inv(2)
ans =
 0.5000
```

Таким образом, в (22.33) получена *рекуррентная связь* матриц $\mathbf{P}(n+1)$ и $\mathbf{P}(n)$.

Запишем (22.27) с учетом обозначения $\mathbf{P}(n+1)$ (22.31) и связи (22.30):

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{P}(n+1) [\mathbf{X}(n)\mathbf{d}(n) + \mathbf{x}(n+1)d(n+1)].$$

Подставим $\mathbf{P}(n+1)$ (22.33):

$$\mathbf{h}(n+1) = \left[\mathbf{P}(n) - \frac{\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)\mathbf{x}'(n+1)\mathbf{P}(n)}{1 + \mathbf{x}'(n+1)\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)} \right] [\mathbf{X}(n)\mathbf{d}(n) + \mathbf{x}(n+1)d(n+1)]$$

и выполним умножение:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(n+1) &= \underline{\mathbf{P}(n)\mathbf{X}(n)\mathbf{d}(n)} - \frac{\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)\mathbf{x}'(n+1)}{1 + \mathbf{x}'(n+1)\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)} \underline{\mathbf{P}(n)\mathbf{X}(n)\mathbf{d}(n)} + \\ &+ \underline{\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)d(n+1)} - \frac{\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)\mathbf{x}'(n+1)}{1 + \mathbf{x}'(n+1)\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)} \underline{\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)d(n+1)}. \end{aligned}$$

Согласно (22.25) с учетом обозначений (22.31)

$$\mathbf{h}(n) = \mathbf{P}(n)\mathbf{X}(n)\mathbf{d}(n).$$

Подставим это значение в последнее равенство и вынесем за скобки общий множитель двух других слагаемых:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(n+1) &= \mathbf{h}(n) - \frac{\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)\mathbf{x}'(n+1)}{1 + \mathbf{x}'(n+1)\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)} \mathbf{h}(n) + \\ &+ \underline{\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)d(n+1)} \left[1 - \frac{\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)\mathbf{x}'(n+1)}{1 + \mathbf{x}'(n+1)\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)} \right]. \end{aligned}$$

Выполним вычитание в скобках:

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) - \frac{\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)\mathbf{x}'(n+1)}{1 + \mathbf{x}'(n+1)\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)} \mathbf{h}(n) + \frac{\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)d(n+1)}{1 + \mathbf{x}'(n+1)\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)}$$

и выделим общий множитель второго и третьего слагаемых:

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) + \frac{\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)}{1 + \mathbf{x}'(n+1)\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)} [d(n+1) - \mathbf{x}'(n+1)\mathbf{h}(n)]. \quad (22.34)$$

В квадратных скобках имеем сигнал ошибки $e(n+1)$ (21.3), определяемый по параметрам АФ в момент времени n :

$$e(n+1) = d(n+1) - \mathbf{x}'(n+1)\mathbf{h}(n). \quad (22.35)$$

Множитель перед этим сигналом представляет собой вектор, который называют *вектором коэффициентов усиления*, и вводят для него краткое обозначение

$$\mathbf{K}(n+1) = \frac{\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)}{1 + \mathbf{x}'(n+1)\mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n+1)}. \quad (22.36)$$

Подставляя (22.35) и (22.36) в (22.34), получаем искомую *рекуррентную формулу для вычисления оптимальных параметров АФ* (в установившемся режиме):

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) + \mathbf{K}(n+1)e(n+1). \quad (22.37)$$

Итерационная процедура вычисления оптимальных параметров АФ в алгоритме RLS включает в себя следующие шаги:

1. Задание начальных (обычно нулевых) значений параметрам АФ $\mathbf{h}(-1)$.
2. Задание начальных значений элементам матрицы $\mathbf{P}(-1)$. Рекомендуется диагональным элементам присваивать большие положительные значения, а остальным — нулевые.
3. Присваивание $n = 0$.
4. Вычисление выходного сигнала $y(n)$ и сигнала ошибки $e(n)$ (см. (22.35)):

$$y(n) = \mathbf{x}'(n)\mathbf{h}(n-1); \\ e(n) = d(n) - y(n).$$

5. Вычисление вектора коэффициентов усиления $\mathbf{K}(n)$ (см. (22.36)):

$$\mathbf{K}(n) = \frac{\mathbf{P}(n-1)\mathbf{x}(n)}{1 + \mathbf{x}'(n)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{x}(n)}. \quad (22.38)$$

6. Обновление матрицы $\mathbf{P}(n)$ (см. (22.33) с учетом (22.38)):

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(n-1) - \mathbf{K}(n)\mathbf{x}'(n)\mathbf{P}(n-1). \quad (22.39)$$

7. Обновление вектора $\mathbf{h}(n)$ (см. (22.37)):

$$\mathbf{h}(n) = \mathbf{h}(n-1) + \mathbf{K}(n)e(n). \quad (22.40)$$

8. Присваивание $n = n + 1$.

9. Повторение пп. 4—8.

Критерий (22.20) можно модифицировать, добавив в него *коэффициент забывания* λ , выбираемый из диапазона $0 < \lambda \leq 1$, что позволяет учитывать предшествующие отсчеты входного сигнала в критерии (22.20) с экспоненциально уменьшающим весом:

$$\sum_{n=0}^{L-1} \lambda^{(L-1)-n} e^2(n) \rightarrow \min_{\mathbf{h}}.$$

В этом случае формулы (22.38) и (22.39) принимают вид:

$$\mathbf{K}(n) = \frac{\mathbf{P}(n-1)\mathbf{x}(n)}{\lambda + \mathbf{x}'(n)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{x}(n)}; \quad (22.41)$$

$$\mathbf{P}(n) = \frac{1}{\lambda} [\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{K}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{P}(n-1)], \quad (22.42)$$

а в (22.40) определяются *оценки параметров АФ*.

В MATLAB структура АФ (см. рис. 22.1) с алгоритмом RLS описывается в виде объекта:

```
Hrls = adaptfilt.rls(N,lambda,invcov,coeffs,states)
```

где:

- Hrls — имя объекта — АФ с алгоритмом адаптации RLS;
- lambda — коэффициент забывания λ в (22.41) и (22.42), выбираемый из диапазона $0 < \lambda \leq 1$, по умолчанию, в отсутствии данного параметра $\lambda = 1$;
- invcov — начальные значения элементов матрицы $P(-1)$, по умолчанию, в отсутствии данного параметра, формируется матрица $1000 * eye(N)$ (диагональные элементы равны 1000, а остальные нулю);
- coeffs — вектор длины N начальных значений параметров АФ $h(-1)$, по умолчанию, в отсутствии данного параметра, нулевых.

Параметры N и states определены ранее для объекта adaptfilt.lms (см. разд. 22.3).

Свойства объекта adaptfilt.rls, выводимые по его имени, включают в себя:

- Algorithm — структура КИХ-фильтра и алгоритм адаптации;
- FilterLength — значение параметра N;
- ForgettingFactor — значение параметра lambda;
- Leakage — значение параметра leakage;
- PersistentMemory — начальные условия states; значение false соответствует ННУ.

При известной структуре АФ вычисление выходного сигнала $y(n)$ и сигнала ошибки $e(n)$ выполняется с помощью функции filter (см. разд. 22.3).

По завершении адаптивной фильтрации можно вывести параметры АФ:

```
Hrls.coefficients
```

Основным достоинством алгоритма RLS является быстрая сходимость к оптимальным параметрам фильтра Винера и соответствующее ему минимально достижимое значение дисперсии сигнала ошибки (в установившемся режиме), а недостатком — существенно больший объем требуемых вычислений по сравнению с алгоритмом LMS.

22.5. Идентификация систем

Решение многих задач адаптивной фильтрации сводится к идентификации системы.

Под идентификацией неизвестного *объекта* понимают его совпадение или сходство (по заданному критерию) с известным объектом.

Под идентификацией неизвестной *системы* понимают совпадение или сходство (по заданному критерию) ее входного и выходного сигналов с входным и выходным сигналами известной системы.

Различают две разновидности идентификации систем:

- прямая идентификация** — с *параллельным* соединением неизвестной и известной систем, когда их *входные* сигналы совпадают, а для *выходных* обеспечивается сходство по заданному критерию;
- обратная идентификация** — с *каскадным* соединением неизвестной и известной систем, когда *выходной* сигнал неизвестной системы совпадает с *входным* сигналом известной системы, а для *входного* сигнала неизвестной системы и *выходного* сигнала известной системы обеспечивается сходство по заданному критерию.

В задачах адаптивной фильтрации *известной системой* считается *адаптивный фильтр*.

Структурная схема *прямой* идентификации системы приведена на рис. 22.3.

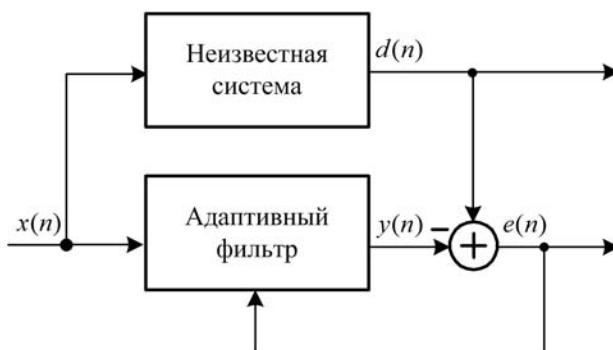


Рис. 22.3. Структурная схема прямой идентификации системы

При *прямой* идентификации *входные* сигналы $x(n)$ неизвестной системы и АФ совпадают, а *выходной* сигнал неизвестной системы $d(n)$ является для АФ образцовым. В процессе адаптации АФ стремится преобразовать входной сигнал $x(n)$ так, чтобы обеспечить наилучшее приближение (по заданному критерию) *выходного* сигнала АФ $y(n)$ к *выходному* сигналу неизвестной системы $d(n)$, и решение задачи *прямой* идентификации сводится к определению *параметров* АФ, при которых это обеспечивается.

В этом смысле *по завершении процесса адаптации* АФ становится *моделью* неизвестной системы.

Структурная схема *обратной* идентификации системы приведена на рис. 22.4.

При *обратной* идентификации *выходной* сигнал неизвестной системы $x(n)$ совпадает с *входным* сигналом АФ, а *входной* сигнал неизвестной системы $d(n)$ является для АФ образцовым. В процессе адаптации АФ стремится преобразовать входной сигнал $x(n)$ так, чтобы обеспечить наилучшее приближение (по заданному критерию) *выходного* сигнала АФ $y(n)$ к *входному* сигналу неизвестной системы $d(n)$, и решение задачи *обратной* идентификации сводится к определению *параметров* АФ, при которых это обеспечивается.

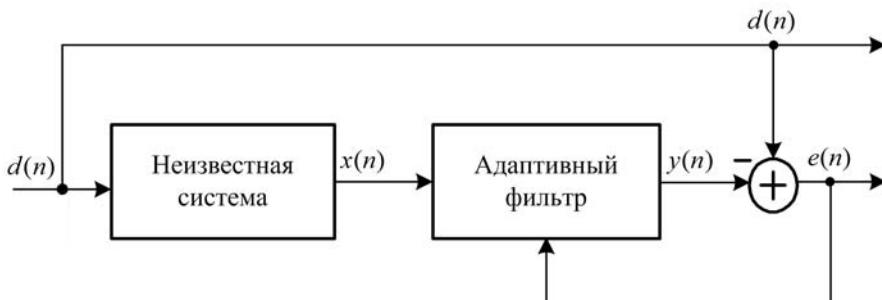


Рис. 22.4. Структурная схема обратной идентификации системы

В этом смысле *по завершении процесса адаптации АФ становится моделью неизвестной системы*.

Далее рассматриваются следующие типовые задачи адаптивной фильтрации:

- оценка импульсной характеристики неизвестной системы;
- очистка сигнала от шума;
- выравнивание частотной характеристики неизвестной системы;
- оценка параметров линейного предсказания сигнала.

Их решение иллюстрируется на простых примерах с моделированием сигналов и систем в MATLAB. В [42] эти задачи рассматриваются подробно, и приводится script-файл для их решения. Здесь же ограничимся описанием основных этапов моделирования и анализом результатов.

22.5.1. Оценка импульсной характеристики неизвестной системы

Задача оценки ИХ неизвестной системы в предположении, что она представляет собой ЛДС, в условиях заранее неизвестного входного сигнала (случайного процесса) сводится к *прямой* идентификации системы в соответствии со структурной схемой, представленной на рис. 22.3.

По завершении процесса адаптации АФ становится *моделью* неизвестной системы, и это означает, что в установившемся режиме характеристики АФ становятся *оценками* характеристик неизвестной системы. *Оценкой* ее ИХ являются *параметры* АФ (коэффициенты КИХ-фильтра).

Моделирование процесса вычисления оценки ИХ неизвестной системы в MATLAB включает следующие шаги:

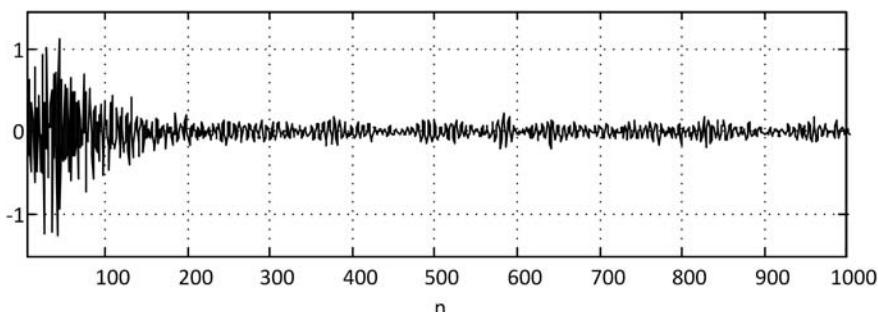
1. Моделирование входного сигнала неизвестной системы $x(n)$ — в примере нормального белого шума длины $L = 4000$ с нулевым средним и единичной дисперсией.
2. Моделирование неизвестной системы — в примере БИХ-фильтра (IIR).

3. Вычисление выходного сигнала неизвестной системы — образцового сигнала АФ $d(n)$.
4. Моделирование структуры АФ — в примере с алгоритмами адаптации LMS и RLS и длиной КИХ-фильтра $N = 42$.
5. Моделирование адаптивной фильтрации — вычисление выходного сигнала АФ $y(n)$ и сигнала ошибки $e(n)$.
6. Вывод параметров АФ — оценок ИХ неизвестной системы.

На рис. 22.5 представлены сигналы ошибки АФ (отсчеты соединены непрерывными линиями) с алгоритмами адаптации LMS и RLS на интервале дискретного нормированного времени $n \in [0; 1000]$. Относительно медленная сходимость (большая длительность переходного процесса) наблюдается в АФ с алгоритмом LMS, и в установленвшемся режиме ему соответствует большее значение СКО (дисперсии) сигнала ошибки.

a)

Error signal for LMS



б)

Error signal for RLS

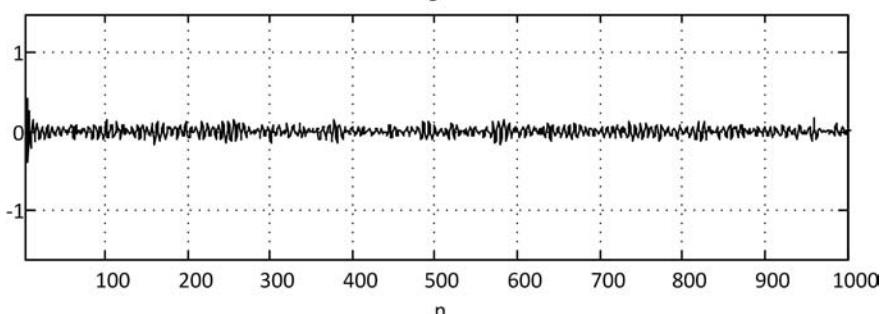


Рис. 22.5. Сигналы ошибки АФ с алгоритмами адаптации LMS (a) и RLS (б)

На рис. 22.6 приведены истинная ИХ неизвестной системы (БИХ-фильтра) и ее оценки — параметры АФ с алгоритмами адаптации LMS и RLS в установленвшемся режиме.

Визуально оценки ИХ практически неотличимы от истинной ИХ, поэтому сравним с ней полученные оценки по критерию среднего абсолютного отклонения — MAE (Mean Absolute Value). Вычисленные в MATLAB значения равны:

MAE_LMS = 0.0096397
 MAE_RLS = 0.0010511

Как и ожидалось, в АФ с алгоритмом RLS получена более точная оценка ИХ.

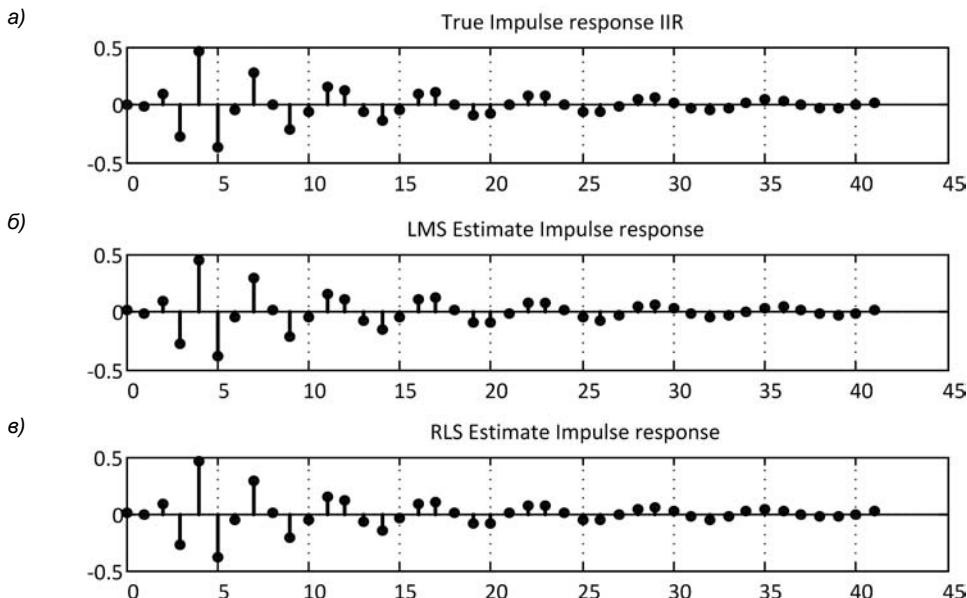


Рис. 22.6. Истинная импульсная характеристика неизвестной системы (a) и ее оценки в АФ с алгоритмами адаптации LMS (б) и RLS (в)

22.5.2. Очистка сигнала от шума

Задача оценки полезного сигнала в аддитивной смеси с шумом — *очистка сигнала от шума* — сводится к *прямой идентификации* системы в соответствии со структурной схемой, представленной на рис. 22.7.

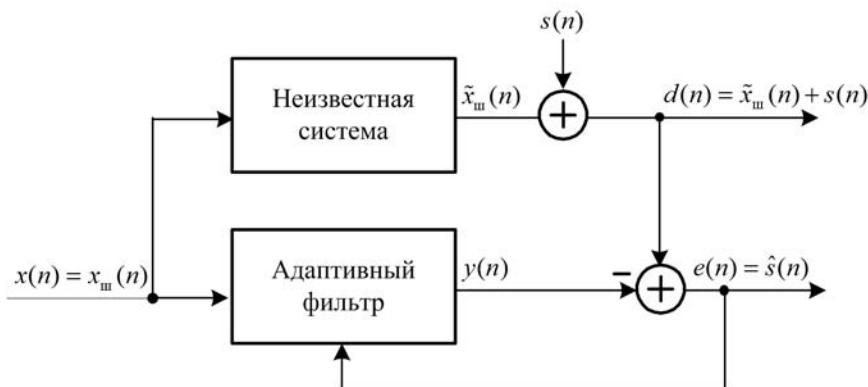


Рис. 22.7. Структурная схема прямой идентификации системы при очистке сигнала от шума

При *прямой* идентификации *входные* сигналы неизвестной системы и АФ совпадают и представляют собой шум, доступный для наблюдения $x(n) = \tilde{x}_{\text{ш}}(n)$. На выходе неизвестной системы имеем *искаженный шум* $\tilde{x}_{\text{ш}}(n)$, коррелированный с шумом $x_{\text{ш}}(n)$, который изменился под влиянием каких-либо факторов, например внешней среды. В иллюстративном примере шум $\tilde{x}_{\text{ш}}(n)$ будет получен на выходе цифрового фильтра.

В качестве образцового сигнала АФ $d(n)$ используется аддитивная смесь искаженного шума $\tilde{x}_{\text{ш}}(n)$ с полезным сигналом $s(n)$, *не коррелированным* с шумами:

$$d(n) = \tilde{x}_{\text{ш}}(n) + s(n).$$

В процессе адаптации АФ стремится преобразовать входной сигнал $x_{\text{ш}}(n)$ так, чтобы обеспечить наилучшее приближение (по заданному критерию) *выходного* сигнала $y(n)$ к искаженному шуму $\tilde{x}_{\text{ш}}(n)$ (поскольку сигнал $s(n)$ не коррелирован с входным шумом $x_{\text{ш}}(n)$ и их ВКФ равна нулю), и по завершении процесса адаптации будет получена его *оценка*:

$$y(n) = \hat{\tilde{x}}_{\text{ш}}(n).$$

В этом смысле по *завершении процесса адаптации* АФ становится *моделью* неизвестной системы, а его *сигнал ошибки* дает *оценку* полезного сигнала:

$$e(n) = d(n) - y(n) = \tilde{x}_{\text{ш}}(n) + s(n) - \hat{\tilde{x}}_{\text{ш}}(n) = \hat{s}(n).$$

Моделирование процесса очистки сигнала от шума в MATLAB включает следующие шаги:

1. Моделирование входного сигнала неизвестной системы $x_{\text{ш}}(n)$ — в примере нормального белого шума длины $L = 4000$ с нулевым средним и единичной дисперсией.
2. Моделирование неизвестной системы — в примере КИХ-фильтра ФНЧ.
3. Моделирование полезного сигнала $s(n)$ — в примере суммы двух дискретных гармоник:

$$s(n) = A_1 \cos\left(\frac{2\pi f_1}{f_d} n\right) + A_2 \cos\left(\frac{2\pi f_2}{f_d} n\right) \quad (22.43)$$

с амплитудами $A_1 = 0,03$ и $A_2 = 0,015$, частотами $f_1 = 500$ Гц и $f_2 = 1000$ Гц и частотой дискретизации $f_d = 4000$ Гц.

4. Моделирование образцового сигнала АФ $d(n)$ — в примере аддитивной смеси искаженного шума $\tilde{x}_{\text{ш}}(n)$ с полезным сигналом $s(n)$ (22.43).
5. Моделирование структуры АФ — в примере с алгоритмами адаптации LMS и RLS и длиной КИХ-фильтра $N = 42$.
6. Моделирование адаптивной фильтрации и вывод сигнала ошибки $e(n) = \hat{s}(n)$.

На рис. 22.8 представлены выделенные на одинаковом интервале времени фрагменты полезного сигнала (отсчеты соединены непрерывными линиями), его аддитивной смеси с искаженным шумом и оценок полезного сигнала в АФ с алгоритмами адаптации LMS и RLS в установившемся режиме.

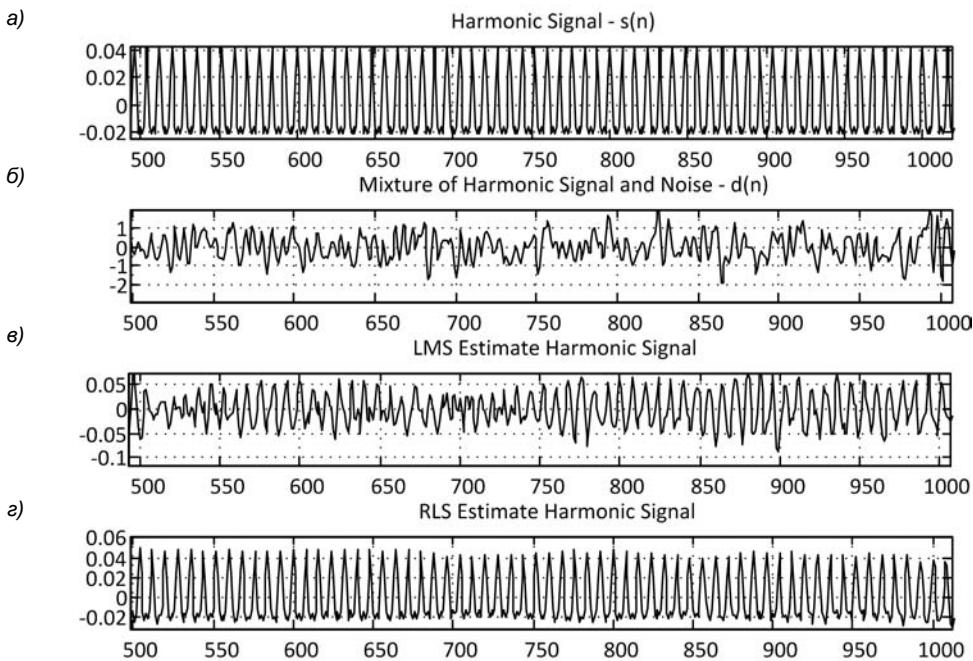


Рис. 22.8. Полезный сигнал (a), его аддитивная смесь с искаженным шумом (б) и оценки полезного сигнала (в установившемся режиме) АФ с алгоритмами адаптации LMS (в) и RLS (г)

Визуально очевидна более точная оценка полезного сигнала в АФ с алгоритмом RLS. Это подтверждается результатами сравнения оценок с истинным полезным сигналом в установившемся режиме по критерию среднеквадратической ошибки — RMSE (Root Mean Squared Error):

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{n=n_{\text{нач}}}^{L-1} |s(n) - \hat{s}(n)|^2} .$$

Начальный момент $n_{\text{нач}}$ установившегося режима определен экспериментально по графикам оценок полезного сигнала.

Вычисленные в MATLAB значения RMSE равны:

RMSE_LMS = 0.025465
 RMSE_RLS = 0.0038928

На практике истинный полезный сигнал $s(n)$ неизвестен, поэтому показатель RMSE используется на этапе *моделирования* для сравнительного анализа оценок полезного сигнала при различных алгоритмах адаптации.

На рис. 22.9 приведены амплитудные спектры тех же сигналов в установившемся режиме.

В аддитивной смеси сигнала с шумом гармоники полезного сигнала вообще не различимы на фоне шума, а по завершении адаптивной фильтрации они выделены, и визуально подтверждается более точная оценка с алгоритмом RLS.

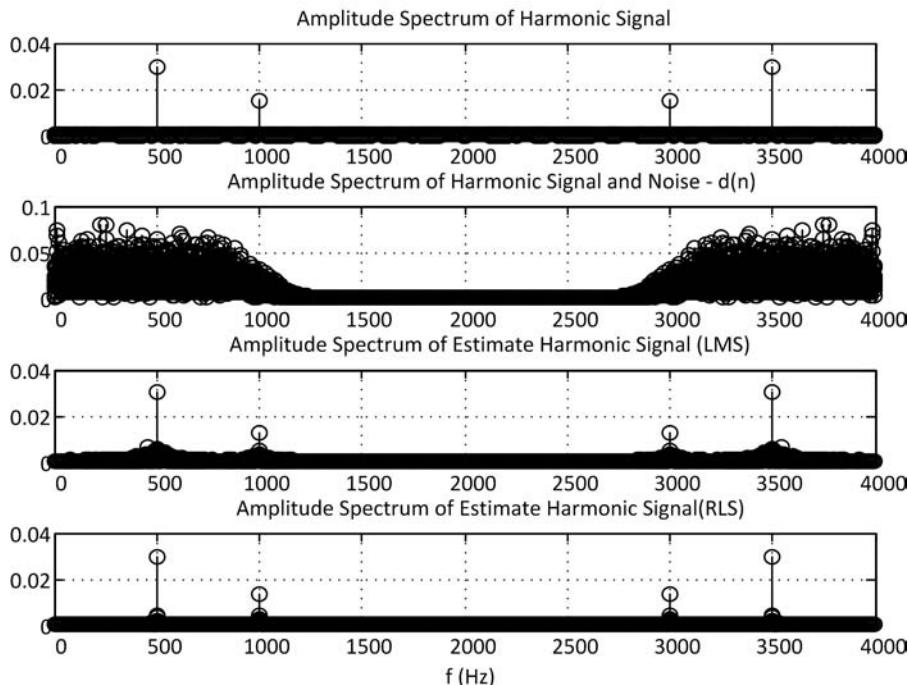


Рис. 22.9. Амплитудные спектры (сверху вниз): полезного сигнала, его аддитивной смеси с искаженным шумом и оценок полезного сигнала (в установившемся режиме) АФ с алгоритмами адаптации LMS и RLS

22.5.3. Выравнивание частотной характеристики

При передаче сигнала по каналу связи¹, наряду с шумом канала, возникают искажения, обусловленные его ограниченной полосой пропускания. Для компенсации подобных искажений на приемной стороне подключают АФ с тем, чтобы совместная АЧХ каскадного соединения канала связи и АФ оказалась близкой к равномерной — *выровнялась*. Адаптивный фильтр, применяемый для выравнивания АЧХ, называют *эквалайзером*².

Решение задачи сводится к *обратной* идентификации системы, структурная схема которой приведена на рис. 22.10, где неизвестная система имитирует канал связи.

¹ Под каналом связи подразумевается среда распространения сигнала.

² От англ. *equalizer* — выравниватель.

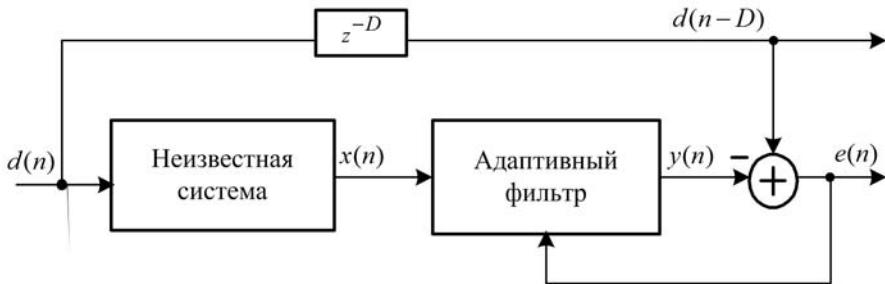


Рис. 22.10. Структурная схема обратной идентификации системы при выравнивании частотной характеристики

Большинство каналов связи описывается моделью в виде КИХ-фильтра, обычно невысокого порядка. В иллюстративном примере в качестве модели неизвестной системы будет использован КИХ-фильтр ФНЧ.

При *обратной* идентификации *выходной* сигнал неизвестной системы $x(n)$ совпадает с *входным* сигналом АФ, а *задержанный входной* сигнал $d(n - D)$ является для АФ образцовым. Задержка используется для согласования времени прохождения сигналов. Выбор значения задержки D требует отдельного исследования. Показано [50], что при длине КИХ-фильтра (модели неизвестной системы), существенно меньшей длины N КИХ-фильтра в составе АФ, удовлетворительный результат будет получен при $D = \text{int}(N/2)$.

В процессе адаптации АФ стремится преобразовать входной сигнал $x(n)$ так, чтобы обеспечить наилучшее приближение (по заданному критерию) *выходного* сигнала АФ $y(n)$ к *входному* сигналу неизвестной системы $d(n - D)$, и по завершении процесса адаптации будет получена его *оценка*:

$$y(n) = \hat{d}(n - D).$$

Согласно теореме о задержке (3.18), z -изображение реакции будет равно

$$Y(z) = \hat{D}(z)z^{-D},$$

и передаточная функция АФ (КИХ-фильтра в его составе) равна

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\hat{D}(z)z^{-D}}{X(z)} = \frac{z^{-D}}{\hat{G}(z)},$$

где $1/\hat{G}(z)$ — *оценка обратной* передаточной функции неизвестной системы $G(z)$:

$$G(z) = \frac{X(z)}{D(z)}.$$

В этом смысле *по завершении процесса адаптации* АФ становится *обратной моделью* неизвестной системы (без учета задержки), а передаточная функция каскадного соединения неизвестной системы и АФ $V(z)$ оказывается равной *оценке* z -изображения задержанного цифрового единичного импульса:

$$V(z) = G(z)H(z) = \frac{G(z)z^{-D}}{\hat{G}(z)} = \hat{U}_0(z)z^{-D}, \quad (22.44)$$

где истинное значение $U_0(z) = 1$, а $|\hat{U}_0(z)| \approx 1$.

Подставляя в (22.44) $z = e^{j\hat{\omega}}$, получаем частотную характеристику каскадного соединения

$$V(e^{j\hat{\omega}}) = |\hat{U}_0(e^{j\hat{\omega}})| e^{-j(D+\Delta)\hat{\omega}}$$

с *выровненной* АЧХ $|\hat{U}_0(e^{j\hat{\omega}})| \approx 1$ и *линейной* ФЧХ $(D + \Delta)\hat{\omega}$, в которой $\Delta = \arg\{\hat{U}_0(e^{j\hat{\omega}})\}$.

Во временной области произведению передаточных функций (22.44) соответствует свертка импульсных характеристик неизвестной системы $g(n)$ и АФ $h(n)$:

$$v(n) = g(n) * h(n),$$

которая, согласно (22.44), оказывается равной *оценке* задержанного цифрового единичного импульса

$$v(n) = \hat{u}_0(n - D). \quad (22.45)$$

Основная проблема обратной идентификации системы связана с получением *образцового* сигнала — входного сигнала канала связи, заранее неизвестного. На практике отсчеты образцового сигнала формируются в процессе обработки реального сигнала. Решение этой задачи выходит за рамки данной книги, поэтому поясним лишь основную идею [20, 38]. При передаче по цифровому каналу связи набор допустимых квантованных значений сигнала ограничен и заранее известен. Из них *до* передачи реального сигнала формируется псевдослучайная последовательность, которая используется в качестве образцового сигнала на этапе *обучения* АФ. После настройки АФ, когда частотная характеристика канала связи уже выровнена, поступает реальный сигнал, и образцовый сигнал формируется автоматически таким образом, чтобы в каждый момент дискретного времени разность между отсчетами реального сигнала и выходного сигнала АФ была ближайшей (по заданному критерию) к допустимому квантованному значению сигнала. Из этих разностей формируется сигнал ошибки, используемый для адаптации.

Для иллюстрации работы эквалайзера используем *известную* модель входного сигнала неизвестной системы и примем ее в качестве модели образцового сигнала.

В этом случае моделирование процесса выравнивания частотной характеристики неизвестной системы будет включать следующие шаги:

1. Моделирование входного сигнала неизвестной системы (образцового сигнала АФ) — в примере аддитивной смеси сигнала $s(n)$ (22.43) с теми же амплитудами, частотой дискретизации и частотами $f_1 = 500$ Гц, $f_2 = 1500$ Гц с нормальным белым шумом длины $L = 4000$ с нулевым средним и СКО, равным $3\max\{A_1, A_2\} = 0,09$.

2. Моделирование структуры АФ — в примере с алгоритмом адаптации RLS и длиной КИХ-фильтра $N = 50$.
3. Моделирование задержанного образцового сигнала $d(n - D)$ — в примере $D = (N/2) = 25$.
4. Моделирование неизвестной системы — в примере КИХ-фильтра ФНЧ длины $N_1 = 7 \ll N = 50$.
5. Моделирование адаптивной фильтрации и вывод выходного сигнала АФ $y(n) = \hat{d}(n - D)$.
6. Вычисление ИХ и АЧХ неизвестной системы, АФ и их каскадного соединения.

На рис. 22.11 представлены входной сигнал неизвестной системы (отсчеты соединены непрерывными линиями) и его амплитудный спектр, а на рис. 22.12 — выходной сигнал и его амплитудный спектр, где очевидно подавление одной из спектральных составляющих сигнала $s(n)$, вследствие ограниченной полосы пропускания неизвестной системы.

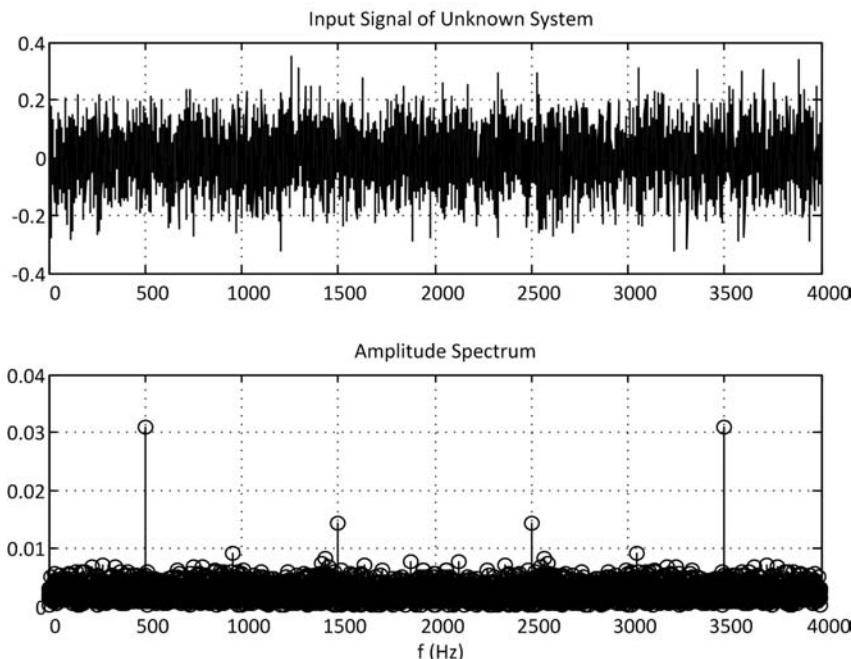


Рис. 22.11. Входной сигнал неизвестной системы и его амплитудный спектр

На рис. 22.13 приведены АЧХ неизвестной системы, АФ и их каскадного соединения — выровненная АЧХ, а на рис. 22.14 — выходной сигнал АФ и его амплитудный спектр с восстановленной спектральной составляющей.

На рис. 22.15 изображены импульсные характеристики неизвестной системы, АФ и их каскадного соединения — оценка задержанного цифрового единичного импульса $\hat{u}_0(n - D)$ (22.45).

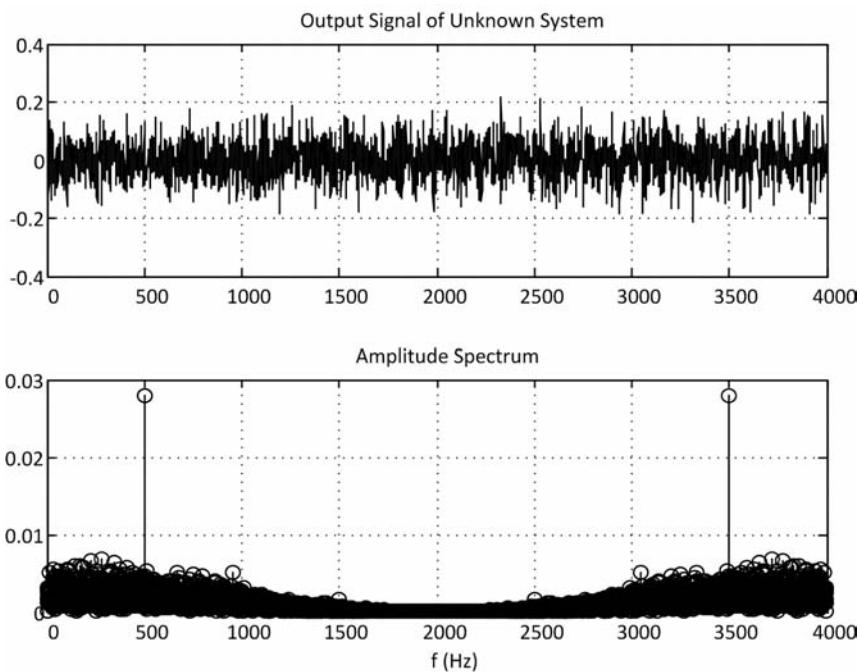


Рис. 22.12. Выходной сигнал неизвестной системы и его амплитудный спектр с подавленной спектральной составляющей

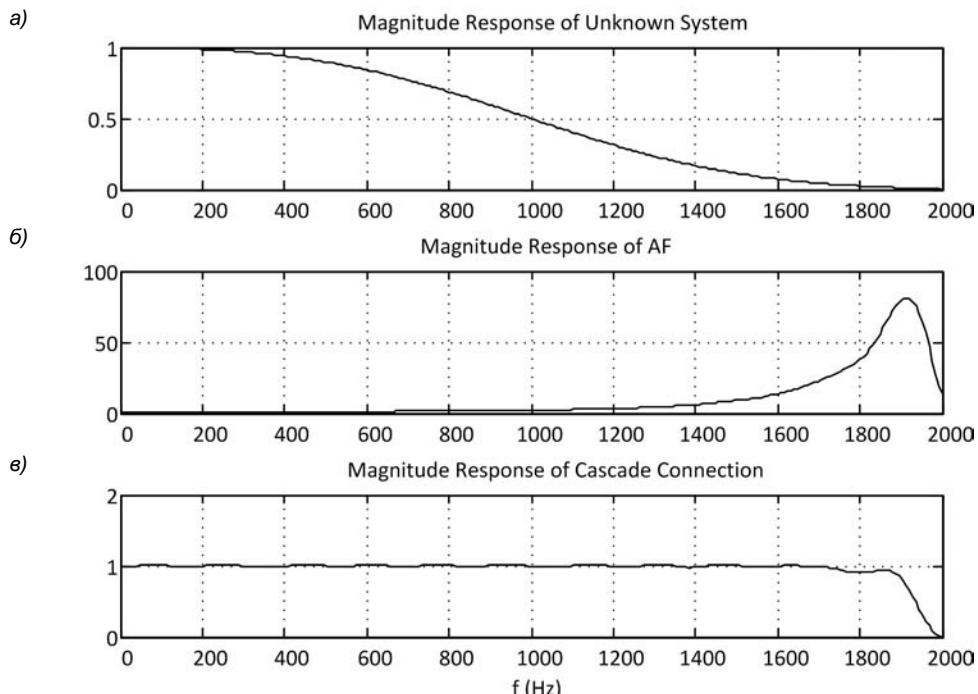


Рис. 22.13. АЧХ неизвестной системы (а), АФ (б) и их каскадного соединения (в)

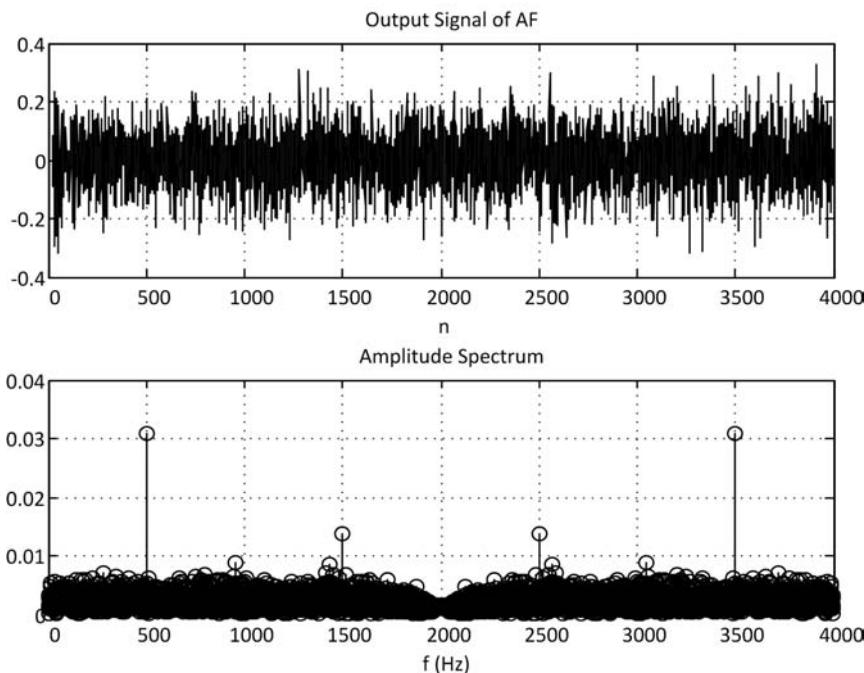


Рис. 22.14. Выходной сигнал адаптивного фильтра и его амплитудный спектр с восстановленной спектральной составляющей

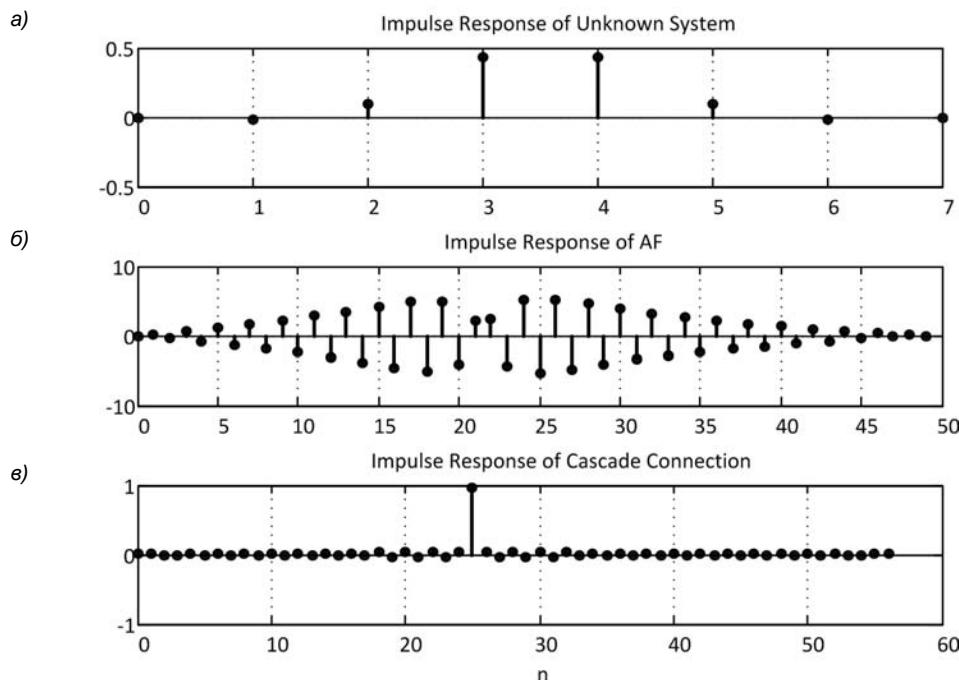


Рис. 22.15. Импульсная характеристика неизвестной системы (а), АФ (б) и их каскадного соединения (в)

22.5.4. Оценка параметров линейного предсказания сигнала

Ранее (см. разд. 13.2.3) рассматривался метод Юла—Уолкера, с помощью которого рассчитывались параметры линейного предсказания — *оценки* параметров АР-модели.

Параметры линейного предсказания анализируемого сигнала $x(n)$:

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k) + \varepsilon(n) \quad (22.46)$$

определялись в результате решения оптимизационной задачи — поиска *минимума среднего квадрата* ошибки линейного предсказания $\varepsilon(n)$, на основе чего была получена СЛАУ (13.29). Запишем ее, выполним замену $N \rightarrow L$, и умножим обе части равенства на -1 :

$$\sum_{k=1}^{M-1} -a_k \left[\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x(n-k)x(n-m) \right] = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x(n)x(n-m), \quad m = 1, 2, \dots, (M-1). \quad (22.47)$$

Похожая оптимизационная задача решалась в фильтре Винера, где параметры АФ h_i определялись в результате поиска *минимума среднего квадрата* сигнала ошибки $\varepsilon(n)$, на основе чего была получена СЛАУ (22.7):

$$\sum_{i=0}^{N-1} h_i \left[\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x(n-i)x(n-m) \right] = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} d(n)x(n-m), \quad m = 0, 1, \dots, (N-1).$$

Если в качестве образцового сигнала выбрать входной сигнал, $d(n) = x(n)$, а в качестве входного сигнала АФ — задержанный сигнал $x(n-1)$, то она примет вид:

$$\sum_{k=1}^{N-1} h_k \left[\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x(n-k)x(n-m) \right] = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x(n)x(n-m), \quad m = 1, 2, \dots, (N-1). \quad (22.48)$$

Сравнивая (22.48) с (22.47), видим, что они совпадают при следующем соотношении для параметров:

$$\begin{cases} a_k = -h_k, & k = 1, 2, \dots, (M-1); \\ a_k = 0, & (M-1) < k \leq (N-1). \end{cases} \quad (22.49)$$

При вычислении *оценок* параметров АФ с помощью того или иного алгоритма адаптации будут получены соответствующие *оценки* параметров линейного предсказания.

Структурная схема определения оценок параметров линейного предсказания представлена на рис. 22.16.

В процессе адаптации АФ стремится преобразовать входной сигнал $x(n-1)$ так, чтобы обеспечить наилучшее приближение (по заданному критерию) *выходного*

сигнала $y(n-1)$ к образцовому сигналу $d(n) = x(n)$ (22.46), и по завершении процесса адаптации будет получена его оценка

$$y(n-1) = \hat{x}(n).$$

Параметры АФ становятся *оценками* параметров линейного предсказания (с учетом соотношения (22.49)), а *сигнал ошибки*

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n) = \hat{\epsilon}(n)$$

дает оценку ошибки линейного предсказания $\hat{\epsilon}(n)$.

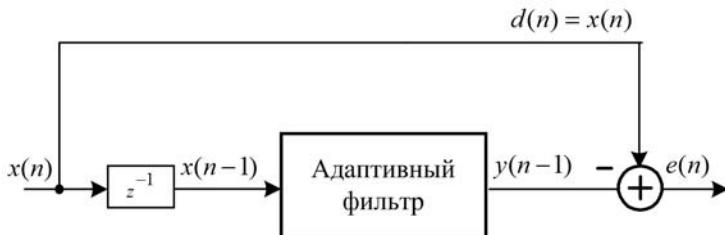


Рис. 22.16. Структурная схема определения оценок параметров линейного предсказания

Если образцовый сигнал трактовать как выходной сигнал АР-модели (13.19), то параметры АФ становятся *оценками* ее параметров, а *сигнал ошибки* дает оценку нормального белого шума, для которого можно рассчитать оценку дисперсии, а затем оценку СПМ (13.40).

Моделирование процесса вычисления оценок параметров АР-модели включает в себя следующие шаги:

1. Моделирование входного сигнала АР-модели — в примере нормального белого шума длины $L = 4000$ с нулевым средним и единичной дисперсией.
2. Задание истинных параметров АР-модели порядка $(M-1) = 6$ — в примере следующего вектора **a**:

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6] = [-0.86 \ 0.54 \ -0.30 \ -0.17 \ 0.22 \ -0.10].$$

3. Вычисление выходного сигнала АР-модели — сигнала $x(n)$ в структуре АФ.
4. Моделирование структуры АФ — в примере с алгоритмом адаптации RLS и длиной КИХ-фильтра $N = 42$.
5. Моделирование адаптивной фильтрации и вывод параметров АФ (с противоположным знаком) — оценок параметров АР-модели.

На рис. 22.17 представлены истинные параметры АР-модели (вектор **a**) и параметры АФ ($-h_k$), $k = 1, 2, \dots, (N-1)$, — оценки параметров АР-модели.

Вычисленное в MATLAB значение среднего абсолютного отклонения (МАЕ) параметров АР-модели (22.48) от их оценок составило

$$\text{MAE_RLS} = 0.0036982$$

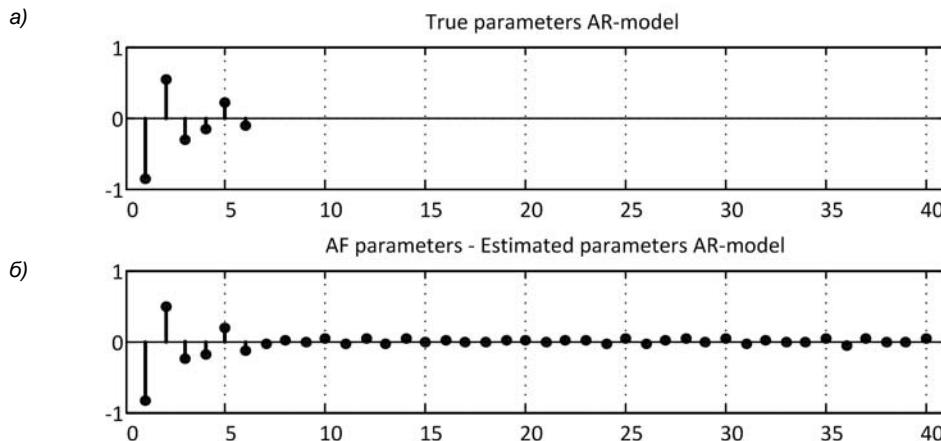


Рис. 22.17. Истинные параметры АР-модели (а) и их оценки (б) — параметры АФ с противоположным знаком

В данном случае был выбран АФ с алгоритмом RLS, у которого дисперсия сигнала ошибки минимально достижимая, как в фильтре Винера. Для повышения быстродействия выбирают алгоритм LMS или NLMS, но при этом значение MAE возрастет.

На практике истинные параметры АР-модели заранее неизвестны, поэтому на этапе моделирования можно сравнить их оценки, вычисленные по методу Юла—Уолкера и с помощью АФ.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Средства GUI FDATool

Средства GUI (Graphical User Interface — графический интерфейс пользователя) предназначены для моделирования объектов посредством интерактивного общения без прямого доступа к программным средствам MATLAB.

В цифровой обработке сигналов широко применяются два стандартных GUI: FDATool и SPTool. Они рассматриваются в этом и следующем приложениях.

Средства GUI FDATool (Filter Design and Analysis Toolbox — средство проектирования и анализа фильтров) предназначены для проектирования цифровых фильтров (ЦФ), включая их синтез, анализ, выбор структуры и ее моделирование с фиксированной точкой (ФТ), также для моделирования полифазных структур многоскоростных систем, в том числе с ФТ.

П1.1. Обращение к FDATool

Обращение к FDATool происходит по команде:

```
fdatool
```

после чего открывается окно **Filter Design & Analysis Tool** (Средство проектирования и анализа фильтра), представленное на рис. П1.1.

Интерфейс данного окна образуют следующие элементы:

- главное меню;
- панель инструментов с кнопками, дублирующими основные команды главного меню;
- панель инструментов в левом нижнем углу (далее коротко — *панель инструментов*) с семью кнопками, регламентирующими действия, связанные с проектированием ЦФ, а именно (снизу вверх):
 - **Design filter** (Синтезировать фильтр);
 - **Import filter from workspace** (Импортировать фильтр из Workspace);
 - **Pole/Zero Editor** (Редактор нулей/и полюсов);
 - **Realize Model** (Создать модель);

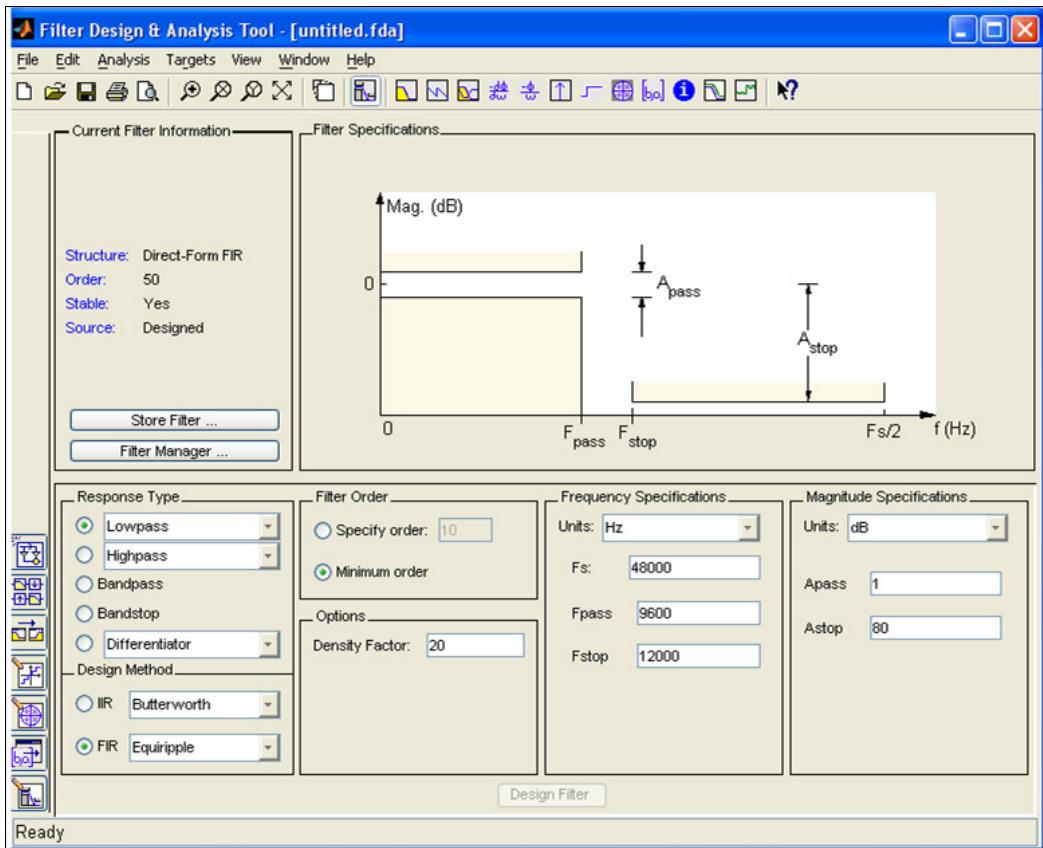


Рис. П1.1. Окно Filter Design & Analysis Tool при нажатой кнопке Design filter на панели инструментов

- **Set quantization parameters** (Установить параметры квантования);
- **Transform filter** (Преобразовать фильтр);
- **Create a multirate filter** (Создать многоскоростной фильтр).

□ нижнюю панель для *ввода* требуемых данных в соответствии с нажатой кнопкой на панели инструментов.

Конфигурация *нижней* панели *меняется* в зависимости от нажатой кнопки на панели инструментов;

□ кнопку, расположенную *внизу по центру окна*, для ввода команды на выполнение действий в соответствии с нажатой кнопкой на панели инструментов;

□ верхнюю панель для *вывода* результатов по завершении данных действий.

Конфигурация *верхней* панели *не меняется*.

При нажатой кнопке **Pole/Zero Editor** (Редактор нулей/и полюсов) кнопка для ввода команды на выполнение действий отсутствует. Пользователь может вручную

менять местоположения нулей и полюсов передаточной функции фильтра и оперативно анализировать синхронные изменения его характеристик.

При нажатой кнопке **Transform filter** (Преобразовать фильтр) можно выполнить преобразования цифровых фильтров, связанные с изменением их типа избирательности и граничных частот, подобно аналоговым фильтрам [38, 51]. С этой кнопкой можно познакомиться самостоятельно, обращаясь к системе помощи MATLAB.

С остальными кнопками на панели инструментов будем знакомиться по мере изложения материала.

П1.2. Синтез цифровых фильтров

Синтез ЦФ выполняется при нажатой кнопке **Design filter** (Синтезировать фильтр) на панели инструментов.

Для синтеза ЦФ необходимо выполнить следующие действия (см. рис. П1.1):

1. Выбрать тип ЦФ в группе **Design Method** (Метод синтеза) с помощью переключателя:
 - **IIR** — БИХ-фильтр;
 - **FIR** — КИХ-фильтр.
2. Выбрать метод синтеза ЦФ в группе **Design Method** в раскрывающихся списках **FIR** или **IIR**.

Среди них для КИХ-фильтров выделим два основных:

- **Equiripple** — метод наилучшей равномерной (чебышевской) аппроксимации;
- **Window** — метод окон.

Для БИХ-фильтров — метод билинейного Z-преобразования для следующих типов фильтров:

- **Butterworth** — фильтр Баттервортса;
- **Chebyshev type I** — фильтр Чебышева I рода;
- **Chebyshev type II** — фильтр Чебышева II рода;
- **Elliptic** — фильтр Золотарева—Кауэра (эллиптический).

3. Задать требования к АЧХ, которые включают в себя:
 - тип избирательности, задаваемый в группе **Response Type** (Тип характеристики) с помощью переключателей:
 - Lowpass** — ФНЧ;
 - Highpass** — ФВЧ;
 - Bandpass** — ПФ;
 - Bandstop** — РФ.

Специальные КИХ-фильтры (см. главу 18) выбирают в раскрывающихся списках переключателей:

- Halfband Lowpass — полуполосный ФНЧ (в списке **Lowpass**);
- Halfband Highpass — полуполосный ФВЧ (в списке **Highpass**);
- Nyquist — фильтр Найквиста (в списке **Lowpass**);
- Hilbert Transformer — преобразователь Гильберта (в списке нижнего переключателя без имени);
- Differentiator — дифференциатор (в том же списке);

- частоту дискретизации и граничные частоты ПП и ПЗ, задаваемые в группе **Frequency Specifications** (Требования к частотам).

Предварительно в раскрывающемся списке **Units** (Единицы измерения) указываются единицы измерения частот, после чего задаются частоты:

- в поле ввода **Fs** — частота дискретизации;
- в соответствующих полях ввода — граничные частоты ПП и ПЗ;
- допустимые отклонения АЧХ в ПП и ПЗ, задаваемые в группе **Magnitude Specifications** (Требования к АЧХ).

Предварительно в раскрывающемся списке **Units** указываются единицы измерения АЧХ:

- Linear (Безразмерный) — если требования задаются к нормированной АЧХ;
- dB (дБ) — если требования задаются к АЧХ (дБ) — характеристике затухания.

После этого в соответствующих полях ввода задаются допустимые отклонения АЧХ.

4. Установить переключатель в группе **Filter Order** (Порядок фильтра):

- **Minimum order** (Минимальный порядок) — порядок ЦФ (порядок передаточной функции) определяется автоматически в соответствии с типом ЦФ и методом синтеза;
- **Specify order** (Произвольный порядок) — порядок ЦФ указывается пользователем в поле ввода переключателя.

5. Установить дополнительные параметры синтеза в группе **Options** (Параметры).

Набор параметров формируется автоматически в зависимости от типа ЦФ и метода синтеза.

Приведем основные параметры:

- **Density Factor** (Коэффициент плотности) — коэффициент плотности сетки частот для КИХ-фильтров при выборе **Design Method**: Equiripple.

Значение параметра (целое число) выбирается по умолчанию (20) или задается в поле ввода.

Большему значению параметра соответствует более высокая точность определения частот альтернанса на более густой сетке частот в алгоритме Ремеза (см. разд. 17.4.1);

- **Scale Passband** (Масштабирование в ПП) — флајок нормирования АЧХ для КИХ-фильтров при выборе **Design Method: Window**.

При установке флајка АЧХ нормируется к своему значению в центре ПП (для РФ — в центре ПП1);

- **Window** (Окно) — раскрывающийся список с именами окон для КИХ-фильтров при выборе **Design Method: Window**.

При нажатии кнопки **View** (Вид) автоматически открывается окно **Window Visualization Tool** (Средство визуализации окна). В нем выводятся графики окна (весовой функции) и его Фурье-изображения и три основных параметра окна (см. разд. 16.3.1);

- **Match Exactly** (Согласование точно) — точное выполнение требований к АЧХ БИХ-фильтра в полосах: ПП и ПЗ (Both); ПП (Passband); ПЗ (Stopband).

Фактические максимальные отклонения АЧХ будут достигать своих максимально допустимых значений в указанных полосах.

6. Нажать кнопку **Design Filter** (Синтезировать фильтр), расположенную внизу по центру окна.

На рис. П1.2 приведено окно **Filter Design & Analysis Tool** при синтезе БИХ-фильтра ФНЧ Баттервортса с исходными данными, выбранными по умолчанию.

По завершении процедуры синтеза на *верхней* панели окна автоматически выводятся его результаты (см. рис. П1.2):

в группе **Current Filter Information** (Информация о текущем фильтре):

- **Structure** — структура фильтра.

Структура фильтра выбирается по умолчанию.

При необходимости выбор другой структуры осуществляется по команде **Edit | Convert Structure** (Редактирование | Преобразование структуры). Открывается окно **Convert Structure** со списком рекомендуемых структур. Выбирается требуемая структура и нажимается кнопка **OK**. Новая структура отображается в группе **Current Filter Information**;

- **Order** — порядок фильтра;
- **Sections** — количество биквадратных звеньев (для БИХ-фильтров);
- **Stable** — устойчивость фильтра: устойчивый (Yes) или неустойчивый (No);
- **Source** — источник получения фильтра: синтезированный (Designed), импортированный (Imported), в составе многоскоростной системы (Multirate Design), полученный в результате трансформации (Transformed);

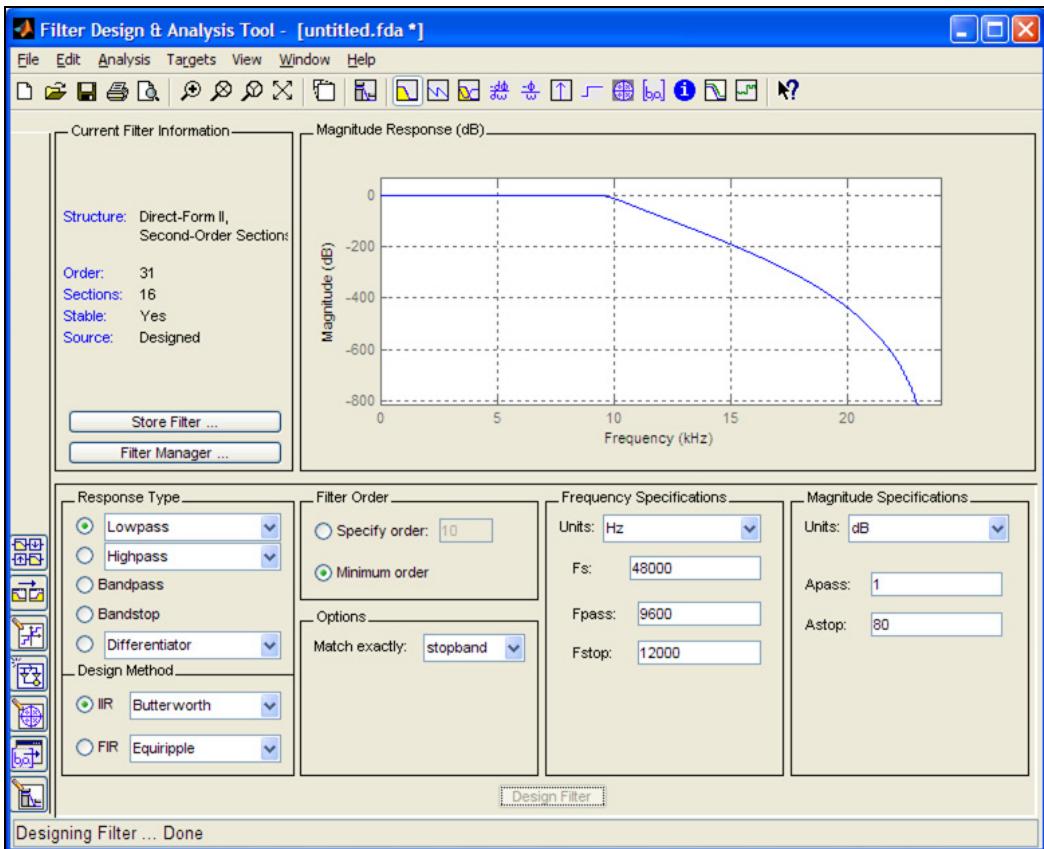


Рис. П1.2. Окно Filter Design & Analysis Tool при синтезе БИХ-фильтра ФНЧ Баттервортса: нижняя панель — исходные данные, верхняя — информация о синтезированном фильтре

- в группе **Magnitude Response (dB)** — поле графика с характеристикой ослабления (15.13) — АЧХ (дБ).

Имя этой группы контекстно связано с анализируемыми характеристиками ЦФ, которые рассматриваются в следующем разделе.

В группе **Current Filter Information** (Информация о текущем фильтре) также размещены две кнопки:

- **Store Filter** (Сохранить фильтр) — для сохранения ЦФ в буфере **Filter Manager** (Диспетчер фильтров).

При нажатии на эту кнопку открывается одноименное окно с именем ЦФ, выбранным по умолчанию, которое пользователь может изменить, после чего нажимается кнопка **OK**;

- **Filter Manager** — буфер со списком сохраненных ЦФ.

При нажатии на эту кнопку открывается одноименное окно со списком имен сохраненных ЦФ. Пользователь может выделить курсором имя ЦФ и оперативно

просмотреть его характеристики в окне **FVTool** (подробнее о нем см. в следующем разделе) или удалить из буфера, нажав кнопку **Remove** (Удалить).

П1.3. Анализ цифровых фильтров

Анализ синтезированного ЦФ производится с помощью следующих команд меню **Analysis** (или дублирующих их кнопок на панели инструментов):

Magnitude Response (АЧХ).

По умолчанию выводится характеристика ослабления (15.13) — АЧХ (дБ).

Для вывода безразмерной АЧХ следует обратиться к команде **Analysis Parameters** (см. ниже) и в открывающемся окне в списке **Magnitude Display** (Изображение АЧХ) выбрать **Magnitude** (АЧХ);

Phase Response (ФЧХ).

По умолчанию выводится ФЧХ со скачками.

Для вывода ФЧХ без скачков следует обратиться к команде **Analysis Parameters** и в открывающемся окне в списке **Phase Display** (Изображение ФЧХ) выбрать **Continuous Phase** (Непрерывная фаза);

Magnitude and Phase Responses (АЧХ и ФЧХ);

Group Delay Response (ГВЗ — групповое время задержки).

По умолчанию выводится безразмерное ГВЗ (5.21) с единицами измерения в отсчетах (in samples).

Для вывода ГВЗ (5.25) с размерностью времени (in time) следует обратиться к команде **Analysis Parameters** и в открывающемся окне в списке **Group Delay Display** (Изображение ГВЗ) выбрать **Time** (Время);

Phase Delay (Фазовая задержка);

Impulse Response (Импульсная характеристика).

По умолчанию ИХ выводится в шкале дискретного времени **Time** (Время).

Для вывода в шкале дискретного нормированного времени следует щелкнуть правой кнопкой мыши на наименовании оси абсцисс и выбрать значение **Samples** (Отсчеты);

Step Response (Переходная характеристика);

Pole/Zero Plot (Карта нулей и полюсов);

Filter Coefficients (Коэффициенты передаточной функции);

Filter Information (Свойства фильтра) — структуры ЦФ в виде объекта `dfilt`;

Magnitude Response Estimate (Оценка АЧХ фильтра при входном широкополосном случайном сигнале) — для ЦФ с ФТ;

Round-off Noise Power Spectrum (Оценка спектральной плотности мощности реакции фильтра при входном широкополосном случайном сигнале) — для ЦФ с ФТ.

Помимо этого в меню **Analysis** (Анализ) включены дополнительные команды:

- Filter Specifications** (Требования к АЧХ) — по этой команде в поле графика выводятся требования к *характеристике затухания* (15.12);
- Overlay Analysis** (Наложение характеристик) — по этой команде выводится список флашков, имена которых дублируют вышеперечисленные команды анализа. Установив соответствующий флашок, можно добавить в поле графика еще одну характеристику, поверх имеющейся. По умолчанию установлен флашок **None** (Добавляемой характеристики нет);
- Analysis Parameters** (Параметры анализа) — по этой команде открывается окно с тем же именем, в котором можно изменить параметры анализируемой характеристики (их список зависит от характеристики). Затем нажимаются кнопки **Apply** (Применить) и **OK**;
- Sampling Frequency** (Частота дискретизации) — по этой команде открывается одноименное окно, в котором можно изменить частоту дискретизации и/или единицы ее измерения. Затем нажимаются кнопки **Apply** (Применить) и **OK**.

Последние две команды дублируются в *контекстном меню*, которое открывается щелчком правой кнопки мыши на свободном поле графика.

Характеристики фильтра удобно анализировать в FVTool (Filter Visualization Tool — средство визуализации фильтра), обращение к которому выполняется по команде **View | Visualization Tool** (Вид | Средство визуализации). Список команд меню **Analysis** (Анализ) FVTool дублирует список одноименной команды меню FDATool.

Копирование графиков, например в документ Word, возможно только из окна FVTool по команде **Edit | Copy Figure** (Редактирование | Копировать график).

Координаты точки (точек) графика выводятся в отдельной всплывающей подсказке по щелчку любой кнопки мыши.

На рис. П1.3 приведено окно **Filter Visualization Tool** с АЧХ БИХ-фильтра ФНЧ Баттервортса и выведенными координатами точек.

Контекстное меню всплывающей подсказки с координатами точки открывается по щелчку правой кнопки мыши в его поле. Среди команд меню выделим три основные:

- FontSize** (Размер шрифта) — изменение размера шрифта текста в окошке;
- Delete** (Удалить) — удаление выделенной точки;
- Delete all** (Удалить все) — удаление всех точек на графике.

Выделение части анализируемой характеристики производится с помощью курсора при нажатой кнопке **Zoom in** (Увеличить масштаб) на панели инструментов, а возврат к исходной характеристике — по команде контекстного меню **Reset to Original View** (Вернуть исходный вид).

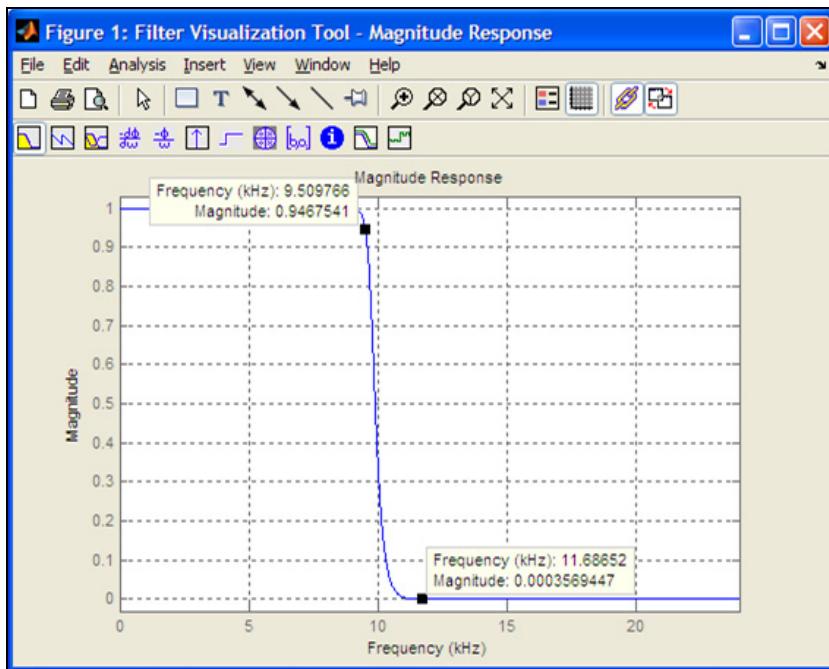


Рис. П1.3. Окно Filter Visualization Tool с АЧХ БИХ-фильтра ФНЧ Баттервортса и выведенными координатами точек

П1.4. Моделирование цифровых фильтров с фиксированной точкой

Моделирование структуры цифрового фильтра с фиксированной точкой (ЦФ с ФТ) выполняется после синтеза ЦФ. Во избежание путаницы, будем его называть исходным ЦФ.

В каскадной структуре БИХ-фильтра до моделирования структуры с ФТ выполняется расстановка звеньев (см. разд. 8.5.7) и масштабирование (см. разд. 8.8.1).

П1.4.1. Расстановка звеньев и масштабирование

Для расстановки звеньев и масштабирования необходимо выполнить следующие действия:

1. Загрузить исходный ЦФ из буфера Filter Manager.
2. По команде меню **Edit | Reorder and Scale Second-Order Sections** (Редактирование | Расстановка и масштабирование звеньев 2-го порядка) открыть окно **Reordering and Scaling of Second-Order Sections** (рис. П1.4).
3. В группе **Reordering** (Расстановка) установить переключатель **Least selective section to most selective section** (От наименее чувствительного звена к наиболее чувствительному звену) и нажать кнопки **Apply** (Применить) и **OK**.

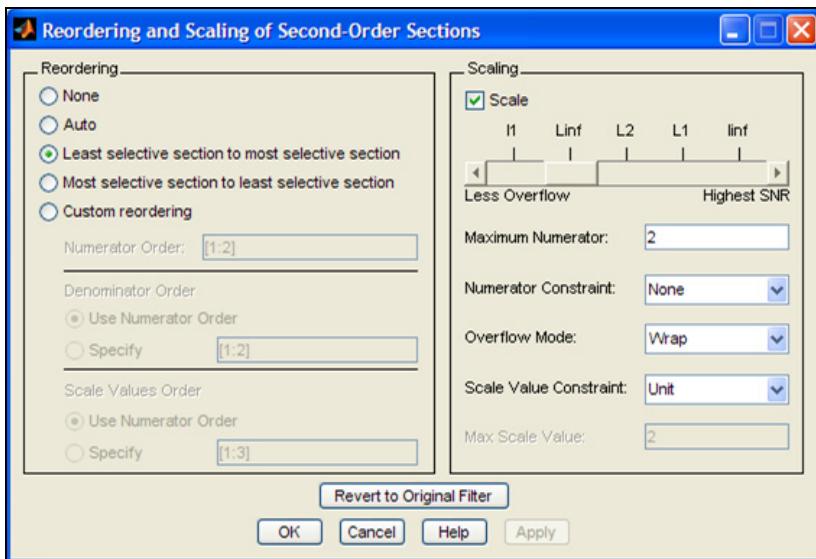


Рис. П1.4. Окно Reordering and Scaling of Second-Order Sections
с типовыми установками

В этом случае звенья будут расставлены в соответствии с алгоритмом, приведенным в разд. 8.5.7.

4. В группе **Scaling** (Масштабирование) выполнить следующие действия¹:
 - установить флажок **Scale** (Масштаб);
 - установить бегунок в положение **Linf** — для масштабирования на основе нормы $\|x\|_\infty$ (см. разд. 8.8);
 - в поле ввода **Maximum Numerator** (Максимальное значение числителя) установить целое значение, ближайшее (в сторону увеличения) к значению наибольшего коэффициента числителя; обычно оно не превосходит 2, поэтому это значение выбрано по умолчанию;
 - в раскрывающемся списке **Numerator Constraint** (Ограничение числителя) выбрать None, что соответствует отсутствию ограничений на масштабирование коэффициентов числителя;
 - в раскрывающемся списке **Overflow Mode** (Режим переполнения) выбрать Wrap (действия в соответствии с выбранным режимом переполнения Wrap или Saturate поясняются далее в табл. П1.5);
 - в раскрывающемся списке **Scale Value Constraint** (Ограничение коэффициента усиления) выбрать Unit — максимальный коэффициент усиления равен единице.
5. Нажать кнопку **Apply** (Применить) и затем кнопку **OK**.

¹ Приводится типовой вариант установок, предлагаемый по умолчанию. С другими вариантами можно поэкспериментировать самостоятельно.

После нажатия кнопки **Apply** можно по команде меню **Analysis | Filter Coefficients** проанализировать результаты масштабирования, и если необходимо, изменить установки, нажав кнопку **Revert to Original Filter** (Вернуться к исходному фильтру).

Если хотя бы один из коэффициентов числителя превысил единицу, выполняется нормирование коэффициентов числителей всех звеньев (*см. разд. 8.8.3*). Для этого в поле ввода **Maximum Numerator** устанавливается 1, а списке **Numerator Constraint** выбирается Normalize или Power to Two (Нормирование к степени двойки).

После этого БИХ-фильтр сохраняется в буфере **Filter Manager** для последующего моделирования с ФТ.

П1.4.2. Установка параметров квантования

Для исходного ЦФ, загруженного из буфера **Filter Manager**, моделирование с ФТ выполняется при нажатой кнопке **Set quantization parameters** (Установить параметры квантования) на панели инструментов.

Конфигурация нижней панели окна **Filter Design & Analysis Tool** изменится — на ней будет выведен раскрывающийся список **Filter Arithmetic** (Арифметика фильтра).

В этом списке следует выбрать значение **Fixed-point** (Фиксированная точка).

После этого конфигурация нижней панели вновь изменится — в правой части появятся три вкладки (рис. П1.5):

- Coefficients** (Коэффициенты);
- Input/Output** (Вход/Выход);
- Filter Internals** (Внутреннее состояние фильтра).

Элементы управления на всех трех вкладках контекстно связаны со свойствами объекта `dfilt` (*см. разд. 6.3*) при выборе `Arithmetric: 'fixed'`.

Для моделирования структуры ЦФ с ФТ необходимо выполнить следующие действия.

1. Установить параметры квантования коэффициентов передаточной функции на вкладке **Coefficients** (*см. разд. П1.4.3*).
2. Установить параметры квантования входного и выходного сигналов на вкладке **Input/Output** (*см. разд. П1.4.4*).
3. Установить параметры квантования арифметических операций на вкладке **Filter Internals** (*см. разд. П1.4.5*).
4. Нажать кнопку **Apply** (Применить).
5. Проанализировать характеристики ЦФ с ФТ с помощью команд меню **Analysis** (Анализ).

В поле графика одновременно выводятся характеристики ЦФ с ФТ (непрерывной линией) и исходного ЦФ (пунктирной линией).

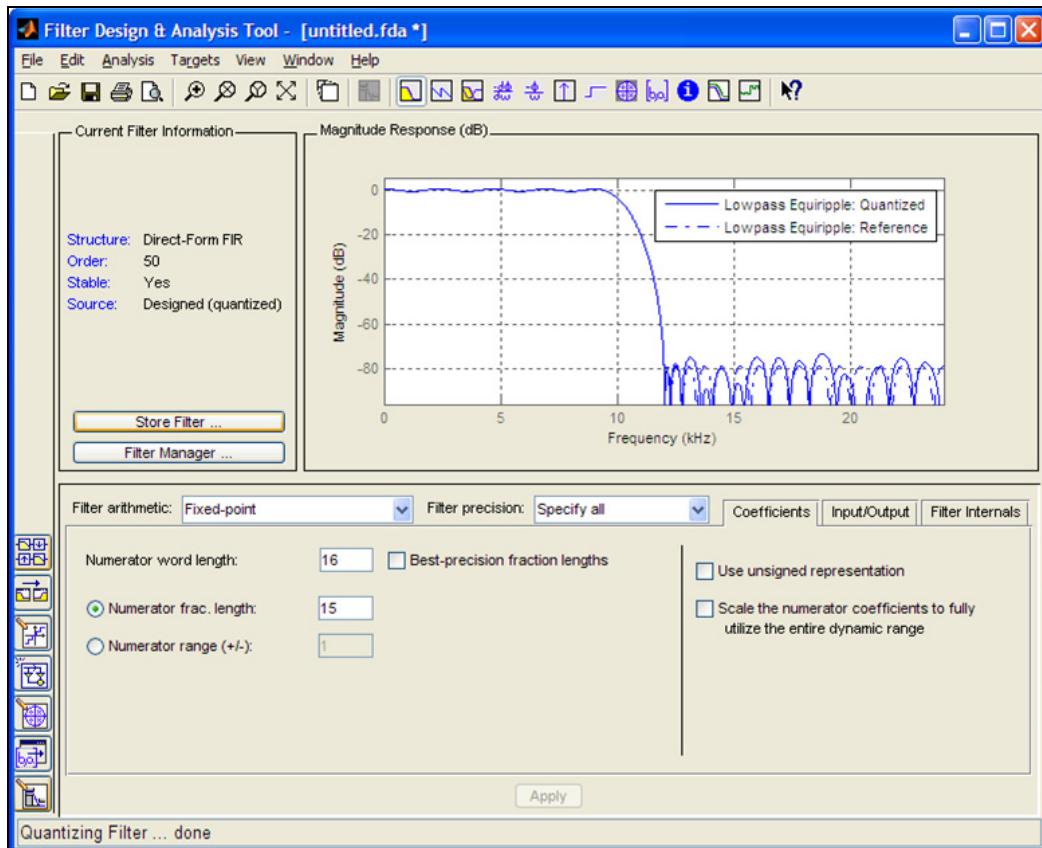


Рис. П1.5. Окно Filter Design & Analysis Tool при нажатой кнопке Set quantization parameters на панели инструментов и открытой вкладке Coefficients для КИХ-фильтра

Размещение легенды выполняется по команде меню View | Legend (Вид | Легенда).

Вследствие квантования коэффициентов передаточной функции АЧХ фильтра изменится, поэтому необходимо контролировать выполнение требований к АЧХ.

Для БИХ-фильтра контролируется его устойчивость.

6. Сохранить ЦФ с ФТ в буфере Filter Manager.

П1.4.3. Параметры квантования коэффициентов

Список параметров квантования коэффициентов передаточной функции на вкладке **Coefficients** зависит от типа ЦФ, КИХ- или БИХ-фильтр.

Для КИХ-фильтров на *всех вкладках* в раскрывающемся списке **Filter precision** (Точность фильтра) выбирается режим для точности представления данных (см. рис. П1.5):

- Full — с максимально возможной точностью;
- Specify all — с точностью, определяемой пользователем.

Список параметров квантования при выборе режима Specify all (см. рис. П1.5) и соответствующих свойств объекта `dfilt` представлен в табл. П1.1.

Таблица П1.1. Параметры квантования КИХ-фильтров на вкладке **Coefficients**

Параметр квантования КИХ-фильтра	Свойство объекта <code>dfilt</code>
Numerator word length (Длина слова числителя) — длина слова для коэффициентов	<code>CoeffWordLength</code>
Best-precision fraction lengths (Длина дробной части при наилучшей точности) — флагок управления длиной дробной части слова для коэффициентов. При установке флагшка длина дробной части рассчитывается автоматически для представления коэффициентов с максимальной точностью без переполнений	<code>CoeffAutoScale</code>
Numerator frac. length (Длина дробной части числителя) — длина дробной части слова для коэффициентов	<code>NumFracLength</code>
Numerator range (+/-) (Диапазон значений числителя) — положительное число, определяющее диапазон, в котором автоматически определяется длина дробной части слова для коэффициентов. Например, при Numerator range: 1 длина дробной части будет автоматически выбираться из диапазона $[-1; 1]$ ¹	—
Use unsigned representation (Использовать беззнаковое представление) — флагок управления знаковым/беззнаковым представлением коэффициентов. При установке флагшка коэффициенты представляются без знака (положительные) и старший бит считается значащим, а при сброcе — со знаком, где старший бит — знаковый	<code>Signed</code>
Scale the numerator coefficients to fully utilize the entire dynamic range (Масштабировать коэффициенты в соответствии с заданным динамическим диапазоном) — флагок, при установке которого коэффициенты масштабируются так, чтобы обеспечить максимальный динамический диапазон — максимальное по модулю значение коэффициента в заданном формате, соответствующее 1 в формате с ПТ. Значения АЧХ умножаются на коэффициент, равный отношению максимальных коэффициентов после и до масштабирования	—

¹ В MATLAB квантованные данные представляются в диапазоне $[-1; 1]$, а не $[-1; 0,999\dots]$, как в ЦПОС с ФТ в дополнительном коде.

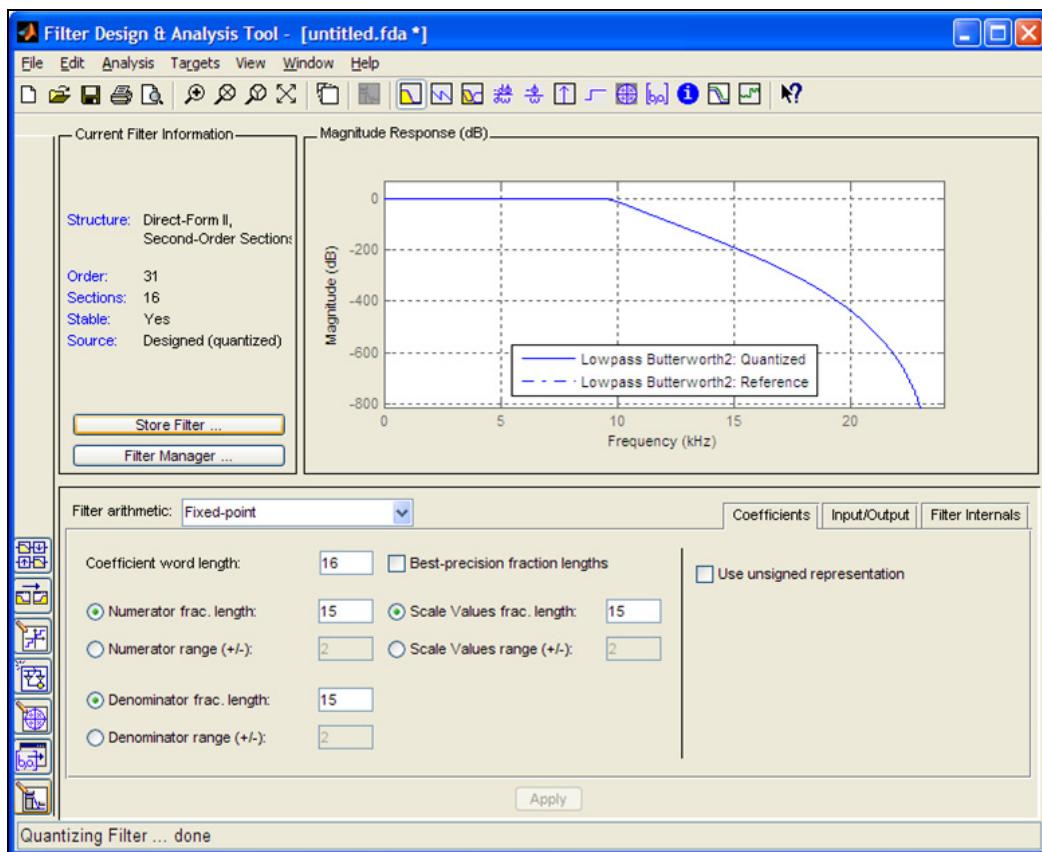


Рис. П1.6. Окно Filter Design & Analysis Tool при нажатой кнопке Set quantization parameters на панели инструментов и открытой вкладке Coefficients для БИХ-фильтра

Список параметров квантования БИХ-фильтров (рис. П1.6) приводится в табл. П1.2.

Таблица П1.2. Параметры квантования БИХ-фильтров на вкладке Coefficients

Параметр квантования БИХ-фильтра	Свойство объекта dfilter
Coefficient word length (Длина слова коэффициентов) — длина слова для коэффициентов числителя и знаменателя	CoeffWordLength
Best-precision fraction lengths — см. табл. П1.1	CoeffAutoScale
Numerator frac. length (Длина дробной части числителя) — длина дробной части слова для коэффициентов числителя	NumFracLength
Numerator range (+/-) — см. табл. П1.1 для коэффициентов числителя	—
Denominator frac. length (Длина дробной части знаменателя) — длина дробной части слова для коэффициентов знаменателя	DenFracLength

Таблица П1.2 (окончание)

Параметр квантования БИХ-фильтра	Свойство объекта <code>dfilt</code>
Denominator range (+/-) (Диапазон значений знаменателя) — аналогичен параметру Numerator frac. length (см. табл. П1.1) для коэффициентов знаменателя	—
Scale Values frac. length (Длина дробной части слова коэффициентов усиления) — длина дробной части слова для коэффициентов усиления в каскадной структуре	<code>ScaleValueFracLength</code>
Scale Values range (+/-) (Диапазон значений коэффициентов усиления) — аналогичен параметру Numerator frac. length (см. табл. П1.1) для коэффициентов усиления	—
Use unsigned representation — флагок управления знаковым/беззнаковым представлением коэффициентов числителя и знаменателя (см. табл. П1.1)	<code>Signed</code>

П1.4.4. Параметры квантования входного и выходного сигналов

Список параметров квантования входного и выходного сигналов на вкладке **Input/Output** зависит от его типа ЦФ, КИХ- или БИХ-фильтр.

Список параметров квантования для КИХ-фильтров при выборе режима **Specify all** (рис. П1.7) и соответствующих свойств объекта `dfilt` представлен в табл. П1.3.

Таблица П1.3. Параметры квантования КИХ-фильтров на вкладке **Input/Output**

Параметр квантования КИХ-фильтра	Свойство объекта <code>dfilt</code>
Input word length (Длина слова на входе) — длина слова для значений входного сигнала	<code>InputWordLength</code>
Input fraction length (Длина дробной части на входе) — длина дробной части слова для значений входного сигнала	<code>InputFracLength</code>
Input range (+/-) (Диапазон значений на входе) — аналогичен параметру Numerator frac. length (см. табл. П1.1) для значений входного сигнала	—
Output word length (Длина слова на выходе) — длина слова для значений выходного сигнала	<code>OutputWordLength</code>
Output fraction length (Длина дробной части на выходе) — длина дробной части слова для значений выходного сигнала	<code>OutputFracLength</code>
Output range (+/-) (Диапазон значений на выходе) — аналогичен параметру Numerator frac. length (см. табл. П1.1) для выходного сигнала	—

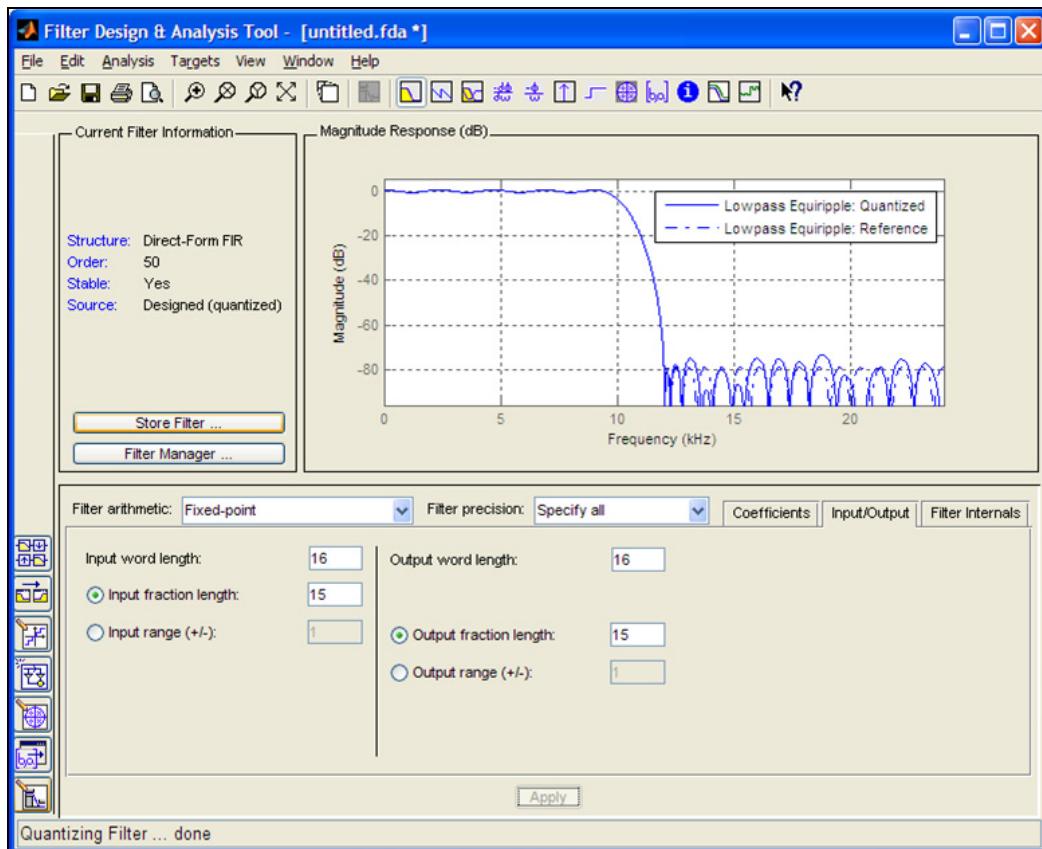


Рис. П1.7. Окно Filter Design & Analysis Tool
при нажатой кнопке Set quantization parameters на панели инструментов
и открытой вкладке Input/Output для КИХ-фильтра

Список параметров квантования БИХ-фильтров (рис. П1.8) приводится в табл. П1.4.

Таблица П1.4. Параметры квантования БИХ-фильтров на вкладке Input/Output

Параметр квантования БИХ-фильтра	Свойство объекта <code>dfilt</code>
Input word length — см. табл. П1.3	<code>InputWordLength</code>
Input fraction length — см. табл. П1.3	<code>InputFracLength</code>
Input range (+/-) — аналогичен параметру свойства Numerator frac. length (см. табл. П1.1) для значений входного сигнала	—
Output word length — см. табл. П1.3	<code>OutputWordLength</code>
Avoid overflow (Предотвращение переполнения) — флагок управления переполнением для выходного сигнала.	—

Таблица П1.4 (окончание)

Параметр квантования БИХ-фильтра	Свойство объекта <code>dfilt</code>
При сбросе флажка предотвращение переполнений достигается путем установки длины дробной части для значений выходного сигнала с помощью свойств Output fraction length и Output range (+/-) .	
При установке флажка длина дробной части устанавливается автоматически для минимизации ошибок при переполнении	
Output fraction length — см. табл. П1.3	<code>OutputFracLength</code>
Output range (+/-) — аналогичен параметру Numerator frac. length (см. табл. П1.1) для выходного сигнала	—
Section input word length (Длина слова на входе звена) — длина слова для значений сигнала на входе звеньев в каскадной структуре	<code>SectionInputWordLength</code>
Avoid overflow — флажок управления переполнением для значений сигнала на входе звеньев в каскадной структуре. При сбросе флажка предотвращение переполнений достигается путем установки длины дробной части для значений сигнала на входе звеньев с помощью свойства Section input fraction length . При установке флажка длина дробной части слова устанавливается автоматически для минимизации ошибок при переполнении	<code>SectionInputAutoSize</code>
Section input fraction length (Длина дробной части слова на входе звена) — длина дробной части слова для значений сигнала на входе звеньев в каскадной структуре	<code>SectionInputFracLength</code>
Section output word length (Длина слова на выходе звена) — длина слова для значений сигнала на выходе звеньев в каскадной структуре	<code>SectionOutputWordLength</code>
Avoid overflow — флажок управления переполнением для значений сигнала на выходе звеньев в каскадной структуре. При сбросе флажка предотвращение переполнений достигается путем установки длины дробной части для значений сигнала на выходе звеньев с помощью свойства Section output fraction length . При установке флажка длина дробной части устанавливается автоматически для минимизации ошибок при переполнении	<code>SectionOutputAutoSize</code>
Section output fraction length (Длина дробной части слова на выходе звена) — длина дробной части слова для значений сигнала на выходе звеньев в каскадной структуре	<code>SectionOutputFracLength</code>

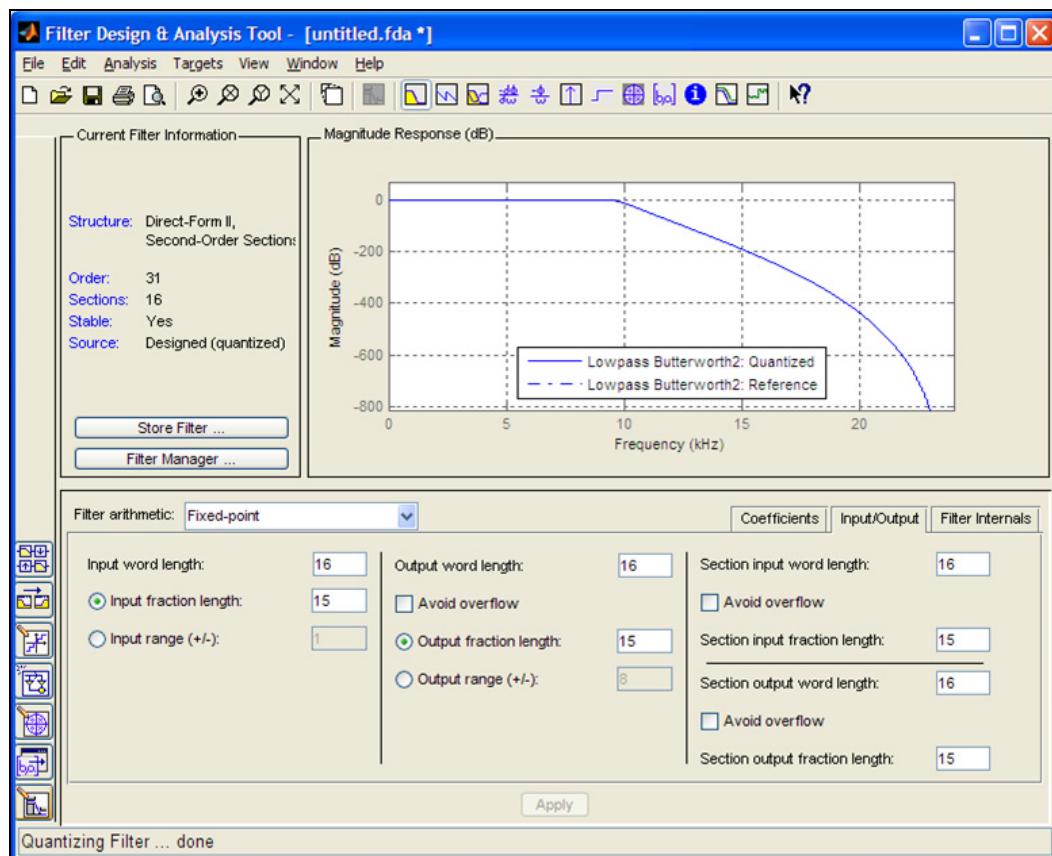


Рис. П1.8. Окно Filter Design & Analysis Tool при нажатой кнопке Set quantization parameters на панели инструментов и открытой вкладке Input/Output для БИХ-фильтра

П1.4.5. Параметры квантования арифметических операций

Список параметров квантования арифметических операций на вкладке **Filter Internals** зависит от типа ЦФ, КИХ- или БИХ-фильтра.

Список параметров квантования для КИХ-фильтров при выборе режима **Specify all** (рис. П1.9) и соответствующих свойств объекта `dfilt` представлен в табл. П1.5.

Таблица П1.5. Параметры квантования КИХ-фильтров на вкладке **Filter Internals**

Параметр квантования КИХ-фильтра	Свойство объекта <code>dfilt</code>
Rounding mode (Режим округления) — методы округления при представлении данных в заданном формате:	<code>RoundMode</code>
• Ceiling — округление в направлении ∞ : отрицательное число усекается, а для положительного берется значение ближайшего верхнего уровня квантования;	<code>RoundMode: 'ceil'</code>

Таблица П1.5 (продолжение)

Параметр квантования КИХ-фильтра	Свойство объекта <code>dfilt</code>
<ul style="list-style-type: none"> • Nearest — округление до ближайшего целого: выбирается значение ближайшего уровня квантования, и если оно точно попадает на границу между соседними уровнями, берется значение ближайшего верхнего уровня; • Nearest (convergent) — округление до ближайшего четного: выбирается значение ближайшего уровня квантования, и если оно попадает точно на границу между соседними уровнями квантования, то выбирается значение ближайшего уровня, соответствующего четному числу; • Round — округление до ближайшего целого: выбирается значение ближайшего уровня квантования, и если оно попадает точно на границу между соседними уровнями, то берется значение ближайшего верхнего уровня для положительного и нижнего — для отрицательного числа; • Zero — округление в направлении нуля: выбирается значение ближайшего нижнего уровня квантования (тождественно усечению); • Floor — округление в направлении $-\infty$: положительное число усекается, а для отрицательного берется значение ближайшего нижнего уровня квантования 	<code>RoundMode: 'nearest'</code> <code>RoundMode: 'convergent'</code> <code>RoundMode: 'round'</code> <code>RoundMode: 'fix'</code> <code>RoundMode: 'floor'</code>
Overflow Mode (Режим переполнения) — режимы переполнения при представлении данных в заданном формате: <ul style="list-style-type: none"> • Wrap — модульная арифметика: при переполнении результат автоматически заменяется значением по модулю 2 (отрицательное число, меньшее либо равное -1, суммируется с ближайшим по модулю 2^N, а из положительного, большего 1, вычитается ближайшее 2^N). <p>Например, десятичные числа <code>[-2 -1.5 -1 -0.5 0 0.5 1 1.5 2]</code> будут заменены числами <code>[0 0.5 1 -0.5 0 0.5 1 -0.5 0]</code></p> <ul style="list-style-type: none"> • Saturate — арифметика насыщения: при переполнении результат автоматически заменяется максимально возможным (по модулю) для формата слова. <p>Например, десятичные числа <code>[-2 -1.5 -1 -0.5 0 0.5 1 1.5 2]</code> будут заменены числами <code>[-1 -1 -1 -0.5 0 0.5 1 1 1]</code></p>	<code>OverflowMode</code> <code>OverflowMode: 'wrap'</code> <code>OverflowMode: 'saturate'</code>

Таблица П1.5 (окончание)

Параметр квантования КИХ-фильтра	Свойство объекта <code>dfilt</code>
Product word length (Длина слова произведения) — длина двойного слова MSB : LSB для произведения	<code>ProductWordLength</code>
Product fraction length (Длина дробной части произведения) — длина дробной части двойного слова MSB : LSB для произведения	<code>ProductFracLength</code>
Accum. word length (Длина слова для суммы) — длина расширенного слова EXT : MSB : LSB для суммы	<code>AccumWordLength</code>
Accum. fraction length (Длина дробной части слова для суммы) — длина дробной части расширенного слова EXT : MSB : LSB для суммы	<code>AccumFracLength</code>

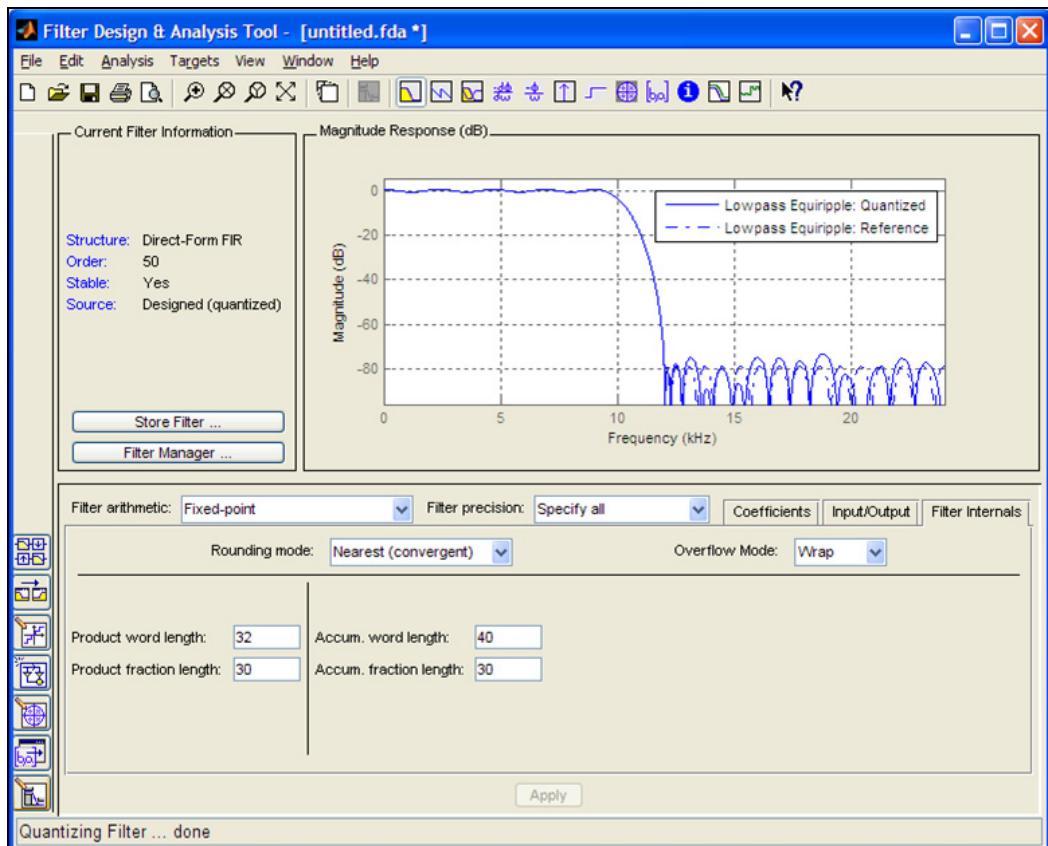


Рис. П1.9. Окно Filter Design & Analysis Tool при нажатой кнопке Set quantization parameters на панели инструментов и открытой вкладке Filter Internals для КИХ-фильтра

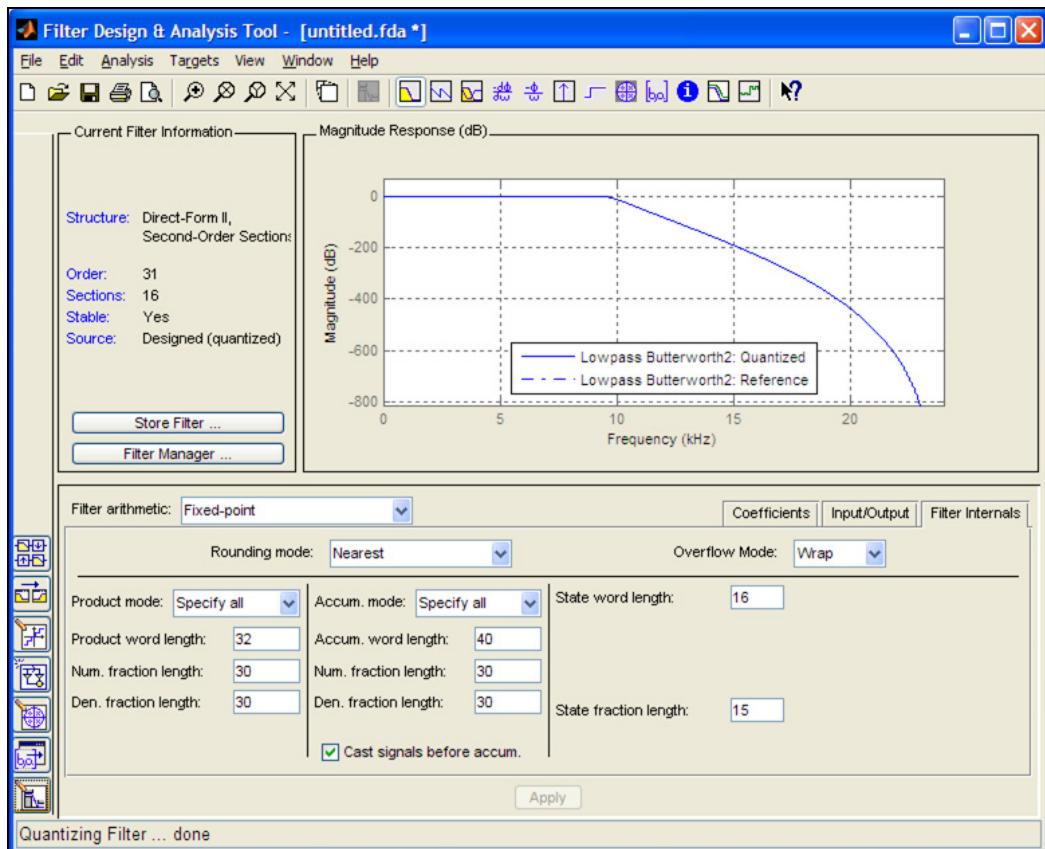


Рис. П1.10. Окно Filter Design & Analysis Tool при нажатой кнопке Set quantization parameters на панели инструментов и открытой вкладке Filter Internals для БИХ-фильтра

Список параметров квантования БИХ-фильтров (рис. П1.10) приводится в табл. П1.6.

Таблица П1.6. Параметры квантования БИХ-фильтров на вкладке Filter Internals

Параметр квантования БИХ-фильтра	Свойство объекта dfilt
Rounding mode — см. табл. П1.5	RoundMode
Overflow Mode — см. табл. П1.5	
Product mode (Режим для произведения) — формат при пересылке (сохранении) результата умножения (произведения), представленного в формате двойного слова MSB : LSB:	ProductMode
<ul style="list-style-type: none"> • Specify all — сохранение в произвольным формате, которое отображается свойствами Product word length и Product fraction length; • Full precision — сохранение двойного слова MSB : LSB; 	ProductMode: 'SpecifyPrecision'
	ProductMode: 'FullPrecision'

Таблица П1.6 (продолжение)

Параметр квантования БИХ-фильтра	Свойство объекта <code>dfilt</code>
<ul style="list-style-type: none"> • Keep LSB — сохранение младшего слова LSB; • Keep MSB — сохранение старшего слова MSB 	<code>ProductMode: 'KeepLSB'</code> <code>ProductMode: 'KeepMSB'</code>
Product word length — см. табл. П1.5	<code>ProductWordLength</code>
Num. frac. length — длина дробной части для локальных произведений в нерекурсивной части разностного уравнения	<code>NumProdFracLength</code>
Den. frac. length — длина дробной части для локальных произведений в рекурсивной части разностного уравнения	<code>DenProdFracLength</code>
Accum. mode — формат при пересылке (сохранении) результата сложения (суммы), представленного в формате расширенного слова EXT : MSB : LSB. Принимает такие же значения, как в свойстве Product mode	<code>AccumMode</code>
Accum. word length — см. табл. П1.5	<code>AccumWordLength</code>
Num. frac. length — длина дробной части для суммы в нерекурсивной части разностного уравнения	<code>NumAccumFracLength</code>
Den. frac. length — длина дробной части для суммы в рекурсивной части разностного уравнения	<code>DenAccumFracLength</code>
Cast signals before accum. (Отбрасываемые сигналы перед суммированием) — флагок управления форматом слагаемых перед суммированием. При установке флагжка слагаемые представляются в формате расширенного слова, а при сбросе сохраняют формат предыдущей операции	<code>CastBeforeSum</code>
State word length (Длина слова состояния) — длина слова для элементов задержки (ячеек памяти) в каскадной структуре Direct-Form II, SOS	<code>StateWordLength</code>
State fraction length (Длина дробной части состояния) — длина дробной части слова для элементов задержки в каскадной структуре Direct-Form II, SOS	<code>StateFracLength</code>
Num. state word length (Длина слова состояния чисителя) — длина слова для элементов задержки воздействия в каскадной структуре Direct-Form I, SOS	<code>NumStateWordLength</code>
Den. state word length (Длина слова состояния знаменателя) — длина слова для элементов задержки реакции в каскадной структуре Direct-Form I, SOS	<code>DenStateWordLength</code>

Таблица П1.6 (окончание)

Параметр квантования БИХ-фильтра	Свойство объекта <code>dfilt</code>
Num. fraction length (Длина дробной части числителя) — длина дробной части слова для элементов задержки воздействия в каскадной структуре Direct-Form I, SOS	<code>NumStateFracLength</code>
Den. fraction length (Длина дробной части знаменателя) — длина дробной части слова для элементов задержки воздействия в каскадной структуре Direct-Form I, SOS	<code>DenStateFracLength</code>

П1.5. Моделирование полифазных структур многоскоростных систем

Моделирование полифазных структур многоскоростных систем выполняется при нажатой кнопке **Create a multirate filter** (Создать многоскоростной фильтр) на панели инструментов.

Конфигурация нижней панели окна **Filter Design & Analysis Tool** изменится — на ней появятся две группы (без имени) с полями ввода и переключателями (рис. П1.11).

Моделирование полифазной структуры многоскоростной системы осуществляется в два этапа:

- синтез фильтра-прототипа.

Фильтром-прототипом называют КИХ-фильтр ФНЧ, работающий на "высокой" частоте дискретизации, на основе которого формируется полифазная структура многоскоростной системы (см. разд. 21.4);

- моделирование полифазной структуры многоскоростной системы.

Для их реализации необходимо выполнить следующие действия (см. рис. П1.11).

1. Выбрать тип многоскоростной системы в раскрывающемся списке **Type** (Тип):

- **Interpolator** (Интерполятор) — система однократной интерполяции;
- **Decimator** (Дециматор) — система однократной децимации;
- **Fractional-rate converter** (Передискретизатор) — система однократной передискретизации.

2. Задать коэффициент преобразования частоты:

- в поле **Interpolation Factor** — коэффициент интерполяции L ;
- в поле **Decimation Factor** — коэффициент децимации M .

3. Выбрать единицы измерения частоты в списке **Units** — Hz.

4. Задать "высокую" частоту дискретизации фильтра-прототипа в поле ввоза **Fs**.

5. Выбрать фильтр-прототип с помощью переключателя:

- **Use current FIR filter** (Использовать текущий КИХ-фильтр) — КИХ-фильтр ФНЧ, синтезированный пользователем и загружаемый из буфера **Filter Manager**.

Специфика требований к АЧХ фильтра обсуждается в разд. П1.5.1;

- **Use a default Nyquist FIR filter** (Использовать КИХ-фильтр Найквиста по умолчанию) — фильтр Найквиста (см. разд. 18.1.4), синтезируемый автоматически.

В обоих случаях *длина* фильтра-прототипа $N = (R + 1)$, где R — его порядок, должна быть *кратной* коэффициенту интерполяции (децимации) для того, чтобы длина полифазных фильтров была *целым* числом.

В фильтре Найквиста это выполняется автоматически.

6. Нажать кнопку **Create Multirate Filter**, расположенную внизу по центру окна.

7. Сохранить полифазную структуру в буфере **Filter Manager**.

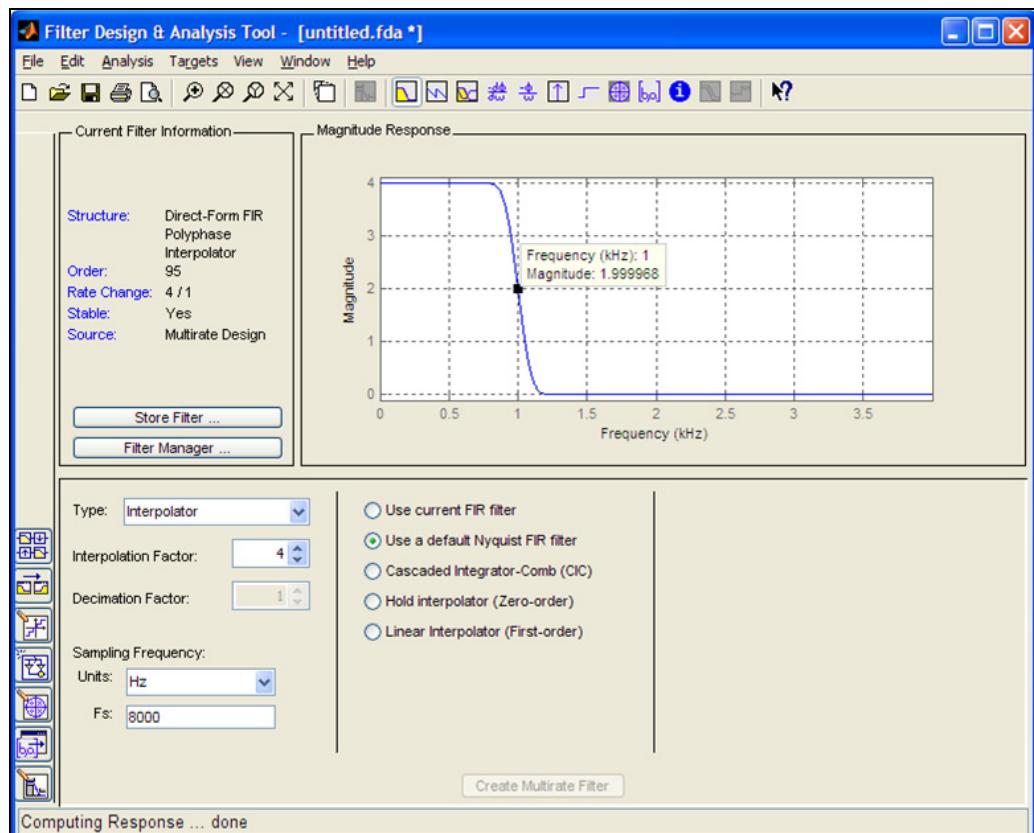


Рис. П1.11. Окно Filter Design & Analysis Tool при нажатой кнопке **Create a multirate filter** на панели инструментов по завершении моделирования полифазной структуры системы однократной интерполяции с фильтром-прототипом Найквиста

На рис. П1.11 приведено окно **Filter Design & Analysis Tool** по завершении моделирования полифазной структуры системы однократной интерполяции с фильтром-прототипом Найквиста с коэффициентом интерполяции $L = 4$, частотой дискретизации входного сигнала $f_d = 2000$ Гц и выходного сигнала $f_d = 8000$ Гц. В поле графика выведена АЧХ фильтра Найквиста с координатами точки разрыва. Её длина равна $N = 96$, а длина полифазных фильтров — $\tilde{N} = 24$. В соответствии с (21.5) АЧХ в ПП равна L .

П1.5.1. Синтез фильтра-прототипа

При установке переключателя **Use current FIR filter** (см. рис. П1.11) в качестве фильтра-прототипа выбирается КИХ-фильтр ФНЧ, работающий на "высокой" частоте дискретизации, который синтезируется пользователем при нажатой кнопке **Design Filter** на панели инструментов (рис. П1.12).

Требования к *граничным частотам* ПП и ПЗ зависят от верхней частоты сигнала f_b и частоты дискретизации f_d входного сигнала и *типа многоскоростной системы*, а именно:

- для *системы однократной интерполяции* с частотой дискретизации *выходного сигнала* Lf_d , где L — коэффициент интерполяции, задаются:
 - "высокая" частота дискретизации (**Fs**) *выходного* сигнала Lf_d ;
 - граничная частота ПП f_χ (**Fpass**), выбираемая в интервале $f_b \leq f_\chi < f_k$;
 - граничная частота ПЗ f_k (**Fstop**), выбираемая в интервале $f_\chi < f_k < \frac{f_d}{2}$;
- для *системы однократной децимации* с частотой дискретизации *выходного сигнала* $\frac{f_d}{M}$, где M — коэффициент децимации, задаются:
 - "высокая" частота дискретизации (**Fs**) *входного* сигнала f_d ;
 - граничная частота ПП f_χ (**Fpass**), выбираемая в интервале $f_b \leq f_\chi < f_k$;
 - граничная частота ПЗ f_k (**Fstop**), выбираемая в интервале $f_\chi < f_k < \frac{f_d}{2M}$;
- для *системы однократной передискретизации* с частотой дискретизации *выходного сигнала* $\frac{L}{M}f_d$, где $\frac{L}{M}$ — коэффициент передискретизации в виде *рациональной дроби*, задаются:
 - "высокая" частота дискретизации (**Fs**), равная $\max\left\{f_d; \frac{Lf_d}{M}\right\}$;
 - граничная частота ПП f_χ (**Fpass**), выбираемая в интервале $f_b \leq f_\chi < f_k$;

- граничная частота ПЗ f_k (**Fstop**), выбираемая в интервале

$$f_\chi < f_k < \min \left\{ \frac{f_d}{2}; \frac{L f_d}{2M} \right\}.$$

При выборе значений граничных частот ПП и ПЗ необходимо иметь в виду, что они определяют *ширина переходной полосы* ФНЧ, а следовательно, отклонение АЧХ от идеальной и *порядок* КИХ-фильтра, т. е. его сложность.

Требования к *максимально допустимым отклонениям* АЧХ в ПП δ_1 (**Apass**) и ПЗ δ_2 (**Astop**) определяют отклонение АЧХ от идеальной, а следовательно, искажение выходного сигнала и *порядок* КИХ-фильтра. Обычно задается $\delta_1 = \delta_2 = \delta$.

Значение δ и ширина переходной полосы выбираются из соображений компромисса между отклонением АЧХ от идеальной и сложностью КИХ-фильтра.

Как правило, КИХ-фильтр ФНЧ синтезируется методом чебышевской аппроксимации (Equiripple) при установленном переключателе **Minimum order**.

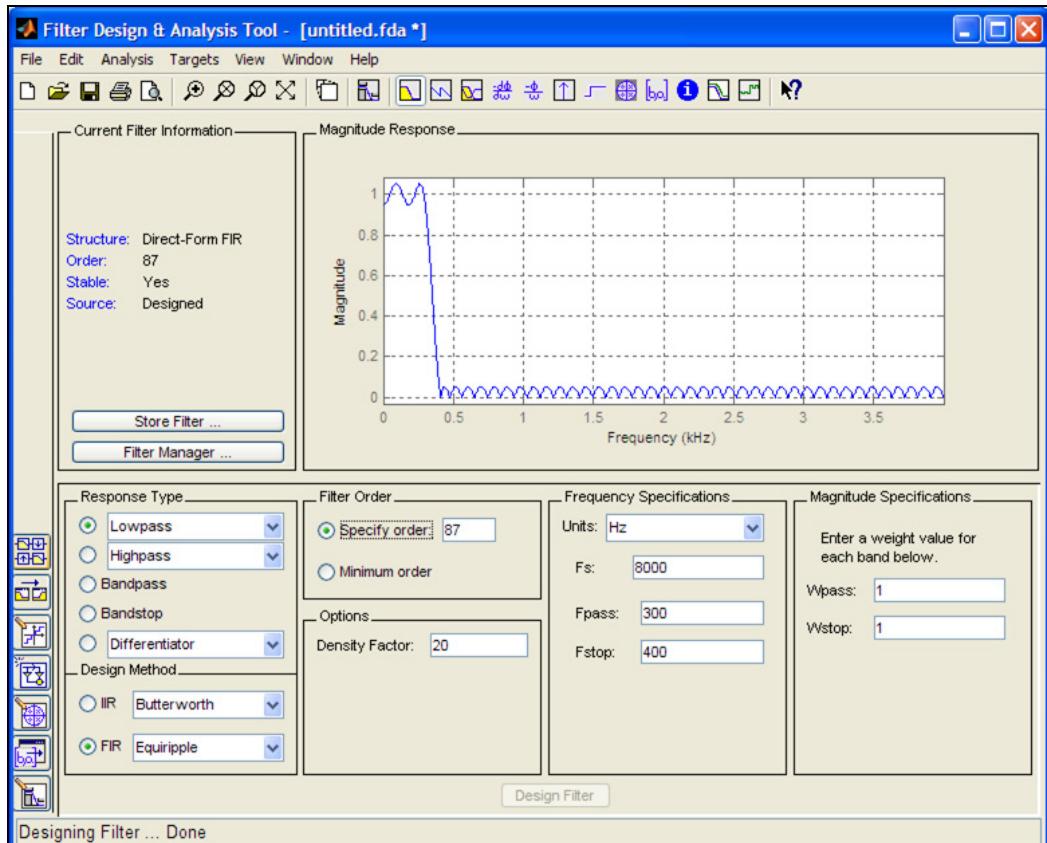


Рис. П1.12. Окно Filter Design & Analysis Tool по завершении процедуры синтеза фильтра-прототипа для системы однократной децимации

После этого выполняется *коррекция* порядка фильтра для того, чтобы его длина была *кратной* коэффициенту интерполяции (декимации), и, соответственно, длина полифазных фильтров — *целым числом*.

Синтезированный фильтр сохраняется в буфере **Filter Manager** и загружается из него перед моделированием полифазной структуры.

На рис. П1.12 приведено окно **Filter Design & Analysis Tool** по завершении процедуры синтеза фильтра-прототипа в системе однократной декимации с коэффициентом декимации $M = 8$, верхней частотой входного сигнала $f_{\text{в}} = 300$ Гц и частотой дискретизации $f_{\text{д}} = 8000$ Гц, максимально допустимыми отклонениями АЧХ в ПП и ПЗ $\delta = 0,05$. При выборе переключателя **Minimum order** порядок КИХ-фильтра оказался равным $R = 86$, поэтому была выполнена его коррекция — $R = 87$.

На рис. П1.13 приведено то же окно по завершении моделирования полифазной структуры системы однократной декимации с синтезированным фильтром-прототипом (см. рис. П1.12). Его длина равна $N = R + 1 = 88$, а длина полифазных фильтров — $\tilde{N} = 11$.

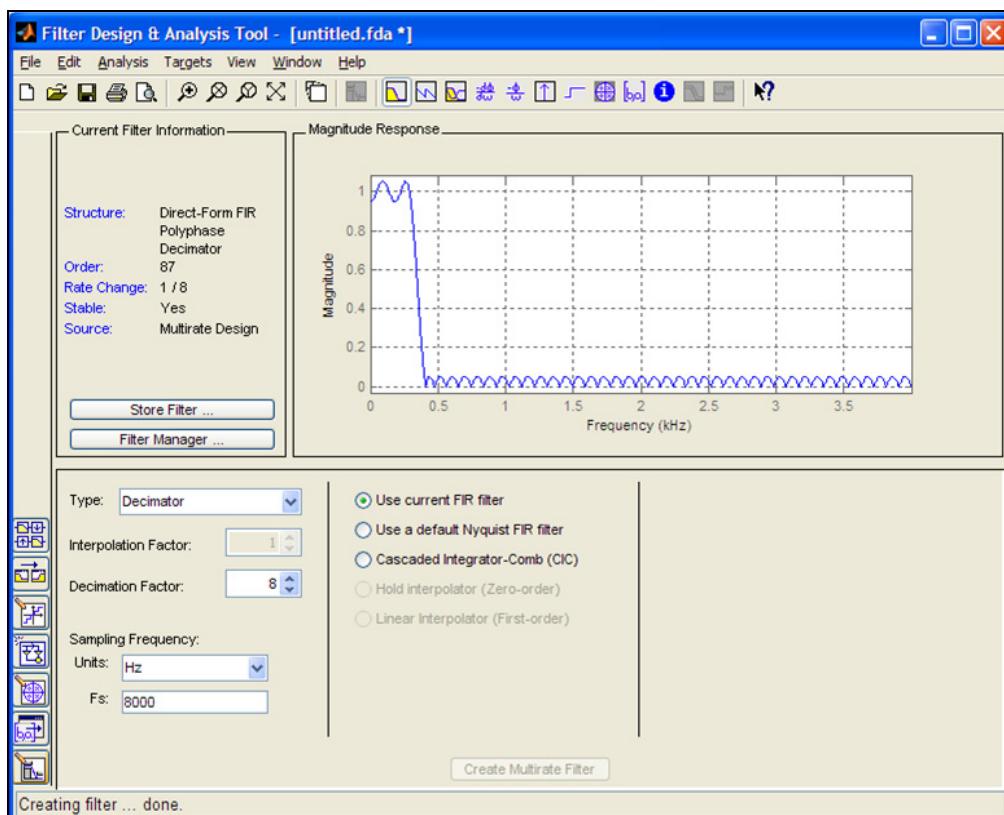


Рис. П1.13. Окно **Filter Design & Analysis Tool** при нажатой кнопке **Create a multirate filter** на панели инструментов по завершении моделирования полифазной структуры системы однократной декимации на основе синтезированного фильтра-прототипа

На рис. П1.14 приведено то же окно с фильтром-прототипом Найквиста и координатами точки разрыва (точная частота 500 Гц). Его длина $N=192$ и длина полифазных фильтров $\tilde{N}=24$ увеличились более чем вдвое, но благодаря этому АЧХ в ПП и ПЗ стала близкой к идеальной.

Описание полифазных структур многоскоростных систем в виде объектов `mfilt` при выборе арифметики `Arithmetic: 'double'` дается в разд. 21.4.3.

При моделировании структур полифазных фильтров с ФТ устанавливаются параметры квантования *фильтра-прототипа*, точно так же как для обычного ЦФ с ФТ (см. разд. П1.4.3—П1.4.5).

Элементы управления на вкладках контекстно связаны со свойствами объекта `mfilt` при выборе `Arithmetic: 'fixed'`.

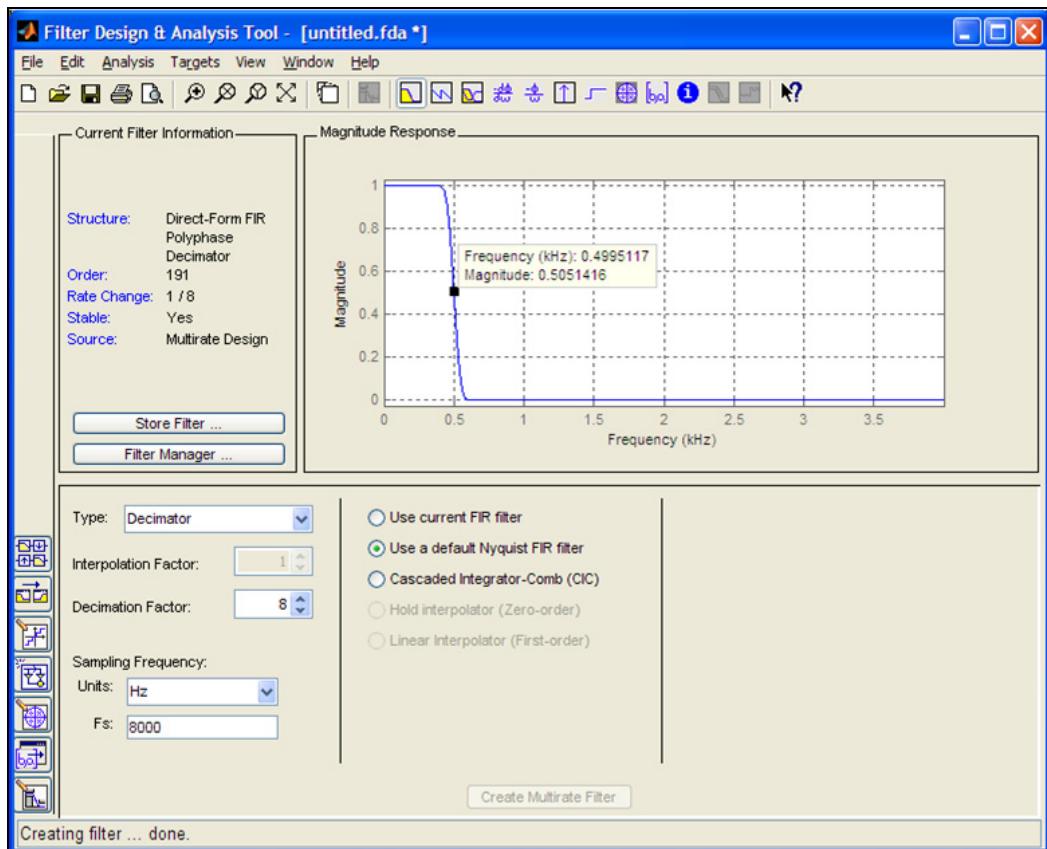


Рис. П1.14. Окно Filter Design & Analysis Tool при нажатой кнопке Create a multirate filter на панели инструментов по завершении моделирования полифазной структуры системы однократной децимации с фильтром-прототипом Найквиста

П1.6. Экспорт из FDATool

Данные из FDATool могут экспортироваться в рабочее пространство памяти Workspace, SPTool, окно моделей Simulink и на диск в виде M-файла.

По "данными" подразумевают *модели*, созданные в FDATool, список которых включает в себя:

- цифровой фильтр (ЦФ) в виде:
 - коэффициентов передаточной функции;
 - объекта `dfilt` — при выборе арифметики `Arithmetic: 'double'`;
- цифровой фильтр с ФТ (ЦФ с ФТ) в виде:
 - квантованных коэффициентов передаточной функции;
 - объекта `dfilt` — при выборе арифметики `Arithmetic: 'fixed'`;
- полифазную структуру многоскоростной системы в виде:
 - коэффициентов передаточной функции фильтра-прототипа;
 - объекта `mfilt` — при выборе арифметики `Arithmetic: 'double'`;
- полифазная структура с ФТ в виде:
 - квантованных коэффициентов передаточной функции фильтра-прототипа;
 - объекта `mfilt` — при выборе арифметики `Arithmetic: 'fixed'`.

Ограничения (либо их отсутствие) на экспорт моделей отмечается далее для каждого варианта экспорта.

П1.6.1. Экспорт в Workspace

В Workspace может экспортироваться любая модель, созданная в FDATool (см. разд. П1.6). Технология экспорта будет одинаковой, поэтому достаточно ее описать для ЦФ.

Для экспорта ЦФ в Workspace необходимо выполнить следующие действия:

1. Загрузить ЦФ из буфера **Filter Manager**.
2. Обратиться к команде меню **File | Export** (Файл | Экспортировать), после чего откроется окно **Export**.
3. В группе **Export To** (Экспортировать в) выбрать **Workspace** (рис. П1.15).
4. В группе **Export As** (Экспортировать как) выбрать вариант экспорта:
 - **Coefficients** (Коэффициенты) — коэффициенты передаточной функции;
 - **Objects** (Объект) — структура объекта.
5. В группе **Variable Names** (Имена переменных) в соответствующих полях указать имя (имена) экспортируемых данных.

При выборе **Export As: Coefficients** в соответствии со структурой ЦФ указать имя (имена):

- в поле ввода **Numerator** (Числитель) — вектора коэффициентов передаточной функции КИХ-фильтра;
- в поле ввода **SOS Matrix** (Матрица биквадратных звеньев) — матрицы коэффициентов (6.19) БИХ-фильтра (см. рис. П1.15);
- в поле ввода **Scale Values** (Масштабирующие значения) — вектора коэффициентов усиления БИХ-фильтра.

При выборе **Export As: Objects** в поле ввода **Discrete Filter** указать имя объекта `dfilt` (или `mfilt`).

6. Сбросить флагок **Overwrite Variables** (Перезаписать переменные) во избежание конфликта с переменными в Workspace.

7. Нажать кнопку **OK**.

8. Проконтролировать результат экспорта — открыть Workspace по команде меню **Desktop | Workspace** (Рабочий стол | Workspace).

Свойства объектов `dfilt` и `mfilt` выводятся в окне **Command Window** по их имени.



Рис. П1.15. Окно Export при экспорте в Workspace коэффициентов передаточной функции БИХ-фильтра

Сохранение данных на диске выполняется по команде:

```
save <имя файла> <список переменных>
```

а загрузка данных с диска в Workspace — по команде:

```
load <имя файла>
```

где `<имя файла>` — имя mat-файла; если оно отсутствует, то по умолчанию mat-файлу присваивается имя первой переменной.

В зависимости от экспортируемых данных `<список переменных>` будет включать одно или два имени.

П1.6.2. Экспорт в SPTool

В SPTool могут экспортироваться только ЦФ и ЦФ с ФТ и лишь в виде объектов `dfilt` (см. разд. П1.6). Технология экспорта будет одинаковой, поэтому достаточно ее описать для ЦФ.

Для экспорта ЦФ в SPTool необходимо выполнить следующие действия:

1. Загрузить ЦФ из буфера **Filter Manager**.
2. Обратиться к команде меню **File | Export**, после чего откроется окно **Export**.
3. В группе **Export To** выбрать SPTool (рис. П1.16).
4. В поле ввода **Discrete Filter** указать имя объекта `dfilt`.
5. Сбросить флагок **Overwrite Variables** во избежание конфликта с переменными в Workspace.
6. Нажать кнопку **OK**.
7. Проконтролировать результат экспорта — в автоматически открываемом окне **SPTool** (оно приведено на рис. П2.1) в группе **Filters** (Фильтры) должно появиться имя объекта `dfilt` с уточнением (`imported`) — импортированный.



Рис. П1.16. Окно **Export** при экспорте в SPTool объекта `dfilt`

П1.6.3. Экспорт в окно моделей Simulink

Экспорт в окно моделей Simulink (окно S-моделей) выполняется при нажатой кнопке **Realize Model** (Создать модель) на панели инструментов.

Конфигурация нижней панели окна **Filter Design & Analysis Tool** изменится (рис. П1.17) — на ней появятся две группы: **Model** (Модель) и **Optimization** (Оптимизация).

В окно моделей Simulink (окно S-моделей)¹ может экспортироваться любая модель, созданная в FDATool (см. разд. П1.6), для которой будет создана модель Simulink (S-модель). Технология экспорта будет одинаковой, поэтому достаточно ее описать для ЦФ.

Для экспорта ЦФ в окно S-моделей необходимо выполнить следующие действия:

1. Загрузить ЦФ из буфера **Filter Manager**.
2. В группе **Model** в поле ввода **Block name** (Имя блока) указать имя S-модели.

¹ С моделированием в Simulink можно познакомиться в [48].

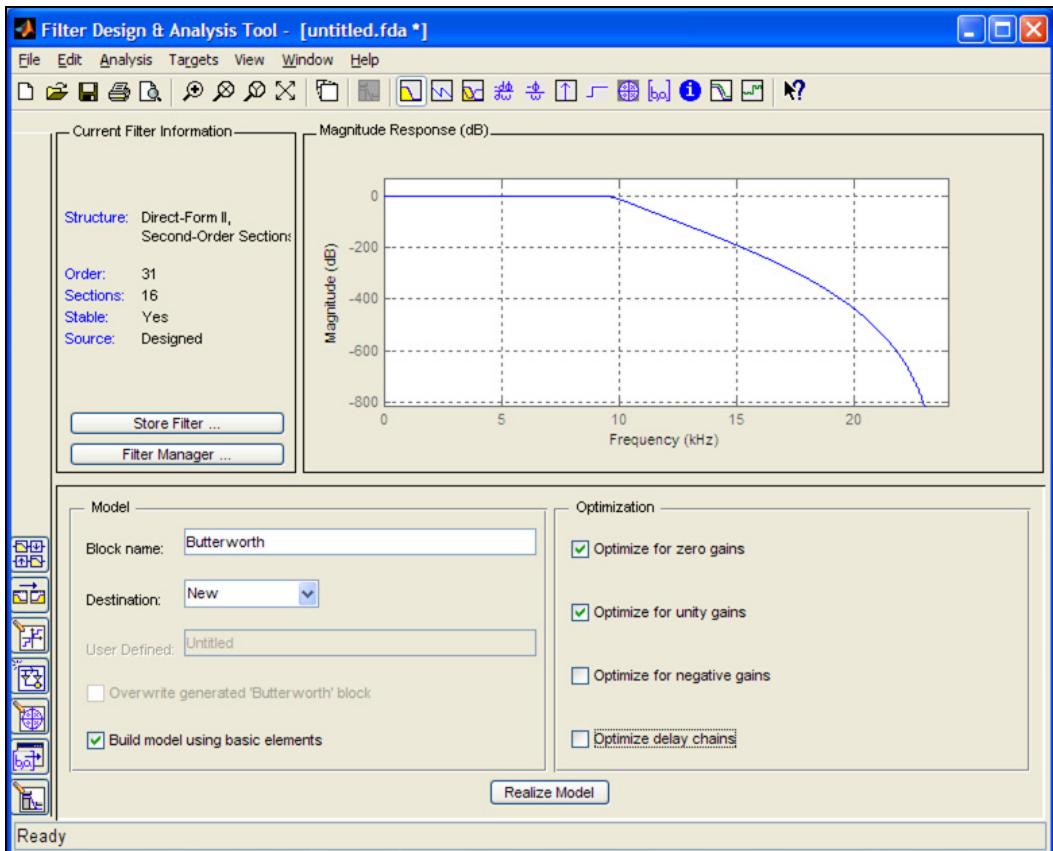


Рис. П1.17. Окно Filter Design & Analysis Tool при нажатой кнопке Realize Model на панели инструментов

3. В раскрывающемся списке **Destination** (Расположение) выбрать имя окна S-моделей, в которое будет экспортироваться S-модель ЦФ:

- Current (Текущее) — при экспорте в текущее (открытое) окно S-моделей;
- New (Новое) — при экспорте в новое, автоматически открываемое окно S-моделей с именем **Untitled**.

Если текущее окно S-моделей не открыто, то при выборе **Destination: Current** S-модель автоматически экспортируется в новое окно;

- User defended (Выбранное пользователем) — при экспорте в уже существующее окно S-моделей, имя которого указывается пользователем.

При выборе значения **Destination: Current** или **Destination: User defended** активизируется флажок **Overwrite generated '<Block name>' block** (Перезапись нового блока поверх старого блока с именем **<Block name>**). При установке флажка S-модель с именем, заданным в поле ввода **Block name**, заменит имеющуюся S-модель с тем же именем.

4. Выбрать состояние флажка **Build model using basic elements** (Построить модель, используя базовые элементы).

При установке флажка **Build model using basic elements** S-модель ЦФ будет представлена в виде *виртуальной подсистемы*¹, отображающей структуру (структурную схему) ЦФ с портами входа/выхода. При этом активизируются флажки в группе **Optimization**:

- **Optimize for zero gains** (Оптимизировать нулевые умножители) — при установке флажка в структуре ЦФ будут удалены умножители на нуль вместе с соединениями;
- **Optimize for unity gains** (Оптимизировать единичные умножители) — при установке флажка в структуре ЦФ будут удалены умножители на единицу с сохранением соединений;
- **Optimize for negative gains** (Оптимизировать умножители с отрицательным коэффициентом умножения) — при установке флажка в структуре ЦФ будут удалены умножители на минус единицу с сохранением соединений и заменой в сумматоре операции сложения операцией вычитания (инверсии знака);
- **Optimize delay chains** (Оптимизировать цепи задержки) — при установке флажка в структуре ЦФ линии с N единичными задержками z^{-1} будут заменены задержками z^{-N} .

В виде *виртуальной подсистемы* может экспортиться любая модель, созданная в FDATool.

При *бросе* флажка **Build model using basic elements** S-модель ЦФ будет представлена в виде блока *Digital Filter*, а флажки в группе **Optimization** блокированы.

В виде блока *Digital Filter* может экспортиться только ЦФ.

5. Нажать кнопку **Realize Model**, расположенную внизу по центру окна.

После этого S-модель ЦФ появится в автоматически раскрываемом окне S-моделей.

На рис. П11.18 приведено окно S-моделей с созданными S-моделями.

Двойной щелчок на пиктограмме *виртуальной подсистемы* раскрывает структуру (структурную схему) экспортируемой модели. Для возврата в исходное состояние следует нажать кнопку **Закрыть** в заголовке окна S-моделей.

Двойной щелчок на пиктограмме блока *Digital Filter* открывает окно **Block Parameters** (Блок параметров) с двумя вкладками — **Main** (главная) и **Fixed-point** (Фиксированная точка). На вкладке **Main** при выборе переключателя **Dialog Parameters** отображается информация об экспортируемом ЦФ. На вкладке **Fixed-**

¹ Виртуальная (*virtual* — смоделированная) подсистема является "открытой" — в процессе моделирования допускается связь входящих в ее состав блоков с другими блоками S-модели системы [48].

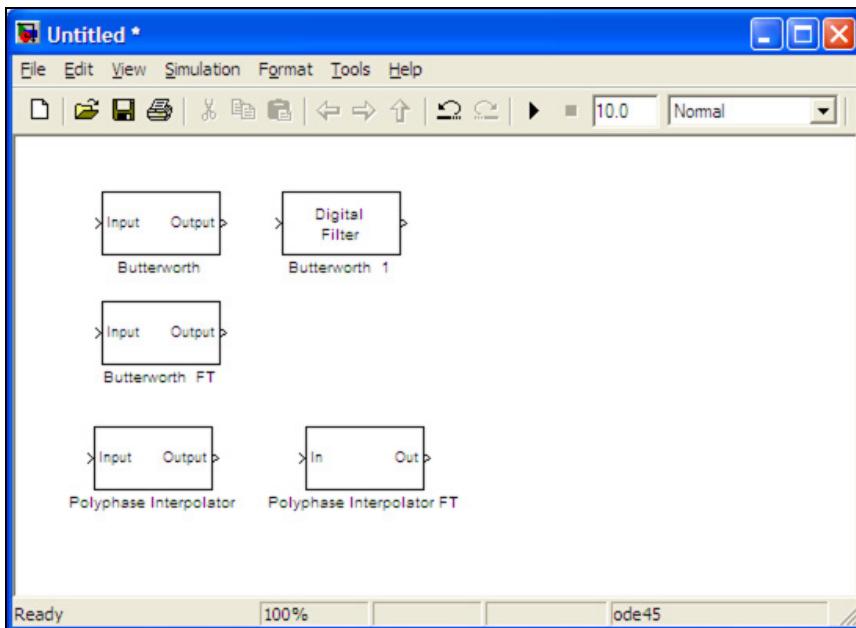


Рис. П1.18. S-модели (сверху вниз и слева направо): БИХ-фильтра в виде виртуальной подсистемы и блока Digital Filter; БИХ-фильтра с ФТ в виде виртуальной подсистемы; многоскоростной системы однократной интерполяции, исходной и с ФТ, в виде виртуальных подсистем

point можно установить параметры квантования для ЦФ с ФТ и сохранить блок с тем же именем.

П1.6.4. Экспорт на диск в виде М-файла

На диск может экспортироваться любая модель, но только в виде объекта `dfilt` или `mfilt` (*см. разд. П1.6*).

На диске структура будет сохраняться в виде М-файла — function-файла (внешней функции) в текущей папке.

Экспорт в виде М-файла выполняется по команде меню **File | Generate M-file** (Файл | Создать М-файл). В автоматически открываемом одноименном окне следует выбрать имя function-файла и нажать кнопку **Сохранить**.

После этого автоматически открывается окно **Editor** (Редактор) с function-файлом, где можно познакомиться с программными средствами MATLAB, используемыми при создании объекта `dfilt` (или `mfilt`) в FDATool.

Единственным выходным параметром function-файла является имя объекта, а его свойства можно вывести в окне **Command Window** по имени function-файла.

Обращение к function-файлу в script-файле пользователя осуществляется по его имени подобно обращению к встроенной функции MATLAB.

П1.7. Импорт из Workspace

Импорт из Workspace выполняется при нажатой кнопке **Import filter from workspace** (Импортировать фильтр из Workspace) на панели инструментов. При этом конфигурация нижней панели окна **Filter Design & Analysis Tool** изменится и будет зависеть от импортируемых данных.

Из Workspace может импортироваться любая модель, созданная в FDATool (см. разд. П1.6). Технология импорта будет одинаковой, поэтому достаточно ее описать для ЦФ.

Для импорта ЦФ из Workspace необходимо выполнить следующие действия (рис. П1.19):

1. В группе **Filter Coefficients** (Коэффициенты фильтра) в раскрывающемся списке **Filter Structure** (Структура фильтра) выбрать структуру импортируемого ЦФ.

Для БИХ-фильтра с каскадной структурой установить флажок **Import as second-order sections** (Импортировать как звенья 2-го порядка).

Если ЦФ импортируется в виде объекта `dfilt`, выбрать значение **Filter object**.

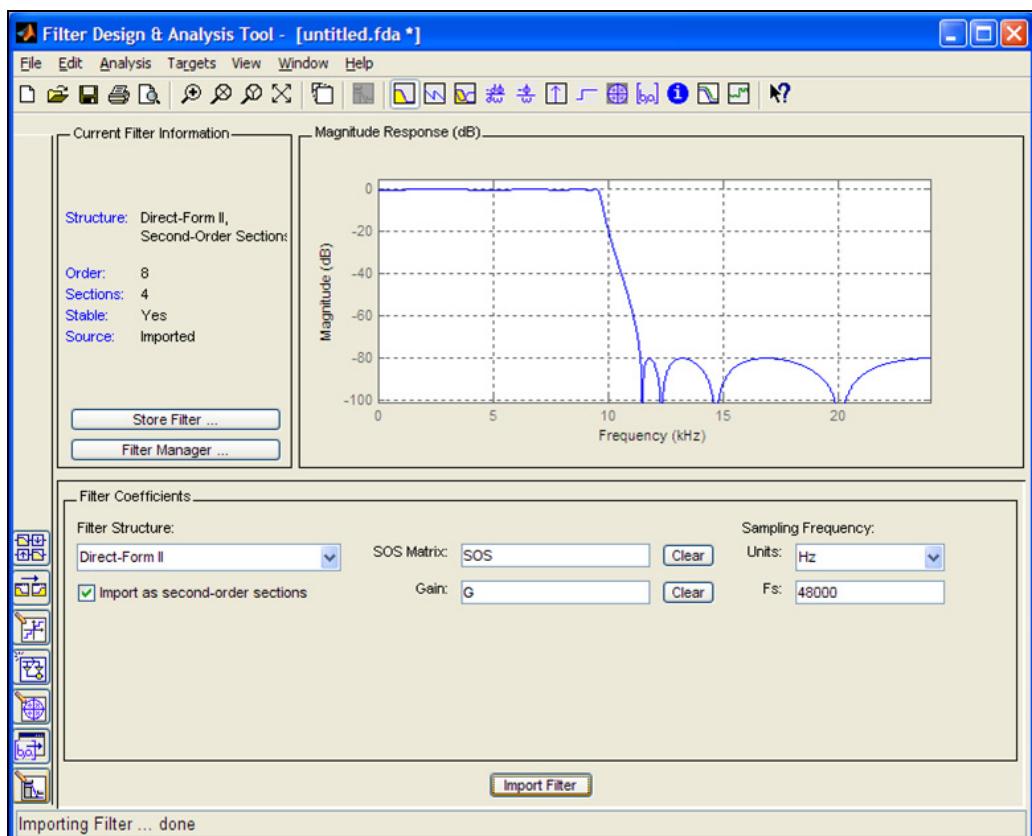


Рис. П1.19. Окно Filter Design & Analysis Tool при нажатой кнопке Import filter from workspace на панели инструментов для импорта коэффициентов БИХ-фильтра

2. В соответствии со структурой ЦФ указать имя (имена):

- в поле ввода **Numerator** (Числитель) — вектора коэффициентов передаточной функции КИХ-фильтра;
- в поле ввода **SOS Matrix** — матрицы коэффициентов (6.19) БИХ-фильтра (см. рис. П1.19);
- в поле ввода **Gain** (Усиление) — вектора коэффициентов усиления (6.20) БИХ-фильтра.

При выборе **Filter Structure: Filter object** в поле ввода **Discrete filter** указать имя объекта `dfilt`.

3. В группе **Sampling Frequency** (Частота дискретизации) в поле **Units** выбрать Hz и в поле **Fs** указать частоту дискретизации.
4. Нажать кнопку **Import Filter** (Импортировать фильтр), расположенную внизу по центру окна.

В FDATool удобно анализировать характеристики любой ЛДС, импортируя коэффициенты ее передаточной функции (4.5) из Workspace.

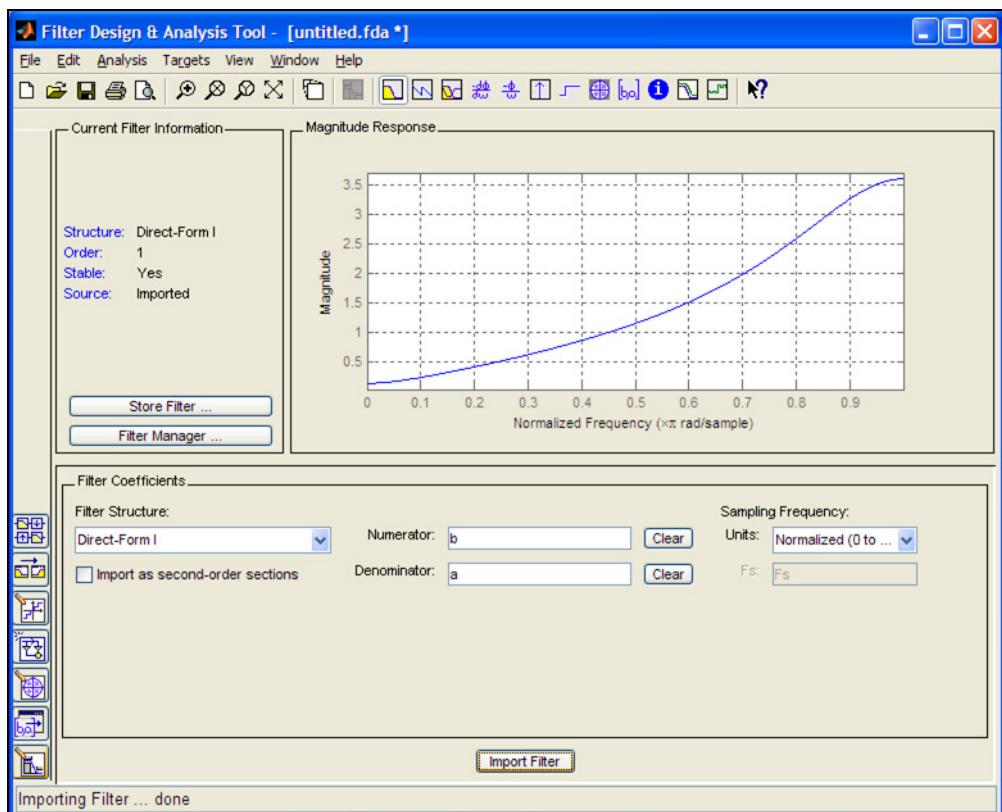


Рис. П1.20. Окно Filter Design & Analysis Tool при нажатой кнопке Import filter from workspace на панели инструментов для импорта коэффициентов передаточной функции общего вида

Для этого необходимо выполнить следующие действия (рис. П1.20):

1. В Workspace представить коэффициенты числителя и знаменателя в виде векторов.
2. В раскрывающемся списке **Filter Structure** выбрать Direct-Form I (прямая структура) и сбросить флажок **Import as second-order sections**.
3. В поле ввода **Numerator** указать имя вектора коэффициентов числителя, в поле ввода **Denominator** — вектора коэффициентов знаменателя, в примере — **b**, **a**. Для некурсивных ЛДС вектор коэффициентов знаменателя будет равен единице.
4. В группе **Sampling Frequency** в поле **Units** выбрать Normalized 0 to 1 (Нормированная частота). В этом случае частотные характеристики будут выводиться в основной полосе частот $[0; \pi]$.
5. Нажать кнопку **Import Filter**, расположенную внизу по центру окна.

Для анализа характеристик фазового звена с известными коэффициентами решетки следует в раскрывающемся списке **Filter Structure** выбрать Lattice Allpass (Решет-

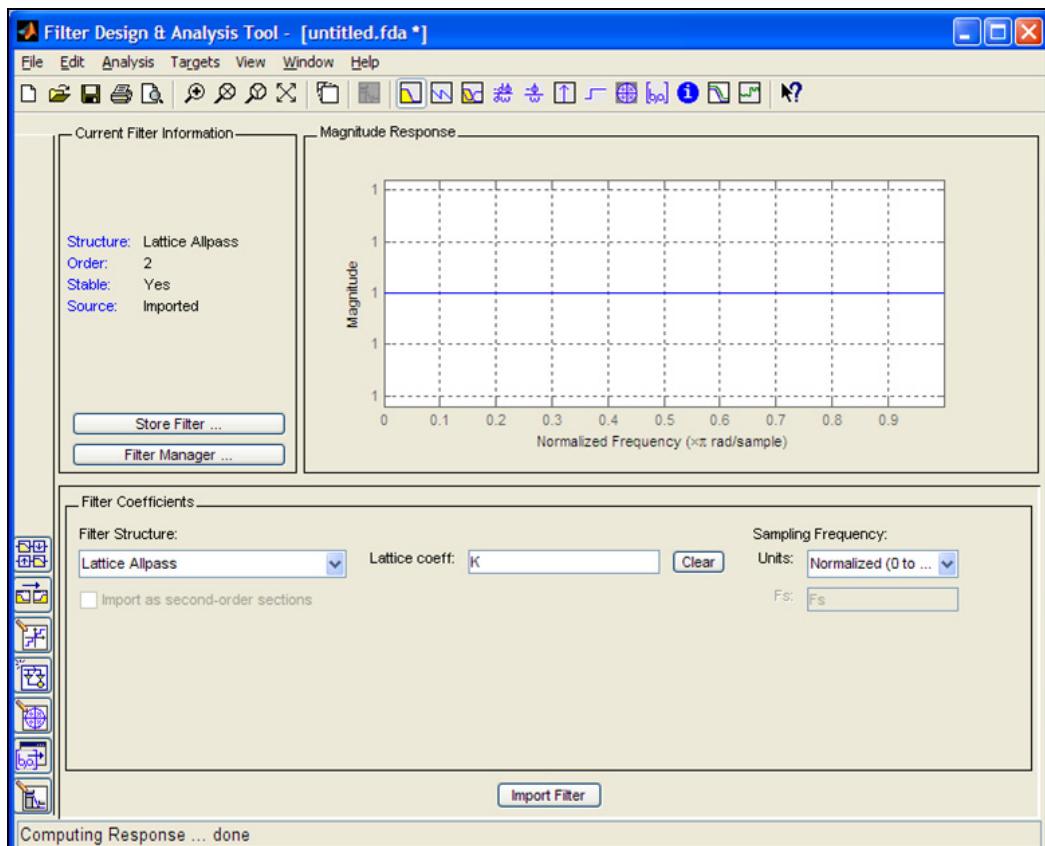


Рис. П1.21. Окно Filter Design & Analysis Tool при нажатой кнопке Import filter from workspace на панели инструментов для импорта коэффициентов решетки фазового звена

чатая структура всепропускающего фильтра) и в поле ввода **Lattice coeff.** (Коэффициенты решетки) указать имя вектора коэффициентов решетки (рис. П1.21).

П1.8. Сохранение сеанса работы в FDATool

Сеанс работы в FDATool называется *сессией* (Session). По завершении работы в FDATool предусмотрена возможность *сохранения сессии* по команде меню **File | Save Session As** (Файл | Сохранить сессию как).

В открывавшемся окне **Save Filter Design Session** (Сохранить сессию проектирования фильтра) указывается *имя сессии* — файла с расширением fda и нажимается кнопка **Сохранить**.

При последующих обращениях к FDATool сохраненная сессия открывается по команде меню **File | Open Session** (Файл | Открыть сессию). В окне **Load Filter Design Session** (Загрузить сессию проектирования фильтра) выбирается требуемая папка и в ней — файл с сохраненной сессией.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Средства GUI SPTool

Средства GUI SPTool (Signal Processing Toolbox — средство обработки сигнала) предназначены для моделирования цифровой фильтрации, включая анализ сигналов во временной области и спектральный анализ с применением непараметрических и параметрических методов.

П2.1. Обращение к SPTool

Обращение к SPTool происходит по команде:

`sptool`

после чего открывается окно **SPTool: startup.spt** с тремя группами (рис. П2.1):

- Signals** (Сигналы);
- Filters** (Фильтры);
- Spectra** (Спектры).

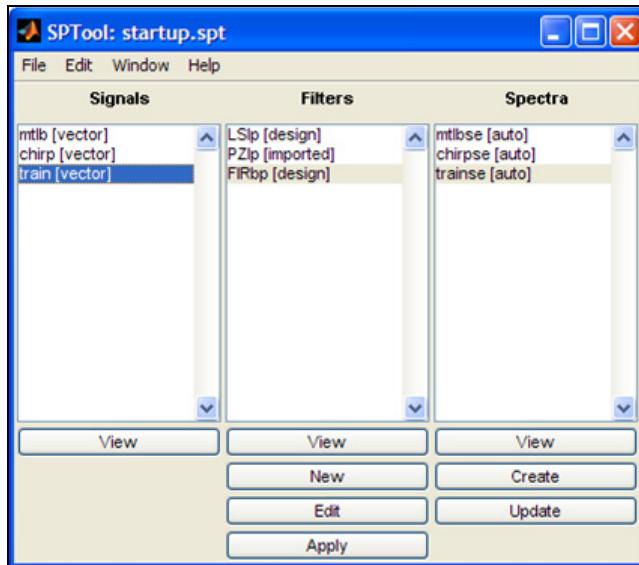


Рис. П2.1. Окно SPTool: startup.spt

Список каждой группы содержит тестовые объекты в помощь начинающему пользователю при осваивании средств SPTool.

П2.1.1. Анализ сигналов во временной области

Средства анализа сигналов во временной области представлены в группе **Signals** (см. рис. П2.1), в которой имеются список имен сигналов и кнопка **View** (Вид).

Кнопка View предназначена для визуализации сигнала из группы **Signals** (одного или нескольких при нажатии клавиши <Ctrl>) в окне **Signal Browser** (Просмотр сигнала). На рис. П2.2 оно представлено для тестового сигнала train.

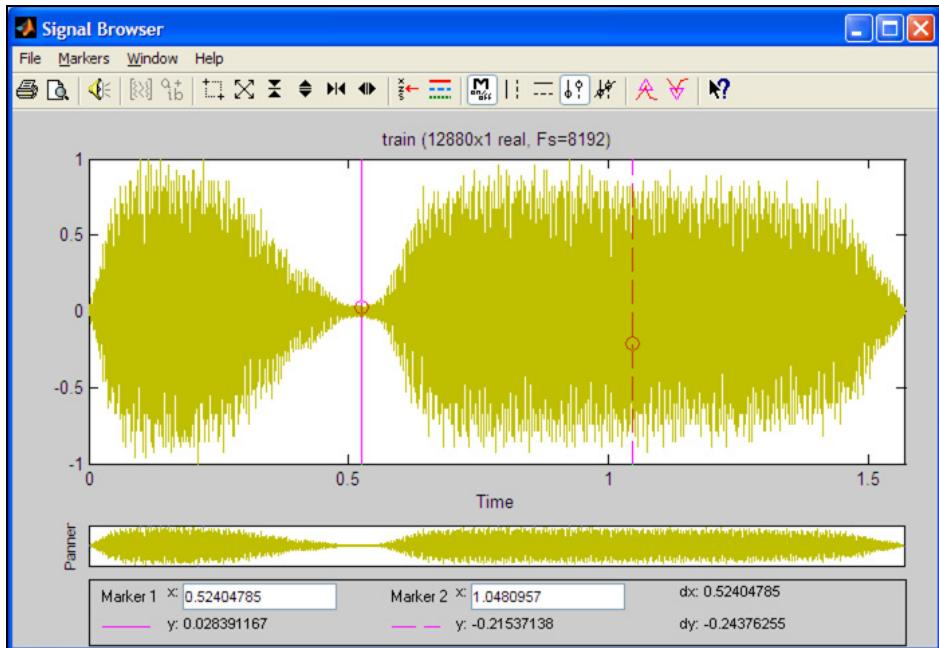


Рис. П2.2. Окно Signal Browser с тестовым сигналом train

Окно **Signal Browser** включает в себя два графических поля:

- верхнее — для анализируемого сигнала в виде непрерывной функции с указанием количества отсчетов (длины сигнала) и частоты дискретизации Fs в герцах, на основании чего легко определить длительность сигнала (Time).

При выделении в группе **Signals** нескольких имен сигналов над графиком отображается их список;

- нижнее **Panner** (Панорама) — для панорамного (общего) вида сигнала с отображением в рамке его анализируемого участка при изменении масштаба.

С помощью кнопок на панели инструментов можно изменять масштаб, интервал наблюдения и активизировать маркеры, фиксирующие значения сигнала, а также его локальные максимумы и минимумы.

Задавая требуемые значения в полях ввода вертикальных или горизонтальных маркеров, можно зафиксировать их положение на графике.

Если анализируются одновременно несколько сигналов, то для их выделения разным цветом следует воспользоваться кнопкой **Line Properties** (Свойства линии) на панели инструментов или одноименной командой контекстного меню, щелкнув правой кнопкой мыши на поле графика. Рекомендуется внимательно относиться к выбору цветов, т. к. более темный цвет может скрыть более светлый.

Удаление или переименование сигнала в группе **Signals**, а также *изменение частоты дискретизации* выполняются с помощью соответствующих команд меню **Edit** окна **SPTool: startup.spt** или команд контекстного меню окна **Signal Browser**, щелкнув правой кнопкой мыши на поле графика.

Источником *входного сигнала* для SPTool может являться:

- рабочее пространство памяти **Workspace**;
- диск, если сигнал сохранен как mat-файл данных в текущей папке.

Импорт входного сигнала в SPTool выполняется по команде меню **File | Import** (Файл | Импорт), после чего открывается окно **Import to SPTool** (Импорт в SPTool) с двумя переключателями в группе **Source** (Источник):

- From Workspace** (Из Workspace) — импорт из Workspace;
- From Disk** (С диска) — импорт с диска.

При установке переключателя **From Workspace** необходимо выполнить следующие действия (рис. П2.3):

1. В группе **Workspace Contents** (Содержимое Workspace) выделить имя импортируемого сигнала, в примере — **s**.

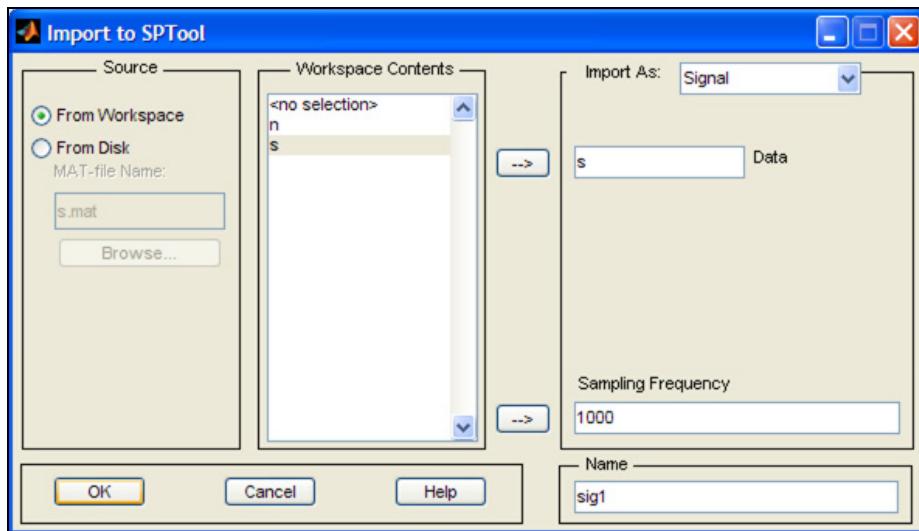


Рис. П2.3. Окно Import to SPTool при импорте From Workspace

2. Нажать кнопку  , после чего имя переменной *s* будет отображено в поле **Data** (Данные).
3. В раскрывающемся списке **Import As** (Импортировать как) выбрать значение **Signal** (Сигнал).
4. В поле ввода **Sampling Frequency** (Частота дискретизации) указать частоту дискретизации в герцах, в примере — 1000.
5. В поле ввода **Name** (Имя) указать имя сигнала, по умолчанию *sig* с номером *N*, в примере — *sig1*.
6. Нажать кнопку **OK** и убедиться, что имя сигнала отобразилось в группе **Signals** окна **SPTool: startup.spt**.

При установке переключателя **From Disk** необходимо выполнить следующие действия (рис. П2.4):

1. В группе **Source** нажать кнопку **Browse** (Просмотреть). Откроется окно **Select File to Open** (Выбрать файл для открытия), в котором следует выделить имя матфайла, в примере — *signal.mat*, и нажать кнопку **Открыть**. После этого произойдет автоматический возврат в окно **Import to SPTool**.
2. В группе **File Contents** (Содержимое файла) выделить имя переменной, соответствующей импортируемому сигналу, в примере — *s* (в файле *signal.mat* были сохранены две переменные — *n* и *s*).
3. Нажать кнопку  , после чего имя переменной *s* будет отображено в поле **Data**.
4. В раскрывающемся списке **Import As** (Импортировать как) выбрать **Signal**.

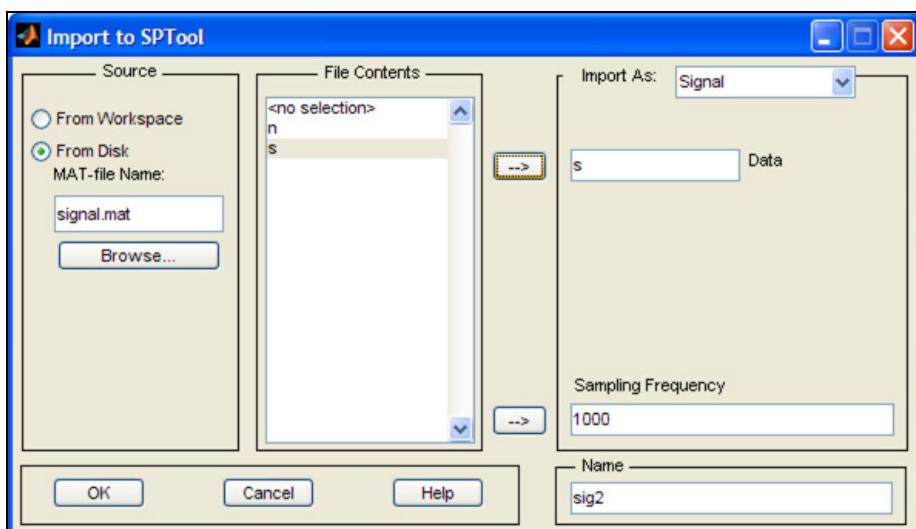


Рис. П2.4. Окно **Import to SPTool** при импорте **From Disk**

5. В поле ввода **Sampling Frequency** (Частота дискретизации) указать частоту дискретизации в герцах, в примере — 1000.
6. В поле ввода **Name** (Имя) указать имя входного сигнала, по умолчанию sig с номером N , в примере — sig2.
7. Нажать кнопку **OK** и убедиться, что имя сигнала отобразилось в группе **Signals** окна **SPTool: startup.spt**.

П2.1.2. Моделирование цифровой фильтрации

Средства моделирования цифровой фильтрации представлены в группе **Filters** (см. рис. П2.1), которая содержит список имен цифровых фильтров (ЦФ) и четыре кнопки:

- View** (Вид) — визуализация характеристик ЦФ;
- New** (Новый) — синтез или импорт из Workspace нового ЦФ с сохранением имени в группе **Filters**;
- Edit** (Редактирование) — синтез или импорт из Workspace нового ЦФ без изменения имени;
- Apply** (Применить) — моделирование цифровой фильтрации.

Кнопка View предназначена для визуализации характеристик ЦФ из группы **Filters** (одного или нескольких при нажатии клавиши <Ctrl>) в окне **Filter Visualization Tool** (Средство визуализации фильтра) FVTool, список команд меню **Analysis** которого приведен в разд. П1.3.

Кнопка New служит для синтеза или импорта из Workspace нового ЦФ. При ее нажатии в группе **Filters** автоматически появляется имя ЦФ — по умолчанию filt с номером N — и открывается окно **Filter Design & Analysis Tool** FDATool, такое же как на рис П1.1, но с ограниченным набором кнопок на панели инструментов, которых всего три:

- Design filter** (Синтезировать фильтр);
- Import filter from workspace** (Импортировать фильтр из Workspace);
- Pole/Zero Editor** (Редактор нулей/и полюсов).

В заголовке окна **Filter Design & Analysis Tool** дублируется имя ЦФ.

При *синтезе* нового ЦФ автоматически активизируется кнопка **Design filter**, и процедура синтеза ничем не отличается от рассмотренной в разд. П1.2. На рис. П2.5 приведено окно **Filter Design & Analysis Tool** по завершении процедуры синтеза БИХ-фильтра ФНЧ Баттервортса с именем filt1 (сравните с рис. П1.2).

При *импорте* нового ЦФ из Workspace следует выполнить действия, описанные в разд. П1.7.

Отметим, что в обоих случаях (при синтезе или импорте из Workspace) в группе **Filters** к имени ЦФ в скобках автоматически добавляется *одинаковое* уточнение (*design*) — синтезированный.

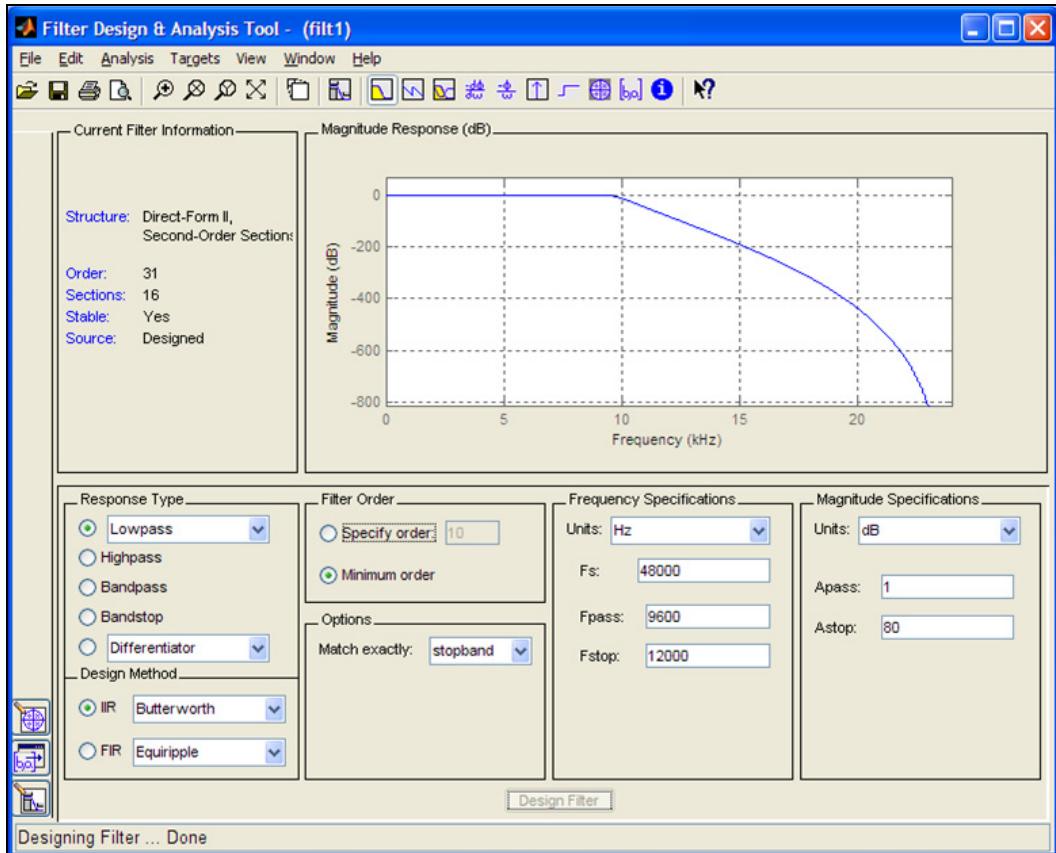


Рис. П2.5. Окно Filter Design & Analysis Tool по завершении процедуры синтеза БИХ-фильтра ФНЧ Баттервортса

По завершении процедуры синтеза или импорта ЦФ следует **закрыть** окно Filter Design & Analysis Tool.

Кнопка Edit предназначена для синтеза или импорта из Workspace нового ЦФ из группы **Filters** без изменения имени. При ее нажатии открывается окно **Filter Design & Analysis Tool**, в заголовке которого дублируется имя ЦФ, а на панели инструментов автоматически активизируется кнопка, взаимосвязанная со значением **Source** (Источник) в группе **Current Filter Information** (Информация о текущем фильтре), а именно:

- Source: Designed** — кнопка **Design filter** для синтеза нового ЦФ;
- Source: Imported** — кнопка **Import filter from workspace** для импорта нового ЦФ из Workspace.

Импортированные ЦФ могут быть также получены в результате экспорта из FDATool (см разд. П1.6.2). В этом случае имя ЦФ, совпадающее с именем объекта dfilt, отображается в группе **Filters** с уточнением в скобках (*imported*) — импортированный. Для таких ЦФ рекомендуется пользоваться только кнопкой **View**.

Отметим, что средства SPTool не позволяют моделировать структуру ЦФ с ФТ, однако она может быть импортирована из FDATool.

Удаление или переименование ЦФ в группе Filters, а также изменение частоты дискретизации выполняются с помощью соответствующих команд меню Edit окна SPTool: startup.spt.

Для моделирования цифровой фильтрации необходимо выполнить следующие действия (рис. П2.6):

1. В группе Signals выделить имя входного сигнала.
2. В группе Filters выделить имя ЦФ.

Частоты дискретизации входного сигнала и ЦФ должны быть одинаковыми.

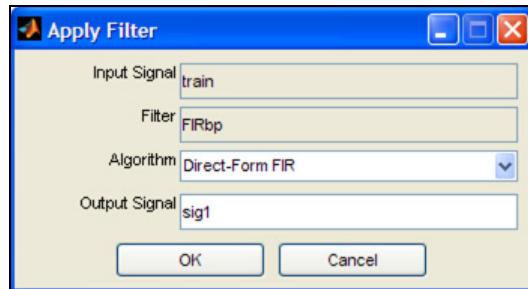


Рис. П2.6. Окно Apply Filter

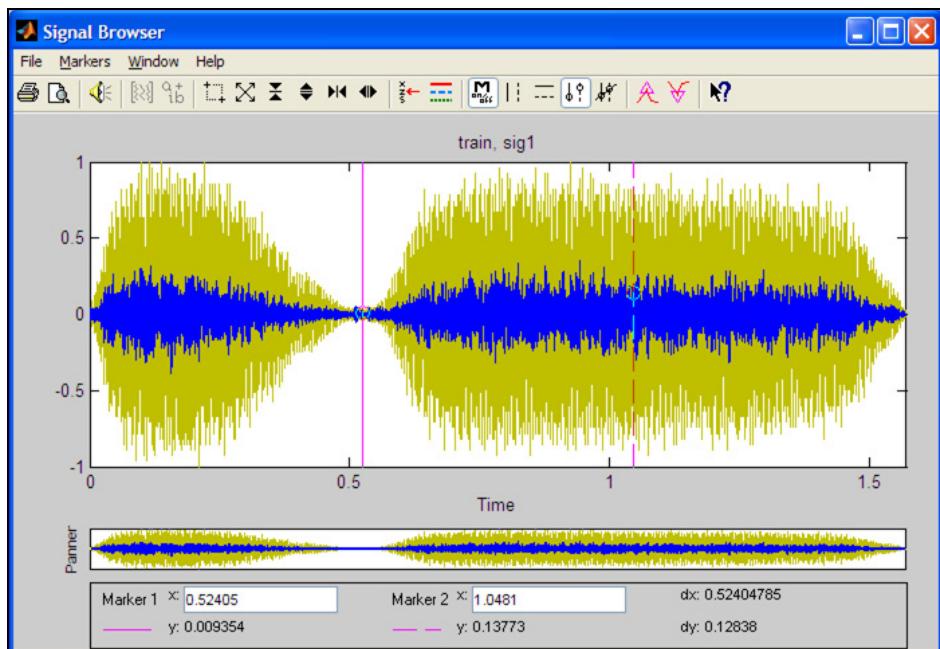


Рис. П2.7. Окно Signal Browser с входным тестовым сигналом train (более светлый) и выходным сигналом sig1 (более темный)

3. Нажать кнопку **Apply**.

Открывается окно **Apply Filter** (Применить к фильтру) с именами *входного* сигнала в поле **Input Signal**, фильтра в поле **Filter** и *выходного* сигнала в поле **Output Signal**, по умолчанию sig с номером N .

На рис. П2.6 выделены имена тестового входного сигнала train и КИХ-фильтра FIRbp.

4. В раскрывающемся списке **Algorithm** (Алгоритм) выбрать структуру ЦФ.

Структура ЦФ отображает алгоритм вычисления реакции — выходного сигнала.

Для КИХ-фильтра FIRbp выбрана прямая структура (Direct-Form FIR).

5. Нажать кнопку **OK** — имя выходного сигнала отобразится в группе **Signals**.

Для анализа входного и выходного сигналов во временной области следует выделить их имена в группе **Signals** и нажать кнопку **View** (рис. П2.7).

П2.1.3. Спектральный анализ сигналов

Средства спектрального анализа сигналов представлены в группе **Spectra** (см. рис. П2.1), которая содержит список имен оценок спектральной плотности мощности (СПМ)¹ и три кнопки:

- View** (Вид) — визуализация оценки СПМ;
- Create** (Создать) — расчет оценки СПМ с сохранением имени в группе **Spectra**;
- Update** (Обновление) — повторный расчет оценки СПМ без изменения имени.

Кнопка **View** предназначена для визуализации оценки СПМ из группы **Spectra** (одной или нескольких при нажатии клавиши <Ctrl>) в окне **Spectrum Viewer** (Просмотр спектра). На рис. П2.8 оно представлено для оценки СПМ chirpse тестового сигнала chirp в группе **Signals**.

Если анализируются одновременно несколько оценок СПМ, то для их выделения разным цветом следует воспользоваться кнопкой **Line Properties** на панели инструментов или одноименной командой контекстного меню, щелкнув правой кнопкой мыши на поле графика.

Окно **Spectrum Viewer** включает в себя (см. рис. П2.8):

- группу **Signal** — с именем, длиной и частотой дискретизации анализируемого сигнала Fs в герцах.

При выделении в группе **Spectra** нескольких оценок СПМ *различных* сигналов в группе **Signal** будет отображаться имя сигнала, соответствующее первой (верхней) оценки СПМ.

Щелкнув правой кнопкой мыши на поле графика, можно вывести контекстное меню со списком всех имен сигналов и команд для изменения имени, частоты дискретизации и цвета соответствующих им оценок СПМ;

¹ Power Spectral Density (PSD).

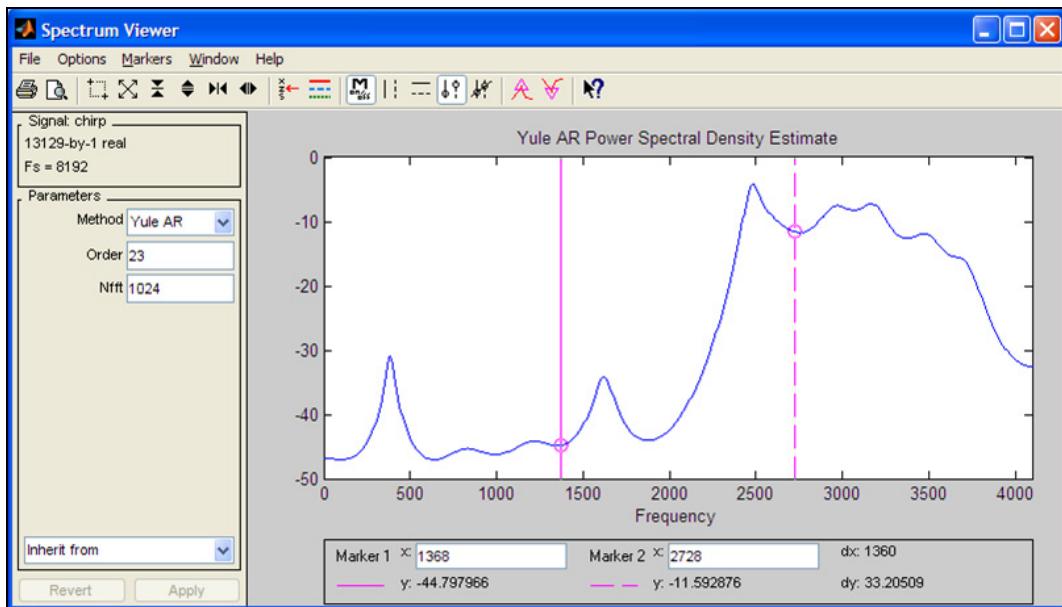


Рис. П2.8. Окно Spectrum Viewer при нажатой кнопке View с оценкой СПМ chirpse тестового сигнала chirp

- группу **Parameters** — с методом расчета оценки СПМ в списке **Method** и соответствующими списками параметров настройки, о чем пойдет речь далее (см. кнопку **Create**);
- нижний раскрывающийся список с заголовком **Inherit from** (Наследовать от). В списке дублируются имена группы **Spectra**, что позволяет оперативно просматривать оценки СПМ и при необходимости изменять метод или параметры настройки и рассчитывать новую оценку СПМ без изменения имени в группе **Spectra**;
- кнопку **Apply** (Применить) — для расчета оценки СПМ;
- кнопку **Revert** (Вернуться) — для возврата к предыдущему методу в списке **Method** до нажатия кнопки **Apply**;
- группу **Power Spectral Density Estimate** (Оценка спектральной плотности мощности) — поле графика с выведенной оценкой СПМ и указанием метода ее расчета.

С помощью команд меню **Options** можно управлять следующими свойствами графика оценки СПМ:

- **Magnitude Scale** (Шкала по оси ординат) — единицами измерения оценки СПМ:
 - **decibels** — дБ/Гц (по умолчанию);
 - **Linear** — Вт/Гц;

- **Frequency Range** (Диапазон частот) — интервалом частот при выводе графика оценки СПМ:
 - **[0, Fs/2]** — в основной полосе частот (по умолчанию), где **Fs** — частота дискретизации;
 - **[0, Fs]** — на периоде;
 - **[-Fs/2, Fs/2]** — на периоде, центрированном относительно нулевой частоты;
- **Frequency Scale** (Масштаб по оси частот) — масштабом по оси частот:
 - **Linear** — линейный;
 - **Log** — логарифмический.

С помощью кнопок на панели инструментов можно изменять масштаб, интервал наблюдения, активизировать маркеры, фиксирующие значения оценки СПМ, а также ее пики и впадины.

Кнопка **Create** предназначена для расчета оценки СПМ сигнала, имя которого выделено в группе **Signals**. При ее нажатии в группе **Spectra** автоматически появляется имя оценки СПМ — по умолчанию **spect** с номером N — и открывается окно **Spectrum Viewer**, где в группе **Signal** отображается имя сигнала, для которого рассчитывается оценка СПМ.

Для расчета оценки СПМ данного сигнала необходимо выполнить следующие действия:

1. В группе **Parameters** выбрать метод спектрального анализа и установить параметры настройки.

В списке **Method** представлены два метода *непараметрического* спектрального анализа:

- **FFT** — метод периодограмм (*см. разд. 13.1.1*).
Параметр настройки **Nfft** определяет размерность ДПФ и, соответственно, разрешение по частоте (10.32) при расчете периодограммы (13.3);
- **Welch** — метод Уэлча (*см. разд. 13.1.5*) с параметрами настройки:
 - **Nfft** — размерность ДПФ при расчете СПМ (13.12) фрагмента сигнала;
 - **Nwind** — длина окна, равная длине фрагмента сигнала;
 - **Window** — сглаживающее окно для фрагмента сигнала;
 - **Overlap** — величина перекрытия фрагментов при расчете периодограммы Уэлча (13.13); при величине перекрытия, равной нулю, рассчитывается периодограмма Бартлетта (13.11) с применением сглаживающего окна.

Среди методов *параметрического* спектрального анализа выделим следующие четыре (*см. разд. 13.2.6*):

- **Yule AR** — метод Юла—Уолкера;
- **Covariance** — ковариационный метод;

- **Mod. Covar.** — модифицированный ковариационный метод;
- **Burg** — метод Берга.

Параметры настройки данных методов одинаковы: **Order** — порядок АР-модели; **Nfft** — размерность ДПФ при расчете оценки СПМ (13.40).

2. Нажать кнопку **Apply**.

Для расчета оценки СПМ того же сигнала другим методом с *сохранением нового имени* в группе **Spectra** следует закрыть окно **Spectrum Viewer** и повторить процедуру.

Рассчитаем и сравним оценки СПМ тестового сигнала *train* с применением трех различных методов при одинаковой размерности ДПФ. В группе **Spectra** эти оценки СПМ по умолчанию получают имена *spect1*—*spect3*.

На рис. П2.9 представлена оценка СПМ *spect1* сигнала *train*, рассчитанная методом периодограмм, в которой наблюдается существенная изрезанность (осцилляции).

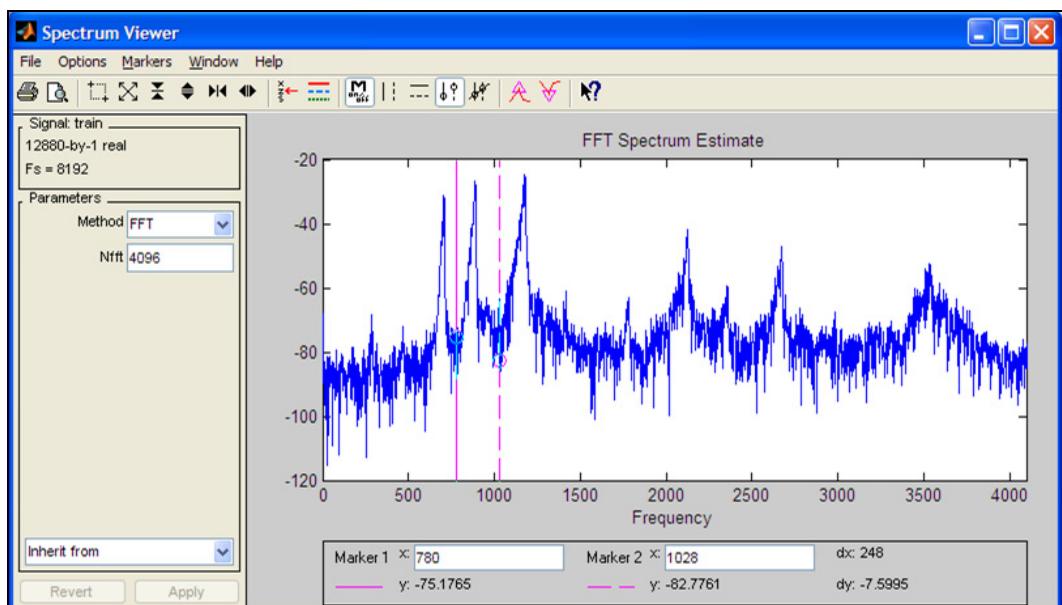


Рис. П2.9. Окно **Spectrum Viewer** с оценкой СПМ *spect1* тестового сигнала *train* (метод периодограмм)

На рис. П2.10 представлена оценка СПМ *spect2* того же сигнала, рассчитанная методом периодограмм Уэлча, с существенно сглаженными осцилляциями (при одновременном увеличении разрешения по частоте), что позволяет более точно определять частоты пиков и впадин.

На рис. П2.11 представлена оценка СПМ *spect3* того же сигнала, рассчитанная методом Юла—Уолкера, в которой осцилляции отсутствуют, и при заданном порядке АР-модели сохраняются пики и впадины.

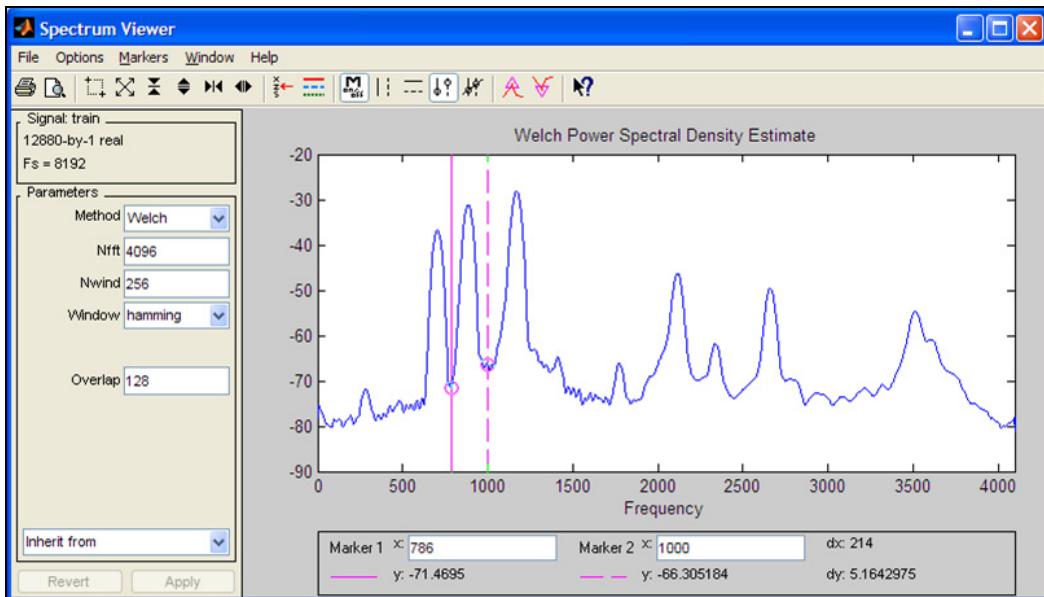


Рис. П2.10. Окно Spectrum Viewer с оценкой СПМ spect2 тестового сигнала train (метод периодограмм Уэлча)

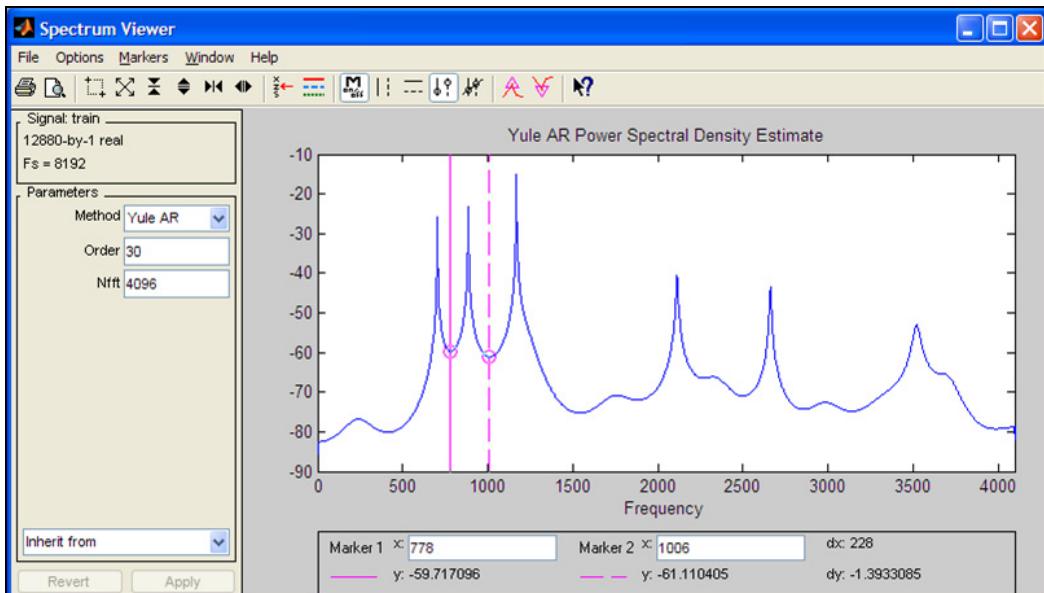


Рис. П2.11. Окно Spectrum Viewer с оценкой СПМ spect2 тестового сигнала train (метод Юла—Уолкера)

Приведенные примеры иллюстрируют возможности SPTool при выборе наиболее подходящего метода спектрального анализа и его параметров по результатам оперативного экспериментального исследования.

Удаление или переименование СПМ в группе Spectra, а также изменение частоты дискретизации выполняются с помощью соответствующих команд меню **Edit** окна **SPTool: startup.spt** или команд контекстного меню окна **Spectrum Viewer**, которые появляются после щелчка правой кнопкой мыши на поле графика.

Кнопка Update предназначена для повторного расчета СПМ того же сигнала (с применением другого метода спектрального анализа или других параметров настройки) без изменения имени в группе **Spectra**.

П2.2. Экспорт данных из SPTool

Экспорт данных (сигнала, фильтра или оценки СПМ) из SPTool выполняется в окне **SPTool: startup.spt** по команде меню **File | Export** (Файл | Экспорт), после чего открывается окно **Export from SPTool** (Экспорт из SPTool), в котором необходимо выполнить следующие действия (рис. П2.12):

1. В группе **Export List** (Список экспортируемых данных) выделить имя экспортируемых данных (если их несколько, то с помощью клавиши <Ctrl>).

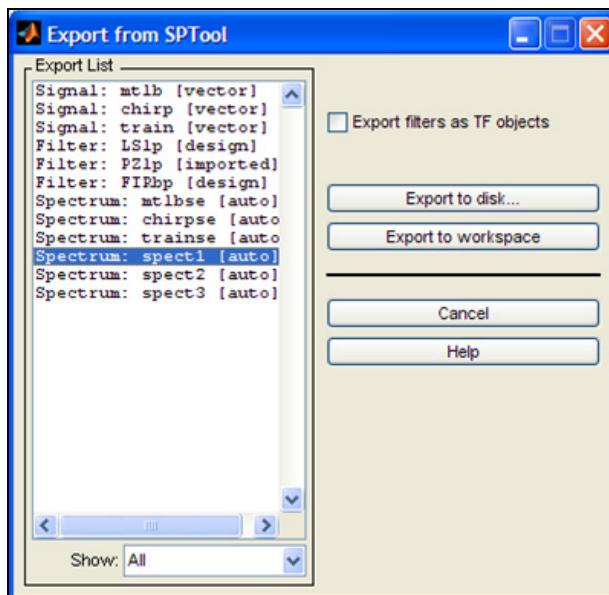


Рис. П2.12. Окно Export from SPTool

2. В раскрывающемся списке **Show** (Показать) выбрать группу, из которой будут экспортироваться данные: **Signals**, **Filters**, **Spectra** или **All** (Все группы).
3. С помощью соответствующих кнопок указать, куда экспортируются данные (**Export to disk** или **Export to workspace**).

При экспорте данных в *Workspace* они автоматически сохраняются с теми же именами, что и в SPTool.

При экспорте данных на диск в автоматически открывающемся окне **Export to Disk** (Экспорт на диск) следует продублировать имя mat-файла (без расширения), после чего нажать кнопку **Сохранить**, и данные сохранятся в текущей папке. При экспорте на диск одновременно нескольких данных они объединяются в один mat-файл, имя которого указывается пользователем. Загрузка mat-файла с диска в Workspace осуществляется по команде `load`.

При экспорте в Workspace или на диск данные представляются в виде *массивов записей* (struct array). Обращение к массиву записей (структуре) производится по его имени, совпадающему с именем в окне **SPTool: startup.spt**. Список полей массива зависит от экспортируемых данных.

П2.3. Сохранение сеанса работы в SPTool

Сеанс работы в SPTool называется *сессией* (Session). По завершении работы в SPTool предусмотрена возможность *сохранения сессии* по команде меню **File | Save Session As** (Файл | Сохранить сессию как).

В открывающемся окне **Save Session** (Сохранить сессию) указывается имя сессии — файла с расширением spt и нажимается кнопка **Сохранить**.

При последующих обращениях к SPTool сохраненная сессия открывается по команде меню **File | Open Session** (Файл | Открыть сессию). В окне **Open Session** выбирается требуемая папка и в ней — файл с сохраненной сессией.

Список литературы

1. Ingle V., Proakis J. Digital Signal Processing Using MATLAB. Second Edition — Thomson.
2. Karris S. T. Signals and Systems mith MATLAB Computing and Simulink Modeling. Third Edition. — Orhard Publications, 2007.
3. Адаптивные фильтры / под ред. К. Ф. Коуэна и П. М. Гранта. — М.: Мир, 1988.
4. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов. — М.—СПб.— Киев: Вильямс, 2004.
5. Афанасьев А. А., Рыболовлев А. А., Рыжков А. П. Цифровая обработка сигналов. — М.: Горячая линия — Телеком, 2017.
6. Бахвалов Н. С. Численные методы. — М.: Наука, 1975.
7. Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969.
8. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов, прогноз и управление. — М.: Мир, 1974.
9. Брюханов Ю. А. Цифровые цепи и сигналы. — М.: Горячая лилия — Телеком, 2017.
10. Варгаузин В. А. Цифровая обработка сигналов. Минимаксные аппроксимации для задач цифровой фильтрации. — СПб.: Издательство СПбГПУ, 2004.
11. Витязев В. В. Многоскоростная обработка данных. — М.: Горячая линия — Телеком, 2017.
12. Витязев В. В. Цифровая частотная селекция сигналов. — М.: Радио и связь, 1993.
13. Влах И., Сингхал К. Машины методы анализа и проектирования электронных схем. — М.: Радио и связь, 1988.
14. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984.
15. Воеводин В. В. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1977.
16. Гадзиковский В. И. Методы проектирования цифровых фильтров. — М.: Горячая линия — Телеком, 2007.
17. Гадзиковский В. И. Теоретические основы цифровой обработки сигналов. — М.: Радио и связь, 2004.

18. Гольденберг Л. М., Матюшкин Б. Д., Поляк М. Н. Цифровая обработка сигналов. Справочник. — М.: Радио и связь, 1985.
19. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. 5-е изд. — М.: Дрофа, 2006.
20. Джиган В. И. Адаптивная фильтрация сигналов: теория и алгоритмы. — М.: Техносфера, 2013.
21. Иванов М., Сергиенко А., Ушаков В. Радиотехнические цепи и сигналы. — СПб.: ПИТЕР, 2014.
22. Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений. — М.: Наука, 1984.
23. Каппелини В., Константинидис А. Дж., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение. — М.: Энергоатомиздат, 1983.
24. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1984.
25. Крошье Р. Е., Рабинер Л. Р. Интерполяция и децимация цифровых сигналов: Метод. обзор // ТИИЭР. — 1981. — Т. 69. — № 3. — С. 14—40.
26. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.
27. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов. — М.: Бином, 2006.
28. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Советское радио, 1969.
29. Лурье Б. Я., Энрайт П. Дж., Классические методы автоматического управления. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
30. Макхол Дж. Линейное предсказание: Обзор // ТИИЭР. — 1975. — Т. 63. — № 4.
31. Маркел Дж. Д., Грэй А. Х. Линейное предсказание речи. — М.: Связь, 1980.
32. Марпл С. Л. (мл.). Цифровой спектральный анализ и его приложения. — М.: Мир, 1990.
33. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. — М.: Радио и связь, 1985.
34. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. — М.: Техносфера, 2006.
35. Прокис Дж. Цифровая связь. — М.: Радио и связь, 2000.
36. Рабинер Л., Голд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1978.
37. Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения. — Киев, Наукова думка, 1969.
38. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов. 3-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
39. Смирнов В. И. Курс высшей математики. — М.: Гостехтеориздат, 1951.

40. Смит С. Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и научных работников. — М.: Издательский дом «Додэка-XXI», 2008.
41. Солонина А. И., Арбузов С. М. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008.
42. Солонина А. И., Клионский Д. М., Меркучева Т. В., Перов С. Н. Цифровая обработка сигналов и MATLAB. — СПб.: БХВ-Петербург, 2013.
43. Солонина А. И. Масштабирование структур рекурсивных цифровых фильтров в MATLAB // Цифровая обработка сигналов. — 2016. — № 2.
44. Солонина А. И. Описание связей между последовательностями дельтаимпульсов и числовыми последовательностями на основе симметричных рядов Фурье. // Цифровая обработка сигналов. — 2010. — № 2.
45. Солонина А. И. Оценки собственного шума структур рекурсивных цифровых фильтров и их вычисление в MATLAB // Цифровая обработка сигналов. — 2015, № 2.
46. Солонина А. И., Улахович Д. А., Арбузов С. М., Соловьева Е. Б. Основы цифровой обработки сигналов. 2-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
47. Солонина А. И., Улахович Д. А., Яковлев Д. А. Алгоритмы и процессоры цифровой обработки сигналов. — СПб.: БХВ-Петербург, 2001.
48. Солонина А. И., Цифровая обработка сигналов. Моделирование в Simulink. — СПб.: БХВ-Петербург, 2012.
49. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. 2-е изд. — М.: Наука, 1979.
50. Уидроу В., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. — М.: Радио и связь, 1989.
51. Улахович Д. А. Основы теории линейных электрических цепей. — СПб.: БХВ-Петербург, 2009.
52. Цикин И. А. Дискретно-аналоговая обработка сигналов. — М.: Радио и связь, 1982.
53. Чобану М. К. Многомерные многоскоростные системы обработки сигналов. — М.: Техносфера, 2009.
54. Шахтарин Б. И., Ковригин В. А. Методы спектрального оценивания случайных процессов. 2-е изд. — М.: Горячая линия — Телеком, 2011.
55. Шахтарин Б. И. Случайные процессы в радиотехнике. Том 1. Линейные преобразования. 4-е изд. — М.: Горячая линия — Телеком, 2010.

Предметный указатель

Z

Z-преобразование:

- ◊ область сходимости 42
- ◊ обратное 56
- ◊ прямое 42
- ◊ свойство линейности 49
- ◊ таблица соответствий 51
- ◊ теорема:
 - о задержке 49
 - о свертке 50

* * *

БИХ-фильтр:

- ◊ оптимальный 401
- ◊ передаточная функция 401
- ◊ порядок 401
- ◊ четыре типа 402

В

Время:

- ◊ дискретное 21
 - нормированное 21
- ◊ задержки групповое 95
- ◊ реальное 20

Д

А

Алгоритм:

- ◊ БПФ:
 - с прореживанием по времени 240
 - с прореживанием по частоте 250

- ◊ Ремеза 357

Арифметика:

- ◊ в дополнительном коде 145
- ◊ целочисленная 145
- ◊ АР-модель 285
- ◊ оценка порядка 300

Б

Банк:

- ◊ ДПФ-фильтров 463, 464
- ◊ фильтров 461
- ◊ Белый шум 267
- ◊ на выходе ЛДС 268

Децимация 435

Диапазон динамический 171

Дискретизация 19

Дифференциатор 392

З

Звено:

- ◊ базовое 68
- ◊ биквадратное 68
- ◊ рекурсивное 68
- ◊ фазовое:
 - 1-го порядка 122
 - 2-го порядка 125
 - каскадная структура 129
 - определение 119
 - произвольного порядка 128
 - решетчатая структура 130
 - свойства 120
 - условие существования 120

И

- Идентификация неизвестной системы:
 ◇ обратная 485
 ◇ прямая 485
 Импульс цифровой единичный 22
 ◇ фильтрующее свойство 23
 Инвариантность во времени 28
 Интерполяция 435

К

- Карта нулей и полюсов 67
 Квантование 19
 ◇ источники ошибок 151
 ◇ округление данных 148
 ◇ оценки ошибок 149
 ◇ уровни 147
 ◇ усечение данных 148
 ◇ шаг 147
 КИХ-фильтр:
 ◇ амплитудная функция 312
 ◇ длина 309
 ◇ идеальный 323
 ◇ оптимальный 347
 ◇ передаточная функция 309
 ◇ порядок 309
 ◇ условия линейности ФЧХ 309
 ◇ четыре типа 310

Код:

- ◇ дополнительный 143
 - ◇ прямой 142
- Компрессор 442
 Корректор фазовый 121
 Коррелограмма 282
 ◇ модифицированная 282
- Критерий:
- ◇ оценки порядка АР-модели 300
 - ◇ Чебышева 351
 - ◇ устойчивости:
 - второй 76
 - первый 39
- Круг единичный 48

М

- Масштабирование:
 ◇ общие принципы 174
 ◇ расчет множителей 181

Метод:

- ◇ автокорреляционный 288
 - ◇ билинейного Z-преобразования 412
 - ◇ инвариантности импульсной характеристики 405
 - ◇ ковариационный 292
 - ◇ коррелограмм 282
 - ◇ модифицированный ковариационный 294
 - ◇ окон 325
 - ◇ округления данных 148
 - ◇ Паркса—Мак-Клеллана 363
 - ◇ периодограмм 272
 - Бартлетта 278
 - Даньелла 276
 - Уэлча 280
 - ◇ стандартного Z-преобразования 404
 - ◇ чебышевской аппроксимации 347
 - ◇ Юла—Уолкера 288
- Модель:
- ◇ с постнакоплением 156
 - ◇ эквивалентная линейная 156
- Мощность средняя 260

Н

- Нормирование коэффициентов 183
 ◇ усиления 183

О

- Объект:
- ◇ adaptfilt 484
 - ◇ adaptfilt 476, 477
 - ◇ dfilt 108
 - ◇ mfilt 460
- Окно:
- ◇ Бартлетта 335, 339
 - ◇ Блэкмана 333, 339
 - ◇ Дирихле 326, 327, 339
 - ◇ Кайзера 342, 344
 - ◇ основные параметры 336
 - ◇ треугольное 334
 - ◇ характеристика ослабления 336
 - ◇ Хэмминга 332, 339
 - ◇ Хэнна 332, 339
- Окружность единичная 47
 Отношение "сигнал/шум" 171
 Отсчет 15

Оценка СПМ:

- ◊ асимптотически несмешенная 274
- ◊ Блэкмана—Тьюки 282
- ◊ дисперсия 275
- ◊ добротность 275
- ◊ несмешенная 274
- ◊ состоятельная 275
- ◊ стандартное отклонение 276

Ошибки:

- ◊ квантования коэффициентов 172
- ◊ переполнения сумматоров 172

П

- Передискретизация 435
 Период дискретизации 15
 Периодограмма 272
 ◊ Бартлетта 278
 ◊ Даньелла 276
 ◊ модифицированная 272
 ◊ Уэлча 280
 Плотность спектральная 189, 196
 ◊ свойства 190
 ◊ инверсия 204
 Полоса частот, основная 22, 83
 Последовательность:
 ◊ дельта-функций 217
 ◊ задержанная 22
 ◊ определение 15
 ◊ прореженная 247
 Предсказание линейное
 ◊ вперед 288, 294
 ◊ назад 294
 ◊ ошибка 288
 ◊ параметры 289
 Преобразование Лапласа 41
 Преобразование Фурье:
 ◊ быстрое 239
 ◊ дискретное 223
 - конечной последовательности 226
 - периодической последовательности 224
 - разрешение по частоте 226
 - растекание спектра 226
 - свойства 229
 ◊ непрерывной функции 61
 ◊ обратное быстрое 248
 ◊ последовательности 62
 Преобразователь:
 ◊ аналого-цифровой 19
 ◊ цифроаналоговый 20
 Преобразователь Гильберта 387

P

- Равенство Парсеваля 193, 230
 Ряд Фурье 216
 ◊ в частотной области 190

C

- Свертка:
 ◊ круговая 234
 ◊ линейная 33, 234
 ◊ секционированная 237
 Свойства Z-преобразования:
 ◊ билинейного 413
 ◊ стандартного 406
 Сигнал 15
 ◊ аналоговый 15
 ◊ детерминированный 253
 ◊ дискретный 15, 19
 - гармонический 25
 - комплексный гармонический 25
 ◊ субполосный 461
 ◊ узкополосный 198
 ◊ цифровой 16, 19
 Система:
 ◊ линейная дискретная:
 - минимально-фазовая 115
 - неминимально-фазовая 115
 - устойчивая 38
 ◊ многоскоростная 435
 ◊ однократной децимации 442
 ◊ однократной интерполяции 436
 ◊ однократной передискретизации 449
 Система обработки сигналов 27
 ◊ дискретная 28
 ◊ линейная 27
 - дискретная 28
 - нерекурсивная 36
 - параметры 34
 - порядок 65
 - рекурсивная 35
 - свойство памяти 36
 - линейный оператор 28
 - стационарная 28
 - физически реализуемая 29
 Система уравнений:
 ◊ Винера—Хопфа 471
 ◊ Юла—Уолкера 290
 Скачок цифровой единичный 24
 Случайный процесс:
 ◊ ансамбль реализаций 255

- ◊ время:
 - дискретное 254
 - непрерывное 253
- ◊ на выходе ЛДС 265
- ◊ нестационарный 258
- ◊ реализация 255
- ◊ стационарный 257
- ◊ характеристики 256
- ◊ эргодический 258
- Спектр:
- ◊ амплитудный 224
- ◊ аналогового сигнала 216
- ◊ дискретного сигнала 218, 224
- ◊ фазовый 224
- Спектральная плотность мощности 263, 264
- Структура:
 - ◊ ЛДС 97
 - в виде объекта dfilt 108
 - нерекурсивной:
 - прямая 107
 - транспонированная 108
 - рекурсивной:
 - каноническая 99
 - каноническая транспонированная 102
 - каскадная 106
 - описание в пространстве состояний 103
 - параллельная 106
 - прямая 99
 - транспонированная 100
 - ◊ полифазная 449, 451, 455
 - описание в виде объекта mfilt 460
 - ◊ прямая приведенная 319
 - ◊ решетчатая 130
- Схема структурная 97

T

- Таблица соответствий 54
- Теорема:
- ◊ Винера—Хинчина 264
 - ◊ обобщенная Котельникова 199
 - ◊ Чебышева 353

У

- Условия начальные:
- ◊ ненулевые 29
 - ◊ нулевые 28
- Устойчивость 38

Ф

- Фильтр:
- ◊ L-полосный 379
 - ◊ адаптивный 467
 - алгоритм:
 - LMS 473
 - NLMS 476
 - RLS 478
 - Винера 470
 - линейность 469
 - параметры 468
 - оптимальные 472
 - структура 467
 - в виде объекта adaptfilt 476
 - устойчивость 469
 - шаг адаптации 474
 - ◊ антиэлайсинговый 197
 - ◊ всепропускающий 119
 - ◊ квадратурно-зеркальный 383
 - ◊ Найквиста 378
 - ◊ однородный 367
 - ◊ полуpolloсный 372
 - ◊ триангулярный 370
 - ◊ цифровой 303
 - проектирование 306
 - частотно-избирательный 305
- Фильтрация:
- ◊ адаптивная 469
 - ◊ цифровая 304
- Фильтр-прототип 449
- Формат данных:
- ◊ с плавающей точкой 139
 - ◊ с фиксированной точкой 136
- Формула свертки 30
- Функция:
- ◊ int 19
 - ◊ автоковариационная 260
 - ◊ автокорреляционная 260
 - ◊ весовая 351
 - ◊ передаточная 64
 - БИХ-фильтра 401
 - КИХ-фильтра 309, 323
 - нерекурсивной ЛДС 65
 - нули 65
 - область сходимости 78
 - общего вида 64
 - полюсы 65
 - рекурсивной ЛДС 65

Х

Характеристика:

- ◊ амплитудно-частотная 82
 - нули и экстремумы 84
 - экспресс-анализ 87
- ◊ затухания 316
- ◊ импульсная 29
 - оценка 486
- ◊ ослабления 319
- ◊ фазочастотная 82
 - скачки 85
- ◊ частотная 79, 81

Ш

Шум:

- ◊ АЦП 153
- ◊ БИХ-фильтра 422
- ◊ КИХ-фильтра 421
- ◊ нерекурсивной системы 166
- ◊ рекурсивных звеньев 157
- ◊ собственный 156
- ◊ структуры:
 - каскадной 168
 - параллельной 167
- ◊ цифровой системы 152

Ц

Цикл предельный 187

Ч

Частота:

- ◊ дискретизации 15
- ◊ дискретная нормированная 216
- ◊ Найквиста 22
- ◊ нормированная 21, 45
- ◊ нуля 71
- ◊ полюса 71

Э

Эквалайзер 491

Экспандер 436

Экспонента дискретная 24

Элайсинг 196

Эффект Гиббса 331