

цифровой обработки

А. ОППЕНГЕЙМ, Р. ШАФЕР

Цифровая
обработка
сигналов





МИР цифровой обработки

А. ОППЕНГЕЙМ, Р. ШАФЕР

Цифровая обработка сигналов

Перевод с английского
С.А. Кулешова
под редакцией А.С. Ненашева

ТЕХНОСФЕРА

Москва

2006

А. Оппенгейм, Р. Шафер
Цифровая обработка сигналов
Москва:
Техносфера, 2006. - 856с. ISBN 5-94836-077-6

Книга, предлагаемая Вашему вниманию, — второе переработанное издание всемирно известного классического учебника "Цифровая обработка сигналов", опубликованного в 1975 году. В ее основу лег развернутый курс по дискретной обработке сигналов, преподававшийся в течение ряда лет в Массачусетском технологическом институте. Учебник посвящен математическим алгоритмам, реализуемым в дискретных системах. В нем опущены сложные доказательства математических утверждений, но все приемы и методы иллюстрированы многочисленными примерами и задачами.

Книга будет полезна как студентам, осваивающим предмет, так и инженерам-разработчикам и системотехникам.

DISCRETE-TIME SIGNAL PROCESSING

© 1999, published by Pearson Education,
Inc, publishing as Prentice Hall
© 2006, ЗАО "РИЦ "Техносфера", перевод,
оригинал-макет, оформление

ISBN 5-94836-077-6
ISBN 0-13-754920-2 (англ.)

Содержание

Предисловие	10
Благодарности.....	15
Предисловие к русскому изданию	17
Глава 1.	
Введение	20
Глава 2.	
Дискретные сигналы и системы	28
2.1. Введение	28
2.2. Дискретные сигналы: последовательности.....	29
2.2.1. Стандартные последовательности и операции над ними	30
2.3. Дискретные системы.....	35
2.3.1. Системы без запоминания.....	37
2.3.2. Линейные системы	38
2.3.3. Стационарные системы	39
2.3.4. Детерминированность	40
2.3.5. Устойчивость	41
2.4. Линейные стационарные системы	42
2.5. Свойства линейных стационарных систем	47
2.6. Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами	53
2.7. Представление сигналов и систем в частотной области	59
2.7.1. Собственные функции линейных стационарных систем	60
2.7.2. Мгновенно поданный экспоненциальный сигнал	64
2.8. Преобразование Фурье	67
2.9. Симметрии преобразования Фурье	74
2.10. Теоремы о преобразовании Фурье.....	77
2.10.1. Линейность преобразования Фурье	77
2.10.2. Временной и частотный сдвиги	77
2.10.3. Обращение времени.....	78
2.10.4. Дифференцирование по частоте.....	78
2.10.5. Теорема Парсеваля	78
2.10.6. Теорема о свертке.....	79
2.10.7. Модуляция, или теорема о периодической свертке.....	80
2.11. Случайные дискретные сигналы	83
2.12. Краткое содержание главы	88
Задачи	89
Глава 3.	
Z-преобразование	111
3.1. Введение	111
3.2. Z-преобразование	111
3.3. Область сходимости z-преобразования	120

3.4.	Обратное z -преобразование.....	127
3.4.1.	Табличный метод.....	127
3.4.2.	Метод простейших дробей	128
3.4.3.	Разложение в степенные ряды	132
3.5.	Свойства z -преобразования.....	134
3.5.1.	Линейность	134
3.5.2.	Задержка.....	135
3.5.3.	Умножение на экспоненциальную последовательность	136
3.5.4.	Дифференцирование $X(z)$	137
3.5.5.	Сопряжение комплексной последовательности.....	139
3.5.6.	Обращение времени.....	139
3.5.7.	Свертка последовательностей	139
3.5.8.	Теорема о начальном значении	141
3.5.9.	Несколько слов в заключение	141
3.6.	Краткое содержание главы	141
	Задачи	142

Глава 4.**Дискретизация непрерывного сигнала.....** 154

4.1.	Введение	154
4.2.	Периодическая дискретизация	154
4.3.	Частотное представление дискретизации	156
4.4.	Восстановление узкополосного сигнала по его отсчетам	162
4.5.	Дискретная обработка непрерывных сигналов	166
4.5.1.	Линейные стационарные системы.....	167
4.5.2.	Импульсная инвариантность	173
4.6.	Непрерывная обработка дискретных сигналов	175
4.7.	Изменение частоты дискретизации с помощью дискретной обработки	179
4.7.1.	Уменьшение частоты дискретизации в целое число раз	179
4.7.2.	Увеличение частоты дискретизации в целое число раз	184
4.7.3.	Изменение частоты дискретизации на рациональный множитель ..	189
4.8.	Обработка многоскоростных сигналов	190
4.8.1.	Смена порядка фильтрования и понижающей/повышающей дискретизации	192
4.8.2.	Многофазовое разложение.....	193
4.8.3.	Многофазовая реализация прореживающих фильтров	194
4.8.4.	Многофазовая реализация интерполяционных фильтров	196
4.9.	Цифровая обработка аналоговых сигналов	197
4.9.1.	Предварительное фильтрование для устранения эффекта наложения спектров	198
4.9.2.	Преобразование аналогового сигнала в цифровой.....	200
4.9.3.	Анализ ошибок квантования.....	206
4.9.4.	Преобразование цифрового сигнала в аналоговый	210
4.10.	Передискретизация и формирование шумов в АЦП и ЦАП	214
4.10.1.	Передискретизованный АЦП с простым квантованием	214
4.10.2.	Передискретизованный АЦП с формированием шумов.....	219

4.10.3. Передискретизация и формирование шумов в ЦАП	224
4.11. Краткое содержание главы	227
Задачи	228
Глава 5.	
Анализ линейных стационарных систем	254
5.1. Введение	254
5.2. Комплексная частотная характеристика ЛС-систем	255
5.2.1. Идеальные частотно-избирательные фильтры	255
5.2.2. Фазовое искажение и задержка	256
5.3. Характеристические функции систем, описывающихся линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами	258
5.3.1. Устойчивость и детерминированность	261
5.3.2. Обратные системы	262
5.3.3. Импульсная характеристика систем с рациональной характеристической функцией	264
5.4. КЧХ систем с рациональной характеристической функцией	267
5.4.1. КЧХ в случае единственного нуля или полюса характеристической функции	270
5.4.2. Примеры с кратными полюсами или нулями	277
5.5. Взаимосвязь АЧХ и ФЧХ	281
5.6. Всепропускающие системы	285
5.7. Минимально-фазовые системы	290
5.7.1. Минимально-фазовое и всепропускающее разложение	291
5.7.2. Компенсирование воздействия КЧХ ЛС-системы	293
5.7.3. Свойства минимально-фазовых систем	294
5.8. Линейные системы с обобщенной линейной фазой	300
5.8.1. Системы с линейной фазой	301
5.8.2. Обобщенная линейная фаза	304
5.8.3. Детерминированные системы с обобщенной линейной фазой	307
5.8.4. Связь линейно-фазовых КИХ-систем с минимально-фазовыми	315
5.9. Краткое содержание главы	318
Задачи	319
Глава 6.	
Структуры для дискретных систем	346
6.1. Введение	346
6.2. Блок-схемы линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами	347
6.3. Сигнальный потоковый граф линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами	354
6.4. Основные структуры БИХ-систем	358
6.4.1. Прямые формы	359
6.4.2. Каскадные формы	360
6.4.3. Параллельные формы	363
6.4.4. Обратная связь в БИХ-системах	364
6.5. Транспонированные формы	367

6.6.	Основные сетевые структуры КИХ-систем	371
6.6.1.	Прямая форма	371
6.6.2.	Каскадная форма.....	372
6.6.3.	Структуры КИХ-систем с линейной фазой.....	372
6.7.	Обзор проблем цифрового представления.....	375
6.7.1.	Численное представление	375
6.7.2.	Квантование при реализации систем	379
6.8.	Квантование коэффициентов.....	381
6.8.1.	Квантование коэффициентов в БИХ-системах	382
6.8.2.	Пример квантования коэффициентов в эллиптическом фильтре	383
6.8.3.	Полюса квантованных участков второго порядка.....	386
6.8.4.	Квантование коэффициентов в КИХ-системах	388
6.8.5.	Пример квантования оптимального КИХ-фильтра.....	390
6.8.6.	Поддержка линейной фазы.....	394
6.9.	Шумы округления в цифровых фильтрах	395
6.9.1.	Анализ прямой формы БИХ-структур	395
6.9.2.	Масштабирование в реализациях БИХ-систем с фиксированной точкой.....	403
6.9.3.	Пример анализа каскада БИХ-структур.....	407
6.9.4.	Анализ прямой формы КИХ-систем	414
6.9.5.	Реализация дискретных систем в арифметике с плавающей точкой	416
6.10.	Предельные циклы при отсутствии входного сигнала в реализациях цифровых БИХ-фильтров	417
6.10.1.	Предельные циклы, возникающие при округлении и усечении	418
6.10.2.	Предельные циклы, вызываемые переполнениями	420
6.10.3.	Предупреждение предельных циклов	421
6.11.	Краткое содержание главы	422
	Задачи	423

Глава 7.

	Техника проектирования фильтров	442
7.1.	Введение	442
7.2.	Проектирование дискретных БИХ-фильтров, основанное на непре- рывных фильтрах	445
7.2.1.	Разработка фильтров с помощью импульсной инвариантности	447
7.2.2.	Дробно-линейное преобразование	453
7.2.3.	Примеры проектирования на основе дробно-линейного преобра- зования	457
7.3.	Разработка КИХ-фильтров оконным методом	467
7.3.1.	Стандартные окна и их свойства	470
7.3.2.	Обобщенная линейная фаза	473
7.3.3.	Метод Кайзера проектирования фильтров	476
7.3.4.	Сравнение окна Кайзера с остальными окнами	479
7.4.	Примеры проектирования КИХ-фильтра методом Кайзера	481
7.4.1.	Фильтр верхних частот	481
7.4.2.	Дискретный дифференциатор	484

7.5.	Оптимальная аппроксимация КИХ-фильтров.....	487
7.5.1.	Оптимальный фильтр нижних частот I типа	493
7.5.2.	Оптимальный фильтр нижних частот II типа	499
7.5.3.	Алгоритм Пакса–Мак–Клеллана.....	500
7.5.4.	Характеристики оптимальных КИХ-фильтров.....	503
7.6.	Примеры равнопульсирующей КИХ-аппроксимации	505
7.6.1.	Фильтр нижних частот	505
7.6.2.	Компенсация для схемы запоминания нулевого порядка	508
7.6.3.	Полосовой фильтр	510
7.7.	Комментарии к дискретным БИХ-и КИХ-фильтрам.....	512
7.8.	Краткое содержание главы	513
	Задачи	514
Глава 8.		
	Дискретное преобразование Фурье	548
8.1.	Введение	548
8.2.	Представление периодических последовательностей: дискретные ряды Фурье	548
8.3.	Свойства дискретных рядов Фурье	552
8.3.1.	Линейность	553
8.3.2.	Сдвиг последовательности	553
8.3.3.	Двойственность	553
8.3.4.	Симметричность.....	554
8.3.5.	Периодическая свертка.....	554
8.3.6.	Обзор свойств представления периодических последовательностей дискретными рядами Фурье.....	557
8.4.	Преобразование Фурье периодических сигналов	557
8.5.	Дискретизация Фурье-образа	561
8.6.	Представление Фурье конечных последовательностей: дискретное преобразование Фурье	565
8.7.	Свойства дискретного преобразования Фурье	569
8.7.1.	Линейность	569
8.7.2.	Циклический сдвиг последовательности	570
8.7.3.	Двойственность	572
8.7.4.	Симметричность.....	573
8.7.5.	Циклическая свертка.....	576
8.7.6.	Обзор свойств дискретного преобразования Фурье	579
8.8.	Вычисление линейной свертки через ДПФ	580
8.8.1.	Линейная свертка двух конечных последовательностей	581
8.8.2.	Циклическая свертка как линейная с наложением во времени.....	582
8.8.3.	Реализация ЛС-систем через дискретное преобразование Фурье ..	586
8.9.	Дискретное косинус-преобразование	591
8.9.1.	Определение дискретного косинус-преобразования	592
8.9.2.	Определение ДКП-1 и ДКП-2	593
8.9.3.	Связь между ДПФ и ДКП-1	596
8.9.4.	Связь между ДПФ и ДКП-2	596

8.9.5. Уплотнение энергии при ДКП-2	598
8.9.6. Приложения ДКП	601
8.10. Краткое содержание главы	602
Задачи	602
Глава 9.	
Вычисление дискретного преобразования Фурье	629
9.1. Введение	629
9.2. Эффективное вычисление дискретного преобразования Фурье	630
9.3. Алгоритм Герцеля	633
9.4. Прореживание по времени	635
9.4.1. Вычисления на месте	640
9.4.2. Альтернативные формы	643
9.5. Прореживание по частоте	646
9.5.1. Вычисление на месте	649
9.5.2. Альтернативные формы	650
9.6. Подробное исследование алгоритма	652
9.6.1. Нумерация	652
9.6.2. Коэффициенты	654
9.6.3. Алгоритмы для более общих значений N	655
9.7. Реализация дискретного преобразования Фурье с помощью свертки	655
9.7.1. Обзор алгоритма Вайноград–Фурье	655
9.7.2. Преобразование с линейной частотной модуляцией	656
9.8. Эффекты, связанные с конечной длиной регистров	661
9.9. Краткое содержание главы	669
Задачи	669
Глава 10.	
Приложение ДПФ к Фурье-анализу	695
10.1. Введение	695
10.2. ДПФ и Фурье-анализ сигналов	695
10.3. ДПФ-анализ синусоидальных сигналов	699
10.3.1. Эффект обработки методом окна	700
10.3.2. Спектральная дискретизация	705
10.4. Преобразование Фурье, зависящее от времени	715
10.4.1. Эффект обработки окном	717
10.4.2. Дискретизация по времени и по частоте	719
10.5. Блочная свертка с использованием ЗВПФ	723
10.6. Фурье-анализ нестационарных сигналов	724
10.6.1. Зависящий от времени Фурье-анализ речевых сигналов	724
10.6.2. Зависящий от времени Фурье-анализ радарных сигналов	728
10.7. Фурье-анализ стационарных случайных сигналов: периодограмма	730
10.7.1. Периодограмма	731
10.7.2. Свойства периодограмм	733
10.7.3. Усреднение периодограмм	736
10.7.4. Вычисление усредненных периодограмм через ДПФ	738
10.7.5. Пример периодограммного анализа	739

10.8. Спектральный анализ случайных сигналов с помощью оценки автокорреляционной функции	743
10.8.1. Вычисление корреляции и оценка спектра мощности с помощью ДПФ	746
10.8.2. Пример оценки спектра мощности, основанной на оценке автокорреляционной последовательности	748
10.9. Краткое содержание главы	754
Задачи	755
Глава 11.	
Дискретное преобразование Гильберта	778
11.1. Введение	778
11.2. Вещественная и мнимая части Фурье-образа детерминированной последовательности	780
11.3. Теоремы достаточности для конечных последовательностей	785
11.4. Взаимосвязь абсолютного значения и фазы	791
11.5. Соотношения преобразования Гильберта для комплекснозначных последовательностей	792
11.5.1. Проектирование преобразователя Гильберта	795
11.5.2. Представление полосовых сигналов	799
11.5.3. Полосовая дискретизация	801
11.6. Краткое содержание главы	804
Задачи	804
Приложение А.	
Случайные сигналы	814
A.1. Дискретные случайные процессы	814
A.2. Средние	815
A.2.1. Определения	816
A.2.2. Временные средние	818
A.3. Свойства корреляционной и ковариационной последовательностей	820
A.4. Преобразование Фурье случайных сигналов	821
A.5. Использование z -преобразования при вычислении средней мощности	823
Приложение Б.	
Непрерывные фильтры	827
B.1. Фильтры Баттервортса низких частот	827
B.2. Фильтры Чебышева	828
B.3. Эллиптические фильтры	830
Приложение В.	
Ответы к избранным задачам	832
Литература	843
Литература на русском языке	852
Предметный указатель	853

Предисловие

Книга, предлагаемая вашему вниманию, — второе переработанное издание нашего учебника «Цифровая обработка сигналов», опубликованного в 1975 году. В то время теория цифровой обработки сигналов находилась в младенческом состоянии, но основные ее принципы уже обозначились и нуждались в систематическом изложении. Хотя соответствующие курсы существовали во многих высших учебных заведениях, читались они только выпускникам. Первоначальный текст был подготовлен именно для таких лекций.

К 1985 году темпы исследований и развития технологий интегральных схем показали, что цифровая обработка сигналов (ЦОС) смогла реализовать потенциал, заложенный в 1970-х годах. Широкое распространение и важность ЦОС сделала насущной задачу пересмотра первого издания. Однако при попытках переработки текста стало ясно, что необходимо внести так много изменений и дополнений, что разумнее написать новый учебник, основанный на исходной книге. Мы назвали новый учебник «Обработка сигналов в дискретном времени»¹, подчеркивая, что большая часть теории и практических методов, представленных в нем, применима к более широкому классу сигналов и систем.

К моменту издания «Обработки сигналов в дискретном времени» (1989 г.) основы ЦОС стали преподавать уже на начальных курсах, а линейные системы входили иногда составной частью в лекции для студентов первого года обучения, а несколько более сложные разделы — в курсы третьего или четвертого года или в самое начало выпускного курса. Поэтому необходимо было значительно расширить и углубить темы, посвященные линейным системам, дискретизации, обработке кратных сигналов, приложениям и спектральному анализу. Кроме того, для иллюстрации трудных понятий и важных приемов стоило подготовить побольше примеров.

Мы сократили и даже вовсе удалили отдельные темы, которые, как показало время, не очень нужны для понимания и использования обработки дискретных сигналов (ОДС). С другой стороны, в новый учебник было включено более 400 задач, помогающих освоению материала.

За десять лет, прошедших с момента публикации «Обработки сигналов в дискретном времени», появились новые концепции, имеющие большое значение, возможности цифровых интегральных схем выросли экспоненциально, и открылся значительный ряд новых приложений. Однако основная теория и фундаментальные приемы остаются в значительной степени прежними, хотя сместились акценты и изменилась методология преподавания. Поэтому, анализируя предстоящее редактирование, необходимое для поддержания этого учебника на современном уровне, мы обнаружили, что предстоит менее решительная переработка текста, чем предыдущая. При работе над текстом мы руководствовались тем принципом, что главная цель учебника — раскрыть объект, а не закамуфлировать его излишними усложнениями и подробностями. В связи с этим наша цель последней подготовки текста — сделать предмет ОДС еще более доступным для студентов и практикующих инженеров, не исключая при этом из текста те концепции, которые мы считаем важными и составляющими основу этой области знаний.

¹ Оригинальное название книги — «Discrete-Time Signal Processing», что переводится как «Обработка сигналов в дискретном времени». — Примеч. перев.



Наконец, мы значительно расширили темы, посвященные обработке многоскоростных сигналов, ввиду важности процессов дискретизации аналоговых сигналов, их восстановления по дискретным отсчетам и реализации цифровых фильтров. Был добавлен раздел о косинус-преобразовании, играющем центральную роль при сжатии данных. С другой стороны, из книги был удален некоторый материал, который, как мы считаем, имеет меньшее значение в настоящей редакции учебника или соответствует более сложным книгам, предназначенным последнему году обучения или дипломированным специалистам. Многие удаленные из основного текста материалы (например, основные результаты, касающиеся косинус-преобразования Фурье логарифма спектра мощности) вошли в задачи для самостоятельного решения.

Основные усилия по последнему пересмотру текста были направлены на задачи и примеры. Мы знаменательно увеличили число примеров, важных для иллюстрации и понимания основных концепций предмета. Не избежали этой участи и задачи для самостоятельного решения. Кроме того, задачи были реорганизованы согласно их уровню сложности, а ответы приведены лишь для определенного типа задач. Методическое пособие для преподавателя, доступное в издательстве, содержит обновленные решения всех задач, опубликованных в учебнике. Решения были подготовлены Ли Лии (Li Lee) и Маей Сэд (Maya Said) из Массачусетского технологического института (MIT) и Жорданом Розенталем (Jordan Rosenthal) и Грегором Слэбоу (Greg Slabaugh) из Технологического университета Джорджии (Georgia Tech). Туда же вошли некоторые задачи экзамена наших курсов, прочитанных в МИТ и Технологическом университете.

Как и в предыдущих версиях учебника мы предполагаем, что читатель владеет курсом математического анализа и основами теории функций комплексного переменного. В целях расширения аудитории в этом издании мы воздержались от использования комплексного интеграла вдоль контура. Теория непрерывных линейных систем, включая преобразования Лапласа и Фурье, которая входит в программы большинства курсов, все еще остается центральной темой книги. Вместе с ней учебник самодостаточен. В частности, освоить предмет может и читатель, не обладающий предварительным опытом работы с дискретными сигналами, преобразованием Фурье, z -преобразованием и т. п. В последние параграфы отдельных глав включены некоторые темы (например, шум квантования), для освоения которых потребуется знакомство со стохастическими сигналами. Краткий обзор необходимого предварительного материала включен в главу 2 и приложение A.

Многие современные учебники, посвященные обработке сигналов, содержат задачи, предназначенные для решения на компьютере. В нашей книге тоже есть широкий класс задач, которые легко переформулировать для этой цели. Как и в первом издании, по ряду причин мы намеренно опускаем описание специальных программ, осуществляющих алгоритмы, представленные здесь. Главная из них — та, что существует масса недорогих программных пакетов для обработки сигналов, удобных для иллюстрации и реализации алгоритмов обработки сигналов на любом из широко распространенных персональных компьютеров и рабочих станциях. Пакеты снабжены полной документацией и обладают превосходной технической поддержкой. Во многих из них предусмотрен дружественный интерфейс, облегчающий работу с программами. Кроме того, они находятся в состоянии постоянного усовершенствования, предполагающего доступность

программного обеспечения для использования в компьютерных классах. Мы разделяем энтузиазм многих пользователей программой *Matlab*, в число которых входит все большее и большее количество студентов с разных курсов. Для разработки примеров, иллюстрирующих основные методы, освещенные в книге, мы предпочитаем пользоваться таким мощным вычислительным инструментом, как *Matlab*. Однако сложности, связанные с программным синтаксисом, затмевают тонкости концепций и путей их применения. Мы твердо считаем, что исключительно полезен «ручной опыт». Действительно, программы типа *Matlab* позволяют студентам реализовывать системы обработки стохастических сигналов на их персональных компьютерах, и мы чувствуем, что это приносит огромную пользу тем студентам, которые уже усвоили основные принципы и сумеют отделить ошибки программирования от концептуальных ошибок. По этим причинам методическое руководство преподавателя содержит раздел с указаниями для решения заданий на компьютере, представленные в недорогих изданиях: Мак-Клеллан и др. «Упражнения для решения на компьютере по обработке сигналов с использованием MatLab 5» (McClellan et al. *Computer-Based Exercises for Signal Processing Using MatLab 5*) и Бак, Дэниэл и Зингер. «Компьютерное исследование сигналов и систем с помощью Matlab» (Buck, Daniel and Singer. *Computer Explorations in Signals and Systems Using Matlab*). Обе книги доступны в издательстве *Prentice-Hall*. Методическое руководство связывает разделы названных книг с конкретными параграфами, примерами и задачами нашего учебника, что позволяет преподавателям разрабатывать задания для лабораторных работ с учетом материала и примеров, освоенных в аудитории, и связать эти задания с традиционной аналитической самостоятельной работой, закрепляющей концепции, пройденные с преподавателем.

Материал организован так, чтобы его можно было использовать как для начальных, так и для более сложных курсов, включая уровень дипломированных специалистов и не исключая самостоятельного изучения. Типичный семестровый начальный курс может состоять из § 2.1–2.10, главы 3, § 4.1–4.7, 5.1–5.4, 6.1–6.6, 7.1–7.4 и короткого обзора § 7.5–7.6. Если студенты уже изучали дискретные системы и сигналы в общих курсах, посвященных сигналам и системам, материал глав 2, 3 и 4 можно подать в сильно сокращенном виде, экономя время для освоения главы 8. Годовой курс для будущих специалистов может быть расширен за счет параграфов главы 5, не охваченных начальным курсом, обсуждения обработки кратных сигналов (§ 4.8), демонстрации некоторых эффектов квантования, введенных в § 4.9, и возможного введения в ограничения шумов при переходе от аналогового сигнала к дискретному и наоборот (§ 4.10). Годовой специализированный курс должен также включать расширенный рассказ об эффектах квантования, которым предназначены § 6.7–6.10, обсуждение оптимальных КИХ-фильтров, как сделано в § 7.5 и 7.6, и полный объем дискретного преобразования Фурье (глава 8) и его вычисление с использованием быстрого преобразования Фурье (глава 9). Освоение дискретного преобразования Фурье можно сделать намного эффективнее, если привлечь большое число примеров из главы 10. В двухсеместровом курсе для будущих специалистов можно использовать полный текст книги вместе с дополнительными разделами, подводящими к современным исследованиям.

В главе 2 вводится класс стандартных дискретных сигналов и систем и определяются такие основные свойства, как линейность, стационарность, устойчи-

вость и детерминированность. Особое внимание книги уделено линейным стационарным системам ввиду богатого набора инструментов, доступных для проектирования и анализа этого класса систем. В частности, в главе 2 мы излагаем представление линейных стационарных систем во временной области с помощью дискретной свертки и вводим класс линейных стационарных систем, описывающихся линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами. В главе 6 углубляется изучение этого класса систем. Кроме того, в главе 2 мы вводим частотное представление сигналов и систем, используя преобразование Фурье. Центральное место в главе 2 отведено представлению последовательностей в терминах преобразования Фурье, т. е. в виде линейной комбинации комплексных экспонент, и изучению основных свойств этого замечательного преобразования.

В главе 3 мы исследуем z -преобразование, обобщающее преобразование Фурье. Глава сфокусирована на основных теоремах и свойствах z -преобразования. Не обойден вниманием и прием разложения дробей в сумму элементарных, облегчающий вычисление обратного преобразования. В главе 5 результаты, полученные в главах 3 и 4, интенсивно используются при подробном обсуждении представления и анализа линейных стационарных систем. В главе 4 проводится детальный анализ связи непрерывных сигналов с дискретными, когда последние получаются в процессе периодической дискретизации непрерывных. Анализ включает в себя изучение теоремы Найквиста². Кроме того, мы обсуждаем дискретизацию с повышенной и пониженной частотами, что используется, например, в системах обработки кратных сигналов. Глава заканчивается обсуждением некоторых практических приложений, встречающихся при конвертировании непрерывных сигналов в дискретные, включая предварительную фильтрацию для удаления наложения спектров, моделирование эффектов квантования по уровню, когда дискретные сигналы представляются цифровым способом, и дискретизацию с повышенной частотой, упрощающей переход от аналоговых сигналов к дискретным и наоборот.

В главе 5 мы применяем концепции, развитые в предыдущих главах для подробного исследования свойств линейных стационарных систем. Мы определяем класс идеальных частотно-избирательных фильтров и развиваем представление систем, описывающихся линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами, как с помощью характеристических функций, так и с помощью нулей и полюсов, — класс систем, чья реализация подробно изучается в главе 6. Кроме того, в главе 5 мы определяем и обсуждаем групповую задержку, фазочастотную характеристику и фазовое искажение, а также связь между фазочастотной и амплитудно-частотной характеристиками систем, включая обсуждение минимально-фазовых, всепропускающих и систем с обобщенной линейной фазой.

В главе 6 мы фокусируем внимание на системах, описывающихся линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами, и развиваем их представление в терминах блок-схем и потоковых графов линейных сигналов. Многое в этой главе посвящено многообразию важных структур систем и сравнению некоторых их свойств. Важность такого обсуждения и множество структур фильтров имеет отношение к тому факту, что при практической реализации дискретных систем влияние неточностей коэффициентов и арифметических округлений сильно зависит от использования определенной структуры. В то время как

²Теорема Котельникова в отечественной литературе. — Примеч. перев.

эти основные проблемы аналогичны технологиям, использующимся для реализации цифровых или дискретных аналогов, мы иллюстрируем их в этой главе в контексте цифровой реализации, обсуждая эффекты коэффициентов квантования и шумов арифметических округлений для цифровых фильтров.

В то время как глава 6 полностью посвящена системам, описываемым линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами, в главе 7 исследуются процедуры вычисления коэффициентов уравнений этого класса для аппроксимации характеристик разрабатываемых систем. Техника вычисления делится на два типа: для фильтров с бесконечной импульсной характеристикой и для фильтров с конечной импульсной характеристикой.

В теории непрерывных линейных систем преобразование Фурье является основным теоретическим инструментом для представления сигналов и систем. В дискретном же случае многие системы и алгоритмы обработки сигналов включают явное вычисление преобразования Фурье. В то время как преобразование Фурье не может быть вычислено, дискретная его версия поддается вычислению и служит адекватным представлением сигналов конечной длины. В главе 8 вводится понятие дискретного преобразования Фурье (ДПФ), исследуются его свойства, а также его связь с преобразованием Фурье, дискретизованным по времени. В этой главе предлагается введение в дискретное косинус-преобразование, которое играет возрастающую по важности роль во многих приложениях, включая сжатие аудио- и видеосигналов. В главе 9 собрана богатая коллекция алгоритмов для вычисления или генерирования ДПФ, включая алгоритм Герцеля, алгоритмы быстрого преобразования Фурье и преобразования с линейной частотной модуляцией.

Вооружившись теорией, развитой в начальных главах (в частности, в главах 2, 3, 5 и 8), в главе 10 мы приступаем к Фурье-анализу сигналов с использованием ДПФ. Без полного понимания проблем, включающих в себя связь ДПФ с преобразованием Фурье, использование ДПФ при практическом анализе сигналов часто приводит к недоразумениям и ошибочным истолкованиям результатов. Мы собрали часть этих проблем в главе 10. Кроме того, в этой главе с некоторыми подробностями рассматривается Фурье-анализ нестационарных сигналов с помощью преобразования Фурье, зависящего от времени.

В главе 11 вводится дискретное преобразование Гильbertа. Это преобразование возникает в многочисленных приложениях, включая фильтрование, комплексное представление вещественных полосовых сигналов, технику однополосной модуляции и многое другое.

На страницах этого издания мы пользуемся возможностью поблагодарить и приветствовать профессора Джона Бака (John Buck). Долгое время Джон оказывал помощь при работе над книгой, преподавая этот предмет студентам МИТ и в более ранний период как член факультета Массачусетского университета в Дартмуте. При подготовке этого издания он взял на себя основную ответственность по полной переработке и реорганизации задач для самостоятельной работы и многих примеров из книги. Его способность проникновения в суть задачи ясно видна из конечного результата.

Алан В. Оппенгейм
Рональд В. Шафер

Благодарности

При подготовке обоих изданий этой книги мы были рады получить помощь, предложения и поддержку от многочисленных коллег, студентов и друзей. В течение нескольких лет одновременно с нами по материалам книги вели преподавание наши коллеги, профессора Артур Баггероэр (Arthur Staggerer), Сидней Баррас (Sidney Burrus), Меир Федер (Meir Feder), Джей Лим (Jae Lim), Брюс Музикус (Bruce Musicus), Хамид Наваб (Hamid Nawab), Грегори Уорнелл (Gregory Cornell) и Виктор Зу (Victor Zue) из МИТ; и профессора Том Барнвэлл (Tom Barnwell), Марк Клементс (Mark Clements), Монти Хайес (Monty Hayes), Джим Макклеллан (Jim McClellan), Расс Мерсерей (Russ Mersereau), Давид Шварц (David Schwartz), Марк Смит (Mark Smith), Вияджи Мадисетти (Vijay Madisetti), Дуг Уильямс (Doug Williams) и Тонг Жоу (Tong Zhou) из университета Джорджии. Именно опыт преподавания позволил сделать учебник максимально удобным для освоения.

Благоприятная атмосфера МИТ и технологического университета Джорджии стимулировала наши научные исследования, что способствовало развитию технической карьеры каждого из нас и обеспечило возможность осуществления этого проекта. Р. Шафер отдельно благодарен В. Келли Мосли (W. Kelley Mosley) за его дружелюбие и внимание, а также фонду *John and Mary Franklin Foundation* за частичную финансовую поддержку в течение ряда лет через *John and Marilu McCarty Chair*. А. Оппенгейм выражает признательность г. Рей Стате (Ray Stata), компании *Analog Devices* и фонду *Ford Foundation* за щедрую продолжительную поддержку темы обработки сигналов в МИТ и финансирование *Distinguished Professor Chair in Electrical Engineering* и *Ford Chair in Engineering*.

Нам было очень легко и приятно работать с издательством *Prentice Hall*, с которым плодотворно сотрудничаем много лет. Выражаем благодарность сотрудникам издательства: Эйлин Кларк (Eileen Clark), Марции Хортон (Marcia Horton), Тому Роббинсу (Tom Robbins), Эми Роузен (Amy Rosen) и Шарин Витрано (Sharyn Vitrano), чья помощь и поддержка сделали радостной работу по редактированию текста и обеспечили появление на свет второго издания.

Мы очень ценим великодушие наших коллег-студентов и друзей, которые посвящали свое время работе над этим проектом. Особенно хотим поблагодарить:

Ли Лии (Li Lee) и Майу Сэд (Maya Said) из МИТ и Жордана Розенталя (Jordan Rosenthal) и Грегора Слэбоу (Greg Slabaugh) из Технологического университета Джорджии за подготовку материалов с решениями задач для самостоятельного решения, а также Ху Доу (Hu Dou) из МИТ за его работу над ответами к обязательным задачам;

Вэйда Торрес (Wade Torres), Акмаля Батт (Akmal Butt) и Фарамарза Фекри (Faramarz Fekri) за их assistance в совершенствовании библиографий;

Вивиан Берман (Vivian Berman) за ее помощь в разработке содержания отдельных тем;

Дарлу Чупп (Darla Chupp), Стаси Шульц (Stacy Schultz) и Кэй Гилстрэп (Kay Gilstrap) за их помощь в подготовке переиздания и постоянную поддержку нашего преподавания;

Мэтью Секор (Matthew Secor) и Джованни Алиберти (Giovanni Aliberti) за их помощь в огромной работе с компьютером, необходимой для подготовки этого текста.

А также всех, кто внимательно просматривал рукопись, выискивая опечатки и неточности:

Сьюзан Алдреман (Susan Alderman), Джона Эрроуда (Joe Arrowood), Чэли Асавафирафам (Chalee Asavathiratham), Халука Айдиноглу (Halük Aydinoğlu), Али Бебудиана (Ali Behboodian), Алберта Чана (Albert Chan), Мэтью Кобба (Matthew Cobb), Енина Элдары (Yonina Eldar), Христофороса Хаджикостиса (Christoforos Hadjicostis), Криса Ланциани (Chris Lanciani), Николаса Лэнемана (Nicholas Laneman), Ли Лии (Li Lee), Микаэла Лопеза (Michael Lopez), Фернандо Муджика (Fernando Mujica), Бехана Некиоглу (Burhan Necioğlu), Ара Нефиана (Ara Nefian), Эрика Рида (Eric Reed), Эндрю Рассела (Andrew Russell), Майу Сэд (Maya Said) и Тревора Тринкауса (Trevor Trinkaus).

Предисловие к русскому изданию

Уважаемый читатель, вы держите в руках книгу, входящую в число продвинутых учебных пособий, которые могут рассматриваться как обязательные для специалистов, желающих получить фундаментальное инженерное образование в области цифровой обработки сигналов (ЦОС). Оно вышло «из-под пера» известных авторов, хорошо знакомых российскому читателю своими предыдущими изданиями по тематике ЦОС, переведенными на русский язык. Сами авторы и их коллеги-преподаватели апробировали это пособие в рамках отдельных курсов для студентов Массачусетского технологического института (MIT), известного в научном мире как один из самых передовых университетов инженерного профиля, и Технологического университета штата Джорджия из США. Это определяет высокий методологический уровень представления материала. Книга вышла вторым изданием и пользуется большим вниманием как среди студентов и аспирантов, так и среди преподавателей и специалистов во всем мире. Теперь ее можно прочесть на русском языке благодаря активному продвижению качественной научно-технической литературы, включающей и книги по ЦОС, издательством «Техносфера» в научную и инженерную среду.

Цифровая обработка сигналов за последние десятилетия превратилась из привлекательной в теоретическом плане области научной и инженерной деятельности в важную в реализационном аспекте сферу проектирования в связи с широким использованием ЦОС в силу присущих ей общеизвестных достоинств. Особый инженерный интерес к ЦОС был вызван в связи с появлением на рынке высокопроизводительных универсальных и специализированных процессоров, архитектура которых ориентирована на такую обработку. В настоящее время методы ЦОС и сигнальные процессоры широко применяются в разнообразных приложениях (от радиолокации и телекоммуникации до мультимедиа). Именно поэтому подготовка специалиста, желающего профессионально работать в данной области в целях создания программного обеспечения или аппаратно-программных комплексов на базе ЦОС, предполагает освоение основ теории линейных систем, функционирующих в дискретном времени, а также специфики синтеза линейных фильтров во временной и частотной области и вычислительных аспектов дискретного преобразования Фурье.

Даже в такой большой книге невозможно изложить все аспекты ЦОС. Поэтому авторы ограничились фундаментальными основами линейных систем с дискретным временем. Аспекты, связанные с квантованием, рассматриваются с точки зрения их влияния на структуру линейной системы, ориентированную на выполнение конкретной функции, но немного и сами шумы квантования моделируются случайным процессом. Именно поэтому даже в самом названии книги авторы делают ударение на обработку сигналов в дискретном времени, а не на собственно цифровую обработку. Разумеется, это ни в коей мере не является ограничением при проектировании устройств и систем, функционирующих в дискретном времени, но поправки на конечную арифметику должны, естественно, быть сделаны при их имплементации на конкретной аппаратно-программной платформе.

При переводе книги были разные предложения по ее названию на русском языке (от прямого и точного, но, может быть, громоздкого названия «Обработка сигналов в дискретном времени» до повторения названия ранее переведенного на русский язык первого издания тех же авторов «Цифровая обработка сигналов», которое пользовалось большим вниманием среди специалистов, проявляющих с тех пор большой интерес к любым публикациям А. Оппенгейма и Р. Шафера по данной тематике). Решили, что название «ЦОС» будет давать более точную ориентацию для читателей (студентов, аспирантов, преподавателей, специалистов и др.), которые проявляют профессиональный интерес к данной области деятельности. Мое личное отношение к этому решению — положительное.

Материал книги обширен, но он может осваиваться по частям или даже в усеченном виде. Авторы дают на сей счет свои полезные рекомендации, опираясь на свой большой преподавательский опыт. Несомненно, преподаватели вузов, где соответствующие дисциплины как основные или специальные явно или косвенно входят в программу обучения студентов, имеют свои предпочтения, но и в этом случае целесообразно принять во внимание указанные рекомендации. Книга содержит также большое число задач, решение которых позволяет закрепить усвоение материала. Для решения задач целесообразно использовать пакет MatLab, который становится необходимым инструментарием при подготовке инженеров соответствующего профиля и в российских естественнонаучных и инженерно-технических вузах. Часть таких задач может быть использована в качестве курсовых работ или даже (после, может быть, их некоторой модификации и/или объединения) дипломных проектов и магистерских диссертаций.

Для глубокого понимания материала книги необходима соответствующая математическая культура, которая базируется на стандартной математической подготовке после полутора-двух лет учебы в вузе соответствующего профиля.

Авторы достаточно подробно в своем предисловии представили содержание книги, а потому я не буду повторять такое описание. Можно, конечно, упрекнуть авторов за то, что некоторые важные вопросы изложены недостаточно емко или остались вне поля их внимания, но они обосновали в предисловии свой принцип отбора материала. Разумеется, он включили в него и некоторые важные позиции, которые интересны для проектировщиков современных систем на базе ЦОС (в частности, многоскоростную обработку сигналов, что важно при интерполяции и децимации дискретизированных по времени сигналов).

В заключение необходимо сказать несколько слов о вкладе российских ученых в эту область и соответствующей литературе на русском языке. Дискретное преобразование Лапласа и z -преобразование как теоретическая база и основной математический аппарат анализа и синтеза систем, функционирующих в дискретном времени и названных ранее импульсными, были разработаны академиком Я. З. Цыпкиным и его школой в ИПУ АН СССР (бывшем Институте автоматики и телемеханики) еще в 50-е г. После этого теория таких систем развивалась параллельно с теорией непрерывных систем как ее обобщение и послужила базой для теории линейных, нелинейных и аддитивных систем с ЦОС. С тех пор было проведено много исследований и выпущено много книг и монографий по данной тематике с акцентом на применения в телекоммуникации, радиотехнических системах и системах автоматики. Но реальная основа для внедрения ЦОС

на практике возникла только в 70-е г. с появлением интегральных микросхем. Это отразилось и в публикации соответствующей литературы (первой ласточкой был перевод книги Б. Голда и Ч. Рейдера «Цифровая обработка сигналов», вышедшей в 1973 г. и ориентированной на разработчиков). Начальный период развития и применения методов цифровой обработки сигналов был подытожен в справочнике по ЦОС, выпущенном издательством «Радио и Связь» в 1985 г., который не потерял своей актуальности и до наших дней. Краткий, но, разумеется, далеко неполный список литературы по ЦОС на русском языке приведен в конце книги. Акцент сделан на пособия для студентов и аспирантов, желающих специализироваться по данной тематике, и книги для разработчиков систем на базе ЦОС, большая часть которых служит настольной литературой в различных компаниях, включая и SPIRIT DSP, где я работаю, использующих в своей инженерной деятельности методы ЦОС и цифровые сигнальные процессоры или интегральные микросхемы (СБИС), в которые встроены такие процессоры.

B. A. Свириденко

Д.т.н., профессор

SPIRIT DSP

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

Обработка сигналов имеет долгую и богатую историю. Это — технология, охватывающая огромный набор приложений, включая развлечения, коммуникацию, космические исследования, медицину и археологию. Перечислено лишь несколько направлений, выбранных наугад из большого списка. Сложнейшие алгоритмы обработки сигналов и соответствующее аппаратное оборудование распространены в широком диапазоне систем: от узкоспециализированных военных и промышленных до недорогой широко распространенной бытовой электроники. Мы воспринимаем как само собой разумеющееся работу домашних приборов, например телевизоров или высококачественных музыкальных центров, не задумываясь о том, что своим существованием они в большой степени обязаны развитой теории и практике обработки сигналов. Сегодня, с появлением современного телевидения и мультимедийных средств развлечения и информации, эта фраза стала еще ближе к истине. Более того, поскольку системы связи становятся все менее зависимыми от проводов и более мобильными и многофункциональными, значение сложной обработки сигналов в таких системах продолжает расти. В общем и целом при взгляде в будущее становится ясно, что роль обработки сигналов в нашем обществе становится все более заметной частично благодаря сближению средств коммуникации, компьютеров и обработки сигналов как в потребительской сфере, так и в более грандиозных индустриальных и правительственный проектах.

Обработка сигналов всегда занимала выгодное положение ввиду близкого соседства теории, приложений и технологий, реализующих системы обработки сигналов. Возрастающее число приложений и повышенный спрос на все более и более сложные алгоритмы идут «рука об руку» с быстро развивающейся технологией реализации систем обработки сигналов. По некоторым оценкам, производительность микропроцессоров, обрабатывающих сигналы, за следующие 10 лет может увеличиться в 200 и более раз. Кажется абсолютно очевидным, что необходимость и роль обработки сигналов в современном обществе постоянно растет и ширится.

Обработка сигналов имеет дело с представлением и преобразованием сигналов и информации, которую они несут. Например, нам может потребоваться разделить два или более сигнала, которые по тем или иным причинам были объединены, или может возникнуть необходимость усилить некоторые компоненты или параметры сигнала. В коммуникационных системах сигнал перед передачей нужно подвергать предварительной обработке, например модуляции, обеспечивая выполнение определенных требований к передающемуся сигналу, или сжатию для более быстрой передачи по каналу. До 1960-х годов технология обработки сигналов сводилась почти исключительно к непрерывной, аналоговой, техно-

логии¹. Быстрое развитие цифровых компьютеров и микропроцессоров вместе с важными теоретическими достижениями типа быстрого преобразования Фурье привело к существенному изменению в цифровых технологиях — возникновению направления ЦОС. Основное отличие ЦОС от классической теории состоит в том, что сигнал в ЦОС — это числовая последовательность. Дискретная по времени природа технологии ЦОС присуща и другим технологиям, таким как методы поверхностной акустической волны (ПАВ), приборы с зарядовой связью (ПЗС), приборы с переносом заряда и технологии переключаемых конденсаторов. Сигналы в ЦОС представляются последовательностями чисел конечной точности (имеется в виду, что значения членов последовательностей лежат в дискретной области), а обработка осуществляется с помощью операций над числами. Более общий термин *обработка сигналов, дискретизованных по времени*, или *обработка дискретных сигналов* (ОДС), посвящен области, включающей ЦОС как частный случай, в которой последовательности отсчетов (данные дискретизации) обрабатываются с применением других дискретных технологий. Различие между понятиями «обработка дискретных сигналов» и «цифровая обработка сигналов» часто не принимается в расчет, поскольку оба термина относятся к областям науки, имеющим дело с дискретными сигналами. В то время как существует много примеров, когда обрабатываемые сигналы действительно являются последовательностями, большинство приложений используют дискретные технологии для обработки непрерывных сигналов. В последнем случае непрерывные сигналы преобразуются в последовательности отсчетов, т. е. дискретный сигнал. После дискретной обработки ее результат вновь конвертируется в непрерывный сигнал. Для таких систем предпочтительны операции в режиме реального времени, т. е. такие операции, при которых отсчеты реакции системы вычисляются с той же частотой, что и отсчеты дискретизации непрерывного сигнала. Дискретная обработка непрерывных сигналов в режиме реального времени — типичная ситуация в системах связи, радарах и сонарах (гидролокаторах), аудио- и видеосистемах, кодировании и усилении, биомедицине — вот некоторые из многочисленных областей применения. Проигрыватель компакт-дисков (CD-плейер) — несколько иной пример, где обработанный входящий сигнал хранится на компакт-диске, а выходной сигнал выдается в реальном времени в тот момент, когда это необходимо. Как записывающая, так и воспроизводящая система компакт-дисков основывается на многих результатах теории обработки сигналов, которая обсуждается в нашей книге.

Большинство из традиционных систем обработки сигналов оперирует поданным на вход сигналом и получает другой, выходной сигнал. Другой важный класс задач обработки сигналов касается *интерпретации сигналов*. Цель такой задачи состоит не в получении выходного сигнала, а в описании характеристик входного. Например, при записи или распознавании речи система направлена на интерпретацию входного сигнала, иными словами, на извлечение из него информации. Обычно такие системы сначала подвергают получаемый сигнал ци-

¹Обычно переменную, от которой зависит сигнал, мы называем временем, хотя в отдельных ситуациях независимую переменную можно выбирать из довольно широкого класса измеряемых величин. Поэтому к непрерывному и дискретному времени нужно относиться как к общему термину, обозначающему непрерывную и дискретную независимую переменную.

фровой обработке (фильтрация, оценка параметров и т. д.), чтобы привести его в тот вид, исходя из которого система может создать символьное представление сигнала, такое, как, например, знаки транскрипции. Символьный выходной сигнал, в свою очередь, может подаваться на вход системы обработки символов для получения окончательной интерпретации в виде текста. Еще один относительно новый аспект обработки сигналов состоит в манипулировании символьными выражениями, получившимися при обработке сигналов. Такое манипулирование особенно полезно для рабочих станций, обрабатывающих сигналы, и для автоматизированных устройств по обработке сигналов. При этом сигналы и системы представляются и обрабатываются как абстрактные объекты данных. Объектно-ориентированные языки программирования обеспечивают удобную окружающую среду для оперирования сигналами, системами и выражениями, полученными в результате обработки сигналов, без явных вычислений последовательности данных, и служат основой для такого класса обработки сигналов. Сложность систем, предназначенных для оперирования с выражениями сигналов, находится под влиянием фундаментальных концепций теории, различного рода теорем и свойств, именно таких, которые служат объектом изучения нашей книги. Например, устройство, содержащее информацию о том, что свертка сигналов во временной области соответствует их произведению в частотном представлении, может анализировать многообразные перестановки фильтрующих структур, включая те, которые напрямую используют алгоритмы дискретного и быстрого преобразования Фурье. Аналогично, прибор, «знающий» о связи между частотой дискретизации и наложением спектров, может эффективно осуществлять прореживание и выбирать стратегию интерполяции для реализации фильтра. Похожие идеи в данный момент исследуются для включения систем обработки сигналов в сетевое оборудование. В таком виде устройств данные могли бы быть сопровождаемы описаниями высокого уровня, чтобы детали реализации могли динамично основываться на ресурсах сети.

Развитие объектно-ориентированного оборудования для проектирования автоматизированных систем и обработки сигналов в динамично меняющихся сетях все еще находится на ранней стадии исследований. Поэтому подробное обсуждение этой темы выходит за рамки данного учебника. Однако важно осознать, что концепции, легшие в основу нашей книги, нельзя считать лишь теоретическими абстракциями. С большой долей вероятности они станут неотъемлемой частью автоматизированных систем обработки сигналов в рабочих станциях и сетях.

Многое из концепций и техники проектирования, обсуждаемых здесь, включено сейчас в структуру сложных программных пакетов, таких как, например, *Matlab*. Во многих случаях, когда дискретные сигналы записаны в компьютер, инструментарий пакетов программ позволяет сконструировать из базисных функций чрезвычайно сложные процедуры обработки сигналов. В этих случаях совсем необязательно знать подробности алгоритмов, реализующих вычисления, например алгоритм быстрого преобразования Фурье, но существенно понимать, что именно вычисляется и как следует интерпретировать результат. Другими словами, хорошее понимание концепций, изложенных в этом тексте, существенно для грамотного использования программ, обрабатывающих сигналы, которые сейчас широко распространены и легко доступны.

Задачи обработки сигналов не ограничиваются, естественно, одномерными сигналами. Хотя существует фундаментальное отличие в теориях одномерных и многомерных сигналов, многое из изложенного здесь имеет параллель в теории многомерных систем. Теория обработки многомерных дискретных сигналов подробно изложена в книгах² Даджена (Dudgeon) и Мезереау (Mersereau) [38], Лима (Lim) [87] и Брэйсвелля (Bracewell) [13]. Многие приложения по обработке изображений опираются на технику обработки двумерных сигналов. К ним относятся кодирование видеосигналов, увеличение и анализ аэрофотоснимков, анализ спутниковых фотографий метеослужбы, а также устройства для космических исследований. Приложения теории обработки многомерных сигналов к распознаванию изображений представлены книгами Эндрюса (Andrews) и Ханта (Hunt) [3], Маковски (Macovski) [90], Пратта (Pratt) [118], Кастлемана (Castleman) [17], Джэйна (Jain) [71], Челлаппа и др. (Chellappa) [20]. Анализ сейсмических данных, требующийся при разведке нефтяных месторождений, предсказаниях землетрясений и контроле за ядерными испытаниями, также требует теории обработки многомерных сигналов. Приложение многомерной теории к сейсмологии — тема изданий Робинсона (Robinson) и Трейтеля (Treitel) [135], Робинсона и Даррани (Durrani) [134].

Обработка многомерных сигналов — только одна из многих современных специализированных тем, не вошедших в нашу книгу. Спектральный анализ, основанный на ДПФ, и моделирование сигналов — другие чрезвычайно богатые и важные аспекты обработки сигналов. Мы знакомим читателя с большим числом понятий из этих тем, концентрируя его внимание на основных концепциях и технике, имеющей отношение к применению ДПФ. В дополнение к этой технике необходимы методы спектрального анализа, тем или иным образом применяемые в специфических моделях сигналов. Например, класс методов спектрального анализа с высоким разрешением, упоминаемый как *метод максимальной энтропии*, основан на представлении анализируемого сигнала как реакции дискретного стационарного линейного фильтра на импульсный сигнал или белый шум. Спектральный анализ делается с помощью оценки параметров (например, коэффициентов разностного уравнения) системы и приближенным вычислением квадрата амплитудно-частотной характеристики модели фильтра. Всеохватывающая подробная теория задач и методики этого подхода к моделированию сигналов и спектральному анализу непосредственно строится на фундаментальных принципах и методах, изложенных в этом учебнике. Подробное обсуждение соответствующей теории можно найти у Кея (Kay) [81], Марпла (Marple) [95] и Хайеса (Hayes) [55]. Моделирование сигналов играет непоследнюю роль при сжатии и кодировании данных, и вновь основы разностных уравнений служат базисом для понимания многоного из соответствующего раздела техники. Например, один из классов приемов кодирования сигналов, называемый *кодирование с линейным предсказанием*, эксплуатирует следующее наблюдение: если сигнал — отклик подходящего класса дискретных фильтров, то его значения в произвольный момент времени — линейная функция от предыдущих значений. Следовательно, эффективные представления сигналов могут быть получены изучением

²Литература, на которую будут появляться ссылки в этом тексте, расположена в конце книги.

параметров и ошибок предсказания. После этого сигнал можно при необходимости восстановить, исходя из моделей этих параметров. Упомянутый класс методов работы с сигналами, особенно эффективный при кодировании речевых сигналов, подробно описан Джейентом (Jayant) и Ноллом (Noll) [72], Маркелом (Markel) и Грэем (Gray) [94], Рабинером (Rabiner) и Шафером (Schafer) [123], Деллером (Deller) и др. [36].

Другое сложное направление огромной важности — адаптивная обработка сигналов. Адаптивные системы представляют собой специфический класс меняющихся во времени и, в некотором смысле, нелинейных систем с обширными приложениями и хорошо развитыми эффективными методами проектирования и анализа. И здесь многие подходы строятся на фундаментальных принципах обработки дискретных сигналов. Детальное изложение адаптивной обработки можно найти в учебниках Хайкина (Haykin) [57], Видроу (Widrow) и Стиарнса (Stearns) [161].

Мы упомянули лишь о нескольких из многих развитых направлений техники, активно использующих математический аппарат, которому посвящен наш учебник. Остальные включают в себя специализированные процедуры проектирования фильтров, множество узконаправленных алгоритмов, вычисляющих преобразование Фурье, специфические структуры фильтров и разнообразную технику обработки кратных сигналов, в том числе блоки фильтров и преобразование вейвлетов.

Фундаментальный учебник, по общему мнению, должен скорее ярко освещать предмет, чем затенять его излишними сложностями. При выборе обсуждаемых тем и степени глубины их проработки мы руководствовались именно этим принципом. Краткий обзор современных направлений научной мысли и библиографии, которым мы предваряем основной материал, призван показать заманчивые перспективы приложения знаний, которые, как мы надеемся, читатель приобретет, освоив наш учебник.

Исторический обзор

Обработка дискретных сигналов развивается уже долгое время, но несколько неравномерно, можно даже сказать скачкообразно. Ретроспективный взгляд на историю становления этой отрасли знаний помогает выделить те фундаментальные принципы, которые будут занимать центральное место в ОДС еще многие годы. Начиная с изобретения математического анализа в XVII веке, ученые и инженеры разрабатывают модели физических явлений в терминах функций непрерывных переменных и дифференциальных уравнений. Если аналитических методов решения соответствующих задач не хватает, к делу подключаются численные методы. Уже Ньютона, один из авторов «исчисления флюкций», активно эксплуатировал метод конечных разностей, которые, как мы убедимся, являются частным случаем описания дискретных систем. Математики XVIII века, например Эйлер, Бернулли и Лагранж, работали над численным интегрированием и интерполяцией функций непрерывной переменной. Интересное историческое исследование Хайдмана (Heideman), Джонсона (Johnson) и Барраса (Burrus) [58] показывает, что Гаусс открыл основные принципы быстрого преобразования

Фурье (обсуждаемого в главе 9) уже в 1805 году, опередив публикацию трактата самого Фурье о представлении функций гармоническим рядом.

Как мы уже говорили, вплоть до начала 1950-х годов обработка сигналов обычно ограничивалась аналоговыми системами, реализуемыми электронными схемами или даже механическими устройствами. Несмотря на то что в то время первые вычислительные машины уже работали в бизнесе и крупных научных лабораториях, они были еще слишком дороги и обладали крайне малыми вычислительными ресурсами. В то же время постоянно возрастающая потребность в более сложной обработке сигналов в некоторых прикладных областях увеличивала интерес к обработке дискретных сигналов. Одна из первых попыток привлечения компьютеров к цифровой обработке сигналов была предпринята при разведке нефтяных месторождений, где сейсмические данные можно было зафиксировать на магнитной ленте для последующего исследования. Естественно, такая обработка не могла проводиться в режиме реального времени. Минуты и даже часы тратились на обсчет сигналов секундной длительности с помощью первых ЭВМ. Однако возможности компьютера и потенциальная выгода такого метода обработки были весьма привлекательны.

Тогда же работа по привлечению вычислительных машин к обработке сигналов пошла по разным направлениям. Благодаря усиливающейся мощности компьютеров оказалось возможным моделировать на них системы обработки сигналов перед воплощением в железе. Таким образом, новые алгоритмы, обрабатывающие сигналы, равно как и системы, стали изучать в удобной экспериментальной среде перед привлечением (часто очень дорогостоящих) экономических и технических средств для их реализации. Типичным примером такого приема служит моделирование вокодера¹, выполненное в лабораториях Линкольна и компании *Bell Laboratory*. При проектировании аналогового тракта вокодера необходимо было рассчитать характеристики фильтра, которые воздействуют на качество закодированного речевого сигнала настолько тонко, что без моделирования и соответствующих вычислений крайне трудно было оценить их эффект достаточно объективно. С помощью же компьютерного моделирования эти характеристики и качество системы кодирования речи можно было точно отрегулировать перед проектированием аналоговой части.

Очевидно, что в изложенных примерах компьютер значительно расширяет возможности по обработке сигналов. Однако процесс обсчета все еще не мог идти в режиме реального времени. Поэтому было принято считать, что ЭВМ можно использовать лишь для *приблизительной* обработки или *моделирования* аналоговых систем. В соответствии с этим принципом ранние работы по цифровым фильтрам были в основном направлены на поиск путей программирования фильтров на компьютере так, чтобы при конвертировании аналогового сигнала в цифровой, обработке его цифровым фильтром и обратного преобразования цифрового сигнала в аналоговый получалась хорошая аппроксимация аналогового фильтра. Мысль о практическом применении *цифровых систем* к актуальным задачам обработки в режиме реального времени — в речевой связи, в радарах или иных многообразных приложениях — даже в наиболее оптимистические вре-

¹Речевое выходное устройство ЭВМ. — Примеч. перев.

мена казалась достаточно спекулятивной. Скорость, стоимость и размер — вот три из основных факторов, влиявших на выбор аналоговых, а не дискретных компонент.

Поскольку сигналы обрабатывались на цифровых компьютерах, скорость работы и память которых постоянно увеличивались, исследователи, естественно, экспериментировали со все более и более сложными сигналами и алгоритмами. Некоторые из этих алгоритмов появлялись благодаря возможностям вычислительных машин и не имели реального воплощения в аналоговом оборудовании. Иными словами, многие из этих алгоритмов считались интересными, но далекими от практического применения, разработками. Однако развитие поначалу чисто теоретических алгоритмов обработки сигналов привело к идеи создания полностью цифровых систем обработки сигналов. Активная работа, начатая с исследования цифрового вокодера, цифровых анализаторов спектра и других полностью цифровых систем, подкреплялась надеждой, что в конечном счете такие системы станут востребованными.

Развитие новой точки зрения на перспективы обработки дискретных сигналов было ускорено изобретением Кули (Cooley) и Таки (Tukey) ([30]) эффективного алгоритма вычисления преобразования Фурье. Сейчас подобные алгоритмы известны как быстрое преобразование Фурье (БПФ). Открытие БПФ оказалось революционным по нескольким причинам. Многие алгоритмы обработки сигналов, разработанные для компьютеров, работали в несколько раз медленнее реального времени. Происходило это из-за необходимости анализа спектра, эффективных методов которого не существовало. Алгоритм БПФ сильно ускорил вычисление преобразования Фурье, допуская обработку все более сложных сигналов и применение громоздких алгоритмов за короткое время, что позволило использовать системы в диалоговом режиме. Кроме того, алгоритмы, включающие в себя БПФ, стало фактически возможным реализовать в узкоспециализированных аппаратных средствах. Поэтому абстрактные до этого момента алгоритмы стали приобретать и практическое значение.

Другим важным моментом изобретения БПФ стала его дискретная природа. БПФ было направлено на вычисление преобразования Фурье дискретных сигналов или последовательностей и включало в себя множество свойств и математический аппарат из дискретной области обработки сигналов. Короче говоря, ДПФ — не простое приближение к непрерывному преобразованию Фурье. Оно оказалось стимулирующий эффект к переформулировке многих концепций и алгоритмов обработки сигналов в терминах дискретной математики, что привело к появлению множества точных соотношений в дискретной области. Отход от отношения к обработке сигналов на компьютерах как к приближительной модели аналоговой обработки привел к тому, что обработка дискретных сигналов стала считаться важной самостоятельной областью знаний.

Второе главное достижение в истории обработки дискретных сигналов произошло в области микрэлектроники. Изобретение и быстрое распространение микропроцессоров дало возможность создания дешевых систем, обрабатывающих сигналы. Хотя первые микропроцессоры были слишком медлительны для реализации большинства систем, которые работали бы в реальном времени, к середине 1980-х годов технологии интегральных схем подошли к уровню, поз-

воловившему конструировать очень быстрые микрокомпьютеры, производящие вычисления как с фиксированной, так и с плавающей запятой, архитектура которых была разработана специально для реализации алгоритмов обработки дискретных сигналов. Именно эти технологии открыли возможность широкого применения техники обработки дискретных сигналов.

Прогнозы на будущее

Инженеры продолжают исследования, направленные на увеличение плотности микросхем и объемов их производства, и, как результат, сложность микроэлектронных схем постоянно возрастает. Действительно, сложность и возможности DSP (сокр. от *digital signal processor* — цифровой процессор обработки сигналов) экспоненциально растут, начиная с 1980-х годов, и пока нет никаких признаков замедления темпов развития. Пока техника интегральных схем ускоренно развивается, можно создавать очень сложные, но дешевые системы обработки дискретных сигналов миниатюрных размеров и низкой потребляемой мощности. Следовательно, значение обработки дискретных сигналов будет постоянно повышаться, и будущее развитие этой области, вероятно, будет даже более впечатляющим, чем то течение событий, которое мы только что описали. Техника обработки дискретных сигналов уже содействует революционному прорыву в некоторых областях приложений.

Примечательный пример лежит в области телекоммуникации, где техника обработки дискретных сигналов, технологии микроэлектроники и волоконно-оптическая передача данных комбинируются для поистине революционного изменения природы коммуникационных систем. Подобные процессы можно ожидать и во многих других областях техники.

В то время как обработка дискретных сигналов динамично развивается, ее фундаментальные принципы остаются неизменными. Наша цель в этой книге состоит в обеспечении логически связанной трактовки теории дискретных линейных систем, фильтрования, дискретизации и дискретного анализа Фурье. Представленные темы должны наделить читателя знанием, необходимым для понимания широких возможностей приложения обработки дискретных сигналов и основ для вклада в будущее развитие этой волнующей области техники.

ГЛАВА 2

ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ

2.1. Введение

Сигналом обычно называют то, что несет в себе какие-то данные. По большей части сигналы передают информацию о состоянии или поведении физической системы и часто синтезируются в целях обмена информацией между людьми, а также между людьми и механизмами. Хотя сигналы могут быть представлены многими способами, во всех случаях информацию несут некие изменения. На математическом языке сигналы — это функции одной или более независимых переменных. Например, речевой сигнал представляется как функция времени, а фотографический образ — функция яркости от двух пространственных переменных. По общему соглашению (чего мы, как правило, будем придерживаться в этой книге) независимой переменной в математическом представлении сигнала выступает время, хотя в отдельных примерах независимая переменная в сигнале фактически временем не является.

Независимая переменная в математической реализации сигнала может быть как непрерывной, так и дискретной. Сигналы с непрерывным временем определяются на непрерывных промежутках, зависят от непрерывной переменной и обычно называются *аналоговыми*. *Сигналы с дискретным временем*, или просто *дискретные сигналы*, определены в дискретные моменты времени и, как следствие, имеют независимую переменную с дискретными значениями. Тем самым они отождествляются с числовыми последовательностями. Такие сигналы, как речь или изображение, могут иметь как непрерывное, так и дискретное представление, и при выполнении определенных условий, эти представления полностью эквивалентны. Кроме независимой переменной, дискретным или непрерывным может быть уровень (величина) сигнала. К *цифровым сигналам* относят те, у которых дискретны как переменная, так и уровень.

Аналогично и системы обработки сигналов могут быть разбиты на два класса. *Системой, непрерывной по времени*, или просто *непрерывной системой*, принято называть такую систему, у которой как входной сигнал, так и реакция на него — непрерывные сигналы, а *дискретной по времени (дискретной)* называют систему, у которой входной и выходной сигналы дискретны. *Цифровой* системой называют систему, перерабатывающую цифровой сигнал в цифровой же. Таким образом, цифровая обработка сигналов имеет дело с преобразованием сигналов, дискретных как по времени, так и по уровню. Основное внимание в этой книге уделено дискретным (а не цифровым) сигналам и системам. Однако теория

дискретных сигналов и систем чрезвычайно полезна для исследования цифровых сигналов и систем, особенно когда сигналы хорошо квантуются по уровню. Эффект квантования (дискретизации) сигналов по уровню разбирается в § 4.9, 6.8–6.10 и 9.8.

Дискретные сигналы возникают при дискретизации аналоговых сигналов или генерируются непосредственно какими-либо процессами, дискретными по времени. Каково бы ни было происхождение дискретных сигналов, дискретные системы обработки сигналов имеют много привлекательных черт. Их можно реализовать, с большой свободой применяя различные технологии, такие как, например, устройства переноса нагрузки, устройства на ПАВ, цифровые компьютеры общего назначения или быстродействующие микропроцессоры. Полностью укомплектованные системы обработки сигналов могут быть реализованы с помощью СБИС-технологий. Дискретные системы могут использоваться для моделирования аналоговых систем или, что более важно, реализовывать сигналы, преобразование которых не может быть осуществлено аппаратными средствами с непрерывным временем. Таким образом, дискретное представление сигналов предпочтительнее в тех случаях, когда требуется сложная и многообразная обработка сигналов.

В этой главе рассматриваются основные понятия, связанные с дискретными системами обработки сигналов и дискретными сигналами, зависящими от одной переменной. Центральное место отведено линейным стационарным системам. Многие свойства и результаты, которые будут описаны в этой и следующих главах, аналогичны свойствам и результатам, относящимся к линейным стационарным системам с непрерывным временем, представленным в многообразных текстах (например, [109]). Фактически, возможно обсуждение дискретных систем, при котором последовательности рассматриваются как аналоговые сигналы, представляющие собой цепь импульсов. Такой подход, будучи аккуратно осуществленным, позволяет получить массу правильных результатов и уже дал многое для классического исследования систем дискретных данных (см., например, [117]). Однако далеко не все последовательности возникают как дискретизация непрерывных сигналов и многие дискретные системы не являются простой аппроксимацией соответствующих аналоговых систем. Более того, существует важное фундаментальное отличие дискретных систем от непрерывных. Следовательно, вместо попыток перенести результаты из теории непрерывных систем на дискретные, мы выведем параллельные результаты, начав с совокупности взглядов и понятий, подходящих к дискретным системам. Параллель между дискретными и аналоговыми сигналами будет проводиться только в том случае, когда это необходимо и полезно.

2.2. Дискретные сигналы: последовательности

Математически дискретные сигналы представляются последовательностями чисел. Числовая последовательность x , n -й член в которой обозначают через¹ $x[n]$,

¹Последовательность — это просто функция, определенная на множестве целых чисел. Заметим, что мы используем квадратные скобки для обозначения ее аргумента, а аргумент непрерывной функции заключается в круглые скобки.

формально записывается как

$$x = \{x[n]\}, \quad -\infty < n < \infty, \quad (2.1)$$

где n — целое число. На практике такие последовательности возникают, например, при преобразовании аналогового сигнала в дискретную форму. В этом случае численное значение n -го члена последовательности равно величине аналогового сигнала $x_a(t)$ в момент времени nT , т. е.

$$x[n] = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty. \quad (2.2)$$

Число T называют *шагом дискретизации*, а обратное к нему — *частотой дискретизации*. Хотя последовательность может возникать не только при преобразовании сигналов, ее член $x[n]$ удобно называть n -м отсчетом. Кроме того, обозначение последовательности (2.1) довольно громоздко, и мы будем говорить о «последовательности $x[n]$ », подобно выражению «аналоговый сигнал $x_a(t)$ », хотя запись $x[n]$, строго говоря, относится кциальному члену последовательности. Дискретные сигналы (т. е. последовательности) обычно изображают, как показано на рис. 2.1. Абсцисса графика показана в виде непрерывной прямой, но важно отдавать себе отчет, что величина $x[n]$ определена только при целых значениях аргумента n . Неверно думать, что $x[n]$ равно нулю, если n не является целым числом, просто при таких аргументах $x[n]$ не определено.

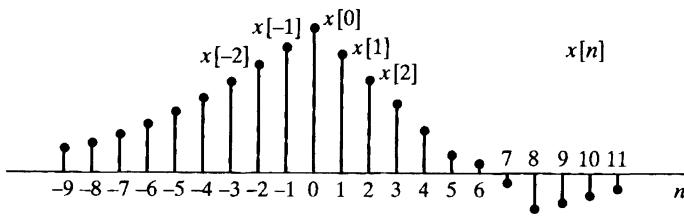


Рис. 2.1. Графическое представление дискретного сигнала

В качестве примера на рис. 2.2, а) показан фрагмент речевого сигнала, соответствующего вариациям акустического давления, в виде функции от времени, а на рис. 2.2, б) приведена последовательность отсчетов этого сигнала. В то время как исходный речевой сигнал определен в любой момент времени t , последовательность несет информацию об этом сигнале только в определенные моменты времени. Из теоремы о дискретном представлении (Котельникова–Найквиста), обсуждаемой в главе 4, следует, что исходный сигнал можно восстановить из последовательности отсчетов с любой желаемой степенью точности, если отсчеты были произведены с достаточной частотой.

2.2.1. Стандартные последовательности и операции над ними

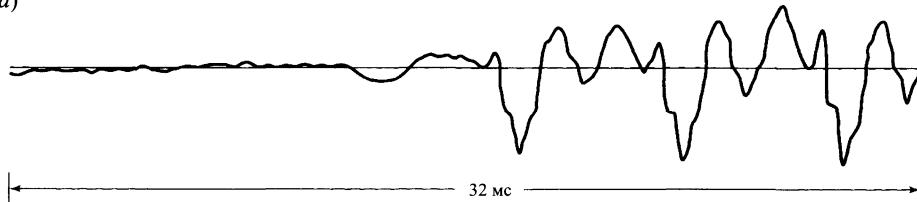
При анализе дискретных сигналов и в системах обработки сигналов над последовательностями совершается ряд основных преобразований. Произведение и сумма двух последовательностей $x[n]$ и $y[n]$ определяются почленно, т. е. $z[n] = x[n] \cdot y[n]$ — произведение, а $w[n] = x[n] + y[n]$ — сумма этих последовательностей. Произведением последовательности $x[n]$ на число α считается последо-

вательность, получающаяся из $x[n]$ в результате умножения каждого его члена на α . Последовательность $y[n]$ называют задержанной, или сдвинутой версией последовательности $x[n]$, если

$$y[n] = x[n - n_0], \quad (2.3)$$

где n_0 — целое число.

a)



б)



Рис. 2.2. *а)* фрагмент непрерывного речевого сигнала; *б)* последовательность отсчетов, полученная из фрагмента *а*), при шаге $T = 125$ мкс

Некоторые из последовательностей особо важны при обсуждении теории дискретных сигналов и систем. Они представлены на рис. 2.3 и описываются ниже.

Единичный импульс (рис. 2.3, *а*)) определяется как

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Как мы убедимся, единичный импульс играет ту же роль в теории дискретных сигналов, что и дельта-функция Дирака в теории непрерывных сигналов. Последовательность с единственным ненулевым отсчетом удобно называть *дискретным импульсом*, или просто *импульсом*. Стоит отметить, что дискретный импульс — понятие существенно более простое и понятное, чем дельта-функция.

К одному из важных свойств единичного импульса относится тот факт, что любая последовательность может быть выражена в виде линейной комбинации сдвинутых импульсов. Например, последовательность $p[n]$ из рис. 2.4 представляется в виде:

$$p[n] = a_{-3}\delta[n + 3] + a_1\delta[n - 1] + a_2\delta[n - 2] + a_7\delta[n - 7], \quad (2.5)$$

а для произвольной последовательности справедливо соотношение:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]. \quad (2.6)$$

Формула (2.6) будет использована для представления дискретных линейных систем.

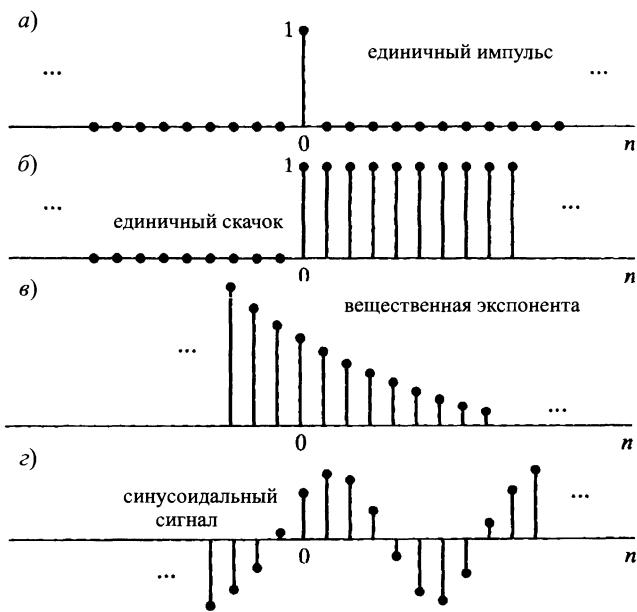


Рис. 2.3. Некоторые стандартные последовательности

Единичный скачок (рис. 2.3, б)) определяется формулой:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Единичный скачок выражается через импульс как:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k], \quad (2.8)$$

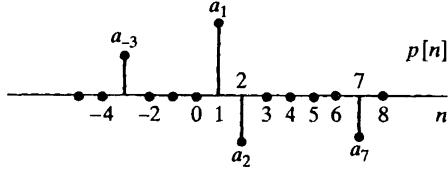


Рис. 2.4. Пример последовательности, представляющейся в виде конечной линейной комбинации сдвинутых импульсов

уравнении (2.6). Все ненулевые члены единичного скачка равны 1, поэтому

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - k]. \quad (2.9)$$

С другой стороны, импульсная последовательность может быть выражена через единичный скачок как разность:

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1]. \quad (2.10)$$

Экспоненциальная последовательность наиболее важна при представлении и анализе линейных стационарных дискретных систем. В общем виде такие по-

следовательности записываются как

$$x[n] = A\alpha^n. \quad (2.11)$$

Если A и α — вещественные числа, то соответствующая последовательность тоже называется вещественной. Если $0 < \alpha < 1$ и A положительно, то значения последовательности положительны и убывают при росте n , как на рис. 2.3, в). Когда $-1 < \alpha < 0$, знаки членов последовательности чередуются, но их абсолютные значения все равно убывают. Наконец, при $|\alpha| > 1$ последовательность возрастает по абсолютной величине с ростом n .

Пример 2.1. Комбинирование стандартных последовательностей

Довольно часто стандартные последовательности комбинируются для получения новых. Экспоненциальную последовательность, члены которой равны нулю при $n < 0$, можно определить как

$$x[n] = \begin{cases} A\alpha^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

что имеет довольно неуклюжий вид. Более просто такая последовательность задается как выражение $x[n] = A\alpha^n u[n]$. □

Синусоидальная последовательность тоже играет не последнюю роль. В общей форме она имеет вид

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (2.13)$$

где A и φ — вещественные константы (рис. 2.3, г)).

Экспоненциальная последовательность $A\alpha^n$ с комплексным α имеет вещественную и мнимую части, являющиеся взвешенными синусоидами. Более точно, если² $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$ и $A = |A|e^{j\varphi}$, то последовательность $A\alpha^n$ может быть записана одним из следующих способов:

$$\begin{aligned} x[n] = A\alpha^n &= |A|e^{j\varphi}|\alpha|^n e^{j\omega_0 n} = |A||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \varphi)} = \\ &= |A||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \varphi) + j|A||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \varphi). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Эта последовательность осциллирует с экспоненциально растущей огибающей, если $|\alpha| > 1$, или с экспоненциально уменьшающейся огибающей при $|\alpha| < 1$. (В качестве простейшего примера разберите случай $\omega_0 = \pi$.)

Когда $|\alpha| = 1$, последовательность называется *комплексной экспоненциальной последовательностью*:

$$x[n] = |A|e^{j(\omega_0 n + \varphi)} = |A| \cos(\omega_0 n + \varphi) + j|A| \sin(\omega_0 n + \varphi), \quad (2.15)$$

т. е. как вещественная, так и мнимая часть последовательности меняется синусоидально в зависимости от n . По аналогии со случаем непрерывного времени величину ω_0 называют (круговой) *частотой* комплексной синусоиды или комплексной экспоненты, а φ — ее *фазой*. Заметим, однако, что n — безразмерное целое число. Поэтому ω_0 должна измеряться в радианах. Если мы хотим прослеживать тесную аналогию со случаем непрерывного времени, нам необходимо уточнить единицу частоты как радианы на отсчет, а n измерять в отсчетах.

² Символом j , как обычно в радиотехнике, обозначается мнимая единица, т. е. $\sqrt{-1}$. — Примеч. перев.

Тот факт, что переменная n в формуле (2.15) всегда принимает только целые значения, подводит нас к некоторым важным различиям в свойствах дискретных и непрерывных комплексных экспоненциальных и синусоидальных последовательностей. Разница между непрерывной и дискретной комплексной экспонентой особенно заметна при частоте $(\omega_0 + 2\pi)$. В этом случае³

$$x[n] = Ae^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = Ae^{j\omega_0 n}e^{j2\pi n} = Ae^{j\omega_0 n}. \quad (2.16)$$

Более общий факт: можно легко убедиться, что комплексные экспоненциальные последовательности с частотами $(\omega_0 + 2\pi r)$ при $r \in \mathbb{Z}$ неотличимы одна от другой. Аналогичное утверждение справедливо для синусоидальных последовательностей:

$$x[n] = A \cos((\omega_0 + 2\pi r)n + \varphi) = A \cos(\omega_0 n + \varphi). \quad (2.17)$$

Следствия этого свойства для последовательностей, полученных дискретизацией синусоидальных и других сигналов, будут обсуждаться в главе 4. На данный момент мы просто отметим, что при рассмотрении комплексных экспоненциальных сигналов вида $x[n] = Ae^{j\omega_0 n}$ или вещественных синусоидальных сигналов типа $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$ мы должны ограничиться частотами, лежащими в интервале длины 2π , например $-\pi < \omega_0 \leq \pi$ или $0 \leq \omega_0 < 2\pi$.

Следующее важное отличие дискретных комплексных экспонент и синусоид от непрерывных касается их периодичности. В непрерывном случае как синусоидальный, так и комплексный экспоненциальный сигнал является периодичной функцией, период которой равен 2π , деленному на частоту. В дискретном случае последовательность считают периодичной, если

$$x[n] = x[n + N], \quad \forall n, \quad (2.18)$$

где период N — обязательно целое число. Проверяя это условие для дискретных синусоид, получим

$$A \cos(\omega_0 n + \varphi) = A \cos(\omega_0 n + \omega_0 N + \varphi), \quad (2.19)$$

откуда

$$\omega_0 N = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.20)$$

Аналогичное утверждение имеет место и для комплексной экспоненциальной последовательности $Ce^{j\omega_0 n}$. Она будет N -периодичной, только если

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}. \quad (2.21)$$

Это равенство верно тогда и только тогда, когда $\omega_0 N = 2\pi k$, как в соотношении (2.20). Следовательно, комплексная экспоненциальная и синусоидальная последовательности не обязательно меняются периодично в зависимости от n с периодом $\frac{2\pi}{\omega_0}$. Свойство их периодичности зависит от значения частоты ω_0 .

Пример 2.2. Периодичные и непериодичные дискретные синусоиды

Рассмотрим сигнал $x_1[n] = \cos(\pi n/4)$. Его период равен $N = 8$. Для доказательства заметим, что равенства $x[n+8] = \cos(\pi(n+8)/4) = \cos(\pi n/4 + 2\pi) = \cos(\pi n/4) = x[n]$

³Если же n принимает не только целые значения, то равенство (2.16) нарушается, например при $n = 1/4$. — Примеч. перев.

справедливы для всех целых n , что и требуется в определении периодичности дискретных сигналов.

Вопреки нашему интуитивному представлению, связанному с непрерывными синусоидальными сигналами, увеличение частоты дискретной синусоиды не обязательно влечет уменьшение ее периода. Рассмотрим последовательность $x_2[n] = \cos(3\pi n/8)$, имеющую большую частоту, чем $x_1[n]$, и заметим, что период $x_2[n]$ отличен от 8. Действительно, $x_2[n+8] = \cos(3\pi(n+8)/8) = \cos(3\pi n/8 + 3\pi) = -x_2[n]$. Так же как и в случае последовательности $x_1[n]$, можно показать, что период сигнала $x_2[n]$ равен 16. Итак, увеличение частоты от $\omega_0 = 2\pi/8$ до $\omega_0 = 3\pi/8$ ведет к *увеличению* периода сигнала. Это происходит из-за того, что дискретный сигнал определен лишь при целых значениях n .

Требование целостности переменной n приводит к тому, что некоторые синусоидальные сигналы вообще не имеют периода. Например, какое бы целое число $N \neq 0$ мы ни взяли, равенство $\cos(n+N) = \cos(n)$ будет нарушаться при каких-то целых значениях переменной n . Эти и другие свойства дискретных синусоид, противоречащие их непрерывным двойникам, возникают вследствие ограничения «времени» n на множество целых чисел. □

Комбинируя условие (2.20) с предыдущим наблюдением о неразличимости частот ω_0 и $(\omega_0 + 2\pi r)$, получим, что существует ровно N различных значений частоты, при которых соответствующая последовательность имеет период N , а именно $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Это свойство комплексных экспоненциальных и синусоидальных последовательностей носит основополагающий характер как для теории, так и для разработки численных алгоритмов в дискретном анализе Фурье. Оно будет подробно обсуждаться в главах 8 и 9.

Возвращаясь к различиям между непрерывными и дискретными синусоидами, необходимо отметить, что верхние и нижние частоты также по-разному проявляются в непрерывном и дискретном случаях. При росте частоты Ω_0 непрерывный сигнал $x(t) = A \cos(\Omega_0 t + \varphi)$ осциллирует все более и более быстро. Дискретный синусоидальный сигнал $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$ тоже увеличивает скорость осциллирования при возрастании ω_0 от 0 до π . Однако при изменении частоты ω_0 от π до 2π его колебания замедляются, что отражено на рис. 2.5.

Фактически, ввиду периодичности синусоидального и комплексного экспоненциального сигналов относительно ω_0 частоты $\omega_0 = 0$ и $\omega_0 = 2\pi$ не отличаются друг от друга. Таким образом, частоты, близкие к 0, ничем не отличаются от частот, близких к 2π . Как следствие, для синусоидальных и комплексных экспоненциальных сигналов значения ω_0 в окрестности $2\pi k$ при любом целом k принято называть *нижними* (соответственно, медленно осциллирующими), в то время как ее значения в окрестности $(\pi + 2\pi k)$ называют *верхними* (соответственно быстро осциллирующими).

2.3. Дискретные системы

С точки зрения математики *система с дискретным временем* определяется как преобразование, или оператор, переводящий входную последовательность (*сигнал*) $x[n]$ в выходную последовательность $y[n]$ (*отклик*, или *реакцию системы*), что можно обозначить как

$$y[n] = T\{x[n]\} \quad (2.22)$$

и изображать графически, как показано на рис. 2.6. Соотношение (2.22) — это правило, или формула, по которому вычисляются значения реакции системы через отсчеты сигнала, поданного на ее вход. Необходимо подчеркнуть, что отсчет реакции системы с индексом n может зависеть от всех отсчетов входного сигнала $x[n]$. Следующие примеры знакомят с некоторыми простыми, но полезными системами.

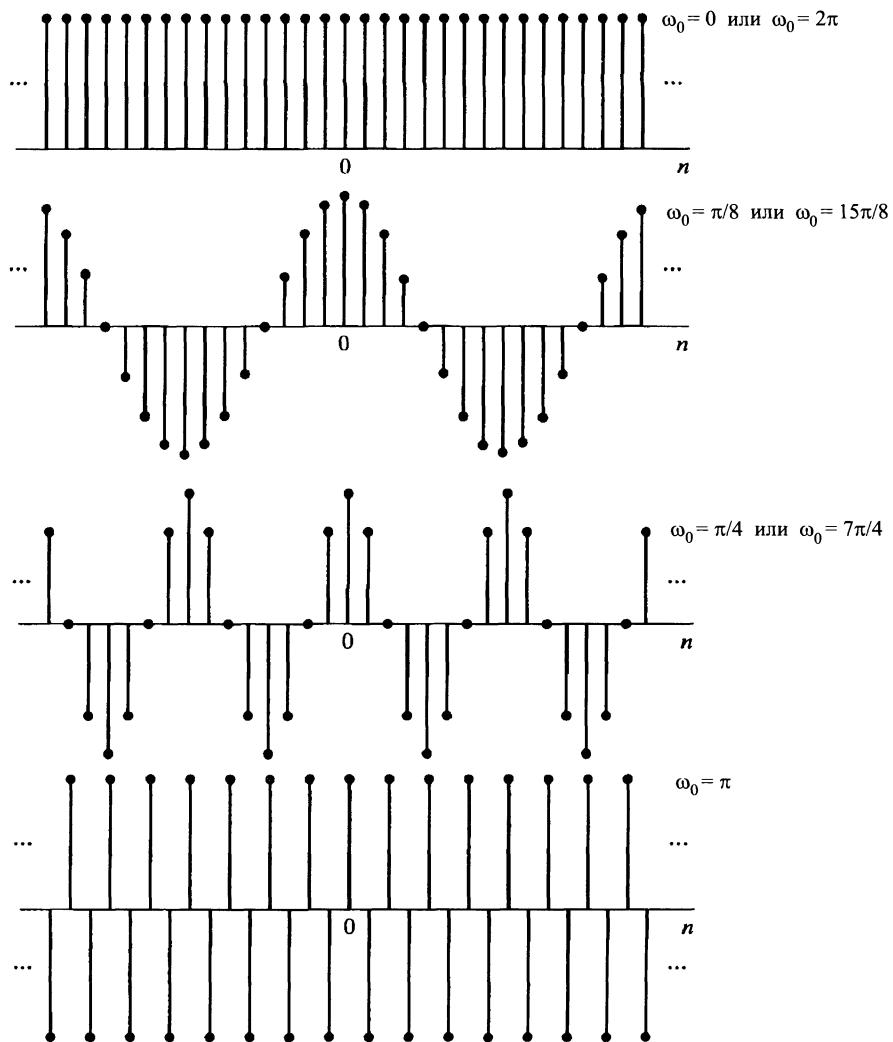


Рис. 2.5. Последовательности $\cos \omega_0 n$ для некоторых значений ω_0

Пример 2.3. Идеальная система задержки

Идеальная система задержки (ИСЗ) определяется по формуле

$$y[n] = x[n - n_d], \quad -\infty < n < \infty, \quad (2.23)$$

где n_d — фиксированное натуральное число, называемое задержкой системы. Иными словами, ИСЗ сдвигает входную последовательность вправо на n_d отсчетов. Если в формуле (2.23) взять в качестве n_d фиксированное отрицательное целое число, то система будет сдвигать входную последовательность влево на $|n_d|$ отсчетов, что соответствует опережению времени. \square

В примере 2.3 для вычисления отсчета отклика системы используется единственный отсчет входной последовательности. В следующем примере это не так.

Пример 2.4. Скользящее среднее

Общая система скользящего среднего имеет вид:

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n - k] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \times \\ \times (x[n + M_1] + x[n + M_1 - 1] + \dots + x[n] + \dots + x[n - M_2]). \quad (2.24)$$

Она вычисляет n -й отсчет входной последовательности как среднее арифметическое ($M_1 + M_2 + 1$) отсчетов входной, расположенных вокруг n -го. На рис. 2.7 изображена входная последовательность как функция от переменной k и ее отсчеты, участвующие в вычислении выходного отсчета $y[n]$ при $n = 7$, $M_1 = 0$ и $M_2 = 5$. Получающийся отсчет $y[7]$ равен $1/6$ суммы всех отсчетов, лежащих между вертикальными пунктирными линиями. Для вычисления $y[8]$ обе пунктирные линии надо сдвинуть вправо на одну позицию. \square

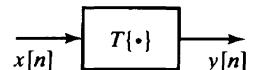


Рис. 2.6. Графическое представление дискретной системы

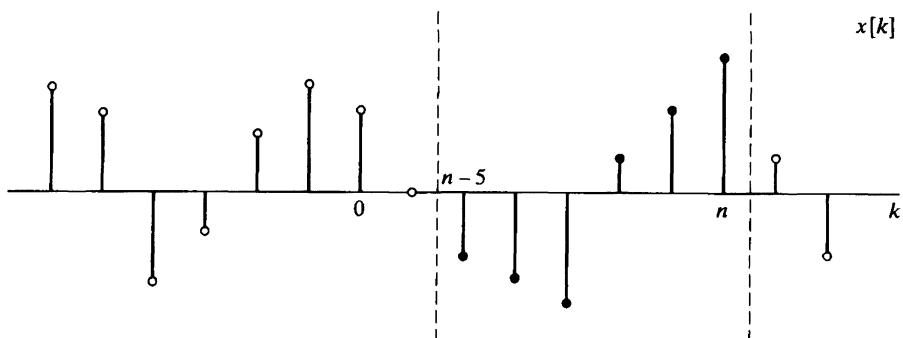


Рис. 2.7. Члены последовательности, участвующие в вычислении скользящего среднего

Классы систем определяются наложением определенных ограничений на свойства преобразования T . Этот процесс, как мы сможем убедиться далее, часто ведет к самым общим математическим представлениям. Особое значение имеют системы, ограничения и свойства, обсуждаемые в подразделах 2.3.1–2.3.5.

2.3.1. Системы без запоминания

Систему, n -й отсчет $y[n]$ реакции которой при каждом n зависит только от одного отсчета (с тем же самым индексом n) входного сигнала $x[n]$, называют *системой без запоминания*.

Пример 2.5. Система без запоминания

Примером может служить система, в которой

$$y[n] = (x[n])^2 \quad \forall n. \quad (2.25)$$

Система примера 2.3 относится к системам без запоминания, только если $n_d = 0$. В частности, говорят, что система примера 2.3 имеет «память», если n_d положительно (задержка времени) или отрицательно (опережение времени). Система примера 2.4 не имеет памяти, только когда $M_1 = M_2 = 0$. \square

2.3.2. Линейные системы

Класс линейных систем определяется по принципу суперпозиции. Если $y_1[n]$ и $y_2[n]$ — отклики системы на сигналы $x_1[n]$ и $x_2[n]$, то систему называют линейной тогда и только тогда, когда

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} \quad \text{и} \quad T\{ax[n]\} = aT\{x[n]\}, \quad (2.26)$$

где a — произвольная константа. Первое из свойств называют *аддитивностью*, а второе — *однородностью*. Оба свойства можно записать одной формулой по принципу суперпозиции:

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\}, \quad (2.27)$$

где a и b — произвольные константы. Последнее соотношение легко может быть переписано для нескольких сигналов, а именно

$$\text{если } x[n] = \sum_k a_k x_k[n], \quad \text{то} \quad y[n] = \sum_k a_k y_k[n],$$

где $y_k[n]$ — реакция системы на поданный сигнал $x_k[n]$.

Используя определение, легко проверить, что системы примеров 2.3 и 2.4 линейны (см. задачу 2.23). Образец нелинейной системы дан в примере 2.5.

Пример 2.6. Сумматор

Система, определяемая уравнением

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k], \quad (2.28)$$

называется *сумматором*, поскольку значение ее реакции в момент времени n равно сумме всех предыдущих отсчетов входной последовательности вплоть до n -го. Чтобы доказать линейность сумматора, нам необходимо показать, что он удовлетворяет принципу суперпозиции при любых входных сигналах, не ограничиваясь частными случаями. Подадим на вход сумматора две произвольные последовательности $x_1[n]$, $x_2[n]$ и вычислим соответствующие отклики:

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^n x_1[k], \quad (2.29)$$

$$y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^n x_2[k]. \quad (2.30)$$



Если теперь на вход сумматора подать сигнал $x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$, то по принципу суперпозиции вне зависимости от выбранных констант a и b мы должны получить равенство $y_3[n] = ay_1[n] + by_2[n]$. Проверим это, отталкиваясь от определения (2.28).

$$y_3[n] = \sum_{k=-\infty}^n x_3[k] = \quad (2.31)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^n (ax_1[n] + bx_2[n]) = a \sum_{k=-\infty}^n x_1[k] + b \sum_{k=-\infty}^n x_2[k] = \quad (2.32)$$

$$= ay_1[n] + by_2[n]. \quad (2.33)$$

Итак, сумматор действительно удовлетворяет принципу суперпозиции, т. е. является линейной системой. \square

В общей ситуации доказать, что данная система не является линейной (если она и вправду нелинейна), гораздо проще, чем обосновать ее линейность (если она все-таки линейна). Для этого достаточно предъявить пару входных последовательностей и констант, для которых нарушается принцип суперпозиции.

Пример 2.7. Нелинейная система

Рассмотрим систему

$$w[n] = \log_{10} |x[n]|. \quad (2.34)$$

Эта система нелинейна. Для доказательства нам достаточно найти один контрпример, т. е. пару сигналов, на которой нарушается принцип суперпозиции (2.27). Возьмем сигналы $x_1[n] = 1$ и $x_2[n] = 10$. Соответствующие отклики — $w_1[n] = 0$ и $w_2[n] = 1$. Требование однородности в линейных системах в данной ситуации диктует соотношение $w_2[n] = 10w_1[n]$, поскольку $x_2[n] = 10x_1[n]$. Однако у нас это не выполнено. Значит, система (2.34) нелинейна. \square

2.3.3. Стационарные системы

К *стационарным* относят системы, для которых временной сдвиг (или задержка) входной последовательности индуцирует соответствующий сдвиг выходной последовательности. Более формально определение выглядит так. Пусть дискретная система определена формулой $y[n] = T\{x[n]\}$. Она называется стационарной, если для любой входной последовательности $x[n]$ и произвольного целого числа n_0 выполнено соотношение $T\{x[n-n_0]\} = y[n-n_0]$. Стационарные системы иногда еще называют системами, *инвариантными относительно сдвигов*.

Как и в случае с линейными системами, доказательство стационарности данной системы требует общего рассуждения, не допускающего каких-либо специфических предположений относительно входных сигналов. Все системы из примеров 2.3–2.7 стационарны. Принцип доказательства стационарности системы иллюстрируют примеры 2.8 и 2.9.

Пример 2.8. Стационарность сумматора

Рассмотрим сумматор из примера 2.6. Положим $x_1[n] = x[n - n_0]$. Для доказательства стационарности сумматора нам следует вычислить $y[n - n_0]$, $y_1[n]$ и сравнить результаты.

таты. По определению сумматора имеем

$$y[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]; \quad (2.35)$$

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^n x_1[k] = \sum_{k=-\infty}^n x[k - n_0]. \quad (2.36)$$

Поменяв в последней сумме параметр суммирования на $k_1 = k - n_0$, получим

$$y_1[n] = \sum_{k_1=-\infty}^{n-n_0} x[k_1] = y[n - n_0].$$

Таким образом, сумматор действительно является стационарной системой. \square

Следующий пример знакомит с нестационарной системой.

Пример 2.9. Компрессор

Система, определенная соотношением

$$y[n] = x[Mn], \quad -\infty < n < \infty, \quad (2.37)$$

где M — натуральное число, называется *уплотнителем*. Вольно говоря, эта система отбрасывает $M-1$ из каждого M отсчетов входной последовательности, оставляя только M -й. Она, конечно, нестационарна, в чем легко убедиться, рассмотрев реакцию $y_1[n]$ системы на входной сигнал $x_1[n - n_0]$. Если бы наша система была стационарна, то выполнялось бы равенство $y_1[n] = y[n - n_0]$. Однако

$$y_1[n] = x_1[Mn] = x[Mn - n_0] \neq y[n - n_0] = x[M(n - n_0)].$$

Другой способ проверки нестационарности системы состоит в предъявлении контрпримера, т. е. входной последовательности, на которой нарушается условие стационарности. Пусть, например, $M = 2$, $x[n] = \delta[n]$ и $x_1[n] = \delta[n-1]$. Тогда $y[n] = \delta[Mn] = \delta[n]$, но $y_1[n] = \delta[Mn-1] = 0$. Следовательно, $y_1[n] \neq y[n-1]$, что противоречит условию стационарности. \square

2.3.4. Детерминированность

Систему называют *детерминированной*, если член входной последовательности с номером n_0 зависит только от тех членов входной последовательности, номер которых не превышает n_0 . Это условие влечет тот факт, что если $x_1[n] = x_2[n]$ при $n \leq n_0$, то $y_1[n] = y_2[n]$ при $n \leq n_0$. Система примера 2.3 детерминированная, если $n_d \geq 0$, и не является таковой при $n_d < 0$. Система примера 2.4 детерминированная при $-M_1 \geq 0$ и $M_2 \geq 0$. В противном случае она недетерминированная. Система примера 2.5 детерминированная, как и сумматор из примера 2.6 и нелинейная система примера 2.7. А вот система примера 2.9 — недетерминированная при $M > 1$, поскольку $y[1] = x[M]$. Еще одна недетерминированная система приведена в следующем примере.

Пример 2.10. Правая и левая разностные системы

Рассмотрим правую разностную систему, определенную по правилу

$$y[n] = x[n+1] - x[n]. \quad (2.38)$$

Она не является детерминированной, так как каждый из членов выходной последовательности с номером n вычисляется как по $x[n]$, так и по $x[n+1]$. Нарушение детерминированности легко заметить, взяв в качестве входных последовательностей $x_1[n] = \delta[n-1]$ и $x_2[n] = 0$. Соответствующие отклики — $y_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ и $y_2[n] = 0$. Заметим, что $x_1[n] = x_2[n]$ при $n \leq 0$. Поэтому, по определению детерминированности, должно выполняться равенство $y_1[n] = y_2[n]$ для всех $n \leq 0$, которое нарушается при $n = 0$. Итак, предъявив контрпример, мы показали, что правая разностная система недетерминированная.

Левая разностная система определяется как

$$y[n] = x[n] - x[n-1]. \quad (2.39)$$

Каждый член выходной последовательности этой системы зависит от члена с тем же номером входной последовательности и одного предыдущего. Значит, она является детерминированной. \square

2.3.5. Устойчивость

Говорят, что система *устойчива*, если и только если ее реакция на любой ограниченный по амплитуде сигнал ограничена. Напомним, что последовательность $x[n]$ называется *ограниченной*, если найдется такое конечное положительное число B_x , что

$$\forall n \quad |x[n]| \leq B_x < \infty. \quad (2.40)$$

Таким образом, в устойчивой системе для каждой ограниченной входной последовательности найдется такая положительная константа B_y , что

$$\forall n \quad |y[n]| \leq B_y < \infty. \quad (2.41)$$

Важно осознать, что свойство, которое мы здесь определили, — это свойство системы, а не входных последовательностей. Иначе говоря, мы вполне можем предъявить пары сигнал — отклик, обладающие указанным свойством. Но наличие таких пар еще не означает устойчивости системы. Данная система будет устойчива только в том случае, когда этим свойством обладают все пары. Например, для неустойчивой системы мы можем найти ряд ограниченных сигналов, на которые наша система дает ограниченные отклики, однако результат применения устойчивой системы к любой ограниченной входной последовательности должен быть ограниченным. Поэтому, как только нам удалось найти хотя бы одну ограниченную последовательность, отклик на которую будет неограниченным, можно с уверенностью заключить, что эта система неустойчива. В следующем примере проверяется устойчивость уже знакомых нам систем.

Пример 2.11. Проверка устойчивости систем

Система примера 2.5 устойчива. Для доказательства этого факта предположим, что на вход системы подается сигнал $x[n]$ с верхней границей B_x , т. е. $|x[n]| \leq B_x$ для всех n . Тогда $|y[n]| = |x[n]|^2 \leq B_x^2$. Таким образом, $B_y = B_x^2$ — верхняя граница реакции

системы $y[n]$, доказывающая ее ограниченность. Следовательно, проверяемая система устойчива.

Используя аналогичные рассуждения, можно доказать устойчивость систем примеров 2.3, 2.4, 2.9 и 2.10.

С другой стороны, легко убедиться в неустойчивости системы примера 2.7. Действительно, $y[n] = \log_{10}(x[n]) = -\infty$ для любого номера n , при котором $x[n] = 0$, хотя отсчеты отклика конечны для всех значений n , при которых $x[n] \neq 0$.

Сумматор, введенный в примере 2.6 формулой (2.28), также неустойчив. Рассмотрим, например, последовательность $x[n] = u[n]$. Ее ограниченность не вызывает сомнений, поскольку $B_x = 1$. Отклик сумматора на такой сигнал имеет вид

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n u[k] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ n + 1, & n \geq 0. \end{cases} \quad (2.42)$$

Последовательность $y[n]$ неограничена, поскольку при любом выборе константы B_y неравенство $n + 1 \leq B_y < \infty$ нарушается при достаточно больших n . Следовательно, сумматор является неустойчивой системой. \square

2.4. Линейные стационарные системы

Особое значение имеет класс систем, являющихся одновременно как линейными, так и стационарными. Наличие этих свойств позволяет представить системы в удобном виде. Более того, они играют ведущую роль в приложениях обработки сигналов. Класс линейных систем определяется с помощью принципа суперпозиции уравнением (2.27). Учитывая свойство линейности и представление общей последовательности в виде линейной комбинации сдвинутых импульсов (2.6), можно заметить, что линейная система полностью определяется своей реакцией на сдвинутые импульсные последовательности. Более точно, пусть $h_k[n]$ — реакция системы на $\delta[n - k]$. Тогда согласно тождеству (2.6)

$$y[n] = T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k] \right\}. \quad (2.43)$$

По принципу суперпозиции (2.27) можно записать

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T\{\delta[n - k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n]. \quad (2.44)$$

Итак, мы получили, что реакция линейной системы на любую входную последовательность выражается в терминах откликов системы на сигналы $\delta[n - k]$. Если система всего лишь линейна, то отсчеты $h_k[n]$ зависят как от k , так и от n , и помощь, оказываемая уравнением (2.44) при вычислениях, относительно невысока. Однако можно получить более полезный результат, если к свойству линейности добавить условие стационарности.

Свойство стационарности влечет, что если $h[n]$ — реакция системы на $\delta[n]$ (называемая *импульсной характеристикой* системы), то ее реакция на сигнал $\delta[n - k]$ равна $h[n - k]$. Опираясь на этот факт, уравнение (2.44) можно переписать

в виде

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]. \quad (2.45)$$

Как следствие этой формулы, отметим, что линейная стационарная система (ЛС-система) полностью определяется своей импульсной характеристикой $h[n]$ в том смысле, что при известной последовательности $h[n]$, опираясь на (2.45), можно вычислить отклик $y[n]$ на *любой* поданный сигнал $x[n]$.

Если отсчеты последовательности $y[n]$ зависят от отсчетов $h[n]$ и $x[n]$ по правилу (2.45), то последовательность $y[n]$ называют (*дискретной*) *сверткой* последовательностей $h[n]$ и $x[n]$ и употребляют обозначение:

$$y[n] = x[n] * h[n]. \quad (2.46)$$

Операция дискретной свертки строит последовательность $y[n]$ по двум данным последовательностям $x[n]$ и $h[n]$. Уравнение (2.45) выражает каждый отсчет выходной последовательности через все отсчеты входной последовательности и импульсную характеристику.

Формула (2.45) наводит на мысль, что отсчет входной последовательности с номером $n = k$, представленный как $x[k]\delta[n-k]$, преобразуется системой в выходную последовательность $x[k]h[n-k]$ для $-\infty < n < \infty$, и что для каждого k эти последовательности комбинируются для формирования абсолютно всех выходных последовательностей. Эта интерпретация иллюстрируется рис. 2.8, где показана импульсная характеристика, простая входная последовательность с тремя ненулевыми отсчетами, индивидуальные ответы на каждый такой отсчет и их комбинация, дающая отклик системы. Более конкретно, $x[n]$ можно представить в виде суммы трех последовательностей $x[-2]\delta[n+2]$, $x[0]\delta[n]$ и $x[3]\delta[n-3]$, представляющих три ненулевых отсчета последовательности $x[n]$. Последовательности $x[-2]h[n+2]$, $x[0]h[n]$ и $x[3]h[n-3]$ — отклики системы на входные сигналы $x[-2]\delta[n+2]$, $x[0]\delta[n]$ и $x[3]\delta[n-3]$ соответственно. После этого реакция системы на сигнал $x[n]$ получается в виде суммы этих индивидуальных откликов.

Хотя дискретная свертка напоминает свертку функций из теории непрерывных линейных систем, определенную с помощью интеграла, ее не следует воспринимать как аппроксимацию интегральной свертки. Последняя свертка играет в основном теоретическую роль в непрерывных линейных системах, в то время как дискретная свертка, в дополнение к своей теоретической ценности, часто служит для явной реализации дискретных линейных систем. Поэтому очень важно наработать некоторую интуицию о свойствах дискретной свертки в реальных вычислениях.

Изложенная интерпретация уравнения (2.45) заключается в том, что дискретная свертка является прямым следствием линейности и стационарности системы. Однако несколько иной взгляд на эту формулу подводит нас к весьма важной вычислительной интерпретации. Когда мы смотрим на соотношение (2.45) как на формулу, вычисляющую отдельный отсчет выходной последовательности, замечаем, что $y[n]$ (т. е. n -й член входной последовательности) получается в результате умножения входной последовательности (записанной как функция от k) на последовательность $h[n-k]$, $-\infty < k < \infty$, а затем при каждом фиксированном n

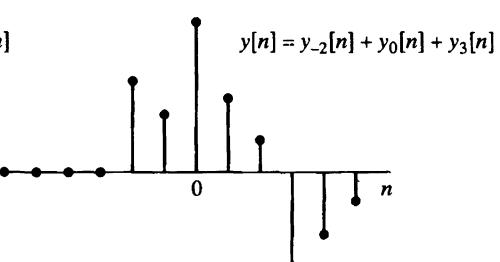
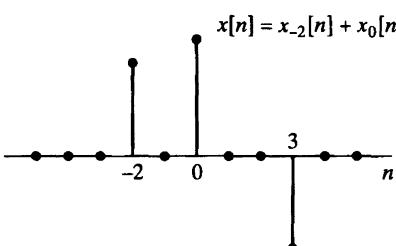
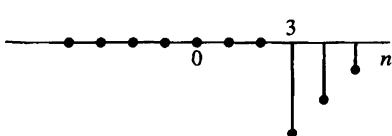
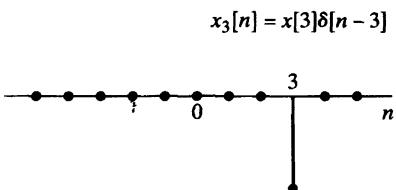
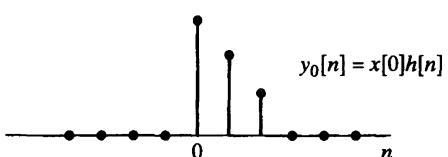
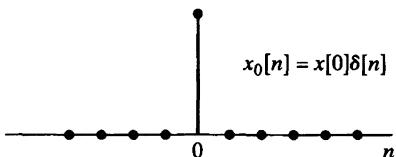
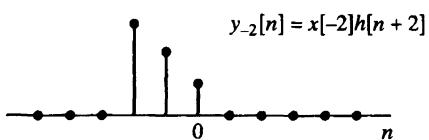
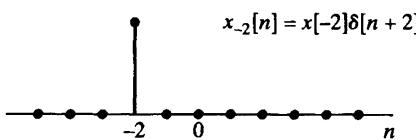
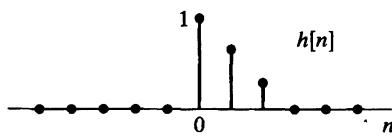
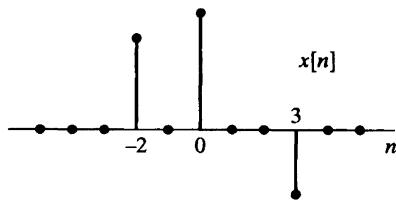


Рис. 2.8. Представление входной последовательности линейной стационарной системы в виде суперпозиции ответов на индивидуальные отсчеты

суммируются все произведения $x[k]h[n - k]$ с параметром k в качестве параметра суммирования. Следовательно, при свертке двух последовательностей для вычисления n -го члена результата используются все отсчеты обеих последовательностей. Ключ к полному пониманию формулы (2.45) состоит в осознании процесса образования последовательности $h[n - k]$, $-\infty < k < \infty$, для всех значений n , которые представляют интерес. Чтобы закончить это осмысление свертки, полезно заметить, что

$$h[n - k] = h[-(k - n)]. \quad (2.47)$$

Интерпретацию формулы (2.47) лучше всего посмотреть на примере.

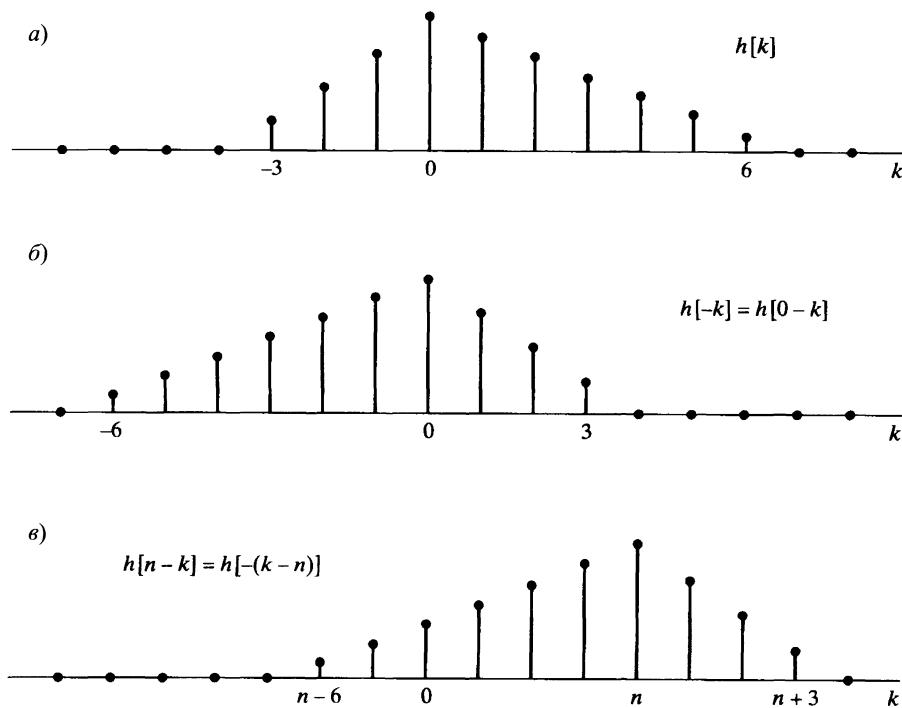


Рис. 2.9. Получение последовательности $h[n - k]$: а) последовательность $h[k]$; б) последовательность $h[-k]$; в) последовательность $h[-(k - n)]$ при $n = 4$

Пример 2.12. Вычисление свертки

Предположим, что $h[k]$ — последовательность, изображенная на рис. 2.9, а), а нам нужно найти $h[n - k] = h[-(k - n)]$. Определим $h_1[k]$ как $h[-k]$ (рис. 2.9, б). Затем зададим $h_2[k]$ как последовательность $h_1[k]$, задержанную на n отсчетов по оси k , т. е. $h_2[k] = h_1[k - n]$. На рис. 2.9, в) изображена последовательность, полученная из последовательности рисунка 2.9, б) сдвигом на n отсчетов вправо. Опираясь на связь между $h_1[k]$ и $h[k]$, можно показать, что $h_2[k] = h_1[k - n] = h[-(k - n)] = h[n - k]$, и, таким образом, нижняя последовательность рисунка является искомым сигналом. Подводя итог, скажем, что для вычисления $h[n - k]$ нам нужно обратить по времени последовательность $h[k]$ относительно $k = 0$, а затем сдвинуть полученный результат на n отсчетов вправо. □

Из примера 2.12 должно стать ясно, что в общей ситуации последовательность $h[n - k]$, $-\infty < k < \infty$, получается в два этапа:

- 1) зеркальным отражением последовательности $h[k]$ относительно нуля для получения $h[-k]$;
- 2) сдвигом отраженной последовательности вправо на n отсчетов.

Как уже отмечалось, для вычисления свертки последовательности $x[k]$ и $h[n - k]$ перемножаются, а затем произведения суммируются и получается отсчет $y[n]$ выходной последовательности. Чтобы найти другой отсчет свертки, начало отсчета (нулевой момент времени) последовательности $h[-k]$ сдвигается на новую позицию и процесс повторяется. Эта процедура применяется как при численной обработке отсчетов, полученных при дискретизации сигналов, так и при аналитических вычислениях, когда отсчеты поддаются описанию простой формулой. Следующий пример иллюстрирует дискретную свертку в последнем случае.

Пример 2.13. Аналитическое вычисление свертки

Рассмотрим систему с импульсной характеристикой

$$h[n] = u[n] - u[n - N] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть входная последовательность имеет вид

$$x[n] = a^n u[n].$$

Чтобы найти n -й отсчет соответствующей входной последовательности, нам нужно просуммировать произведения $x[k]h[n - k]$ по всем k . В этом случае мы можем найти формулы для $y[n]$ при различных значениях n . Например, рис. 2.10, а) показывает последовательности $x[k]$ и $h[n - k]$ при некотором отрицательном значении n . Очевидно, все отрицательные числа n дают одну и ту же картинку, т. е. ненулевые части последовательностей $x[k]$ и $h[n - k]$ не перекрываются. Следовательно,

$$y[n] = 0, \quad \text{при } n < 0.$$

На рис. 2.10, б) показаны последовательности при $0 \leq n \leq N - 1$. Эти ограничения на n можно записать одним двойным неравенством: $0 \leq n \leq N - 1$. Исследуя рис. 2.10, б), мы видим, что

$$x[k]h[n - k] = a^k,$$

поэтому

$$y[n] = \sum_{k=0}^n a^k, \quad \text{при } 0 \leq n \leq N - 1. \quad (2.48)$$

Пределы суммирования в этой формуле непосредственно следуют из рис. 2.10, б). Формула (2.48) говорит о том, что $y[n]$ равен сумме $n + 1$ члена геометрической прогрессии со знаменателем a , которая может быть выражена по известной формуле:

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} a^k = \frac{\alpha^{N_1} - \alpha^{N_2+1}}{1 - \alpha}, \quad N_2 \geq N_1. \quad (2.49)$$

Используя эту формулу, получаем

$$y[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (2.50)$$

Наконец, на рис. 2.10, в) изображены две последовательности с $0 < n - N + 1$ и $N-1 < n$. Как и раньше,

$$x[k]h[n-k] = a^k, \quad n - N + 1 < k \leq n,$$

но теперь нижний предел суммирования равен $n - N + 1$ (см. рис. 2.10, в)). Таким образом,

$$\text{при } N-1 < n \quad y[n] = \sum_{k=n-N+1}^n a^k. \quad (2.51)$$

Вновь применяя соотношение (2.49), находим

$$y[n] = \frac{a^{n-N+1} - a^{n+1}}{1 - a} = a^{n-N+1} \frac{1 - a^N}{1 - a}. \quad (2.52)$$

Итак, благодаря кусочно-экспоненциальной природе как входной последовательности, так и импульсной характеристики мы смогли получить выражение для $y[n]$ как функцию от n :

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < n, \\ \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, & 0 \leq n \leq 0, \\ a^{n-N+1} \frac{1 - a^N}{1 - a}, & N_1 < n. \end{cases} \quad (2.53)$$

Результирующая последовательность представлена на рис. 2.10, г). \square

Пример 2.13 демонстрирует, как можно аналитически вычислить свертку, если входная последовательность и импульсная характеристика заданы простыми формулами. В этих случаях свертка может быть выражена в компактном виде, если использовать формулу суммы членов геометрической прогрессии или другие удобные формулы¹. Когда компактная форма записи недоступна, свертка может быть выражена и конечной суммой, как это показано в примере 2.13, если входная последовательность или импульсная характеристика — сигнал ограниченной длительности, т. е. имеет конечное число ненулевых отсчетов.

2.5. Свойства линейных стационарных систем

Поскольку линейные стационарные системы описываются сверткой (2.45), свойства этого класса систем определяются свойствами дискретной свертки. Следовательно, импульсная характеристика конкретной системы содержит всю полноту информации.

Некоторые общие свойства класса линейных стационарных систем можно обнаружить, изучая свойства операции свертки. Например, свертка — коммутативная операция:

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]. \quad (2.54)$$

¹Такого sorta результаты обсуждаются, например, в [51].

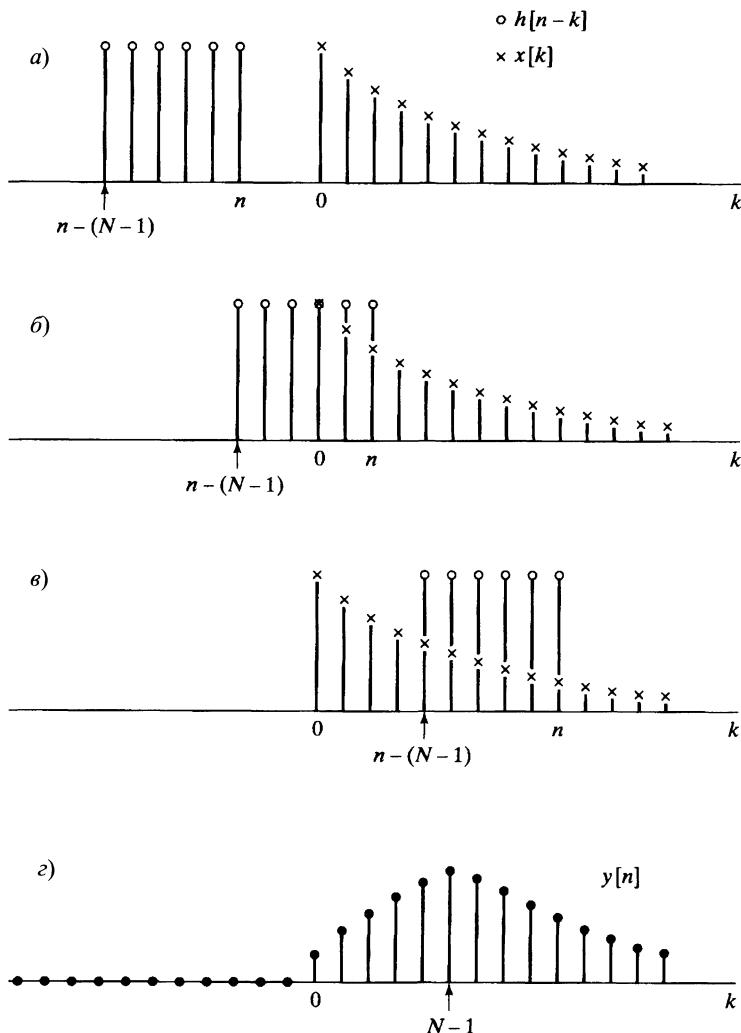


Рис. 2.10. Последовательности, участвующие в вычислении дискретной свертки: a)–e) не-нулевые части последовательностей $x[k]$ и $h[n-k]$ при различных значениях n ; e) выходная последовательность $y[n]$

Коммутативность можно доказать, осуществив замену параметра суммирования в формуле (2.45). Более точно, если $m = n - k$, то

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{-\infty} x[n-m]h[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] = h[n] * x[n], \quad (2.55)$$

и роли последовательностей $x[n]$ и $h[n]$ поменялись. Таким образом, порядок последовательностей в свертке несущественен, т. е. реакция системы не изменится, если поменять местами входную последовательность и отклик системы на единичный импульс. Иными словами, отклик системы на сигнал $x[n]$ при импульсной

характеристике $h[n]$ будет тем же, что и реакция на сигнал $h[n]$ при импульсной характеристики $x[n]$.

Свертка удовлетворяет свойству дистрибутивности относительно сложения, а именно

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n].$$

Это свойство непосредственно вытекает из формулы (2.45) и является прямым следствием линейности и коммутативности свертки.

При *каскадном соединении* (последовательном) систем реакция первой системы подается на вход второй, отклик второй — на вход третьей и т. д. Отклик последней системы служит реакцией всей цепочки систем. Две линейные стационарные системы, подключенные последовательно, образуют одну линейную стационарную систему, чья импульсная характеристика совпадает со сверткой импульсных характеристик обеих систем, что иллюстрирует рис. 2.11. На верхнем блоке диаграмм рисунка реакция первой системы на $x[n] = \delta[n]$ равна $h_1[n]$. Поэтому выходная последовательность из второй системы (и, по определению, импульсная характеристика каскада систем) должна быть равна

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]. \quad (2.56)$$

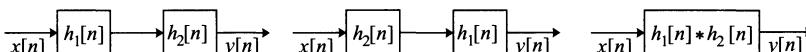


Рис. 2.11. Три линейных стационарных системы с одной и той же импульсной характеристикой

Как следствие коммутативности свертки импульсная характеристика каскада линейных стационарных систем не зависит от порядка, в котором они подключаются друг к другу. Этот факт отражен на рис. 2.11, где три системы имеют одну и ту же импульсную характеристику.

При *параллельном соединении* системы имеют общий вход, а их выходные последовательности складываются и дают реакцию всего соединения. Как следует из дистрибутивности свертки, параллельное соединение двух линейных стационарных систем можно заменить одной линейной стационарной системой, чья импульсная характеристика равна сумме характеристик компонент соединения (рис. 2.12), т. е.

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]. \quad (2.57)$$

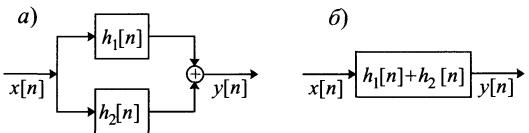


Рис. 2.12. *a)* параллельное соединение линейных стационарных систем; *б)* система, эквивалентная системе *a)*

Требования линейности и стационарности выделяют класс систем с весьма специфическими свойствами. Устойчивость и детерминированность предоставляют вспомогательные свойства, и часто бывает важно знать, является ли данная линейная стационарная система устойчивой или детерминированной. Напомним (подраздел 2.3.5), что устойчивой системой называют систему с ограниченной реакцией на каждый ограниченный входной сигнал. Линейная стацио-

нарная система является устойчивой тогда и только тогда, когда ее импульсная характеристика — абсолютно суммируемая последовательность, т. е. если

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty. \quad (2.58)$$

Это можно обосновать следующим образом. Из формулы (2.55) имеем

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]|. \quad (2.59)$$

Если $x[n]$ ограничена, то найдется константа B_x , для которой

$$\forall k \quad |x[n]| \leq B_x.$$

Поэтому для всех k верно неравенство $|x[n-k]| \leq B_x$. Следовательно,

$$|y[n]| \leq B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|. \quad (2.60)$$

Итак, $y[n]$ — ограниченная последовательность, если выполнено условие (2.58), что дает *достаточное* условие устойчивости. Чтобы доказать необходимость этого условия, нам нужно показать, что если $S = \infty$, то найдется ограниченная входная последовательность, реакция на которую будет неограничена. Таким входом является последовательность

$$x[n] = \begin{cases} \frac{h^*[-n]}{|h[-n]|}, & h[n] \neq 0, \\ 0, & h[n] = 0, \end{cases} \quad (2.61)$$

где $h^*[n]$ — комплексное сопряжение отсчета $h[n]$. Очевидно, последовательность $x[n]$ ограничена единицей. Однако отсчет выходной последовательности при $n = 0$ равен

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h[k]|^2}{|h[-k]|} = S. \quad (2.62)$$

Значит, если $S = \infty$, то существует неограниченный отклик на ограниченный сигнал, что доказывает неустойчивость системы в этом случае.

Детерминированная система определена в подразделе 2.3.4 как система, отсчет $y[n_0]$ реакции которой зависит только от отсчетов $x[n]$ сигнала с $n \leq n_0$. Ввиду (2.45) и (2.55) это определение влечет утверждение: импульсная характеристика детерминированной линейной стационарной системы должна удовлетворять условию

$$h[n] = 0, \quad n < 0 \quad (2.63)$$

(см. задачу 2.62). По этой причине последовательность с нулевыми членами $h[n]$ при $n < 0$ удобно иногда называть *детерминированной*, подразумевая, что она является откликом на единичный импульс детерминированной линейной стационарной системы.

Для иллюстрации свойств линейной стационарной системы в ответе на единичный импульс вновь обратимся к примерам 2.3–2.10. Прежде всего заметим,

что только системы из примеров 2.3, 2.4, 2.6 и 2.10 являются линейными и стационарными. Хотя для нелинейных или нестационарных систем импульсная характеристика тоже может быть вычислена, она представляет лишь ограниченный интерес, поскольку формула свертки, а также условия (2.58) и (2.63), обеспечивающие устойчивость и детерминированность, не применимы к таким системам.

Найдем сначала реакцию систем примеров 2.3, 2.4, 2.6 и 2.10 на единичный импульс. Мы можем это сделать, опираясь непосредственно на формулы, задающие соответствующие системы.

Идеальная система задержки (пример 2.3)

$$h[n] = \delta[n - n_d], \quad n_d — \text{фиксированное натуральное число.} \quad (2.64)$$

Скользящее среднее (пример 2.4)

$$h[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n - k] = \begin{cases} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (2.65)$$

Сумматор (пример 2.6)

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0 \end{cases} = u[n]. \quad (2.66)$$

Правая разностная система (пример 2.10)

$$h[n] = \delta[n + 1] - \delta[n]. \quad (2.67)$$

Левая разностная система (пример 2.10)

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]. \quad (2.68)$$

Зная импульсные характеристики стационарных систем ((2.64)–(2.68)), мы можем проверить системы на устойчивость, вычисляя

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|.$$

Ясно, что для систем идеальной задержки, скользящего среднего, правой и левой разностных систем указанная сумма меньше бесконечности, поскольку в этих случаях импульсная характеристика имеет лишь конечное число ненулевых отсчетов. Такие системы называют *системами с конечной импульсной характеристикой* (КИХ-системами). Ясно, что КИХ-системы будут устойчивыми тогда и только тогда, когда их отклики на единичный импульс конечны по абсолютной величине. С другой стороны, сумматор не является устойчивой системой, так как

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] = \infty.$$

В подразделе 2.3.5 мы уже доказали неустойчивость сумматора, предъявив пример ограниченного сигнала (единичный скачок), реакция на который неограничена.

Импульсная характеристика сумматора неограничена по длительности. Сумматор — пример класса систем, которые называют *системами с бесконечной импульсной характеристикой* (БИХ-системами). Примером устойчивой БИХ-

системы служит такая система, импульсная характеристика которой имеет вид $h[n] = a^n u[n]$ с $|a| < 1$. В этом случае

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n. \quad (2.69)$$

Если $|a| < 1$, то формула суммы членов бесконечной геометрической прогрессии дает

$$S = \frac{1}{1 - |a|} < \infty. \quad (2.70)$$

С другой стороны, если $|a| \geq 1$, то соответствующая сумма бесконечна и система неустойчива.

Для проверки детерминированности линейных стационарных систем примеров 2.3, 2.4, 2.6 и 2.10 нам нужно убедиться, что $h[n] = 0$ при $n < 0$. Как было выяснено в подразделе 2.3.4, ИСЗ детерминирована при $n_d \geq 0$ (см. формулу (2.23)). Если $n_d < 0$, эта система недетерминирована. В случае скользящего среднего свойство детерминированности накладывает ограничения: $-M_1 \geq 0$ и $M_2 \geq 0$. Сумматор и левая разностная система являются детерминированными системами, а правая разностная система недетерминирована.

Концепция свертки как операции над двумя последовательностями подводит нас к упрощению многих задач, связанных с системами. Особенно полезный результат можно сформулировать относительно ИСЗ. Поскольку отклик этой системы имеет вид $y[n] = x[n - n_d]$, а ее импульсная характеристика равна $h[n] = \delta[n - n_d]$, то

$$x[n] * \delta[n - n_d] = \delta[n - n_d] * x[n] = x[n - n_d]. \quad (2.71)$$

Иными словами, свертка сдвинутого на n_d позиций единичного импульса с сигналом $x[n]$ приводит к задержке сигнала на то же число n_d .

Так как задержка является одной из основных операций при реализации линейных систем, предыдущий результат полезен при анализе и упрощении комплексов линейных стационарных систем. В качестве примера рассмотрим систему, изображенную на рис. 2.13, а), которая состоит из правой разностной системы, последовательно соединенной с одношаговой задержкой.

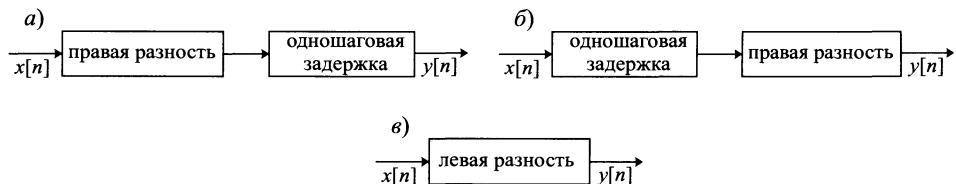


Рис. 2.13. Эквивалентные системы, получающиеся друг из друга благодаря коммутативности свертки

Ввиду коммутативности свертки порядок подключения систем в последовательной цепи несуществен, поскольку они линейны и стационарны. Следовательно, поменяв местами одношаговую задержку и правую разностную систему (рис. 2.13, а)), мы получим ту же результирующую систему (рис. 2.13, б)). Кроме того, формула (2.56) влечет, что импульсная характеристика всей цепи систем

совпадает со сверткой импульсных характеристик каждой из составных частей. Поэтому

$$\begin{aligned} h[n] &= (\delta[n+1] - \delta[n]) * \delta[n-1] = \delta[n-1] * (\delta[n+1] - \delta[n]) = \\ &= \delta[n] - \delta[n-1]. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Мы видим, что $h[n]$ тождественна импульсной характеристике левой разностной системы, т. е. цепи систем, изображенные на рис. 2.13, а) и б), можно заменить левой разностной системой, как показано на рис. 2.13, в).

Заметим, что недетерминированная правая разностная система, будучи последовательно соединена с задержкой (рис. 2.13, а) и б)), превращается в детерминированную систему. В общем случае недетерминированная КИХ-система может быть преобразована в детерминированную систему, если к ней присоединить достаточно большую задержку.

Другой пример каскада систем вводит понятие *инверсивной системы*. Рассмотрим каскад систем (рис. 2.14). Его импульсная характеристика вычисляется по правилу:

$$h[n] = u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = u[n] - u[n-1] = \delta[n]. \quad (2.73)$$

То есть каскадная комбинация сумматора с левой разностной системой (в любом порядке) дает систему, чья импульсная характеристика совпадает с единичным импульсом. Таким образом, выход этой каскадной комбинации будет всегда совпадать со входом, поскольку $x[n] * \delta[n] = x[n]$. В этом случае действие левой разностной системы полностью компенсируется (или инвертируется) действием сумматора. При этом говорят, что левая разностная система — инверсивная система к сумматору.

Благодаря коммутативности свертки сумматор служит инверсивной системой для левой разностной системы. В общем случае, если импульсная характеристика линейной стационарной системы — $h[n]$, то ее инверсивная система (если она существует) реагирует на единичный импульс последовательностью $h_i[n]$, определенной соотношением

$$h[n] * h_i[n] = h_i[n] * h[n] = \delta[n]. \quad (2.74)$$

Инверсивные системы полезны в ситуациях, когда необходимо компенсировать эффект линейной системы. В общем случае разрешить уравнение (2.74) относительно $h_i[n]$ очень трудно. Однако в главе 3 мы увидим, что z -преобразование дает прямой метод построения инверсивной системы.

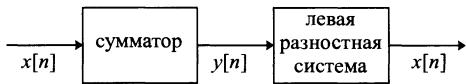


Рис. 2.14. Каскад сумматора и левой разностной системы

2.6. Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами

Важный подкласс линейных стационарных систем состоит из таких систем, у которых пара сигнал – отклик связана *линейным разностным уравнением* порядка

ка N с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n - k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n - m]. \quad (2.75)$$

Свойства, обсуждаемые в § 2.5, и некоторая техника, введенная там, позволяют найти разностные уравнения для отдельных линейных стационарных систем, которые мы уже определили.

Пример 2.14. Разностное уравнение сумматора

Пример линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами доставляется сумматором, определенным формулой

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]. \quad (2.76)$$

Чтобы показать, что вход и выход сумматора удовлетворяют уравнению вида (2.75), перепишем отклик системы в виде

$$y[n - 1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]. \quad (2.77)$$

Выделяя член $x[n]$ из суммы, получаем

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]. \quad (2.78)$$

Подстановка соотношения (2.77) в (2.78) дает

$$y[n] = x[n] + y[n - 1], \quad (2.79)$$

откуда стандартная форма разностного уравнения получается группировкой членов входной и выходной последовательностей:

$$y[n] - y[n - 1] = x[n]. \quad (2.80)$$

Итак, мы показали, что вход и выход сумматора связаны линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами вида (2.75) с $N = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $M = 0$ и $b_0 = 1$.

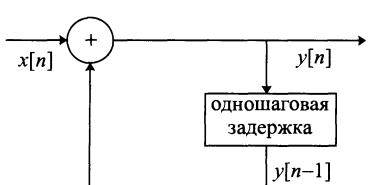


Рис. 2.15. Блок-схема рекуррентного разностного уравнения, представляющего сумматор

Разностное уравнение (2.79) дает лучшее понимание возможного способа реализации сумматора. Согласно этому уравнению при каждом значении n мы складываем отсчет входной последовательности $x[n]$ с предыдущим отсчетом выхода сумматора $y[n - 1]$, что иллюстрируется блок-схемой на рис. 2.15.

Уравнение (2.79) и блок-схему рис. 2.15 называют *рекуррентным представлением* системы, поскольку каждый отсчет реакции системы вычисляется с помощью найденных ранее отсчетов. Более общее понятие будет обсуждаться в этом параграфе несколько позже. \square

Пример 2.15. Разностное уравнение скользящего среднего

Рассмотрим систему скользящего среднего (пример 2.4) с $M_1 = 0$, при котором система становится детерминированной. В этом случае по формуле (2.65) импульсная реакция имеет вид

$$h[n] = \frac{1}{M_2 + 1}(u[n] - u[n - M_2 - 1]), \quad (2.81)$$

откуда

$$y[n] = \frac{1}{M_2 + 1} \sum_{k=0}^{M_2} x[n - k], \quad (2.82)$$

что является частным случаем формулы (2.75) с $N = 0$, $a_0 = 1$, $M = M_2$ и $b_k = \frac{1}{M_2 + 1}$ при $0 \leq k \leq M_2$.

Кроме того, импульсную реакцию можно представить в виде

$$h[n] = \frac{1}{M_2 + 1}(\delta[n] - \delta[n - M_2 - 1]) * u[n], \quad (2.83)$$

что говорит о возможности представления детерминированного скользящего среднего как каскада систем (рис. 2.16). Можно получить разностное уравнение для этой блок-схемы, заметив сначала (см. рис. 2.16), что

$$x_1[n] = \frac{1}{M_2 + 1}(x[n] - x[n - M_2 - 1]). \quad (2.84)$$

С другой стороны, по формуле (2.80) выход сумматора удовлетворяет уравнению

$$y[n] - y[n - 1] = x_1[n],$$

следовательно,

$$y[n] - y[n - 1] = \frac{1}{M_2 + 1}(x[n] - x[n - M_2 - 1]). \quad (2.85)$$

Мы снова приходим к разностному уравнению вида (2.75), но теперь $N = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $M = M_2$ и $b_0 = -b_{M_2+1} = \frac{1}{M_2 + 1}$ с нулевыми коэффициентами b_k при $k \neq 0$ и $k \neq M_2 + 1$. \square

В примере 2.15 мы вывели два разных уравнения, характеризующие скользящее среднее. В главе 6 мы убедимся, что одна и та же линейная стационарная система может быть описана неограниченным числом разностных уравнений.

Так же, как в случае линейных дифференциальных уравнений, описывающих поведение систем с непрерывным временем, разностные линейные уравнения определяют реакции системы на поданный сигнал не однозначно, если не налагать вспомогательных ограничивающих условий. Более точно предположим, что для данного входа $x_p[n]$ мы смогли каким-то способом определить один выход $y_p[n]$, так что пара $(x_p[n], y_p[n])$ будет удовлетворять уравнению (2.75). Тогда этому же уравнению с тем же самым входом будет удовлетворять выходная последовательность вида

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n], \quad (2.86)$$

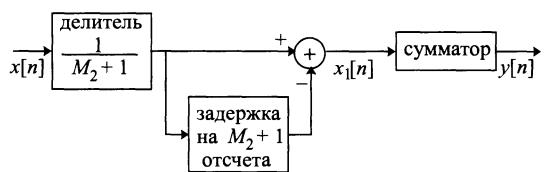


Рис. 2.16. Блок-схема рекурсивной формы скользящего среднего

где $y_h[n]$ — любое решение этого уравнения с $x[n] = 0$, т. е. решение уравнения

$$\sum_{k=0}^N a_k y_h[n-k] = 0. \quad (2.87)$$

Уравнение (2.87) называют *однородным*, а его решение — *однородным решением*. Фактически, последовательность $y_h[n]$ является членом семейства решений вида

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^N A_m z_m^n. \quad (2.88)$$

Подстановка соотношения (2.88) в уравнение (2.87) показывает, что комплексные числа z_m — корни многочлена

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = 0. \quad (2.89)$$

Запись (2.88) однородного решения предполагает, что все N корней многочлена (2.89) различны. Вид членов, ассоциированных с кратными корнями многочлена, несколько иной, но в любом случае общий вид однородного решения содержит N неопределенных коэффициентов. Пример однородного решения с кратными корнями рассматривается в задаче 2.38.

Поскольку $y_h[n]$ содержит N неопределенных коэффициентов, необходимо еще N вспомогательных условий, с помощью которых решение $y[n]$ уравнения однозначно восстанавливается по последовательности $x[n]$. Эти условия могут состоять в конкретных значениях $y[n]$ при фиксированном значении параметра n , например $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$. Наложение таких вспомогательных ограничений приводит к системе N линейных алгебраических уравнений, решая которую можно найти неопределенные коэффициенты.

С другой стороны, если мы каким-то способом найдем эти требуемые вспомогательные значения последовательности $y[n]$, то остальные отсчеты последовательности получаются по рекуррентной формуле, непосредственно вытекающей из уравнения (2.75):

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n-k]. \quad (2.90)$$

Если дана входная последовательность $x[n]$ вместе с вспомогательными данными, скажем $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$, то $y[0]$ можно найти по формуле (2.90). Имея значения $y[0], y[-1], \dots, y[1-N]$, легко отыскать $y[1]$, и т. д. Когда $y[n]$ получается такой процедурой, говорят, что последовательность вычисляется *рекурсивно*, т. е. вычисления отсчетов выхода опираются не только на отсчеты входа, но и на определенные ранее члены входной последовательности.

Чтобы найти значения $y[n]$ при $n < -N$ (снова предполагаем, что нам даны вспомогательные данные $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$), перепишем формулу (2.75) в виде

$$y[n-N] = - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{a_N} y[n-k] + \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_N} x[n-k]. \quad (2.91)$$

Теперь $y[-N-1], y[-N-2], \dots$ тоже можно определить рекурсивно.

Пример 2.16. Рекурсивное решение разностных уравнений

Пусть вход и выход некоторой системы удовлетворяют уравнению

$$y[n] = ay[n - 1] + x[n]. \quad (2.92)$$

Рассмотрим в качестве входной последовательность $x[n] = K\delta[n]$, где K — произвольная константа, и зафиксируем вспомогательные условия в виде $y[-1] = c$. Члены входной последовательности при $n > -1$ можно найти рекурсивно следующим образом:

$$\begin{aligned} y[0] &= ac + k, \\ y[1] &= ay[0] + 0 = a(ac + K) = a^2c + aK, \\ y[2] &= ay[1] + 0 = a(a^2c + aK) = a^3c + a^2K, \\ y[3] &= ay[2] + 0 = a(a^3c + a^2K) = a^4c + a^3K, \\ &\dots \end{aligned}$$

В этом простом случае видно, что

$$\text{при } n \geq 0 \quad y[n] = a^{n+1}c + a^nK. \quad (2.93)$$

Для вычисления отсчетов выхода с отрицательными номерами перепишем разностное уравнение в виде

$$y[n - 1] = a^{-1}(y[n] - x[n]) \Leftrightarrow y[n] = a^{-1}(y[n + 1] - x[n + 1]). \quad (2.94)$$

Опираясь на вспомогательное условие $y[-1] = c$, вычисляем

$$\begin{aligned} y[-2] &= a^{-1}(y[-1] - x[-1]) = a^{-1}c, \\ y[-3] &= a^{-1}(y[-2] - x[-2]) = a^{-1}a^{-1}c = a^{-2}c, \\ y[-4] &= a^{-1}(y[-3] - x[-3]) = a^{-1}a^{-2}c = a^{-3}c, \end{aligned}$$

откуда

$$y[n] = a^{n+1}c, \quad \text{при } n \leq -1. \quad (2.95)$$

Комбинируя (2.93) и (2.95), приходим к результату рекурсивного вычисления

$$y[n] = a^{n+1}c + Ka^n u[n], \quad \forall n. \quad \square \quad (2.96)$$

Пример 2.16 иллюстрирует несколько важных моментов. Во-первых, заметим, что мы вычислили рекурсивным способом отсчеты выходной последовательности как в положительном, так и в отрицательном направлении, начиная с $n = -1$. Ясно, что эта процедура недетерминирована. Во-вторых, заметим, что при $K = 0$ входная последовательность — нулевая, а выходная равна $y[n] = a^{n+1}c$. У линейной же системы входная нулевая последовательность индуцирует нулевой выход (см. задачу 2.21). Значит, данная система нелинейна. В-третьих, сдвигая входную последовательность на n_0 отсчетов, т. е. положив $x_1[n] = K\delta[n - n_0]$, получим выход в виде

$$y_1[n] = a^{n+1}c + Ka^{n-n_0}u[n - n_0]. \quad (2.97)$$

Поэтому система не является и стационарной.

Наш главный интерес связан с системами, которые как линейны, так и стационарны. В этом случае вспомогательные условия должны согласовываться с

требованиями линейности и стационарности. В главе 3 при обсуждении решений разностных уравнений с использованием z -преобразования мы полностью учтем эти требования. Как мы увидим при этом обсуждении, даже налагая требования линейности и стационарности системы, невозможно гарантировать единственность решения разностного уравнения и, следовательно, сама система не является однозначно определенной. В частности, можно найти как детерминированные, так и недетерминированные линейные стационарные системы, согласующиеся с данным разностным уравнением.

Если на систему, характеризующуюся линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами, наложить дополнительные ограничения: линейность, стационарность и детерминированность, то решение уравнения будет единственным. В этом случае вспомогательные данные часто называют *состолнием покоя в начальном положении*. Иначе говоря, из вспомогательной информации о $x[n] = 0$ при $n < n_0$ (для некоторого n_0) должны вытекать равенства $y[n] = 0$ при $n < n_0$. Все это дает достаточные условия, при которых $y[n]$ для $n \geq n_0$ вычисляются единственным образом по формуле (2.90).

Подведем итог всему сказанному относительно систем, чей вход и выход удовлетворяют линейному разностному уравнению с постоянными коэффициентами.

- Выходная последовательность определена входной последовательностью неоднозначно. Для однозначности необходима вспомогательная информация.
- Если вспомогательная информация дана в виде N последовательных значений выходной последовательности, отсчеты выхода с большими номерами можно найти, переписав уравнение в виде рекуррентного соотношения, выраждающего $y[n]$ через $y[k]$ с меньшими номерами, а отсчеты с меньшими номерами получаются из уравнения, переписанного как рекуррентное соотношение, выраждающее $y[n]$ через $y[k]$ с большими номерами.
- Линейность, стационарность и детерминированность системы зависят от вспомогательных условий. Если дополнительно предполагать, что система в начальном положении находится в состоянии покоя, то она будет линейной, стационарной и детерминированной.

Помня о предыдущих замечаниях, вернемся к примеру 2.16, но с предположением о начальном состоянии покоя системы. Поскольку $x[n] = K\delta[n]$, т.е. $x[n] = 0$ при $n < 0$, то состояние покоя в начальном положении говорит о равенстве $y[n] = 0$ при $n < 0$. В частности, $y[-1] = 0$. Тогда из формулы (2.96) получаем

$$y[n] = Ka^n u[n]. \quad (2.98)$$

Заменим входную последовательность на $K\delta[n - n_0]$, сохранив требование покоя в начальном положении. Тогда рекуррентные соотношения можно решить, опираясь на условие $y[n] = 0$ при $n < n_0$. Заметим, что если $n_0 < 0$, то может оказаться, что $y[-1] \neq 0$, т.е. состояние покоя в начале вовсе не означает, что $y[-1] = \dots = y[-N] = 0$, оно лишь влечет равенства $y[n_0-1] = \dots = y[n_0-N] = 0$, если $x[n] = 0$ при $n < n_0$. Заметим также, что импульсная характеристика в нашем примере — $h[n] = a^n u[n]$, т.е. $h[n] = 0$ при $n < 0$, что согласуется с детерминированностью, вытекающей из предположения о начальном состоянии покоя.

Обсуждая разностные уравнения, мы неявно предполагали, что константа N в уравнении (2.75) больше нуля. Если положить $N = 0$, то получим

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \left(\frac{b_k}{a_0} \right) x[n - k], \quad (2.99)$$

т. е. $y[n]$ выражается явно через отсчеты входной последовательности и никакого рекурсивного решения для вычисления выходной последовательности не требуется, а значит, и вспомогательная информация не нужна.

Нетрудно заметить, что формула (2.99) записана в виде свертки, и, положив $x[n] = \delta[n]$, найти, что импульсная характеристика равна

$$h[n] = \sum_{k=0}^M \left(\frac{b_k}{a_0} \right) \delta[n - k],$$

или

$$h[n] = \begin{cases} \left(\frac{b_k}{a_0} \right), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (2.100)$$

Очевидно, импульсная характеристика в этом случае — сигнал ограниченной длительности. Действительно, выходную последовательность любой КИХ-системы можно вычислить нерекурсивным (прямым) способом, используя уравнение (2.99), в котором коэффициенты — суть значения импульсной характеристики. Скользящее среднее (пример 2.15) с $M_1 = 0$ является примером детерминированной КИХ-системы. Интересно, что для отклика такой системы мы можем найти и рекуррентные соотношения. В главе 6 мы покажем, что существует множество способов реализации требуемого преобразования сигналов с использованием разностных уравнений. Преимущество одного метода перед другим зависит от конкретных целей, стоящих перед исследователем, таких как точность вычисления, объем промежуточных данных, который надо хранить, и число умножений и сложений, требуемых для вычисления каждого отсчета отклика.

2.7. Представление сигналов и систем в частотной области

В предыдущих параграфах мы определили некоторые из основных понятий теории дискретных сигналов и систем. Мы видели, что представление входного сигнала в виде взвешенной суммы сдвинутых импульсов позволяет интерпретировать сигнал, выходной из линейной стационарной системы, в виде линейной комбинации сдвинутых импульсных характеристик. Как и непрерывные, дискретные сигналы можно представлять различными способами. Например, синусоидальные и комплексные экспоненциальные сигналы играют особенно важную роль в представлении дискретных сигналов. Это происходит в связи с тем, что комплексные экспоненциальные последовательности являются собственными функциями линейных стационарных систем, а реакция этой системы на синусоидальную последовательность остается синусоидальной последовательностью

с той же частотой, фаза и амплитуда которой полностью определяется системой. Фундаментальное свойство линейных стационарных систем, позволяющее представлять сигналы в терминах синусоидальных или комплексных экспоненциальных последовательностей (т. е. представление Фурье), активно используется в теории линейных систем.

2.7.1. Собственные функции линейных стационарных систем

Чтобы почувствовать главное свойство комплексных экспонент в теории дискретных систем, рассмотрим входную последовательность $x[n] = e^{j\omega n}$, $-\infty < n < \infty$, т. е. комплексную экспоненту с частотой ω , измеряемой в радианах. Из формулы (2.55) мы видим, что соответствующая реакция линейной стационарной системы с импульсной характеристикой $h[n]$ имеет вид

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right). \quad (2.101)$$

Положив

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}, \quad (2.102)$$

получим

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}. \quad (2.103)$$

Следовательно, $e^{j\omega n}$ — собственная функция системы с собственным числом $H(e^{j\omega})$. Из формулы (2.103) вытекает, что $H(e^{j\omega})$ описывает функциональную зависимость изменения комплексной амплитуды входного сигнала от частоты ω . Собственное число $H(e^{j\omega})$ называют *комплексной частотной характеристикой* (КЧХ) системы (или просто частотной характеристикой), поскольку в общей ситуации величина $H(e^{j\omega})$ комплексная и может быть выписана в алгебраической форме через свою вещественную и мнимую части:

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega}) \quad (2.104)$$

или в показательном виде в терминах модуля и аргумента (фазы):

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})}. \quad (2.105)$$

Пример 2.17. Частотная характеристика ИСЗ

Найдем КЧХ идеальной системы задержки, определенной формулой

$$y[n] = x[n - n_d], \quad (2.106)$$

где n_d — фиксированное целое число. Если $x[n] = e^{j\omega n}$ — сигнал, поданный на вход системы, то по формуле (2.106) получаем

$$y[n] = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{-j\omega n_d}e^{j\omega n}.$$

Итак, мы видим, что при любом значении ω выходной сигнал пропорционален входному. Причем комплексный коэффициент пропорциональности зависит от частоты ω и величины задержки n_d . Следовательно, КЧХ ИСЗ равна

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}. \quad (2.107)$$

Можно и по-другому определить КЧХ системы, для чего напомним, что $h[n] = \delta[n - n_d]$ — импульсная характеристика ИСЗ. Учитывая (2.102), имеем

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_d] e^{-jn\omega} = e^{-j\omega n_d}.$$

Вещественная и мнимая части КЧХ определяются по формулам Эйлера

$$H_R(e^{j\omega}) = \cos(\omega n_d), \quad (2.108)$$

$$H_I(e^{j\omega}) = -\sin(\omega n_d). \quad (2.109)$$

Ее модуль и фаза равны

$$|H(e^{j\omega})| = 1, \quad (2.110)$$

$$\angle H_I(e^{j\omega}) = -\omega n_d. \quad \square \quad (2.111)$$

В § 2.8 мы покажем, что сигнал из обширного класса последовательностей может быть выражен в виде линейной комбинации экспоненциальных:

$$x[n] = \sum_k \alpha_k e^{j\omega_k n}. \quad (2.112)$$

По принципу суперпозиции соответствующий отклик линейной стационарной системы равен

$$y[n] = \sum_k \alpha_k H(e^{j\omega_k}) e^{j\omega_k n}. \quad (2.113)$$

Итак, если нам удалось представить $x[n]$ в виде линейной комбинации экспоненциальных последовательностей, как в (2.112), то выходная последовательность определяется суммой (2.113) с помощью КЧХ системы. Следующий простой пример иллюстрирует это фундаментальное свойство линейных стационарных систем.

Пример 2.18. Синусоидальное представление ЛС-систем

Поскольку синусоидальную последовательность легко записать как линейную комбинацию показательных, рассмотрим синусоидальный вход

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}. \quad (2.114)$$

Согласно (2.103) реакцией системы на сигнал $x_1[n] = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n}$ служит

$$y_1[n] = H(e^{j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n}, \quad (2.115)$$

а на сигнал $x_2[n] = \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}$ —

$$y_2[n] = H(e^{-j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}. \quad (2.116)$$

Следовательно, выходная последовательность имеет вид

$$y[n] = \frac{A}{2} \left(H(e^{j\omega_0}) e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0}) e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n} \right). \quad (2.117)$$

Если отсчеты последовательности $h[n]$ вещественны, то можно доказать (см. задачу 2.71), что $H(e^{-j\omega_0}) = H^*(e^{j\omega_0})$. Следовательно,

$$y[n] = A|H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \varphi + \theta), \quad (2.118)$$

где $\theta = \angle H(e^{j\omega_0})$ — фаза КЧХ системы при частоте ω_0 , или значение фазо-частотной характеристики (ФЧХ) при $\omega = \omega_0$.

В случае идеальной задержки $|H(e^{j\omega_0})| = 1$ и $\theta = -\omega_0 n_d$, как мы убедились в примере 2.17. Следовательно,

$$y[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi - \omega_0 n_d) = A \cos(\omega_0(n - n_d) + \varphi), \quad (2.119)$$

что согласуется с результатом, непосредственно полученным из определения ИСЗ. \square

По существу, понятие КЧХ для непрерывных и дискретных линейных стационарных систем одно и то же. Однако имеет место и яркое отличие, которое заключается в том, что КЧХ дискретных линейных стационарных систем — всегда 2π -периодичная функция от частоты ω . Чтобы осознать этот факт, подставим $\omega + 2\pi$ в уравнение (2.102).

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j(\omega+2\pi)n}. \quad (2.120)$$

Учитывая, что $e^{\pm j2\pi n} = 1$ при целых n , получаем

$$e^{-j(\omega+2\pi)n} = e^{-j\omega n} e^{-j2\pi n} = e^{-j\omega n}.$$

Следовательно,

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = H(e^{j\omega}) \quad (2.121)$$

и в более общем виде

$$H(e^{j(\omega+2\pi r)}) = H(e^{j\omega}), \quad r \in \mathbb{Z}. \quad (2.122)$$

Иными словами, $H(e^{j\omega})$ — 2π -периодическая функция. Заметим, что этот факт очевиден в случае ИСЗ, поскольку $e^{-j(\omega+2\pi)n_d} = e^{-j\omega n_d}$ при целом n_d .

Причина периодичности непосредственно связана с нашим предыдущим замечанием о том, что последовательности

$$\{e^{j\omega n}\} \quad \text{и} \quad \{e^{j(\omega+2\pi)r}\}, \quad -\infty < n < \infty,$$

неотличимы друг от друга. Поскольку значения этих последовательностей совпадают при всех целых n , система должна на них реагировать одинаково. Именно поэтому выполнено равенство (2.121).

Так как функция $H(e^{j\omega})$ 2π -периодична, а частоты ω и $\omega + 2\pi$ неотличимы друг от друга, нам достаточно выяснить значения $H(e^{j\omega})$ на полуинтервале длины 2π , например $0 \leq \omega < 2\pi$ или $-\pi < \omega \leq \pi$, и по периодичности определить КЧХ всюду вне указанного полуинтервала. Для простоты и согласованности с непрерывным случаем функцию $H(e^{j\omega})$ удобно задавать на полуинтервале $-\pi < \omega \leq \pi$. При таком выборе периода *нижними частотами* называются частоты, близкие к нулю, а *верхними* — частоты, лежащие около $\pm\pi$. Вспоминая, что частоты, отличающиеся на величины, кратные 2π , неотличимы друг от друга, предыдущее утверждение можно сформулировать следующим образом: *нижние* частоты близки четным кратным π , в то время как *верхние* — к нечетным кратным π , что согласуется с обсуждением этого вопроса на с. 35.

Пример 2.19. Идеальные частотно-избирательные фильтры

Важный класс линейных стационарных систем включает в себя системы, для которых импульсная характеристика равна единице над определенными промежутками частот и нулю в остальной области. Такую характеристику имеют идеальные частотно-избирательные фильтры. КЧХ идеального фильтра нижних частот показана на рис. 2.17, а). Ввиду естественной периодичности она имеет вид характеристики многополосного фильтра, поскольку частоты, близкие к нулю, невозможно отличить от тех, которые близки к 2π . В действительности, фильтр пропускает только низкие частоты и задерживает верхние. Поскольку КЧХ полностью определяется своим поведением на полуинтервале $-\pi < \omega \leq \pi$, характеристику идеального фильтра нижних частот более правильно показывать только на этом полуинтервале, как на рис. 2.17, б). Ясно, что вне этого интервала КЧХ повторяется периодично с периодом 2π . КЧХ идеальных фильтров (задержки, пропускающего и верхних частот) представлены на рис. 2.18. \square

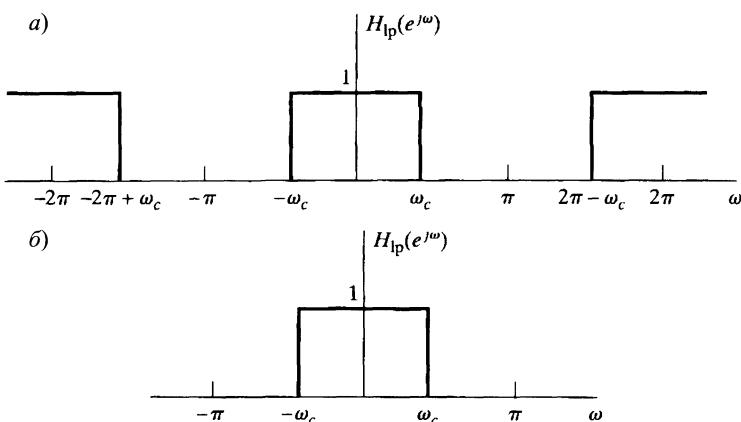


Рис. 2.17. Идеальный фильтр нижних частот: а) периодичность; б) один период КЧХ

Пример 2.20. КЧХ скользящего среднего

Импульсная реакция скользящего среднего из примера 2.4 равна

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Следовательно, его КЧХ имеет вид

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{n=-M_1}^{M_2} e^{-j\omega n}. \quad (2.123)$$

Соотношение (2.123) может быть записано более компактно, если учесть формулу суммы членов геометрической прогрессии (2.49), а именно

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{e^{j\omega M_1} - e^{-j\omega(M_2+1)}}{1 - e^{-j\omega}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{e^{j\omega(M_1+M_2+1)/2} - e^{-j\omega(M_1+M_2+1)/2}}{1 - e^{-j\omega}} e^{-j\omega(M_2-M_1+1)/2} = \\
 &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{e^{j\omega(M_1+M_2+1)/2} - e^{-j\omega(M_1+M_2+1)/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} e^{-j\omega(M_2-M_1)/2} = \\
 &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{\sin(\omega(M_1 + M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(M_2-M_1)/2}.
 \end{aligned}$$

Подводя итог преобразованиям, запишем окончательную формулу:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{\sin(\omega(M_1 + M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(M_2-M_1)/2}. \quad (2.124)$$

Модуль и аргумент частотной характеристики (т. е. АЧХ и ФЧХ) для случая $M_1 = 0$ и $M_2 = 4$ представлены на рис. 2.19. Заметим, что $H(e^{j\omega})$ периодична, как и должно быть в случае дискретных систем. Кроме того, модуль $|H(e^{j\omega})|$ резко уменьшается к «верхним частотам», а $\angle H(e^{j\omega})$, т. е. ФЧХ ведет себя кусочно-линейно с изменением ω . Это ослабление верхних частот говорит о том, что система является грубым приближением к фильтру нижних частот, что согласуется с интуитивным представлением о поведении скользящего среднего. \square

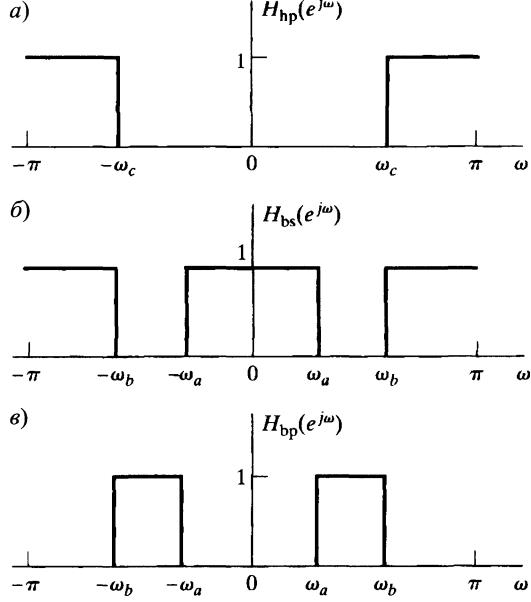


Рис. 2.18. Идеальные частотно-избирательные фильтры: a) фильтр верхних частот; б) фильтр полосно-задерживающий; в) фильтр полосовой

2.7.2. Мгновенно поданный экспоненциальный сигнал

Мы видели, что комплексная экспоненциальная последовательность вида $e^{j\omega n}$, $-\infty < n < \infty$, поданная на вход линейной стационарной системы, порождает выходную последовательность $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$. Модель сигнала, отличная от нуля на

всем множестве целых чисел, с практической точки зрения может показаться неприемлемой. Однако, как мы убедимся в следующем параграфе, последовательности такого типа имеют большое значение для математического описания широкого множества сигналов, включая и те, которые определены только на конечных подмножествах целых чисел. Даже при этих условиях мы сможем получить дополнительную информацию о линейных стационарных системах, рассматривая входные последовательности, приближенные к возникающим на практике сигналам $x[n] = e^{j\omega n}u[n]$, т. е. комплексные экспоненты, мгновенно применяемые в произвольный момент времени, который в целях удобства мы положим здесь равным нулю. Учитывая свертку (2.55), мы видим, что соответствующая реакция линейной стационарной детерминированной системы с импульсной характеристики $h[n]$ имеет вид

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \left(\sum_{k=0}^n h[k]e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n}, & n \geq 0. \end{cases}$$

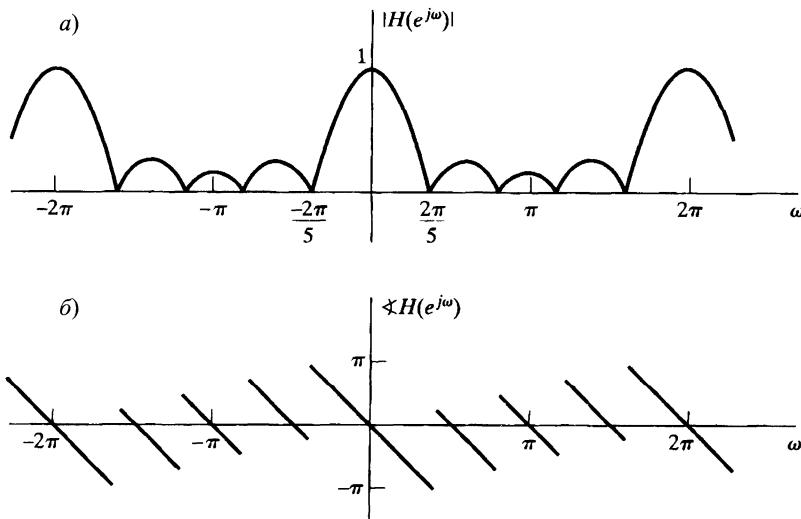


Рис. 2.19. КЧХ скользящего среднего при $M_1 = 0$ и $M_2 = 4$: а) модуль (АЧХ); б) аргумент (Φ ЧХ)

При $n \geq 0$ выходную последовательность можно переписать как

$$\begin{aligned} y[n] &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} = \\ &= H(e^{j\omega})e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n}. \end{aligned} \tag{2.125}$$

Таким образом, $y[n]$ — сумма двух последовательностей $y_{ss}[n]$ и $y_t[n]$, где

$$y_{ss}[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

называется *установившейся реакцией* системы, которая идентична отклику системы на входную последовательность $e^{j\omega n}$, определенную при всех n . Второе слагаемое,

$$y_t[n] = - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n},$$

является последовательностью, отличной от собственной функции. Оно называется *кратковременной реакцией* системы, поскольку ясно, что в некоторых случаях эта реакция может приближаться к нулю. Чтобы найти условия, при которых наше замечание верно, рассмотрим размер второго члена. Его модуль ограничен сверху:

$$|y_t[n]| = \left| \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |h[k]|. \quad (2.126)$$

Отсюда, при ограниченной длительности импульсной характеристики, т. е. если $h[n] = 0$ всюду, кроме отрезка $0 \leq n \leq M$, то $y_t[n] = 0$ при $n > M - 1$ и

$$y[n] = y_{ss}[n] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \quad \text{при } n > M - 1.$$

Когда импульсная характеристика имеет неограниченную длительность, переходная реакция системы не исчезает мгновенно, но если отсчеты импульсной характеристики стремятся к нулю при возрастании n , то $y_t[n]$ тоже будет стремиться к нулю. Заметим, что неравенство (2.126) можно переписать в виде

$$|y_t[n]| = \left| \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]|. \quad (2.127)$$

Таким образом, модуль кратковременной реакции ограничен суммой *всех* отсчетов импульсной характеристики. Если сумма в правой части этого неравенства ограничена, т. е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| < \infty,$$

то система устойчива. Из соотношения (2.127) следует, что у устойчивых систем кратковременная реакция должна быть бесконечно малой при $n \rightarrow \infty$. Итак, достаточным условием затухания кратковременной реакции является устойчивость системы.

На рис. 2.20 показана вещественная часть комплексного экспоненциального сигнала с частотой $\omega = 2\pi/10$. Черными точками обозначены отсчеты $x[n]$, мгновенно примененной комплексной экспоненты, а маленькими кружочками — «отсутствующие» отсчеты ее продолжения влево. Незаполненные кружочки обозначают отсчеты импульсной характеристики $h[n - k]$, рассматриваемой как функция от k при $n = 8$. Ясно, что в случае конечности импульсной характеристики (рис. 2.20, a)) отклик системы будет состоять только из установившейся компоненты реакции при $n \geq 8$, в то время как при бесконечной импульсной характеристике «отсутствующие» отсчеты будут становиться все меньше и меньше при возрастании n , благодаря затухающей природе импульсной реакции.

Устойчивость системы тоже является достаточным условием существования КЧХ. Действительно, в общей ситуации

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| e^{-j\omega k} \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|.$$

Поэтому неравенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

обеспечивает сходимость ряда с суммой $H(e^{j\omega})$. Неудивительно, что условие существования КЧХ совпадает с условием доминирования установившейся реакции системы. Действительно, комплексную экспоненту, определенную при всех n , можно представлять себе как сигнал, примененный в момент $n = -\infty$. Свойство, благодаря которому экспонента является собственной функцией системы, зависит от устойчивости системы, поскольку при конечных n кратковременная реакция должна быть равна нулю, так что мы видим лишь установившуюся реакцию $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ почти для всех конечных n .

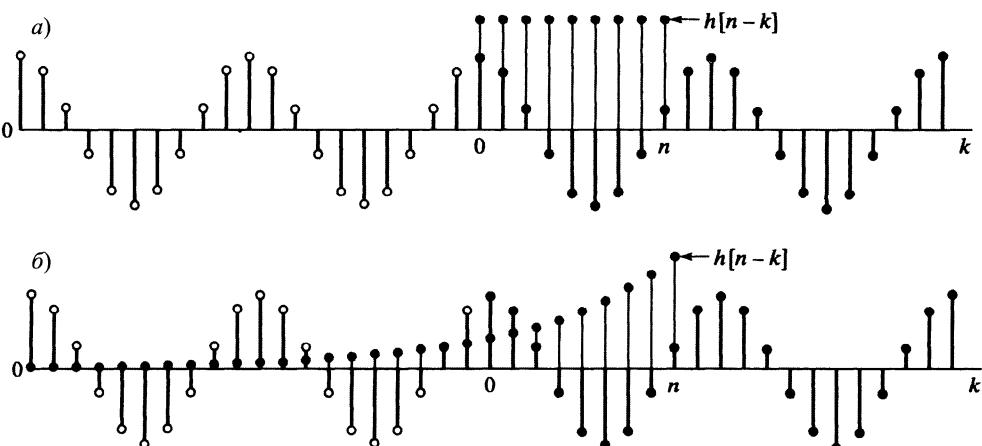


Рис. 2.20. Вещественная часть мгновенно примененной комплексной экспоненциальной последовательности: а) с импульсной характеристикой ограниченной длительности; б) с импульсной характеристикой неограниченной длительности

2.8. Преобразование Фурье

Одно из преимуществ частотного представления линейных стационарных систем заключается в том, что интерпретация их поведения, аналогичная сделанной в примере 2.20, обычно получается довольно легко. Мы детально исследуем этот вопрос в главе 5, а сейчас вернемся к задаче о представлении (2.112) произвольного сигнала.

Многие из последовательностей выражаются через интеграл Фурье вида

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad (2.128)$$

где

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}. \quad (2.129)$$

Формулы (2.128) и (2.129) называют *представлением*, или *преобразованием Фурье*, а саму функцию $X(e^{j\omega})$ часто называют *Фурье-образом* последовательности $x[n]$. Формула (2.128), *обратное преобразование Фурье*, представляет $x[n]$ как суперпозицию бесконечно малых комплексных синусоид

$$\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega,$$

где ω принимает значения на интервале длины 2π , а $X(e^{j\omega})$ определяется тем, какой вклад в суперпозицию вносит каждая синусоидальная компонента. Хотя ω в соотношении (2.128) изменяется в промежутке от $-\pi$ до $+\pi$, его можно заменить на любой сегмент длины 2π . *Преобразование Фурье*¹ (2.129) задает правило, вычисляющее $X(e^{j\omega})$ по отсчетам последовательности $x[n]$, т. е. позволяет анализировать $x[n]$ с учетом вклада каждой частотной компоненты, формирующей последовательность посредством (2.128).

Фурье-образ — комплекснозначная функция от ω . Как и КЧХ, ее можно записать в алгебраической или показательной форме:

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}), \quad (2.130)$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}. \quad (2.131)$$

Величины $|X(e^{j\omega})|$ и $\angle X(e^{j\omega})$ — соответственно *модуль* и *фаза* Фурье-образа. Первую из них называют иногда *амплитудным спектром*, а вторую — *фазовым спектром*. Фурье-образ часто также называют *спектром Фурье* или просто *спектром*².

Равенство (2.131) неоднозначно определяет фазовый спектр, так как при любом ω к фазе можно добавить $2\pi k$ с $k \in \mathbb{Z}$, не меняя значений комплексной экспоненты. Если нам важна однозначность, то будем считать, что $\angle X(e^{j\omega})$ лежит между $-\pi$ и π , и обозначать этот угол через³ $\text{ARG}[X(e^{j\omega})]$. В том случае, когда нам предпочтительнее рассматривать фазу как непрерывную функцию от ω , определенную на промежутке $(0, 2\pi)$, мы будем обозначать ее через $\arg[X(e^{j\omega})]$.

Сравнивая формулы (2.102) и (2.129), можно увидеть, что КЧХ линейной стационарной системы не что иное, как Фурье-образ ее импульсной характеристики. Следовательно, импульсная характеристика восстанавливается из КЧХ с помощью обратного преобразования Фурье:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (2.132)$$

¹Иногда мы будем называть формулу (2.129) дискретизованным по времени преобразованием Фурье, что является более точным термином, или просто ДВПФ, особенно когда его будет необходимо отличить от непрерывного преобразования Фурье.

²Левую часть формулы (2.129) в российской традиции называют спектральной функцией. — Примеч. перев.

³Главное значение аргумента комплексного числа. — Примеч. перев.

Как уже было отмечено, КЧХ является периодической функцией. Аналогично, ее Фурье-образ — тоже 2π -периодическая функция. Действительно, уравнение (2.129) записано в виде ряда Фурье непрерывной периодической функции $X(e^{j\omega})$, а соотношение (2.128), выражающее последовательность $x[n]$ через периодическую функцию $X(e^{j\omega})$, является интегралом, который используется для определения коэффициентов ряда Фурье. Уравнения (2.128) и (2.129) фокусируют наше внимание на представлении последовательности $x[n]$. Тем не менее полезно знать о эквивалентности между рядом Фурье, представляющим непрерывную периодическую функцию, и преобразованием Фурье, представляющим дискретный сигнал, поскольку все известные свойства ряда Фурье можно легко переформулировать для Фурье-образа последовательности.

Мы пока еще не показали явным образом, что формулы (2.128) и (2.129) действительно взаимно обратны, но выяснили, что обширный класс сигналов может быть представлен в виде выражения (2.128). Чтобы продемонстрировать, что интеграл (2.128) действительно служит обратным преобразованием к сумме (2.129), мы можем найти $X(e^{j\omega})$, опираясь на определение (2.129), и подставить результат в формулу (2.128). Итак, рассмотрим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n} d\omega = \hat{x}[n]. \quad (2.133)$$

Нам нужно показать, что $\hat{x}[n] = x[n]$, если $X(e^{j\omega})$ определена формулой (2.129). Заметим, что индекс суммирования был изменен на m , чтобы отличать его от переменной в уравнении (2.128). Если бесконечный ряд в формуле (2.133) сходится равномерно на множестве определения ω , то его можно почленно проинтегрировать, т. е.

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega \right). \quad (2.134)$$

Вычисляя интеграл в круглых скобках, получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega = \frac{\sin \pi(n-m)}{\pi(n-m)} = \delta[n-m] = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \delta[n-m] = x[n],$$

что и нужно было доказать.

Вопрос о представимости сигнала формулой (2.128) равносителен вопросу о сходимости ряда (2.129), точнее, нас интересуют условия, при которых ряд (2.129) сходится, т. е.

$$|X(e^{j\omega})| < \infty, \quad \forall \omega,$$

где $X(e^{j\omega})$ — предел при $M \rightarrow \infty$ конечных сумм

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{M} x[n] e^{-j\omega n}. \quad (2.135)$$

Достаточное условие сходимости можно найти следующим образом:

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |e^{-j\omega n}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty.$$

Таким образом, для абсолютно суммируемой последовательности $x[n]$ Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ определен на всей числовой прямой. Более того, в этом случае по признаку Вейерштрасса можно показать, что соответствующий ряд равномерно сходится к непрерывной функции от ω . Поскольку устойчивые последовательности абсолютно суммируемы по определению, то для них преобразование Фурье имеет смысл. Кроме того, отсюда следует, что любая устойчивая система имеет конечную непрерывную КЧХ.

Итак, абсолютная суммируемость последовательности является достаточным условием существования преобразования Фурье. В примерах 2.17 и 2.20 мы уже нашли дискретизованное по времени преобразование Фурье последовательностей $\delta[n - n_d]$ и $\frac{u[n+M_1] - u[n-M_2-1]}{M_1 + M_2 + 1}$. Эти последовательности абсолютно суммируемы, поскольку имеют лишь конечное число ненулевых членов. Ясно, что любая последовательность конечной длины (с конечным числом ненулевых членов) абсолютно суммируема и для нее можно найти Фурье-образ. В контексте линейных стационарных систем любая КИХ-система должна быть устойчивой, и потому она имеет конечную непрерывную КЧХ. Если последовательность имеет бесконечную длину (т. е. бесконечное число ненулевых членов), нам необходимо исследовать сходимость бесконечного ряда. Следующий пример иллюстрирует этот случай.

Пример 2.21. Абсолютная суммируемость мгновенно примененной экспоненты

Пусть $x[n] = a^n u[n]$. Фурье-образ этой последовательности имеет вид

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}},$$

если $|a| < 1$. Очевидно, это неравенство является критерием абсолютной суммируемости последовательности $x[n]$, т. е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1 - |a|} < \infty, \quad \text{если и только если } |a| < 1. \quad \square \quad (2.136)$$

Абсолютная суммируемость — достаточное условие для существования преобразования Фурье, которое также гарантирует равномерную сходимость. Некоторые последовательности не принадлежат классу абсолютно суммируемых, но

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty. \quad (2.137)$$

Такие последовательности (суммируемые квадратом) можно представлять с помощью преобразования Фурье, если мы откажемся от равномерной сходимости ряда, определяющего $X(e^{j\omega})$. Более точно, в этом случае мы имеем сходимость

в среднеквадратичном, т. е. если

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (2.138)$$

и

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{M} x[n]e^{-j\omega n}, \quad (2.139)$$

то сходимость в среднеквадратичном означает, что

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0. \quad (2.140)$$

Другими словами, погрешность $|X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|$ может и не стремиться к нулю при $M \rightarrow \infty$ при каких-то конкретных значениях ω , но общая «энергия» убывает до нуля с неограниченным ростом M .

Пример 2.22. Суммируемость с квадратом для идеального фильтра нижних частот

Определим импульсную характеристику идеального фильтра нижних частот из примера 2.19. Его КЧХ, равная на промежутке $[-\pi, \pi]$

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi, \end{cases} \quad (2.141)$$

вне этого интервала вычисляется по периодичности. Импульсная характеристика $h_{lp}[n]$ находится с помощью преобразования Фурье (2.128):

$$\begin{aligned} h_{lp}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi j n} e^{j\omega n} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{2\pi j n} (e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) = \\ &= \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty. \end{aligned} \quad (2.142)$$

Мы заметили, что, поскольку $h_{lp}[n] \neq 0$ при $n < 0$, идеальный фильтр нижних частот недетерминирован. Кроме того, последовательность $h_{lp}[n]$ не является абсолютно суммируемой. Члены последовательности, конечно, стремятся к нулю при неограниченном возрастании n , но не быстрее, чем $\frac{1}{n}$. Это происходит в результате разрыва функции $H_{lp}(e^{j\omega})$ в точке $\omega = \omega_c$. Поскольку последовательность $h_{lp}[n]$ не является абсолютно суммируемой, ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$$

на всей числовой прямой сходится неравномерно. Чтобы лучше прочувствовать этот факт, рассмотрим

$$H_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{M} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}. \quad (2.143)$$

Можно показать, что $H_M(e^{j\omega})$ представляется в интегральной форме как

$$H_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\sin((2M+1)(\omega - \theta)/2)}{\sin(\omega - \theta)/2} d\theta.$$

График функции $H_M(e^{j\omega})$ представлен на рис. 2.21 для нескольких значений M . Заметим, что при возрастании M графики заметно пульсируют при $\omega = \omega_c$ (такое явление часто называют эффектом Гиббса), но амплитуда пульсации не уменьшается с ростом M . Фактически, можно показать, что максимальная амплитуда пульсаций не стремится к нулю при $M \rightarrow \infty$, но пульсации сжимаются по горизонтали к вертикальному отрезку, проведенному в точке ω_c . Итак, наш ряд сходится к разрывной функции $H_{lp}(e^{j\omega})$, но неравномерно. Однако $h_{lp}[n]$, определенная уравнением (2.142), суммируема с квадратом, и, соответственно, $H_M(e^{j\omega})$ сходится в среднеквадратичном к $H_{lp}(e^{j\omega})$, т. е.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |H_{lp}(e^{j\omega}) - H_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0.$$

Хотя погрешность между $\lim_{M \rightarrow \infty} H_M(e^{j\omega})$ и $H_{lp}(e^{j\omega})$ может показаться несущественной, поскольку эти функции отличаются лишь в точках $\omega = \pm\omega_c$, в главе 7 мы увидим, что поведение конечных сумм имеет важное значение при разработке дискретных фильтров. \square

Иногда полезно иметь что-то похожее на преобразование Фурье последовательностей, которые не являются как абсолютно суммируемыми, так и суммируемыми с квадратом. Некоторые из таких последовательностей приводятся в следующем примере.

Пример 2.23. Фурье-образ постоянной последовательности

Рассмотрим последовательность $x[n] = 1$ при всех n . Она не суммируется ни абсолютно, ни с квадратом, и ряд в формуле (2.129) в этом случае не сходится ни равномерно, ни в среднеквадратичном. Однако можно и нужно определить Фурье-образ последовательности $x[n]$ как периодическую цепочку импульсов⁴

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi r). \quad (2.144)$$

Импульсы здесь — функции от непрерывной переменной и поэтому имеют «бесконечную высоту, нулевую ширину и единичную площадь под графиком», что согласуется с тем, что ряд (2.129) расходится. Формулу (2.144) обоснованно можно называть Фурье-образом, поскольку формальная подстановка (2.144) в (2.128) дает корректный результат⁵. Пример 2.24 обобщает эту формулу. \square

⁴Импульсная функция, или δ -функция Дирака, определяется как «функция» со свойствами: $\delta(\omega) = 0$ при $\omega \neq 0$; $X(e^{j\omega})\delta(\omega) = X(e^{j0})\delta(\omega)$; $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 1$ и $\delta(\omega) * X(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$, где * обозначает свертку непрерывных функций. Подробности можно найти в работе [109].

⁵Функция Дирака в теории обобщенных функций вводится как предел бесконечной последовательности прямоугольных импульсов единичной площади с возрастающей высотой и убывающей шириной. Поэтому, используя предельный переход, формулу (2.144) можно доказать вполне корректно. — Примеч. перев.

Пример 2.24. Преобразование Фурье комплексных экспоненциальных последовательностей

Рассмотрим последовательность $x[n]$, чье преобразование Фурье — периодичная цепочка импульсов

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r). \quad (2.145)$$

Покажем, что $x[n]$ — комплексная экспонента $e^{j\omega_0 n}$. Можно предполагать, что $-\pi < \omega_0 \leq \pi$. Если в действительности ω_0 не удовлетворяет этому условию, то, перейдя к $\omega_0 + 2\pi k$ при подходящем целом k , мы попадем в нужный интервал, оставив без изменения $X(e^{j\omega})$, поскольку импульсы повторяются с периодом 2π .

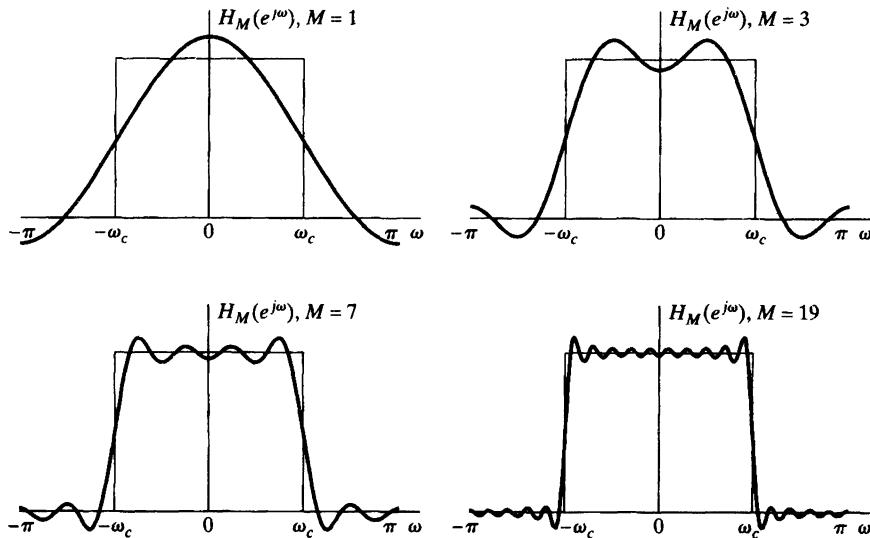


Рис. 2.21. Графики частичных сумм преобразования Фурье

Последовательность $x[n]$ можно вычислить, применив к $X(e^{j\omega})$ обратное преобразование Фурье (2.128). Интегрирование в этой формуле происходит по отрезку $[-\pi, \pi]$, следовательно, в формуле (2.145) можно ограничиться членом с $r = 0$ и записать

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega n} d\omega. \quad (2.146)$$

Из определения δ -функции вытекает, что

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \quad \forall n.$$

При $\omega_0 = 0$ получается постоянная последовательность примера 2.23. \square

Ясно, что последовательность примера 2.24 не относится ни к абсолютно суммируемым, ни к суммируемым с квадратом, и «функция» $X(e^{j\omega})$ в этом случае

принимает и бесконечные значения. Поэтому формула

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n} e^{-jn\omega} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \quad (2.147)$$

нуждается в специфической интерпретации, которая приводится в теории обобщенных функций ([86]). Опираясь на эту теорию, можно строго обобщить понятие преобразования Фурье на класс последовательностей, являющихся суммой отдельных гармоник

$$x[n] = \sum_k a_k e^{j\omega_k n}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (2.148)$$

Из примера 2.24 вытекает, что

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_k 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \quad (2.149)$$

служит приемлемым Фурье-образом последовательности $x[n]$.

Другая последовательность, не относящаяся ни к абсолютно суммируемым, ни к суммируемым с квадратом, — это единичный скачок $u[n]$. Ее Фурье-образ имеет вид

$$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{r=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + 2\pi r). \quad (2.150)$$

Обоснование этого факта мы опустим.

2.9. Симметрии преобразования Фурье

При работе с преобразованием Фурье полезно знать о том, как свойства последовательности проявляются в соответствующем Фурье-образе, и наоборот. В этом и следующем параграфах мы как раз это и будем исследовать.

Симметрии преобразования Фурье часто упрощают решение конкретных задач. Сейчас мы обсудим это важное свойство, а его доказательству посвящены задачи 2.72 и 2.73. Однако сначала мы сформулируем необходимые определения.

Сопряженно-симметричной последовательностью называется последовательность со свойством $x_e[n] = x_e^*[-n]$, а *сопряженно-кососимметричной* — последовательность, удовлетворяющая условию $x_o[n] = -x_o^*[-n]$, где $*$ обозначает комплексное сопряжение. Любая последовательность представляется в виде суммы сопряженно-симметричной и сопряженно-кососимметричной последовательностей:

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n], \quad (2.151)$$

где

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) = x_e^*[-n], \quad (2.152)$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]) = -x_o^*[-n]. \quad (2.153)$$

Вещественнонозначную сопряженно-симметричную последовательность, т. е. последовательность со свойством $x_e[n] = x_e[-n]$, называют *четной*, а вещественнонозначную сопряженно-кососимметричную ($x_e[n] = -x_e[-n]$) — *нечетной*.

Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ тоже можно разложить в сумму сопряженно-симметричной и сопряженно-кососимметричной частей:

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}), \quad (2.154)$$

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} (X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})), \quad (2.155)$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} (X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})). \quad (2.156)$$

Подставляя $-\omega$ вместо ω в формулы (2.155) и (2.156), убеждаемся, что $X_e(e^{j\omega})$ — сопряженно-кососимметричная, а $X_o(e^{j\omega})$ — сопряженно-симметричная функции, т. е.

$$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega}), \quad (2.157)$$

$$X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega}). \quad (2.158)$$

Вещественнонозначную сопряженно-симметричную функцию называют *четной*, а сопряженно-кососимметричную — *нечетной*.

Свойства симметрии преобразования Фурье сведены в табл. 2.1. Первые шесть свойств таблицы справедливы для общих последовательностей $x[n]$ с Фурье-образом $X(e^{j\omega})$. Свойства 1 и 2 рассматриваются в задаче 2.72. Свойство 3 следует из первых двух вместе с тем фактом, что Фурье-образ суммы последовательностей равен сумме Фурье-образов слагаемых. Более конкретно, Фурье-образ последовательности $\operatorname{Re}\{x[n]\} = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[n])$ является сопряженно-симметричной частью функции $X(e^{j\omega})$, или $X_e(e^{j\omega})$. Аналогично, Фурье-образ $j \operatorname{Im}\{x[n]\} = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[n])$ является сопряженно-кососимметричной частью $X_o(e^{j\omega})$, что отмечено в свойстве 4. Исследуя преобразование Фурье сопряженно-симметричной и сопряженно-кососимметричной частей последовательности $x[n]$, можно легко проверить свойства 5 и 6.

Для вещественнонозначных последовательностей $x[n]$ перечисленные в табл. 2.1 свойства получаются особенно просто и очень полезны. Более конкретно, Фурье-образ вещественнонозначной последовательности сопряженно-симметричен, т. е. $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (свойство 7). Выразив $X(e^{j\omega})$ через вещественную и мнимую части

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}), \quad (2.159)$$

мы получим свойства 8 и 9 из свойства 7:

$$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega}), \quad (2.160)$$

$$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega}). \quad (2.161)$$

Таким образом, вещественная часть Фурье-образа вещественнонозначной последовательности — четная функция, а мнимая — нечетная. Аналогично, записывая $X(e^{j\omega})$ в показательной форме

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}, \quad (2.162)$$

можно показать, что модуль Фурье-образа $|X(e^{j\omega})|$ вещественнонозначной после-

довательности является четной функцией от ω , а его фаза $\triangleleft X(e^{j\omega})$ — нечетной (свойства 10 и 11). Кроме того, при преобразовании Фурье вещественноненеизменных последовательностей четная часть $x[n]$ переходит в $X_R(e^{j\omega})$, а нечетная — в $jX_I(e^{j\omega})$ (свойства 12 и 13).

Таблица 2.1. Свойства симметрии преобразования Фурье

Последовательность $x[n]$	Фурье-образ $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $\operatorname{Re}\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega}))$
4. $j \operatorname{Im}\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega}))$
5. $x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$	$X_R(e^{j\omega}) = \operatorname{Re}\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$	$jX_I(e^{j\omega}) = j \operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\}$
Следующие свойства справедливы лишь для вещественных последовательностей	
7. $x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
8. $x[n]$	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$
9. $x[n]$	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$
10. $x[n]$	$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $
11. $x[n]$	$\triangleleft X(e^{j\omega}) = -\triangleleft X(e^{-j\omega})$
12. $x_e[n]$	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$	$jX_I(e^{j\omega})$

Пример 2.25. Иллюстрация симметрий преобразования Фурье

Вернемся к примеру 2.21, где мы показали, что Фурье-образ вещественной последовательности $x[n] = a^n u[n]$ при $|a| < 1$ равен

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}. \quad (2.163)$$

Из свойств комплексных чисел вытекают соотношения:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = X^*(e^{-j\omega}) \quad (\text{свойство 7});$$

$$X_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - a \cos \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} = X_R(e^{-j\omega}) \quad (\text{свойство 8});$$

$$X_I(e^{j\omega}) = \frac{-a \sin \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} = -X_I(e^{-j\omega}) \quad (\text{свойство 9});$$

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{\frac{1}{1 + a^2 - 2a \cos \omega}} = |X(e^{-j\omega})| \quad (\text{свойство 10});$$

$$\triangleleft X(e^{j\omega}) = \operatorname{ctg} \left(\frac{-a \sin \omega}{1 - a \cos \omega} \right) = -\triangleleft X(e^{-j\omega}) \quad (\text{свойство 11}).$$

Эти функции изображены на рис. 2.22 при $a > 0$, а именно при $a = 0,75$ и $a = 0,5$. В задаче 2.43 мы будем исследовать графики этих функций при $a < 0$. \square

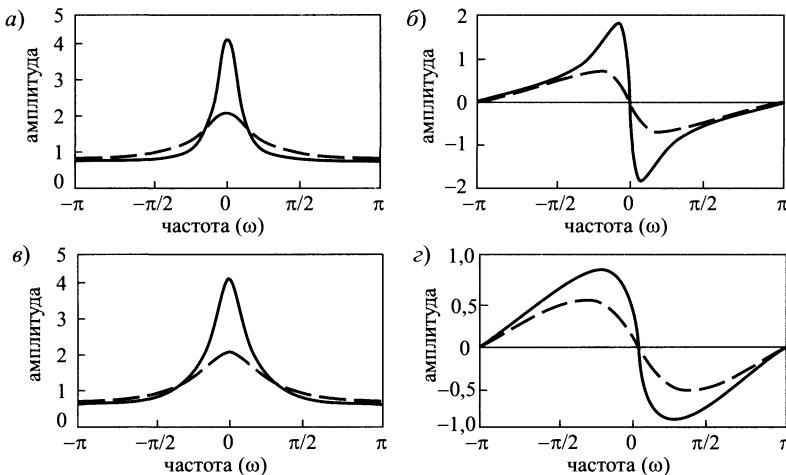


Рис. 2.22. КЧХ системы с импульсной характеристикой $h[n] = a^n u[n]$ при $a > 0$, $a = 0,75$ (сплошная кривая) и $a = 0,5$ (штриховая кривая): а) вещественная часть; б) мнимая часть; в) амплитуда; г) фаза

2.10. Теоремы о преобразовании Фурье

Существует ряд полезных теорем, говорящих о соотношениях между операциями над последовательностями и их Фурье-образами. Как мы увидим, по большей части эти утверждения аналогичны соответствующим теоремам о непрерывных сигналах и их Фурье-образах. Для облегчения формулировок введем следующие обозначения:

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}; \quad x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\}; \quad x[n] = \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}).$$

Иными словами, буквой \mathcal{F} мы будем обозначать операцию преобразования Фурье, а символом \mathcal{F}^{-1} — обратную операцию. Некоторые факты мы сформулируем без доказательства, оставив их проверку в качестве упражнения (задача 2.74), поскольку оно, как правило, использует простейшие преобразования сумм и интегралов. Теоремы этого параграфа сведены в табл. 2.2.

2.10.1. Линейность преобразования Фурье

Если $x_1[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(e^{j\omega})$ и $x_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_2(e^{j\omega})$, то непосредственно из определения преобразования Фурье и линейности интеграла следует, что

$$ax_1[n] + bx_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}). \quad (2.164)$$

2.10.2. Временной и частотный сдвиги

Если $x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$, то при временной задержке сигнала преобразование Фурье последовательности меняется по следующему правилу:

$$x[n - n_d] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega}), \quad (2.165)$$

что легко проверяется простой заменой параметра суммирования. Прямая подстановка доказывает следующий результат о частотном сдвиге:

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j(\omega-\omega_0)}). \quad (2.166)$$

Таблица 2.2. Теоремы о преобразовании Фурье

Последовательности $x[n]$ и $y[n]$	Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ и $Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
2. $x[n - n_d]$, $n_d \in \mathbb{Z}$	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
5. $nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$
Теоремы Парсеваля	
8.	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$
9.	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega}) d\omega$

2.10.3. Обращение времени

Если $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$, то при симметричном отражении последовательности относительно нуля имеем

$$x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{-j\omega}). \quad (2.167)$$

Для вещественноненулевой последовательности эту формулу можно переписать в виде

$$x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(e^{j\omega}). \quad (2.168)$$

2.10.4. Дифференцирование по частоте

Пусть $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$. Тогда, взяв производную интеграла Фурье по частоте, получим

$$nx[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}. \quad (2.169)$$

2.10.5. Теорема Парсеваля

Пусть $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$. Тогда

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega. \quad (2.170)$$

Функция $|X(e^{j\omega})|^2$ называется *спектральной плотностью энергии*, поскольку она показывает, как энергия распределена по частотной области. Конечно, спектральная плотность энергии определена лишь для сигналов с конечной энергией. Более общая формулировка теоремы Парсеваля приведена в задаче 2.77.

2.10.6. Теорема о свертке

Пусть $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$ и $h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(e^{j\omega})$. Тогда если

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n], \quad (2.171)$$

то

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}). \quad (2.172)$$

Иначе говоря, Фурье-образ свертки последовательностей равен произведению Фурье-образов сворачиваемых компонент. Заметим, что утверждение о временному сдвиге является частным случаем теоремы о свертке, поскольку

$$\delta[n - n_d] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega n_d}, \quad (2.173)$$

и, если $h[n] = \delta[n - n_d]$, то $y[n] = x[n] * \delta[n - n_d] = x[n - n_d]$. Следовательно,

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} \quad \text{и} \quad Y(e^{j\omega}) = (e^{-j\omega n_d})X(e^{j\omega}).$$

Формальный вывод теоремы о свертке легко получается применением определения преобразование Фурье к $y[n]$ в формуле (2.171). Этот же результат можно интерпретировать как прямое следствие того факта, что комплексные экспоненты являются собственными функциями линейных стационарных систем. Напомним, что $H(e^{j\omega})$ — КЧХ линейной стационарной системы с импульсной характеристикой $h[n]$. Кроме того, если $x[n] = e^{j\omega n}$, то $y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$. Иными словами, комплексные экспоненты — собственные функции линейных стационарных систем с собственным значением $H(e^{j\omega})$, совпадающим с Фурье-образом последовательности $h[n]$. По определению интеграла дискретизованное по времени преобразование Фурье, это представление последовательности $x[n]$ в виде суперпозиции бесконечного числа комплексных экспонент, т. е.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_k X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n} d\omega.$$

По определению собственных функций с учетом принципа суперпозиции, соответствующая реакция системы имеет вид

$$\begin{aligned} y[n] &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_k H(e^{jk\Delta\omega})X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega, \end{aligned}$$

откуда

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}),$$

что и утверждается в теореме.

2.10.7. Модуляция, или теорема о периодической свертке

Если $x[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$ и $w[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} W(e^{j\omega})$, а

$$y[n] = x[n]w[n], \quad (2.174)$$

то

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta. \quad (2.175)$$

Правая часть уравнения (2.175) является *периодической сверткой*, т. е. сверткой двух периодических функций, промежуток интегрирования в которой совпадает с периодом подынтегральных функций.

Двойственность в большинстве теорем, касающихся преобразования Фурье, особенно бросается в глаза при сравнении теоремы о свертке с теоремой о модуляции. Однако, в отличие от непрерывного случая, когда эта двойственность является полной, в дискретном случае она возникает по той причине, что преобразование Фурье получается в результате суммирования, тогда как в непрерывном случае — оно итог интегрирования периодических функций. Хотя при непрерывном времени мы можем утверждать, что свертка во временной области соответствует произведению в частотной, и наоборот, при дискретном времени это утверждение должно быть несколько видоизменено. Более точно, дискретная свертка последовательностей эквивалента произведению соответствующих периодических Фурье-образов, а произведение последовательностей — периодической свертке их преобразований Фурье.

Теоремы этого параграфа и несколько стандартных пар, связанных преобразованием Фурье, представлены в табл. 2.2 и 2.3. Таблицы очень полезны при вычислении прямого и обратного преобразования Фурье. Зачастую последовательность можно представить в виде комбинации таких последовательностей, Фурье-образ которых известен, а затем, опираясь на теоремы и известные пары, можно вычислить преобразование исходной последовательности. Примеры 2.26–2.30 иллюстрируют этот метод.

Пример 2.26. Вычисление преобразования Фурье с использованием таблиц 2.2 и 2.3

Допустим, нам нужно найти Фурье-образ последовательности $x[n] = a^n u[n - 5]$. Это можно сделать с помощью теорем 1 и 2 табл. 2.2 и пары 4 из табл. 2.3. Начнем с сигнала $x_1[n] = a^n u[n]$, поскольку, с одной стороны, он присутствует в табл. 2.3, а с другой — довольно близок к исходному. Согласно таблице

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}. \quad (2.176)$$

Далее задержим сигнал $x_1[n]$ на 5 отсчетов, т. е. положим $x_2[n] = x_1[n - 5]$. По теореме 2 из табл. 2.2 соответствующие Фурье-образы связаны соотношением $X_2(e^{j\omega}) = e^{-j5\omega} X_1(e^{j\omega})$. Значит,

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j5\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}. \quad (2.177)$$

Теперь, умножая $x_2[n]$ на константу a^5 , мы приходим к исходному сигналу, то есть $x[n] = a^5 x_2[n]$. Линейность преобразования Фурье (теорема 1 из табл. 2.2) позволяет вычислить искомый ответ:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{a^5 e^{-j5\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}. \quad (2.178)$$

Таблица 2.3. Пары, связанные преобразованием Фурье

Последовательность	Фурье-образ
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. $1 \ (-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
4. $a^n u[n] \ (a < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
6. $(n + 1)a^n u[n] \ (a < 1)$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \sin \omega_p (n + 1)}{\sin \omega_p} u[n] \ (r < 1)$	$\frac{1}{1 - 2r \cos \omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	$\frac{\sin(\omega(M + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n + \varphi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\pi e^{j\varphi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\varphi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k))$

Пример 2.27. Поиск обратного преобразования Фурье по таблицам 2.2 и 2.3

Предположим, что

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - be^{-j\omega})}. \quad (2.179)$$

Можно было бы воспользоваться формулой (2.128) обратного преобразования Фурье, подставив в нее данную нам функцию $X(e^{j\omega})$, но, к сожалению, при этом получается довольно сложный интеграл. Однако, используя разложение рациональной дроби в сумму простейших, что мы подробно будем изучать в главе 3, можно представить $X(e^{j\omega})$ в виде

$$X(e^{j\omega}) = \frac{a}{a - b} \cdot \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} - \frac{b}{a - b} \cdot \frac{1}{1 - be^{-j\omega}}. \quad (2.180)$$

Из теоремы линейности и строки 4 табл. 2.3 следует, что

$$x[n] = \left(\frac{a}{a - b} \right) a^n u[n] - \left(\frac{b}{a - b} \right) b^n u[n]. \quad \square \quad (2.181)$$

Пример 2.28. Определение импульсной характеристики по КЧХ

С учетом 2π -периодичности КЧХ фильтра верхних частот с задержкой равна

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_d}, & \omega_c < |\omega| < \pi, \\ 0, & |\omega| < \omega_c. \end{cases} \quad (2.182)$$

Перепишем ее как

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} (1 - H_{lp}(e^{j\omega})) = e^{-j\omega n_d} - e^{-j\omega n_d} H_{lp}(e^{j\omega}),$$

где $H_{lp}(e^{j\omega})$ — 2π -периодическая функция, равная

$$\begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi. \end{cases}$$

Используя результат примера 2.22, где получено обратное преобразование Фурье от $H_{lp}(e^{j\omega})$, и свойства 1 и 2 табл. 2.2, находим

$$h[n] = \delta[n - n_d] - h_{lp}[n - n_d] = \delta[n - n_d] - \frac{\sin \omega_c(n - n_d)}{\pi(n - n_d)}. \quad \square$$

Пример 2.29. Определение импульсной характеристики разностного уравнения

Здесь мы найдем импульсную характеристику устойчивой линейной стационарной системы, сигнал которой, поданный на вход, связан с соответствующей реакцией линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n - 1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n - 1]. \quad (2.183)$$

В главе 3 мы познакомимся с z -преобразованием, более удобным для работы с разностными уравнениями. Однако в этом примере демонстрируется единый подход различных преобразований к анализу линейных систем. Для определения импульсной характеристики положим $x[n] = \delta[n]$, а через $h[n]$ обозначим импульсную характеристику, после чего уравнение (2.183) перепишется в виде

$$h[n] - \frac{1}{2}h[n - 1] = \delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n - 1]. \quad (2.184)$$

Применяя преобразование Фурье к обеим частям этого уравнения с учетом свойств 1 и 2 табл. 2.2, получим

$$H(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}e^{-j\omega} H(e^{j\omega}) = 1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}, \quad (2.185)$$

что равносильно соотношению

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \quad (2.186)$$

Теперь для определения $h[n]$ нам достаточно найти обратное новообразование Фурье для $H(e^{j\omega})$. Представим соотношение (2.186) в более удобной для этой цели форме

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \quad (2.187)$$

Из строки 4 табл. 2.3 следует, что

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

Комбинируя это соответствие со свойством 3 табл. 2.2, находим:

$$-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} -\frac{\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \quad (2.188)$$

И наконец, по линейности приходим к окончательному ответу:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]. \quad \square \quad (2.189)$$

2.11. Случайные дискретные сигналы

В предыдущих параграфах наше внимание было сосредоточено на математическом представлении дискретных сигналов и систем, а также следствиях, вытекающих из такого представления. Мы увидели, что дискретные сигналы и системы имеют представление как во временной, так и в частотной области, причем каждое из этих представлений занимает важное место в теории и практике дискретных систем обработки сигналов. До сих пор мы предполагали, что сигналы детерминированы, т. е. каждый член последовательности однозначно определен математическим выражением, таблицей данных или каким-либо другим правилом.

Во многих ситуациях процессы, генерирующие сигналы, настолько сложны, что дать точное описание получаемого сигнала невероятно трудно или неудобно, если вообще возможно. В таких случаях полезнее моделировать сигнал как стохастический процесс. В качестве примера в главе 6 мы увидим, что многие эффекты, встречающиеся в реализации алгоритмов обработки цифровых сигналов с конечной длиной регистра, могут быть представлены аддитивным шумом, т. е. стохастической последовательностью. Многие механические системы генерируют акустические или вибрационные сигналы, которые затем обрабатываются для диагностики вероятных неполадок. И такие сигналы обычно лучше всего моделируются в терминах стохастических сигналов. Речевые сигналы, обрабатываемые для автоматического распознавания или сжатия полосы частот, а также музыка, обрабатываемая для усиления, — вот еще два из большого числа примеров.

Стochasticкий сигнал рассматривается как член ансамбля дискретных сигналов, характеризующегося множеством плотностей вероятности. Более конкретно, для определенного сигнала в фиксированный момент времени амплитуда отсчета сигнала определяется подлежащей схемой вероятностей. То есть каждый индивидуальный отсчет $x[n]$ конкретного сигнала считается значением некоторой случайной величины x_n . Весь сигнал представляется совокупностью случайных величин, по одной на каждый момент времени n , $-\infty < n < \infty$. Такой набор случайных величин называют *случайным процессом*, и мы считаем, что

конкретная последовательность отсчетов $x[n]$, для $-\infty < n < \infty$, генерируется¹ случайным процессом, соответствующим сигналу. Для полного описания случайного процесса нам необходимо конкретизировать индивидуальные и совокупное распределения вероятностей всех случайных величин, участвующих в процессе.

Ключ к получению полезных результатов в рамках таких моделей сигналов лежит в описании случайных процессов в терминах средних, которые могут быть вычислены из предполагаемых вероятностных законов или установлены из наблюдения за конкретными сигналами. Поскольку случайные сигналы не являются ни абсолютно суммируемыми, ни суммируемыми с квадратом, то напрямую преобразование Фурье к ним не применимо. Многие (хотя и не все) свойства таких сигналов могут быть выражены в терминах *автокорреляционной* и *автоковариационной* последовательностей, для которых преобразование Фурье, как правило, существует. Как мы убедимся в этом параграфе, преобразование Фурье автоковариационной последовательности имеет полезную интерпретацию в терминах частотного распределения мощности в сигнале. Применение автокорреляционной последовательности и ее преобразования обладает и другим преимуществом: эффект обработки стохастического сигнала линейной дискретной системой может быть легко описан в терминах отклика системы на автоковариационную последовательность.

Далее мы будем предполагать, что читатель знаком с основными понятиями случайных процессов, таких как математическое ожидание, корреляционная и ковариационная функции, а также со спектральной плотностью мощности. Короткий обзор соответствующих понятий приведен в приложении А. Более детальное изложение теории случайных сигналов можно найти в большом количестве превосходных книг, например [35] и [112].

Главная цель этого параграфа — сформулировать конкретные результаты, которые потребуются в следующих главах. Сфокусируем внимание на стационарных в широком смысле случайных сигналах и их представлениях в контексте обработки сигналов линейной стационарной системой. Хотя для простоты мы будем предполагать, что $x[n]$ и $h[n]$ — вещественнозначные последовательности, все сформулированные ниже результаты можно обобщить на комплексный случай.

Рассмотрим устойчивую стационарную линейную систему с вещественнозначной импульсной характеристикой $h[n]$. Пусть $x[n]$ — вещественнозначная последовательность, т. е. последовательность отсчетов стационарного в широком смысле дискретного случайного процесса. Тогда отклик линейной системы на такую входную последовательность тоже является реализацией случайного процесса, связанной с поданной на вход последовательностью линейным соотношением:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]x[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k].$$

Поскольку система устойчива, то, как мы уже показали, значения $y[n]$ будут ограничены, если ограничены отсчеты $x[n]$. Вскоре мы увидим, что отклик на

¹Иными словами, конкретный случайный сигнал является *реализацией* случайного процесса. — Примеч. перев.

стационарный² сигнал такой системы тоже является стационарным. Входной сигнал может характеризоваться своим математическим ожиданием m_x и автокорреляционной функцией $\varphi_{xx}[m]$, или распределением вероятностей первого или даже второго порядка. Для многих приложений как входной, так и выходной сигнал достаточно описывать в терминах простых средних, таких как математическое ожидание, дисперсия и автокорреляция. Следовательно, нам нужно вывести соотношения между этими величинами входного и выходного сигналов.

Средние значения (математическое ожидание) входного и выходного процессов определяются как

$$m_{x_n} = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_n\}, \quad m_{y_n} = \mathcal{E}\{\mathbf{y}_n\}, \quad (2.190)$$

где $\mathcal{E}\{\cdot\}$ — математическое ожидание случайной величины. Как правило, нам не нужно будет проводить резкую грань между случайными величинами \mathbf{x}_n и \mathbf{y}_n и их конкретными значениями $x[n]$ и $y[n]$, что существенно упростит математические обозначения. Например, выражения (2.190) можно переписать в виде

$$m_x[n] = \mathcal{E}\{x[n]\}, \quad m_y[n] = \mathcal{E}\{y[n]\}. \quad (2.191)$$

Для стационарного процесса $x[n]$ математическое ожидание $m_x[n]$ реально не зависит от n , и мы будем обозначать его как m_x . Аналогично, будем употреблять обозначение m_y для математического ожидания стационарного процесса $y[n]$.

Математическое ожидание выходного процесса рассчитывается по формуле

$$m_y[n] = \mathcal{E}\{y[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \mathcal{E}\{x[n-k]\},$$

в которой мы учтем, что математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме соответствующих математических ожиданий. Так как входной процесс стационарен, то $m_x[n-k] = m_x$, и, следовательно,

$$m_y[n] = m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]. \quad (2.192)$$

Из этой формулы видно, что математическое ожидание выходного процесса тоже постоянно. Соотношение (2.192) эквивалентным образом переписывается в терминах КЧХ:

$$m_y = H(e^{j0})m_x. \quad (2.193)$$

Временно предположив, что выходной процесс нестационарен, выпишем его *автокорреляционную функцию*, считая, что входной процесс вещественен и стационарен:

$$\begin{aligned} \varphi_{yy}[n, n+m] &= \mathcal{E}\{y[n]y[n+m]\} = \mathcal{E}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[k]h[r]x[n-k]x[n+m-r]\right\} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r] \mathcal{E}\{x[n-k]x[n+m-r]\}. \end{aligned}$$

Учитывая стационарность входного процесса, получаем, что величина $\mathcal{E}\{x[n-k]x[n+m-r]\}$ зависит только от разности $(n+m-r)-(n-k) = m+k-r$.

²Далее мы будем использовать термин «стационарный» вместо «стационарный в широком смысле».

Поэтому

$$\varphi_{yy}[n, n+m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r] \varphi_{xx}[m+k-r] = \varphi_{yy}[m]. \quad (2.194)$$

Таким образом, автокорреляционная функция выходного процесса тоже зависит лишь от разности $(n+m) - n = m$, т. е. реакция линейной стационарной системы на стационарный в широком смысле сигнал является стационарной в широком смысле.

Подставив $\ell = r - k$ в равенство (2.194), получим

$$\begin{aligned} \varphi_{yy}[m] &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}[m-\ell] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]h[\ell+k] = \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}[m-\ell]c_{hh}[\ell], \end{aligned} \quad (2.195)$$

где использовано обозначение

$$c_{hh}[\ell] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]h[\ell+k]. \quad (2.196)$$

Последовательность вида $c_{hh}[\ell]$ называется *детерминированной автокорреляционной последовательностью*, или просто *автокорреляционной последовательностью* $h[n]$. Стоит подчеркнуть, что $c_{hh}[\ell]$ — автокорреляция апериодичной последовательности, т. е. последовательности с конечной энергией. Ее не следует путать с автокорреляцией случайной последовательности с бесконечной энергией. Действительно, можно показать, что $c_{hh}[\ell]$ — это просто дискретная свертка последовательностей $h[n]$ и $h[-n]$. Итак, формулу (2.195) можно интерпретировать следующим образом: автокорреляция выходного сигнала линейной системы совпадает со сверткой автокорреляцией поданного на вход сигнала и апериодичной автокорреляцией импульсной характеристики системы.

Формула (2.195) наводит на мысль, что преобразование Фурье может оказаться полезным при характеризации отклика линейной стационарной системы на стохастический сигнал. Предположим для простоты, что $m_x = 0$, т. е. автокорреляционная и автоковариационная последовательности совпадают. Тогда, обозначив через $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$, $\Phi_{yy}(e^{j\omega})$ и $C_{hh}(e^{j\omega})$ Фурье-образы последовательностей $\varphi_{xx}[m]$, $\varphi_{yy}[m]$ и $c_{hh}[\ell]$ соответственно, из формулы (2.195) получим

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = C_{hh}(e^{j\omega})\Phi_{xx}(e^{j\omega}). \quad (2.197)$$

Кроме того, формула (2.196) дает $C_{hh}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2$ или

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \Phi_{xx}(e^{j\omega}). \quad (2.198)$$

Уравнение (2.198) обосновывает термин *спектральной плотности мощности*:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{y^2[n]\} &= \varphi_{yy}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{yy}(e^{j\omega}) d\omega = \\ &= \text{средняя мощность на выходе.} \end{aligned} \quad (2.199)$$

Подставляя равенство (2.198) в формулу (2.199), имеем

$$\mathcal{E}\{y^2[n]\} = \varphi_{yy}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega. \quad (2.200)$$

Предположим, что $H(e^{j\omega})$ — идеальный полосовой фильтр, изображенный на рис. 2.18, в). Напомним, что $\varphi_{xx}[m]$ — четная последовательность. Поэтому

$$\Phi_{xx}(e) = \Phi_{xx}(e^{-j\omega}).$$

Аналогично, $|H(e^{j\omega})|^2$ — четная функция от ω . Следовательно, можно записать

$$\varphi_{yy}[0] = \text{средняя мощность на выходе} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_a}^{\omega_b} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_b}^{-\omega_a} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega. \quad (2.201)$$

Таким образом, площадь под графиком функции $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ на промежутке $\omega_a \leq \omega \leq \omega_b$ можно интерпретировать как среднеквадратическое значение полосы частот входного сигнала. Заметим, что мощность на выходе должна оставаться неотрицательной, поэтому

$$\lim_{(\omega_b - \omega_a) \rightarrow 0} \varphi_{yy}[0] \geq 0.$$

Этот результат вместе с соотношением (2.201) и тем фактом, что полоса $[\omega_a; \omega_b]$ может быть произвольно малой, влечет, что

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) \geq 0 \quad \forall \omega. \quad (2.202)$$

Следовательно, функция плотности мощности вещественного сигнала является вещественной, четной и неотрицательной.

Пример 2.30. Белый шум

Концепция белого шума чрезвычайно полезна при анализе ошибок квантования. Белым шумом называют сигнал, для которого $\varphi_{xx}[m] = \sigma_x^2 \delta[m]$. В этом примере мы предполагаем, что сигнал имеет ненулевое математическое ожидание. Спектр мощности белого шума постоянен, т. е.

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2 \quad \forall \omega.$$

Поэтому средняя мощность белого шума равна

$$\varphi_{xx}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_x^2 d\omega = \sigma_x^2.$$

Понятие белого шума также полезно при представлении случайных сигналов, чья мощность не постоянна относительно частоты. Например, случайный сигнал $y[n]$ со спектром мощности $\Phi_{yy}(e^{j\omega})$ можно считать реакцией линейной стационарной системы на белый шум. Иначе говоря, мы используем формулу (2.198) для определения системы с КЧХ $H(e^{j\omega})$, удовлетворяющей уравнению

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \sigma_x^2,$$

где σ_x^2 — средняя мощность предполагаемого белого шума. Мы подправляем среднюю мощность такого входного сигнала для получения корректной средней мощности $y[n]$. Например, предположим, что $h[n] = a^n u[n]$. Тогда

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}},$$

и мы можем оперировать со случайными сигналами, чей спектр мощности имеет вид

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = \left| \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right|^2 \sigma_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{1 + a^2 - 2a \cos \omega}. \quad \square$$

Другим важным результатом, касающимся корреляции входного и выходного сигналов линейной стационарной системы, является следующая формула:

$$\begin{aligned} \varphi_{xy}[m] &= \mathcal{E}\{x[n]y[n+m]\} = \mathcal{E}\left\{x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n+m-k]\right\} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\varphi_{xx}[m-k]. \end{aligned} \quad (2.203)$$

В этом случае взаимная корреляция между входным и выходным сигналами совпадает со сверткой импульсной характеристики и автокорреляционной последовательности входного сигнала.

Преобразование Фурье соотношения (2.203) выглядит как

$$\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\Phi_{xx}(e^{j\omega}). \quad (2.204)$$

Последняя формула имеет полезное приложение для входного сигнала, являющегося белым шумом, т. е. $\varphi_{xx}[m] = \sigma_x^2 \delta[m]$. Подставляя это равенство в выражение (2.203), получаем

$$\varphi_{xy}[m] = \sigma_x^2 h[m]. \quad (2.205)$$

Таким образом, когда на вход подается белый шум с ненулевым математическим ожиданием, взаимная корреляция между входным сигналом линейной системы и ее откликом пропорциональна импульсной характеристике системы. Аналогично, спектр мощности поданного на вход белого шума равен

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi.$$

Итак, из равенства (2.204) имеем

$$\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2 H(e^{j\omega}). \quad (2.206)$$

Другими словами, взаимный спектр мощности в этом случае пропорционален КЧХ системы. Формулы (2.205) и (2.206) могут служить основой для оценки импульсной или частотной характеристики линейных стационарных систем, если удастся определить реакцию системы на белый шум.

2.12. Краткое содержание главы

В этой главе мы изучили ряд основных определений, относящихся к дискретным сигналам и системам. Мы ввели некоторые стандартные последовательности, говорили о представлении линейной стационарной системы в терминах свертки и

получили некоторые следствия устойчивости и детерминированности системы. Мы отметили, что системы, чьи входной и выходной сигналы связаны линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами, образуют важный подкласс линейных стационарных систем. Обсуждалось рекурсивное решение таких уравнений и были введены понятия КИХ- и БИХ-систем.

Важный метод анализа и представления линейных стационарных систем связан с их представлением в частотной области. Была рассмотрена реакция системы на комплексную экспоненциальную последовательность, что позволило определить ее КЧХ. Соотношение между импульсной и частотной характеристиками мы интерпретировали как пару, связанную преобразованием Фурье.

Мы уделили внимание свойствам преобразования Фурье и свели в таблицу различные полезные пары, связанные этим преобразованием. Таблицы 2.1 и 2.2 содержат информацию о свойствах и теоремах преобразования Фурье, в то время как табл. 2.3 включает в себя Фурье-пары.

Глава заканчивается рассмотрением случайных дискретных сигналов. Основные идеи и результаты развиваются и используются в следующих главах.

Хотя материал этой главы изложен без прямых ссылок на непрерывные сигналы, важный класс задач об обработке дискретных сигналов возникает именно в связи с дискретизацией непрерывных. В главе 4 мы рассмотрим связь между непрерывными сигналами и последовательностями, полученными в результате их дискретизации.

Задачи

Обязательные задачи с ответами

- 2.1. Для каждой из следующих систем определите, является ли она (1) устойчивой, (2) детерминированной, (3) линейной, (4) стационарной, (5) системой без запоминания:
- $T(x[n]) = g[n]x[n]$, где $g[n]$ известно; б) $T(x[n]) = e^{x[n]}$;
 - $T(x[n]) = \sum_{k=n_0}^n x[k]$; г) $T(x[n]) = ax[n] + b$;
 - $T(x[n]) = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$; е) $T(x[n]) = x[-n]$;
 - ж) $T(x[n]) = x[n - n_0]$; з) $T(x[n]) = x[n] + 3u[n + 1]$.
- 2.2. а) Известно, что импульсная характеристика $h[n]$ линейной стационарной системы (ЛС-системы) равна нулю всюду вне отрезка $N_0 \leq n \leq N_1$. Кроме того, ненулевые отсчеты поданного на вход сигнала $x[n]$ расположены в промежутке $N_2 \leq n \leq N_3$. Как следствие, реакция системы равна нулю всюду, кроме некоторого сегмента $N_4 \leq n \leq N_5$. Выразите N_4 и N_5 через N_0 , N_1 , N_2 и N_3 .
- б) Пусть $x[n]$ имеет нулевые значения, кроме N последовательных отсчетов, а $h[n] = 0$, кроме M последовательных членов. Что можно сказать о максимальном числе последовательных ненулевых отсчетов $y[n]$?

- 2.3. Вычисляя свертку, найдите реакцию ЛС-системы на единичный скачок, если ее импульсная характеристика равна $h[n] = a^{-n}u[-n]$, а $0 < a < 1$.
- 2.4. Рассмотрим линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n-1].$$

Вычислите $y[n]$ при $n \geq 0$, если $x[n] = \delta[n]$ и $y[n] = 0$ при $n < 0$.

- 2.5. Детерминированная ЛС-система описывается разностным уравнением

$$y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = 2x[n-1].$$

- a) Определите однородную реакцию системы, т. е. возможный отклик системы на сигнал $x[n] = 0$ для всех n .
- б) Найдите импульсную характеристику системы.
- в) Вычислите отклик системы на единичный скачок.
- 2.6. а) Найдите КЧХ $H(e^{j\omega})$ ЛС-системы, у которой входной и выходной сигналы удовлетворяют разностному уравнению

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2].$$

б) Выпишите разностное уравнение, характеризующее систему с КЧХ

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{3}{4}e^{-j2\omega}}.$$

- 2.7. Определите, какие из сигналов являются периодическими, и установите их период.
- а) $(x[n]) = e^{j(\pi n/6)}$; б) $(x[n]) = e^{j(3\pi n/4)}$;
 в) $(x[n]) = \frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n}$; г) $(x[n]) = e^{j\pi n/\sqrt{2}}$.
- 2.8. Импульсная характеристика ЛС-системы равна $h[n] = 5(-1/2)^n u[n]$. Используя преобразование Фурье, найдите отклик системы на сигнал $x[n] = (1/3)^n u[n]$.
- 2.9. Рассмотрите разностное уравнение

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = \frac{1}{3}x[n-1].$$

- а) Что можно сказать о частотной и импульсной характеристике, реакции на единичный скачок ЛС-системы, описываемой этим разностным уравнением?
- б) Что можно сказать об общем виде однородного решения этого разностного уравнения?
- в) Рассмотрите другую систему, удовлетворяющую этому же уравнению, но не относящуюся ни к детерминированным, ни к ЛС-системам. Найдите ее реакцию на сигнал $x[n] = \delta[n]$, если известно, что $y[0] = y[1] = 1$.

- 2.10. Определите отклик ЛС-системы с импульсной характеристикиой $h[n]$ на сигнал $x[n]$, если
- $x[n] = u[n]$, $h[n] = a^n u[-n - 1]$, $a > 1$;
 - $x[n] = u[n - 4]$, $h[n] = 2^n u[-n - 1]$;
 - $x[n] = u[n]$, $h[n] = 2^{n-1} u[-n]$;
 - $x[n] = u[n] - u[n - 10]$, $h[n] = 2^n u[-n - 1]$.
- 2.11. Рассмотрите ЛС-систему с КЧХ $H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j2\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j4\omega}}$, $-\pi < \omega \leq \pi$. Определите отклик $y[n]$ системы, если входной сигнал описывается последовательностью $x[n] = \sin(\pi n/4)$.
- 2.12. Рассмотрите систему, описываемую разностным уравнением
- $$y[n] = ny[n - 1] + x[n].$$
- Известно, что она детерминирована и удовлетворяет условиям состояния покоя в начальном положении, т. е. если $x[n] = 0$ при $n < n_0$, то $y[n] = 0$ при $n < n_0$.
- Найдите все отсчеты $y[n]$, если $x[n] = \delta[n]$.
 - Является ли эта система линейной? Ответ обоснуйте.
 - Является ли эта система стационарной? Ответ обоснуйте.
- 2.13. Определите, какие из следующих дискретных сигналов являются собственными для устойчивой ЛС-системы:
- $e^{j2\pi n/3}$;
 - 3^n ;
 - $2^n u[-n - 1]$;
 - $\cos(\omega_0 n)$;
 - $(1/4)^n$;
 - $(1/4)^n u[n] + 4^n u[-n - 1]$.
- 2.14. Для следующих трех систем дано по одной паре сигнал – отклик:
- система A : $x[n] = (1/3)^n$, $y[n] = 2(1/3)^n$;
 - система B : $x[n] = (1/2)^n$, $y[n] = (1/4)^n$;
 - система C : $x[n] = (2/3)^n u[n]$, $y[n] = 4(2/3)^n u[n] - 3(1/2)^n u[n]$.
- Основываясь на этой информации, сделайте как можно более строгий вывод о системах, выбрав ответ из списка:
- система не может относиться к классу ЛС-систем;
 - система должна быть ЛС-системой;
 - система может быть ЛС-системой, причем существует ровно одна ЛС-система, у которой есть такая пара сигнал – отклик;
 - система может быть ЛС-системой, но такой парой сигнал – отклик она определена неоднозначно.
- При выборе п. (iii) этого списка определите импульсную или частотную характеристику соответствующей системы.
- 2.15. Рассмотрите систему, изображенную на рис. 2.23. Отклик ЛС-системы с импульсной характеристикиой $h[n] = \frac{1}{4^n} u[n + 10]$ умножается на единичный скачок $u[n]$ и получается отклик большой системы. Ответьте на каждый из поставленных ниже вопросов, коротко обосновав свой ответ.

- а) Является ли большая система ЛС-системой?
 б) Является ли большая система детерминированной?
 в) Является ли большая система устойчивой?

2.16. Рассмотрите следующее разностное уравнение:

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = 3x[n].$$

- а) Найдите общий вид однородного решения данного уравнения.
 б) Известно, что это уравнение характеризует как детерминированную, так и антидетерминированную ЛС-систему; найдите импульсную характеристику обеих систем.
 в) Покажите, что детерминированная ЛС-система устойчива, а антидетерминированная — нет.
 г) Найдите частное решение разностного уравнения, если $x[n] = \frac{1}{2^n}u[n]$.

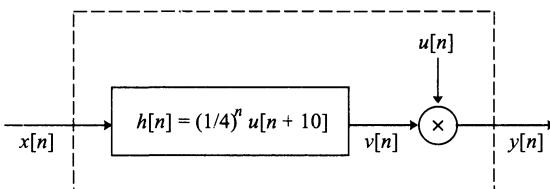


Рис. 2.23.

2.17. а) Найдите Фурье-образ последовательности

$$r[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

б) Рассмотрите последовательность

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{M} \right) \right), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Изобразите последовательность $w[n]$ и запишите ее Фурье-образ $W(e^{j\omega})$ в терминах $R(e^{j\omega})$ — Фурье-образа последовательности $r[n]$.

Указание: Выразите $w[n]$ через $r[n]$ и последовательности $e^{\pm j(2\pi n/M)}$.

в) Начертите графики функций $|R(e^{j\omega})|$ и $|E(e^{j\omega})|$ в случае $M = 4$.

2.18. Определите, какая из ЛС-систем с перечисленными ниже импульсными характеристиками является детерминированной, а какая нет.

- | | |
|---|------------------------------|
| а) $h[n] = (1/2)^n u[n];$ | б) $h[n] = (1/2)^n u[n-1];$ |
| в) $h[n] = (1/2)^{ n };$ | г) $h[n] = u[n+2] - u[n-2];$ |
| д) $h[n] = (1/3)^n u[n] + 3^n u[-n-1].$ | |

2.19. Определите, какая из ЛС-систем с перечисленными ниже импульсными характеристиками является устойчивой, а какая нет.

a) $h[n] = 4^n u[n];$

b) $h[n] = 3^n u[-n - 1];$

d) $h[n] = (3/4)^{|n|} \cos(\pi n/4 + \pi/4);$

б) $h[n] = u[n - 1] - u[n - 10];$

г) $h[n] = \sin(\pi n/3) u[n];$

е) $h[n] = 2u[n + 5] - u[n] - u[n - 5].$

- 2.20. Рассмотрите разностное уравнение, представляющее детерминированную ЛС-систему:

$$y[n] + (1/a)y[n - 1] = x[n - 1].$$

- а) Выпишите импульсную характеристику этой системы как функцию от a .
б) При каких значениях a эта система будет устойчивой?

Обязательные задачи без ответов

- 2.21. Пусть $x[n]$ — сигнал, поданный на вход линейной системы, а $y[n]$ — ее отклик на этот сигнал. Покажите, что если $x[n] = 0 \forall n$, то $y[n] = 0$ для всех n .

- 2.22. Используя свертку, найдите реакцию ЛС-системы на сигнал $x[n]$, если ее импульсная характеристика равна $h[n]$, для каждой из пар последовательностей, представленных на рис. 2.24.

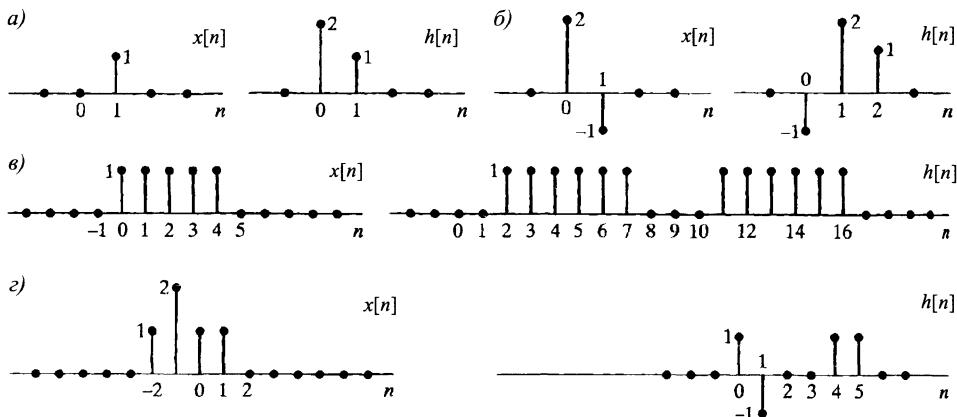
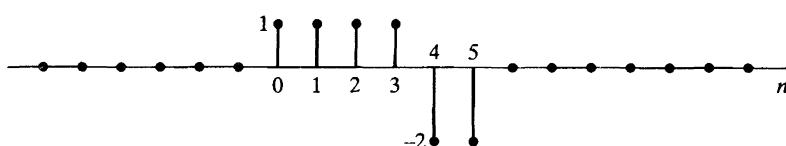


Рис. 2.24.

- 2.23. Опираясь на определение линейности (формула (2.26) на с. 38), покажите, что ИСЗ (пример 2.3 на с. 36) и скользящее среднее (пример 2.4 на с. 37) являются линейными системами.
- 2.24. Импульсная характеристика ЛС-системы показана на рис. 2.25. Найдите и аккуратно начертите реакцию этой системы на сигнал $x[n] = u[n - 4]$.

Рис. 2.25.

$h[n]$



- 2.25. Импульсная характеристика ЛС-системы равна $h[n] = u[n]$. Определите ее реакцию на сигнал, изображенный на рис. 2.26, который описывается формулой:

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ a^n, & 0 \leq n \leq N_1, \\ 0, & N_1 < n < N_2, \\ a^{n-N_2}, & N_2 \leq n \leq N_2 + N_1, \\ 0, & N_2 + N_1 < n, \end{cases}$$

где $0 < a < 1$.

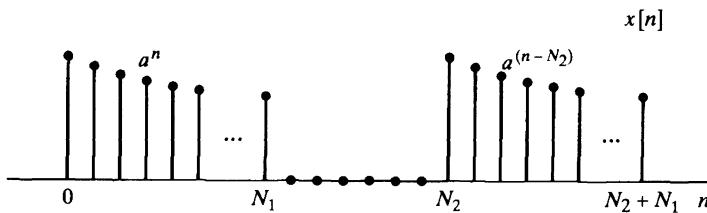


Рис. 2.26.

- 2.26. Какие из следующих сигналов могут быть собственными функциями любой устойчивой ЛС-системы:

а) $5^n u[n]$; б) $e^{j\omega n}$; в) $e^{j\omega n} + e^{j2\omega n}$; г) 5^n ; д) $5^n \cdot e^{j2\omega n}$.

- 2.27. Пары сигнал – отклик трех систем A , B и C показаны на рис. 2.27. Какая из них могла бы принадлежать классу линейных стационарных систем? Если вы считаете, что какая-то система действительно из ЛС-класса, выясните, может ли существовать несколько систем с указанной парой сигнал – отклик. Поясните свой ответ.

- 2.28. Выясните, какие из перечисленных ниже сигналов периодичны, и найдите их период.

а) $x[n] = e^{j(2\pi n/5)}$; б) $\sin(\pi n/19)$; в) $ne^{j\pi n}$; г) e^{jn} .

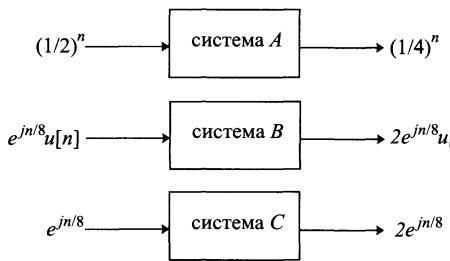


Рис. 2.27.

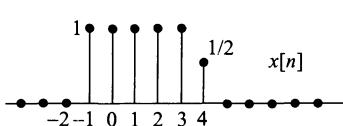


Рис. 2.28.

- 2.29. Дискретный сигнал $x[n]$ показан на рис. 2.28. Изобразите каждый из следующих сигналов:

а) $x[n] = e^{j(2\pi n/5)}$; б) $x[n - 2]$; в) $x[4 - n]$; г) $x[2n]$; д) $x[n]u[2 - n]$;
е) $x[n - 1]\delta[n - 3]$.

- 2.30. Для каждой из следующих систем определите, является ли она (1) устойчивой, (2) детерминированной, (3) линейной, (4) стационарной:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } T(x[n]) = x[n] \cos \pi n; & \text{б) } T(x[n]) = x[n^2]; \\ \text{в) } T(x[n]) = x[n] \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]; & \text{г) } T(x[n]) = \sum_{k=n-1}^{\infty} x[k]. \end{array}$$

- 2.31. Дано разностное уравнение

$$y[n] + \frac{1}{15}y[n-1] - \frac{2}{15}y[n-2] = x[n].$$

- а) Найдите общую форму однородного решения уравнения.
- б) Известно, что этим уравнением характеризуется как детерминированная, так и недетерминированная система. Найдите импульсную характеристику обеих систем.
- в) Покажите, что детерминированная ЛС-система устойчива, а недетерминированная неустойчива.
- г) Найдите частное решение этого уравнения для $x[n] = (3/5)^n u[n]$.

- 2.32. Определите реакцию $y[n]$ ЛС-системы на сигнал $x[n] = \cos(\pi n/2)$, если ее КЧХ равна

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega - \frac{\pi}{4})} \frac{1 + e^{-j2\omega} + 4e^{-j4\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j2\omega}}, \quad -\pi < \omega \leq \pi.$$

- 2.33. Определите реакцию $y[n]$ ЛС-системы на сигнал

$$x[n] = \cos\left(\frac{3\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right),$$

если $|H(e^{j\omega})| = 1$, а $\arg(H(e^{j\omega}))$ изображен на рис. 2.29.

- 2.34. Пара сигнал – отклик устойчивой ЛС-системы показана на рис. 2.30

- а) Найдите ее реакцию на сигнал $x_1[n]$, представленный на рис. 2.31.
- б) Найдите импульсную характеристику этой системы.

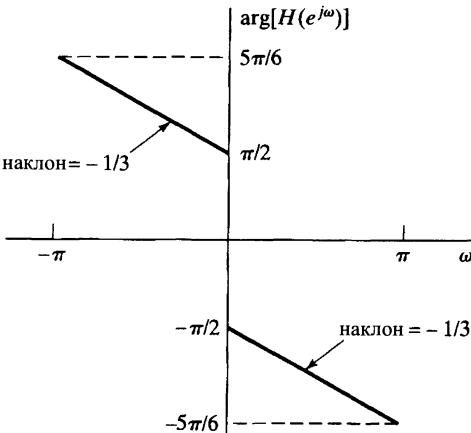


Рис. 2.29.

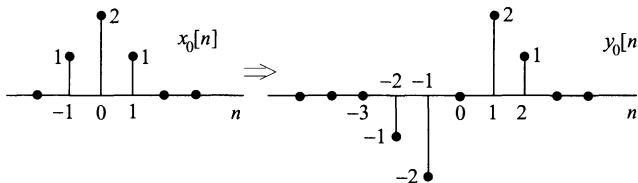


Рис. 2.30.

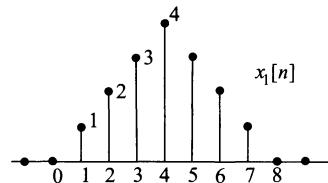


Рис. 2.31.

Дополнительные задачи

- 2.35. Известно, что система T , приведенная на рис. 2.32, стационарна. На этом же рисунке показаны три пары сигнал – отклик.
- Выясните, может ли система T быть линейной.
 - Найдите отклик системы T на импульсный сигнал $\delta[n]$.
 - На какие возможные сигналы $x[n]$ система T реагирует однозначно?

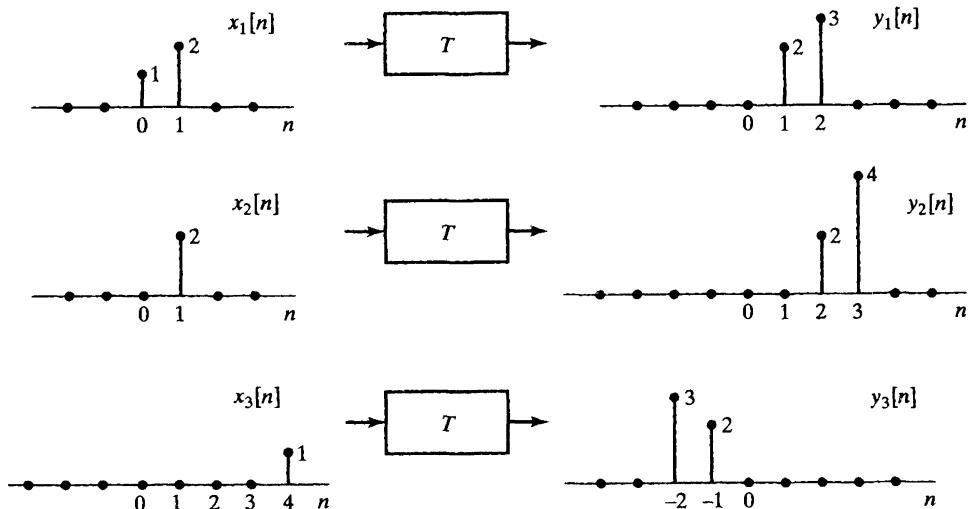


Рис. 2.32.

- 2.36. Известно, что система L из рис. 2.33 линейна. Там же указаны три пары сигнал – отклик этой системы.
- Выясните, может ли система L быть стационарной.
 - Найдите отклик системы L на импульсный сигнал $\delta[n]$.
- 2.37. Покажите, что реакция дискретной ЛС-системы с импульсной характеристикой $h[n]$ на периодический сигнал $x[n]$ с периодом N является периодичной с тем же периодом.
- 2.38. В § 2.6 мы утверждали, что решение однородного разностного уравнения

$$\sum_{k=0}^N a_k y_h[n-k] = 0 \quad (2.207)$$

имеет вид

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^N A_m z_m^n, \quad (2.208)$$

где A_m — произвольные числа, а z_m — N корней многочлена

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = 0, \quad (2.209)$$

то есть

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = \prod_{m=1}^N (1 - z_m z^{-1}) = 0. \quad (2.210)$$

а) Определите общий вид однородного решения разностного уравнения

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n-1]. \quad (2.211)$$

б) Найдите коэффициенты A_m в однородном решении, если $y[-1] = 1$ и $y[0] = 0$.

в) Рассмотрите еще одно уравнение

$$y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = 2y[n-1]. \quad (2.212)$$

Покажите, что если его однородное решение содержит в себе только члены вида (2.208), то начальные условия $y[-1] = 1$ и $y[0] = 0$ не выполнены.

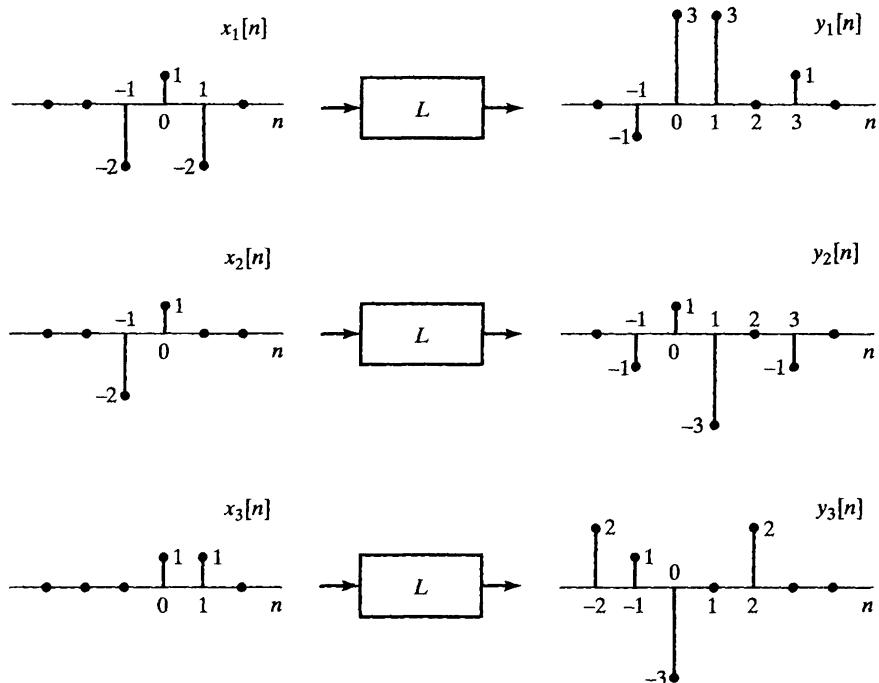


Рис. 2.33.

г) Пусть z_1 — корень кратности 2 многочлена (2.209). Покажите, что в этом случае однородное решение уравнения имеет вид:

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^{N-1} A_m z_m^n + nB_1 z_1^n. \quad (2.213)$$

Используя эту формулу, выпишите общий вид решения $y_h[n]$ уравнения (2.212). Проверьте прямой подстановкой, что ваш ответ действительно удовлетворяет уравнению (2.212) с $x[n] = 0$.

- д) Определите коэффициенты A_1 и B_1 однородного решения из предыдущего пункта, если $y[-1] = 1$ и $y[0] = 0$.
- 2.39. Пара сигнал – отклик системы определена следующими свойствами:
- 1) $y[n] - ay[n - 1] = x[n]$, 2) $y[0] = 1$.
 - а) Выясните, является ли данная система стационарной.
 - б) Будет ли эта система линейной?
 - в) Предположим, что разностное уравнение (свойство 1)) осталось неизменным, а начальное значение отклика $y[0] = 0$ стало нулевым. Как изменятся ответы на вопросы а) и б)?
- 2.40. Рассмотрите ЛС-систему с импульсной характеристикой $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$. Определите установившуюся реакцию системы, т. е. реакцию при $n \gg 0$, на возбуждение $x[n] = \cos(\pi n)u[n]$.
- 2.41. КЧХ ЛС-системы равна

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega^3}, & |\omega| < \frac{2\pi}{16} \cdot \frac{3}{2}, \\ 0, & \frac{2\pi}{16} \cdot \frac{3}{2} \leq |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Найдите отклик системы на периодическую цепочку единичных импульсов $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n + 16k]$ с периодом $N = 16$.

- 2.42. Рассмотрите систему, изображенную на рис. 2.34.

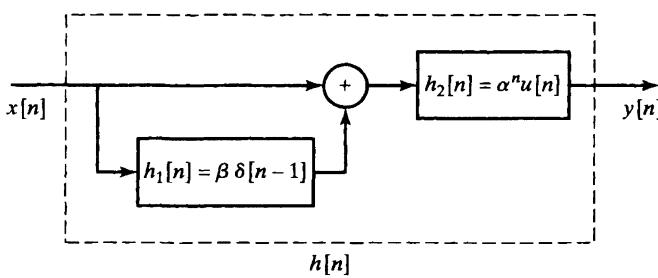


Рис. 2.34.

- а) Найдите импульсную характеристику всей системы.
- б) Определите КЧХ всей системы.
- в) Составьте разностное уравнение, связывающее пару сигнал – отклик системы.
- г) Является ли данная система детерминированной? При каких условиях данная система будет устойчивой?
- 2.43. Пусть $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{j\omega}}$, где $-1 < a < 0$. Определите и начертите графики следующих функций от ω :
- а) $\operatorname{Re}(X(e^{j\omega}))$;
 - б) $\operatorname{Im}(X(e^{j\omega}))$;
 - в) $|X(e^{j\omega})|$;
 - г) $\angle X(e^{j\omega})$.

2.44. Пусть $X(e^{j\omega})$ обозначает Фурье-образ сигнала $x[n]$, изображенного на рис. 2.35.

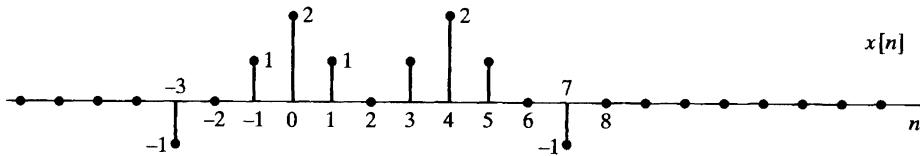


Рис. 2.35.

Вычислите

$$a) X(e^{j\omega})|_{\omega=0}; \quad b) X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi}; \quad c) \angle X(e^{j\omega}); \quad d) \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega.$$

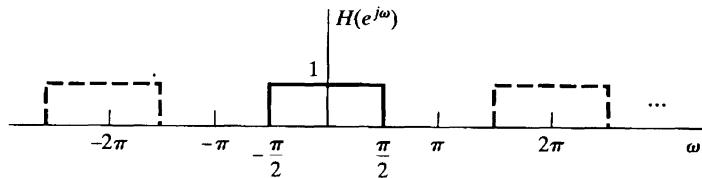
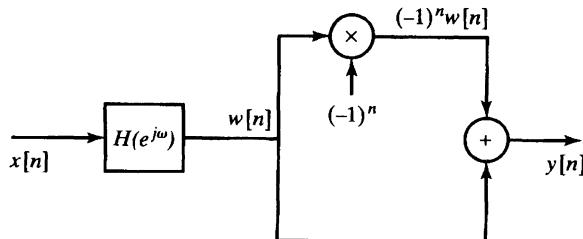
Определите и изобразите на рисунке сигнал, чей Фурье-образ равен:

$$d) X(e^{-j\omega}); \quad e) \operatorname{Re}(X(e^{j\omega})).$$

2.45. Определите реакцию системы из рис. 2.36 на единичный импульс $\delta[n]$, если $H(e^{j\omega})$ — КЧХ идеального фильтра нижних частот, т. е.

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Рис. 2.36.



2.46. Дан Фурье-образ последовательности $x[n]$:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1 - a^2}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - ae^{j\omega})}, \quad |a| < 1.$$

a) Восстановите последовательность $x[n]$.

b) Вычислите $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cos \omega d\omega$.

2.47. ЛС-система описывается разностным уравнением

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2].$$

- а) Найдите импульсную характеристику $h[n]$ системы.
- б) Является ли эта система устойчивой?
- в) Определите КЧХ $H(e^{j\omega})$ системы. Используя формулы тригонометрии, упростите выражение для $H(e^{j\omega})$.
- г) Изобразите графики АЧХ и ФЧХ.
- д) Рассмотрите теперь новую систему с КЧХ $H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+\pi)})$. Найдите импульсную характеристику $h_1[n]$ новой системы.
- 2.48. На вход системы подается вещественноизначный сигнал $x[n]$, чей Фурье-образ обозначен как $X(e^{j\omega})$. Известно, что

$$y[n] = \begin{cases} x[n], & \text{если } n \text{ четное,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

- а) Изобразите дискретный сигнал $s[n] = 1 + \cos \pi n$ и его Фурье-образ $S(e^{j\omega})$.
- б) Выразите Фурье-образ $Y(e^{j\omega})$ реакции системы через $X(e^{j\omega})$ и $S(e^{j\omega})$.
- в) Запишите Фурье-образ $W(e^{j\omega})$ сигнала $w[n] = y[n] + \frac{1}{2}(y[n+1] + y[n-1])$ как функцию от $Y(e^{j\omega})$.
- г) Начертите графики функций $X(e^{j\omega})$, $Y(e^{j\omega})$ и $W(e^{j\omega})$, если $x[n] = \frac{\pi n}{a} \sin \frac{\pi n}{a}$ и $a > 1$. При каких условиях сигнал $x[n]$ хорошо аппроксимируется сигналом $w[n]$?

- 2.49. Данна дискретная ЛС-система с частотной и импульсными характеристиками $H(e^{j\omega})$ и $h[n]$ соответственно.

- а) Покажите, что импульсная характеристика системы имеет конечную длительность, если известно, что
- (i) система детерминирована;
 - (ii) $H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$;
 - (iii) дискретизованное по времени преобразование Фурье последовательности $h[n+1]$ вещественно.
- б) Пусть дополнительно известно, что

$$(iv) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) d\omega = 2; \quad (v) H(e^{j\pi}) = 0.$$

Достаточно ли теперь данных для однозначного определения системы? Если да, то найдите ее импульсную характеристику $h[n]$. Если нет, скажите как можно больше о последовательности $h[n]$.

- 2.50. Рассмотрите три последовательности

$$v[n] = u[n] - u[n-6], \quad w[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2] + \delta[n-4], \quad q[n] = v[n] * w[n].$$

- а) Вычислите и изобразите последовательность $q[n]$.
- б) Найдите и изобразите последовательность $r[n]$, для которой $r[n] * v[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} q[k]$.
- в) Верно ли, что $q[-n] = v[-n] * w[-n]$? Обоснуйте свой ответ.

- 2.51. Импульсная характеристика ЛС-системы имеет вид $h[n] = a^n u[n]$.
- Найдите реакцию системы $y_1[n]$ на сигнал $x_1[n] = e^{j(\pi/2)n}$.
 - Используя результат предыдущего пункта, найдите отклик $y_2[n]$ системы на сигнал $x_2[n] = \cos(\pi n/2)$.
 - Вычислите отклик $y_3[n]$ системы на поданный сигнал $x_3 = e^{j(\pi/2)n} u[n]$.
 - Сравните значения $y_3[n]$ и $y_1[n]$ при больших n .
- 2.52. Данна ЛС-система с КЧХ $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/4}$, $-\pi < \omega \leq \pi$. Определите отклик системы $y[n]$ на входной сигнал $x[n] = \cos(5\pi n/2)$. Упростите свой ответ, насколько сможете.
- 2.53. На рис. 2.37 изображен каскад ЛС-систем. КЧХ первой системы равна

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 0,5\pi, \\ 0, & 0,5\pi \leq |\omega| < \pi, \end{cases}$$

Рис. 2.37.

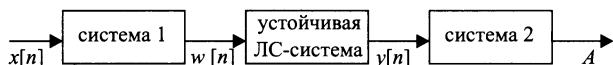
а вторая система описывается уравнением $y[n] = w[n] - w[n-1]$. На вход каскада подается сигнал $x[n] = \cos(0,6\pi n) + 3\delta[n-5] + 2$. Определите выходной сигнал каскада. Поразмыслив, вы сможете выписать ответ, основываясь на свойствах ЛС-системы.

- 2.54. Данна ЛС-система с КЧХ $H(e^{j\omega}) = e^{-j(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4})}$, $-\pi < \omega \leq \pi$. Определите реакцию системы на сигнал

$$x[n] = \cos\left(\frac{15\pi n}{4} - \frac{\pi}{3}\right).$$

- 2.55. Система 1, представленная на рис. 2.38, — нелинейна и без запоминания, система 2 выдает число $A = \sum_{n=0}^{100} y[n]$. Рассмотрим класс входных сигналов $x[n] = \cos \omega n$, где ω — конечное вещественное число. Ясно, что при этом число A на выходе системы станет функцией от ω . Будет ли эта функция периодичной? Обоснуйте свой ответ.

Рис. 2.38.



- 2.56. Рассмотрите систему S , чей сигнал $x[n]$ и отклик $y[n]$ связаны согласно блок-схеме из рис. 2.39. Входной сигнал умножается на $e^{-j\omega_0 n}$, а произведение проpusкается через ЛС-систему с импульсной характеристикой $h[n]$. Обоснованно ответьте на следующие вопросы:

- Является ли система S линейной?
- Является ли система S стационарной?
- Является ли система S устойчивой?
- Найдите такую систему C , чтобы система, изображенная на рис. 2.40, обрабатывала сигналы так же, как и система S . (Замечание: Система C не обязательно является ЛС-системой.)

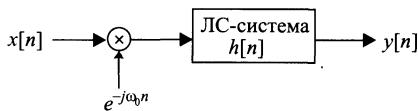


Рис. 2.39.

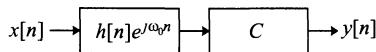


Рис. 2.40.

- 2.57. Импульсная характеристика идеального фильтра нижних частот с нулевой задержкой обозначена как $h_{lp}[n]$, а его КЧХ равна

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 0,2\pi, \\ 0, & 0,2\pi \leq |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Новые три фильтра определяются соотношениями:

- а) $h_1[n] = (-1)^n h_{lp}[n] = e^{j\pi n} h_{lp}[n]$; б) $h_2[n] = 2h_{lp}[n] \cos \frac{\pi n}{2}$;
 в) $h_3[n] = \frac{\sin(0,1\pi n)}{\pi n} h_{lp}[n]$.

Найдите КЧХ фильтров и изобразите их на промежутке $|\omega| < \pi$. Какого типа фильтры получились?

- 2.58. ЛС-систему с КЧХ

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi, \\ j, & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

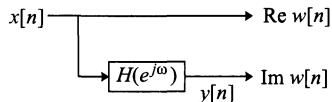


Рис. 2.41.

называют *девяностоградусным фазовращателем* и используют для генерирования так называемого аналитического сигнала, как это показано на рис. 2.41. Более точно, аналитический сигнал — это комплекснозначный сигнал $w[n]$, удовлетворяющий условиям: $\text{Re } w[n] = x[n]$, $\text{Im } w[n] = y[n]$. График вещественной и мнимой частей функции $X(e^{j\omega})$ показан на рис. 2.42. Определите и изобразите $W(e^{j\omega})$, Фурье-образ аналитического сигнала $w[n] = x[n] + jy[n]$.

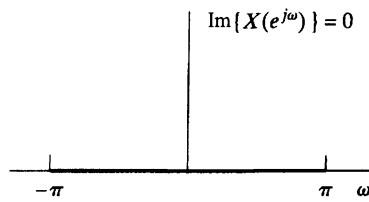
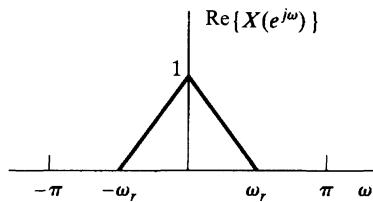


Рис. 2.42.

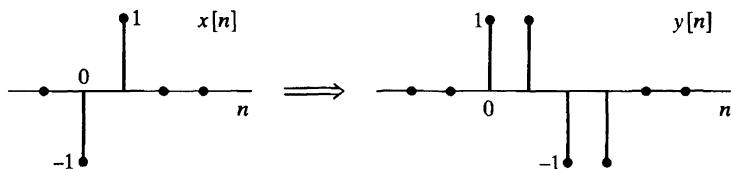
- 2.59. Автокорреляционная последовательность сигнала $x[n]$ определяется как

$$R_x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k]x[n+k].$$

- а) Покажите, что при подходящем выборе сигнала $g[n]$ автокорреляционная последовательность равна $R_x[n] = x[n] * g[n]$, и найдите этот сигнал $g[n]$.
- б) Покажите, что Фурье-образ $R_x[n]$ совпадает с $|X(e^{j\omega})|^2$.

2.60. На рис. 2.43 изображены входной $x[n]$ и выходной $y[n]$ сигналы ЛС-системы.

Рис. 2.43.



- а) Найдите отклик системы на сигнал $x_2[n]$, показанный на рис. 2.44.
- б) Вычислите импульсную характеристику $h[n]$ этой ЛС-системы.

2.61. Рассмотрите систему, входной и выходной сигналы которой связаны разностным уравнением

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n].$$

Рис. 2.44.

Предположим, что $y[-1] = 0$ вне зависимости от входного сигнала. Определите, является ли данная система устойчивой. В случае положительного ответа подтвердите его аргументами. Отрицательный ответ подкрепите контрпримером.

Задачи повышенной сложности

- 2.62. Детерминированная система определена в подразделе 2.3.4. Опираясь на это определение, докажите, что детерминированность линейной стационарной системы влечет свойство $h[n] = 0$ при $n < 0$, где, как обычно, $h[n]$ — импульсная характеристика системы. Один из методов доказательства состоит в том, чтобы показать, что предположение о ненулевых значениях $h[n]$ при $n < 0$ приводит к противоречию с детерминированностью. Покажите также, что при условии $h[n] = 0$ для отрицательных n система с необходимостью будет детерминированной.
- 2.63. Пусть реакция дискретной системы на сигнал $x[n] = (\frac{1}{4})^n u[n]$ равна $y[n] = (\frac{1}{2})^n$. Выясните, какие из следующих утверждений верны:
- система должна быть ЛС-системой;
 - система может быть ЛС-системой;
 - система не может быть ЛС-системой.

Если вы считаете, что данная система может или должна быть ЛС-системой, найдите ее вероятную импульсную характеристику. Если же по вашему мнению система не может принадлежать классу ЛС, то четко объясните причины.

- 2.64. Данна ЛС-система с КЧХ $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/2}$, $|\omega| < \pi$. Выясните и докажите, является ли эта система детерминированной.
- 2.65. Значения последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$, представленных на рис. 2.45, равны нулю вне отраженного на нем промежутка. Фурье-образы этих последовательностей, вообще говоря комплекснозначные, могут быть записаны в виде

$$X_1(e^{j\omega}) = A_1(\omega)e^{j\theta_1(\omega)}, \quad X_2(e^{j\omega}) = A_2(\omega)e^{j\theta_2(\omega)},$$

где $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$, $\theta_1(\omega)$, $\theta_2(\omega)$ — вещественные функции, выбранные таким образом, что $A_1(\omega)$ и $A_2(\omega)$ принимают неотрицательные значения при $\omega = 0$, а в других точках могут принимать значения разных знаков. Подберите подходящие функции $\theta_1(\omega)$ и $\theta_2(\omega)$ и начертите их графики над интервалом $0 < \omega < 2\pi$.

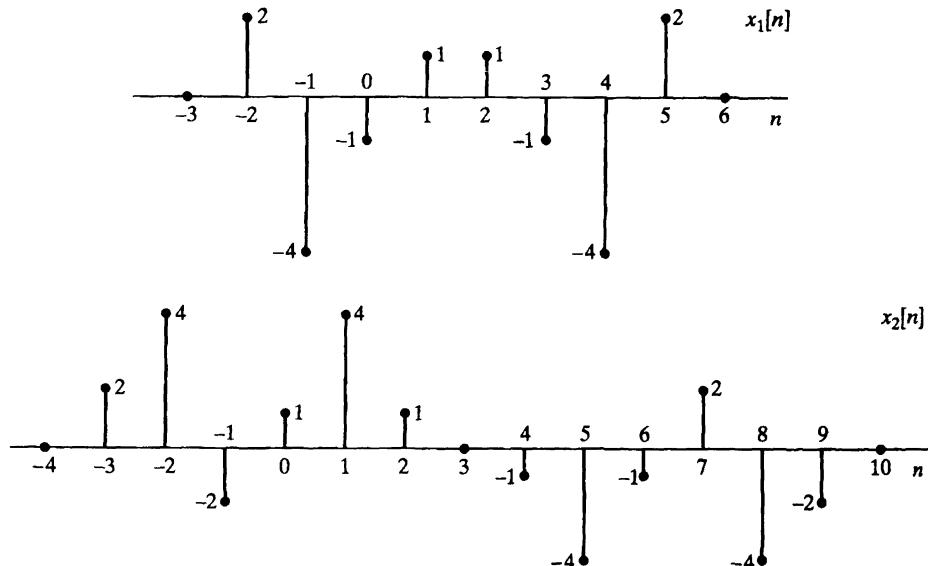


Рис. 2.45.

- 2.66. На рис. 2.46 изображен каскад систем с вещественными последовательностями $x[n]$ и $h_1[n]$. Системы обращения времени определяются формулами: $f[n] = e[-n]$ и $y[n] = g[-n]$.
- Выразите $E(e^{j\omega})$, $F(e^{j\omega})$, $G(e^{j\omega})$ и $Y(e^{j\omega})$ через $X(e^{j\omega})$ и $H_1(e^{j\omega})$.
 - Результат предыдущего пункта должен убедить вас в том, что вся система является ЛС-системой. Найдите ее КЧХ $H(e^{j\omega})$.
 - Выразите импульсную характеристику $h[n]$ всей системы в терминах $h_1[n]$.

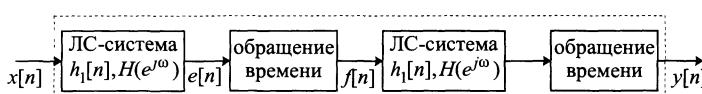
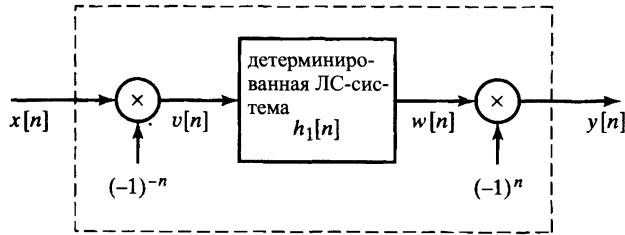


Рис. 2.46.

- 2.67. Можно показать, что система S , заключенная в штриховой прямоугольнике на рис. 2.47, является линейной и стационарной.

Рис. 2.47.



- a) Выразите КЧХ $H(e^{j\omega})$ системы S через $H_1(e^{j\omega})$ — КЧХ внутренней ЛС-системы. Используйте равенство $(-1)^n = e^{j\pi n}$.
- б) Начертите график $H(e^{j\omega})$ для случая, когда

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

- 2.68. На рис. 2.48, а) показаны пары сигнал – отклик систем A и B , в то время как на рис. 2.48, б) — две каскадные комбинации этих систем

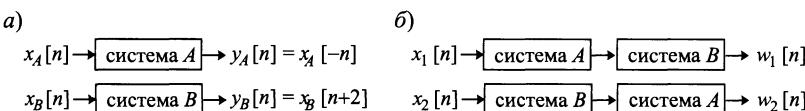


Рис. 2.48.

Обязательно ли совпадают $w_1[n]$ и $w_2[n]$, если $x_1[n] = x_2[n]$? В случае положительного ответа коротко, но четко поясните его и проиллюстрируйте примером; для обоснования отрицательного приведите контрпример.

- 2.69. Рисунок 2.49 представляет систему, в которой S_1 и S_2 — ЛС-системы.

- а) Можно ли с уверенностью утверждать, что большая система, заключенная в штриховой прямоугольник, реакция которой на входной сигнал $x[n]$ вычисляется как произведение откликов систем S_1 и S_2 , является ЛС-системой? Положительный ответ докажите, а отрицательный подкрепите контрпримером.

- б) Пусть известно, что КЧХ $H_1(e^{j\omega})$ и $H_2(e^{j\omega})$ систем S_1 и S_2 равны нулю над некоторыми промежутками, а именно

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq 0, 2\pi, \\ ?, & 0, 2\pi < |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

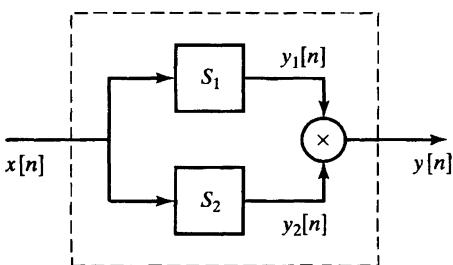


Рис. 2.49.

$$H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} ?, & |\omega| \leq 0, 4\pi, \\ 0, & 0, 4\pi < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Предположим также, что входной сигнал ограничен по частоте, т. е.

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} ?, & |\omega| < 0,3\pi, \\ 0, & 0,3\pi \leq |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

На каком промежутке из полуинтервала $[-\pi, \pi]$ можно гарантировать равенство нулю значений Фурье-образа $Y(e^{j\omega})$ выходного сигнала $y[n]$?

- 2.70. Часто используемая операция, называемая первой левой разностью, определяется как

$$y[n] = \nabla(x[n]) = x[n] - x[n-1],$$

где $x[n]$ — входной, а $y[n]$ — выходной сигналы системы первой левой разности.

- Покажите, что эта система линейна и стационарна.
- Найдите ее импульсную характеристику.
- Найдите и начертите ее КЧХ (амплитуду и фазу).
- Покажите, что если $x[n] = f[n] * g[n]$, то

$$\nabla(x[n]) = \nabla(f[n]) * g[n] = f[n] * \nabla(g[n]),$$

где $*$ обозначает дискретную свертку.

- Найдите импульсную характеристику системы, которая компенсирует действие первой левой разности, т. е. такую последовательность $h_i[n]$, при которой $h_i[n] * \nabla(x[n]) = x[n]$.

- 2.71. Пусть $H(e^{j\omega})$ — КЧХ ЛС-системы, а $h[n]$ — ее комплекснозначная импульсная характеристика.

- Опираясь на (2.102), покажите, что $H^*(e^{-j\omega})$ — КЧХ системы с импульсной характеристикой $h^*[n]$, где, как обычно, $*$ обозначает комплексное сопряжение.
- Покажите, что в случае вещественнонезначной последовательности $h[n]$ КЧХ сопряженно-симметрична, т. е. $H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$.

- 2.72. Пусть $X(e^{j\omega})$ — Фурье-образ сигнала $x[n]$. Опираясь на формулы (2.128) и (2.129), покажите, что

- Фурье-образ от $x^*[n]$ равен $X^*(e^{-j\omega})$;
- Фурье-образ от $x^*[-n]$ равен $X^*(e^{j\omega})$.

- 2.73. Покажите, что для вещественной последовательности $x[n]$ свойство 7 табл. 2.1 следует из свойства 1, а свойства 8–11 из свойства 7.

- 2.74. В § 2.10 сформулировано несколько теорем о преобразовании Фурье без доказательств. Используя формулы (2.128) и (2.129), докажите справедливость теорем 1–5 из табл. 2.2.

- 2.75. В § 2.10 утверждалось, что

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}), \quad (2.214)$$

где $Y(e^{j\omega})$, $H(e^{j\omega})$ и $X(e^{j\omega})$ — Фурье-образы соответственно выходного сигнала $y[n]$, импульсной характеристики $h[n]$ и входного сигнала $x[n]$ линейной стационарной системы, т. е.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]. \quad (2.215)$$

Проверьте формулу (2.214), подвергая свертку последовательностей преобразованию Фурье (2.215).

2.76. Применяя явную формулу преобразования Фурье (2.128) к (2.175) и учитывая теорему 3 табл. 2.2, докажите теорему о модуляции (теорема 7 табл. 2.2).

2.77. Пусть $X(e^{j\omega})$ и $Y(e^{j\omega})$ — Фурье-образы комплексных последовательностей $x[n]$ и $y[n]$.

- a) Используя теорему о свертке (теорема 6 табл. 2.2) и подходящие свойства табл. 2.2, выразите через $x[n]$ и $y[n]$ последовательность, чей Фурье-образ равен $X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})$.
- б) Учитывая предыдущий пункт, покажите, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega}) d\omega. \quad (2.216)$$

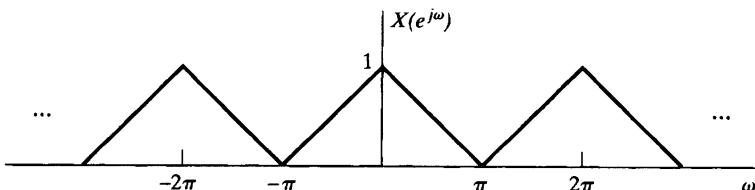
Эта формула является более общей формой теоремы Парсеваля, приведенной в подразделе 2.10.5.

- в) Пользуясь (2.216), найдите численное значение суммы

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/4)}{2\pi n} \cdot \frac{\sin(\pi n/6)}{5\pi n}.$$

2.78. Пусть $x[n]$ и $X(e^{j\omega})$ — последовательность и ее Фурье-образ. Выразите в терминах $X(e^{j\omega})$ Фурье-образы последовательностей $y_s[n]$, $y_d[n]$ и $y_e[n]$. В каждом случае изобразите на одном чертеже $Y(e^{j\omega})$ и $X(e^{j\omega})$. График $X(e^{j\omega})$ приведен на рис. 2.50, а последовательности $y_s[n]$, $y_d[n]$ и $y_e[n]$ определены ниже.

Рис. 2.50.



- а) Схема дискретизации: $y_s[n] = \begin{cases} x[n], & n \text{ — четное}, \\ 0, & n \text{ — нечетное}. \end{cases}$

- б) Компрессор: $y_d[n] = x[2n]$.

- в) Экспандер: $y_e[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ — четное}, \\ 0, & n \text{ — нечетное}. \end{cases}$

- 2.79. Двухчастотная корреляционная функция $\Phi_x(N, \omega)$ часто используется в радарах и гидролокаторах для оценки частоты и временной развертки сигнала. В дискретном случае она определяется по правилу

$$\Phi_x(N, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+N]x^*[n-N]e^{-j\omega n}.$$

- а) Покажите, что $\Phi_x(-N, -\omega) = \Phi_x^*(N, \omega)$.
 б) Предполагая, что $N \geq 0$, найдите $\Phi_x(N, \omega)$, если $x[n] = Aa^n u[n]$, где $0 < a < 1$.
 в) Покажите, что

$$\Phi_x(N, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j(v+\frac{\omega}{2})}\right) X^*\left(e^{j(v-\frac{\omega}{2})}\right) e^{j2vN} dv.$$

- 2.80. Пусть $x[n]$ и $y[n]$ — стационарные некоррелированные случайные сигналы. Покажите, что если $w[n] = x[n] * y[n]$, то $m_w = m_x + m_y$ и $\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$.
- 2.81. Пусть $e[n]$ — белый шум и $s[n]$ — последовательность, не коррелирующая с $e[n]$. Покажите, что последовательность $y[n] = s[n]e[n]$ тоже является белым шумом, т. е. $\mathcal{E}\{y[n]y[n+m]\} = A\delta[m]$, для некоторой константы A .
- 2.82. Рассмотрите случайный сигнал $x[n] = s[n] + e[n]$, где $s[n]$ и $e[n]$ — независимые стационарные случайные сигналы с нулевым математическим ожиданием, чьи автокорреляционные функции — $\varphi_{ss}[m]$ и $\varphi_{ee}[m]$ соответственно. Найдите:
 а) $\varphi_{xx}[m]$ и $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$; б) $\varphi_{xe}[m]$ и $\Phi_{xe}(e^{j\omega})$; в) $\varphi_{xs}[m]$ и $\Phi_{xs}(e^{j\omega})$.
- 2.83. Пусть дана ЛС-система с импульсной характеристикой $h[n] = a^n u[n]$, где $|a| < 1$.
 а) Вычислите детерминированную автокорреляционную функцию $\varphi_{hh}[m]$ этой импульсной характеристики.
 б) Найдите функцию плотности энергии $|H(e^{j\omega})|^2$.
 в) Используя теорему Парсеваля, вычислите интеграл
- $$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$
- 2.84. Сигнал, поданный на вход первой левой разности (пример 2.10), — белый шум с нулевым математическим ожиданием и автокорреляционной функцией $\varphi_{xx}[m] = \sigma_x^2 \delta[m]$.
 а) Вычислите и изобразите на чертеже автокорреляционную функцию и спектр мощности реакции системы на этот сигнал.
 б) Что можно сказать о средней мощности реакции системы?
 в) Что эта задача говорит вам о применении первой левой разности к шумовым сигналам?
- 2.85. Пусть $x[n]$ — вещественный стационарный сигнал белого шума с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_x^2 . Обозначим через $y[n]$ реакцию ЛС-

системы на этот сигнал, а через $h[n]$ — импульсную характеристику системы. Покажите, что

$$\text{а) } \mathcal{E}\{x[n]y[n]\} = h[0]\sigma_x^2; \quad \text{б) } \sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^2[n].$$

- 2.86. Предположим, что вещественный стационарный сигнал $x[n]$ белого шума с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_x^2 подается на вход каскада из двух ЛС-систем, как показано на рис. 2.51. Верно ли, что

$$\text{а) } \sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{\infty} h_1^2[k]; \quad \text{б) } \sigma_w^2 = \sigma_y^2 \sum_{k=0}^{\infty} h_2^2[k]?$$

- в) Определите импульсную характеристику каскада систем, если $h_1[n] = a^n u[n]$ и $h_2[n] = b^n u[n]$. Используя полученный результат, найдите σ_w^2 . Подтверждают ли ваш ответ предыдущие пункты задачи?

- 2.87. Иногда нас интересует статистическое поведение ЛС-системы, реагирующей на мгновенно приложенную случайную нагрузку. Такая ситуация отражена на рис. 2.52.

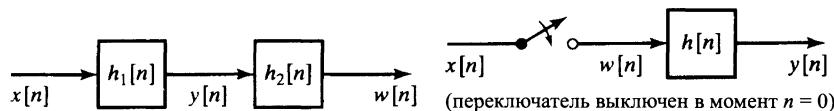


Рис. 2.51.

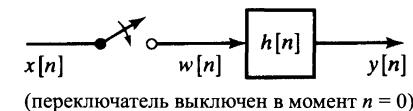


Рис. 2.52.

Пусть $x[n]$ — стационарный сигнал белого шума. Сигнал $w[n]$, поданный на вход системы, выглядит как

$$w[n] = \begin{cases} x[n], & n \geq 0, \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

и является нестационарным, как и реакция системы $y[n]$.

- а) Выразите математическое ожидание $y[n]$ через математическое ожидание $w[n]$.
 б) Найдите автокорреляционную последовательность $\varphi_{yy}[n_1, n_2]$ выходного сигнала.
 в) Покажите, что при больших n формулы, полученные в предыдущих пунктах задачи, близки к соответствующим соотношениям для стационарного входного сигнала.
 г) Предположив, что $h[n] = a^n u[n]$, найдите математическое ожидание и среднеквадратическое значение реакции в терминах математического ожидания и среднеквадратического значения входного сигнала.

- 2.88. Пусть $x[n]$ и $y[n]$ — входной и выходной сигналы системы. Соотношение на пару сигнал-отклик системы иногда используется в целях уменьшения шума по формуле

$$y[n] = \frac{\sigma_s^2[n]}{\sigma_x^2[n]} (x[n] - m_x[n]) + m_x[n], \quad \text{где} \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{3} \sum_{k=n-1}^{n+1} (x[k] - m_x[n])^2,$$

$$m_x[n] = \frac{1}{3} \sum_{k=n-1}^{n+1} x[k], \quad \sigma_s^2[n] = \begin{cases} \sigma_x^2[n] - \sigma_w^2, & \sigma_x^2[n] \geq \sigma_w^2, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

а σ_w^2 — известная константа, пропорциональная мощности шума.

- а) Является ли эта система линейной?
- б) Является ли эта система инвариантной относительно сдвига?
- в) Является ли эта система устойчивой?
- г) Является ли эта система детерминированной?
- д) Фиксируя $x[n]$, определите $y[n]$ в предположении, что σ_w^2 очень велико (шум большой мощности) и σ_w^2 — очень мало (шум малой мощности). Имеет ли смысл $y[n]$ в этих экстремальных случаях?

- 2.89. Пусть $x[n]$ — случайный процесс, служащий реакцией ЛС-системы, показанной на рис. 2.53. На этом рисунке $w[n]$ — вещественный стационарный сигнал белого шума с нулевым математическим ожиданием и $\mathcal{E}\{w^2[n]\} = \sigma_w^2$.

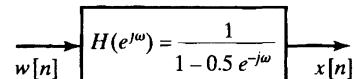


Рис. 2.53.

- а) Выразите $\mathcal{E}\{x^2[n]\}$ через $\varphi_{xx}[n]$ и $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$.
- б) Найдите спектральную плотность мощности $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ сигнала $x[n]$.
- в) Найдите корреляционную функцию $\varphi_{xx}[n]$ сигнала $x[n]$.

- 2.90. Рассмотрите ЛС-систему с вещественной импульсной характеристикой $h[n]$. Предположите, что отклики системы на сигналы $x[n]$ и $v[n]$ равны соответственно $y[n]$ и $z[n]$ (рис. 2.54). Считайте, что $x[n]$ и $v[n]$ — стационарные случайные процессы с нулевым математическим ожиданием и автокорреляционными функциями $\varphi_{xx}[n]$ и $\varphi_{vv}[n]$. Известны также взаимная корреляционная функция $\varphi_{xv}[n]$, спектры мощности $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ и $\Phi_{vv}(e^{j\omega})$ и взаимный спектр мощности $\Phi_{xv}(e^{j\omega})$.

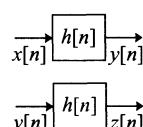


Рис. 2.54.

- а) По данным $\varphi_{xx}[n]$, $\varphi_{vv}[n]$, $\varphi_{xv}[n]$, $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$, $\Phi_{vv}(e^{j\omega})$ и $\Phi_{xv}(e^{j\omega})$ найдите $\Phi_{yz}(e^{j\omega})$ — взаимный спектр мощности сигналов $y[n]$ и $z[n]$, где $\Phi_{yz}(e^{j\omega})$ определен правилом $\varphi_{yz}[n] \xleftarrow{\mathcal{F}} \Phi_{yz}(e^{j\omega})$, а $\varphi_{yz}[n] = \mathcal{E}\{y[k]z[k-n]\}$.
- б) Можно ли утверждать, что $\Phi_{xv} \geq 0$ для всех ω ? Ответ обоснуйте.

- 2.91. На вход ЛС-системы (рис. 2.55) подается стационарный сигнал белого шума $e[n]$ с нулевым математическим ожиданием и средней мощностью σ_e^2 . Первая система каскада — левая разность с $f[n] = e[n] - e[n-1]$, а вторая — идеальный фильтр нижних частот с КЧХ

$$H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

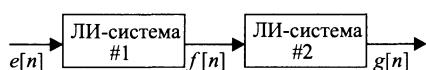


Рис. 2.55.

- а) Найдите спектр мощности $\Phi_{ff}(e^{j\omega})$ сигнала $f[n]$ и начертите один период его графика.
- б) Найдите автокорреляционную функцию $\varphi_{ff}[m]$ сигнала $f[n]$.
- в) Найдите спектр мощности $\Phi_{gg}(e^{j\omega})$ сигнала $f[n]$ и начертите один период его графика.
- г) Найдите среднюю мощность σ_g^2 выходного сигнала системы.

ГЛАВА 3

Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

3.1. Введение

Мы видели, что преобразование Фурье играет ключевую роль в представлении и анализе дискретных сигналов и систем. Здесь мы познакомимся с z -преобразованием последовательностей и изучим, как свойства последовательностей влияют на свойства их z -преобразования. Z -преобразование дискретных сигналов аналогично преобразованию Лапласа непрерывных сигналов. Эти преобразования имеют схожую связь с преобразованием Фурье. Мотивацией введения такого обобщения может служить тот факт, что преобразование Фурье определено далеко не для всех последовательностей, поэтому полезно иметь его аналог, применимый к более широкому классу сигналов. Второе преимущество заключается в том, что при аналитическом решении задач z -преобразование зачастую более удобно, чем преобразование Фурье.

3.2. Z-преобразование

В главе 2 дискретизованное по времени преобразование Фурье (ДВПФ) последовательности $x[n]$ было определено как

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}. \quad (3.1)$$

Z -преобразование той же последовательности вводится соотношением

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}. \quad (3.2)$$

Правая часть этой формулы — бесконечный степенной ряд от комплексной переменной z . Иногда сумму (3.2) полезно рассматривать как оператор, переводящий последовательность в функцию, обозначаемый обычно через $\mathcal{Z}\{\cdot\}$:

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z). \quad (3.3)$$

С этой точки зрения оператор z -преобразования выглядит как правило, сопоставляющее последовательности $x[n]$ функцию $X(z)$ от непрерывной комплексной переменной z . Соответствие между последовательностью и ее z -преобразованием обозначается как

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z). \quad (3.4)$$

Z-преобразование (3.2) часто называют *двусторонним z-преобразованием*, чтобы отличать его от *одностороннего z-преобразования*:

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}. \quad (3.5)$$

Ясно, что одностороннее z-преобразование совпадает с двусторонним только на множестве последовательностей $x[n]$ с $x[n] = 0$ при $n < 0$. В этой книге мы занимаемся исключительно двусторонним преобразованием.

При сравнении формул (3.1) и (3.2) становится очевидным, что между преобразованием Фурье и z-преобразованием существует тесная связь. В частности, заменяя комплексную переменную z в формуле (3.2) на $e^{j\omega}$, мы сводим z-преобразование к преобразованию Фурье. Это свойство мотивирует обозначение $X(e^{j\omega})$ для Фурье-образа, поскольку оно совпадает с $X(z)$ при $z = e^{j\omega}$. Такая подстановка означает ограничение переменной z в z-преобразовании на единичную окружность, т. е. при $|z| = 1$ z-преобразование равно Фурье-образу. Сформулируем более общее замечание. Можно представить переменную z в показательном виде:

$$z = re^{j\omega}.$$

Тогда формула (3.2) перепишется как

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n}$$

или

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}. \quad (3.6)$$

Последнее равенство можно интерпретировать как преобразование Фурье произведения исходной последовательности на экспоненциальную r^{-n} . Очевидно, при $r = 1$ правая часть формулы (3.6) дает Фурье-образ последовательности $x[n]$.

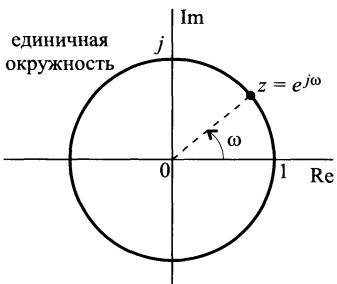


Рис. 3.1. Единичная окружность на комплексной плоскости

Z-преобразование, как функцию комплексной переменной, удобно описывать с помощью комплексной плоскости. Геометрическое место точек z на ней, удовлетворяющих условию $|z| = 1$, представляет собой окружность единичного радиуса с центром в нуле (рис. 3.1). Эту окружность принято называть *единичной окружностью*. Z-преобразование, вычисляемое только на единичной окружности, совпадает с преобразованием Фурье. Заметим, что ω — это величина угла между радиус-вектором точки z на единичной окружности и вещественной осью, отсчитываемого против часовой стрелки. При вычислении $X(z)$ в точках единичной окружности, начиная с $z = 1$ (т. е. $\omega = 0$) и далее

в направлении к $z = -1$ (т. е. $\omega = \pi$) через $z = j$ (т. е. $\omega = \pi/2$), мы получим Фурье-образ на промежутке $0 \leq \omega \leq \pi$. Продолжая процесс вычисления вдоль единичной окружности, мы найдем значения Фурье-образа на всем пе-

риоде. В главе 2 Фурье-образ изображался как функция от вещественной переменной, изменяющейся вдоль частотной прямой. Интерпретация преобразования Фурье как ограничения z -преобразования на единичную окружность концептуально соответствует обертыванию частотной оси вокруг единичной окружности с $\omega = 0$ в точке $z = 1$ и $\omega = \pi$ в $z = -1$. При этом периодичность преобразования Фурье относительно частоты получается естественным образом, так как изменение угла на 2π радиан соответствует повороту точки единичной окружности на полный оборот, при котором любая точка переходит в себя.

Как мы отметили в главе 2, степенной ряд, представляющий Фурье-образ, сходится далеко не для всех последовательностей, т. е. значение бесконечной суммы может не быть конечным. По той же причине z -преобразование существует тоже не для всех последовательностей, или оно может оказаться определенным не при всех значениях переменной z . Множество тех значений z , при которых степенной ряд сходится, называется *областью сходимости*¹ (ОС). Напомним (см. § 2.8), что ряд, вычисляющий Фурье-образ абсолютно суммируемых последовательностей, сходится к непрерывной функции переменной ω . Применяя это свойство к формуле (3.6), находим, что неравенство

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty \quad (3.7)$$

является достаточным условием сходимости z -преобразования. Из последней формулы ясно следует, что за счет умножения последовательности на вещественную экспоненту r^{-n} z -преобразование может сходиться даже в том случае, когда соответствующий ряд в преобразовании Фурье расходится. Например, последовательность $u[n]$ не принадлежит классу абсолютно суммируемых и, следовательно, ее Фурье-образ не является абсолютно сходящимся рядом. Однако $r^{-n}u[n]$ абсолютно суммируема при $r > 1$. Это означает, что z -преобразование единичного скачка существует, а его ОС описывается неравенством $|z| > 1$.

Сходимость степенного ряда (3.2) зависит только от величины $|z|$, поскольку $|X(z)| < \infty$, как только

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |z|^{-n} < \infty, \quad (3.8)$$

т. е. ОС ряда (3.2) состоит из всех тех точек z , для которых выполнено неравенство (3.8). Таким образом, вместе с каждым числом z_1 , попавшим в ОС ряда, туда же попадут все комплексные числа z с $|z| = |z_1|$. Как следствие этого наблюдения, получаем, что ОС степенного ряда представляет собой кольцо с центром в нуле. Тем самым внешняя граница ОС — окружность (или ОС можно продолжить вплоть до бесконечности), как и внутренняя граница (или ОС можно продолжить внутрь, включая нуль), как показано на рис. 3.2. Если ОС включает в себя единичную окружность, то, естественно, сходится соответствующий Фурье-образ. Верно и обратное: если единичная окружность не входит в ОС z -преобразования, то Фурье-образ не является абсолютно сходящимся рядом.

¹Часто, допуская вольность речи, область сходимости ряда (3.2), сумма которого равна функции $X(z)$, будем называть областью сходимости самой функции. — Примеч. перев.

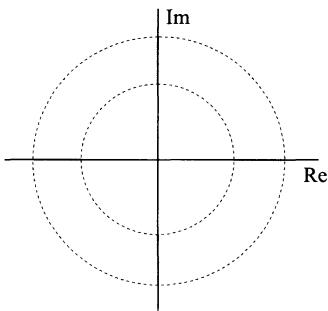


Рис. 3.2. ОС представляет собой кольцо. В частных случаях внутренняя или внешняя граница ОС может вообще отсутствовать. В первом случае получается круг, а во втором — внешность круга

Степенной ряд вида (3.2) называемый *рядом Лорана*, очень подробно изучается в теории функций комплексного переменного (см., например, [25]), и многие элегантные сильные теоремы этого раздела математики помогают в изучении z-преобразования. Ряд Лорана, а значит, и z-преобразование представляют аналитическую функцию в каждой точке ОС. Следовательно, как само z-преобразование, так и его производные любого порядка — непрерывны внутри ОС. Отсюда, в частности, следует, что при входжении единичной окружности в ОС как само преобразование Фурье, так и его производные любого порядка — непрерывные функции вещественной переменной ω . Кроме того (см. § 2.8), сама последовательность оказывается абсолютно суммируемой, т. е. является устойчивой.

Как явствует из неравенства (3.7), равномерная сходимость z-преобразования обеспечивается абсолютно суммируемостью произведения исходной последовательности на экспоненциальную. Ни одна из последовательностей:

$$x_1[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \quad x_2[n] = \cos \omega_0 n, \quad -\infty < n < \infty,$$

не принадлежит классу абсолютно суммируемых. Более того, даже после умножения этих последовательностей на r^{-n} мы не получим абсолютно суммируемости при всех значениях r . Таким образом, z-преобразование этих последовательностей сходится не при всех значениях z . Однако в § 2.8 мы показали, что, хотя последовательности вида $x_1[n]$ не являются абсолютно суммируемыми, они обладают конечной энергией, а их преобразование Фурье сходится в среднеквадратичном к разрывной периодической функции. Аналогично, последовательность $x_2[n]$ не суммируется ни абсолютно, ни с квадратом, но, тем не менее, используя импульсы, ее Фурье-образ можно определить. Фурье-образы обеих последовательностей не являются непрерывными, бесконечно дифференцируемыми функциями. Следовательно, их нельзя получить как ограничение z-преобразования на единичную окружность, хотя мы и употребляем обозначение $X(e^{j\omega})$, подразумевая, что функция определена на единичной окружности.

Z-преобразование наиболее полезно, когда бесконечная сумма может быть выражена в компактном виде, т. е. когда ее можно «вычислить» и записать простой математической формулой. К наиболее важным и полезным z-преобразованиям относятся те, для которых $X(z)$ на ОС ряда записывается как рациональная функция, т. е.

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \tag{3.9}$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — многочлены переменной z . Значения z , при которых $X(z) = 0$, называются *нулями* $X(z)$, а те точки, в которых $X(z)$ обращается в бесконечность, — *полюсами*. Полюса рациональной функции $X(z)$, расположенные в ко-

нечной области комплексной плоскости, совпадают с нулями знаменателя $Q(z)$. Кроме того, полюса могут появляться в точках $z = 0$ и $z = \infty$. Существует ряд важных наблюдений о связи расположения полюсов рациональной функции $X(z)$ и ОС соответствующего ряда. В § 3.3 эта связь будет обсуждаться подробно, а сейчас мы обратимся к примерам, иллюстрирующим z -преобразование.

Пример 3.1. Правосторонняя экспоненциальная последовательность

Рассмотрим сигнал $x[n] = a^n u[n]$. Так как его ненулевые отсчеты могут быть только при $n \geq 0$, — это пример *правосторонней* последовательности. Из формулы (3.2) получаем

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n.$$

Для сходимости ряда нам достаточно неравенства

$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty.$$

Таким образом, в ОС входят те значения z , для которых $|az^{-1}| < 1$ или, что тоже самое, $|z| > |a|$. Внутри ОС ряд сходится к функции

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|. \quad (3.10)$$

Здесь мы воспользовались знакомой формулой для суммы членов бесконечной геометрической прогрессии. ОС z -преобразования непуста для любого конечного значения $|a|$. С другой стороны, Фурье-образ этой последовательности определен лишь для a с $|a| < 1$. Если $a = 1$, наша последовательность превращается в единичный скачок с z -преобразованием

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1. \quad \square \quad (3.11)$$

Бесконечная сумма примера 3.1 внутри ОС равна рациональной функции от z . Для многих приложений эта рациональная функция более удобна, чем бесконечный ряд. Мы увидим, что любая последовательность, представимая в виде суммы экспоненциальных, имеет рациональное z -преобразование. С точностью до умножения на константу рациональная функция однозначно определяется своими нулями и полюсами. В предыдущем примере у нас возникает только один нуль в точке $z = 0$ и один полюс в точке $z = a$. Схема расположения нулей и полюсов вместе с ОС из примера 3.1 показана на рис. 3.3. Кружочком в нем обозначен нуль, а крестиком — полюс функции. При $|a| > 1$ единичная окружность не входит в ОС, согласно с

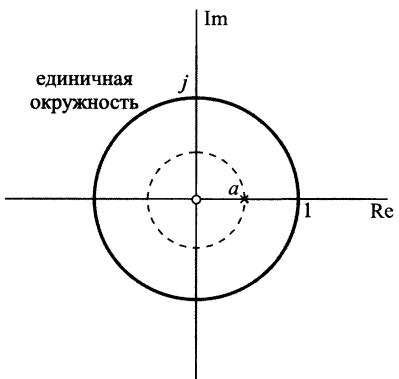


Рис. 3.3. Схема нулей и полюсов и ОС примера 3.1

тем фактом, что преобразования Фурье экспоненциально возрастающих последовательностей $a^n u[n]$ не существует.

Пример 3.2. Левосторонняя экспоненциальная последовательность

Пусть теперь $x[n] = -a^n u[-n-1]$. Поскольку члены последовательности отличны от нуля только при $n \leq -1$, ее называют **левосторонней**. В этом случае

$$X(z) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = - \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n. \quad (3.12)$$

Если $|a^{-1} z| < 1$, или $|z| < |a|$, ряд (3.12) сходится к функции

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = - \frac{a^{-1} z}{1 - a^{-1} z} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| < |a|. \quad (3.13)$$

Схема нулей и полюсов и ОС этого примера изображены на рис. 3.4. Заметим, что при $|a| < 1$ последовательность $-a^n u[-n-1]$ экспоненциально растет при $n \rightarrow -\infty$, и поэтому ее преобразование Фурье неопределено. \square



Рис. 3.4. Схема нулей и полюсов и ОС примера 3.2

всегда, когда $x[n]$ — линейная комбинация вещественных или комплексных экспонент.

Пример 3.3. Сумма двух экспоненциальных последовательностей

Рассмотрим сигнал, состоящий из суммы вещественных экспонент

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]. \quad (3.14)$$

Z-преобразование этой последовательности имеет вид

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \right) z^{-n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] z^{-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n, \end{aligned}$$

Сравнивая между собой формулы (3.10), (3.13) и рис. 3.3, 3.4, мы видим, что последовательности примеров 3.1 и 3.2, а значит, и бесконечные суммы отличаются друг от друга, в то время как алгебраические формулы для $X(z)$ и схемы нулей и полюсов совпадают. Z-преобразование этих последовательностей отличается лишь ОС. Это наблюдение подчеркивает тот факт, что для описания z-преобразования данной последовательности необходимы как алгебраическое выражение для $X(z)$, так и ОС. Кроме того, последовательности обоих примеров экспоненциальны, а их z-преобразования рациональны. Фактически, как показывают дальнейшие примеры, $X(z)$ будет рациональной функцией

откуда

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{2(1 - \frac{1}{12}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{2z(z - \frac{1}{12})}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{3})}. \quad (3.15)$$

Для существования $X(z)$ должны сходиться обе суммы формулы (3.15), что обеспечивается условиями $| \frac{1}{2}z^{-1} | < 1$ и $| -\frac{1}{3}z^{-1} | < 1$, т. е. $| z | > \frac{1}{2}$ и $| z | > \frac{1}{3}$. Таким образом, ОС суммы последовательностей описывается неравенством $| z | > \frac{1}{2}$. Схема нулей и полюсов и ОС z -преобразования как отдельных последовательностей, так и их суммы показаны на рис. 3.5. □

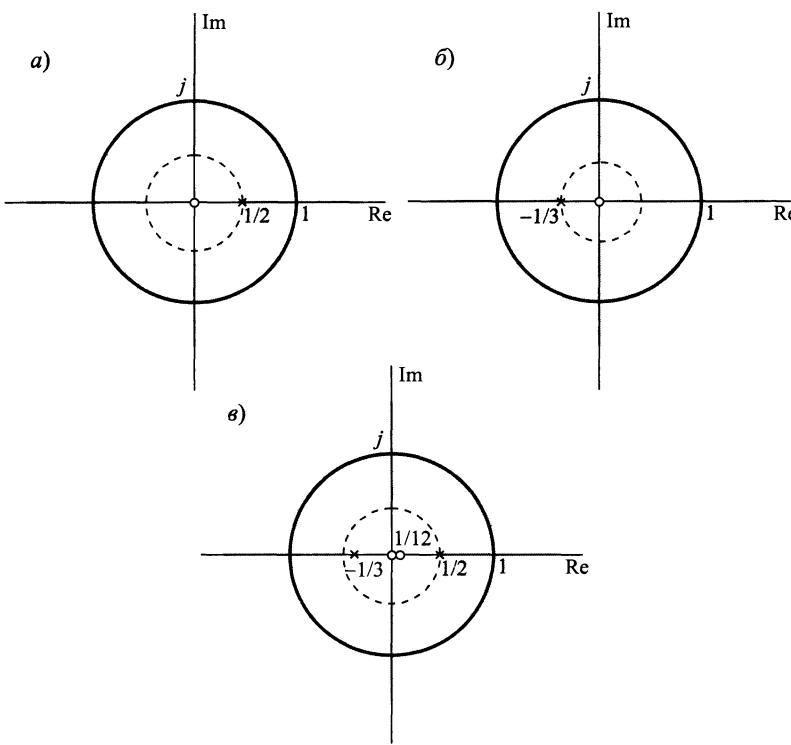


Рис. 3.5. Схема нулей и полюсов и ОС: а) $1/(1 - \frac{1}{2}z^{-1})$, $|z| > \frac{1}{2}$, б) $1/(1 + \frac{1}{3}z^{-1})$, $z > \frac{1}{3}$, в) $1/(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) + 1/(1 + \frac{1}{3}z^{-1})$, $|z| > \frac{1}{2}$

В каждом из предыдущих примеров мы начинали с определения и преобразовывали бесконечный ряд так, чтобы бесконечную сумму можно было записать аналитическим выражением. Однако когда последовательность — сумма экспоненциальных, ее z -преобразование можно найти более просто, если использовать свойство линейности оператора z -преобразования. Более конкретно, из определения z -преобразования (3.2) следует, что z -преобразование суммы последовательностей — сумма z -преобразований слагаемых. ОС оказывается пересечением областей сходимости. Иными словами, в ОС суммы z -преобразований входят те и только те значения z , при которых сходятся оба ряда, участвующие в z -преобразовании суммы. Мы это уже продемонстрировали, получив формулу (3.15).

в примере 3.3. Пример 3.4 показывает, как z-преобразование последовательности примера 3.3 получается с привлечением свойства линейности.

Пример 3.4. Сумма двух экспонент (другой метод)

Пусть $x[n]$ вновь определяется соотношением (3.14). Тогда, используя общий результат примера 3.1 с $a = \frac{1}{2}$ и $a = -\frac{1}{3}$, получаем z-преобразование слагаемых данной последовательности

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}, \quad (3.16)$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3} \quad (3.17)$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}, \quad (3.18)$$

что согласуется с результатом примера 3.3. \square

Все главные моменты примеров 3.1–3.4 суммируются в примере 3.5.

Пример 3.5. Двусторонняя экспоненциальная последовательность

Рассмотрим последовательность

$$x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]. \quad (3.19)$$

Заметим, что она экспоненциально возрастает при $n \rightarrow -\infty$. Используя основной результат примера 3.1 с $a = -\frac{1}{3}$, находим

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3},$$

а итог примера 3.2 с $a = \frac{1}{2}$ дает

$$-\left(\frac{1}{2}\right) u[-n-1] \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2}.$$

Ввиду линейности z-преобразования имеем

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{2(1 - \frac{1}{12}z^{-1})}{(1 + \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} = \\ &= \frac{2z(z - \frac{1}{12})}{(z + \frac{1}{3})(z - \frac{1}{2})}, \quad \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

В этом случае ОС представляет собой кольцо $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$. Заметим, что рациональная функция в этом примере идентична функции примеров 3.3 и 3.4, однако ОС здесь иная. Схема нулей и полюсов для нашего примера показана на рис. 3.6.

Отметим также, что поскольку ОС не содержит единичной окружности, то преобразование Фурье последовательности (3.19) неопределено. \square

В каждом из предыдущих примеров мы записывали z -преобразование и как отношение многочленов от z , и как отношение многочленов от z^{-1} . Из определения z -преобразования (3.2) видно, что $X(z)$ от последовательностей с нулевыми членами при $n < 0$ включает в себя лишь отрицательные степени z . Поэтому для такого класса сигналов $X(z)$ удобнее представлять в виде отношения многочленов от z^{-1} . Функцию $X(z)$ от последовательностей с ненулевыми членами при $n < 0$ все еще может оказаться удобно представлять как отношения произведения множителей вида $(1 - az^{-1})$. Стоит помнить, что такие множители добавляют как нули, так и полюсы, как было видно в предыдущих примерах.

Итак, бесконечные экспоненциальные последовательности обладают z -преобразованием, которое можно записать в виде рациональной функции от z или от z^{-1} . В том случае, когда последовательность конечна, ее z -преобразование тоже можно записать в простой форме. Если члены последовательности отличны от нуля только на промежутке $N_1 \leq n \leq N_2$, то вопросов о сходимости ее z -преобразования

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n} \quad (3.21)$$

не возникает, если каждый из членов $|x[n]z^{-n}|$ конечен. В общей ситуации такую сумму может оказаться невозможным выразить в компактном виде, но вполне возможно, этого и не требуется. Например, легко заметить, что если $x[n] = \delta[n] + \delta[n-5]$, то $X(z) = 1 + z^{-5}$ принимает конечные значения при $|z| > 0$. Пример конечных последовательностей, z -преобразование которых можно представить в более компактном виде, приведен в примере 3.6.

Пример 3.6. Конечные последовательности

Рассмотрим сигнал

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} = \\ &= \frac{z^N - a^N}{z^{N-1}(z - a)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Здесь при вычислении сумм мы воспользовались формулой (2.49). ОС состоит из тех значений z , для которых

$$\sum_{n=0}^{N-1} |az^{-1}|^n < \infty.$$

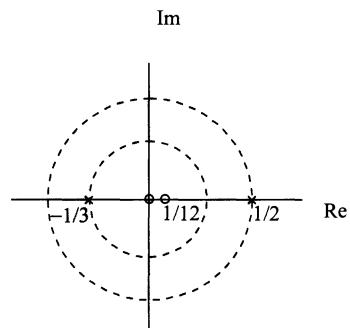


Рис. 3.6. Схема нулей и полюсов и ОС примера 3.5

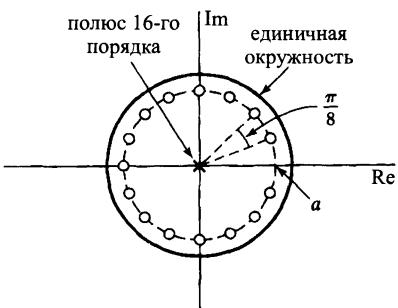


Рис. 3.7. Схема нулей и полюсов примера 3.6 при $N = 16$ и вещественном a из интервала $(0, 1)$. ОС здесь — вся комплексная плоскость, кроме $z = 0$ в точке $z = a$. Таким образом, эта функция не имеет полюсов, расположенных вне $z = 0$. Оставшиеся нули — это

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (3.23)$$

(Заметим, что корни удовлетворяют соотношению $z^N = a^N$, и при $a = 1$ — это корни N -й степени из единицы.) Нуль при $k = 0$ сокращается с полюсом

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \quad k = 1, \dots, N - 1. \quad \square \quad (3.24)$$

Пары, связанные z -преобразованием, встречавшиеся в некоторых из предыдущих примеров, так же как и другие, сведены в табл. 3.1. Мы убедимся, что информация таблицы оказывается весьма полезной при вычислении z -преобразования конкретной последовательности и решении обратной задачи.

3.3. Область сходимости z -преобразования

Примеры предыдущего параграфа показывают, что ОС z -преобразования зависит от природы сигнала. Сформулируем некоторые свойства этой зависимости, предполагая, что алгебраическое выражение, описывающее z -преобразование, — рациональная функция, а сигнал $x[n]$ обладает конечной амплитудой, за исключением, быть может, точек $n = \infty$ или $n = -\infty$.

Свойство 1: ОС — это кольцо или диск на комплексной плоскости с центром в нуле, т. е. $0 \leq r_R < |z| < r_L \leq \infty$.

Свойство 2: преобразование Фурье последовательности $x[n]$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда ОС z -преобразования содержит единичную окружность.

Свойство 3: ОС не может содержать ни одного полюса.

Свойство 4: ОС z -преобразования сигнала ограниченной длительности, т. е. сигнала с ненулевыми отсчетами, расположенными в конечном интервале $-\infty < N_1 \leq n \leq N_2 < \infty$, — вся комплексная плоскость, за исключением, быть может, $z = 0$ и $z = \infty$.

Свойство 5: ОС z -преобразования правосторонней последовательности, т. е. последовательности с нулевыми отсчетами при $n < N_1 < \infty$, представляет собой «внешность» круга с центром в нуле (включая даже иногда $z = \infty$), на границе которого расположен полюс функции $X(z)$ с максимальным модулем.

Очевидно, что эта сумма конечного числа слагаемых будет конечной тогда и только тогда, когда все ее члены имеют конечное значение. Это выполнено при $|a| < \infty$ и $z \neq 0$. Итак, предполагая, что $|a|$ конечно, получаем, что ОС — вся комплексная плоскость, за исключением нуля ($z = 0$). Схема нулей и полюсов этого примера при $N = 16$ и вещественном a , лежащим между нулем и единицей, показана на рис. 3.7. Числитель обращается в нуль в точках

Свойство 6: ОС z-преобразования левосторонней последовательности, т. е. последовательности с нулевыми отсчетами при $n > N_2 > -\infty$, — «внутренность» круга с центром в нуле (возможно вместе с центром), на границе которого расположен полюс функции $X(z)$ с минимальным модулем.

Таблица 3.1. Z-преобразование стандартных последовательностей

Последовательность	Z-преобразование	ОС
1. $\delta[n]$	1	все z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z < 1$
4. $\delta[n-m], m > 0$	z^{-m}	все $z \neq 0$
$\delta[n-m], m < 0$	z^{-m}	все $z \neq \infty$
5. $a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
6. $-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
7. $na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
8. $-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $
9. $u[n] \cos \omega_0 n$	$\frac{1-z^{-1} \cos \omega_0}{1-2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
10. $u[n] \sin \omega_0 n$	$\frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1-2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
11. $u[n] r^n \cos \omega_0 n$	$\frac{1-z^{-1} r \cos \omega_0}{1-2z^{-1} r \cos \omega_0 + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
12. $u[n] r^n \sin \omega_0 n$	$\frac{z^{-1} r \sin \omega_0}{1-2z^{-1} r \cos \omega_0 + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$ z > 0$

Свойство 7: ОС z-преобразования двусторонней последовательности, т. е. той, которая не является ни право-, ни левосторонней, представляет собой кольцо с центром в нуле, на границах которого расположены полюсы функции $X(z)$, а внутри кольца (согласно свойству 3) их нет.

Свойство 8: ОС должна быть связной¹.

Как было замечено в § 3.2, свойство 1 вытекает из того факта, что сходимость ряда (3.2) для данной последовательности $x[n]$ зависит лишь от $|z|$, а свойство 2 — следствие того, что преобразование (3.2) при ограничении на $|z| = 1$ совпадает с преобразованием Фурье. Свойство 3 получается из простого наблюдения: $X(z)$

¹Связной называется область, любые две точки которой можно соединить кривой, целиком лежащей в этой области. — Примеч. перев.

в полюсах принимает бесконечные значения, и, по определению сходимости, соответствующий ряд в этих точках должен расходиться.

Свойства с 4 по 7 могут быть получены более-менее непосредственно из интерпретации z -преобразования как преобразования Фурье исходной последовательности, умноженной на экспоненту. Рассмотрим, например, свойство 4. На рис. 3.8 изображен сигнал конечной длительности и экспоненциальная последовательность r^{-n} при $1 < r$ (убывающая экспонента) и при $0 < r < 1$ (возрастающая экспонента). Сходимость z -преобразования вытекает из абсолютной суммируемости последовательности $x[n]|z|^{-n}$ или, что эквивалентно, $x[n]r^{-n}$. Из рисунка должно быть ясно, что поскольку $x[n]$ имеет только конечное число ненулевых отсчетов, то, как только все эти отсчеты конечны, последовательность будет абсолютно суммируемой. Более того, умножение последовательности $x[n]$ на другую не должно оказывать влияния на абсолютную сходимость, если только отсчеты множителя конечны на отрезке $N_1 \leq n \leq N_2$. Следовательно, последовательность конечной длительности $x[n]r^{-n}$ абсолютно суммируема при $0 < r < \infty$. Проблемы со сходимостью могут возникнуть лишь при $r = 0$ или $r = \infty$. Если $x[n]$ принимает ненулевые значения при некоторых натуральных n (т. е. $N_2 > 0$), а r (или $|z|$) — нуль, то значения $x[n]r^{-n}$ бесконечны при $0 < n \leq N_2$. Соответственно, если $x[n]$ — не нуль при некоторых отрицательных n (т. е. $N_1 < 0$), значения $x[n]r^{-n}$ будут бесконечны при $N_1 \leq n < 0$, если r , или $|z|$, бесконечно.

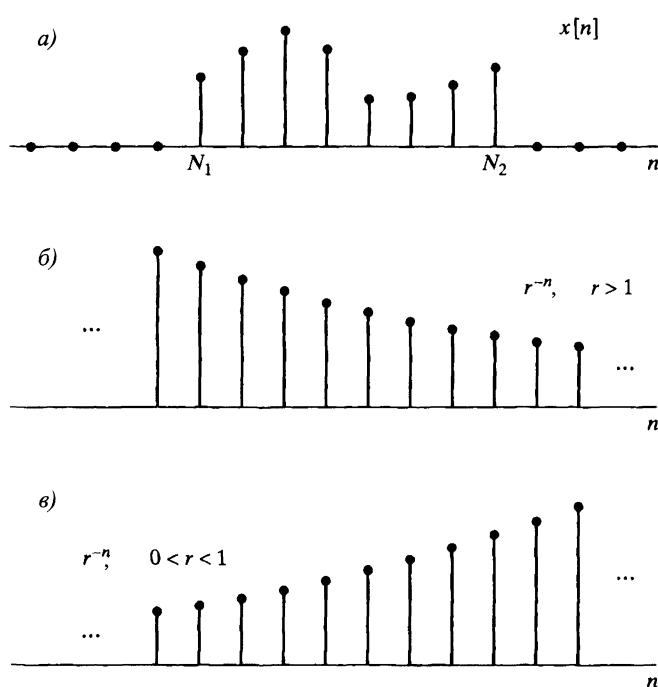


Рис. 3.8. Конечная последовательность и ее произведение с экспоненциальной последовательностью для объяснения сходимости z -преобразования: а) конечная последовательность $x[n]$; б) экспонента r^{-n} при $1 < r$; в) экспонента r^{-n} при $0 < r < 1$

Свойство 5 можно объяснить похожим способом. На рис. 3.9 приведена право-сторонняя последовательность и экспоненциальная последовательность r^{-n} при

двух различных значениях r . Все отсчеты правосторонней последовательности равны нулю слева от некоторого номера N_1 . Если ОС содержит окружность $|z| = r_0$, то последовательность $x[n]r_0^{-n}$ абсолютно суммируема, или (эквивалентное высказывание) преобразование Фурье последовательности $x[n]r_0^{-n}$ сходится. Так как $x[n]$ правосторонняя, то последовательность $x[n]r_1^{-n}$ тоже будет абсолютно суммируемой для тех r_1 , при которых r_1^{-n} убывает быстрее, чем r_0^{-n} . Как показано на рис. 3.9, более высокая скорость убывания экспоненты обеспечивает быстрое затухание отсчетов произведения при положительных n и не может превратить отсчеты в бесконечные при отрицательных n , поскольку $x[n]z^{-n} = 0$ при $n < N_1$. Основываясь на этом свойстве, можно заключить, что ОС для правосторонних последовательностей распространяется на внешнюю сторону плоскости, ограниченную окружностью с центром в нуле. Радиус этой окружности фактически совпадает с модулем полюса функции $X(z)$, наиболее удаленного от нуля. Чтобы убедиться в этом, предположим, что полюсы расположены в точках $z = d_1, \dots, d_N$, причем $|d_1| \leq |d_2| \leq \dots \leq |d_N|$, т. е. d_1 — полюс с минимальным модулем, а d_N — с максимальным. Упрощая рассуждения, будем предполагать, что все полюсы различны, хотя аргументы легко обобщить и на случай кратных полюсов. Как мы увидим в § 3.4, отсчеты $x[n]$ в этом случае при $N_1 \leq n$ вычисляются как суммы экспонент

$$x[n] = \sum_{k=1}^N A_k(d_k)^n, \quad n \geq N_1. \quad (3.25)$$

Член этой суммы с самой медленной скоростью роста при возрастании n соответствует полюсу с минимальным модулем, т. е. d_1 , а с самой высокой — с максимальным модулем, т. е. d_N . Добавим к последовательности $x[n]$ экспоненциальные веса и рассмотрим равенства

$$x[n]r^{-n} = r^{-n} \sum_{k=1}^N A_k(d_k)^n = \quad (3.26)$$

$$= \sum_{k=1}^N A_k(d_k r^{-1})^n. \quad (3.27)$$

Для абсолютной суммируемости последовательности $x[n]r^{-n}$ достаточно абсолютной суммируемости каждой из экспонент суммы (3.27):

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |d_k r^{-1}|^n < \infty, \quad k = 1, \dots, N, \quad (3.28)$$

или, эквивалентное условие,

$$|r| > |d_k|, \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.29)$$

Поскольку абсолютная величина полюса d_N самая большая, то все эти неравенства будут выполнены при

$$|r| > |d_N|. \quad (3.30)$$

Иными словами, ОС — внешность круга радиуса $|d_N|$. Если $N_1 < 0$, бесконечно удаленная точка комплексной плоскости не входит в ОС, так как r^{-n} бесконечно при бесконечном r и отрицательном n .

Предыдущее рассуждение наводит на мысль, что доказательство свойства 5 (так же как и следующих двух) можно сделать абсолютно строгим. Суть аргументов заключается в том, что для абсолютной сходимости суммы последовательностей, умноженных на экспоненты, необходимо ограничить основания экспонент так, чтобы все экспоненциальные члены убывали с ростом n .

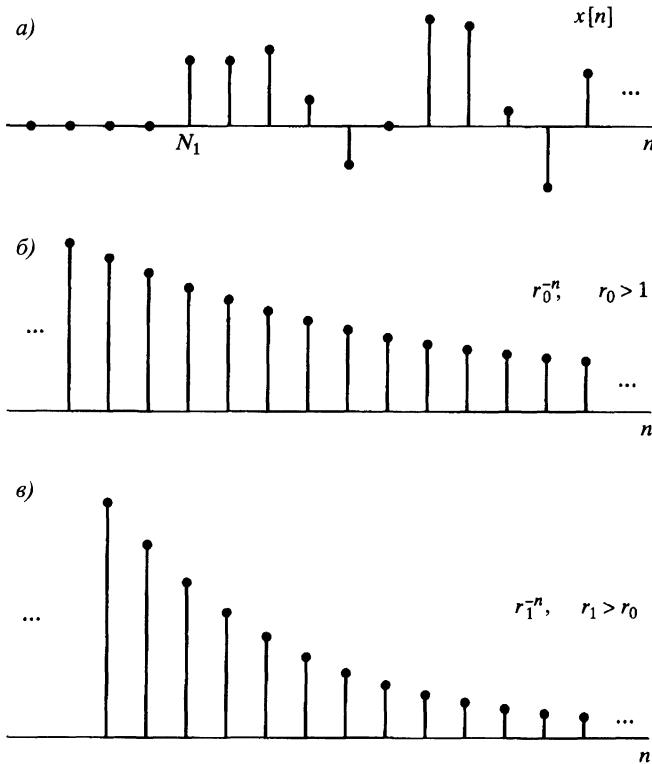


Рис. 3.9. Правосторонняя последовательность и ее произведение с экспоненциальной последовательностью для объяснения сходимости z-преобразования: а) правосторонняя последовательность $x[n]$; б) экспонента r_0^{-n} при $1 < r_0$; в) экспонента r_1^{-n} при $r_1 > r_0$

Свойство 6, касающееся левосторонних последовательностей, доказывается параллельным методом. Здесь $x[n]$ будет равно сумме экспонент вида (3.27), но для $n \leq N_2$, т. е.

$$x[n] = \sum_{k=1}^N A_k (d_k)^n, \quad n \leq N_2 \quad (3.31)$$

или, при умножении на экспоненту,

$$x[n]r^{-n} = \sum_{k=1}^N A_k (d_k r^{-1})^n, \quad n \leq N_2. \quad (3.32)$$

Так как $x[n]$ теперь простирается до $-\infty$ вдоль отрицательной полусоси n , значения r надо ограничить таким образом, чтобы при любом d_k последовательность

$(d_k r^{-1})^n$ убывала к нулю с убыванием n к $-\infty$. Таким образом, необходимо неравенство

$$|r| < |d_1|, \quad (3.33)$$

т. е. ОС — внутренность круга с центром в нуле и «минимальным» полюсом на границе. Если отсчеты левосторонней последовательности отличны от нуля при положительных n , то точка $z = 0$ не входит в ОС.

ОС для правосторонних последовательностей определяется тем, что все экспоненциальные члены должны убывать к нулю при возрастании n к ∞ , а для левосторонних — убыванием экспоненциальных членов при убывании n к $-\infty$. Если же мы имеем дело с двусторонней последовательностью, экспоненциальные члены должны быть сбалансированы, так как, если они убывают слишком быстро при возрастании n , они могут очень быстро расти при убывании n , и наоборот. Действительно, представим двустороннюю последовательность $x[n]$ в виде суммы левосторонней $x_-[n] = x[n]u[-n - 1]$ и правосторонней $x_+[n] = x[n]u[n]$ последовательностей ($x[n] = x_-[n] + x_+[n]$). Очевидно, z -преобразование последовательности $x[n]$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся z -преобразования последовательностей $x_{\pm}[n]$. ОС для $x_+[n]$ описывается неравенством $|z| > r_R$, где r_R — максимальный модуль полюса функции $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_+[n]z^{-n}$, а ОС последовательности $x_-[n]$ — неравенством $|z| < r_L$, где r_L — минимальный модуль функции $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_-[n]z^{-n}$.

Формальное доказательство свойства 8 довольно громоздко и труднопонимаемо. Однако оно легко следует из свойств 4 и 7. Действительно, сигналы можно разбить на 4 группы: ограниченной длительности, правосторонние, левосторонние и двусторонние. По разобранным свойствам ОС сигналов каждого класса является связной (вся комплексная плоскость за возможным исключением конечного числа точек, внутренность или внешность круга и кольца). Поскольку любой сигнал принадлежит одной из этих групп, то ОС его z -преобразования связна.

Бывают ситуации, когда ОС правой и левой частей последовательности не перекрываются, т. е. $r_L < r_R$. Примером служит последовательность $x[n] = \frac{1}{2^n}u[n] - \frac{(-1)^n}{3^n}u[-n - 1]$, z -преобразование которой просто не существует. Однако можно использовать z -преобразование, рассматривая последовательность как сумму двух, для каждой из которых z -преобразование определено.

Как мы уже отмечали, сравнивая примеры 3.1 и 3.2, алгебраические формулы или схемы нулей и полюсов характеризуют z -преобразование неполно. Для завершенности картины необходимо учитывать ОС. Свойства, рассмотренные в этом параграфе, ограничивают возможности расположения ОС при известной схеме нулей и полюсов. В качестве иллюстрации рассмотрим схему нулей и полюсов, приведенную на рис. 3.10, а).

Из свойств 1, 3 и 8 следует, что существуют только четыре возможные конфигурации ОС. Все они отмечены на рис. 3.10, б)–д) и соответствуют разным последовательностям. Ситуация на рис. 3.10, б) отвечает правосторонней последовательности, на рис. 3.10, в) — левосторонней, в то время как оставшиеся ОС —

разным двусторонним последовательностям. Если дополнительно предположить, что единичная окружность проходит между полюсами $z = b$ и $z = c$, то только у одной из соответствующих четырех последовательностей определен Фурьеобраз, а именно у последовательности с ОС, изображенной на рис. 3.10, δ).

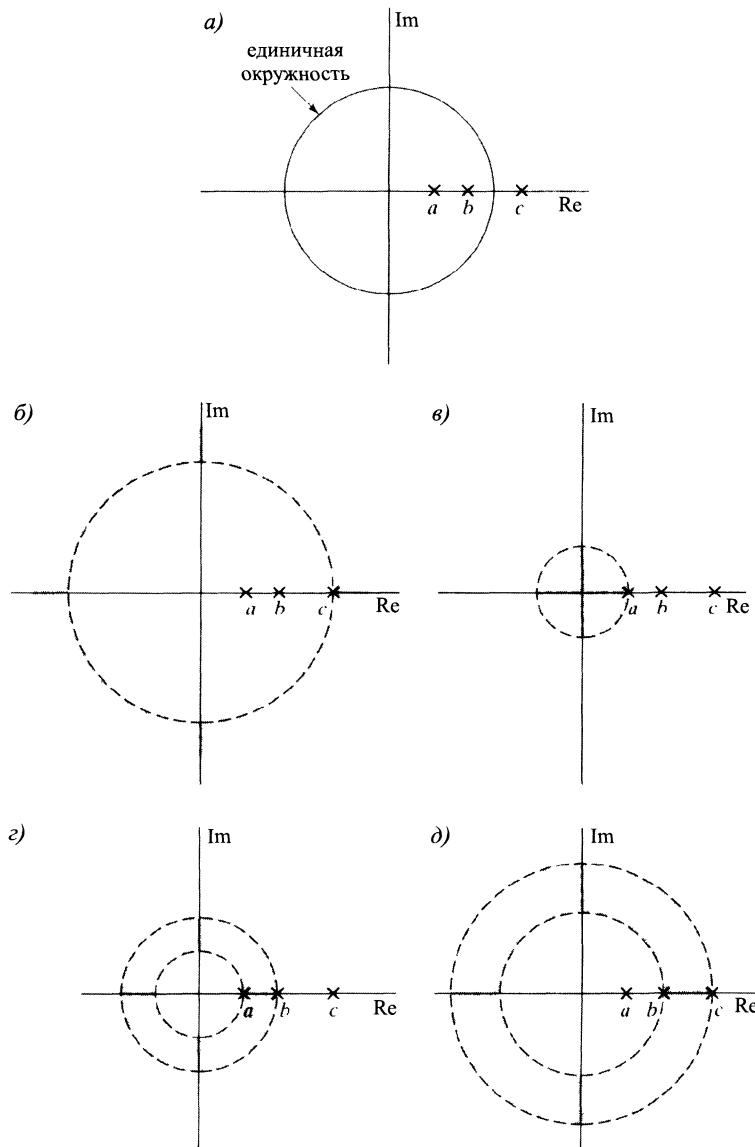


Рис. 3.10. Примеры z -преобразования с неизменной схемой нулей и полюсов, иллюстрирующие различные возможности расположения ОС. Каждая из ОС соответствует разным последовательностям: а) схема нулей и полюсов; б) правосторонняя последовательность; в) левосторонняя последовательность; г) двусторонняя последовательность; д) двусторонняя последовательность

Отдельные свойства последовательности тесно связаны с конфигурацией ОС ее z-преобразования, что иллюстрируется следующим примером.

Пример 3.7. Устойчивость, детерминированность и ОС

Рассмотрим систему с импульсной характеристикой $h[n]$, схема нулей и полюсов z-преобразования $H(z)$ которой изображена на рис. 3.11. Согласно свойствам 1–8 такой схеме нулей и полюсов могут отвечать три возможные ОС. Однако если мы дополнительно укажем, что система устойчива (что равносильно абсолютной суммируемости последовательности $h[n]$ и, следовательно, существованию ее Фурье-образа), то ОС должна содержать единичную окружность. Таким образом, устойчивость и свойства 1–8 гарантируют, что ОС — это кольцо $\frac{1}{2} < |z| < 2$. Заметим, что в качестве следствия мы получили двусторонность последовательности $h[n]$, т. е. недетерминированность системы.

Предположив вместо устойчивости системы ее детерминированность, мы приDEM к выводу о правосторонности последовательности $h[n]$. Тогда, согласно свойству 5, ОС будет описываться неравенством $|z| > 2$, и система не может быть устойчивой. Иначе говоря, при таком расположении нулей и полюсов не найдется ОС, которая говорила бы как об устойчивости системы, так и о ее детерминированности. □



Рис. 3.11. Схема нулей и полюсов функции $H(z)$ примера 3.7

3.4. Обратное z-преобразование

Одно из важнейших приложений z-преобразования лежит в области анализа линейных систем. Часто этот анализ заключается в вычислении z-преобразования последовательности, некоторых преобразованиях соответствующего алгебраического выражения и поиске обратного z-преобразования. Есть ряд формальных и неформальных методов восстановления последовательности по алгебраическому выражению ее z-преобразования и ОС. Формальный подход к обратному z-преобразованию основывается на интегральной теореме Коши ([25]). Однако для типичных последовательностей и их z-преобразований, встречающихся при анализе дискретных линейных систем, предпочтительны менее формальные процедуры. В подпараметрах 3.4.1–3.4.3 рассматриваются некоторые из этих процедур, а именно: табличный метод, метод простейших дробей и метод разложения в степенные ряды.

3.4.1. Табличный метод

Табличный метод состоит в использовании известных последовательностей и функций, связанных z-преобразованием. Например, в § 3.2 мы вычислили z-преобразование последовательности $x[n] = a^n u[n]$, где a может быть как вещественным, так и комплексным числом. Последовательности такого типа возникают

довольно часто, и поэтому полезно помнить z-преобразование

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|. \quad (3.34)$$

Если нам нужно найти обратное z-преобразование от функции

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}, \quad (3.35)$$

и мы помним о связи (3.34), то задача сильно упрощается: $x[n] = \frac{1}{2^n}u[n]$. Если ОС в формуле (3.35) задана как $|z| < \frac{1}{2}$, то можно воспользоваться парой 6 из табл. 3.1 и получить $x[n] = -\frac{1}{2^n}u[-n - 1]$.

Таблицы результатов z-преобразования, аналогичные табл. 3.1, — главный инструмент табличного метода. Если таблица достаточно велика, то, представив данную функцию как сумму, каждое слагаемое которой содержится в таблице, можно восстановить исходную последовательность почленно.

3.4.2. Метод простейших дробей

Как уже было сказано, обратное z-преобразование можно вычислять, пользуясь таблицами. Иногда имеющаяся у вас таблица не содержит данную функцию $X(z)$ в явном виде. Однако не исключена возможность получить эквивалентное алгебраическое выражение, части которого в таблице присутствуют. Таким свойством обладают рациональные функции, т. е. отношения двух многочленов от переменной z^{-1} , которые довольно часто возникают при исследовании ЛС-систем.

Способ получения удобного выражения рациональной функции называется методом простейших дробей. Расскажем о нем подробно. Любую рациональную функцию от z^{-1} можно записать в виде

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}. \quad (3.36)$$

При этом принято считать, что $b_M \neq 0$ и $a_N \neq 0$. Предположим дополнительно, что $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$ и перепишем функцию как

$$X(z) = \frac{z^N \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{z^M \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}}. \quad (3.37)$$

Теперь видно, что у функции $X(z)$ есть M нулей и N полюсов, расположенных в конечной части комплексной плоскости, не содержащей $z = 0$. Кроме того, у этой функции в точке $z = 0$ есть либо $(M - N)$ -кратный полюс, если $M > N$, либо $(N - M)$ -кратный нуль, если $N > M$. Другими словами, число нулей в конечной части комплексной плоскости функции вида (3.36) совпадает с числом полюсов, причем у этой функции в точке $z = \infty$ ни нулей, ни полюсов нет. Для разложения $X(z)$ в сумму простейших дробей необходимо заметить, что ее

можно переписать как

$$X(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}, \quad (3.38)$$

где $c_k \neq 0$ — нули функции $X(z)$, а $d_k \neq 0$ — ее полюса. Если $M < N$ и кратность всех полюсов равна 1, то $X(z)$ представима в виде

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}. \quad (3.39)$$

Очевидно, общий знаменатель дробей из суммы (3.39) совпадает со знаменателем дроби (3.38). Умножая обе части равенства (3.39) на $(1 - d_k z^{-1})$ и вычисляя значение произведения в точке $z = d_k$, можно найти коэффициент A_k :

$$A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z=d_k}. \quad (3.40)$$

Пример 3.8. Рациональная функция второй степени

Рассмотрим последовательность $x[n]$ с z-преобразованием

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2}. \quad (3.41)$$

Схема нулей и полюсов функции $X(z)$ показана на рис. 3.12. Учитывая данную в условии ОС и свойство 5 (с. 120), мы видим, что $x[n]$ — правосторонняя последовательность. Поскольку оба полюса имеют кратность один, $X(z)$ можно записать в виде суммы (3.39):

$$X(z) = \frac{A_1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}.$$

Из (3.40) получаем

$$A_1 = (1 - \frac{1}{4}z^{-1}) X(z) \Big|_{z=1/4} = -1,$$

$$A_2 = (1 - \frac{1}{2}z^{-1}) X(z) \Big|_{z=1/2} = 2.$$

Следовательно,

$$X(z) = \frac{-1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}.$$

Ввиду того, что $x[n]$ — правосторонняя последовательность, ОС каждого из ее слагаемых — внешность круга с полюсом на границе. Из табл. 3.1 и линейности z-преобразования находим, что

$$x[n] = \frac{2}{2^n} u[n] - \frac{1}{4^n} u[n]. \quad \square$$

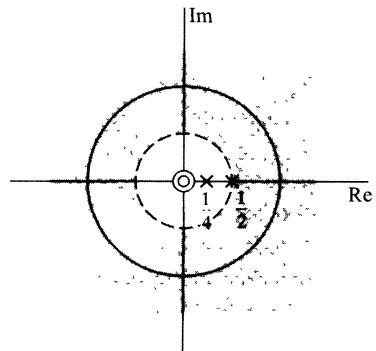


Рис. 3.12. Схема нулей и полюсов и ОС функции из примера 3.8

Очевидно, что степень числителя (относительно переменной z^{-1}), получающегося при сложении дробей в равенстве (3.39) не превосходит $(N - 1)$. Если $M \geq N$, то к правой части равенства (3.39) необходимо добавить многочлен степени $(M - N)$. Поэтому при $M \geq N$ формула разложения дроби в сумму простейших выглядит как

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}. \quad (3.42)$$

Если дана рациональная функция вида (3.36) с $M \geq N$, коэффициенты B_r можно найти делением в столбик числителя на знаменатель. Степень получающегося остатка будет уже меньше степени знаменателя. После этого коэффициенты A_k можно вычислить по формуле (3.40).

Если $X(z)$ обладает кратным полюсом и $M \geq N$, формулу (3.42) необходимо модифицировать дальше. В частности, если $X(z)$ имеет полюс кратности s в точке $z = d_i$, а кратность остальных полюсов — единица, то формула (3.42) перепишется как

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^s \frac{C_m}{(1 - d_i z^{-1})^m}. \quad (3.43)$$

Коэффициенты A_k и B_r вычисляются как и ранее, а коэффициенты C_m можно отыскать по формуле:

$$C_m = \frac{1}{(s-m)!(-d_i)^{s-m}} \left. \left(\frac{d^{s-m}}{dw^{s-m}} ((1-d_i w)^s X(w^{-1})) \right) \right|_{w=d_i^{-1}}. \quad (3.44)$$

Формула (3.43) дает наиболее полный вид разложения рациональной функции от переменной z^{-1} с кратным полюсом в точке d_i в сумму многочлена и простейших дробей для случая $M \geq N$. Если существует не один, а несколько кратных полюсов, в этой формуле появятся дополнительные члены, аналогичные третьей сумме в формуле, для каждого кратного полюса. Если же кратных полюсов у функции $X(z)$ вообще нет, формула (3.43) упрощается до формулы (3.42). Если степень знаменателя больше степени числителя ($N > M$), то полиномиальная часть формул (3.42) и (3.43) становится равной нулю.

Мы могли достичь того же результата, предполагая, что z -преобразование — рациональная функция переменной z , а не z^{-1} . Иными словами, вместо множителей $(1 - az^{-1})$ мы могли бы рассматривать множители $(z - a)$. Такая замена переменной приводит к ряду формул, аналогичных равенствам (3.38)–(3.44), которые удобнее использовать при работе с таблицами z -преобразования, выраженного как функция от z . Поскольку табл. 3.1 заполнена функциями от переменной z^{-1} , приведенные выше формулы представляют для нас большую ценность.

В качестве примера предположим, что $X(z)$ имеет полюса только первого порядка, и можно воспользоваться равенством (3.42) для разложения функции $X(z)$ в сумму многочлена и простейших дробей. Напомним, что операция z -преобразования линейна, поэтому достаточно найти обратное z -преобразование каждого слагаемого, а затем сложить результаты и получить $x[n]$.

Члены $B_r z^{-r}$ соответствуют сдвигам единичного импульса, умноженного на константу, т. е. последовательностям $B_r \delta[n - r]$. Дробные члены $\frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}$ отвеча-

ют за одну из последовательностей: $(d_k)^n u[n]$ или $-(d_k)^n u[-n - 1]$. Чтобы выбрать одну из них, нужно вспомнить свойства ОС (с. 120–121). Из них следует, что если $X(z)$ имеет только простые полюса (кратности 1) и ОС описывается неравенством $r_R < |z| < r_L$, то данный полюс d_k соответствует правосторонней последовательности $(d_k)^n u[n]$, если $|d_k| < r_R$; этот же полюс соответствует левосторонней последовательности, если $|d_k| > r_L$. Таким образом, можно использовать ОС для сортировки полюсов. Кратные полюсы разбиваются на две группы аналогично. Пример 3.9 иллюстрирует описанный прием для выбора одной из двух возможных последовательностей при вычислении обратного z-преобразования.

Пример 3.9. Метод простейших дробей в обратном z-преобразовании

Рассмотрим последовательность $x[n]$, чье z-преобразование имеет вид

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}, \quad |z| > 1. \quad (3.45)$$

Схема нулей и полюсов функции $X(z)$ показана на рис. 3.13. Учитывая свойство 5 (с. 120) и ОС, приведенную на рисунке, убеждаемся, что $x[n]$ — правосторонняя последовательность. Так как $M = N = 2$, а кратность полюсов равна 1, то $X(z)$ можно переписать в виде

$$X(z) = B_0 + \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - z^{-1}}.$$

Константу B_0 ищем делением в столбик.

$$\begin{array}{r} z^{-2} + 2z^{-1} + 1 \\ z^{-2} - 3z^{-1} + 2 \\ \hline 5z^{-1} - 1 \end{array}$$

Поскольку степень числителя и знаменателя в нашем примере совпадают, потребовался лишь один шаг деления для вычисления остатка. Итак, $X(z)$ можно переписать как

$$X(z) = 2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}. \quad (3.46)$$

Теперь находим коэффициенты A_1 и A_2 по формулам (3.40)–(3.45). Учитывая (3.46), получаем

$$A_1 = \left. \left(\left(2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \right) \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1} \right) \right) \right|_{z=1/2} = -9,$$

$$A_2 = \left. \left(\left(2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \right) (1 - z^{-1}) \right) \right|_{z=1} = 8.$$

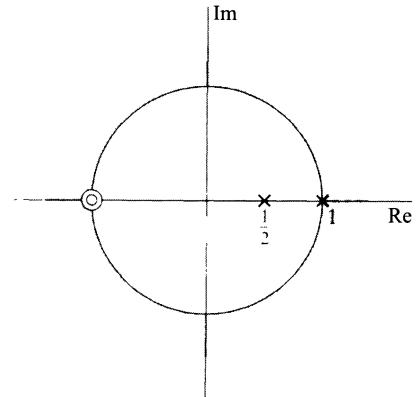


Рис. 3.13. Схема нулей и полюсов z-преобразования из примера 3.9

Следовательно,

$$X(z) = 2 - \frac{9}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1 - z^{-1}}. \quad (3.47)$$

Поскольку ОС описывается неравенством $|z| > 1$, из табл. 3.1 находим

$$2 \xleftrightarrow{z} 2\delta[n], \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \xleftrightarrow{z} \frac{1}{2^n}u[n], \quad \frac{1}{1 - z^{-1}} \xleftrightarrow{z} u[n].$$

Наконец, благодаря линейности z-преобразования получаем

$$x[n] = 2\delta[n] - \frac{9}{2^n}u[n] + 8u[n]. \quad \square$$

В § 3.5 обсуждаются различные полезные свойства z-преобразования, которые вместе с методом разложения дроби в сумму простейших дают способ вычисления обратного z-преобразования функции $X(z)$ с учетом ОС даже в том случае, когда $X(z)$ нельзя в точности записать в виде (3.38).

3.4.3. Разложение в степенные ряды

Z-преобразование определяется как ряд Лорана, коэффициентами которого служат отсчеты последовательности $x[n]$. Таким образом, если z-преобразование задано степенным рядом

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \cdots + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots, \quad (3.48)$$

мы можем найти любой конкретный отсчет последовательности $x[n]$, глядя на коэффициент при подходящей степени z^{-1} . Мы уже применяли этот подход при поиске обратного преобразования полиномиальной части рациональной функции при $M > N$. Такой способ очень полезен при работе с последовательностями конечной длины, z-преобразование которых может и не иметь более простой формы записи, чем в виде многочлена от z^{-1} .

Пример 3.10. Последовательности конечной длины

Пусть

$$X(z) = z^2(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + z^{-1})(1 - z^{-1}). \quad (3.49)$$

Хотя $X(z)$ рациональная функция, она имеет полюс только в $z = 0$. Поэтому метод разложения на простейшие дроби здесь неприменим. Однако, раскрывая скобки в произведении (3.49), мы видим, что

$$X(z) = z^2 - \frac{1}{2}z - 1 + \frac{1}{2}z^{-1}.$$

Следовательно, сравнивая полученное выражение с рядом (3.48), находим

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = -2, \\ -\frac{1}{2}, & n = -1, \\ -1, & n = 0, \\ \frac{1}{2}, & n = 1, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Значит,

$$x[n] = \delta[n+2] - \frac{1}{2}\delta[n+1] - \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]. \quad \square$$

При вычислении z-преобразования последовательности, мы, как правило, суммируем ряд (3.48), стремясь найти простое математическое выражение, например рациональную функцию. Если же мы используем степенной ряд для поиска последовательности, соответствующей данной функции $X(z)$, записанной в компактной форме, нам необходимо разложить $X(z)$ в степенной ряд. Разложение некоторых стандартных трансцендентных функций, таких как \ln , \sin , sh и т. д., известно и занесено в соответствующие таблицы. В некоторых случаях эти ряды могут интерпретироваться как z-преобразование (см. пример 3.11). Разложение в ряд рациональных функций можно получить делением в столбик, как это продемонстрировано в примерах 3.12 и 3.13.

Пример 3.11. Вычисление обратного преобразования с помощью степенных рядов

Рассмотрим z-преобразование

$$X(z) = \ln(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|. \quad (3.50)$$

Используя известное разложение функции $\ln(1 + x)$ в степенной ряд, который сходится при $|x| < 1$, получим

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n}.$$

Следовательно,

$$x[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n}, & n \geq 1, \\ 0, & n \leq 0. \end{cases} \quad (3.51)$$

Пример 3.12. Разложение в ряд методом деления в столбик

Рассмотрим z-преобразование

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|. \quad (3.52)$$

Поскольку ОС — внешность круга, соответствующая последовательность будет правосторонней. Более того, так как $X(z)$ стремится к константе при стремлении z к бесконечности, последовательность является детерминированной. Поэтому, проводя деление, мы получим ряд по степеням z^{-1} :

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline - \frac{1 - az^{-1}}{az^{-1}} \\ \hline az^{-1} \\ - \frac{az^{-1} - a^2 z^{-2}}{a^2 z^{-2}} \\ \hline a^2 z^{-2} + \dots \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 1 - az^{-1} \\ \hline 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots \end{array} \right.$$

Значит, $\frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots$, откуда $x[n] = a^n u[n]$. \square

Пример 3.13. Разложение в ряд z-преобразования левосторонней последовательности

В качестве еще одного примера можно рассмотреть то же самое отношение многочленов, что и в (3.52), но с другой ОС:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| < |a|. \quad (3.53)$$

Здесь мы имеем дело с левосторонней последовательностью. Причем так как значение $X(0)$ конечно, то $x[n] = 0$ при $n > 0$. Поэтому деление в столбик дает нам разложение функции по степеням z :

$$\begin{array}{r} X(z) = \frac{z}{-a + z}. \\ \hline - \begin{array}{r} z \\ z - a^{-1}z^2 \\ \hline a^{-1}z^2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} -a + z \\ -a^{-1}z - a^{-2}z^2 + \dots \end{array} \right. \\ \hline - \begin{array}{r} a^{-1}z^2 - a^{-2}z^3 \\ a^{-2}z^3 + \dots \end{array} \end{array}$$

Следовательно, $x[n] = -a^n u[-n - 1]$. \square

3.5. Свойства z-преобразования

Многие из свойств z-преобразования оказывают реальную практическую помощь при исследовании дискретных сигналов и систем. Например, их применяют совместно с техникой, развитой в § 3.4, для вычисления обратного z-преобразования от довольно сложных алгебраических выражений. В главе 5 мы увидим, что эти свойства образуют основу для преобразования линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами в алгебраические уравнения. Здесь мы рассматриваем наиболее часто используемые свойства. Далее $X(z)$ будет обозначать z-преобразование последовательности $x[n]$, а символом R_x мы обозначим ОС этого z-преобразования, т. е.

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z), \quad z \in R_x.$$

Как мы убедились, R_x состоит из множества точек z , удовлетворяющих двойному неравенству $r_R < |z| < r_L$. Если речь будет идти о паре последовательностей, мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z), \quad z \in R_{x_1}; \quad x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_2(z), \quad z \in R_{x_2}.$$

3.5.1. Линейность

Свойство линейности говорит, что

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z), \quad R_{ax_1+bx_2} \supset R_{x_1} \cap R_{x_2}.$$

Оно непосредственно следует из определения z-преобразования (3.2). Как отмечено выше, ОС линейной комбинации z-преобразований состоит по крайней мере

из пересечения ОС, участвующих в комбинации z -преобразований. Предположим, что $X_i(z)$ — рациональные функции, а множество полюсов $aX_1(z) + bX_2(z)$ совпадает с объединением множеств полюсов слагаемых (т. е. ни одна из пар нуль-полюс не сократилась). Тогда ОС линейной комбинации в точности совпадает с пересечением ОС. Если же линейная комбинация такова, что у нее появляются нули, сокращающиеся с какими-то полюсами слагаемых, то ОС линейной комбинации может оказаться больше. Простейший пример такой ситуации возникает, когда последовательности $x_i[n]$ бесконечны, а их линейная комбинация конечна. Тогда ОС линейной комбинации — вся комплексная плоскость, исключая, возможно, точки $z = 0$ и $z = \infty$. Конкретная последовательность, обладающая таким свойством, приведена в примере 3.6:

$$x[n] = a^n u[n] - a^n u[n - N].$$

Как $a^n u[n]$, так и $a^n u[n - N]$ — бесконечные правосторонние последовательности, а их z -преобразования обладают простым полюсом в точке $z = a$. Следовательно, ОС z -преобразований этих последовательностей описываются одним неравенством: $|z| > |a|$. Однако, как показано в примере 3.6, полюс $z = a$ в линейной комбинации, дающей $x[n]$, сокращается с нулем в этой же точке, и ОС z -преобразования $x[n]$ — вся комплексная плоскость, за исключением точки $z = 0$.

Мы уже пользовались свойством линейности в наших предыдущих рассуждениях, когда, например, искали обратное z -преобразование от рациональной функции. При этом мы раскладывали функцию в сумму простейших дробей, вычисляли их обратное z -преобразование и получали ответ в виде суммы обратных z -преобразований слагаемых.

3.5.2. Задержка

Согласно свойству задержки,

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z), \quad x \in R'_x,$$

где R'_x совпадает с R_x за исключением добавления или удаления точек $z = 0$ или $z = \infty$. Число n_0 здесь, конечно, целое. Если оно положительно, исходная последовательность $x[n]$ сдвигается вправо, а если отрицательно — то влево. Как и в свойстве линейности, ОС при задержке может измениться, поскольку множитель z^{-n_0} может аннулировать полюс в одной из точек: $z = 0$ или $z = \infty$.

Выход этой формулы — простой анализ определения z -преобразования (3.2). Действительно, если $y[n] = x[n - n_0]$, соответствующее z -преобразование имеет вид

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - n_0] z^{-n}.$$

Меняя параметр суммирования на $m = n - n_0$, получаем

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-(m+n_0)} = z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-m} = z^{-n_0} X(z).$$

Свойство задержки часто оказывается полезным в сочетании с другими свойствами и процедурами при вычислении обратного z -преобразования. Проиллюстрируем это примером.

Пример 3.14. Задержка экспоненциальной последовательности

Рассмотрим z-преобразование

$$X(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{4}}, \quad |z| > \frac{1}{4}.$$

Из ОС следует, что это z-преобразование правосторонней последовательности. Прежде всего перепишем $X(z)$ в виде дроби (3.38) с $M = N = 1$:

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4}. \quad (3.54)$$

Пользуясь формулой (3.42), разложим $X(z)$ в сумму константы и простейших дробей:

$$X(z) = -4 + \frac{4}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}. \quad (3.55)$$

Из равенства (3.55) следует, что $x[n]$ может быть записана как

$$x[n] = -4\delta[n] + \frac{4}{4^n}u[n]. \quad (3.56)$$

Другой способ восстановления последовательности $x[n]$ состоит в применении свойства задержки. Сначала представим $X(z)$ как

$$X(z) = z^{-1} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \right), \quad |z| > \frac{1}{4}. \quad (3.57)$$

Благодаря свойству задержки, множитель z^{-1} из формулы (3.57) можно интерпретировать как эффект сдвига на один отсчет вправо последовательности $\frac{1}{4^n}u[n]$, т. е.

$$x[n] = \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} u[n-1]. \quad (3.58)$$

Легко проверить, что правые части равенств (3.56) и (3.58) представляют одну и ту же последовательность. \square

3.5.3. Умножение на экспоненциальную последовательность

При умножении последовательности на экспоненциальную z-преобразование меняется по правилу:

$$z_0^n x[n] \xrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad R_{z_0 x} = |z_0|R_x.$$

Запись $R_{z_0 x} = |z_0|R_x$ означает, что ОС R_x умножается на $|z_0|$, т. е. если R_x состоит из таких z , для которых $r_R < |z| < r_L$, то $|z_0|R_x$ описывается неравенством $|z_0|r_R < |z| < |z_0|r_L$.

Справедливость этого свойства легко доказывается подстановкой $z_0^n x[n]$ в определение (3.2). Как следствие свойства умножения на экспоненциальную последовательность, получаем, что нули и полюса функции $X(z)$ умножаются на z_0 . Действительно, если $z = z_1$ — полюс функции $X(z)$, то функция $X\left(\frac{z}{z_0}\right)$ будет

обладать полюсом в точке $z = z_0 z_1$. Если z_0 — положительное вещественное число, то преобразование схемы нулей можно интерпретировать как гомотетию с коэффициентом z_0 и центром в нуле, т. е. положение полюсов и нулей меняется вдоль лучей с вершиной в нуле. Если z_0 — комплексное число с единичным модулем, т. е. $z_0 = e^{j\omega_0}$, то преобразование схемы нулей — это поворот вокруг нуля на угол ω_0 . Иными словами, положение нулей и полюсов меняется вдоль концентрических окружностей с нулевым центром. Это же преобразование можно интерпретировать как частотный сдвиг или трансформацию, связанную с временной модуляцией за счет комплексной экспоненциальной последовательности $e^{j\omega_0 n}$. Таким образом, если существует соответствующий Фурье-образ, то это свойство можно переписать как

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j(\omega - \omega_0)}).$$

Пример 3.15. Умножение на экспоненту

Начав с пары

$$u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1, \quad (3.59)$$

мы можем, опираясь на предыдущее свойство, определить z-преобразование последовательности

$$x[n] = r^n \cos(\omega_0 n) u[n]. \quad (3.60)$$

Запишем сначала $x[n]$ как

$$x[n] = \frac{1}{2} (r e^{j\omega_0})^n u[n] + \frac{1}{2} (r e^{-j\omega_0})^n u[n].$$

Теперь, используя соответствие (3.59) и свойство умножения на экспоненту, получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (r e^{j\omega_0})^n u[n] &\xleftrightarrow{z} \frac{\frac{1}{2}}{1 - r e^{j\omega_0} z^{-1}}, \quad |z| > r, \\ \frac{1}{2} (r e^{-j\omega_0})^n u[n] &\xleftrightarrow{z} \frac{\frac{1}{2}}{1 - r e^{-j\omega_0} z^{-1}}, \quad |z| > r. \end{aligned}$$

Тогда, по свойству линейности

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - r e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - r e^{-j\omega_0} z^{-1}} = \\ &= \frac{1 - r z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2 r z^{-1} \cos \omega_0 + r^2 z^{-2}}, \quad |z| > r. \quad \square \end{aligned} \quad (3.61)$$

3.5.4. Дифференцирование $X(z)$

Свойство производной утверждает, что

$$n x[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{d X(z)}{dz}, \quad R_{nx} = R_x.$$

Доказательство получается с помощью дифференцирования равенства (3.2), т. е.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n},$$

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = -z \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)x[n]z^{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} = \mathcal{Z}\{nx[n]\}.$$

Пример 3.16. Обратное z-преобразование от трансцендентной функции

Используем свойство производной вместе со свойством задержки для вычисления обратного z-преобразования от функции, рассмотренной в примере 3.11. Пусть

$$X(z) = \ln(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|.$$

Продифференцируем эту функцию и получим дробное выражение:

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{-az^{-2}}{1 + az^{-1}}.$$

Из свойства производной вытекает, что

$$nx[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}, \quad |z| > |a|. \quad (3.62)$$

Обратное z-преобразование правой части формулы (3.62) можно найти, комбинируя результат примера 3.1, свойство линейности и свойство задержки:

$$nx[n] = a(-a)^{n-1}u[n-1].$$

Следовательно,

$$x[n] = (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n} u[n-1] \xleftrightarrow{z} \ln(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|. \quad \square$$

Пример 3.17. Полюс второго порядка

Второй пример привлечения свойства производной состоит в вычислении z-преобразования последовательности

$$x[n] = na^n u[n] = n(a^n u[n]).$$

Свойство производной, приложенное к результату примера 3.1, дает:

$$X(z) = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|.$$

Значит,

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|. \quad \square$$

3.5.5. Сопряжение комплексной последовательности

Свойство сопряжения, которое коротко можно записать как

$$x^*[n] \xleftrightarrow{z} X^*(z^*), \quad R_{x^*} = R_x,$$

следует непосредственно из определения z-преобразования. Детали проверки остаются читателю в качестве упражнения (задача 3.51).

3.5.6. Обращение времени

По свойству обращения времени

$$x^*[-n] \xleftrightarrow{z} X^*\left(\frac{1}{z^*}\right), \quad z \in \frac{1}{R_x}.$$

Запись $\frac{1}{R_x}$ означает, что множество R_x подвергается инверсии, т. е. если R_x состоит из тех z , для которых $r_R < |z| < r_L$, то множество $\frac{1}{R_x}$ включает в себя точки z , удовлетворяющие неравенству $\frac{1}{r_L} < |z| < \frac{1}{r_R}$. Таким образом, если z_0 лежит в ОС z-преобразования последовательности $x[n]$, то $\frac{1}{z_0}$ попадает в ОС z-преобразования для $x^*[-n]$. Если $x[n]$ — вещественноизначная последовательность или мы опускаем сопряжение комплекснозначной, то результат будет таким:

$$x[-n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in \frac{1}{R_x}.$$

Как и свойство сопряжения, свойство обращения времени вытекает из определения z-преобразования (проверка — в задаче 3.51).

Пример 3.18. Обращение времени в экспоненциальной последовательности

Рассмотрим последовательность

$$x[n] = a^{-n} u[-n],$$

которая обращена во времени относительно $a^n u[n]$. Из свойства обращения времени следует, что

$$X(z) = \frac{1}{1 - az} = \frac{-a^{-1}z^{-1}}{1 - a^{-1}z^{-1}}, \quad |z| < |a^{-1}|. \quad \square$$

3.5.7. Свертка последовательностей

Согласно формуле свертки

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z)X_2(z), \quad R_{x_1 * x_2} \supset R_{x_1} \cap R_{x_2}.$$

Для вывода формулы рассмотрим последовательность

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k].$$

Тогда

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k] \right) z^{-n}.$$

Поменяв порядок суммирования, получим

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k] z^{-n}.$$

Меняя параметр суммирования во второй сумме на $m = n - k$, придем к выражению

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2[m] z^{-m} \right) z^{-k}.$$

Таким образом, для точек z , принадлежащих пересечению ОС рядов $X_1(z)$ и $X_2(z)$, можно записать

$$Y(z) = X_1(z)X_2(z).$$

Значит, ОС ряда $Y(z)$ содержит в себе пересечение ОС рядов $X_1(z)$ и $X_2(z)$. Если полюс, лежащий на границе ОС одного из z -преобразований, компенсируется нулем другого, то ОС для $Y(z)$ может оказаться больше. Как мы убедимся в главе 5, формула свертки играет важную роль при анализе ЛС-систем. Как следствие этой формулы, z -преобразование реакции ЛС-системы на поданный сигнал является произведением z -преобразований самого сигнала и импульсной характеристики системы. Z -преобразование импульсной характеристики ЛС-системы обычно называют *характеристической функцией*.

Пример 3.19. Вычисление свертки через z -преобразование

Пусть $x_1[n] = a^n u[n]$ и $x_2[n] = u[n]$. Соответствующие z -преобразования равны

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, & |z| > |a|, \\ X_2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}, & |z| > 1. \end{aligned}$$

Если $|a| < 1$, z -преобразование свертки последовательностей $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$ выглядит как

$$Y(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{z^2}{(z - a)(z - 1)}, \quad |z| > 1. \quad (3.63)$$

Нули и полюса функции $Y(z)$ отмечены на рис. 3.14. ОС соответствующего ряда — пересечение ОС z -преобразований сворачиваемых последовательностей. Последовательность $y[n]$ можно восстановить, вычисляя обратное z -преобразование. Раскладывая $Y(z)$ по формуле (3.63) в сумму простейших дробей, получаем

$$Y(z) = \frac{1}{1 - a} \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{a}{1 - az^{-1}} \right), \quad |z| > 1.$$

Следовательно,

$$y[n] = \frac{1}{1 - a} (u[n] - a^{n+1} u[n]). \quad \square$$

3.5.8. Теорема о начальном значении

Если последовательность $x[n]$ удовлетворяет условию $x[n] = 0$ при $n < 0$ (т. е. она детерминирована), то

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z).$$

Эта теорема доказывается с помощью вычисления предела у каждого члена ряда (3.2) (см. задачу 3.56).

3.5.9. Несколько слов в заключение

Мы сформулировали и обсудили ряд свойств z -преобразования, многие из которых полезны при вычислении z -преобразования и обратной операции. Эти свойства для удобства читателя сведены в табл. 3.2.

3.6. Краткое содержание главы

В этой главе мы определили z -преобразование последовательности и показали, что оно обобщает преобразование Фурье. Основное внимание было уделено свойствам z -преобразования и технике его вычисления, а также восстановлению последовательности по данному z -преобразованию. Мы показали, что ряд, определяющий z -преобразование, может сходиться, в то время как преобразование Фурье не определено. Была исследована связь ОС со свойствами последовательности. Ясное понимание этой связи необходимо для грамотного использования z -преобразования. Особенно это важно при восстановлении последовательности по данному z -преобразованию, т. е. при вычислении обратного z -преобразования. Наибольшее внимание было уделено рациональным функциям. Мы рассказали о методе вычисления обратного z -преобразования для таких функций, основанном на разложении дроби в сумму простейших. Кроме того, обсуждались методы поиска обратного z -преобразования, базирующиеся на разложении функции в ряд как с помощью таблиц, так и с помощью непосредственного деления.

Важная часть главы посвящена обсуждению отдельных свойств z -преобразования, наиболее полезных при анализе дискретных сигналов и систем. Многообразные примеры иллюстрируют применение этих свойств при вычислении прямого и обратного z -преобразования.

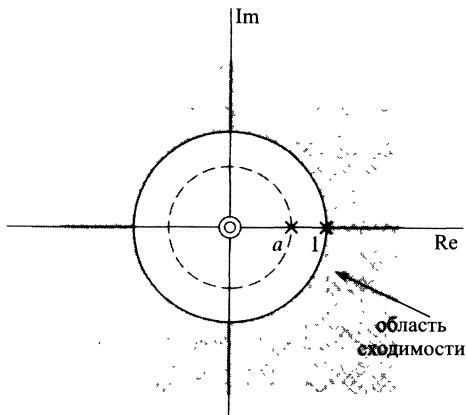


Рис. 3.14. Схема нулей и полюсов z -преобразования свертки последовательностей $u[n]$ и $a^n u[n]$

Таблица 3.2. Некоторые свойства z-преобразования

Раздел	Последова- тельность	Z-преобра- зование	ОС
	$x[n]$	$X(z)$	R_x
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_{x_1}
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_{x_2}
1. 3.5.1	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	$\supset R_{x_1} \cap R_{x_2}$
2. 3.5.2	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0} X(z)$	R_x , за исключением добавления или удаления $z = 0$ и $z = \infty$
3. 3.5.3	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$ z_0 R_x$
4. 3.5.4	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	R_x , за исключением добавления или удаления $z = 0$ и $z = \infty$
5. 3.5.5	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
6.	$\operatorname{Re}\{x[n]\}$	$\frac{X(z) + X^*(z^*)}{2}$	$\supset R_x$
7.	$\operatorname{Im}\{x[n]\}$	$\frac{X(z) - X^*(z^*)}{2j}$	$\supset R_x$
8. 3.5.6	$x^*[-n]$	$X^*(1/z^*)$	$1/R_x$
9. 3.5.7	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	$\supset R_{x_1} \cap R_{x_2}$
10. 3.5.8	$x[n] = 0, n < 0$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0]$	

Задачи

Обязательные задачи с ответами

- 3.1. Найдите z-преобразование, включая ОС, для каждой из следующих последовательностей:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \frac{u[n]}{2^n}; & \text{б) } \frac{-u[-n-1]}{2^n}; & \text{в) } \frac{u[-n]}{2^n} \\ \text{д) } \delta[n-1]; & \text{е) } \delta[n+1]; & \text{ж) } \frac{u[n]-u[n-10]}{2^n}. \end{array} \quad \text{г) } \delta[n];$$

- 3.2. Вычислите z-преобразование последовательности

$$x[n] = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq N-1, \\ N, & N \leq n. \end{cases}$$

- 3.3. Определите z-преобразование каждой из выписанных ниже последовательностей (параметр α может быть комплексным). Запишите свои ответы в максимально компактной форме и изобразите схему нулей и полюсов и ОС на комплексной плоскости.

$$\text{а) } x_\alpha[n] = \alpha^{|n|}, \quad 0 < |\alpha| < 1; \quad \text{б) } x_b = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\text{в)} \quad x_c = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq N, \\ 2N - n, & N + 1 \leq n \leq 2N, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Указание: Обратите внимание на то, что $x_b[n]$ — прямоугольный импульс, а $x_c[n]$ — треугольный импульс. Затем выразите $x_c[n]$ через $x_b[n]$.

- 3.4. Схема нулей и полюсов функции $X(z)$ — z -преобразования последовательности $x[n]$ приведена на рис. 3.15.

- а) Найдите ОС ряда, определяющего $X(z)$, если известно, что существует Фурье-образ последовательности $x[n]$. Выясните, является ли эта последовательность лево-, право- или двусторонней.
- б) Сколько двусторонних последовательностей обладают z -преобразованием с такой схемой нулей и полюсов?
- в) Существует ли устойчивая детерминированная последовательность, схема нулей и полюсов z -преобразования которой показана на рис. 3.15?



Рис. 3.15.

- 3.5. Восстановите последовательность по ее z -преобразованию:

$$X(z) = (1 + 2z)(1 + 3z^{-1})(1 - z^{-1}).$$

- 3.6. По каждому z -преобразованию из выписанных ниже восстановите соответствующую последовательность, применяя как метод разложения в сумму простейших дробей, так и метод разложения в ряд (см. § 3.4). Выясните в каждом случае, существует ли соответствующий Фурье-образ.

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \quad X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}; & \text{б)} \quad X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2}; \\ \text{в)} \quad X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}; & \text{г)} \quad X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}; \\ \text{д)} \quad X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a}, \quad |z| > |1/a|. & \end{array}$$

- 3.7. На вход детерминированной ЛС-системы подается сигнал $x[n] = u[-n-1] + \frac{u[n]}{2^n}$. Z -преобразование реакции системы имеет вид

$$X(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + z^{-1})}.$$

- а) Найдите $H(z)$, z -преобразование импульсной характеристики этой системы. Обратите внимание на ОС.

- б) Какова ОС $Y(z)$ — z -преобразования соответствующей реакции $y[n]$ системы?
в) Найдите $y[n]$.

- 3.8. Характеристическая функция детерминированной ЛС-системы имеет вид

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}.$$

На вход системы подается сигнал $x[n] = \frac{u[n]}{3^n} + u[-n - 1]$.

- a) Найдите импульсную характеристику $h[n]$.
 - б) Определите реакцию системы $y[n]$.
 - в) Является ли данная система устойчивой?
мировема последовательность $h[n]$?

- 3.9. Импульсная характеристика детерминированной ЛС-системы равна $h[n]$, а ее z -преобразование имеет вид

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}.$$

- a) Что можно сказать об ОС $H(z)$?
 - б) Является ли данная система устойчивой и почему?
 - в) Вычислите z -преобразование $X(z)$ входящего сигнала $x[n]$, реакция системы на который равна

$$y[n] = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4} \right)^n u[n] - \frac{4}{3} 2^n u[-n-1].$$

- г) Найдите импульсную характеристику системы.

- 3.10. Не вычисляя $X(z)$, определите ОС z -преобразования каждой из выписанных последовательностей. Выясните, сходится ли соответствующий Фурье-образ.

$$a) x[n] = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n \right) u[n - 10]; \quad b) x[n] = \begin{cases} 1, & -10 \leq n \leq 10, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\text{b) } x[n] = 2^n u[-n]; \quad \text{r) } x[n] = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+4} - \left(e^{j\pi/3}\right)^n \right) u[n-1];$$

$$\text{d) } x[n] = u[n+10] - u[n+5]; \quad \text{e) } x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n] + (2+3j)^{n-2} u[-n-1].$$

- 3.11. Даны четыре z -преобразования. Не вычисляя обратного z -преобразования, определите, какие из них могли бы быть z -преобразованием детерминированной последовательности. Поясните свой ответ.

$$\text{а) } \frac{(1-z^{-1})^2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}; \quad \text{б) } \frac{(z-1)^2}{z-\frac{1}{2}}; \quad \text{в) } \frac{(z-\frac{1}{4})^5}{(z-\frac{1}{2})^6}; \quad \text{г) } \frac{(z-\frac{1}{4})^6}{(z-\frac{1}{2})^5}$$

- 3.12. Начертите схему нулей и полюсов следующих z -преобразований; отметьте на ней ОС:

$$a) X_1(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + 2z^{-1}}, |z| < 2;$$

6) $X_2(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{2}{3}z^{-1})}$, $x_2[n]$ — детерминирована;

в) $X_3(z) = \frac{1 + z^{-1} - 2z^{-2}}{1 - \frac{13}{6}z^{-1} + z^{-2}}$, $x_3[n]$ — абсолютно суммируема.

- 3.13. Z -преобразование детерминированной последовательности $g[n]$ имеет вид

$$G(z) == (1 + 3z^{-2} + 2z^{-4}) \sin z^{-1}.$$

Вычислите $g[11]$.

- 3.14. Найдите значения коэффициентов A_1 , A_2 , α_1 и α_2 , если

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} \quad \text{и} \quad h[n] == A_1\alpha_1^n u[n] + A_2\alpha_2^n u[n].$$

- 3.15. Является ли ЛС-система детерминированной, если ее характеристическая функция равна

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{1024}z^{-10}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > 0?$$

Поясните свой ответ.

- 3.16. Известно, что реакция ЛС-системы на сигнал $x[n] = \frac{u[n]}{3^n} + 2^n u[-n-1]$ равна $y[n] = \frac{5u[n]}{3^n} - \frac{5 \cdot 2^n u[n]}{3^n}$.

- а) Найдите характеристическую функцию $H(z)$. Изобразите схему ее нулей и полюсов и отметьте на ней ОС.
- б) Определите импульсную характеристику $h[n]$.
- в) Выпишите линейное разностное уравнение, которому удовлетворяют последовательности $x[n]$ и $y[n]$.
- г) Является ли эта система устойчивой или детерминированной?

- 3.17. Пара сигнал-отклик ЛС-системы (последовательности $x[n]$ и $y[n]$) удовлетворяет уравнению

$$y[n] - \frac{5}{2}y[n-1] + y[n+2] = x[n] - x[n-1].$$

Найдите все возможные значения в точке $n = 0$ импульсной характеристики $h[n]$ этой системы.

- 3.18. Характеристическая функция ЛС-системы имеет вид

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}.$$

- а) Найдите импульсную характеристику $h[n]$ системы.
- б) Найдите отклик системы на сигнал $x[n] = e^{j(\pi/2)n}$.

- 3.19. Для каждой из выписанных ниже пар z -преобразований $X(z)$ (z -преобразование сигнала $x[n]$) и $H(z)$ (z -преобразование импульсной характеристики $h[n]$) определите ОС z -преобразования $Y(z)$ реакции системы на сигнал $x[n]$.

- а) $X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$, $|z| > \frac{1}{2}$, $H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$, $|z| > \frac{1}{4}$;
 б) $X(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}$, $|z| < 2$, $H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$, $|z| > \frac{1}{3}$;
 в) $X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{5}z^{-1})(1 + 3z^{-1})}$, $\frac{1}{5} < |z| < 3$, $H(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$, $|z| > \frac{1}{3}$.

3.20. Ниже выписаны z-преобразования $X(z) \xleftarrow{z} x[n]$ и $Y(z) \xleftarrow{z} y[n]$, где $x[n]$ — входной сигнал, а $y[n]$ — реакция системы. В каждом из случаев найдите характеристическую функцию $H(z)$.

- а) $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}}$, $|z| > \frac{3}{4}$, $Y(z) = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}}$, $|z| > \frac{2}{3}$;
 б) $X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$, $|z| < \frac{1}{3}$, $Y(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{6}z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}$, $\frac{1}{6} < |z| < \frac{1}{3}$.

Обязательные задачи без ответов

3.21. На вход ЛС-системы с импульсной характеристикой

$$h[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

подается сигнал

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- а) Найдите реакцию системы, явно вычисляя свертку последовательностей $x[n]$ и $h[n]$.
 б) Восстановите реакцию системы, вычисляя обратное z-преобразование от произведения z-преобразования последовательностей $x[n]$ и $h[n]$.

3.22. На вход устойчивой ЛС-системы с характеристической функцией $H(z) = \frac{3}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$ подается сигнал $x[n] = u[n]$.

- а) Найдите реакцию системы $y[n]$, вычисляя свертку $x[n] * h[n]$.
 б) Определите реакцию системы, применяя обратное z-преобразование к $Y(z)$.

3.23. ЛС-система характеризуется характеристической функцией

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

- а) Определите импульсную характеристику системы.
 б) Найдите разностное уравнение, связывающее сигнал и отклик.

3.24. Изобразите каждую из последовательностей, выписанных ниже, вычислите их z-преобразования, включая ОС:

- а) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 4k]$; б) $\frac{1}{2} (e^{j\pi n} + \cos \frac{\pi n}{2} + \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)) u[n]$.

3.25. Известно, что функция

$$X(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})} = \frac{z^2}{(z - a)(z - b)}$$

является z -преобразованием правосторонней последовательности $x[n]$. В § 3.4 мы восстанавливали последовательность $x[n]$, разлагая функцию $X(z)$ в сумму простейших дробей от переменной z^{-1} . Разложите $X(z)$ в сумму простейших дробей от переменной z и, опираясь на это разложение, найдите последовательность $x[n]$.

Дополнительные задачи

- 3.26. Вычислите обратное z -преобразование от каждой из функций, выписанных ниже. В п. а)–в) используйте указанный метод, а в последнем — любой из известных вам.

- а) *Деление в столбик*, причем известно, что $x[n]$ — правосторонняя последовательность и

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}.$$

- б) *Метод простейших дробей*, причем известно, что $x[n]$ устойчива и

$$X(z) = \frac{3}{z - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}z^{-1}}.$$

- в) *Разложение в ряд*.

$$X(z) = \ln(1 - 4z), \quad |z| < \frac{1}{4}.$$

г)

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-3}}, \quad |z| > (3)^{-1/3}.$$

- 3.27. Восстановите последовательность $x[n]$ по известному z -преобразованию, если:

а) $x[n]$ устойчива и $X(z) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})^2(1 - 2z^{-1})(1 - 3z^{-1})}; \quad$ б) $X(z) = e^{z^{-1}}$;

в) $x[n]$ — левосторонняя последовательность и $X(z) = \frac{z^3 - 2z}{z - 2}.$

- 3.28. Используя свойства из § 3.5, вычислите обратное z -преобразование функции $X(z)$, если:

а) $x[n]$ левосторонняя и $X(z) = \frac{3z^{-3}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2};$

б) $X(z) = \sin z$ и единичная окружность содержится в ОС;

в) $X(z) = \frac{z^7 - 2}{1 - z^{-7}}, |z| > 1.$

- 3.29. Найдите последовательность $x[n]$, чье z -преобразование равно $X(z) = e^z + e^{1/z}$, $z \neq 0$.

- 3.30. Вычислите обратное z -преобразование от

$$X(z) = \ln 2(\frac{1}{2} - z), \quad |z| < \frac{1}{2},$$

а) опираясь на разложение в ряд

$$\ln(1-x) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i}, \quad |x| < 1;$$

б) дифференцируя $X(z)$ и используя свойство производной (подраздел 3.5.4).

- 3.31. Для каждой из выписанных последовательностей вычислите z -преобразование и ОС. Начертите схему нулей и полюсов.

а) $x[n] = a^n u[n] + b^n u[n] + c^n u[-n-1]$, $|a| < |b| < |c|$; б) $x[n] = n^2 a^n u[n]$;
в) $x[n] = e^{n^4} (\cos \frac{\pi n}{12}) u[n] - e^{n^4} (\cos \frac{\pi n}{12}) u[n-1]$.

- 3.32. На рис. 3.16 изображена схема нулей и полюсов z -преобразования $X(z)$ детерминированной последовательности $x[n]$. Начертите схему нулей и полюсов функции $Y[n]$, если $y[n] = x[-n+3]$, и отметьте на ней ОС $Y(z)$.

- 3.33. Пусть $x[n]$ — последовательность со схемой нулей и полюсов из рис. 3.17. Изобразите схему нулей и полюсов для
а) $y[n] = \frac{x[n]}{2^n}$; б) $w[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)x[n]$.

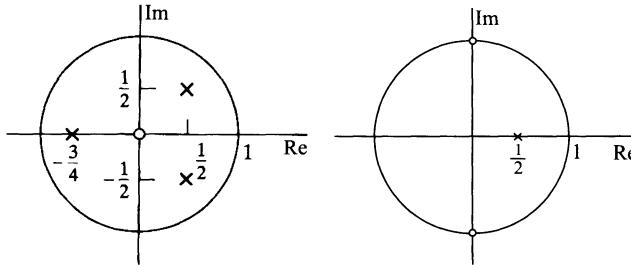


Рис. 3.16.

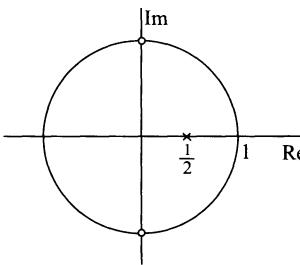


Рис. 3.17.

- 3.34. Z -преобразование импульсной характеристики устойчивой ЛС-системы задано формулой

$$H(z) = \frac{3 - 7z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}}.$$

На вход системы подается сигнал $x[n] = u[n]$.

- а) Найдите отклик $y[n]$ системы, вычисля свертку $x[n] * h[n]$.
б) Восстановите отклик $y[n]$ системы, вычисля обратное z -преобразование от функции $Y(z)$.
- 3.35. Найдите реакцию детерминированной системы на единичный скачок $u[n]$, если z -преобразование ее импульсной характеристики имеет вид $H(z) = \frac{1-z^3}{1-z^4}$.
- 3.36. Реакция ЛС-системы на сигнал $x[n] = u[n]$ равна $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n+1]$.
а) Найдите $H(z)$ — z -преобразование импульсной характеристики и начертите его схему нулей и полюсов.

б) Восстановите импульсную характеристику $h[n]$.

в) Является ли данная система устойчивой?

г) Будет ли система детерминированной?

3.37. Z -преобразование последовательности $x[n]$ равно

$$X(z) = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - 2z^{-1}}.$$

Известно, что ОС этого z -преобразования содержит единичную окружность. Найдите $x[0]$, опираясь на теорему о начальном значении (подраздел 3.5.8).

3.38. Z -преобразование импульсной характеристики устойчивой ЛС-системы имеет вид:

$$H(z) = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}.$$

Вычислите значение ее реакции $y[n]$ в момент $n = 1$ на сигнал $x[n] = 2u[n]$.

3.39. Z -преобразование устойчивой последовательности $x[n]$ равно

$$X(z) = \frac{z^{10}}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{3}{2})^{10}(z + \frac{3}{2})^2(z + \frac{5}{2})(z + \frac{7}{2})}.$$

а) Определите ОС $X(z)$. б) Вычислите $x[-8]$.

3.40. Функция $H(z)$ на рис. 3.18 — характеристическая функция детерминированной ЛС-системы.

а) Используя z -преобразование сигнала, показанного на рисунке, получите выражение для $W(z)$ вида $W(z) = H_1(z)X(z) + H_2(z)E(z)$, где как $H_1(z)$, так и $H_2(z)$ выражается в терминах $H(z)$.

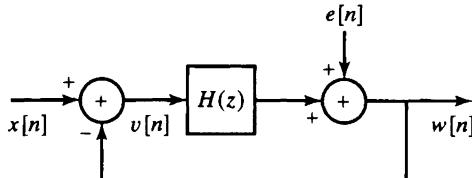


Рис. 3.18.

б) Найдите $H_1(z)$ и $H_2(z)$, если $H(z) = z^{-1}/(1 - z^{-1})$.

в) Является ли система с характеристической функцией $H(z)$ устойчивой? Будут ли системы с характеристическими функциями $H_i(z)$ устойчивыми?

3.41. Последовательность $h[n]$, помещенная во внутренний прямоугольник на рис. 3.19, — импульсная характеристика ЛС-системы. На вход внутренней системы подается сигнал $v[n]$, а на выходе получается сигнал $w[n]$. ОС z -преобразования $H(z)$ последовательности $h[n]$ описывается неравенством:

$$0 < r_{\min} < |z| < r_{\max} < \infty.$$

а) Может ли ЛС-система с импульсной характеристикой $h[n]$ быть устойчивой?

Если да, найдите неравенство, ограничивающее r_{\min} и r_{\max} для устойчивой системы. Если нет, коротко объясните, почему.

б) Является ли система, заключенная в большой прямоугольник на рисунке, ЛС-системой? Если да, найдите ее импульсную характеристику $g[n]$. Если нет, объясните, почему.

- в) Может ли большая система быть устойчивой? Если да, найдите неравенство, ограничивающее α , r_{\min} и r_{\max} для устойчивой системы. Если нет, коротко объясните, почему.

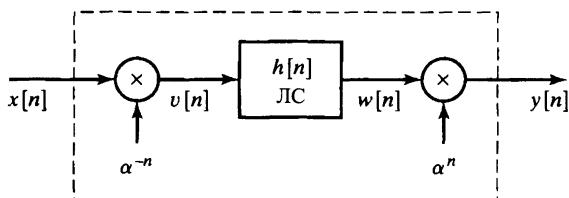


Рис. 3.19.

- 3.42. Пара сигнал-отклик детерминированной устойчивой системы S удовлетворяет линейному разностному уравнению с постоянными коэффициентами

$$y[n] + \sum_{k=1}^{10} \alpha_k y[n-k] = x[n] + \beta x[n-1].$$

Пусть $h[n]$ — импульсная характеристика системы S .

- а) Покажите, что $h[0] \neq 0$.
 - б) Докажите, что, зная $h[0]$ и $h[1]$, можно вычислить α_1 .
 - в) Начертите схему нулей и полюсов характеристической функции системы S и отметьте на ней ОС, если $h[n] = (0, 9)^n \cos \frac{\pi n}{4}$ при $0 \leq n \leq 10$.
- 3.43. Отклик ЛС-системы на сигнал $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] + 2^n u[-n-1]$ равен $y[n] = 6(\frac{1}{2})^n u[n] - 6(\frac{3}{4})^n u[n]$.
- а) Найдите характеристическую функцию $H(z)$, начертите схему ее нулей и полюсов и отметьте ОС.
 - б) Восстановите импульсную характеристику $h[n]$ системы.
 - в) Выпишите разностное уравнение, характеризующее систему.
 - г) Является ли эта система устойчивой или детерминированной?

- 3.44. Z-преобразование отклика детерминированной ЛС-системы на сигнал

$$x[n] = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{4}{3} 2^n u[-n-1]$$

равно

$$Y(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}.$$

- а) Найдите z-преобразование сигнала $x[n]$.
- б) Какова ОС функции $Y(z)$?
- в) Определите импульсную характеристику системы.
- г) Является ли эта система устойчивой?

- 3.45. Известно, что отсчеты сигнала $x[n]$ равны нулю при $n \leq 0$, а $X(z)$ — его z-преобразование. Более того, реакция системы на этот сигнал выглядит как

$$y[n] \begin{cases} \frac{1}{n} x[n], & n > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

а) Выразите $Y(z)$ через $X(z)$.

б) Опираясь на результат предыдущего пункта, найдите z -преобразование последовательности

$$w[n] = \frac{1}{n + \delta[n]} u[n - 1].$$

- 3.46. Сигнал $y[n]$ — отклик ЛС-системы с импульсной характеристикой $h[n]$ на данный сигнал $x[n]$. Предположим, что $y[n]$ устойчив, а схема нулей и полюсов его z -преобразования выглядит так, как показано на рис. 3.20. Кроме того, считаем, что сигнал $x[n]$ тоже устойчив, а соответствующая схема нулей и полюсов изображена на рис. 3.21.

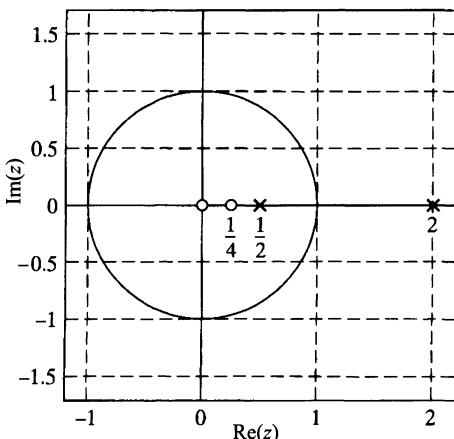


Рис. 3.20.

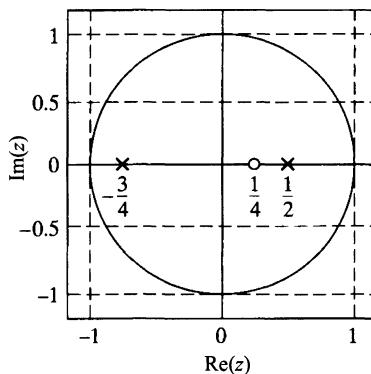


Рис. 3.21.

- а) Какова ОС $Y(z)$?
 б) Является ли последовательность $y[n]$ право-, лево- или двусторонней?
 в) Какова ОС $X(z)$?
 г) Детерминирована ли последовательность $x[n]$, т. е. верно ли, что $x[n] = 0$ при $n < 0$?
 д) Чему равно $x[0]$?
 е) Изобразите схему нулей и полюсов функции $H(z)$ и отметьте на ней ОС.
 ж) Является ли последовательность $h[n]$ антидетерминированной, т. е. верно ли, что $h[n] = 0$ при $n > 0$?

Задачи повышенной сложности

- 3.47. Пусть $x[n]$ — детерминированная последовательность, т. е. $x[n] = 0$ при $n < 0$. Более того, допустим, что $x[0] \neq 0$.
- а) Покажите, что $X(z)$ в точке $z = \infty$ не имеет ни нулей, ни полюсов, т. е. $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ — ненулевое конечное число.

- б) Покажите, что число полюсов в конечной части комплексной плоскости совпадает с числом нулей в этой части (конечная часть комплексной плоскости не содержит $z = \infty$).
- 3.48. Рассмотрите последовательность с z-преобразованием $X(z) = P(z)/Q(z)$, где $P(z)$ и $Q(z)$ — многочлены от z . Предположите, что последовательность абсолютно суммируема, а все корни многочлена $Q(z)$ лежат внутри единичного круга. Можно ли утверждать, что последовательность обязательно детерминирована? Если да, объясните свой ответ; если нет, найдите контрпример.
- 3.49. Пусть $x[n]$ — детерминированная устойчивая последовательность с z-преобразованием $X(z)$. Комплексным кепстром $\hat{x}[n]$ называется результат обратного z-преобразования от логарифма $X(z)$, т. е.

$$\hat{X}(z) = \ln X(z) \xleftrightarrow{z} \hat{x}[n],$$

где ОС $\hat{X}(z)$ включает в себя единичную окружность. (Строго говоря, определение логарифма комплексного числа требует аккуратности. Более того, логарифм от сходящегося z-преобразования может и не являться z-преобразованием какой бы то ни было последовательности. Однако мы будем предполагать, что эта операция корректно определена.)

Вычислите комплексный кепстр последовательности

$$x[n] = \delta[n] + a\delta[n - N], \quad |a| < 1.$$

- 3.50. Пусть $x[n]$ — вещественная четная последовательность, т. е. $x[n] = x[-n]$. Кроме того, предположим, что z_0 — нуль функции $X(z)$, т. е. $X(z_0) = 0$.
- Покажите, что $z = 1/z_0$ — тоже нуль функции $X(z)$.
 - Можно ли из этих предположений вывести что-либо о других нулях $X(z)$?
- 3.51. Используя определение z-преобразования (3.2), покажите, что если $X(z)$ — z-преобразование последовательности $x[n] = x_R[n] + jx_I[n]$, то
- $x^*[n] \xleftrightarrow{z} X^*(z^*)$;
 - $x[-n] \xleftrightarrow{z} X(1/z)$;
 - $x_R[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{2}(X(z) + X^*(z^*))$;
 - $x_I[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{2j}(X(z) - X^*(z^*))$.
- 3.52. Пусть $x[n]$ — вещественная последовательность, все нули и полюса z-преобразования которой расположены внутри единичного круга. Выразите через $x[n]$ вещественную последовательность $x_1[n] \neq x[n]$, для которой $x_1[0] = x[0]$, $|x_1[n]| = |x[n]|$, а нули и полюса ее z-преобразования тоже находятся внутри единичного круга.
- 3.53. Конечная вещественная последовательность, чье z-преобразование не имеет пар нулей вида $z = a$ и $z = (a^*)^{-1}$ и не обращается в нуль на единичной окружности, однозначно (с точностью до положительного постоянного множителя) определяется фазой своего Фурье-образа (см. [56]).
- Мы, конечно, можем придумать много последовательностей, которые не удовлетворяют такому набору условий. Однако почти любая последовательность, представляющая практический интерес, удовлетворяет этим условиям и поэтому однозначно (с точностью до скалярного множителя) определяется фазой своего Фурье-образа.

Рассмотрите вещественную последовательность с нулевыми отсчетами всюду, кроме промежутка $0 \leq n \leq N - 1$, чье z -преобразование не обладает парами нулей вида $z = a$ и $z = (a^*)^{-1}$ и не обращается в нуль на единичной окружности. Наша цель — разработать алгоритм восстановления последовательности $cx[n]$ по $\triangleleft X(e^{j\omega})$ — фазе Фурье-образа последовательности $x[n]$, где c — положительная константа.

- а) Выпишите систему ($N - 1$) линейных уравнений, чье решение восстанавливает $x[n]$ с точностью до постоянного множителя (положительного или отрицательного) по $\operatorname{tg} \triangleleft X(e^{j\omega})$. Не обязательно доказывать, что эти уравнения имеют единственное решение. Покажите далее, что, опираясь на функцию $\triangleleft X(e^{j\omega})$, а не только по $\operatorname{tg} \triangleleft X(e^{j\omega})$, можно однозначно восстановить знак множителя.

б) Пусть

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n = 0, \\ 2, & n = 1, \\ 3, & n = 2, \\ 0, & n \geq 3. \end{cases}$$

Используя метод, разработанный в предыдущем пункте, покажите, что последовательность $cx[n]$ можно восстановить по $\triangleleft X(e^{j\omega})$, где c — положительная константа.

- 3.54. Опираясь на определение (3.2), покажите, что если $x[n] = 0$ при $n < 0$, то

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0].$$

Можно ли что-либо похожее утверждать, если $x[n] = 0$ при $n > 0$?

- 3.55. Апериодическая автокорреляционная функция вещественнозначной устойчивой последовательности $x[n]$ определяется по формуле $c_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x[n+k]$.

- а) Покажите, что z -преобразование функции $c_{xx}[n]$ равно $C_{xx}(z) = X(z)X(z^{-1})$, и найдите соответствующую ОС.
 б) Пусть $x[n] = a^n u[n]$. Изобразите схему нулей и полюсов функции $C_{xx}(z)$, включая ОС. Кроме того, найдите $c_{xx}[n]$, вычисля обратное z -преобразование от $C_{xx}(z)$.
 в) Найдите другую последовательность $x_1[n] \neq x[n]$, но имеющую ту же автокорреляционную функцию, что и $x[n]$ из предыдущего пункта задачи.
 г) Придумайте третью последовательность $x_2[n]$, отличную от первых двух, но с той же автокорреляционной функцией.

- 3.56. Выясните, может ли функция $X(z) = z^*$ быть z -преобразованием какой-нибудь последовательности. Докажите свое мнение.

- 3.57. Пусть $X(z)$ — отношение многочленов: $X(z) = B(z)/A(z)$. Покажите, что если $X(z)$ имеет простой полюс в точке $z = z_0$, то ее вычет в этой точке равен $B(z_0)/A'(z_0)$, где $A'(z_0)$ — значение производной функции $A(z)$ в точке $z = z_0$.

ГЛАВА 4

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ НЕПРЕРЫВНОГО СИГНАЛА

4.1. Введение

Дискретные сигналы могут иметь различную природу, но основной их источник — дискретизация непрерывных сигналов. Примечательно, что при разумных ограничениях непрерывный сигнал можно достаточно точно представить последовательностью его отсчетов, вычисленных в дискретные моменты времени. В этой главе мы подробно обсуждаем процесс периодической, или равномерной, дискретизации, включая феномен наложения спектров, или ложных частот, который возникает при дискретизации неузкополосного сигнала или низкой частоте дискретизации. С практической точки зрения важен тот факт, что обработка непрерывных сигналов может осуществляться путем его дискретизации, обработки полученной дискретной последовательности и последующим восстановлением аналогового сигнала.

4.2. Периодическая дискретизация

Хотя существуют и другие возможности (см., например, [146] и [107]), обычным методом получения дискретного представления непрерывного сигнала служит периодическая, или равномерная, дискретизация, когда последовательность отсчетов $x[n]$ появляется по непрерывному сигналу $x_c(t)$ согласно формуле:

$$x[n] = x_c(nT), \quad -\infty < n < \infty. \quad (4.1)$$

Параметр T здесь называется *шагом дискретизации*, а обратная к нему величина $f_s = 1/T$ — *частотой дискретизации*, измеряемой числом отсчетов за секунду. Если мы предпочитаем измерять частоту в радианах за секунду, частоту дискретизации можно пересчитать как $\Omega_s = 2\pi/T$.

Систему, осуществляющую операцию (4.1), будем называть *идеальным непрерывно-дискретным преобразователем* (НДП), а на схемах будем ее изображать так, как показано на рис. 4.1. В качестве примера результата применения НДП на рис. 4.2 представлены непрерывный речевой сигнал $x_c(t)$ и соответствующая последовательность отсчетов $x[n]$.

На практике дискретизация осуществляется аналогово-цифровым преобразователем (АЦП). Такие системы можно рассматривать как аппроксимацию идеального НДП. При реализации или выборе АЦП важно обращать внимание на квантование выходных отсчетов, линейность шагов квантования, необходимые микросхемы дискретизации и хранения и допустимые пределы частоты дискретизации. Эффекты квантования обсуждаются в подпараграфах 4.9.2 и 4.9.3. Другие моменты, связанные с АЦП и соответствующими электронными схемами, выходят за рамки нашей книги.

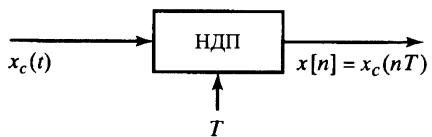


Рис. 4.1. Блок-схема идеального непрерывно-дискретного преобразователя

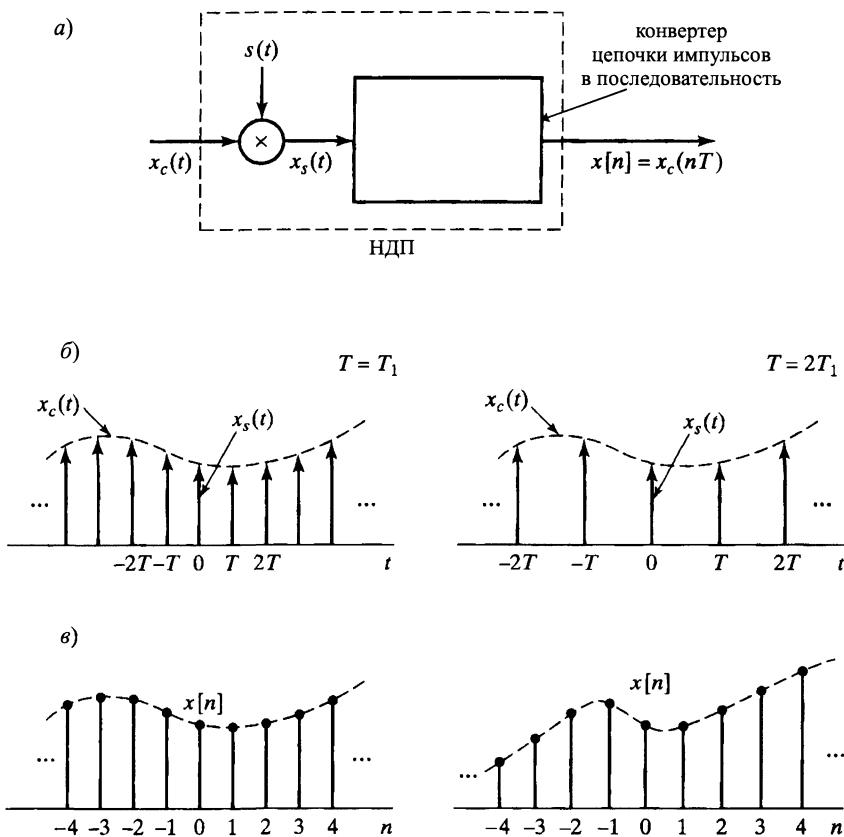


Рис. 4.2. Дискретизация непрерывного сигнала: а) НДП; б) $x_s(t)$ для двух частот дискретизации; в) отклики системы при двух разных частотах отсчетов

Вообще говоря, операция дискретизации необратима, т. е. общий непрерывный сигнал $x_c(t)$ невозможно восстановить по результату его дискретизации $x[n]$, поскольку многие непрерывные сигналы при этой процедуре дают одну и ту же последовательность отсчетов. Такая неопределенность при дискретизации отно-

сится к фундаментальным принципам обработки сигналов. К счастью, можно избежать неоднозначности восстановления, ограничивая типы сигналов, подающихся на вход преобразователя.

С точки зрения математики процесс дискретизации удобно разбить на две стадии (рис. 4.2, а)): модулятора цепочки импульсов и следующего за ним преобразователя цепочки импульсов в последовательность. На рис. 4.2, б) показан непрерывный сигнал $x_c(t)$ и цепочка импульсов, полученная в результате применения модулятора при двух разных частотах дискретизации. Соответствующим откликам системы отведено место на рис. 4.2, в). Существенное отличие $x_s(t)$ от $x[n]$ состоит в том, что $x_s(t)$ является в некотором смысле непрерывным сигналом (точнее, цепочкой импульсов), равным нулю всюду, за исключением целых кратных T . Последовательность $x[n]$, с другой стороны, нумеруется целой переменной n , которая, по существу, вводит нормализацию времени, т. е. последовательность чисел $x[n]$ не несет в себе явной информации о частоте дискретизации. Более того, отсчеты сигнала $x_c(t)$, представляемые конечными числами последовательности $x[n]$, отличаются от серии импульсов $x_s(t)$.

Важно осознавать, что рис. 4.2, а) — строгое математическое представление, удобное для проникновения в суть дискретизации, как в частотной, так и во временной областях. Эта абстракция не является близкой к какой-либо физической схеме или системе, разрабатываемой для реализации процедуры дискретизации. Мы ввели такое представление операции потому, что оно приводит к простым следствиям ключевого результата и дает возможность понимания ситуации, которое трудно получить более формальными методами, основанными на манипулировании формулами преобразования Фурье.

4.3. Частотное представление дискретизации

Для вывода частотного соотношения между входным и выходным сигналами идеального НДП рассмотрим процедуру преобразования $x_c(t)$ в $x_s(t)$ с помощью модулирования периодической цепочки импульсов

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (4.2)$$

где $\delta(t)$ — δ -функция Дирака. Модулируя сигнал $x_c(t)$ функцией $s(t)$, получаем

$$x_s(t) = x_c(t)s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (4.3)$$

Используя фильтрующее свойство δ -функции, это равенство можно переписать в виде

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT). \quad (4.4)$$

Теперь рассмотрим Фурье-образ функции $x_s(t)$. Поскольку она равна произведению функций $x_c(t)$ и $s(t)$, ее преобразование является сверткой Фурье-образов $X_c(j\Omega)$ и $S(j\Omega)$. Известно, что преобразование Фурье периодической

цепочки импульсов снова периодическая цепочка импульсов ([109]), т. е.

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s), \quad (4.5)$$

где $\Omega_s = 2\pi/T$ — частота дискретизации, измеряемая в рад/с. Поскольку

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega),$$

где $*$ обозначает свертку по непрерывной переменной, то

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s)). \quad (4.6)$$

Формула (4.6) показывает соотношение между Фурье-образами входного и выходного сигналов модулятора цепочки импульсов из рис. 4.2, а). Мы видим, что преобразование Фурье функции $x_s(t)$ состоит из периодически повторяющихся копий Фурье-образа сигнала $x_c(t)$. Экземпляры $X_c(j\Omega)$ сдвигаются относительно предыдущей копии на частоту дискретизации и, накладываясь друг на друга, генерируют периодическое преобразование Фурье цепочки импульсов дискретизации. На рис. 4.3 изображено частотное представление этой цепочки. На рис. 4.3, а) показано узкополосное преобразование Фурье с максимальной не-нулевой частотной компонентой в точке Ω_N . Рисунок 4.3 б) иллюстрирует периодическую цепочку импульсов $S(j\Omega)$, а рис. 4.3, в) — $X_s(j\Omega)$ — результат свертки $X_c(j\Omega)$ с $S(j\Omega)$. Из рис. 4.3, в) становится очевидным, что, когда

$$\Omega_s - \Omega_N > \Omega_N, \quad \text{т. е.} \quad \Omega_s > 2\Omega_N, \quad (4.7)$$

дубликаты $X_c(j\Omega)$ не перекрываются и, следовательно, при их суммировании по формуле (4.6) получается периодическое (с точностью до множителя $1/T$) продолжение функции $X_c(j\Omega)$. Следовательно, $x_c(t)$ восстанавливается по $x_s(t)$ с помощью идеального фильтра нижних частот. Эта ситуация отражена на рис. 4.4, а), где показан модулятор цепочки импульсов, за которым стоит ЛС-система с КЧХ $H_r(j\Omega)$. Если график $X_c(j\Omega)$ выглядит, как на рис. 4.4, б), то $X_s(j\Omega)$ обладает графиком, как на рис. 4.4, в), где предполагается, что $\Omega_s > 2\Omega_N$. Поскольку

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X_s(j\Omega), \quad (4.8)$$

то если $H_r(j\Omega)$ — идеальный фильтр нижних частот с коэффициентом усиления T и частотой отсечки Ω_c , удовлетворяющей условию

$$\Omega_N < \Omega_c < (\Omega_s - \Omega_N), \quad (4.9)$$

то

$$X_r(j\Omega) = X_c(j\Omega), \quad (4.10)$$

как показано на рис. 4.4, д).

Если неравенство (4.7) не выполнено, т. е. если $\Omega_s \leq 2\Omega_N$, копии графиков функции $X_c(j\Omega)$ налагаются друг на друга. Поэтому функцию $X_c(j\Omega)$ уже невозможно восстановить с помощью фильтра нижних частот, что иллюстрируется рис. 4.4, г). В этом случае восстановленный выходной сигнал $x_r(t)$ (рис. 4.4, а)) связан с оригинальным непрерывным сигналом через искажение, которое называется *искажением из-за наложения спектров*, или просто *наложением спектров*, или *ложными частотами*.

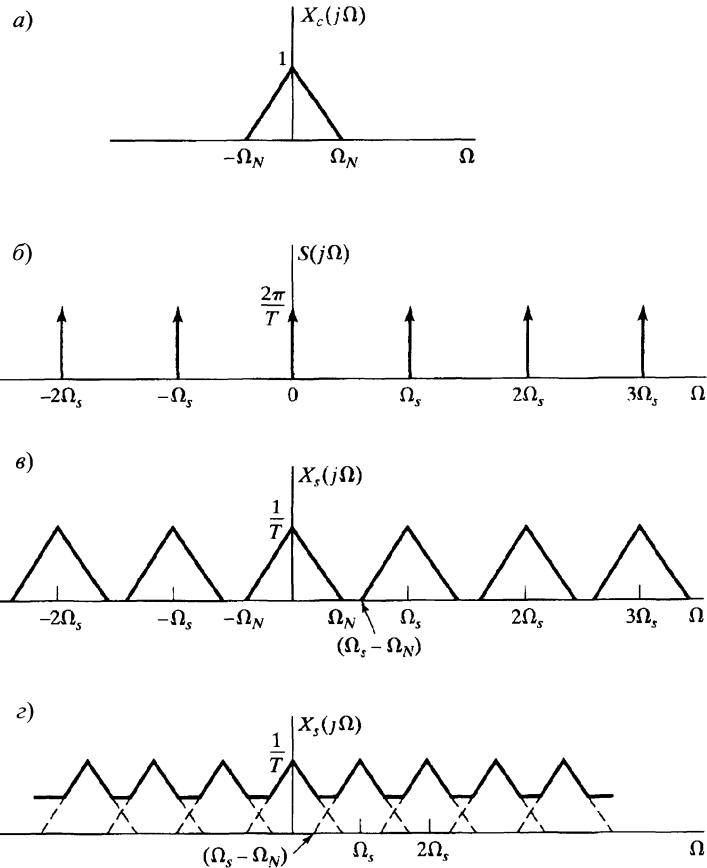


Рис. 4.3. Иллюстрация дискретизации временной переменной в частотной области: а) спектр оригинального сигнала; б) спектр функции отсчетов; в) спектр дискретизованного сигнала с $\Omega_s > 2\Omega_N$; г) спектр дискретизованного сигнала с $\Omega_s < 2\Omega_N$

Рисунок 4.5 иллюстрирует наложение спектров в частотной области для простого случая косинусоидального сигнала. Рисунок 4.5, а) показывает график Фурье-образа сигнала

$$x_c(t) = \cos \Omega_0 t. \quad (4.11)$$

На рис. 4.5, б) представлен Фурье-образ цепочки импульсов $x_s(t)$ с $\Omega_0 < \Omega_s/2$, а на рис. 4.5, в) — с $\Omega_0 > \Omega_s/2$. Рисунки 4.5, г) и д) соответствуют преобразованию Фурье реакции фильтра нижних частот в случаях $\Omega_0 < \Omega_s/2 = \pi/T$ и $\Omega_0 > \pi/T$ соответственно, где $\Omega_c = \Omega_s/2$. Рисунки 4.5, г) и д) соответствуют случаю наложения спектров. Когда спектры не накладываются (рис. 4.5, б) и г)), реконструированный сигнал выглядит как

$$x_r(t) = \cos \Omega_0 t. \quad (4.12)$$

Если же появляются ложные частоты, то

$$x_r(t) = \cos(\Omega_s - \Omega_0)t, \quad (4.13)$$

т. е. вследствие дискретизации и последующего восстановления высокочастотный сигнал $\cos(\Omega_0 t)$ трансформируется в низкочастотный $\cos(\Omega_s - \Omega_0)t$. Это наблюдение лежит в основе теоремы Котельникова – Найквиста о дискретизации ([104, 142]).

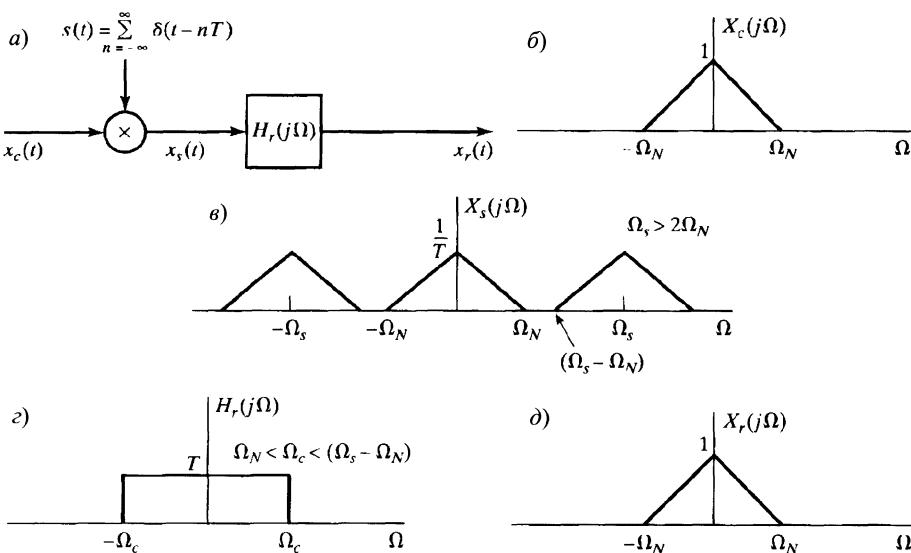


Рис. 4.4. Точное восстановление непрерывного сигнала по его дискретизации с помощью фильтра нижних частот

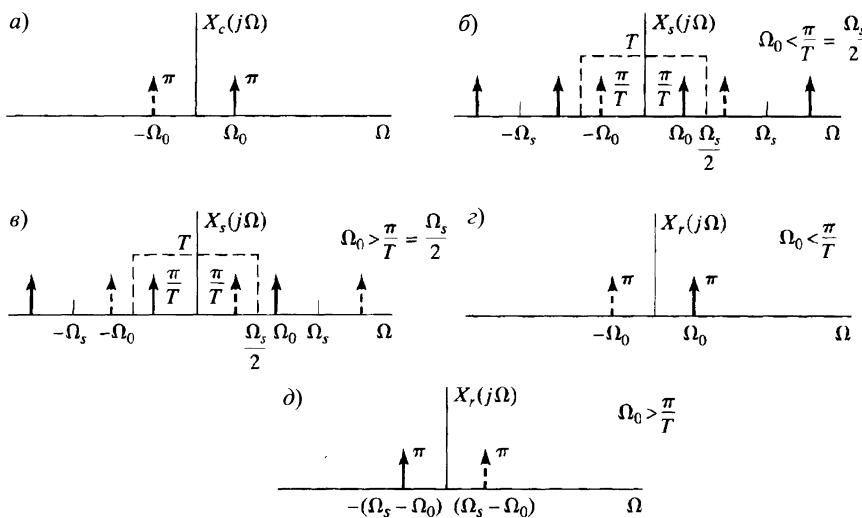


Рис. 4.5. Эффект наложения спектров при дискретизации косинусоидального сигнала

Теорема Котельникова–Найквиста о дискретизации. Пусть $x_c(t)$ — узкополосный сигнал с

$$X_c(j\Omega) = 0 \quad \text{при} \quad |\Omega| \geq \Omega_N. \quad (4.14)$$

Тогда $x_c(t)$ однозначно определяется своей дискретизацией $x[n] = x_c(nT)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), если

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_N. \quad (4.15)$$

Частоту Ω_N обычно называют *частотой Найквиста*, а частоту $2\Omega_N$, ограничивающую частоту дискретизации снизу, — *минимально допустимой частотой дискретизации*.

До сих пор мы рассматривали только модулятор цепочки импульсов, представленный на рис. 4.2, a). Конечная цель — выразить $X(e^{j\omega})$ (ДВПФ последовательности $x[n]$) в терминах $X_s(j\Omega)$ и $X_c(j\Omega)$, для чего перепишем $X_s(j\Omega)$ в другом виде. Применяя непрерывное преобразование Фурье к равенству (4.4), получаем

$$X_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\Omega T n}. \quad (4.16)$$

Соотношения

$$x[n] = x_c(nT), \quad (4.17)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (4.18)$$

влекут равенство

$$X_s(j\Omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = X(e^{j\Omega T}). \quad (4.19)$$

Следовательно, опираясь на формулы (4.6) и (4.19), находим

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s)), \quad (4.20)$$

что равносильно выражению

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right). \quad (4.21)$$

Из формул (4.19)–(4.21) видно, что $X(e^{j\omega})$ является масштабированной по частоте версией функции $X_s(j\Omega)$ с отношением $\omega/\Omega = T$. Такое масштабирование можно представлять себе как нормализацию частотной оси, при которой частота $\Omega = \Omega_s$ в функции $X_s(j\Omega)$ становится равной $\omega = 2\pi$ в $X(e^{j\omega})$. Тот факт, что при трансформации $X_s(j\Omega)$ в $X(e^{j\omega})$ возникает масштабирование или нормализация частоты, непосредственно связан с временной нормализацией при преобразовании цепочки импульсов $x_s(t)$ в последовательность $x[n]$. Более конкретно, как мы видели на рис. 4.2, функция $x_s(t)$ сохраняет промежутки между отсчетами, равные шагу дискретизации T . С другой стороны, «расстояния» между членами последовательности $x[n]$ всегда равны единице, т. е. временная ось нормализуется с помощью множителя T . Соответственно, в частотной возникает нормирующий множитель $f_s = 1/T$.

Пример 4.1. Дискретизация и восстановление синусоидального сигнала

Подвергая непрерывный сигнал $x_c(t) = \cos(4000\pi t)$ дискретизации с шагом $T = 1/6000$, получаем $x[n] = x_c(nT) = \cos(4000\pi T n) = \cos(\omega_0 n)$, где $\omega_0 = 4000\pi T = 2\pi/3$. В этом случае $\Omega_s = 2\pi/T = 12000\pi$ и максимальная частота сигнала равна $\Omega_0 = 4000\pi$, т. е. выполнены предположения теоремы Котельникова – Найквиста о дискретизации. Значит, наложения спектров здесь не происходит. Фурье-образ сигнала $x_c(t)$ выглядит как

$$X_c(j\Omega) = \pi\delta(\Omega - 4000\pi) + \pi\delta(\Omega + 4000\pi),$$

а из рис. 4.6, а) следует, что при $\Omega_s = 12000\pi$

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s)). \quad (4.22)$$

Заметим, что $X_c(j\Omega)$ состоит из пары импульсов в точках $\Omega = \pm 4000\pi$, и мы видим сдвинутые копии Фурье-образа, центрированные в $\pm\Omega_s$, $\pm 2\Omega_s$ и т. д. График $X(e^{j\omega}) = X_s(j\omega/T)$ как функции от нормализованной частоты $\omega = \Omega T$ приведен на рис. 4.6, б), где использован тот факт, что масштабирование независимой переменной импульса приводит к масштабированию его площади, т. е. $\delta(\omega/T) = T\delta(\omega)$. Заметим, что исходная частота $\Omega_0 = 4000\pi$ соответствует нормализованной частоте $\omega_0 = 4000\pi T = 2\pi/3$, удовлетворяющей неравенству $\omega_0 < \pi$, что согласуется с неравенством $\Omega_0 = 4000\pi < \pi/T = 6000\pi$. На рис. 4.6, а) показана также КЧХ идеального восстанавливающего фильтра $H_r(j\Omega)$ при данной частоте дискретизации $\Omega_s = 12000\pi$. Из рисунка становится ясным, что частота восстановленного сигнала будет равна $\Omega_0 = 4000\pi$ — частоте исходного сигнала $x_c(t)$. \square

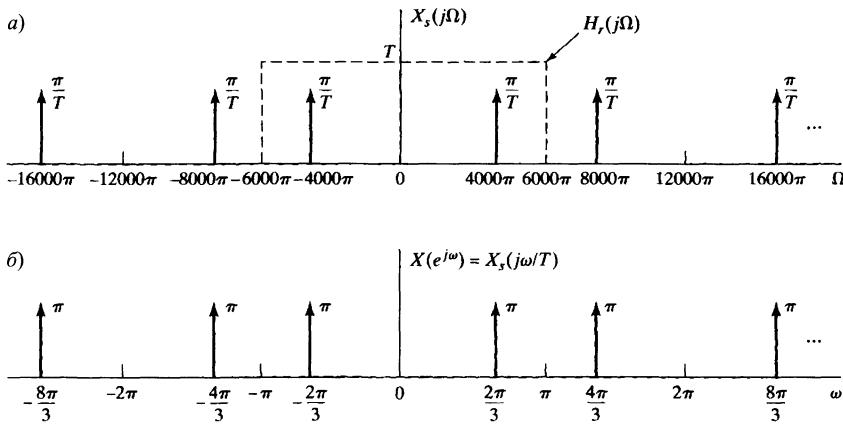


Рис. 4.6. Преобразование Фурье дискретизированного косинусоидального сигнала с частотой $\Omega_0 = 4000\pi$ и шагом дискретизации $T = 1/6000$: а) непрерывный случай; б) дискретный случай

Пример 4.2. Наложение спектров при восстановлении субдискретизованного синусоидального сигнала

Вновь подвернем дискретизации сигнал $x_c(t) = \cos(16000\pi t)$ с частотой $\Omega_0 = 4000\pi$ из примера 4.1, увеличив на сей раз шаг дискретизации до $T = 1/6000$. Теперь условия

теоремы Котельникова–Найквиста не выполнены, поскольку $\Omega_s = 2\pi/T = 12\,000\pi < 2\Omega_0 = 32\,000\pi$, и можно ожидать появления ложных частот. Фурье-образ $X_s(j\Omega)$ в этом случае совпадает с тем, что изображено на рис. 4.6, а). Однако теперь импульс, расположенный в точке $\Omega = -4000\pi$, появляется из члена $X_c(j(\Omega - \Omega_s))$ суммы (4.22), а не из $X_c(j\Omega)$, а импульс в точке $\Omega = 4000\pi$ — из $X_c(j(\Omega + \Omega_s))$. График $X(e^{j\omega}) = X_s(j\omega/T)$ как функции от ω совпадает с аналогичным графиком, приведенным на рис. 4.6, б), поскольку нормализация осуществляется с одним и тем же шагом T . Основной причиной такого явления служит совпадение последовательностей отсчетов дискретизованных сигналов в обоих примерах, т. е.

$$\cos(16\,000\pi n/6000) = \cos(2\pi n + 4000\pi n/6000) = \cos(2\pi n/3).$$

(Напомним, что, прибавляя любое целое кратное числа 2π к аргументу косинуса, мы не меняем его значения.) Итак, мы получаем одну последовательность отсчетов $x[n] = \cos(2\pi n/3)$, дискретизируя с одной и той же частотой два разных непрерывных сигнала. В одном случае частота дискретизации удовлетворяет условиям теоремы Котельникова–Найквиста, а в другом нет. Как и раньше, КЧХ $H_r(j\Omega)$ идеального восстанавливающего фильтра с данной частотой дискретизации $\Omega_s = 12\,000\pi$ приведена на рис. 4.6, а). Взгляд на рисунок позволяет заключить, что восстановленный сигнал будет иметь частоту $\Omega_0 = 4000\pi$, отличающуюся от частоты исходного сигнала $x_c(t)$. □

Пример 4.3. Второй пример наложения спектров

Возьмем еще один непрерывный сигнал $x_c(t) = \cos(4000\pi t)$, оставив шаг дискретизации $T = 1/1500$, как в предыдущем примере. В этом случае T тоже не удовлетворяет предположениям теоремы Котельникова–Найквиста, так как $\Omega_s = 2\pi/T = 3000\pi < 2\Omega_0 = 8000\pi$. Значит, здесь тоже появляются ложные частоты. График функции $X_s(j\Omega)$ для этого примера изображен на рис. 4.7, а). На этот раз импульс, расположенный в точке $\Omega = -1000\pi$, приходит из члена $X_c(j(\Omega - \Omega_s))$, а в точке $\Omega = 1000\pi$ — из $X_c(j(\Omega + \Omega_s))$. Функция $X(e^{j\omega}) = X_s(j\omega/T)$ от частоты ω показана на рис. 4.7, б). Очевидно, что ее график совпадает с графиком из рис. 4.6, б). И в этом случае преобразование Фурье соответствует последовательности $x[n] = \cos(2\pi n/3)$. Таким образом, мы видим, что один и тот же дискретный сигнал может получаться в результате дискретизации одного и того же непрерывного сигнала, но с разными частотами дискретизации, если одна из частот противоречит предположениям теоремы Котельникова–Найквиста. Частотная характеристика $H_r(j\Omega)$ идеального восстанавливающего фильтра с частотой дискретизации $\Omega_s = 3000\pi$ показана на рис. 4.7, а). Ясно, что частота восстановленного сигнала равна $\Omega_0 = 1000\pi$, а не 4000π . □

4.4. Восстановление узкополосного сигнала по его отсчетам

Согласно теореме о дискретизации, отсчеты непрерывного узкополосного сигнала, вычисленные с подходящей частотой, несут в себе достаточную информацию для его точного представления в том смысле, что исходный сигнал может быть восстановлен, исходя из отсчетов и шага дискретизации. Модулирование цепочки импульсов дает удобный способ понимания процесса реконструкции непрерывного узкополосного сигнала по его отсчетам.

В § 4.3 мы отмечали, что если в предположениях теоремы о дискретизации профильтровать цепочки импульсов подходящим фильтром нижних частот, то

Фурье-образ результата фильтрования будет совпадать с Фурье-образом непрерывного сигнала $x_c(t)$, и поэтому выходной из фильтра сигнал оказывается идентичен исходному. По последовательности отсчетов $x[n]$ можно сформировать цепочку импульсов $x_s(t)$, значения которых определяются формулой:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT). \quad (4.23)$$

Отсчет под номером n связан с импульсом в точке $t = nT$, где T — шаг дискретизации, соответствующий последовательности $x[n]$. Если эту цепочку импульсов подать на вход идеального непрерывного фильтра нижних частот с КЧХ $H_r(j\Omega)$ и импульсной характеристикой $h_r(t)$, то будет получен отклик

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_r(t - nT). \quad (4.24)$$

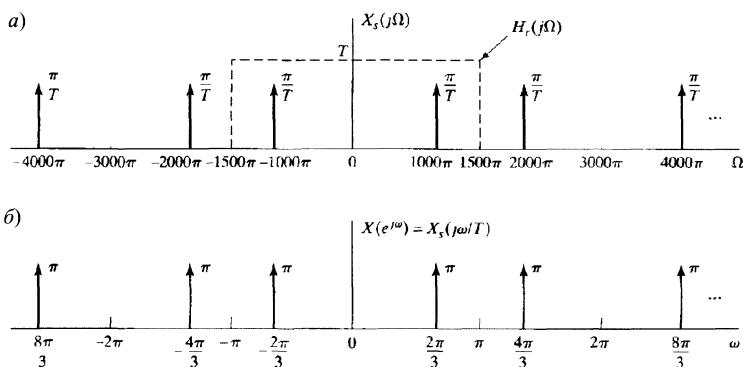


Рис. 4.7. Преобразование Фурье дискретизованного косинусоидального сигнала с частотой $\Omega_0 = 4000\pi$ и шагом дискретизации $T = 1/1500$: а) непрерывное; б) дискретное

Блок-схема, представляющая процесс восстановления, приведена на рис. 4.8, а). Напомним, что идеальный восстанавливающий фильтр обладает коэффициентом усиления T (для компенсирования множителя $1/T$ в выражении (4.20)) и частотой отсечки Ω_c , лежащей между Ω_N и $\Omega_s - \Omega_N$. Как правило, частоту отсечки удобно брать равной $\Omega_c = \Omega_s/2 = \pi/T$. Такое значение подходит для любых соотношений между Ω_s и Ω_N , при которых отсутствует наложение частот (т. е. при $\Omega_s > 2\Omega_N$). На рис. 4.8, б) показана КЧХ идеального восстанавливающего фильтра. Соответствующая импульсная характеристика $h_r(t)$ (рис. 4.8, в)) является обратным преобразованием Фурье от функции $H_r(j\Omega)$ и при частоте отсечки π/T вычисляется по правилу:

$$h_r(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}. \quad (4.25)$$

Подставляя дробь (4.25) в (4.24), находим, что

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T}. \quad (4.26)$$

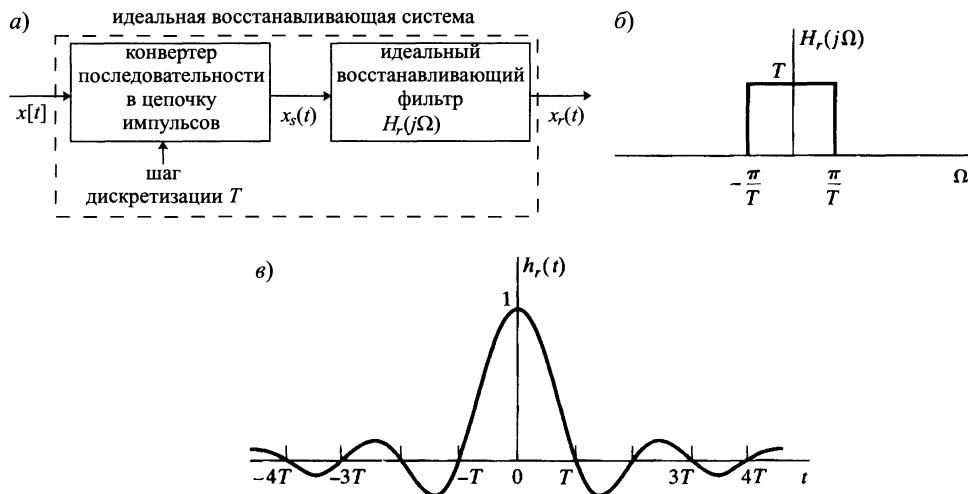


Рис. 4.8. а) блок-схема идеальной восстанавливающей системы для узкополосного сигнала; б) КЧХ идеального восстанавливающего фильтра; в) импульсная характеристика идеального восстанавливающего фильтра

Используя частотные аргументы, в § 4.3 мы убедились, что если $x[n] = x_c(nT)$, где $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq \pi/T$, то $x_r(t)$ совпадает с $x_c(t)$. Этот факт не виден при беглом взгляде на формулу (4.26). Однако полезное понимание можно извлечь, если исследовать это соотношение более внимательно. Прежде всего рассмотрим функцию $h_r(t)$ из формулы (4.25). Заметим, что по непрерывности ввиду первого замечательного предела

$$h_r(0) = 1. \quad (4.27)$$

Кроме того,

$$h_r(nT) = 0 \quad \text{при } n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.28)$$

Из уравнений (4.27), (4.28) и (4.24) следует, что если $x[n] = x_c(nT)$, то

$$x_r(mT) = x_c(mT) \quad (4.29)$$

для всех целых чисел m . Иными словами, вне зависимости от шага дискретизации T , восстановленный сигнал имеет те же самые значения в моменты замеров отсчетов, что и исходный непрерывный сигнал.

Рисунок 4.9 демонстрирует непрерывный сигнал $x_c(t)$ и соответствующую модулированную цепочку импульсов. Несколько членов последовательности

$$x[n] \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T}$$

и восстановленный сигнал $x_r(t)$ приведены на рис. 4.9, в). Как подсказывает рисунок, при генерировании непрерывного сигнала $x_r(t)$ идеальным фильтром низких частот происходит интерполяция импульсов $x_s(t)$. Уравнение (4.29) свидетельствует, что результирующий сигнал в точности совпадает с $x_c(t)$ в моменты замеров отсчетов. Тот факт, что при отсутствии эффекта наложения фильтр низких частот корректно проводит интерполяцию отсчетов, следует из нашего частотного анализа дискретизации и процесса восстановления.

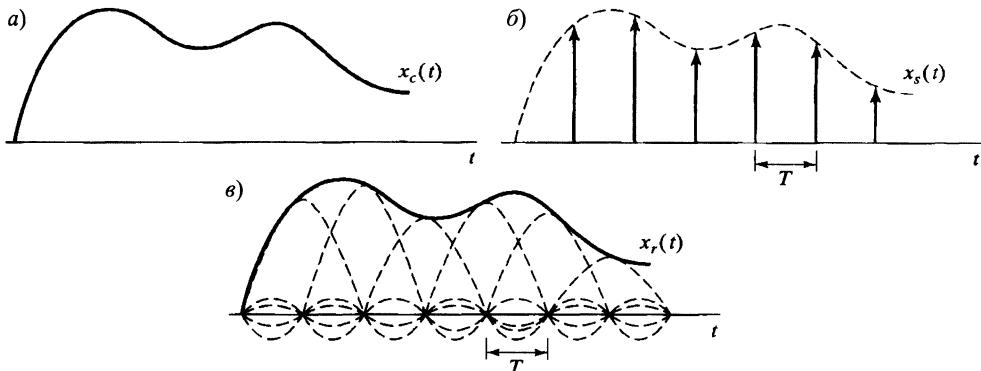


Рис. 4.9. Идеальная узкополосная интерполяция

Полезно формализовать предыдущие рассуждения, введя идеальную восстанавливающую систему (см. рис. 4.10). Будем называть ее *идеальным дискретно-непрерывным преобразователем* (ДНП). Как мы уже видели, идеальный восстанавливающий процесс можно представлять как конвертирование последовательности в цепочку импульсов (см. формулу (4.23)) с последующим пропусканием ее через идеальный фильтр нижних частот (результатирующий сигнал дан формулой (4.26)). Промежуточный шаг конвертирования в цепочку импульсов удобен с точки зрения математики для вывода формулы (4.26) и понимания процесса восстановления сигнала. Однако, поскольку мы уже знакомы с этим процессом, можно ввести более компактное схематическое изображение (рис. 4.10, б)), где на вход подается последовательность $x[n]$, а на выходе получается непрерывный сигнал $x_r(t)$, определенный формулой (4.26).



Рис. 4.10. а) идеальное восстановление узкополосного сигнала; б) эквивалентная схема реконструкции как идеального Д/Н-конвертера

Свойства идеального ДНП наиболее просто исследовать в частотной области. Для вывода соотношений между его входом и выходом в этой области к обеим частям формулы (4.24) или (4.26) применим преобразование Фурье:

$$X_r(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] H_r(j\Omega) e^{-j\Omega T n}.$$

Вынося множитель $H_r(j\Omega)$ из суммы, можно записать

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) X(e^{j\Omega T}). \quad (4.30)$$

Уравнение (4.30) дает частотное описание идеального ДНП. Согласно (4.30), функция $X(e^{j\omega})$ масштабируется по частоте (т. е. ω заменяется на ΩT). Идеальный фильтр нижних частот с характеристикой $H_r(j\Omega)$ выбирает основной период результирующего периодического Фурье-образа $X(e^{j\Omega T})$ и компенсирует множитель $1/T$, возникающий при дискретизации. Итак, если последовательность $x[n]$ была получена при дискретизации узкополосного сигнала с минимально допустимой частотой дискретизации или выше, то реконструированный сигнал $x_r(t)$ будет равен исходному. В любом случае благодаря формуле (4.30) становится очевидным, что выходной сигнал из идеального ДНП всегда будет иметь полосу частот, ограниченную по большей мере частотой отсечки фильтра нижних частот, которая обычно берется равной половине частоты дискретизации.

4.5. Дискретная обработка непрерывных сигналов

Свое главное приложение дискретные системы находят в обработке непрерывных сигналов, что достигается с помощью схемы, приведенной на рис. 4.11. Она состоит из последовательного соединения НДП, собственно дискретной системы и ДНП. Блок-схема рис. 4.11 представляет большой класс систем, поскольку частота дискретизации и сама дискретная система в ней не конкретизируются и могут быть выбраны в зависимости от конкретной задачи. Заметим, что вся система эквивалентна некоторой непрерывной системе, поскольку преобразует непрерывный входной сигнал $x_c(t)$ в непрерывный выходной сигнал $y_r(t)$. Свойства большой системы зависят от выбора дискретной и частоты дискретизации. Мы предполагаем, что оба преобразователя имеют одну и ту же частоту дискретизации. Это не очень принципиально, и в следующих параграфах этой главы, как и в некоторых задачах для самостоятельного решения, рассматриваются системы с разными частотами дискретизации на входе и выходе.



Рис. 4.11. Дискретная обработка непрерывных сигналов

Предыдущий параграф был посвящен объяснению работы НДП и ДНП, изображенных на рис. 4.11. Для удобства и в качестве первого шага к полному пониманию работы системы рис. 4.11 суммируем математическое описание преобразователей.

НДП генерирует дискретный сигнал

$$x[n] = x_c(nT), \quad (4.31)$$

т. е. последовательность отсчетов непрерывного входного сигнала $x_c(t)$. ДВПФ этой последовательности соотносится с непрерывным преобразованием Фурье

входного сигнала по формуле

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right). \quad (4.32)$$

ДНП создает на выходе непрерывный сигнал вида

$$y_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \frac{\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)/T}, \quad (4.33)$$

где последовательность $y[n]$ является реакцией дискретной системы на последовательность $x[n]$. Согласно тождеству (4.30), $Y_r(j\Omega)$ — непрерывное преобразование Фурье сигнала $y_r(t)$ и $Y(e^{j\omega})$ — Фурье-образ последовательности $y[n]$ — связаны соотношением:

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y(e^{j\Omega T}) = \begin{cases} TY(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.34)$$

Связем теперь реакцию всей системы $y[n]$ с входной последовательностью $x[n]$ или, что эквивалентно, $Y(e^{j\omega})$ с $X(e^{j\omega})$. Простым примером является тождественная система, у которой $y[n] = x[n]$. Это как раз тот случай, который мы уже детально исследовали. Мы знаем, что если $x_c(t)$ имеет узкополосный Фурье-образ с $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq \pi/T$, а дискретная система рис. 4.11 ничего не делает, т. е. $y[n] = x[n] = x_c(nT)$, то выходной сигнал большой системы удовлетворяет равенству $y_r(t) = x_c(t)$. Напомним, что при доказательстве этого результата мы использовали частотное представление непрерывного и дискретного сигналов, поскольку ключевая концепция наложения спектров более понятна в частотной области. Аналогично, когда мы имеем дело с более сложной системой, будем проводить анализ в частотной области. Если дискретная система нелинейна или нестационарна, то получить общее соотношение между Фурье-образами ее входной и выходной последовательностей довольно трудно. (В задаче 4.33 мы рассмотрим пример системы рис. 4.11, в которой дискретная система нелинейна.) Однако линейный стационарный случай допускает довольно простой и полезный результат.

4.5.1. Линейные стационарные системы

Если дискретная система рис. 4.11 линейна и стационарна, то

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}), \quad (4.35)$$

где $H(e^{j\omega})$ — ее КЧХ или, что то же самое, Фурье-образ ее импульсной характеристики, а $X(e^{j\omega})$ и $Y(e^{j\omega})$ — Фурье-образы входного и выходного сигналов соответственно. Комбинируя формулы (4.34) и (4.35), получаем

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)H(e^{j\Omega T})X(e^{j\Omega T}). \quad (4.36)$$

Далее, подставляя $\omega = \Omega T$ в сумму (4.32), находим

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)H(e^{j\Omega T})\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\Omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \right). \quad (4.37)$$

Если $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq \pi/T$, то идеальный восстанавливающий фильтр ниж-

них частот с характеристикой $H_r(j\Omega)$ компенсирует множитель $1/T$ и отбирает в формуле (4.37) только член с $k = 0$, т. е.

$$Y_r(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T})X_c(j\Omega), & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T. \end{cases} \quad (4.38)$$

Итак, если $X_c(j\Omega)$ имеет узкую полосу частот, а частота дискретизации выше минимально допустимой, то имеет место соотношение

$$Y_r(j\Omega) = H_{\text{eff}}(j\Omega)X_c(j\Omega), \quad (4.39)$$

где

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T. \end{cases} \quad (4.40)$$

Иными словами, вся непрерывная система эквивалентна ЛС-системе, чья *эффективная КЧХ* дана в формуле (4.40).

Важно осознавать, что линейное и стационарное поведение большой системы рис. 4.11 зависит от двух факторов. Во-первых, внутренняя дискретная система должна быть линейной и стационарной; во-вторых, входной сигнал должен быть узкополосным, а частота дискретизации достаточно высока для того, чтобы любые компоненты наложения спектров не влияли на дискретную систему. В качестве простой иллюстрации второго условия рассмотрим случай, когда $x_c(t)$ — отдельный импульс с единичной амплитудой, чья длительность не превосходит шага дискретизации. Если импульс равен единице при $t = 0$, то $x[n] = \delta[n]$. Однако его можно сдвинуть таким образом, что при дискретизации получится $x[n] = 0$ для всех n . Очевидно, такой импульс, будучи ограниченным по времени, не является узкополосным. Даже если дискретная система является тождественной, т. е. $y[n] = x[n]$, большая система оказывается нестационарной. В общей ситуации, если встроенная дискретная система линейна и стационарна, а частота дискретизации выше минимально допустимой частоты, ассоциированной с полосой частот входного сигнала $x_c(t)$, то вся система эквивалентна непрерывной ЛС-системе с эффективной КЧХ (4.40). Более того, формула (4.40) выполнена даже при некотором наложении спектров в НДП, если налагающиеся компоненты отфильтровываются системой с КЧХ $H(e^{j\omega})$. Пример 4.4 — простая иллюстрация этого явления.

Пример 4.4. Идеальный непрерывный фильтр нижних частот со встроенным дискретным фильтром

Пусть КЧХ дискретной ЛС-системы рис. 4.11 равна

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < |\omega_c|, \\ 0, & |\omega_c| < |\omega| \leq \pi. \end{cases} \quad (4.41)$$

Она, очевидно, является 2π -периодической, как показано на рис. 4.12, a). Формула (4.40) влечет, что при узкополосном входном сигнале, конвертируемом в дискретный с частотой дискретизации выше минимально допустимой, вся система рис. 4.11 ведет себя как

непрерывная ЛС-система с КЧХ

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega T| < \omega_c \text{ или } |\Omega| < \omega_c/T, \\ 0, & |\Omega T| > \omega_c \text{ или } |\Omega| > \omega_c/T. \end{cases} \quad (4.42)$$

Рисунок 4.12, б) свидетельствует, что $H_{\text{eff}}(j\Omega)$ выглядит как КЧХ идеального фильтра нижних частот с частотой отсечки $\Omega_c = \omega_c/T$.

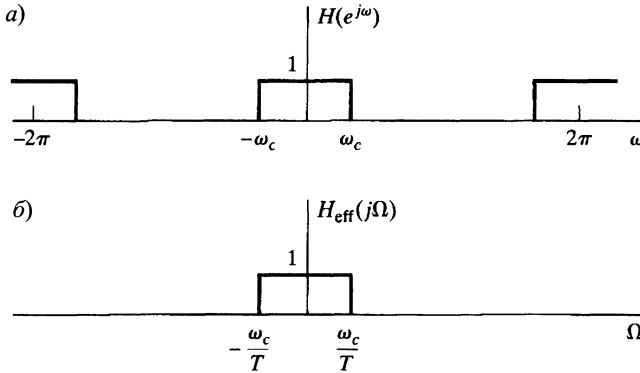


Рис. 4.12. а) КЧХ дискретной системы рис. 4.11; б) соответствующая эффективная непрерывная КЧХ при узкополосном входном сигнале

Для интерпретации этого результата рассмотрим графическую иллюстрацию на рис. 4.13. Преобразование Фурье узкополосного сигнала показано на рис. 4.13, а). Рисунок 4.13, б) показывает Фурье-образ модулированной цепочки импульсов, совпадающей с $X(e^{j\Omega T})$ — ДВПФ последовательности отсчетов, вычисленных для $\omega = \Omega T$. Графики Фурье-образа последовательности отсчетов и КЧХ дискретной системы как функций от нормализованной дискретной частотной переменной ω приведены на рис. 4.13, в). Рисунок 4.13, г) изображает $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$ — Фурье-образ сигнала, выходного из дискретной системы. Иллюстрации преобразования Фурье выхода дискретной системы как функции непрерывной переменной Ω отведено место на рис. 4.13, д). Там же присутствует КЧХ $H_r(j\Omega)$ идеального восстановливающего ДНП. Наконец, на рис. 4.13, е) отражен Фурье-образ выхода ДНП. Сравнивая графики на рис. 4.13, а) и е), мы видим, что система ведет себя как ЛС-система с КЧХ, вычисленной по формуле (4.42) и изображенной на рис. 4.12, б). □

В примере 4.4 присутствует несколько важных моментов. Во-первых, заметим, что идеальный дискретный фильтр нижних частот с дискретной частотой отсечки ω_c , включенный в каскад систем из рис. 4.11, работает как идеальный фильтр нижних частот с частотой отсечки $\Omega_c = \omega_c/T$. Последняя частота отсечки зависит как от ω_c , так и от T . В частности, используя один и тот же дискретный идеальный фильтр нижних частот, но варьируя шаг дискретизации T , можно получать непрерывный идеальный фильтр нижних частот с разной частотой отсечки. Например, если T удовлетворяет неравенству $\Omega_N T < \omega_c$, то выходной сигнал $y_r(t)$ непрерывной системы рис. 4.11 совпадает с входным $x_c(t)$. Кроме того, как свидетельствует задача 4.25, формула (4.42) остается верной даже при некотором наложении спектров, если только эти искаженные (налагающиеся) компоненты устраняются фильтром $H(e^{j\omega})$. В частности, из рис. 4.13, в)

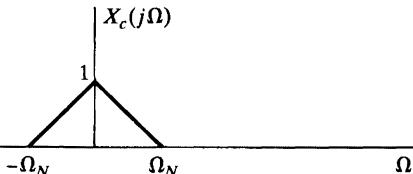
видно: чтобы ложные частоты не появлялись в выходном сигнале, необходимо требовать выполнение неравенства

$$(2\pi - \Omega_N T) > \omega_c, \quad (4.43)$$

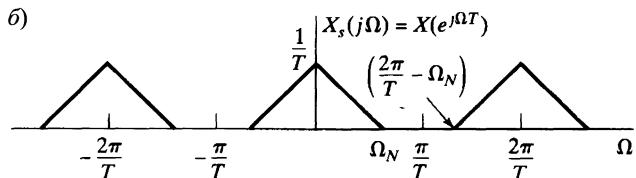
в то время как требования теоремы Котельникова – Найквиста имеют вид:

$$(2\pi - \Omega_N T) > \Omega_n T. \quad (4.44)$$

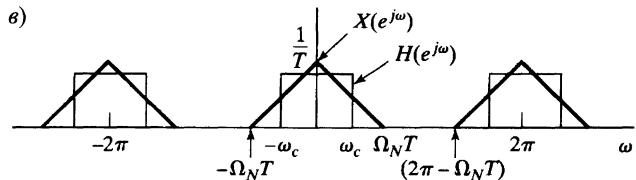
a)



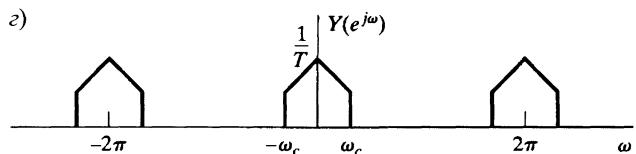
б)



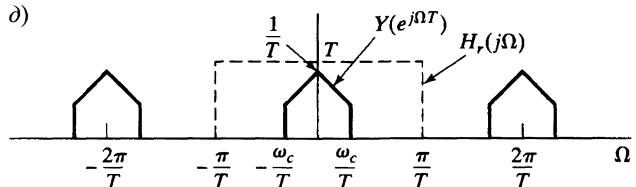
в)



г)



д)



е)

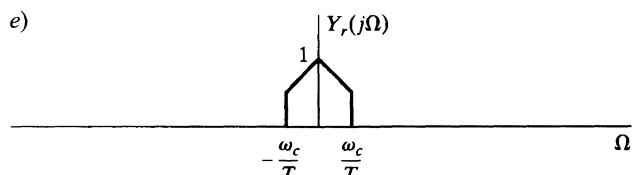


Рис. 4.13. Преобразование Фурье: а) входного узкополосного сигнала; б) дискретизированного входного сигнала, изображенное как функция непрерывной переменной Ω ; в) Фурье-образ последовательности отсчетов и КЧХ $H(e^{j\omega})$ дискретной системы; г) реакции дискретной системы; д) реакции дискретной системы и КЧХ идеального реконструирующего фильтра как функции от Ω ; е) итогового сигнала всей системы

В качестве другого примера обработки непрерывных сигналов с использованием дискретных систем рассмотрим реализацию идеального дифференциатора узкополосного сигнала.

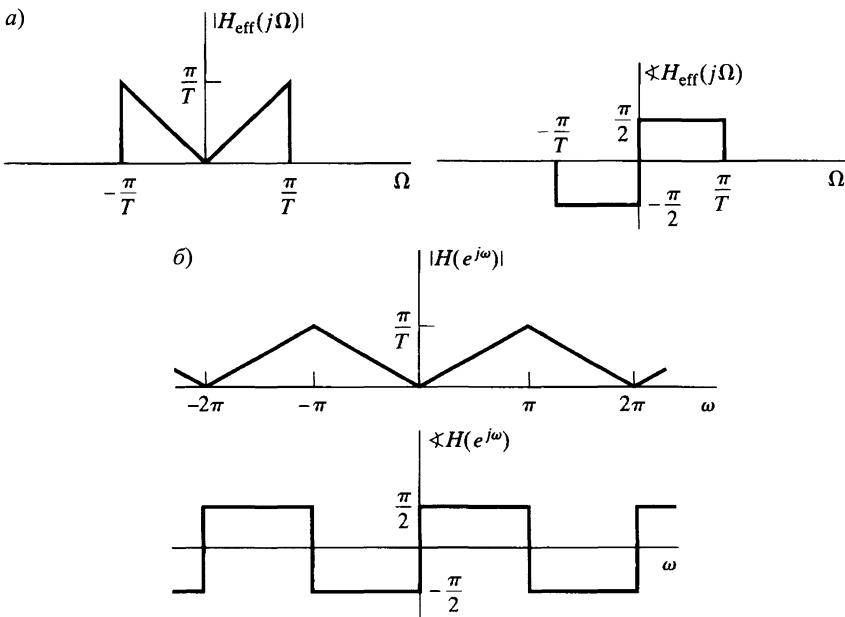


Рис. 4.14. Частотные характеристики: а) непрерывного идеального узкополосного дифференциатора $H_c(j\Omega) = j\Omega$, $|\Omega| < \pi/T$; б) дискретного фильтра, встроенного в реализацию дифференциатора

Пример 4.5. Дискретная реализация идеального непрерывного узкополосного дифференциатора

Идеальная непрерывная дифференцирующая система определяется формулой:

$$y_c(t) = \frac{d}{dt}[x_c(t)]. \quad (4.45)$$

Соответствующая КЧХ равна

$$H_c(j\Omega) = j\Omega. \quad (4.46)$$

Поскольку мы рассматриваем реализацию, схема которой изображена на рис. 4.11, входной сигнал должен быть узкополосным. Для его обработки достаточно, чтобы

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} j\Omega, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T, \end{cases} \quad (4.47)$$

как показано на рис. 4.14, а). Дискретная система при этом обладает 2π -периодической КЧХ вида

$$H(e^{j\omega}) = \frac{j\omega}{T}, \quad |\omega| < \pi \quad (4.48)$$

(см. рис. 4.14, б)). Можно показать, что ее импульсная характеристика равна

$$h[n] = \frac{\pi n \cos \pi n - \sin \pi n}{\pi n^2 T}, \quad -\infty < n < \infty,$$

или (равносильная запись)

$$h[n] = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \frac{\cos \pi n}{nT}, & n \neq 0. \end{cases} \quad (4.49)$$

Итак, если дискретная система с такой импульсной характеристикой используется в конфигурации рис. 4.11, выходной сигнал большой системы, соответствующий узкополосному входу, будет равен производной входного. \square

Пример 4.6. Иллюстрация работы дифференциатора с синусоидальным входным сигналом

Предположим, что на вход узкополосного дифференциатора примера 4.5 подается сигнал $x_c(t) = \cos \Omega_0 t$ с $\Omega_0 < \pi/T$. Его дискретизация будет равна $x[n] = \cos \omega_0 n$, где $\omega_0 = \Omega_0 T < \pi$, а Фурье-образ последовательности $x[n]$, записанный как функция от Ω , имеет вид

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\pi \delta(\Omega - \Omega_0 - k\Omega_s) + \pi \delta(\Omega + \Omega_0 - k\Omega_s)).$$

Сконцентрировав внимание на основной полосе частот $-\pi/T < \Omega < \pi/T$, получим

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{\pi}{T} \delta(\Omega - \Omega_0) + \frac{\pi}{T} \delta(\Omega + \Omega_0) \quad \text{при } |\Omega| \leq \pi/T. \quad (4.50)$$

Чтобы выразить ДВПФ в терминах ω , подставим в уравнение (4.50) $\Omega = \omega/T$ и учтем равенство $\delta(\omega/T) = T\delta(\omega)$:

$$X(e^{j\omega}) = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0), \quad |\omega| \leq \pi.$$

Естественно, ДВПФ $X(e^{j\omega})$ по переменной ω повторяется с периодом 2π , а период функции $X(e^{j\Omega T})$ равен $2\pi/T$. Теперь из формулы (4.48) следует, что ДВПФ выходного сигнала имеет вид

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) = \frac{j\omega}{T} (\pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)) = \\ &= \frac{j\omega_0 \pi}{T} \delta(\omega - \omega_0) - \frac{j\omega_0 \pi}{T} \delta(\omega + \omega_0), \quad |\omega| \leq \pi. \end{aligned}$$

Непрерывное преобразование Фурье реакции ДНП при $|\Omega| \leq \pi/T$ рассчитывается по формуле (4.34):

$$\begin{aligned} Y_r(j\Omega) &= H_r(j\Omega) Y(e^{j\Omega T}) = T Y(e^{j\Omega T}) = \\ &= T \left(\frac{j\omega_0 \pi}{T} \delta(\Omega T - \Omega_0 T) - \frac{j\omega_0 \pi}{T} \delta(\Omega T + \Omega_0 T) \right) = \\ &= T \left(\frac{j\omega_0 \pi}{T} \frac{1}{T} \delta(\Omega - \Omega_0) - \frac{j\omega_0 \pi}{T} \frac{1}{T} \delta(\Omega + \Omega_0) \right) = \\ &= j\Omega_0 \pi \delta(\Omega - \Omega_0) - j\Omega_0 \pi \delta(\Omega + \Omega_0). \end{aligned}$$

Итак, восстанавливающий фильтр отбирает два импульса в точках $\pm\Omega_0$, так что

$$y_r(t) = j\Omega_0 \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 t} - j\Omega_0 \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 t} = -\Omega_0 \sin \Omega_0 t,$$

и мы приходим к ожидаемому результату: $y_r(t) = \frac{d}{dt}[x_c(t)]$. \square

4.5.2. Импульсная инвариантность

Мы показали, что каскад систем рис. 4.11 может быть эквивалентен ЛС-системе при узкополосном входном сигнале. Предположим теперь, что нам дана непрерывная система (рис. 4.15), которую нам нужно реализовать в виде рис. 4.11. При узкополосной КЧХ $H_c(j\Omega)$ функцию $H(e^{j\omega})$, согласно выражению (4.40), можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство $H_{\text{eff}}(j\Omega) = H_c(j\Omega)$, а именно нужно взять

$$H(e^{j\omega}) = H_c(j\omega/T), \quad |\omega| < \pi, \quad (4.51)$$

причем T нужно выбирать с учетом требования:

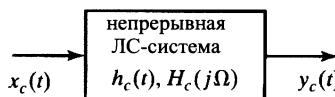
$$H_c(j\Omega) = 0, \quad \text{при } |\Omega| \geq \pi/T. \quad (4.52)$$

При выполнении условий (4.51) и (4.52) существует также прямая и полезная взаимосвязь между непрерывной $h_c(t)$ и дискретной $h[n]$ импульсными характеристиками. В частности, как мы коротко проверим,

$$h[n] = Th_c(nT), \quad (4.53)$$

т. е. импульсная характеристика дискретной системы — масштабированная версия дискретизации функции $h_c(t)$. Когда $h[n]$ и $h_c(t)$ связаны соотношением (4.53), говорят, что дискретная система является *импульсно-инвариантной* версией непрерывной системы.

a)



б)

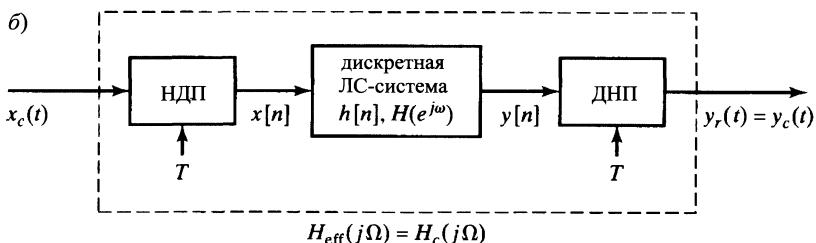


Рис. 4.15. Блок-схемы: *а*) непрерывной ЛС-системы; *б*) эквивалентной системы для узкополосного входа

Формула (4.53) — прямое следствие обсуждавшихся в § 4.3 фактов. Действительно, подставляя в формулу (4.17) $h[n]$ и $h_c(t)$ вместо $x[n]$ и $x_c(t)$, получим

$$h[n] = h_c(nT). \quad (4.54)$$

Тогда выражение (4.21) дает соотношение:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c \left(j \left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right), \quad (4.55)$$

или, учитывая требование (4.52),

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_c \left(j \frac{\omega}{T} \right), \quad |\omega| \leq \pi. \quad (4.56)$$

Внося изменения в (4.54) и (4.56) с учетом множителя T в равенстве (4.53), приходим к заключению:

$$h[n] = Th_c(nT), \quad (4.57)$$

$$H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| \leq \pi. \quad (4.58)$$

Пример 4.7. Дискретный фильтр нижних частот, полученный с помощью импульсной инвариантности

Предположим, что мы хотим сконструировать идеальный дискретный фильтр нижних частот с частотой отсечки $\omega_c < \pi$. Мы можем это сделать, дискретизировав непрерывный идеальный фильтр нижних частот с частотой отсечки $\Omega_c = \omega_c/T < \pi/T$, определив

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c, \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_c. \end{cases}$$

Импульсная характеристика непрерывной системы равна

$$h_c(t) = \frac{\sin \Omega_c t}{\pi t}.$$

Поэтому мы определяем импульсную характеристику дискретной системы как

$$h[n] = Th_c(nT) = T \frac{\sin \Omega_c nT}{\pi n t} = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n},$$

где $\omega_c = \Omega_c T$. Мы уже показали, что Фурье-образ этой последовательности имеет вид

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

что совпадает с $H_c(j\omega/T)$, как и должно быть ввиду формулы (4.58). \square

Пример 4.8. Импульсная инвариантность, примененная к непрерывной системе с рациональной характеристической функцией

Импульсную характеристику большого числа непрерывных систем можно разложить в сумму экспоненциальных последовательностей

$$h_c(t) = Ae^{s_0 t} u(t).$$

Преобразование Лапласа таких функций равно

$$H_c(s) = \frac{A}{s - s_0}.$$

Применив концепцию импульсной инвариантности, мы получим импульсную характеристику

$$h[n] = Th_c(nT) = Ae^{s_0 T n} u[n]$$

с z -преобразованием, т. е. характеристической функцией, вида

$$H(z) = \frac{AT}{1 - e^{s_0 T} z^{-1}}$$

и КЧХ

$$H(e^{j\omega}) = \frac{AT}{1 - e^{s_0 T} e^{-j\omega}}.$$

В этом случае соотношение (4.58) выполнено не до конца, поскольку КЧХ исходной непрерывной системы, строго говоря, не является узкополосной, и поэтому соответствующая КЧХ дискретной системы будетискаженной версией функции $H_c(j\Omega)$. Даже если в такой ситуации произойдет наложение спектров, оно может оказывать малое влияние на результат. Системы высшего порядка, чьи импульсные характеристики — суммы комплексных экспонент, могут фактически обладать КЧХ, быстро сходящей на нет при верхних частотах. Поэтому в таких системах эффект от наложения спектров будет минимальным при достаточно большой частоте дискретизации. Таким образом, один из подходов к дискретному моделированию непрерывных систем и разработке цифровых фильтров состоит в дискретизации импульсной характеристики соответствующего аналогового фильтра. \square

4.6. Непрерывная обработка дискретных сигналов

В § 4.5 мы анализировали возможность использования дискретных систем при обработке непрерывных сигналов с помощью конфигурации, представленной на рис. 4.11.

Здесь мы рассматриваем противоположную ситуацию, изображенную на рис. 4.16, которую будем называть непрерывной обработкой дискретных сигналов. Хотя система рис. 4.16 не часто используется для реализации дискретных систем, на ее примере очень удобно объяснить принцип их построения.

По определению идеального ДНП функция $X_c(j\Omega)$, а значит, и $Y_c(j\Omega)$ должны принимать нулевые значения при $|\Omega| \geq \pi/T$. В связи с этим НДП дает дискретизацию сигнала $y_c(t)$ без наложения спектров, и мы можем записать $x_c(t)$ и $y_c(t)$ как

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)/T}, \quad (4.59)$$

$$y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \frac{\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)/T}, \quad (4.60)$$

где $x[n] = x_c(nT)$ и $y[n] = y_c(nT)$. Выпишем соотношения в частотной области для сигналов системы рис. 4.16.

$$X_c(j\Omega) = TX(e^{j\Omega T}), \quad |\Omega| < \pi/T, \quad (4.61)$$

$$Y_c(j\Omega) = H_c(j\Omega)X_c(j\Omega), \quad |\Omega| < \pi/T, \quad (4.62)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} Y_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi. \quad (4.63)$$

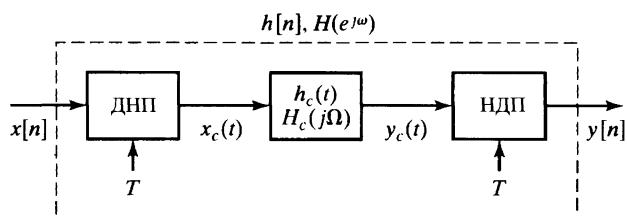


Рис. 4.16. Непрерывная обработка дискретных сигналов

Таким образом, подставив равенства (4.61) и (4.62) в соотношение (4.63), мы увидим, что вся большая система ведет себя, как дискретная система с КЧХ:

$$H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi, \quad (4.64)$$

или (эквивалентное утверждение) КЧХ большой системы рис. 4.16 будет совпадать с данной $H(e^{j\omega})$, если КЧХ непрерывной системы равна

$$H_c(j\Omega) = H(e^{j\Omega T}), \quad |\Omega| < \pi/T. \quad (4.65)$$

Так как $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq \pi/T$, то поведение функции $H_c(j\Omega)$ при $|\Omega| > \pi/T$ может быть каким угодно. Удобно, но не обязательно выбирать такие H_c , что $H_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| > \pi/T$.

Представляя таким образом дискретную систему, мы можем сфокусировать внимание на эквивалентном эффекте непрерывной системы по обработке узкополосного непрерывного сигнала $x_c(t)$, что иллюстрируется примерами 4.9 и 4.10.

Пример 4.9. Нецелая задержка

Рассмотрим дискретную систему с КЧХ

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\Delta}, \quad |\omega| < \pi. \quad (4.66)$$

При целом Δ эта система интерпретируется как задержка на Δ отсчетов, т. е.

$$y[n] = x[n - \Delta]. \quad (4.67)$$

Если же Δ — нецелое число, формулу (4.67) уже нельзя так интерпретировать, поскольку мы не можем сдвинуть последовательность $x[n]$ ни на что, кроме целого числа отсчетов. Однако, используя систему рис. 4.16, можно получить полезную интерпретацию системы с КЧХ (4.66) во временной области. Пусть $H_c(j\Omega)$ в рис. 4.16 выбрана так, что

$$H_c(j\Omega) = H(e^{j\Omega T}) = e^{-j\Omega\Delta T}. \quad (4.68)$$

Тогда, согласно формуле (4.65), большая дискретная система рис. 4.16 будет иметь КЧХ, описываемую формулой (4.66), вне зависимости от того, целое ли число Δ . Для интерпретации системы (4.66) заметим, что формула (4.68) говорит о задержке на ΔT с. Следовательно,

$$y_c(t) = x_c(t - \Delta T). \quad (4.69)$$

Более того, $x_c(t)$ — узкополосная интерполяция сигнала $x[n]$, а $y[n]$ получается дискретизацией сигнала $y_c(t)$. Например, если $\Delta = \frac{1}{2}$, то $y_c(t) = x_c(t - \frac{T}{2})$ и $y[n] = y_c(nT) = y_c(nT - \frac{T}{2})$, а $x[n] = x_c(nT)$. То есть значения $y[n]$ совпадают со значениями $x_c(t)$, вычисленными в центрах отрезков $[(n-1)T, nT]$, что иллюстрируется рис. 4.17.

Используя формулы (4.69) и (4.59), можно выразить значения $y[n]$ через члены последовательности $x[n]$:

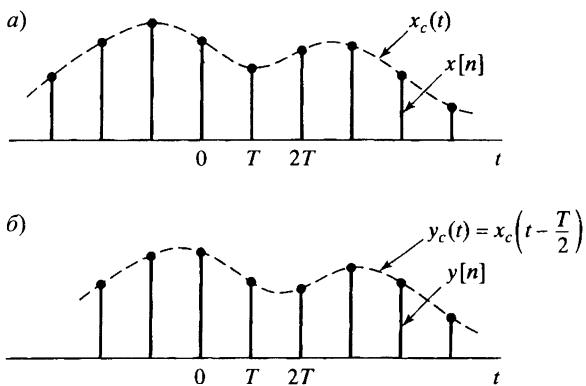
$$\begin{aligned} y[n] &= y_c(nT) = x_c(nT - \Delta T) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\sin(\pi(t - \Delta T - kT)/T)}{\pi(t - \Delta T - kT)/T} \Big|_{t=nT} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\sin \pi(n - k - \Delta)}{\pi(n - k - \Delta)}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

что, по определению, является сверткой $x[n]$ с последовательностью

$$h[n] = \frac{\sin \pi(n - \Delta)}{\pi(n - \Delta)}, \quad -\infty < n < \infty.$$

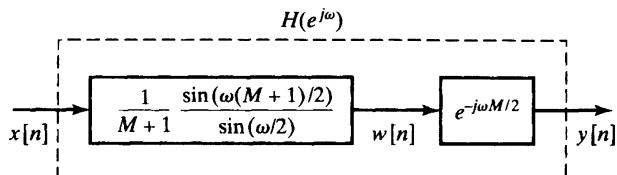
Если Δ — не целое число, то $h[n]$ является бесконечной последовательностью. Однако при целой задержке $\Delta = n_0$ имеет место равенство¹ $h[n] = \delta[n - n_0]$, т. е. $h[n]$ — импульсная характеристика идеальной системы задержки. \square

Рис. 4.17. Непрерывная обработка дискретной последовательности из части а) рисунка может быть получена как новая последовательность с задержкой на половину шага дискретизации, как показано на части б) рисунка



Задержка на нецелое число отсчетов, представленная формулой (4.70), имеет немаловажное практическое значение, поскольку такое явление часто возникает при представлении систем в частотной области. Если в КЧХ детерминированной системы присутствует член такого типа, его можно интерпретировать в свете примера 4.9, что продемонстрировано ниже.

Рис. 4.18. Система скользящего среднего, представленная как каскад двух систем



Пример 4.10. Система скользящего среднего с нецелой задержкой

В примере 2.20 мы рассматривали общую систему скользящего среднего и вычислили ее КЧХ. В частности, КЧХ детерминированной $(M+1)$ -точечной системы скользящего среднего с $M_1 = 0$ и $M_2 = M$ равна

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M+1} \frac{\sin(\omega(M+1)/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}, \quad |\omega| < \pi. \quad (4.71)$$

Такое выражение КЧХ подсказывает интерпретацию $(M+1)$ -точечной системы скользящего среднего как каскада двух систем (см. рис. 4.18). Первая из них модулирует амплитуду в частотной области, а вторая представляет член формулы (4.71), линейный

¹Если продолжить функцию $\frac{\sin x}{x}$ в точку $x = 0$ по непрерывности. — Примеч. перев.

по фазе. Если M — четное целое число (т. е. вычисляется скользящее среднее нечетного числа отсчетов), то линейный по фазе член соответствует целочисленной задержке, а именно:

$$y[n] = w[n - M/2]. \quad (4.72)$$

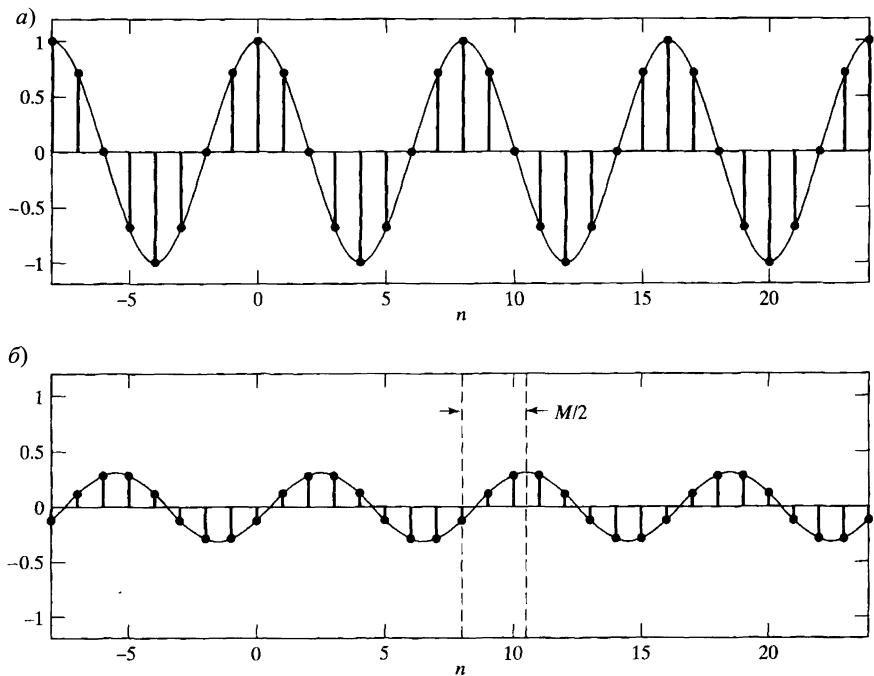


Рис. 4.19. Иллюстрация фильтра скользящего среднего: а) входной сигнал $x[n] = \cos(0, 25\pi n)$; б) соответствующая реакция шеститочечного фильтра

Однако при нечетном M линейный по фазе член отвечает задержке на $k + \frac{1}{2}$ число отсчетов (здесь k — целое). Такую задержку можно интерпретировать в терминах примера 4.9, т. е. последовательность $y[n]$ может быть получена в результате следующих действий: узкополосной интерполяции сигнала $w[n]$, задержки на $MT/2$ с (где T предполагается произвольным шагом дискретизации при ДНП сигнала $w[n]$) и обратном НДП с шагом T . Дробная задержка показана на рис. 4.19. Рисунок 4.19, а) представляет дискретную последовательность $x[n] = \cos(0, 25\pi n)$, которая подается на вход шеститочечного ($M = 5$) фильтра скользящего среднего. В этом примере входной сигнал сдвигается назад во времени достаточно сильно, для того чтобы выходная последовательность состояла только из установившейся реакции на указанном временном интервале. Соответствующий отклик системы, изображенный на рис. 4.19, б), вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} y[n] &= H(e^{j0,25\pi}) \frac{1}{2} e^{j0,25\pi n} + H(e^{-j0,25\pi}) \frac{1}{2} e^{-j0,25\pi n} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin(3(0, 25\pi))}{6 \sin(0, 125\pi)} e^{-j(0, 25\pi)5/2} e^{j0,25\pi n} + \frac{1}{2} \frac{\sin(3(-0, 25\pi))}{6 \sin(-0, 125\pi)} e^{j(0, 25\pi)5/2} e^{-j0,25\pi n} = \\ &= 0,308 \cos(0, 25\pi(n - 2, 5)). \end{aligned}$$

Итак, шеститочечный фильтр скользящего среднего уменьшает амплитуду косинусоидального сигнала и сдвигает его по фазе, что соответствует задержке на 2,5 отсчета. Это четко видно на рис. 4.19, где изображен график косинуса, который интерполируется идеальным ДНП как на начальной, так и на заключительной стадии обработки. Заметим (рис. 4.19, б), что шеститочечный фильтр скользящего среднего выдает дискретизованный косинусоидальный сигнал, у которого точки замеров сдвинуты на 2,5 отсчета относительно точек замеров входного сигнала. Это можно увидеть на рис. 4.19, б), сравнивая положительный пик в точке 8 на графике входного сигнала с аналогичным пиком в точке 10,5 выходного сигнала. Итак, мы убедились, что шеститочечный фильтр скользящего среднего выглядит как задерживающая на $5/2 = 2,5$ отсчета система. □

4.7. Изменение частоты дискретизации с помощью дискретной обработки

Мы убедились, что непрерывный сигнал $x_c(t)$ хорошо представляется дискретным, т. е. последовательностью отсчетов

$$x[n] = x_c(nT). \quad (4.73)$$

С другой стороны, исследования в предыдущих параграфах показали, что, даже если последовательность $x[n]$ не была получена дискретизацией, мы всегда можем использовать узкополосную интерполяционную формулу (4.26) для подбора непрерывного узкополосного сигнала $x_r(t)$, чья дискретизация совпадает с данной последовательностью $x[n] = x_r(nT)$.

Зачастую возникает необходимость изменить частоту дискретизации дискретного сигнала, т. е. получить новое дискретное представление подлежащего непрерывного сигнала вида

$$x'[n] = x_c(nT'), \quad (4.74)$$

где $T' \neq T$. Один из способов определения последовательности $x'[n]$ по $x[n]$ заключается в восстановлении $x_c(t)$ из $x[n]$ с помощью формулы (4.26) с последующей его дискретизацией с новым шагом T' . Однако во многих ситуациях такой прием не приемлем ввиду неидеальности реализаций восстанавливающего фильтра, ДНП и НДП, применяемых на практике. Поэтому интересно рассмотреть метод изменения частоты дискретизации, основанный лишь на дискретных операциях.

4.7.1. Уменьшение частоты дискретизации в целое число раз

Частоту дискретизации последовательности можно изменить с помощью дискретизации, т. е. определения новой последовательности

$$x_d[n] = x[nM] = x_c(nMT). \quad (4.75)$$

Формула (4.75) определяет систему, изображенную на рис. 4.20, которая называется *компрессором частоты дискретизации* (см. [32]) или просто *компрессором*. Из уравнения (4.75) видно, что $x_d[n]$ совпадает с последовательностью, которая может быть получена дискретизацией сигнала $x_c(t)$ с шагом $T' = MT$. Более

того, если $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq \Omega_N$ и $\pi/T' = \pi/(MT) \geq \Omega_N$, то $x_d[n]$ — точное представление сигнала $x_c(t)$. То есть частота дискретизации может быть уменьшена в M раз без наложения спектров, если исходная частота дискретизации равна по крайней мере произведению M на минимально допустимую частоту дискретизации или если полоса последовательности в результате дискретного фильтрования была уменьшена в M раз. В общей ситуации операция уменьшения частоты дискретизации (включая все предварительные фильтрования) будет именоваться *понижющей дискретизацией*.

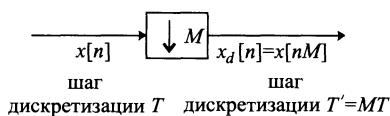


Рис. 4.20. Блок-схема компрессора или дискретного дискретизатора

для дискретизованных непрерывных сигналов. Прежде всего заметим, что Фурье-образ последовательности $x[n] = x_c(nT)$ равен

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right). \quad (4.76)$$

Аналогично, ДВПФ сигнала $x_d[n] = x[nMT] = x_c(nT')$ (где $T' = MT$) описывается формулой

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T'} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{T'} - \frac{2\pi r}{T'} \right) \right). \quad (4.77)$$

Теперь, так как $T' = MT$, мы можем переписать равенство (4.77) в виде

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{MT} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi r}{MT} \right) \right). \quad (4.78)$$

Чтобы увидеть связь между формулами (4.78) и (4.76), заметим, что индекс суммирования в соотношении (4.78) выражается как

$$r = i + kM, \quad (4.79)$$

где k и i — такие целые числа, что $-\infty < k < \infty$ и $0 \leq i \leq M-1$. Ясно, что r — тоже целое число, меняющееся от $-\infty$ до ∞ , но теперь сумму (4.78) можно переписать по-другому:

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi k}{T} - \frac{2\pi i}{MT} \right) \right) \right]. \quad (4.80)$$

Член, заключенный в квадратные скобки в формуле (4.80), получается из равенства (4.76) как

$$X(e^{j(\omega-2\pi i)/M}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega-2\pi i}{MT} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right). \quad (4.81)$$

Таким образом, эквивалентная форма записи формулы (4.80) имеет вид:

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j(\omega - 2\pi i)/M}). \quad (4.82)$$

Между формулами (4.76) и (4.82) прослеживается четкая аналогия: первая из них выражает Фурье-образ последовательности отсчетов $x[n]$ (с шагом T) в терминах преобразования Фурье непрерывного сигнала $x_c(t)$, а вторая — Фурье-образ дискретизованной последовательности $x_d[n]$ (с шагом дискретизации M) через преобразование Фурье сигнала $x[n]$. При сравнении формул (4.77) и (4.82) видно, что функцию $X_d(e^{j\omega})$ можно представлять себе либо как сумму бесконечного числа копий $X_c(j\Omega)$, частота которых масштабирована до $\omega = \Omega T'$ и сдвинута на числа, кратные $2\pi/T'$ (см. формулу (4.77)), либо как сумму M копий периодического Фурье-образа $X(e^{j\omega})$, частота которых поделена на M и сдвинута на числа, кратные 2π (формула (4.82)). По любой интерпретации ясно, что $X_d(e^{j\omega})$ — 2π -периодическая функция (как сумма Фурье-образ), и наложение спектров не возникает, если $X(e^{j\omega})$ — узкополосная функция, т. е.

$$X(e^{j\omega}) = 0, \quad \omega_N \leq |\omega| \leq \pi, \quad (4.83)$$

а $2\pi/M \geq 2\omega_N$.

Поникающая дискретизация иллюстрируется рис. 4.21. Рисунок 4.21, *a*) показывает Фурье-образ узкополосного непрерывного сигнала, а рис. 4.21, *b*) — Фурье-образ цепочки импульсов при шаге дискретизации T . На рис. 4.21, *c*) изображен график функции $X(e^{j\omega})$, связанный с графиком из рис. 4.21, *b*) формулой (4.19). Как мы уже видели, рис. 4.21, *b*) и *c*) отличаются друг от друга только масштабированием частотной переменной. Последовательность $x_d[n]$ с $M = 2$ представлена своим Фурье-образом на рис. 4.21, *c*). Там Фурье-образ изображен как функция нормализованной частоты $\omega = \Omega T'$. Наконец, на рис. 4.21, *d*) приведен график Фурье-образа последовательности, полученной в результате поникающей дискретизации, как функции непрерывной частотной переменной Ω . Графики на рис. 4.21, *c*) и *d*) тождественны по модулю сжатия частотной оси: $\Omega = \omega/T'$.

В этом примере $2\pi/T = 4\Omega_N$, т. е. исходная частота дискретизации в точности равна удвоенной минимально допустимой частоте, при которой отсутствует наложение спектров. Таким образом, когда исходная последовательность подвергается дискретизации с множителем $M = 2$, наложения спектров не происходит. Если же множитель поникающей дискретизации больше двух, то при такой исходной частоте дискретизации будет присутствовать эффект наложения спектров, как показано на рис. 4.22. На рис. 4.22, *a*) изображено непрерывное преобразование Фурье сигнала $x_c(t)$, а на рис. 4.22, *b*) — ДВПФ последовательности $x[n] = x_c(nT)$ при $2\pi/T = 4\Omega_N$.

Таким образом, $\omega_N = \Omega_N T = \pi/2$. Теперь, если произвести поникающую дискретизацию с множителем $M = 3$, получится последовательность $x_d[n] = x[3n] = x_c(n3T)$, чье ДВПФ с нормализованной частотой $\omega = \Omega T'$ приведено на рис. 4.22, *c*). Заметим, что здесь оказывается эффект наложения спектров, поскольку $M\omega_N = 3\pi/2 > \pi$. В общем случае для исключения ложных частот при поникающей дискретизации с множителем M необходимо соблюдать следующие условия:

$$\omega_N M < \pi \quad \text{или} \quad \omega_N < \pi/M. \quad (4.84)$$

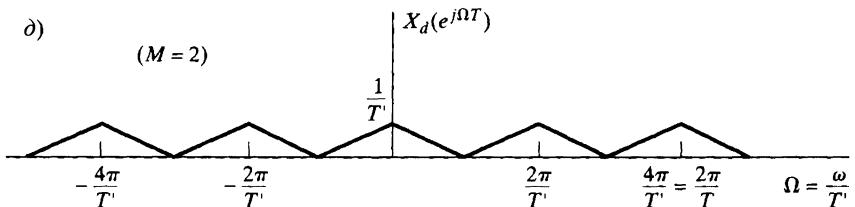
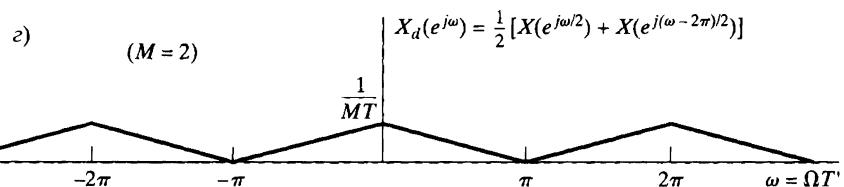
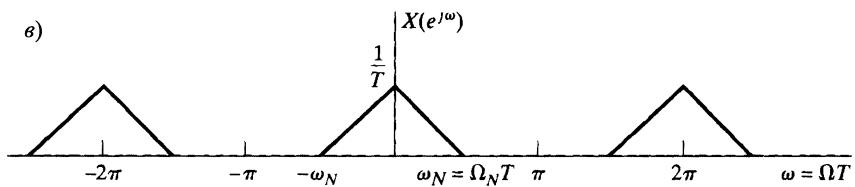
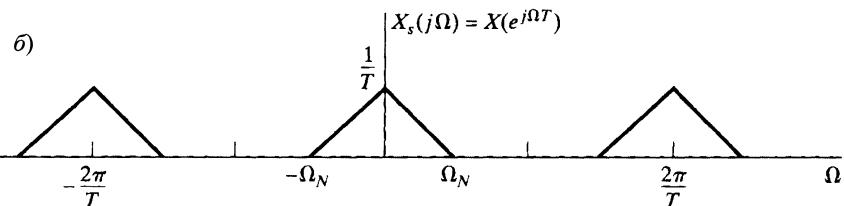
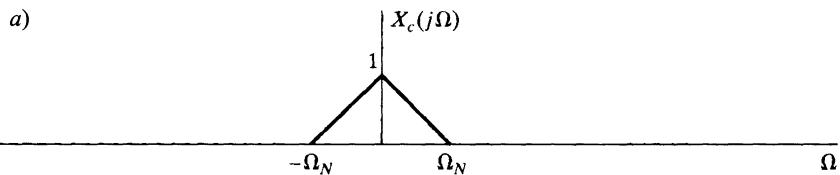


Рис. 4.21. Иллюстрация понижающей дискретизации в частотной области

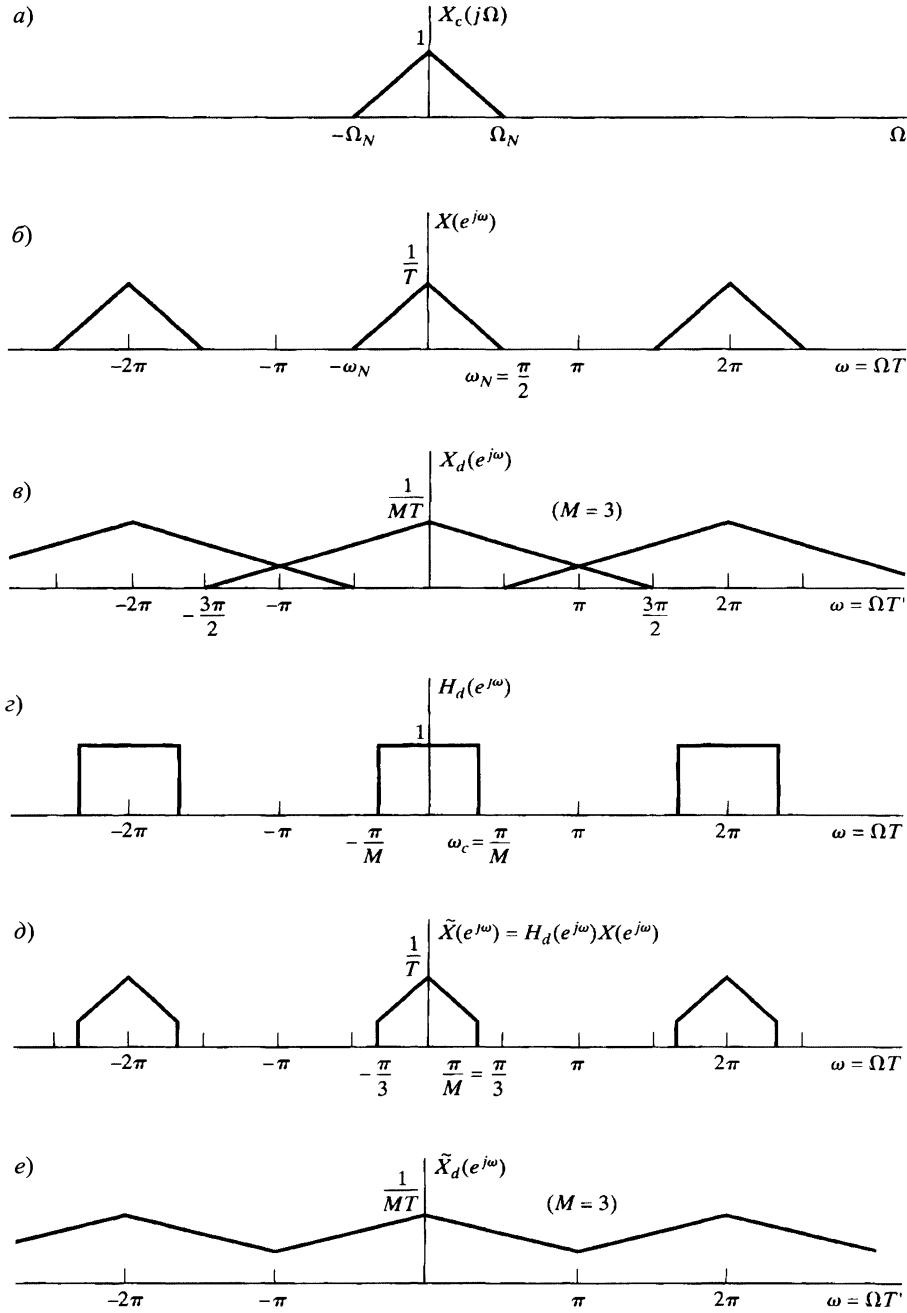


Рис. 4.22. а)-б) понижающая дискретизация с наложением спектров; г)-е) понижающая дискретизация с предварительным фильтрованием, предупреждающим наложение спектров

Если требования (4.84) не выполнены, имеет место наложение спектров, но для некоторых приложений им можно и пренебречь. В других случаях понижающую дискретизацию можно провести без наложения спектров, если подвергнуть сигнал предварительному фильтрованию, сделав его узкополосным. Итак, если сигнал $x[n]$ пропущен через идеальный фильтр нижних частот с частотой отсечки π/M , то профильтрованный сигнал $\tilde{x}[n]$ можно подвергать понижающей дискретизации без наложения спектров, что отражено на рис. 4.22, г)-е). Заметим, что последовательность $\tilde{x}_d[n] = \tilde{x}[nM]$ теперь не представляет исходный непрерывный сигнал $x_c(t)$. Вместо этого $\tilde{x}_d[n] = \tilde{x}_c(nT')$, где $T' = MT$, а $\tilde{x}_c(t)$ получен из сигнала $x_c(t)$ с помощью фильтра с частотой отсечки $\Omega_c = \pi/T' = \pi/(MT)$.

Из этого обсуждения видно, что общая система для понижающей дискретизации с множителем M выглядит, как показано на рис. 4.23. Такую систему называют *прореживателем*, а саму процедуру понижающей дискретизации с предварительным фильтрованием — *прореживанием* ([32]).



Рис. 4.23. Общая система уменьшения частоты дискретизации в M раз

4.7.2. Увеличение частоты дискретизации в целое число раз

Мы видели, что уменьшение в целое количество раз частоты дискретизации дискретного сигнала включает в себя дискретизацию последовательности, аналогичную дискретизации непрерывного сигнала. Не удивительно, что целочисленное пропорциональное увеличение частоты дискретизации основано на операции, похожей на ДНП. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим сигнал $x[n]$, чью частоту дискретизации нужно увеличить в L раз. Фактически нам предстоит получить последовательность

$$x_i[n] = x_c(nT'), \quad (4.85)$$

где $x_c(t)$ — исходный непрерывный сигнал, $T' = T/L$, а T — первоначальный шаг дискретизации, т. е.

$$x[n] = x_c(nT). \quad (4.86)$$

Будем называть такую операцию *повышающей дискретизацией*.

Из формул (4.85) и (4.86) следует, что

$$x_i[n] = x[n/L] = x_c(nT/L), \quad n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \quad (4.87)$$

На рис. 4.24 показана система определения сигнала $x_i[n]$ по последовательности $x[n]$ с помощью дискретных операций. Подсистема, расположенная на рисунке слева, называется *расширителем частоты дискретизации*¹ (см. [32]), или про-

¹ В отечественной литературе эта подсистема иногда называется *умножителем частоты дискретизации*. — Примеч. перев.

сто расширителем. Выходящий сигнал расширителя описывается формулой:

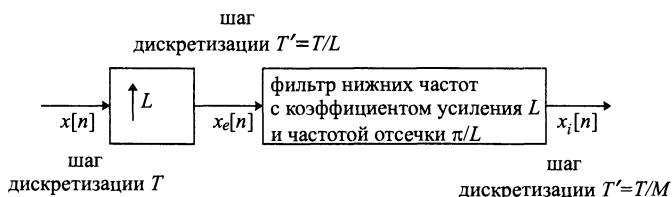
$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (4.88)$$

или эквивалентным выражением:

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL]. \quad (4.89)$$

Правая подсистема рисунка — это дискретный фильтр нижних частот с частотой отсечки π/L и коэффициентом усиления L . Вся система играет роль, аналогичную ДНП, изображенном на рис. 4.10, б). Сначала создается цепочка дискретных импульсов $x_e[n]$, которая затем пропускается через фильтр нижних частот для восстановления последовательности.

Рис. 4.24. Общая система увеличения частоты дискретизации в L раз



Шаги, совершаемые системой рис. 4.24, наиболее просто уяснить себе, исследуя представления всех ее сигналов в частотной области. Фурье-образ последовательности $x_e[n]$ имеет вид

$$X_e(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL] \right) e^{-jn\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-jk\omega L} = X(e^{j\omega L}). \quad (4.90)$$

Таким образом, преобразование Фурье сигнала, выходящего из расширителя, является версией Фурье-образа входного сигнала с масштабированной частотой: ω меняется на ωL , так что переменная ω нормализуется соотношением

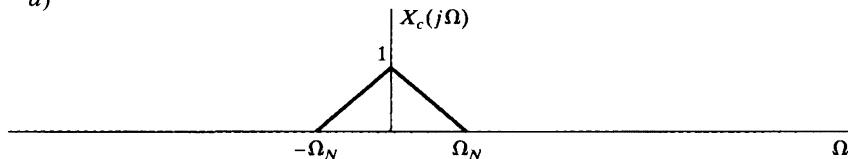
$$\omega = \Omega T'. \quad (4.91)$$

Эта ситуация отражена на рис. 4.25: рис. 4.25, а) представляет узкополосное непрерывное преобразование Фурье, а рис. 4.25, б) — Фурье-образ последовательности $x[n] = x_c(nT)$, где $\pi/T = \Omega_N$. График функции $X_e(e^{j\omega})$ с $L = 2$ показан на рис. 4.25, в), а график Фурье-образа выходного сигнала $x_i[n]$ — на рис. 4.25, д). Видно, что $X_i(e^{j\omega})$ можно получить из $X_e(e^{j\omega})$, меняя амплитудный множитель $1/T$ на $1/T'$ и удаляя все копии графика функции $X_c(j\Omega)$, за исключением расположенных над точками, кратными 2π . В случае, изображенном на рис. 4.25, для этого потребуется фильтр нижних частот с коэффициентом усиления 2 и частотой отсечки $\pi/2$, КЧХ которого показана на рис. 4.25, г). В общей ситуации требуется коэффициент усиления L , так как $L(1/T) = (1/(T/L)) = 1/T'$, а частота отсечки должна быть равна π/L .

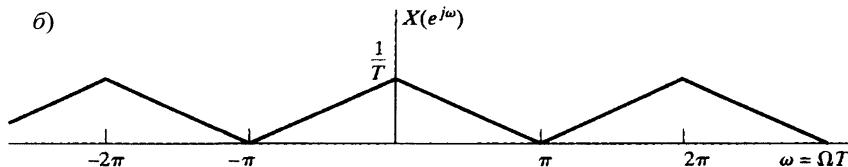
Наш пример подтверждает, что система рис. 4.24 действительно дает выходной сигнал, удовлетворяющий уравнению (4.85), если входящая последовательность $x[n] = x_c(nT)$ получена дискретизацией непрерывного сигнала без нало-

жения спектров. Такую систему принято называть *интерполятором*, поскольку она восстанавливает отсутствующие отсчеты. Поэтому термин «повышающая дискретизация» можно рассматривать как синоним понятия «интерполяция».

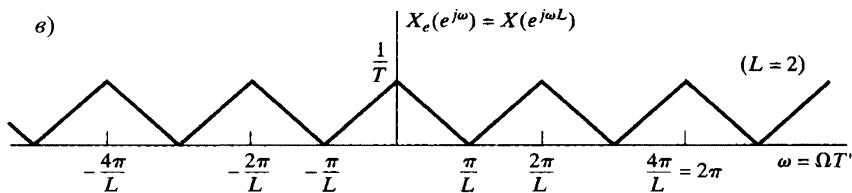
a)



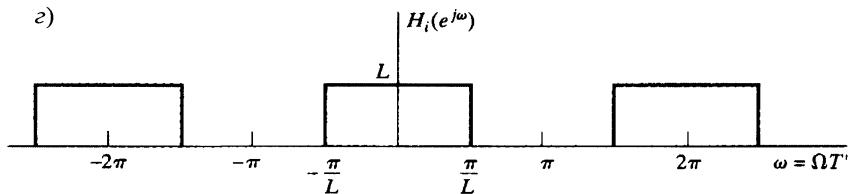
б)



в)



г)



д)

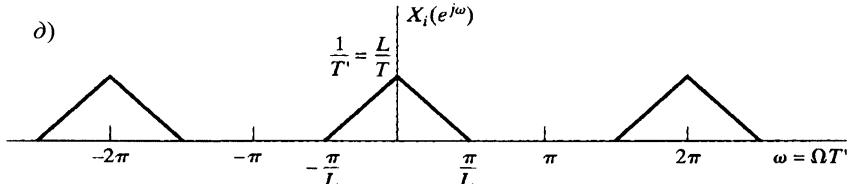


Рис. 4.25. Иллюстрация интерполяции в частотной области

Как и в случае с ДНП, существует возможность получить интерполяционную формулу для $x_i[n]$ в терминах $x[n]$. Заметим, что импульсная характеристика фильтра нижних частот из рис. 4.24 равна

$$h_i[n] = \frac{\sin(\pi n/L)}{\pi n/L}. \quad (4.92)$$

Учитывая выражение (4.89), находим

$$x_i[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\sin(\pi(n - kL)/L)}{\pi(n - kL)/L}. \quad (4.93)$$

Импульсная характеристика $h_i[n]$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} h_i[0] &= 1, \\ h_i[n] &= 0, \quad n = \pm L, \pm 2L, \dots \end{aligned} \quad (4.94)$$

Итак, для идеального интерполяционного фильтра нижних частот имеют место соотношения:

$$x_i[n] = x[n/L] = x_c(nT/L) = x_c(nT'), \quad n = \pm L, \pm 2L, \dots, \quad (4.95)$$

что и ожидалось. Тот факт, что $x_i[n] = x_c(nT')$ для всех n , следует из наших рассуждений в частотной области.

На практике идеальный фильтр нижних частот невозможно реализовать точно, но в главе 7 мы увидим, что его можно очень хорошо аппроксимировать. (См. также [139] и [105].) В некоторых случаях прибегают к очень простой интерполяционной процедуре. Поскольку линейная интерполяция используется довольно часто (хотя в общей ситуации она не совсем точна), имеет смысл исследовать ее в рамках только что описанной теории.

Линейная интерполяция может быть достигнута блок-схемой рис. 4.24, где импульсная характеристика равна

$$h_{lin}[n] = \begin{cases} 1 - |n|/L, & |n| \leq L, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.96)$$

График характеристики при $L = 5$ показан на рис. 4.26. При таком фильтре интерполированный сигнал равен

$$x_{lin}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_e[k] h_{lin}[n - k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_{lin}[n - kL]. \quad (4.97)$$

На рис. 4.27, а) изображены сигналы $x_e[n]$ и $x_{lin}[n]$ при $L = 5$. Из рисунка видно, что $x_{lin}[n]$ совпадает с последовательностью, получающейся линейной интерполяцией отсчетов. Заметим, что

$$h_{lin}[0] = 1, \quad h_{lin}[n] = 0, \quad n = \pm L, \pm 2L, \dots \quad (4.98)$$

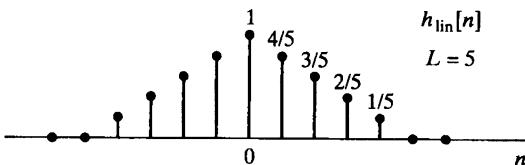


Рис. 4.26. Импульсная характеристика при линейной интерполяции

Поэтому

$$x_{\text{lin}}[n] = x[n/L] \quad \text{при } n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \quad (4.99)$$

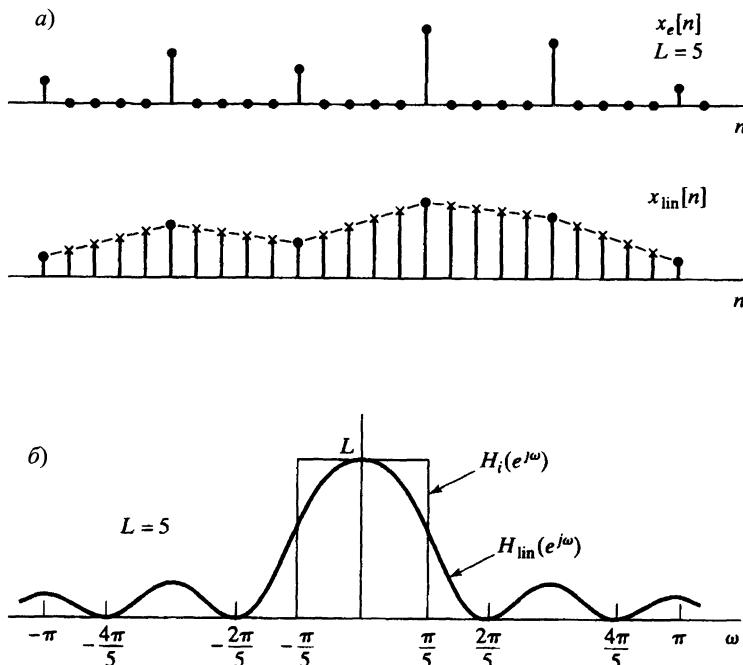


Рис. 4.27. а) иллюстрация линейной интерполяции через фильтрование; б) КЧХ линейного интерполятора в сравнении с характеристикой идеального интерполационного фильтра низких частот

Искажения между отсчетами, вносимые линейной интерполяцией, можно оценить, сравнивая КЧХ линейного интерполятора и идеального интерполационного фильтра низких частот. Можно показать (см. задачу 4.50), что

$$H_{\text{lin}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \left(\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \right)^2. \quad (4.100)$$

График этой функции при $L = 5$ вместе с характеристикой идеального интерполационного фильтра низких частот представлен на рис. 4.27, б). Из рисунка следует, что, если исходный сигнал подвергся дискретизации с частотой Найквиста, линейная интерполяция оказывается не очень хорошей, так как реакция фильтра будет обладать значительной энергией в полосе $\pi/L < |\omega| < \pi$. Тем не менее, если исходная частота дискретизации намного больше частоты Найквиста, линейная интерполяция будет более удовлетворительной при срезании масштабированного по частоте образа функции $X_c(j\Omega)$ в точках, кратных $2\pi/L$. Это происходит из-за того, что значения функции $H_{\text{lin}}(e^{j\omega})$ малы в таких нормализованных частотах, и при высокой частоте дискретизации сдвинутые копии функции $X_c(j\Omega)$ отчетливо локализуются около этих частот. Причина такого явления интуитивно ясна. Действительно, если исходная частота дискретизации

существенно выше частоты Найквиста, сигнал не сможет иметь заметных колебаний между отсчетами, и поэтому линейная интерполяция становится более точной.

4.7.3. Изменение частоты дискретизации на рациональный множитель

Мы показали, как увеличить или уменьшить частоту дискретизации в целое число раз. Комбинируя прореживание с интерполяцией, можно изменить частоту дискретизации в дробное число раз. Рассмотрим рис. 4.28, а), где изображена система, состоящая из интерполатора, уменьшающего шаг T дискретизации до T/L , и прореживателя, увеличивающего шаг дискретизации в M раз, выдающего последовательность $\tilde{x}[n]$ с эффективным шагом дискретизации $T' = TM/L$. Выбирая L и M подходящим образом, мы можем получить любой шаг дискретизации, отличающийся от исходного в рациональное число раз. Например, если $L = 100$ и $M = 101$, то $T' = 1,01T$.

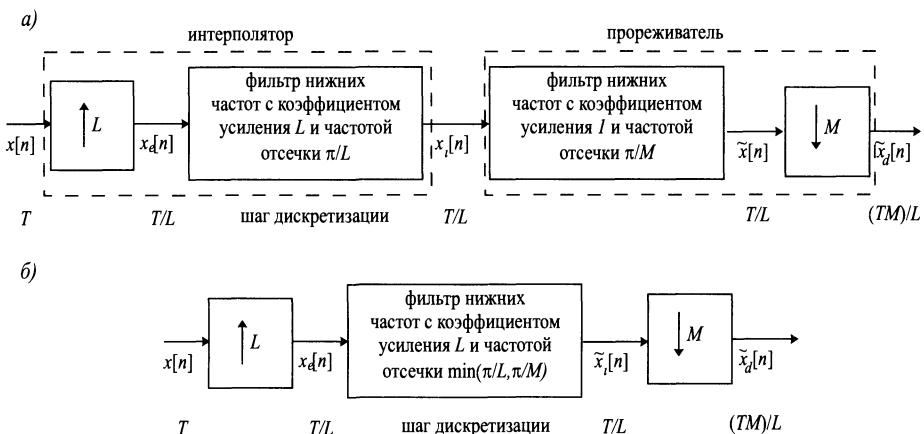


Рис. 4.28. а) система, изменяющая частоту дискретизации на рациональный множитель; б) упрощенная система, комбинирующая прореживатель и интерполятор

При $M > L$ получается схема увеличения шага дискретизации (уменьшения частоты дискретизации), а при $M < L$ — противоположная схема. Поскольку фильтры интерполяции и прореживания объединены в каскад (рис. 4.28, а)), их можно заключить в один фильтр низких частот (рис. 4.28, б)) с коэффициентом усиления L и частотой отсечки, равной наименьшему из отношений: π/L и π/M . Если $M > L$, то значение частоты отсечки — π/M и происходит уменьшение частоты дискретизации. Последовательность $x[n]$, полученная дискретизацией с частотой Найквиста, дает последовательность $\tilde{x}[n]$, являющуюся версией исходного узкополосного сигнала, пропущенного через фильтр низких частот, если отсутствуют ложные частоты (см. подраздел 4.7.1). С другой стороны, при $M < L$ значение частоты отсечки — π/L и уже не нужно ограничивать полосу сигнала частотой Найквиста.

Пример 4.11. Масштабирование частоты дискретизации рациональным множителем

Рисунок 4.29 иллюстрирует изменение частоты дискретизации в рациональное число раз. Предположим, что узкополосный сигнал $X_c(j\Omega)$ (рис. 4.29, а)) подвергается дискретизации с частотой Найквиста, т. е. $2\pi/T = 2\Omega_N$. График соответствующего Фурье-образа

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right)$$

изображен на рис. 4.29, б). Если нужно изменить шаг дискретизации на $T' = (3/2)T$, то сначала мы должны сделать интерполяцию с множителем $L = 2$, а затем прореживание с множителем $M = 3$. Так как при этой операции частота дискретизации уменьшается, а исходный сигнал был дискретизирован с частотой Найквиста, нам необходимо вставить дополнительный фильтр нижних частот, чтобы избавиться от наложения спектров.

Преобразование Фурье выходного сигнала системы, повышающей частоту дискретизации в 2 раза, показано на рис. 4.29, в). Если бы нас интересовало только интерполяирование с множителем 2, мы могли бы остановиться на фильтре нижних частот с частотой отсечки $\omega_c = \pi/2$ и коэффициентом усиления $L = 2$. Однако, так как отклик фильтра будет прореживаться с множителем $M = 3$, нам необходима частота отсечки $\omega_c = \pi/3$ и коэффициент усиления 2 (см. рис. 4.29, г)). Фурье-образ $\tilde{X}_t(e^{j\omega})$ выхода фильтра нижних частот приведен на рис. 4.29, д). Серым цветом выделены области спектра сигнала, которые отсекаются интерполяционным фильтром. Наконец, на рис. 4.29, е) показано ДВПФ выхода прореживателя с множителем $M = 3$. Заметим, что на этом рисунке серым цветом отмечено наложение спектров, возникающее при выборе частоты отсечки $\pi/2$ вместо $\pi/3$. \square

4.8. Обработка многоскоростных сигналов

Как мы видели, частоту дискретизации дискретного сигнала можно менять, комбинируя интерполяцию с прореживанием. Например, новый шаг дискретизации $T' = 1,01T$ можно получить, проведя интерполяцию с множителем $L = 100$, используя фильтр нижних частот с частотой отсечки $\omega_c = \pi/101$, а затем прореживание с множителем $M = 101$. Значительные промежуточные изменения частоты дискретизации, возникающие на этом пути, требуют больших вычислений для определения каждого отсчета выходного сигнала. К счастью, техника обработки многоскоростных сигналов дает возможность существенно сократить необходимые вычисления. Термин «многоскоростная техника», как правило, употребляют, когда хотят сказать о повышающей или понижающей дискретизации, сжатии или расширении, применяемых каким-либо образом для повышения эффективности систем обработки сигналов. Кроме того, она используется при преобразовании частоты дискретизации и особенно полезна в АЦП и ЦАП, эксплуатирующих передискретизацию и формирование шумов. Еще один важный класс алгоритмов обработки сигналов, основывающихся на этой технике, касается блоков фильтров для анализа и/или обработки сигналов.

Ввиду возможности широкого применения существует значительное количество результатов, посвященных многоскоростной обработки сигналов. Два важ-

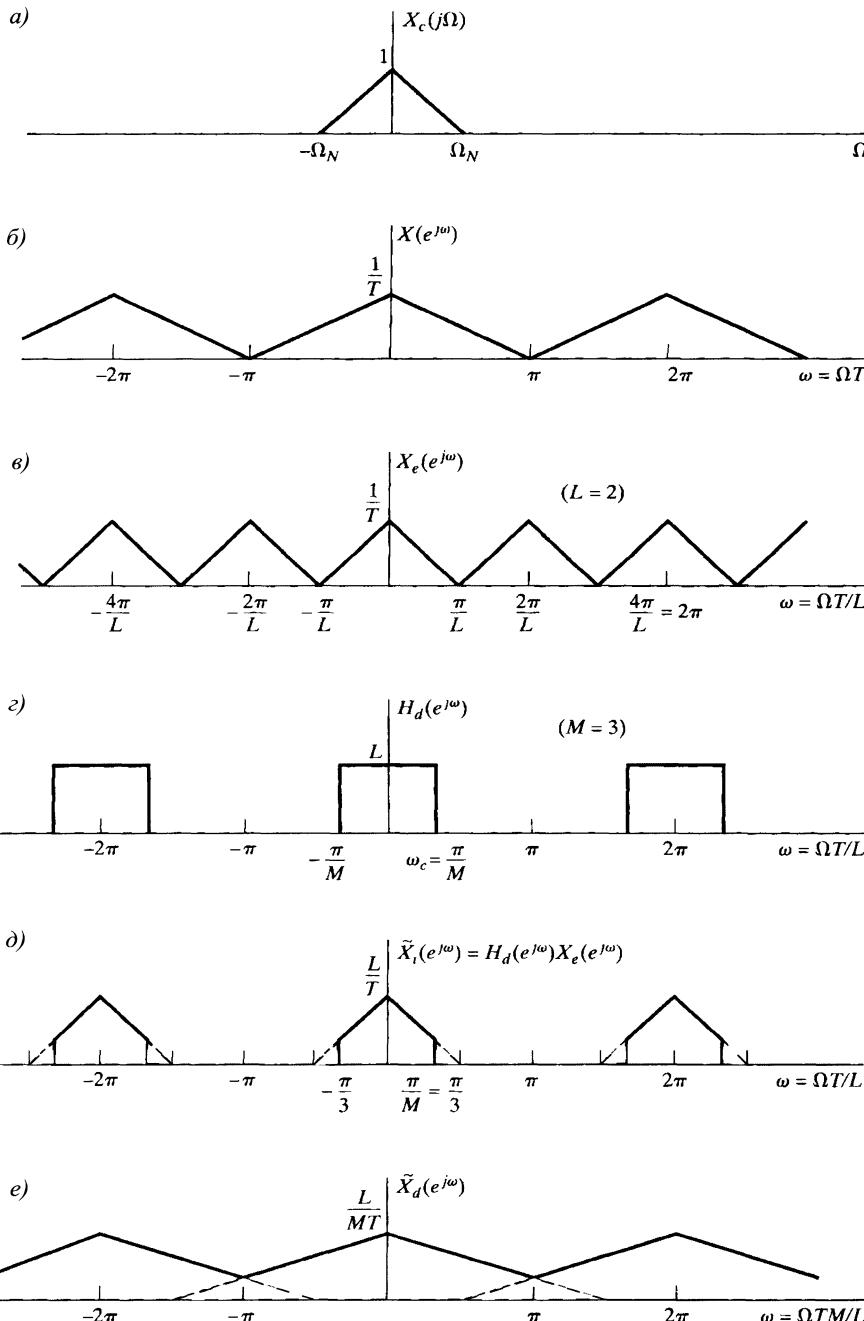


Рис. 4.29. Иллюстрация масштабирования частоты дискретизации на рациональный множитель

нейших из них изучаются в этом параграфе. Кроме того, здесь будет показано, что, комбинируя упомянутые результаты, можно существенно повысить эффективность преобразования частоты дискретизации. Первый касается смены порядка фильтрования и повышающей или понижающей дискретизации. Второй называется многофазовым разложением.

4.8.1. Смена порядка фильтрования и понижающей/повышающей дискретизации

Прежде всего мы выведем два тождества, необходимых при манипулировании и понимании операций многоскоростных систем. Легко увидеть, что системы, изображенные на рис. 4.30, эквивалентны. В самом деле, заметим, что на рис. 4.30, б)

$$X_b(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega M})X(e^{j\omega}), \quad (4.101)$$

и из формулы (4.82) следует, что

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X_b(e^{j(\omega/M - 2\pi i/M)}). \quad (4.102)$$

Подставляя равенство (4.101) в сумму (4.102), получаем

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j(\omega/M - 2\pi i/M)})H(e^{j(\omega - 2\pi i)}). \quad (4.103)$$

Так как $H(e^{j(\omega - 2\pi i)}) = H(e^{j\omega})$, формула (4.103) сводится к

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega}) \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j(\omega/M - 2\pi i/M)}) = \\ &= H(e^{j\omega})X_a(e^{j\omega}), \end{aligned} \quad (4.104)$$

что соответствует рис. 4.30, а).

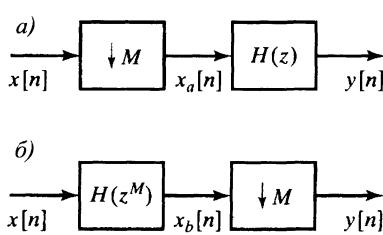


Рис. 4.30. Две эквивалентные системы, основанные на тождествах понижающей дискретизации

Аналогичное тождество применяется при повышающей дискретизации. Опираясь на формулу (4.90) (см. с. 185), несложно доказать эквивалентность систем на рис. 4.31. Из формулы (4.90) и рис. 4.31, а) вытекает, что

$$Y(e^{j\omega}) = X_a(e^{j\omega L}) = X(e^{j\omega L})H(e^{j\omega L}). \quad (4.105)$$

Кроме того, по формуле (4.90)

$$X_b(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L}),$$

следовательно, формула (4.105) равносильна равенству:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega L})X_b(e^{j\omega}),$$

правая часть которой — Фурье-образ выходного сигнала системы рис. 4.31, б).

Итак, мы показали, что, модифицировав линейный фильтр, порядок линейного фильтрования и повышающей/понижающей дискретизации можно изменить.

4.8.2. Многофазовое разложение

Многофазовое разложение последовательности состоит в представлении ее как суперпозиции M подпоследовательностей, каждая из которых состоит из всех M -х значений подходящим образом сдвинутой версии самой последовательности. Применение такого разложения к импульсной характеристике фильтра приводит к эффективной реализации структур линейных фильтров. Рассмотрим импульсную характеристику $h[n]$, разложенную на M подпоследовательностей $h_k[n]$ следующим образом:

$$h_k[n] = \begin{cases} h[n+k], & n/M \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.106)$$

Сдвинув надлежащим образом составные части, можно восстановить исходную импульсную характеристику:

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h_k[n-k]. \quad (4.107)$$

Разложение можно представить блок-схемой, как это сделано на рис. 4.32. Выделив цепочку элементов на входе и цепочку сдвинутых элементов на выходе, ту же систему можно изобразить блок-схемой, представленной на рис. 4.33. Последовательности $e_k[n]$, участвующие в рис. 4.32 и 4.33, имеют вид:

$$e_k[n] = h[nM + k] = h_k[nM] \quad (4.108)$$

и в общей ситуации называются *многофазовыми компонентами* характеристики $h[n]$. Существует ряд других способов выделения обозначения многофазовых компонент ([151]), но определение (4.108) наиболее близко соответствует нашим целям в этом параграфе.

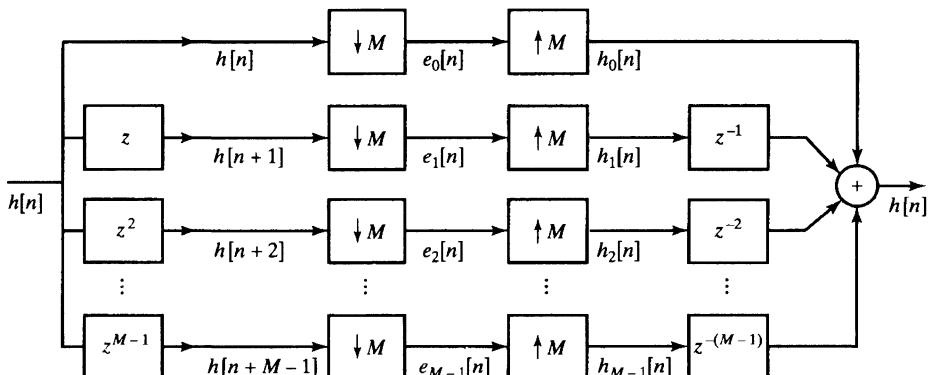


Рис. 4.32. Многофазовое разложение импульсной характеристики фильтра с компонентами $e_k[n]$

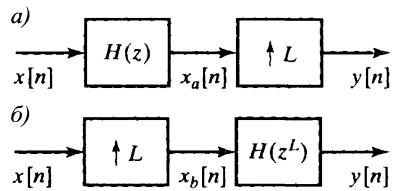


Рис. 4.31. Две эквивалентные системы, основанные на тождествах по вышеприведенным дискретизациям

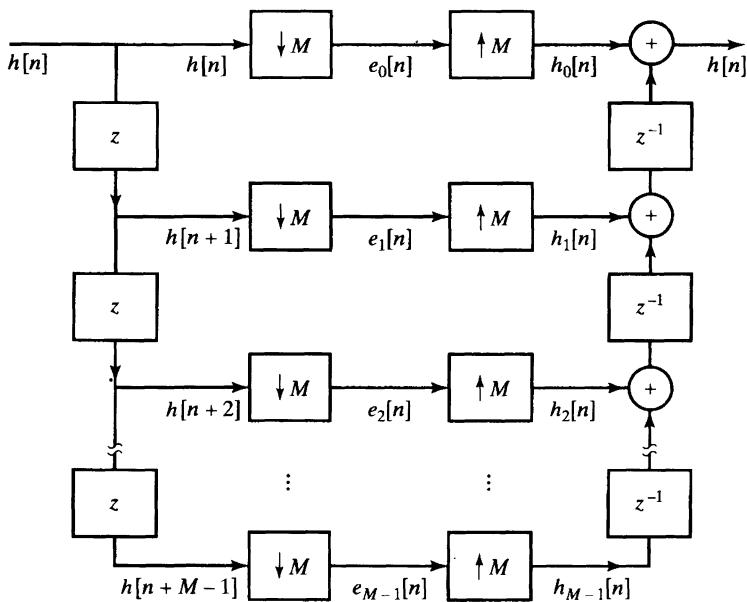


Рис. 4.33. Многофазовое разложение импульсной характеристики фильтра с компонентами $e_k[n]$ и цепной задержкой

Схемы рис. 4.32 и 4.33 не являются реализацией фильтра. Они лишь подсказывают возможность разложения фильтра на M параллельных. В этом можно убедиться, заметив, что рис. 4.32 и 4.33 показывают соответствие многофазового разложения представлению функции $H(z)$ в виде

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} E_k(z^M) z^{-k}. \quad (4.109)$$

Формула (4.109) выражает характеристическую функцию $H(z)$ как сумму задержанных многофазовых компонент. Из формулы (4.109), например, мы получаем структуру фильтра, изображенную на рис. 4.34.

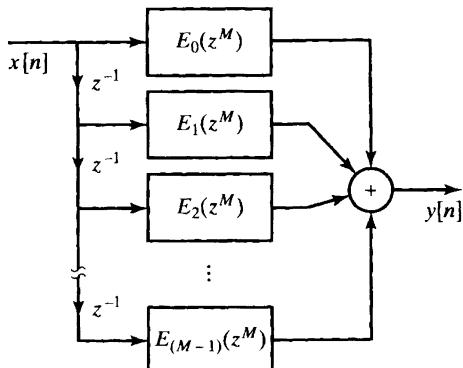


Рис. 4.34. Структура фильтра, основанная на многофазовом разложении $h[n]$

4.8.3. Многофазовая реализация прореживающих фильтров

Одно из важных приложений многофазового разложения — реализация фильтров, чьи отклики в дальнейшем подвергаются поникающей дискретизации, как показано на рис. 4.35.

В наиболее простой реализации (рис. 4.35) фильтр вычисляет выходной отсчет при каждом значении n , но запоминается только одна из каждых M точек. Естественно предположить, что существует более эффективная реализация, не вычисляющая ненужные отсчеты.

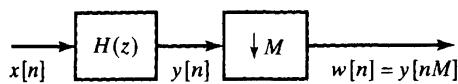


Рис. 4.35. Прореживающая система

Формула (4.109) влечет равенство:

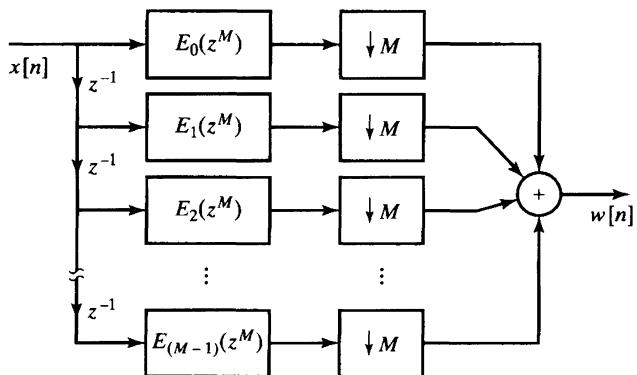
$$e_k[n] = h[nM + k]. \quad (4.110)$$

Для получения более эффективной реализации обратимся к многофазовому разложению фильтра. Предположим, что $h[n]$ представлена в виде суммы многофазовых компонент:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} E_k(z^M) z^{-k}. \quad (4.111)$$

Учитывая это разложение и тот факт, что пониждающая дискретизация вычисляется с помощью сложения, рис. 4.35 можно перерисовать, как показано на рис. 4.36. Применяя тождество из рис. 4.30 к системе рис. 4.36, можно увидеть, что последняя превращается в систему, изображенную на рис. 4.37.

Рис. 4.36. Реализация прореживающего фильтра с использованием многофазового разложения



Для иллюстрации преимуществ схемы рис. 4.37 перед схемой рис. 4.35 предположим, что входной сигнал $x[n]$ измеряется с частотой один отсчет на единицу времени, а $H(z)$ — характеристическая функция N -точечного КИХ-фильтра. Для прямой реализации системы рис. 4.35 нам потребуется N умножений и $(N - 1)$ сложений в единицу времени. В системе рис. 4.37 длина каждого из фильтров $E_k(z)$ равна N/M и их входящие сигналы измеряются с частотой 1 на M единиц времени. Следовательно, для каждого из фильтров необходимо $\frac{1}{M} \cdot \frac{N}{M}$ умножений на единицу времени и $\frac{1}{M} (\frac{N}{M} - 1)$ сложений на единицу времени. Значит, для всей системы понадобится $\frac{N}{M}$ умножений и $(\frac{N}{M} - 1) + (M - 1)$ сложений на единицу времени. Таким образом, при некоторых значениях M и N можно получить существенную экономию вычислений.

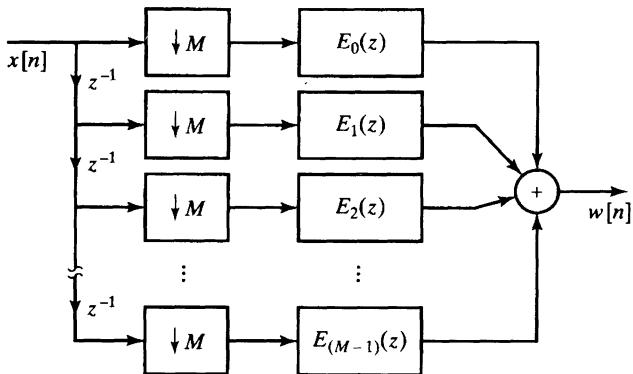


Рис. 4.37. Реализация прореживающего фильтра после применения тождества субдискретизации к многофазовому разложению

4.8.4. Многофазовая реализация интерполяционных фильтров

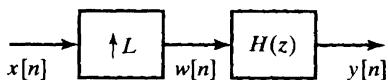
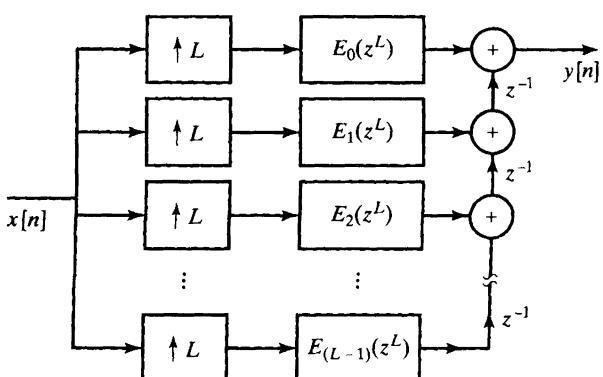


Рис. 4.38. Интерполяционная система

Сокращения количества вычислений, которое достигается при реализации прореживателя, можно добиться, применив многофазовое разложение к системе рис. 4.38, где перед фильтром стоит повышающий дискретизатор. Так как только каждый L -й отсчет последовательности $w[n]$ отличен от нуля, то, реализуя эту систему первым приходящим в голову способом, мы сталкиваемся с тем, что коэффициенты фильтра будут применяться к априори нулевым членам последовательности. Конечно же должна существовать более эффективная реализация.

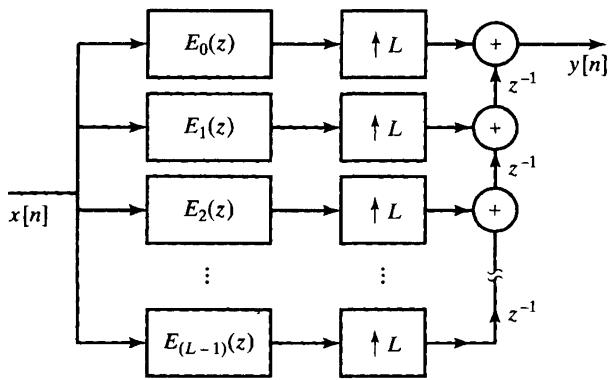
Для более эффективной реализации схемы рис. 4.38 мы снова прибегаем к многофазовому разложению характеристической функции $H(z)$. Например, можно выразить $H(z)$ в виде (4.111) и представить схему 4.38, как показано на рис. 4.39. Применяя эквивалентность систем из рис. 4.31, можно перерисовать схему рис. 4.39 в виде рис. 4.40.

Рис. 4.39. Реализация интерполяционного фильтра с использованием многофазового разложения



Для иллюстрации преимуществ схемы рис. 4.40 перед схемой рис. 4.38 заметим, что при измерении входного сигнала $x[n]$ в системе рис. 4.38 с частотой один отсчет за единицу времени последовательность $w[n]$ будет измеряться с частотой L отсчетов за единицу времени. Если $H(z)$ — характеристическая функция КИХ-фильтра длины N , то нам потребуется NL умножений и $(NL - 1)$ сложений за единицу времени. С другой стороны, система, изображенная на рис. 4.40, требует $L \frac{N}{L}$ умножений и $L (\frac{N}{L} - 1)$ сложений за единицу времени для деятельности набора многофазовых фильтров плюс $(L - 1)$ сложение для получения выходного сигнала $y[n]$. Таким образом, и в этой ситуации при определенных значениях L и N у нас возникает возможность существенно сэкономить на вычислениях.

Рис. 4.40. Реализация интерполяционного фильтра после применения тодества повышающей дискретизации к многофазовому разложению



Как при прореживании, так и при интерполяции выигрыш в вычислениях достигается за счет реорганизации операций, приводящей к фильтрованию с низкой частотой дискретизации. Комбинирование интерполяционных и прореживающих систем для изменения частоты дискретизации на рациональный множитель дает заметное сокращение количества операций при больших промежуточных частотах.

4.9. Цифровая обработка аналоговых сигналов

До этого момента наше обсуждение представления непрерывных сигналов дискретными ограничивалось идеальными моделями периодической дискретизации и узкополосной интерполяции. Были введены идеализированные дискретизирующие системы, которые мы называли *идеальным непрерывно-дискретным преобразователем* (НДП), и идеализированные узкополосные интерполирующие системы, называемые *идеальным дискретно-непрерывным преобразователем* (ДНП). Идеальные преобразователи позволили нам сконцентрировать свое внимание на математических соотношениях, связывающих узкополосные сигналы с их дискретизацией. Например, в § 4.5 с помощью идеальных НДП и ДНП было показано, как дискретные ЛС-системы используются в конфигурациях типа рис. 4.41, а) для реализации непрерывных ЛС-систем при условии, что входной сигнал является узкополосным, а частота дискретизации ограничена снизу частотой Най-

квиста. Сигналы, встречающиеся в практических приложениях, не бывают идеально узкополосными. Кроме того, невозможно воплотить идеальные фильтры в конкретные работающие устройства, а идеальные НДП и ДНП можно лишь аппроксимировать АЦП и ЦАП. Блок-схема, изображенная на рис. 4.41, *б*), отражает более реалистичную модель цифровой обработки непрерывных (аналоговых) сигналов. Данный параграф посвящен изучению свойств составных частей этой схемы.

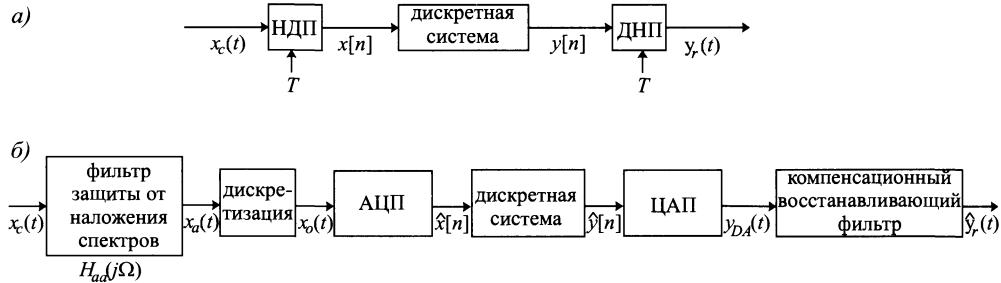


Рис. 4.41. *а*) дискретное фильтрование непрерывного сигнала; *б*) цифровая обработка аналогового сигнала

4.9.1. Предварительное фильтрование для устранения эффекта наложения спектров

При обработке аналоговых сигналов дискретными системами стараются минимизировать частоту дискретизации, что обусловлено желанием снизить количество арифметических операций, требуемых для реализации системы, которое пропорционально числу отсчетов, подвергаемых обработке. Если входной сигнал не является узкополосным или его частота Найквиста слишком высока, необходимо предварительное фильтрование. Типичный пример такой ситуации возникает при обработке речевого сигнала, когда нижних частот (3–4 кГц) вполне достаточно для его распознавания, несмотря на то что сигнал может нести существенную информацию и в диапазоне частот от 4 до 20 кГц. Даже при узкополосном сигнале широкополосный аддитивный шум может заполнить область верхних частот, и в результате дискретизации шумовые компоненты внесут помехи в полосу нижних частот. Чтобы избавиться от наложения спектров, входной сигнал необходимо принудительно ограничить по полосе до частот, расположенных ниже половины желаемой частоты дискретизации. Это можно сделать фильтром нижних частот, примененным к непрерывному сигналу перед НДП (рис. 4.42). В этом контексте фильтр нижних частот, предшествующий НДП, называется *фильтром защиты от наложения спектров*. В идеале КЧХ фильтра защиты от наложения спектров должна выглядеть как

$$H_{aa}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c. \end{cases} \quad (4.112)$$

Как вытекает из подраздела 4.5.1, вся система — от реакции фильтра защиты от наложения спектров $x_a(t)$ до выходного сигнала $y_r(t)$ — ведет себя как

ЛС-система, поскольку входной в НДП сигнал $x_a(t)$ принудительно ограничен частотой π/T рад/с фильтром защиты от наложения спектров. Таким образом, вся эффективная КЧХ системы рис. 4.42 будет равна произведению характеристики $H_{aa}(j\Omega)$ и эффективной КЧХ преобразования от $x_a(t)$ к $y_r(t)$. Комбинация формул (4.112) и (4.40) дает

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \Omega_c, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c. \end{cases} \quad (4.113)$$

Итак, при идеальном фильтре нижних частот, защищающем от наложения спектров, система рис. 4.42 ведет себя как ЛС-система с КЧХ, приведенной в формуле (4.113), даже в том случае, когда функция $X_c(j\Omega)$ не является узкополосной. На практике КЧХ $H_{aa}(j\Omega)$ не может быть идеально узкополосной, но ее значения можно сделать достаточно малыми при $|\Omega| > \pi/T$, так что наложение спектров минимизируется и общая КЧХ системы рис. 4.42 будет удовлетворять приближенному соотношению:

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) \approx H_{aa}(j\Omega)H(e^{j\Omega T}). \quad (4.114)$$

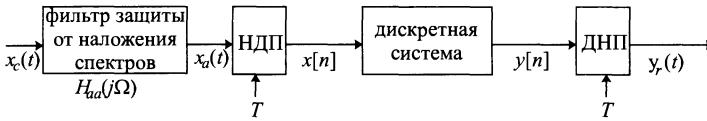


Рис. 4.42. Использование предварительного фильтрования для защиты от наложения спектров

Для достижения пренебрежительно малых значений КЧХ при $\omega > \pi/T$ необходимо, чтобы $H_{aa}(j\Omega)$ начинала вводить затухание еще в частотах до π/T . Формула (4.114) подсказывает, что спад фильтра защиты от наложения спектров (и другие линейные стационарные искажения, обсуждаемые ниже) мог бы по крайней мере частично компенсироваться, если его учитывать при разработке дискретных систем. Этот подход иллюстрируется задачей 4.56.

Для дальнейшего обсуждения нам потребуется *фильтр с крутым срезом*. Такой аналоговый фильтр можно реализовать, используя активные сети и интегральные схемы. Однако в приложениях, включающих мощные, но недорогие цифровые процессоры, эти непрерывные фильтры могут составлять главную часть цены системы дискретной обработки аналоговых сигналов. Разработка фильтра с крутым срезом довольно трудоемка и дорогостояща, и, если система оперирует изменяющейся частотой дискретизации, необходимо привлекать регулируемые фильтры. Более того, аналоговые фильтры с крутым срезом обладают существенно нелинейной фазо-частотной характеристикой, особенно в срезе полосы пропускания. Таким образом, по ряду причин желательно исключить непрерывные фильтры или снизить требования, к ним предъявляемые.

Один из подходов к решению указанной проблемы изображен на рис. 4.43, где через Ω_N обозначена наивысшая частотная компонента, которая должна сохраняться после выполнения процедуры фильтрования для защиты от наложения спектров. Сначала мы применяем очень простой фильтр, обладающий плавной

частотой отсечки, значительно затухающей вблизи $M\Omega_N$. Далее вставляем НДП с частотой дискретизации, значительно превышающей $2\Omega_N$, например $2M\Omega_N$. После этого частота дискретизации уменьшается в M раз системой, включающей фильтр защиты от наложения спектров с крутым срезом, реализованный в дискретной области. Последующая дискретная обработка для минимизации вычислений может быть проведена с низкой частотой дискретизации.

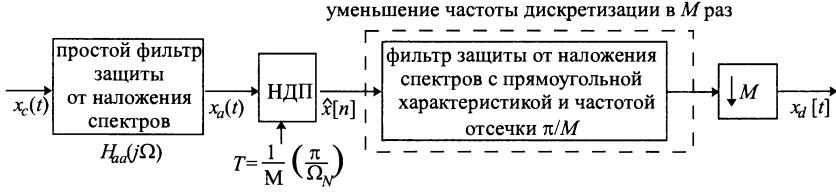


Рис. 4.43. Применение АЦП с повышенной частотой для упрощения непрерывного фильтра защиты от наложения спектров

Такое использование преобразования частоты дискретизации, следующее за передискретизацией, иллюстрируется на рис. 4.44. Фурье-преобразование сигнала, занимающее полосу $|\Omega| < \Omega_n$, представлено на рис. 4.44, а). Там же приведено преобразование Фурье того, что могло бы соответствовать высокочастотному «шуму», или нежелательным компонентам, которые мы в конечном счете стремимся подавить с помощью фильтра защиты от наложения спектров. Пунктирной линией отмечена КЧХ фильтра защиты от наложения спектров, который отсекает частоту не резко, а плавно уменьшает до нуля в точке Ω_c . На рис. 4.44, б) показан Фурье-образ выходного сигнала фильтра. Если сигнал $x_a(t)$ дискретизирован с шагом T так, что $(2\pi/T - \Omega_c) > \Omega_N$, то ДВПФ последовательности $\hat{x}[n]$ совпадает с изображенным на рис. 4.44, в). Заметим, что «шум» из-за наложения спектров присутствует, но не затрагивает полосу сигнала $|\omega| < \omega_N = \Omega_N T$. Теперь, если T и T' выбраны так, что $T' = MT$ и $\pi/T' = \Omega_N$, то $\hat{x}[n]$ можно профильтровать с помощью дискретного фильтра с крутым срезом, единичным коэффициентом усиления и частотой отсечки π/M (его идеализированная версия изображена на рис. 4.44, г)). Выход дискретного фильтра далее можно подвергнуть понижающей дискретизации с множителем M и получить последовательность $x_d[n]$, чей Фурье-образ показан на рис. 4.44, г). Итак, вся процедура фильтрования с резкой частотой отсечки может быть проведена дискретной системой. При этом требуется лишь незначительная предварительная обработка сигнала непрерывным фильтром. Поскольку фаза дискретных КИХ-фильтров может быть линейной, прием передискретизации можно использовать для реализации фильтрования, защищающего от наложения спектров, практически без искажения фазы. Преимущества этого приема особенно видны, когда важно сохранить не только частотный спектр, но и форму сигнала.

4.9.2. Преобразование аналогового сигнала в цифровой

При обработке непрерывного сигнала идеальным НДП получается дискретный сигнал с абсолютно точными отсчетами. Приближением к идеальному преобразователю в цифровой обработке сигналов служит система, представленная на

рис. 4.45, которая превращает непрерывный (аналоговый) сигнал в цифровой, т. е. последовательность конечной точности, или квантованную по уровню последовательность.

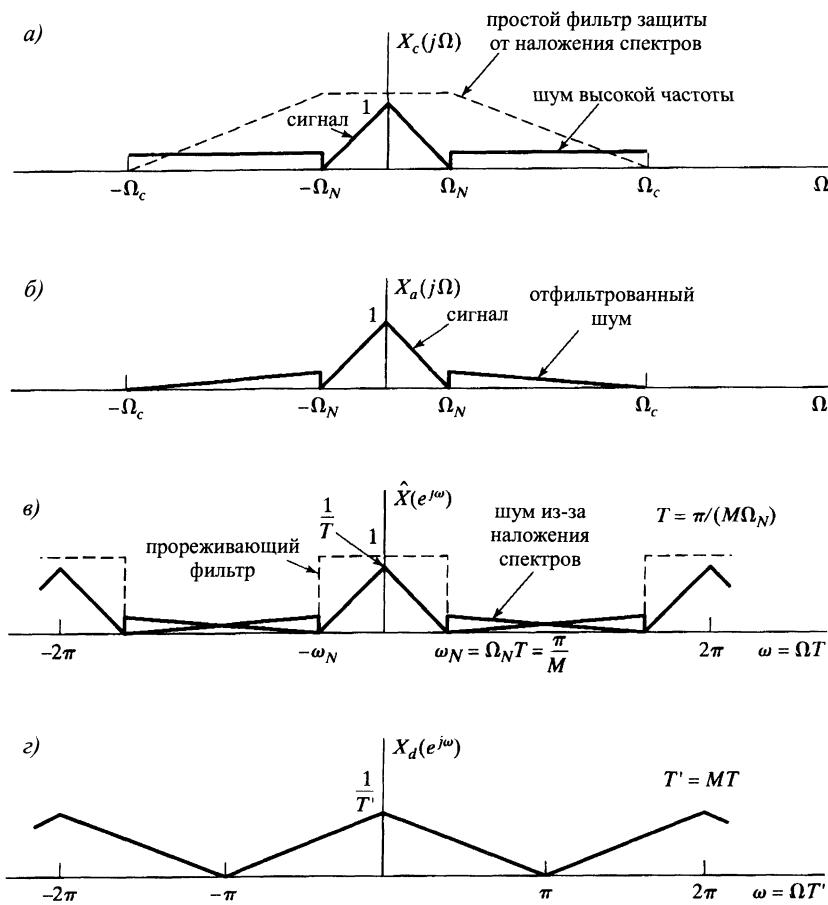


Рис. 4.44. Прореживание в НДП, следующее за передискретизацией

Обе системы, изображенные на рис. 4.45, можно реализовать физическими устройствами. АЦП — это физическое устройство, преобразующее амплитуду напряжения или силы тока, подаваемого на вход, в двоичный код, представляющий квантованные значения амплитуды входного сигнала. Под контролем внешних часов АЦП может вычислять отсчет каждые T с. Однако преобразование происходит не мгновенно, и по этим причинам высокоеффективные АЦП обычно включают в себя схему дискретизации и запоминания (рис. 4.45). Идеальная система дискретизации и запоминания — это система с выходным сигналом вида

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT), \quad (4.115)$$

где $x[n] = x_a(nT)$ — идеальная дискретизация сигнала $x_a(t)$, а $h_0(t)$ — импульсная характеристика системы запоминания нулевого порядка, т. е.

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.116)$$

Если переписать формулу (4.115) в виде свертки

$$x_0(t) = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT), \quad (4.117)$$

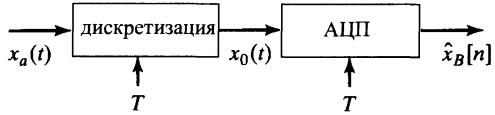


Рис. 4.45. Физическая конфигурация преобразования аналогового сигнала в цифровой

в § 4.3. Кроме того, аналогичные преобразования мы будем делать при обсуждении ЦАП. Однако такой анализ не так уж необходим в этом месте, поскольку все, что нам нужно знать о поведении системы, можно увидеть из выражений, записанных во временной области. Выход системы запоминания нулевого порядка имеет ступенчатую форму, т. е. значения отсчетов постоянны на отрезках длиной в T с, где T — шаг дискретизации, что отчетливо видно на рис. 4.46, б). Физические схемы дискретизации и запоминания разрабатываются так, чтобы дискретизация сигнала происходила максимально возможной скоростью, а отсчеты запоминались с наименьшей ошибкой. Цель, которая при этом преследуется, состоит в сохранении значения напряжения (или силы тока) на выходе, что существенно для АЦП.

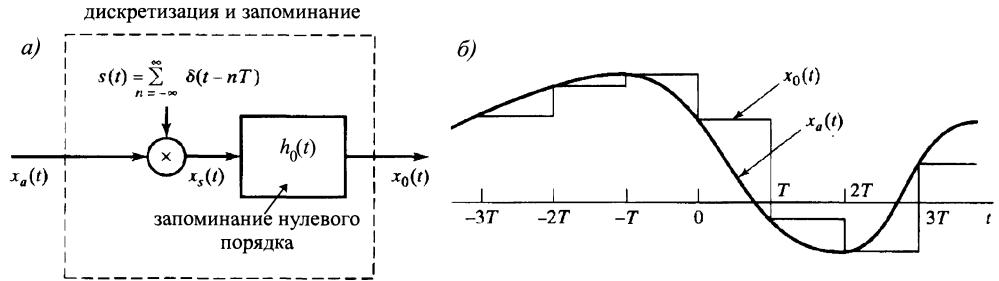


Рис. 4.46. а) идеальная схема дискретизации и запоминания; б) пример входного и выходного сигналов схемы дискретизации и запоминания

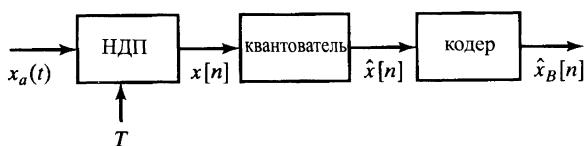
Подробное изложение свойств многообразных АЦП и соответствующих микросхем выходит за рамки нашей книги. При проектировании схем дискретизации и запоминания, которые должны вычислять отсчеты достаточно быстро и сохранять их значения постоянными без сбоев и «глюков», возникает множество

то можно заметить, что идеальная схема дискретизации и запоминания эквивалентна модулятору цепочки импульсов, за которым следует линейное фильтрование с системой запоминания нулевого порядка (рис. 4.46, а)). Формула, связывающая Фурье-образы сигналов $x_0(t)$ и $X_a(t)$, может быть выведена способом, который использовался

практических вопросов. Более того, значительное число предприятий предъявляют свои требования к микросхемам АЦП относительно скорости и точности преобразований. Эти вопросы рассматриваются в [65] и [140], а подробности исполнения определенных микросхем доступны в спецификациях изготовителей и справочных листках технических данных. Наш интерес в этом параграфе лежит в области анализа эффектов квантования при АЦП.

Поскольку схема, изображенная на рис. 4.45, предназначена для идеальной дискретизации и сохранения значений отсчетов для квантования с помощью АЦП, мы можем представить ее схемой, приведенной на рис. 4.47, где идеальный НДП изображает систему дискретизации, осуществляющей схемой дискретизации и запоминания, и, как мы опишем позже, совокупность квантователя и кодера заменяют собой АЦП.

Рис. 4.47. Концептуальное представление системы из рис. 4.45



Квантователь — это нелинейная система, чья функция состоит в преобразовании значений каждого отсчета входного сигнала $x[n]$ в одно из конечного множества заданных величин. Обозначим эту операцию как

$$\hat{x}[n] = Q(x[n]) \quad (4.118)$$

и будем называть члены последовательности $\hat{x}[n]$ *квантованным отсчетом*. Квантователь можно определять с равномерными или неравномерными уровнями. Однако, поскольку мы планируем производить вычисления над отсчетами, стоит выбирать равномерное квантование. На рис. 4.48 показан типовой равномерный квантователь, характеристики¹ в котором округлены к наиболее близкому уровню квантования.

Необходимо остановиться на некоторых моментах рис. 4.48. Прежде всего заметим, что такой квантователь подходит для сигналов как с положительными, так и отрицательными отсчетами (биполярный). Если априори известно, что входящие отсчеты всегда положительны (или отрицательны), то удобнее выбрать другое распределение уровней квантования. Далее, обратим ваше внимание на то, что квантователь из рис. 4.48 обладает четным числом уровней квантования. Но, поскольку один из них занят нулем, получается разное количество положительных и отрицательных уровней квантования. Как правило, число уровней квантования равно степени двойки и, так как эта степень значительно больше восьми, различием в количестве отрицательных и положительных уровней можно пренебречь.

На рис. 4.48 также отражено кодирование уровней квантования. В этом примере — восемь уровней, и мы можем обозначить их с помощью двоичного кода из трех битов. (В общем случае для кодирования 2^{B+1} уровней можно использовать двоичные $(B + 1)$ -значные числа.) В принципе для обозначения уровней

¹Такой квантователь иногда называют *линейным* квантователем из-за линейности уровней квантования.

можно брать любые символы, и существует множество двоичных схем кодирования, имеющих свои преимущества и недостатки в зависимости от конкретного приложения. Например, правый столбец двоичных чисел на рис. 4.48 иллюстрирует *смещенный двоичный код*, в котором уровни нумеруются числами в двоичной системе счисления в порядке их возрастания, начиная с самого отрицательного. Однако при цифровой обработке сигнала предпочтительнее пользоваться двоичным кодом, позволяющим производить арифметические действия непосредственно с метками как с числовым представлением квантованных отсчетов.

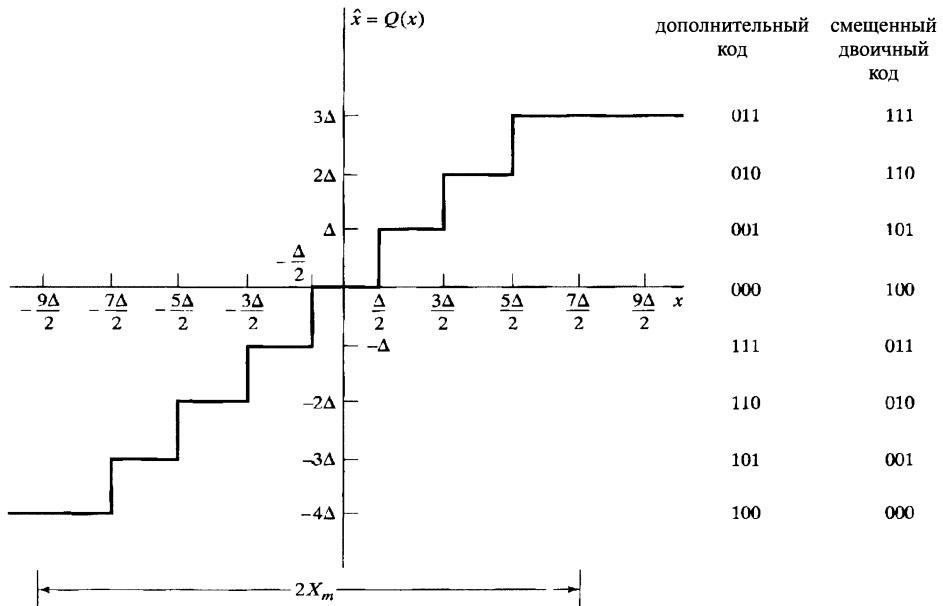


Рис. 4.48. Типовой квантователь при АЦП

Левый столбец рис. 4.48 показывает разметку уровней, соответствующую *дополнительному двоичному коду*. Такая система представления чисел со знаками используется в большинстве компьютеров и микропроцессоров. Таким образом, это, возможно, наиболее удобный способ нумерации уровней квантования. Заметим между прочим, что *смещенный двоичный код* можно преобразовать в *дополнительный код*, просто добавляя наиболее значащий бит.

В дополнительном двоичном коде крайний левый, или наиболее значащий, бит отвечает за знак числа, а остальные представляют либо целое, либо дробное абсолютное значение числа. Мы будем предполагать, что имеет место последняя ситуация, т. е. считаем, что двоичная запятая стоит между двумя самыми левыми знаками. Значения двоичных символов дополнительного кода при $B = 2$ выписаны в табл. 4.1.

В общей ситуации $(B + 1)$ -битовая дробь, записанная в дополнительном двоичном коде вида

$$a_0 \diamond a_1 a_2 \dots a_B,$$

представляет число

$$-a_0 2^0 + a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \cdots + a_B 2^{-B}.$$

Отметим, что символ «◊» обозначает «двоичную точку» числа. Взаимосвязь между словами кода и уровнями квантования сигнала зависит от параметра X_m из рис. 4.48. В общей ситуации этот параметр называется *полномасштабным уровнем АЦП*. Как правило, его значение колеблется от 10 до 1 В.

Таблица 4.1. Значение двоичных символов дополнительного кода

Двоичный символ	Численное значение \hat{x}_B
0◊11	3/4
0◊10	1/2
0◊01	1/4
0◊00	0
1◊11	-1/4
1◊10	-1/2
1◊01	-3/4
1◊00	-1

На рис. 4.48 видно, что расстояние между соседними уровнями квантования составляет

$$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B}. \quad (4.119)$$

Наименьшие уровни квантования ($\pm\Delta$) соответствуют наименьшему значащему биту двоичного слова. Более того, имеет место численное соотношение между словом кода и квантованными отсчетами:

$$\hat{x}[n] = X_m \hat{x}_B[n], \quad (4.120)$$

так как мы предположили, что $\hat{x}_B[n]$ — двоичное число, удовлетворяющее неравенству $-1 \leq \hat{x}_B[n] < 1$ (в дополнительном двоичном коде). При такой схеме кодированный отсчет $\hat{x}_B[n]$ прямо пропорционален квантованному отсчету (в дополнительном двоичном коде), и поэтому его можно использовать как численное представление амплитуды. Действительно, принято предполагать, что входной сигнал нормализован таким образом, что численные значения квантованного отсчета $\hat{x}[n]$ и двоичного слова $\hat{x}_B[n]$ совпадают, и поэтому не возникает необходимости проводить границу между квантованными отсчетами и их двоичными обозначениями.

На рис. 4.49 показан простой пример квантования и кодирования отсчетов синусоидальной волны при помощи 3-битового квантователя. Неквантованные отсчеты $x[n]$ обозначаются черными точками, а квантованные — кружочками. На этом рисунке представлен выходной сигнал идеальной схемы дискретизации и запоминания. Пунктирная линия обозначает «выход ЦАП», который будет обсуждаться позже. Кроме того, на рис. 4.49 показаны 3-битовые слова, представляющие отсчеты. Заметим, что, поскольку входной аналоговый сигнал $x_a(t)$ выходит за границы полномасштабного уровня квантователя, отдельные положительные отсчеты оказываются «срезанными».

Хотя многое из сказанного выше относится к кодированию уровней квантования в дополнительном двоичном коде, основные принципы квантования и кодирования при АЦП остаются неизменными вне зависимости от используемого кода. Более подробное обсуждение двоичной арифметики, применяемой в цифровых вычислениях, можно найти в книгах, посвященных компьютерной арифметике. (См., например, [83].) Вернемся теперь к анализу эффектов квантования. Поскольку этот анализ не зависит от используемого двоичного кода, наши исследования позволяют сделать достаточно общие выводы.

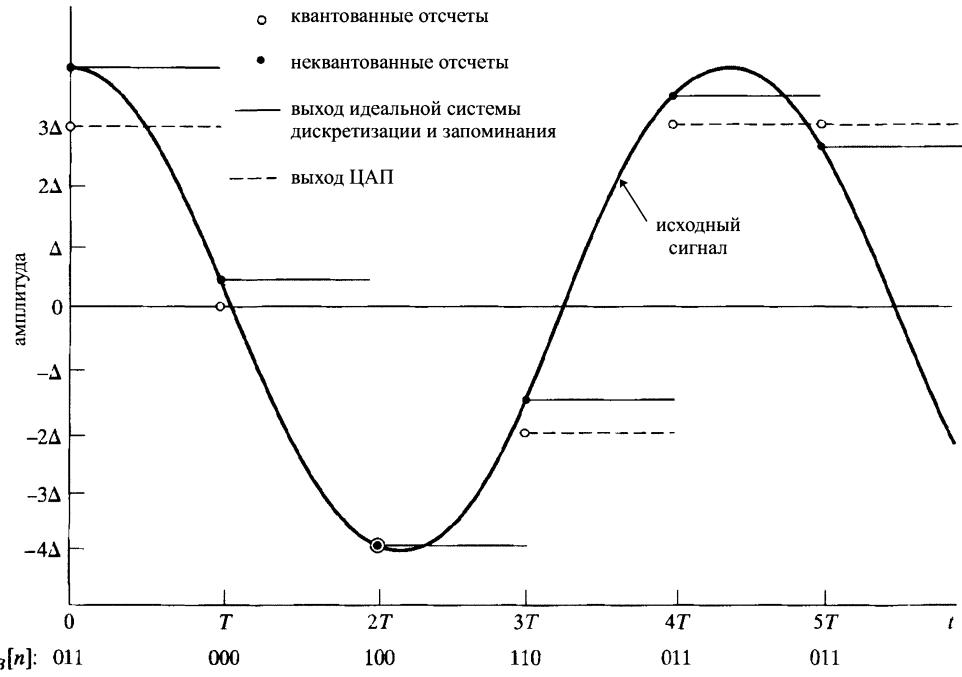


Рис. 4.49. Дискретизация, квантование, кодирование и ЦАП с 3-битовым квантователем

4.9.3. Анализ ошибок квантования

Очевидно, что квантованный отсчет $\hat{x}[n]$ в большинстве случаев отличается от истинного значения $x[n]$. Разность между ними называется *ошибкой квантования* и определяется по формуле

$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n]. \quad (4.121)$$

Например, в случае 3-битового квантователя (рис. 4.48) при $\Delta/2 < x[n] \leq 3\Delta/2$ значение $\hat{x}[n]$ равно Δ , откуда

$$-\Delta/2 < e[n] \leq \Delta/2. \quad (4.122)$$

Для рассматриваемой ситуации (рис. 4.48) неравенство (4.122) остается верным всегда, когда

$$-9\Delta/2 < x[n] \leq 7\Delta/2. \quad (4.123)$$

В общем случае $(B+1)$ -битного квантования со значением Δ из формулы (4.119) ошибка квантования удовлетворяет неравенству (4.122) при условии

$$(-X_m - \Delta/2) < x[n] \leq (X_m - \Delta/2). \quad (4.124)$$

Если $x[n]$ выходит за эту область, как происходит при $t = 0$ на рис. 4.49, то ошибка квантования по абсолютной величине превышает $\Delta/2$, и говорят, что отсчеты *срезаются*.

Упрощенная, но полезная модель квантования изображена на рис. 4.50. В этой модели ошибки квантования отсчетов рассматриваются как аддитивный шумовой сигнал. Модель в точности эквивалентна квантователю при условии, что нам известна ошибка $e[n]$. В большинстве случаев, однако, ошибка неизвестна, и в таких ситуациях оказывается полезной статистическая модель, основанная на схеме рис. 4.50. Мы будем использовать такую модель в главах 6 и 9 для описания эффектов квантования в алгоритмах обработки сигналов. Статистическое представление ошибок квантования исходит из следующих предположений.

- Последовательность ошибок $e[n]$ является последовательностью отсчетов стационарного случайного процесса.
- Последовательность $e[n]$ не коррелирует с последовательностью $x[n]$.
- Случайные величины процесса ошибок не коррелируют между собой, т.е. ошибки — это случайный процесс, описывающий белый шум.
- Вероятность ошибок распределена равномерно на отрезке ошибок квантования.

Как мы увидим, хотя сделанные предположения приводят к довольно простому анализу эффектов квантования, легко подобрать ситуацию, когда эти предположения не выполнены. Например, они не выполняются для ступенчатого сигнала $x_a(t)$. Однако, когда сигнал достаточно сложен (например, речевой или музыкальный), осциллирует быстро и непредсказуемо, сформулированные предположения более реалистичны. Эксперименты показали: при усложнении сигнала измеренная корреляция между сигналом и ошибками квантования уменьшается, причем ошибки становятся некоррелированными между собой. (См. [6], [160], [159].) С интуитивной точки зрения статистическая модель адекватно отражает ситуацию, когда сигнал достаточно сложен, а шаг квантования настолько мал, что амплитуда сигнала от отсчета к отсчету пересекает сразу много уровней.

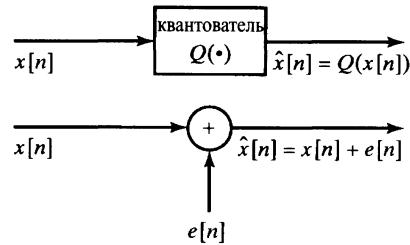


Рис. 4.50. Модель аддитивного шума для квантователя

Пример 4.12. Ошибки квантования синусоидального сигнала

В качестве иллюстрации рис. 4.51, а) показывает последовательность неквантованных отсчетов косинусоидального сигнала $x[n] = 0,99 \cos \frac{n}{10}$. На рис. 4.51, б) представлены квантованные отсчеты последовательности $\hat{x}[n] = Q\{x[n]\}$ для 3-битового квантователя ($B+1 = 3$) в предположении, что $X_m = 1$. Пунктирными линиями на этом рисунке

отмечены 8 возможных уровней квантования. На рис. 4.51, *в*) и *г*) представлены последовательности ошибок квантования $e[n] = \hat{x}[n] - x[n]$ 3- и 8-битового квантователей соответственно. В каждом из этих случаев, масштаб ошибок отрегулирован так, чтобы уровни $\pm\Delta/2$ попадали на пунктирные линии.

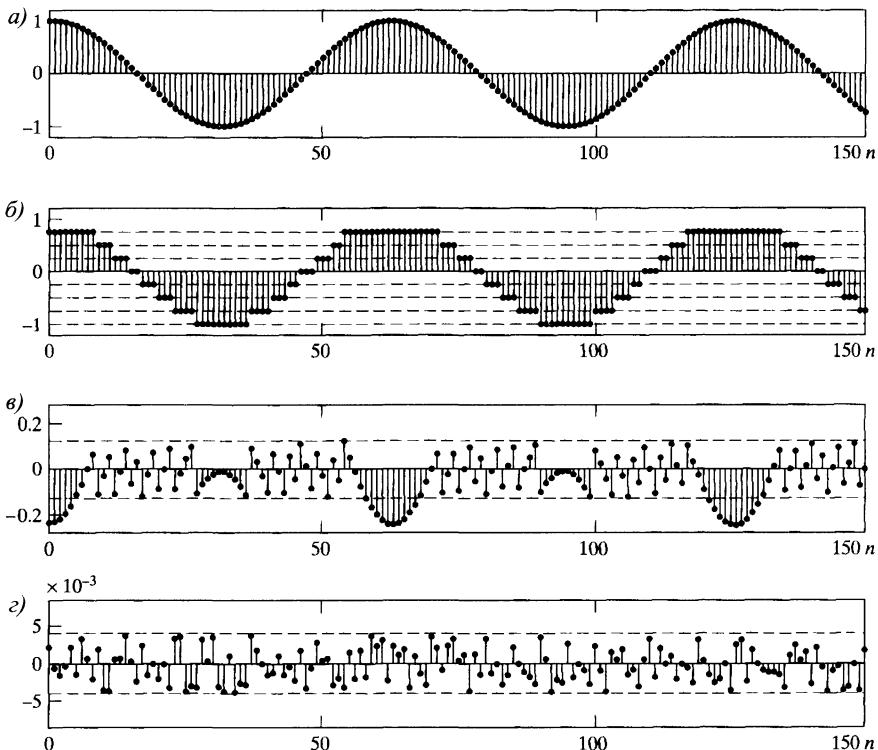


Рис. 4.51. Пример шума квантования: а) неквантованные отсчеты сигнала $x[n] = 0,99 \times \cos \frac{n}{10}$; б) квантованные отсчеты сигнала из а), полученные с помощью 3-битового квантователя; в) последовательность ошибок квантования сигнала $x[n]$ 3-битовым квантователем; г) последовательность ошибок квантования сигнала $x[n]$ 8-битовым квантователем

Обратите внимание, что при 3-битовом квантователе сигнал ошибок сильно коррелирует с неквантованным сигналом. Например, вблизи положительных и отрицательных пиков графика косинуса квантованный сигнал остается постоянным на протяжении многих отсчетов, поэтому на этих интервалах последовательность ошибок имеет форму входного сигнала. Кроме того, в окрестности положительных гребней графика абсолютное значение ошибки превышает $\Delta/2$, так как уровень сигнала оказывается слишком большим для выбранных параметров квантователя.

С другой стороны, ошибки квантования 8-битового квантователя не имеют никакой очевидно выраженной структуры². Визуальный анализ графика ошибок скорее подтверждает предыдущее утверждение о свойствах шума квантования в случае 8-

²Ошибка квантования периодических косинусоидальных сигналов должна, конечно, быть также периодической. Мы использовали частоту $\omega_0 = 1/10$, чтобы избежать периодичности ошибки в этом примере.

битового квантователя, т. е. отсчеты последовательности ошибок, на первый взгляд, распределены беспорядочно в интервале от $-\Delta/2$ до $+\Delta/2$, не коррелируя с отсчетами неквантованного сигнала. В главе 10 это наблюдение будет подкреплено вычислительными аргументами, когда мы найдем спектр мощности и автокорреляционную последовательность шума квантования. \square

Амплитуда шума квантования, возникающего в результате применения квантователей, округляющих значения отсчетов до ближайшего уровня квантования (как на рис. 4.48), попадает в промежуток

$$-\Delta/2 < e[n] \leq \Delta/2. \quad (4.125)$$

При малых Δ есть основания предполагать, что $e[n]$ — случайная величина, равномерно распределенная от $-\Delta/2$ до $+\Delta/2$. Следовательно, плотность вероятности первого порядка шума квантования будет такой, как на рис. 4.52. (Если при реализации квантователя всегда используется округление с недостатком, т. е. усечение, то ошибка квантования всегда будет отрицательной, и можно считать ошибку случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[-\Delta, 0]$.) Для завершения описания статистической модели шума квантования будем предполагать, что соседние отсчеты шума не коррелируют друг с другом, а $e[n]$ — с $x[n]$. Таким образом, предполагается, что $e[n]$ — равномерно распределенная последовательность белого шума. Среднее значение величины $e[n]$ равно 0, а ее дисперсия вычисляется по формуле:

$$\sigma_e^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{12}. \quad (4.126)$$

Для $(B + 1)$ -битового квантователя с полномасштабным уровнем X_m дисперсия шума, или мощность, равна

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B} X_m^2}{12}. \quad (4.127)$$

Обычной мерой количества деградации сигнала из-за аддитивного шума служит отношение сигнал/шум (С/Ш), определенное как отношение дисперсии (мощности) сигнала к дисперсии шума. Выраженное в децибелах (дБ) отношение сигнал/шум для $(B + 1)$ -битового дискретизатора равно³

$$C/\text{Ш} = 10 \lg \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right) = 10 \lg \left(\frac{12 \cdot 2^{2B} \sigma_x^2}{X_m^2} \right) = 6,02B + 10,8 - 20 \lg \left(\frac{X_m}{\sigma_x} \right). \quad (4.128)$$

Отсюда следует, что при добавлении каждого бита к длине слова, обознача-

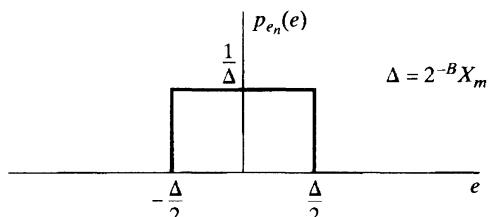


Рис. 4.52. Плотность распределения ошибок квантования округляющего квантователя из рис. 4.48

³Напомним, что в российской традиции символом lg обозначается логарифм по основанию 10, т. е. \log_{10} . — Примеч. перев.

ющего уровня квантования, С/Ш увеличивается примерно на 6 дБ. Особенно поучительно рассмотреть член

$$-20 \lg \left(\frac{X_m}{\sigma_x} \right) \quad (4.129)$$

формулы (4.128). Сначала напомним, что X_m — параметр квантователя, который в практических системах обычно фиксирован. Величина σ_x — среднеквадратическое значение амплитуды сигнала и должна быть обязательно меньше максимума этой амплитуды. Например, если $x_a(t)$ — синусоидальная волна с максимальной амплитудой X_p , то $\sigma_x = X_p/\sqrt{2}$. Если σ_x слишком большое, максимум амплитуды сигнала будет превышать полномасштабный параметр X_m АЦП. В этой ситуации формула (4.128) теряет свою силу и приводит к серьезнымискажениям результата. Если, с другой стороны, σ_x слишком мало, то член (4.129) формулы (4.128) становится очень большим по модулю, но отрицательным, что приводит к уменьшению отношения С/Ш. Фактически, несложно увидеть, что, когда σ_x уменьшается вдвое, С/Ш уменьшается на 6 дБ. Таким образом, очень важно, чтобы амплитуда сигнала была тщательно согласована с параметром X_m АЦП.

Распределение амплитуды аналоговых сигналов типа речевого или музыкального имеет тенденцию концентрироваться вблизи нуля и резко спадать с увеличением амплитуды. В таких случаях вероятность того, что абсолютная величина отсчета превысит в 3 или 4 раза среднеквадратическое значение, очень мала. Например, при гауссовом распределении амплитуды сигнала лишь 0,064% отсчетов могут перескочить уровень $4\sigma_x$. Таким образом, чтобы исключить срезание сигнала (как предполагается в нашей статистической модели), мы могли бы установить коэффициент усиления фильтров и усилителей, идущих перед АЦП, таким образом, чтобы добиться равенства $\sigma_x = X_m/4$. Тогда из формулы (4.128) следует, что

$$\text{С/Ш} \approx 6B - 1,25 \text{ дБ}. \quad (4.130)$$

Например, чтобы получить значение С/Ш в районе 90–96 дБ, необходимое для высококачественных звукозаписывающих или воспроизводящих устройств, потребуется 16-битовый квантователь. Но стоит помнить, что такой результат можно получить, только если входной сигнал тщательно сбалансирован с полномасштабным параметром АЦП.

Этот компромисс между пиками амплитуды сигнала и абсолютным размером шума квантования является основой любого процесса квантования. Мы еще раз убедимся в важности этого компромисса в главе 6, когда будем обсуждать шум округления при реализации дискретных линейных систем.

4.9.4. Преобразование цифрового сигнала в аналоговый

В § 4.4 мы рассказывали о восстановлении узкополосного сигнала по последовательности отсчетов с помощью идеального фильтра нижних частот. В терминах преобразования Фурье восстановление происходит по формуле:

$$X_r(j\Omega) = X(e^{j\omega})H_r(j\Omega), \quad (4.131)$$

где $X(e^{j\omega})$ — ДВПФ последовательности отсчетов, а $X_r(j\Omega)$ — Фурье-образ восстановленного непрерывного сигнала. Идеальный фильтр нижних частот описывается характеристической функцией:

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T. \end{cases} \quad (4.132)$$

При таком выборе $H_r(j\Omega)$ соотношение между восстановленным сигналом $x_r(t)$ и последовательностью $x[n]$ имеет вид

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T}. \quad (4.133)$$

Напомним, что система, восстанавливающая сигнал $x_r(t)$ по последовательности $x[n]$, называется *идеальным дискретно-непрерывным преобразователем* (ДНП). Физической реализацией ДНП служит *идеальный цифроаналоговый преобразователь* (ЦАП), к которому присоединяется аппроксимированный фильтр нижних частот. Как показано на рис. 4.53, a), ЦАП получает на входе последовательность двоичных слов и выдает непрерывный сигнал вида

$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_m \hat{x}_B[n] h_0(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] h_0(t - nT), \quad (4.134)$$

где $h_0(t)$ — импульсная характеристика системы запоминания нулевого порядка из формулы (4.116).

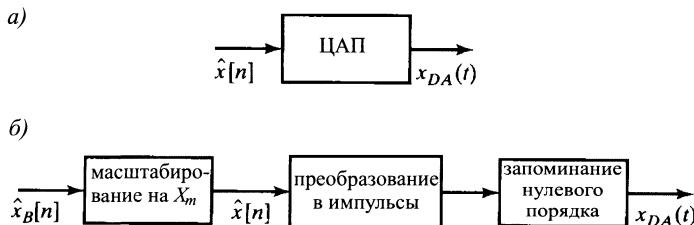


Рис. 4.53. a) блок-схема ЦАП; б) представление ЦАП в терминах схемы запоминания нулевого порядка

Пунктирные линии на рис. 4.49 отмечают выходной сигнал ЦАП квантованного примера синусоидальной волны. Заметим, что ЦАП хранит в памяти квантованные отсчеты одного шага дискретизации, как это делает схема дискретизации и запоминания с неквантованными входными отсчетами. Если для представления эффектов квантования использовать модель аддитивного шума, формула (4.134) дает равенство:

$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_0(t - nT) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] h_0(t - nT). \quad (4.135)$$

Введем функции

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_0(t - nT), \quad (4.136)$$

$$e_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]h_0(t - nT) \quad (4.137)$$

и перепишем через них формулу (4.135):

$$x_{\text{ЦА}}(t) = x_0(t) + e_0(t). \quad (4.138)$$

Компонента $x_0(t)$ относится к входному сигналу $x_a(t)$, поскольку $x[n] = x_a(nT)$. Шумовой сигнал $e_0(t)$ зависит от последовательности шумов квантования $e[n]$ так же, как $x_0(t)$ зависит от отсчетов неквантованного сигнала. После преобразования Фурье формула (4.136) приобретает вид:

$$\begin{aligned} X_0(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]H_0(j\Omega)e^{-j\Omega nT} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega T n} \right) H_0(j\Omega) = \\ &= X(e^{j\Omega T})H_0(j\Omega). \end{aligned} \quad (4.139)$$

Поскольку

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a \left(j \left(\Omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \right), \quad (4.140)$$

то

$$X_0(j\Omega) = \left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a \left(j \left(\Omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \right) \right] H_0(j\Omega). \quad (4.141)$$

Если частоты $X_a(j\Omega)$ ограничены значением π/T , то сдвинутые копии этого сигнала, участвующие в формуле (4.141), не накладываются друг на друга. Поэтому реакцией компенсирующего восстановливающего фильтра с КЧХ

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \frac{H_r(j\Omega)}{H_0(j\Omega)} \quad (4.142)$$

на сигнал $x_0(t)$ будет $x_a(t)$. Легко показать, что КЧХ фильтра запоминания нулевого порядка равна

$$H_0(j\Omega) = \frac{2 \sin(\Omega T/2)}{\Omega} e^{-j\Omega T/2}. \quad (4.143)$$

Следовательно, КЧХ компенсирующего восстановливающего фильтра имеет вид:

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega T/2}{\sin(\Omega T/2)} e^{j\Omega T/2}, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| > \pi/T. \end{cases} \quad (4.144)$$

Рисунок 4.54, а) показывает график функции $|H_0(j\Omega)|$ в сравнении с абсолютным значением идеального интерполяционного фильтра $|H_r(j\Omega)|$ из формулы (4.132). Коэффициент усиления обоих фильтров равен T при $\Omega = 0$, но фильтр запоминания нулевого порядка, хоть и является фильтром нижних частот по своей природе, отсекает частоты выше $\Omega = \pi/T$ плавно, а не резко. АЧХ идеального компенсирующего восстановливающего фильтра, используемого вслед за восстановливающей системой нулевого порядка такой, как, например ЦАП, приведена на рис. 4.54, б). ФЧХ идеально соответствовала бы предварительному сдвигу на $(T/2)$ с для компенсирования задержки, внесенной фильтром запоминания нулевого порядка. Поскольку такую аппроксимацию идеального компенсирующего

восстанавливающего фильтра невозможно реализовать в реальном времени, то хорошо компенсировать удастся лишь модуль реакции, а зачастую даже об этой компенсации можно не заботиться, поскольку коэффициент усиления фильтра запоминания нулевого порядка падает лишь до $2/\pi$ (или -4 дБ) при частоте $\Omega = \pi/T$.

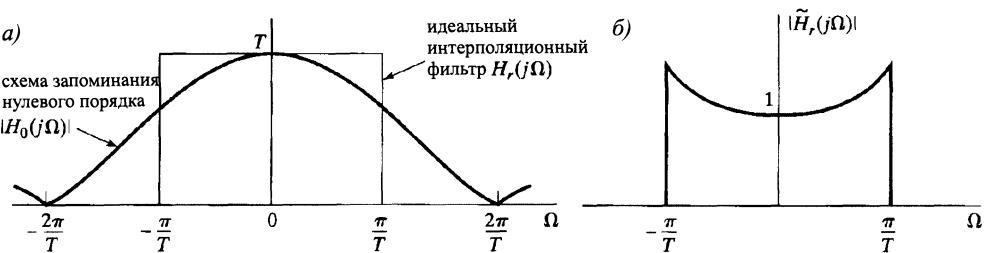


Рис. 4.54. а) КЧХ схемы запоминания нулевого порядка в сравнении с идеальным интерполяционным фильтром; б) идеальный компенсирующий восстанавливающий фильтр, используемый вслед за схемой запоминания нулевого порядка

На рис. 4.55 представлен ЦАП, за которым идет идеальный компенсирующий восстанавливающий фильтр. Из предыдущего обсуждения можно извлечь, что выходной сигнал такой системы будет равен

$$\begin{aligned} \hat{x}_r(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}. \end{aligned} \quad (4.145)$$

Иначе говоря, выходной сигнал можно записать как

$$\hat{x}_r(t) = x_a(t) + e_a(t), \quad (4.146)$$

где $e_a(t)$ обозначает узкополосный сигнал белого шума.

Вернемся к рассмотрению рис. 4.41, б) с позиции поведения системы цифровой обработки аналоговых сигналов. Предположив, что узкополосный выход фильтра защиты a ограничен сверху по частоте числом π/T , функция $\tilde{H}_r(j\Omega)$ удовлетворяет тем же ограничениям и что дискретная система линейна и стационарна, то получаем, что выходной сигнал всей системы разлагается в сумму:



Рис. 4.55. Физическая конфигурация ЦАП

$$\hat{y}_r(t) = y_a(t) + e_a(t), \quad (4.147)$$

где

$$Y_a(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega) H_0(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) H_{aa}(j\Omega) X_c(j\Omega). \quad (4.148)$$

Здесь $H_{aa}(j\Omega)$, $H_0(j\Omega)$ и $\tilde{H}_r(j\Omega)$ — КЧХ фильтра защиты от наложения спектров, фильтра запоминания нулевого порядка в ЦАП и восстанавливающего фильтра нижних частот соответственно. Функция $H(e^{j\Omega T})$ — это КЧХ дискрет-

ной системы. Аналогично, предполагая, что шум квантования, вносимый АЦП, является белым шумом с дисперсией $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$, можно показать, что спектр мощности шума на выходе описывается функцией

$$P_{e_a}(j\Omega) = \left| \tilde{H}_r(j\Omega) H_0(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) \right|^2 \sigma_e^2, \quad (4.149)$$

т. е. входной шум квантования последовательно меняется в результате дискретного и непрерывного фильтрования. Из формулы (4.148) вытекает, что в предположениях о незначительном наложении спектров эффективная КЧХ всей системы, реагирующей сигналом $\hat{y}_r(t)$ на вход $x_c(t)$, будет равной

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega) H_0(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) H_{aa}(j\Omega). \quad (4.150)$$

Если фильтр защиты от наложения спектров идеален (как в формуле (4.112)) и компенсация восстанавливающего фильтра тоже идеальна (как в (4.144)), то эффективная КЧХ описывается формулой (4.113). В противном случае разумную модель эффективной характеристики дает формула (4.150). Эта формула подсказывает, что компенсация недостатков, появляющихся на любой из четырех стадий, в принципе может быть включена в любой из членов, например дискретная система может содержать подходящую компенсацию для фильтра защиты от наложения спектров или системы запоминания нулевого порядка, или восстанавливающего фильтра, или для всех сразу.

В дополнение к фильтрованию, описанному формулою (4.150), соотношение (4.147) напоминает о том, что выходной сигнал будет засорен отфильтрованным шумом квантования. В главе 6 мы увидим, что шум может быть внесен и дискретной линейной системой. Этот внутренний шум будет, в общей ситуации, отфильтрован частями реализации дискретной системы, системой запоминания нулевого порядка в ЦАП и восстанавливающим фильтром.

4.10. Передискретизация и формирование шумов в АЦП и ЦАП

В подразделе 4.9.1 мы объяснили, что передискретизация дает возможность реализовать фильтр защиты от наложения спектров с крутым срезом через включение в систему цифрового фильтрования и прореживания. В подразделе 4.10.1 мы убедимся, что передискретизация, дискретное фильтрование и поникающая дискретизация тоже позволяют увеличить размер шага Δ в квантователе или, что тоже самое, уменьшить число битов, требуемых в АЦП. В подразделе 4.10.2 будет показано, что, используя передискретизацию совместно с обратной связью шумов квантования, можно еще сильнее уменьшить размер шага, а в подразделе 4.10.3 продемонстрируется, как принцип передискретизации можно применить в ЦАП.

4.10.1. Передискретизованный АЦП с простым квантованием

Чтобы исследовать связь передискретизации с величиной шага квантования, обратимся к рис. 4.56. Для анализа эффекта передискретизации в этой систе-

ме рассмотрим стационарный в широком смысле случайный процесс $x_a(t)$ с нулевым средним значением. Его спектральную плотность мощности обозначим символом $\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)$, а автокорреляционную функцию — $\varphi_{x_a x_a}(\tau)$. Для простоты рассуждений будем предполагать, что сигнал $x_a(t)$ всегда узкополосный, а именно

$$\Phi_{x_a x_a}(j\Omega) = 0, \quad \text{при } |\Omega| \geq \Omega_N. \quad (4.151)$$

Кроме того, считаем, что $2\pi/T = 2M\Omega_N$. Константа M (целое число) называется коэффициентом передискретизации.

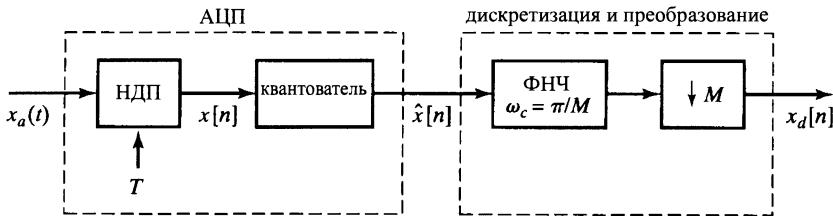


Рис. 4.56. Передискретизованный АЦП с простым квантованием и понижающей дискретизацией

Опираясь на модель аддитивного шума, подробно обсуждавшуюся в подразделе 4.9.3, можно заменить систему рис. 4.56 системой из рис. 4.57. На рис. 4.57 в качестве прореживающего фильтра взят идеальный фильтр нижних частот с единичным коэффициентом усиления и частотой отсечки $\omega_c = \pi/M$. Ввиду линейности всей системы рис. 4.57 ее выходной сигнал $x_d[n]$ состоит из двух компонент. Одна из них — реакция на поданный сигнал $x_a(t)$, а другая — на шум $e[n]$. Обозначим эти компоненты соответственно через $x_{da}[n]$ и $x_{de}[n]$.

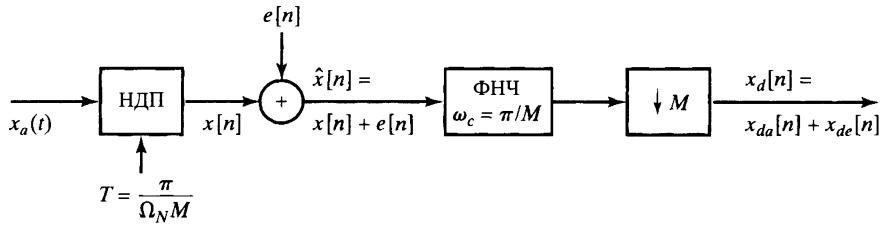


Рис. 4.57. Система рис. 4.56, в которой квантователь заменен моделью линейного шума

Наша цель — определить отношение мощности сигнала $\mathcal{E}\{x_{da}^2[n]\}$ к мощности шума квантования $\mathcal{E}\{x_{de}^2[n]\}$ в выходном сигнале $x_d[n]$ как функцию от величины шага квантования Δ и коэффициента передискретизации M . Поскольку система линейна, а шум, по предположению, не зависит от подаваемого на вход сигнала, мощности компонент можно вычислять отдельно друг от друга.

Сначала рассмотрим реакцию на поданный сигнал. Начнем с вывода соотношений между спектральными плотностями мощности, автокорреляционными функциями и мощностями дискретизованного сигнала $x[n]$ и соответствующими характеристиками аналогового сигнала $x_a(t)$. Пусть $\varphi_{xx}[m]$ и $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ —

автокорреляционная функция и спектральная плотность мощности сигнала $x[n]$. Тогда, по определению, $\varphi_{xx}[m] = \mathcal{E}\{x[n+m]x[n]\}$ и, так как $x[n] = x_a(nT)$ и $x[n+m] = x_a(nT+mT)$, то

$$\mathcal{E}\{x[n+m]x[n]\} = \mathcal{E}\{x_a((n+m)T)x_a(nT)\}. \quad (4.152)$$

Следовательно,

$$\varphi_{xx}[m] = \varphi_{x_a x_a}(mT), \quad (4.153)$$

т. е. автокорреляционная функция последовательности отсчетов — это дискретизованная версия автокорреляционной функции соответствующего непрерывного сигнала. В частности, формулы (4.152) и (4.153) вместе с предположением о стационарности в широком смысле влекут, что $\mathcal{E}\{x_a^2(t)\}$ — константа, независящая от t . Значит,

$$\mathcal{E}\{x^2[n]\} = \mathcal{E}\{x_a^2(nT)\} = \mathcal{E}\{x_a^2(T)\}, \quad \forall n \text{ и } t. \quad (4.154)$$

Так как спектральная плотность мощности — Фурье-образ автокорреляционной функции, то в качестве следствия равенства (4.153) получаем

$$\Phi_{xx}(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_{x_a x_a}\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right). \quad (4.155)$$

Предполагая, что входной сигнал ограничен по частоте условием (4.151), а коэффициент передискретизации M удовлетворяет соотношению $2\pi/T = 2M\Omega_N$, то, подставляя $\Omega = \omega/T$ в формулу (4.155), получаем

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{T} \Phi_{x_a x_a}\left(j\frac{\omega}{T}\right), & |\omega| < \pi/M, \\ 0, & \pi/M < \omega \leq \pi. \end{cases} \quad (4.156)$$

Например, если $\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)$ имеет вид, как на рис. 4.58, а), и выполнено равенство $2\pi/T = 2M\Omega_N$, то $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ будет такой, как на рис. 4.58, б).

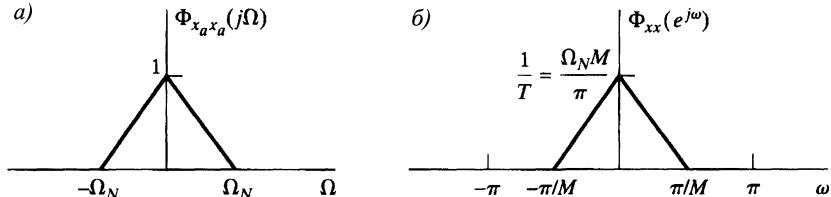


Рис. 4.58. Сравнительная иллюстрация частоты и амплитуды функций $\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)$ и $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$

Поучительно продемонстрировать справедливость формулы (4.156)? используя спектр мощности. Суммарная мощность исходного аналогового сигнала описывается равенством

$$\mathcal{E}\{x_a^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_N}^{\Omega_N} \Phi_{x_a x_a}(j\Omega) d\Omega.$$

Из равенства (4.156) следует, что суммарная мощность дискретизированного сиг-

нала равна

$$\mathcal{E}\{x^2[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega \quad (4.157)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \frac{1}{T} \Phi_{x_a x_a} \left(j \frac{\omega}{T} \right) d\omega. \quad (4.158)$$

Учитывая тот факт, что $\Omega_N T = \pi/M$, и делая подстановку $\Omega = \omega/T$ в интеграл (4.158), получаем

$$\mathcal{E}\{x^2[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_N}^{\Omega_N} \Phi_{x_a x_a}(j\Omega) d\Omega = \mathcal{E}\{x_a^2(t)\}.$$

Итак, суммарные мощности дискретизованного и исходного аналогового сигналов в точности совпадают. Поскольку прореживающий фильтр — это идеальный фильтр нижних частот с частотой отсечки $\omega_c = \pi/M$, сигнал $x[n]$ проходит через фильтр неизмененным. Следовательно, компонента сигнала $x_{da}[n] = x[nM] = x_a(nMT)$ имеет ту же суммарную мощность. Это можно увидеть из спектра мощности, заметив, что так как $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ ограничена по частоте условием $|\omega| < \pi/M$, то

$$\Phi_{x_{da} x_{da}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \Phi_{xx} \left(e^{j(\omega - 2\pi k)/M} \right) = \frac{1}{M} \Phi_{xx} \left(e^{j\omega/M} \right), \quad |\omega| < \pi. \quad (4.159)$$

Используя формулу (4.159), приходим к равенству

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{x_{da}^2[n]\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{x_{da} x_{da}}(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{M} \Phi_{xx}(e^{j\omega/M}) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega = \mathcal{E}\{x^2[n]\}, \end{aligned}$$

которое показывает, что мощность сигнальной компоненты остается той же самой, как если бы она прошла всю систему от входного сигнала $x_a(t)$ до соответствующей компоненты выхода $x_{da}[n]$. Мощность остается неизменной потому, что масштабирование оси частот, возникающее при дискретизации, уравновешивается обратным скалингом оси амплитуд, так что площадь под графиком спектра мощности не меняется при переходе посредством от $\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)$ к $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ и далее к $\Phi_{x_{da} x_{da}}(e^{j\omega})$.

Теперь обратимся к шумовой компоненте, генерируемой квантователем. Согласно модели подраздела 4.9.3, мы предполагаем, что $e[n]$ — стационарный в широком смысле процесс белого шума с нулевым средним значением и дисперсией $\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12}$. Значит, автокорреляционная функция и спектральная плотность

¹ Поскольку случайный процесс имеет нулевое среднее значение, то средняя мощность совпадает с дисперсией.

мощности сигнала $e[n]$ равны, соответственно,

$$\varphi_{ee}[m] = \sigma_e^2 \delta[m] \quad (4.160)$$

и

$$\Phi_{ee}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2, \quad |\omega| < \pi. \quad (4.161)$$

На рис. 4.59 изображена спектральная плотность мощности сигналов $e[n]$ и $x[n]$. Спектральная плотность мощности квантованного сигнала $\hat{x}[n]$ является их суммой, поскольку отсчеты сигнала и шума квантования в нашей модели считаются независимыми.

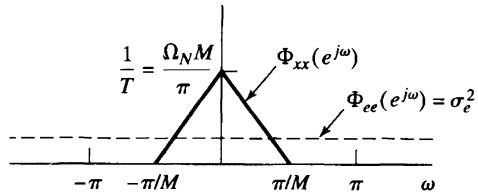


Рис. 4.59. Спектральная плотность мощности сигнала и шума квантования при коэффициенте передискретизации M

Рис. 4.59. Спектральная плотность мощности сигнала и шума квантования при коэффициенте передискретизации M

нужную компоненту. Мощность шума на выходе идеального фильтра нижних частот составляет

$$\mathcal{E}\{e^2[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \sigma_e^2 d\omega = \frac{\sigma_e^2}{M}.$$

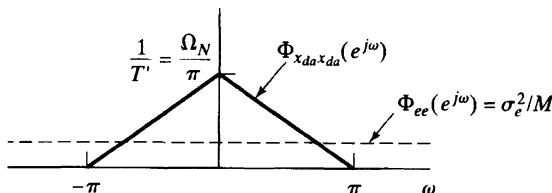


Рис. 4.60. Спектральная плотность мощности сигнала и шума квантования после понижющей дискретизации

изменна, так как масштабирование частотной и амплитудной осей компенсируют друг друга. С другой стороны, мощность шума на выходе прореживателя совпадает с мощностью шума на выходе фильтра нижних частот, т. е.

$$\mathcal{E}\{x_{de}^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma_e^2}{M} d\omega = \frac{\sigma_e^2}{M} = \frac{\Delta^2}{12M}. \quad (4.162)$$

Таким образом, мощность шума квантования $\mathcal{E}\{x_{de}^2[n]\}$ уменьшается в M раз за счет фильтрования и понижющей дискретизации, в то время как мощность сигнала остается неизменной.

Хотя мы доказали независимость мощности сигналов $x[n]$ и $e[n]$ от M , заметим, что при возрастании коэффициента передискретизации M уменьшается наложение спектров и шум, что является эффектом передискретизации, позволяющим улучшить отношение С/Ш, уменьшая частоту дискретизации. Более точно, идеальный фильтр нижних частот освобождает от шума полосу $\pi/M < |\omega| \leq \pi$, не затрагивая сигналь-

Далее, сигнал после фильтрования подвергается поникающей дискретизации и, как мы видели, мощность сигнала на выходе этой процедуры остается неизменной. На рис. 4.60 представлена результирующая спектральная плотность мощности обеих компонент $x_{da}[n]$ и $x_{de}[n]$. Сравнивая рис. 4.58 б), 4.59 и 4.60, можно убедиться, что площадь под графиком спектральной плотности мощности сигнала не-

Из формулы (4.162) ясно видно, что при данной мощности шума квантования существует явная зависимость между коэффициентом M и величиной шага квантования Δ . Равенство (4.119) утверждает, что для квантователя с $(B + 1)$ битами и максимумами уровня входного сигнала, расположеными между $\pm X_m$, величина шага равна $\Delta = X_m/2^B$, и, следовательно,

$$\mathcal{E}\{x_{de}^2[n]\} = \frac{1}{12M} \left(\frac{X_m}{2^B}\right)^2. \quad (4.163)$$

Последняя формула, в частности, говорит о возможности уменьшения мощности шума за счет увеличения коэффициента передискретизации M . Поскольку мощность сигнала не зависит от M , увеличение этого коэффициента повлечет за собой увеличение отношения С/Ш. В качестве альтернативы при фиксированной мощности шума квантования $P_{de} = \mathcal{E}\{x_{de}^2[n]\}$ требуемое количество битов определяется по формуле:

$$B = -\frac{1}{2} \log_2 M - \frac{1}{2} \log_2 12 - \frac{1}{2} \log_2 P_{de} + \log_2 X_m. \quad (4.164)$$

Таким образом, удвоение коэффициента передискретизации M приводит к экономии $1/2$ бита при сохранении данного отношения С/Ш, или, говоря иначе, если мы проведем передискретизацию с коэффициентом $M = 4$, для получения желаемой точности при представлении сигнала нам потребуется на один бит меньше.

4.10.2. Передискретизованный АЦП с формированием шумов

В предыдущем подразделе мы продемонстрировали, как передискретизация и прореживание могут улучшить отношение С/Ш, что производит впечатление замечательного результата. Действительно, мы можем в принципе использовать довольно грубое квантование при начальной дискретизации сигнала, но получать при этом достаточно точное представление исходных отсчетов, производя действия над искаженными шумом величинами, если коэффициент передискретизации достаточно высок. Проблема, с которой мы на данный момент столкнулись, заключается в том, что для существенного сокращения числа требуемых битов необходимо выбрать очень большой коэффициент передискретизации. Например, для уменьшения числа битов с 16 до 12 потребуется коэффициент $M = 4^4 = 256$, что кажется довольно дорогостоящим. Однако основной принцип передискретизации позволяет получить большую выгоду, если комбинировать предыдущий прием с концепцией формирования спектра шума обратной связью.

Как было показано на рис. 4.59, при прямом квантовании спектральная плотность шума остается постоянной на протяжении всей полосы частот. Ключевая идея формирования шумов состоит в такой модификации процедуры АЦП, при которой спектральная плотность мощности шума квантования была бы не однородной, а формировалась так, чтобы большая ее часть была сосредоточена вне полосы $|\omega| < \pi/M$. На этом пути следующие друг за другом фильтрование и поникающая дискретизация убирают большую часть мощности шума квантования.

Квантователь с формированием шумов, обычно называемый *дискретным передаточным дельта-сигма модулятором*, изображен на рис. 4.61. (См. [16] для информации о ссылках на статьи по этой теме.) На рис. 4.61, а) представлена блок-схема реализации системы интегральными схемами. Интегратор на рисунке — это дискретный интегратор на переключаемых конденсаторах. АЦП можно реализовать многими способами, но, как правило, в качестве него берут 1-битовый квантователь или компаратор. ЦАП преобразует цифровой выходной сигнал обратно в аналоговый импульс, который вычитается по сигналу, подающемуся на вход интегратора. Эту систему можно заменить эквивалентной дискретной системой, изображенной на рис. 4.61, б). Интегратор на переключаемых конденсаторах представлен там аккумуляторной системой, а задержка при обратной связи изображает задержку в ЦАП.

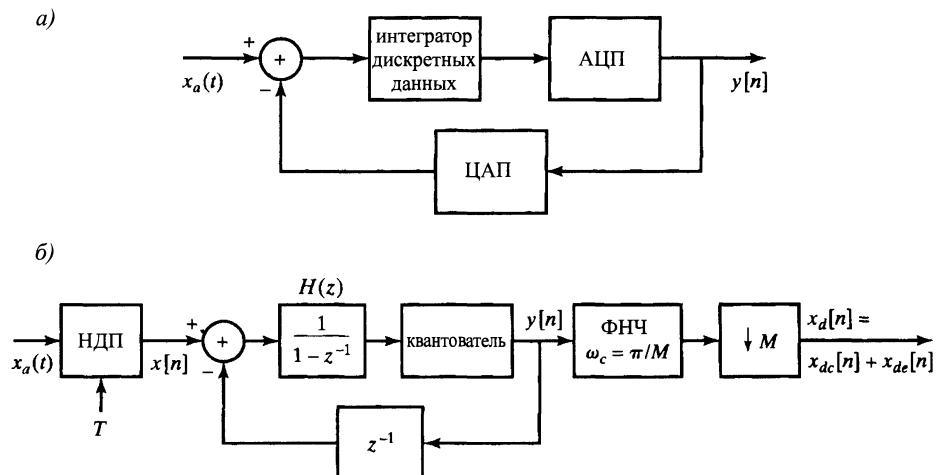


Рис. 4.61. Передискретизованный квантователь с формированием шумов

Как и раньше, учтем ошибки квантования, введя источник аддитивного шума, и заменим систему из рис. 4.61 линейной моделью из рис. 4.62. Выходной сигнал $y[n]$ в этой системе раскладывается в сумму двух компонент: $y_x[n]$, соответствующую входному сигналу $x[n]$, и $\hat{e}[n]$, соответствующую шуму $e[n]$.

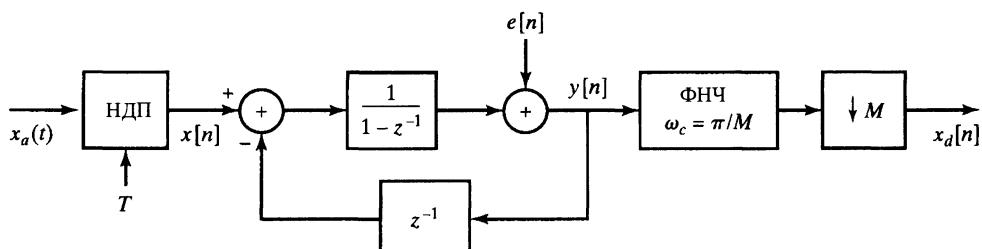


Рис. 4.62. Система рис. 4.60, преобразующая сигнал $x_a(t)$ в $y[n]$, в которой квантователь заменен линейной моделью шума

Символом $H_x(z)$ обозначим передаточную функцию от $x[n]$ к $y[n]$, а символом $H_e(z)$ — от $e[n]$ к $y[n]$. Передаточные функции вычисляются стандартным методом и равны

$$H_x(z) = 1, \quad (4.165)$$

$$H_e(z) = 1 - z^{-1}. \quad (4.166)$$

Следовательно,

$$y_x[n] = x[n], \quad (4.167)$$

$$\hat{e}[n] = e[n] - e[n - 1]. \quad (4.168)$$

Значит, выходной сигнал $y[n]$ можно эквивалентно представить как $y[n] = x[n] + \hat{e}[n]$, где $x[n]$ появляется на выходе неизмененным, а шум квантования подвергается воздействию разностного оператора $H_e(z)$. Этот процесс показан на блок-схеме рис. 4.63. Учитывая спектральную плотность мощности шума $e[n]$, данную в формуле (4.161), можно показать, что спектральная плотность мощности шума квантования $\hat{e}[n]$, присутствующего в $y[n]$, равна

$$\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 |H_e(e^{j\omega})|^2 = \sigma_e^2 [2 \sin \frac{\omega}{2}]^2. \quad (4.169)$$

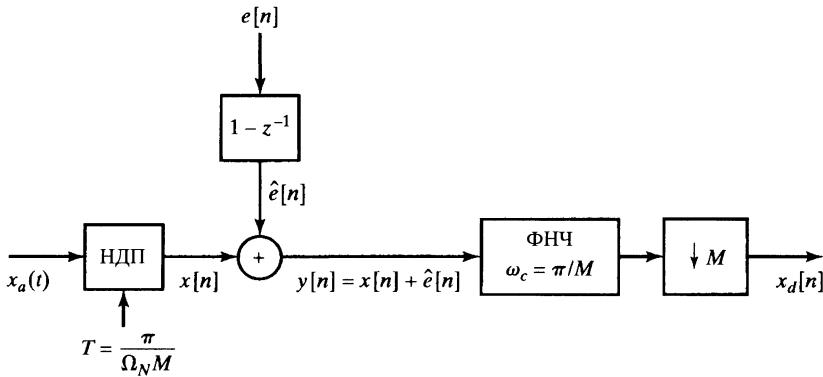


Рис. 4.63. Эквивалентное представление системы рис. 4.62

На рис. 4.64 мы приводим спектральную плотность мощности $\hat{e}[n]$, спектр мощности $e[n]$ и тот же спектр мощности сигнала, что и на рис. 4.58 б) и 4.59. Любопытно отметить, что *суммарная* мощность шума возрастает от $\mathcal{E}\{e^2[n]\} = \sigma_e^2$ в квантователе до $\mathcal{E}\{\hat{e}^2[n]\} = 2\sigma_e^2$ на выходе системы, формирующей шум. Заметим, однако, что по сравнению с рис. 4.59 шум квантования сформирован таким образом, что внутрь полосы $|\omega| < \pi/M$ попадает меньшая часть его мощности, чем в случае прямого квантования с передискретизацией, где спектр шума получается плоским.

В системе из рис. 4.61 внеполосная мощность шума удаляется фильтром низких частот. На рис. 4.65 показана спектральная плотность мощности $\Phi_{x_{da}x_{da}}(e^{j\omega})$, наложенная на спектральную плотность мощности $\Phi_{x_{dec}x_{de}}(e^{j\omega})$. Так как понижающий дискретизатор не затрагивает мощность сигнала, в $x_{da}[n]$ она будет

равна

$$P_{da} = \mathcal{E}\{x_{da}^2[n]\} = \mathcal{E}\{x^2[n]\} = \mathcal{E}\{x_a^2(t)\}.$$

В результате, мощность шума квантования вычисляется как

$$P_{de} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{x_{de}x_{de}}(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta^2}{12M} \int_{-\pi}^{\pi} \left(2 \sin\left(\frac{\omega}{2M}\right)\right)^2 d\omega. \quad (4.170)$$

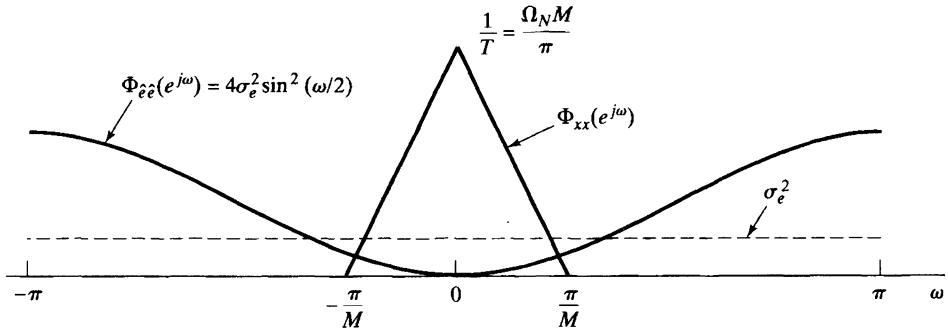


Рис. 4.64. Спектральная плотность мощности шума квантования и сигнала

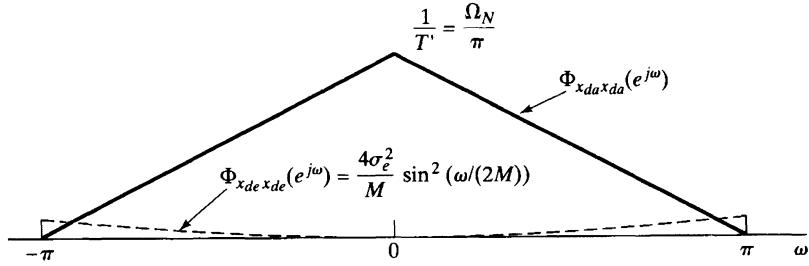


Рис. 4.65. Спектральная плотность мощности сигнала и шума квантования после понижающей дискретизации

Для приближенного сравнения полученных фактов с результатами подраздела 4.10.1 предположим, что коэффициент M достаточно большой, так что

$$\sin\left(\frac{\omega}{2M}\right) \approx \frac{\omega}{2M}.$$

С этим предположением легко получить такую оценку формулы (4.170):

$$P_{de} \approx \frac{1}{36} \frac{\Delta^2 \pi^2}{M^3}. \quad (4.171)$$

В формуле (4.171) тоже прослеживается взаимосвязь между коэффициентом M и величиной шага квантования Δ . При $(B+1)$ -битовом квантователе и максимальных уровнях сигнала, расположенных между $\pm X_m$, величина шага равна $\Delta = X_m/2^B$. Следовательно, для достижения данной мощности шума квантова-

ния следует выбрать число

$$B = -\frac{3}{2} \log_2 M + \log_2 \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \log_2 P_{de} + \log_2 X_m. \quad (4.172)$$

Сравнивая формулы (4.172) и (4.164), видим, что, в то время как при прямом квантовании удвоение коэффициента M ведет к экономии 0,5 бита, метод формирования шума дает экономию в 1,5 бита.

В табл. 4.2 приведены сравнительные экономии битов квантователя: при прямом квантовании без передискретизации ($M = 1$), при прямом квантовании с передискретизацией, как об этом рассказывалось в подразделе 4.10.1, и при передискретизации с формированием шумов, о чём шла речь в этом подразделе.

Таблица 4.2. Сравнительная экономия битов в квантователе при $M = 1$ для прямого квантования и формировании шумов первого порядка

M	Прямо квантование	Формирование шумов
4	1	2,2
8	1,5	3,7
16	2	5,1
32	2,5	6,6
64	3	8,1

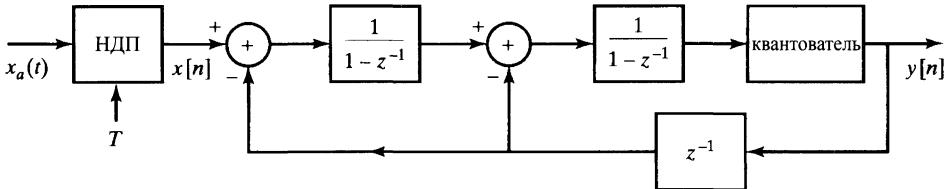


Рис. 4.66. Передискретизованный квантователь с формированием шумов второго порядка

Стратегию формирования шумов (рис. 4.61) можно продолжить, подключив вторую стадию аккумулирования, как это показано на рис. 4.66. Можно доказать, что и в этом случае с квантователем в виде модели источника аддитивного белого шума выходной сигнал тоже разлагается на две компоненты:

$$y[n] = x[n] + \hat{e}[n].$$

Здесь $\hat{e}[n]$ — результат обработки шума квантования $e[n]$ передаточной функцией

$$H_e(z) = (1 - z^{-1})^2. \quad (4.173)$$

Соответствующая спектральная плотность мощности шума квантования, присутствующего в сигнале $y[n]$, теперь равна

$$\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 \left(2 \sin \frac{\omega}{2}\right)^4. \quad (4.174)$$

Так что в итоге, хотя суммарная мощность шума на выходе системы формирования шумов второго порядка больше, чем в случае такой же системы первого

порядка, на полосу сигнала приходится еще меньшая ее часть. В общей ситуации можно использовать p стадий аккумулирования и обратной связи. При этом

$$\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 \left(2 \sin \frac{\omega}{2}\right)^{2p}. \quad (4.175)$$

В табл. 4.3 сведена информация об экономии битов квантователя в виде функции от порядка p формирования шумов и коэффициента M . Заметим, что при $p = 2$ и $M = 64$ мы получаем увеличение точности почти на 13 битов в предположении, что 1-битовый квантователь обеспечивает 14-битовую точность на выходе прореживателя.

Таблица 4.3. Экономия битов в квантователе с помощью системы формирования шумов порядка p

Порядок квантователя p	Коэффициент передискретизации M				
	4	8	16	32	64
0	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
1	2,2	3,7	5,1	6,6	8,1
2	2,9	5,4	7,9	10,4	12,9
3	3,5	7,0	10,5	14,0	17,5
4	4,1	8,5	13,0	17,5	22,0
5	4,6	10,0	15,5	21,0	26,5

Хотя многочисленные петли обратной связи обещают значительное уменьшение шумового фона, но и с ними возникают проблемы. При большом значении порядка p увеличивается возможность неустойчивости и колебаний. Альтернативный подход, называемый многоступенчатым формированием шумов (MASH), разбирается в задаче 4.62.

4.10.3. Передискретизация и формирование шумов в ЦАП

В подразделах 4.10.1 и 4.10.2 обсуждалось применение передискретизации к упрощению процесса АЦП. Как упоминалось, для упрощения фильтрования ложных частот и увеличения точности сигнала сначала подвергается процедуре передискретизации, но конечный выход $x_d[n]$ АЦП дискретизируется с частотой Найквиста, вычисленной по сигналу $x_a(t)$. Конечно, при цифровой обработке или даже простом представлении аналогового сигнала в цифровой форме, как, например, в системе электронной звукозаписи, желательна минимальная частота дискретизации. Естественно применить тот же принцип к обратной операции — ЦАП.

Базисная система, противоположная изображенной на рис. 4.56, приведена на рис. 4.67. Последовательность $y_d[n]$, которую предстоит преобразовать в непрерывный сигнал, сначала подвергается процедуре повышающей дискретизации, в результате чего получается последовательность $\hat{y}[n]$. Затем $\hat{y}[n]$ переквантывают и передают на вход ЦАП, который получает двоичные отсчеты с числом знаков, произведенных при процессе переквантования. Если есть уверенность,

что шум квантования не затрагивает полосу сигнала, можно использовать простой ЦАП с несколькими битами. В этой ситуации от шумового фона можно избавиться несложным аналоговым фильтрованием.

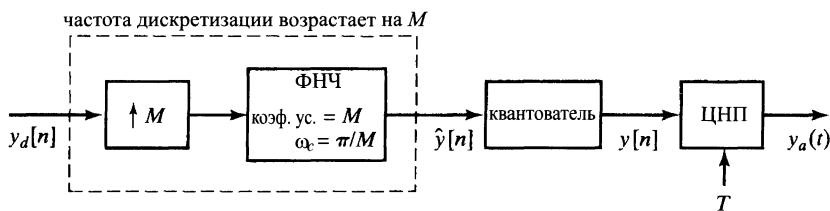


Рис. 4.67. Передискретизованный ЦАП

На рис. 4.68 мы показываем структуру квантователя, формирующего шум квантования так же, как в системе формирования шумов первого порядка из рис. 4.61. Для анализа систем рис. 4.67 и 4.68 заменим квантователь из рис. 4.68 на источник аддитивного белого шума $e[n]$. При этом система из рис. 4.68 трансформируется в систему из рис. 4.69. Передаточная функция от сигнала $\hat{y}[n]$ к $y[n]$ тождественно равна единице, т. е. подвергнутый повышающей дискретизации сигнал $\hat{y}[n]$ приходит к выходу неизмененным. Передаточная функция $H_e(z)$ от $e[n]$ к $y[n]$ равна $H_e(z) = 1 - z^{-1}$. Следовательно, компонента, отвечающая за шум квантования $\hat{e}[n]$, появляющаяся на выходе системы формирования шумов (рис. 4.69), обладает спектральной плотностью мощности вида

$$\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 \left(2 \sin \frac{\omega}{2}\right)^2, \quad (4.176)$$

где, как и прежде, $\sigma_e^2 = \Delta^2 / 12$.

Иллюстрация этого подхода к ЦАП показана на рис. 4.70. Спектральная плотность мощности $\Phi_{y_d y_d}(e^{j\omega})$ входного сигнала $y_d[n]$ приведена на рис. 4.70, а) (мы предполагаем, что сигнал $y_d[n]$ дискретизован с частотой Найквиста).

На рис. 4.70, б) размещена спектральная плотность мощности сигнала на выходе повышающего дискретизатора (с коэффициентом M), а спектральной плотности выхода системы квантователь/формирование шумов отведен рис. 4.70, в). Наконец, рис. 4.70, г) пред-

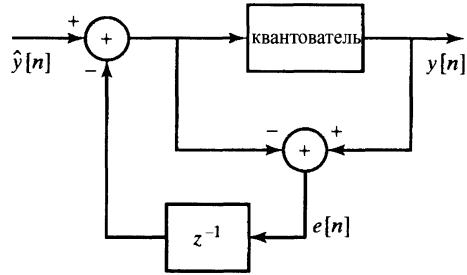


Рис. 4.68. Система формирования шумов первого порядка для передискретизованного ЦАП

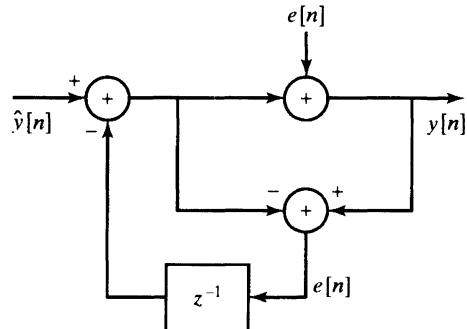


Рис. 4.69. Система предыдущего рисунка, в которой квантователь заменен на линейную модель шума

ставляет спектр мощности сигнальной компоненты в суперпозиции со спектром мощности шумовой компоненты аналогового выхода ДНП из рис. 4.67. Мы предполагаем, что ДНП снабжен идеальным восстанавливающим фильтром нижних частот с частотой отсечки $\pi/(MT)$, который отфильтровывает максимально возможное количество шума квантования.

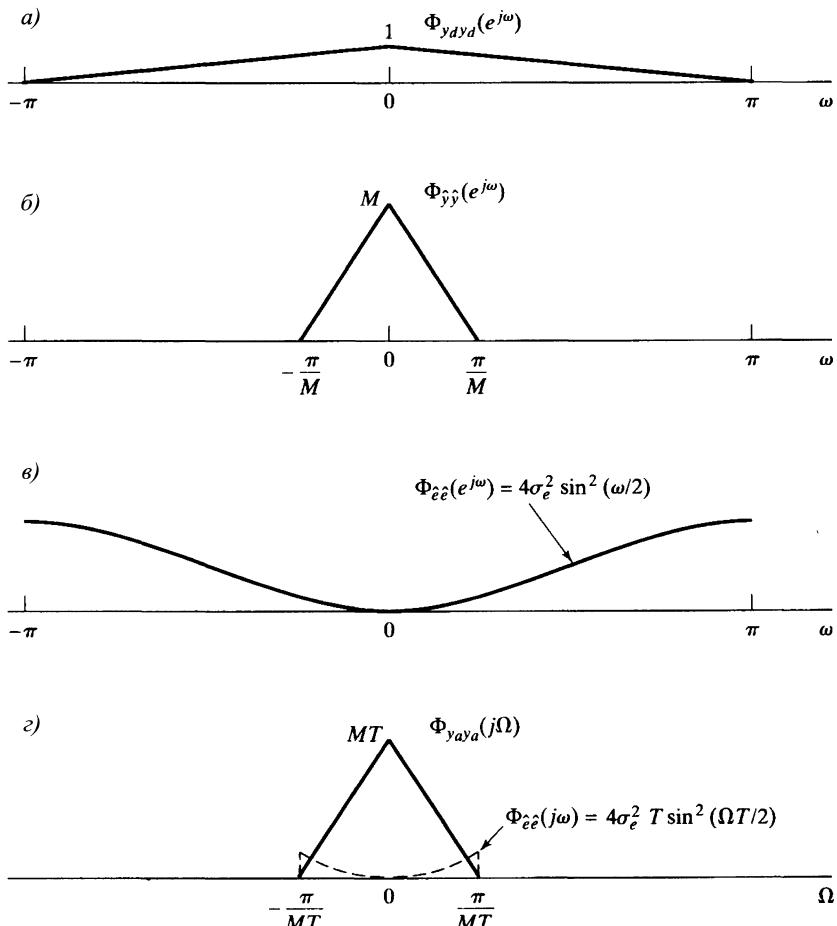


Рис. 4.70. Спектральная плотность мощности: а) сигнала $y_d[n]$; б) сигнала $\hat{y}[n]$; в) шума квантования; г) непрерывного сигнала и шума квантования

В практических системах нам хотелось бы исключить аналоговые восстанавливающие фильтры с крутым срезом. Из рис. 4.70, г) следует, что если допустить несколько более высокий шумовой фон, то необходимость в прямоугольности характеристики восстанавливающего фильтра в ДНП отпадает. Более того, при использовании техники многоступенчатого формирования шумов можно получить спектр шума на выходе вида

$$\Phi_{\hat{e} \hat{e}}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 \left(2 \sin \frac{\omega}{2}\right)^{2p},$$

что сдвинет большее количество шума к верхним частотам. В этом случае спецификации аналогового восстанавливающего фильтра можно было бы ослабить еще сильнее.

4.11. Краткое содержание главы

В этой главе исследовалась взаимосвязь между непрерывными сигналами и последовательностями, полученными в результате периодической дискретизации. Фундаментальный результат, позволяющий изображать непрерывный сигнал последовательностью отсчетов, называется теоремой Котельникова – Найквиста. Она утверждает, что периодическая дискретизация является достаточно хорошим представлением непрерывного узкополосного сигнала при условии, что частота дискретизации достаточно высока по сравнению с максимальной частотой непрерывного сигнала. При соблюдении этого условия непрерывный сигнал может быть восстановлен по его дискретизованной версии с помощью фильтра нижних частот, осуществляющего узкополосное интерполирование. При низкой частоте дискретизации относительно полосы сигнала происходит наложение спектров (возникают ложные частоты).

Дискретизация позволяет проводить дискретную обработку непрерывных сигналов, что достигается последовательным применением следующих операций: дискретизация, дискретная обработка и восстановление непрерывного сигнала по результатам обработки. В качестве примера было продемонстрировано фильтрование нижних частот и дифференцирование.

К особо важному классу обработки относятся процедуры изменения частоты дискретизации. Понижающая дискретизация дискретных сигналов соответствует в частотной области тиражированию дискретного спектра и масштабированию оси частот, что может потребовать дополнительного сужения полосы сигнала в целях предупреждения наложения спектров. Повышающая дискретизация позволяет эффективно увеличить частоту дискретизации и представляется в частотной области масштабированием частотной оси. Комбинируя повышающую и понижающую дискретизацию, можно менять частоту дискретизации в рациональное число раз. Было показано, как это можно сделать эффективно, если привлечь многоскоростную технику.

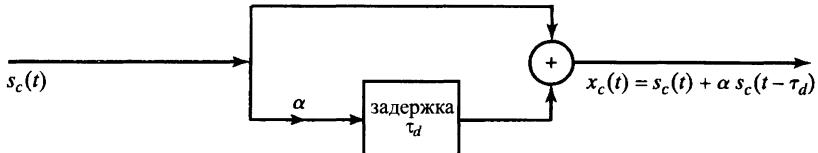
В последних разделах главы мы исследовали несколько практических приемов, связанных с дискретной обработкой непрерывных сигналов, включая предварительное фильтрование, предупреждающее наложение спектров, учет ошибок квантования в АЦП и некоторые методы, связанные с фильтрованием, используемым при дискретизации и восстановлении непрерывных сигналов. Наконец, было показано, как дискретное прореживание и формирование шумов можно использовать для упрощения аналоговой части в ЦАП и АЦП.

Задачи

Обязательные задачи с ответами

- 4.1. Сигнал $x_c(t) = \sin(2\pi \cdot 100t)$ дискретизируется с шагом $T = 1/400$ с. Что собой представляет дискретизованный сигнал $x[n]$?
- 4.2. Последовательность $x[n] = \cos(\pi n/4)$ ($-\infty < n < \infty$) получена в результате дискретизации непрерывного сигнала $x_c(t) = \cos \Omega_0 t$ ($-\infty < t < \infty$) с частотой 1000 отсч./с. Найдите два возможных положительных значения частоты Ω_0 , при которых такое возможно.
- 4.3. Непрерывный сигнал $x_c(t) = \cos 4000\pi t$ дискретизируется с шагом T , в результате чего получается последовательность $x[n] = \cos(\pi n/3)$.
- Определите значение T , согласованное с условием задачи.
 - Единственное ли такое T ? Если да, объясните свой ответ. В противном случае подберите другие подходящие значения.
- 4.4. Дискретизация непрерывного сигнала $x_c(t) = \sin 20\pi t + \cos 40\pi t$ с шагом T дает последовательность $x[n] = \sin(\pi n/5) + \cos(2\pi n/5)$.
- Определите значение T , согласованные с условием задачи.
 - Единственное ли такое T ? Если да, объясните свой ответ. В противном случае подберите другие подходящие значения.
- 4.5. Рассмотрите систему на рис. 4.11 с дискретной системой и фильтром нижних частот с частотой отсечки $\pi/8$ рад/с.
- Пусть сигнал $x_c(t)$ ограничен по частоте значением 5 кГц. Каково максимальное значение T , при котором не происходит наложения спектров при НДП?
 - Пусть $1/T = 10$ кГц. Какой должна быть частота отсечки эффективного непрерывного фильтра?
 - Ответьте на вопрос п. «б» при $1/T = 20$ кГц.
- 4.6. Пусть $h_c(t)$ — импульсная характеристика непрерывного ЛС-фильтра, а $h_d[n]$ — импульсная характеристика дискретного ЛС-фильтра.
- Определите КЧХ непрерывного фильтра и изобразите график его АЧХ, если
- $$h_c(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$
- где a — положительная вещественная константа.
- Определите КЧХ дискретного фильтра и изобразите график его АЧХ, если $h_d[n] = Th_c(nT)$, где $h_c(t)$ совпадает с характеристикой из п. «а».
 - При фиксированном значении a выразите минимальное значение АЧХ дискретного фильтра через T .
- 4.7. На рис. 4.71 изображена простая модель канала связи с многолучевым распространением. Предположим, что дан такой узкополосный сигнал $s_c(t)$, что $S_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq \pi/T$, а сигнал $x_c(t)$ после дискретизации с шагом T превращается в последовательность $x[n] = x_c(nT)$.

Рис. 4.71.



- a) Выразите Фурье-образ сигнала $x_c(t)$ последовательности $x[n]$ через $S_c(j\Omega)$.
- б) Нам хотелось бы воспроизвести многолучевую систему с помощью дискретной системы, правильно подобрав функцию $H(e^{j\omega})$ из рис. 4.72 так, чтобы реакцией системы на сигнал $s[n] = s_c(nT)$ была бы последовательность $r[n] = x_c(nT)$. Найдите $H(e^{j\omega})$ и запишите ее в терминах T и τ_d .
- в) Вычислите импульсную характеристику $h[n]$ системы из рис. 4.72, если (i) $\tau_d = T$ и (ii) $\tau_d = T/2$.

4.8. Относительно системы из рис. 4.73 известно, что

$$X_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq 2\pi \cdot 10^4, \quad x[n] = x_c(nT), \quad y[n] = T \sum_{k=-\infty}^n x[k].$$

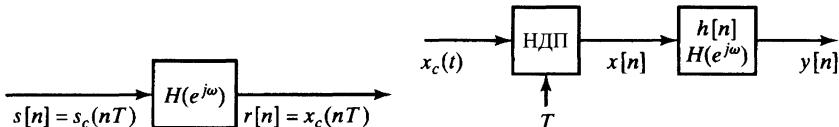


Рис. 4.72.

Рис. 4.73.

- а) Найдите максимально допустимое значение T , при котором в этой системе не происходит наложения спектров, т. е. при котором можно восстановить сигнал $x_c(t)$ по последовательности $x[n]$.
- б) Вычислите $h[n]$.
- в) Что можно сказать о значении $y[n]$ на бесконечности в терминах $X(e^{j\omega})$?
- г) Выясните, существует ли какое-нибудь значение T , при котором

$$y[n] \Big|_{n=\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) dt? \quad (4.177)$$

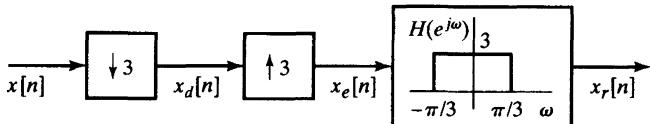
Если такие значения найдутся, определите максимально возможное из них; если нет, объясните причину и опишите способ подбора T , при котором получается наилучшее приближение к равенству (4.177).

4.9. Рассмотрите устойчивый дискретный сигнал $x[n]$, чей Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ удовлетворяет условию $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$. Дополнительно известно, что последовательность $x[n]$ четная, т. е. $x[n] = x[-n]$.

- а) Покажите, что функция $X(e^{j\omega})$ — π -периодична.
- б) Вычислите отсчет $x[3]$. (Указание: найдите значения всех нечетных отсчетов.)

- в) Пусть $y[n]$ — прореженная версия последовательности $x[n]$, т. е. $y[n] = x[2n]$. Можно ли восстановить $x[n]$ по $y[n]$ для всех n ? Покажите, как это сделать в случае положительного ответа, а в случае отрицательного объясните, почему нельзя.
- 4.10. На вход идеального НДП из рис. 4.1 с шагом дискретизации T подается сигнал $x_c(t)$. Найдите соответствующую реакцию $x[n]$, если
- $x_c(t) = \cos(2\pi(1000)t)$, $T = 1/3000$ с;
 - $x_c(t) = \sin(2\pi(1000)t)$, $T = 1/1500$ с;
 - $x_c(t) = \sin(2\pi(1000)t)/(\pi t)$, $T = 1/5000$ с.
- 4.11. Найдите шаг дискретизации T идеального НДП из рис. 4.1 для каждой из пар сигнал/отклик, приведенных ниже. В каждом случае укажите, единственным ли образом определяется значение T ; найдите другое значение, если нет.
- $x_c(t) = \sin 10\pi t$, $x[n] = \sin(\pi n/4)$;
 - $x_c(t) = \sin(10\pi t)/(10\pi t)$, $x[n] = \sin(\pi n/2)/(\pi n/2)$.
- 4.12. Предположим, характеристическая функция из рис. 4.11 равна $H(e^{j\omega}) = j\omega/T$, $-\pi \leq \omega < \pi$, а $T = 1/10$ с.
- Найдите реакцию $y_c(t)$ системы на сигналы: (i) $x_c = \cos 6\pi t$, (ii) $x_c(t) = -\cos 14\pi t$.
 - Можно ли утверждать, что сигналы $y_c(t)$ — отклики дифференциатора?
- 4.13. Пусть в системе из рис. 4.16 выполнено равенство $h_c(t) = \delta(t - T/2)$.
- Найдите реакцию системы $y[n]$, если $x[n] = \sin(\pi n/2)$ и $T = 10$.
 - Найдите реакцию системы $y[n]$, если $x[n] = \sin(\pi n/2)$ и $T = 5$.
 - Определите диапазон изменения шага дискретизации T ЛС-системы с импульсной характеристикой $h_c(t)$, при котором не меняется ее реакция $y[n]$ на один и тот же сигнал $x[n]$.
- 4.14. Какие из перечисленных ниже сигналов можно подвергнуть понижающей дискретизации с множителем 2 без потери информации с помощью системы из рис. 4.20:
- $x[n] = \delta[n - n_0]$, где n_0 — неизвестное целое число;
 - $x[n] = \cos(\pi n/4)$;
 - $x[n] = \cos(\pi n/4) + \cos(3\pi n/4)$;
 - $x[n] = \sin(\pi n/3)/(\pi n/3)$;
 - $x[n] = (-1)^n \sin(\pi n/3)/(\pi n/3)$?
- 4.15. Рассмотрите систему из рис. 4.74. Выясните, для каких из следующих входных сигналов $x[n]$ выполняется условие $x_r[n] = x[n]$:
- $x[n] = \cos(\pi n/4)$;
 - $x[n] = \cos(\pi n/2)$;
 - $x[n] = (\sin(\pi n/8)/(\pi n))^2$.
- Указание: воспользуйтесь свойствами преобразования Фурье для вычисления $X(e^{j\omega})$.
- 4.16. В пунктах задачи приведены конкретные пары сигнал/отклик системы из рис. 4.28. В каждом из случаев определите отношение M/L и выясните, однозначен ли ваш выбор.
- $x[n] = \sin(\pi n/3)/(\pi n/3)$, $\tilde{x}_d[n] = \sin(5\pi n/6)/(5\pi n/6)$;
 - $x[n] = \cos(3\pi n/4)$, $\tilde{x}_d[n] = \cos(\pi n/2)$.

Рис. 4.74.



- 4.17. Определите реакцию $\tilde{x}_d[n]$ системы из рис. 4.28 на сигнал $x[n]$, если
- $x[n] = \sin(2\pi n/3)/(\pi n)$, $L = 4$, $M = 3$;
 - $x[n] = \sin(3\pi n/4)$, $L = 3$, $M = 5$.
- 4.18. Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ сигнала $x[n]$, поданного на вход системы из рис. 4.28, показан на рис. 4.75. В каждом из случаев найдите максимально возможное значение ω_0 , при котором $\tilde{X}_d(e^{j\omega}) = aX(e^{jM\omega/L})$ для некоторой константы a :
- $M = 3$, $L = 2$;
 - $M = 5$, $L = 3$;
 - $M = 2$, $L = 3$.
- 4.19. Непрерывный сигнал $x_c(t)$ с Фурье-образом $X_c(j\Omega)$ из рис. 4.76 подается на вход системы из рис. 4.77. Определите диапазон изменения значений T , при которых $x_r(t) = x_c(t)$.

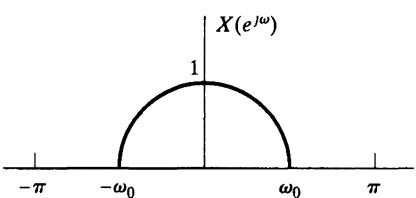


Рис. 4.75.

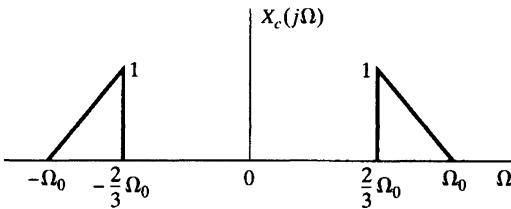


Рис. 4.76.

- 4.20. График Фурье-образа сигнала $x_c(t)$, поданного на вход системы из рис. 4.11, приведен на рис. 4.78. Известно, что $\Omega_0 = 2\pi(1000)$ рад/с, а дискретная система — идеальный фильтр низких частот с КЧХ

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- Определите минимальное значение частоты дискретизации $F_s = 1/T$, при котором в выходном сигнале нет ложных частот.
- Пусть $\omega_c = \pi/2$. Найдите минимальное значение частоты дискретизации, при котором $y_r(t) = x_c(t)$.

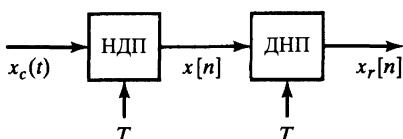


Рис. 4.77.

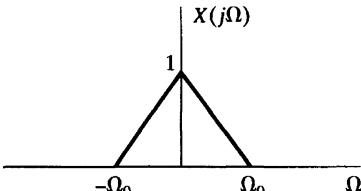


Рис. 4.78.

Обязательные задачи без ответов

- 4.21. Комплекснозначный непрерывный сигнал $x_c(t)$ имеет Фурье-образ, приведенное на рис. 4.79, причем $\Omega_2 - \Omega_1 = \Delta\Omega$. После его дискретизации получается последовательность $x[n] = x_c(nT)$.

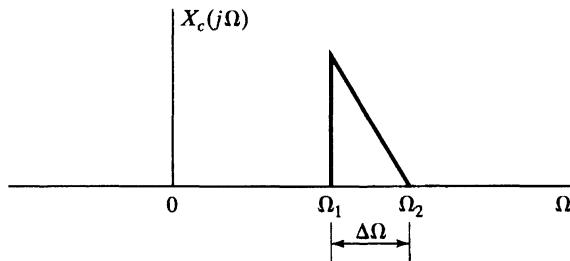


Рис. 4.79.

- a) Изобразите график Фурье-образа $X(e^{j\omega})$ последовательности $x[n]$, если $T = \pi/\Omega_2$.
- б) Найдите наименьшее значение частоты дискретизации, при котором ложные частоты не появляются, т. е. когда можно восстановить сигнал $x_c(t)$ по последовательности $x[n]$.
- в) Начертите блок-схему системы, с помощью которой можно восстановить $x_c(t)$ по $x[n]$, если частота дискретизации больше или равна частоте, найденной в предыдущем пункте. Можно воспользоваться (комплексными) идеальными фильтрами.
- 4.22. Непрерывный сигнал $x_c(t)$ с Фурье-образом $X_c(j\Omega)$ из рис. 4.80 подвергается дискретизации с шагом $T = 2\pi/\Omega_0$ и получается последовательность $x[n] = x_c(nT)$.
- а) Изобразите график Фурье-образа $X(e^{j\omega})$ на промежутке $|\omega| < \pi$.
- б) Последовательность $x[n]$ передается по цифровому каналу. Получатель должен восстановить исходный сигнал $x_c(t)$. Начертите блок-схему восстанавливющей системы и укажите ее характеристики, считая, что в вашем распоряжении находятся идеальные фильтры.
- в) Выразите через Ω_0 те значения T , при которых сигнал $x_c(t)$ можно восстановить по $x[n]$.
- 4.23. Сигнал из рис. 4.81 удовлетворяет условию $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq \pi/T_1$. Предположив, что $T_1 \neq T_2$, выразите $y_c(t)$ через $x_c(t)$. Отличаются ли друг от друга соотношения при $T_1 > T_2$ и $T_1 < T_2$?

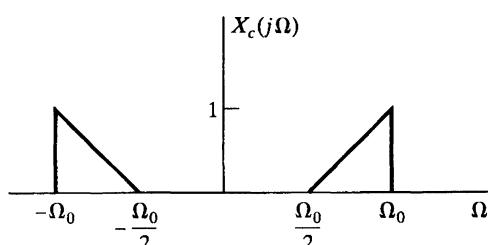


Рис. 4.80.

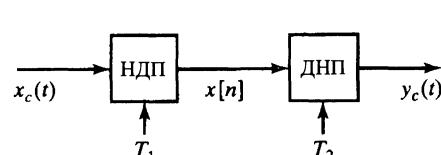


Рис. 4.81.

- 4.24. На рис. 4.82 приведена блок-схема системы и графики функций $X_c(j\Omega)$ и $H(e^{j\omega})$. Начертите графики Фурье-образа сигнала $y_c(t)$ для каждого из случаев:
- $1/T_1 = 1/T_2 = 10^4$;
 - $1/T_1 = 1/T_2 = 2 \cdot 10^4$;
 - $1/T_1 = 2 \cdot 10^4, 1/T_2 = 10^4$;
 - $1/T_1 = 10^4, 1/T_2 = 2 \cdot 10^4$.

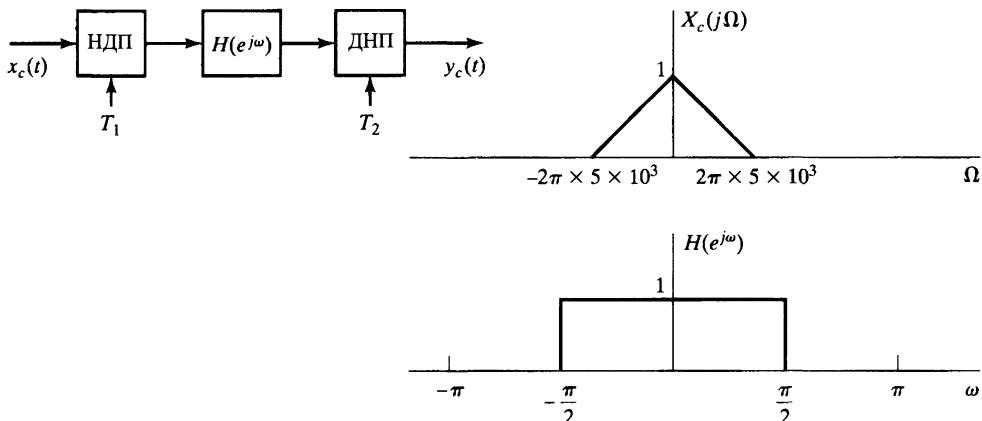


Рис. 4.82.

- 4.25. На рис. 4.83, а) показана система, фильтрующая непрерывный сигнал с помощью дискретного фильтра. Частотные характеристики восстановливающего фильтра ($H_r(j\Omega)$) и дискретного фильтра ($H(e^{j\omega})$) приведены на рис. 4.83, б).

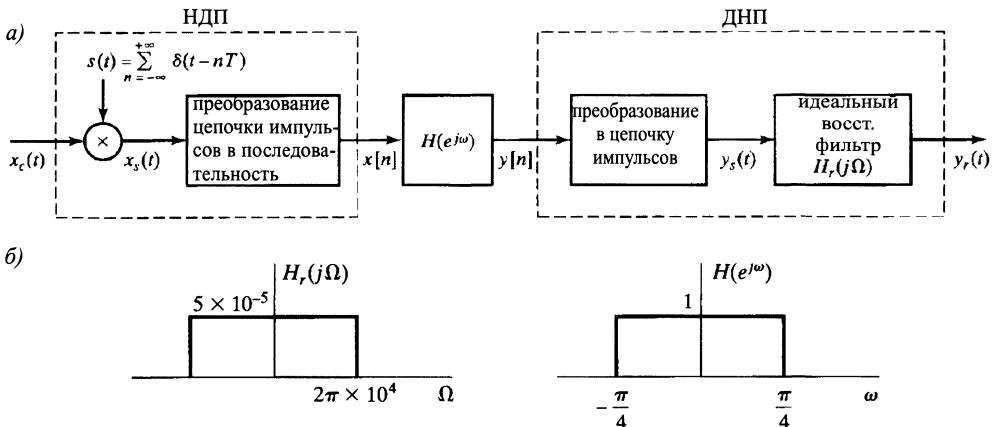


Рис. 4.83.

- а) Изобразите $X_s(j\Omega)$ и $X(e^{j\omega})$, если $X_c(j\Omega)$ имеет график, как на рис. 4.84, и $1/T = 20$ кГц. Известно, что вся система с входом $x_c(t)$ и выходом $y_c(t)$ эквивалентна непрерывному фильтру нижних частот с КЧХ $H_{eff}(j\Omega)$, показанной на рис. 4.85.

- б) Определите все значения T , при которых справедлива информация из предыдущего пункта, если $X_c(j\Omega)$ сосредоточено в полосе $|\Omega| \leq 2\pi \cdot 10^4$, как показано на рис. 4.84.

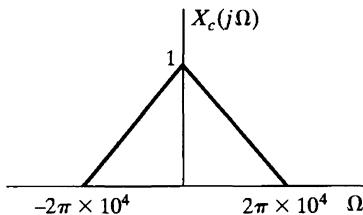


Рис. 4.84.

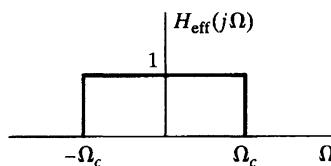


Рис. 4.85.

- в) Изобразите график зависимости Ω_c от $1/T$ для значений T , вычисленных в предыдущем пункте.

Замечание: это один из способов реализации непрерывного фильтра с переменной частотой отсечки, использующий фиксированные непрерывный и дискретный фильтры и изменяемую частоту дискретизации.

- 4.26. Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ последовательности $x[n]$ показан на рис. 4.86. Определим

$$x_s[n] = \begin{cases} x[n], & n = Mk, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

и $x_d[n] = x_s[Mn] = x[Mn]$.

- а) Начертите графики функций $X_s(e^{j\omega})$ и $X_d(e^{j\omega})$ для каждого из случаев:
 (i) $M = 3$, $\Omega_H = \pi/2$;
 (ii) $M = 3$, $\Omega_H = \pi/4$.
 б) При каком максимальном значении ω_H не происходит наложения спектров, если $M = 3$?

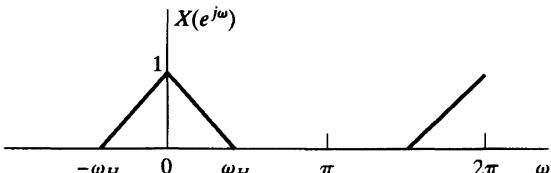


Рис. 4.86.

- 4.27. Используя теорему Парсеваля, кратко поясните, почему амплитуда преобразования Фурье меняется при понижающей, но постоянна при повышающей дискретизации.
- 4.28. а) Является ли система из рис. 4.11 линейной при данном выборе T ? Положительный ответ докажите, а отрицательный подкрепите контрпримером.
 б) Является ли система из рис. 4.11 стационарной при данном выборе T ? Положительный ответ докажите, а отрицательный подкрепите контрпримером.

Дополнительные задачи

- 4.29. Частотная характеристика $H_1(e^{j\omega})$ системы из рис. 4.87 фиксирована и известна. Найдите КЧХ $H_2(e^{j\omega})$ ЛС-системы, если $y_2[n] = y_1[n]$ при одном и том же входном сигнале.

- 4.30. Пусть дискретная система из рис. 4.11 линейна и стационарна, причем $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq 4000\pi$. Определите максимально возможное значение T и соответствующую КЧХ $H(e^{j\omega})$ дискретной системы, при которых

$$Y_c(j\Omega) = \begin{cases} |\Omega|X_c(j\Omega), & 1000\pi < |\Omega| < 2000\pi, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

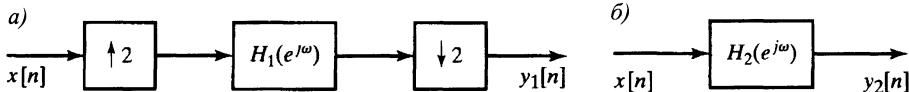


Рис. 4.87.

- 4.31. Пусть в системе из рис. 4.11 $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| > \pi/T$. Определите и изобразите на рисунке АЧХ и ФЧХ дискретной ЛС-системы, при которой имеет место соотношение:

$$y_r(t) = \int_{-\infty}^t x_c(\tau) d\tau.$$

- 4.32. Известно, что узкополосный непрерывный сигнал имеет компоненту частотой в 60 Гц, которую нам хотелось бы отфильтровать с помощью системы из рис. 4.11 с $T = 10^{-4}$.

- a) Какую наибольшую частоту может содержать непрерывный сигнал, если не происходит наложения спектров?
 б) Частотная характеристика используемой дискретной системы имеет вид:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{(1 - e^{-j(\omega - \omega_0)})(1 - e^{-j(\omega + \omega_0)})}{(1 - 0,9e^{-j(\omega - \omega_0)})(1 - 0,9e^{-j(\omega + \omega_0)})}.$$

Начертите графики модуля и фазы функции $H(e^{j\omega})$.

- в) Каким должно быть значение ω_0 , чтобы устраниТЬ 60-герцовую компоненту?

- 4.33. Рассмотрите систему рис. 4.11 с $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq 2\pi(1000)$, в которой дискретная система возводит в квадрат входной сигнал, т. е. $y[n] = x^2[n]$. Найдите максимальное значение T , при котором $y_c(t) = x_c^2(t)$.

- 4.34. КЧХ системы из рис. 4.88 равна $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/2}$ при $|\omega| \leq \pi$ (задержка на полотсчета).

- а) Подберите значения T и $h_c(t)$ системы из рис. 4.16, при которых она станет эквивалентной системе из рис. 4.88 при указанной выше КЧХ $H(e^{j\omega})$.
 б) Определите и изобразите на рисунке реакцию $y[n]$ на сигнал

$$x[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right),$$

приведенный на рис. 4.89.

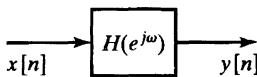


Рис. 4.88.

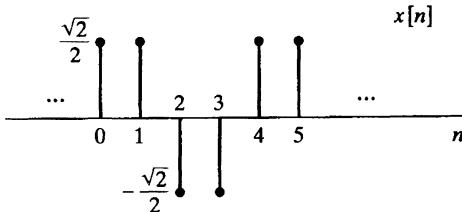


Рис. 4.89.

- 4.35. Предположим, что непрерывная ЛС-система из рис. 4.16 детерминирована и характеризуется линейным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2y_c(t)}{dt^2} + 4\frac{dy_c(t)}{dt} + 3y_c(t) = x_c(t).$$

Вся система эквивалентна детерминированной дискретной ЛС-системе. Определите КЧХ этой дискретной системы для случая $T = 0, 1$ с.

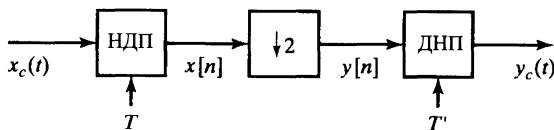


Рис. 4.90.

- 4.36. Известно, что сигналы из рис. 4.90 имеют вид $x[n] = x_c(nT)$ и $y[n] = x[2n]$.

- Предположим, что Фурье-образ сигнала $x_c(t)$ удовлетворяет условию $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| > 2\pi(100)$. Какое нужно взять значение T , чтобы $X(e^{j\omega}) = 0$, если $\frac{\pi}{2} < |\omega| \leq \pi$?
- Каким должно быть значение T' , чтобы $y_c(t) = x_c(t)$?

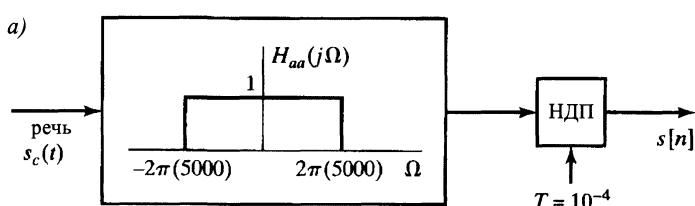
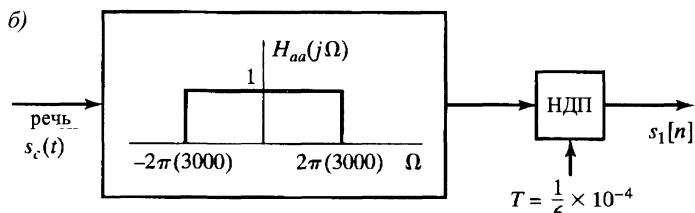


Рис. 4.91.



- 4.37. Предположим, что вы получили последовательность $s[n]$ в результате фильтрования речевого сигнала $s_c(t)$ непрерывным фильтром нижних частот с частотой отсечки 5 кГц и последующей дискретизацией с частотой 10 кГц, как показано на рис. 4.91, а). К сожалению, речевой сигнал $s_c(t)$ был утерян, но на

магнитной ленте сохранилась последовательность $s_1[n]$. Позже вы решили, что сигнал $s_c(t)$ вам следовало бы обработать системой из рис. 4.91, б). Разработайте метод вычисления последовательности $s_1[n]$ по отсчетам последовательности $s[n]$, используя дискретную обработку сигналов. Ваш метод может потребовать очень большого количества вычислений, но не должен обращаться ни к НДП, ни к ДНП. Если ваш метод включает дискретное фильтрование, укажите КЧХ фильтра.

- 4.38. Рассмотрите систему из рис. 4.92, в которой

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/L, \\ 0, & \pi/L < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Изобразите $Y_c(j\Omega)$, если $X_c(j\Omega)$ имеет вид, как на рис. 4.93.

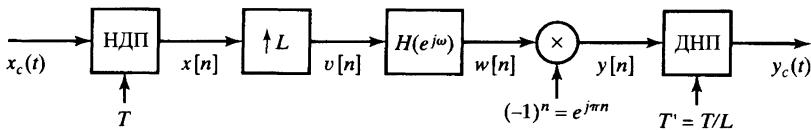


Рис. 4.92.

- 4.39. Система из рис. 4.94 приближенно интерполирует последовательность $x[n]$ с множителем L . Предположим, что импульсная характеристика линейного фильтра четна ($h[n] = h[-n]$) и $h[n] = 0$ при $|n| > (RL - 1)$, где R и L — целые числа; т. е. импульсная характеристика симметрична и имеет $(2RL - 1)$ ненулевых отсчетов.

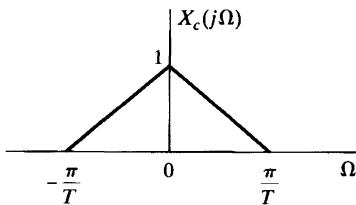


Рис. 4.93.

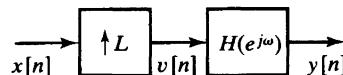


Рис. 4.94.

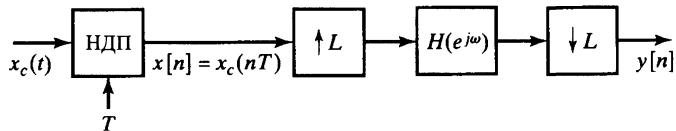
- Эту систему можно сделать детерминированной, включив в нее некоторую задержку. Насколько большой должна быть эта задержка?
- Какие условия нужно наложить на $h[n]$, чтобы $y[n] = x[\frac{n}{L}]$ при $\frac{n}{L} \in \mathbb{Z}$?
- Опираясь на симметричность импульсной характеристики, покажите, что каждый отсчет $y[n]$ можно вычислить не более чем за RL умножений.
- Учитывая, что умножение на 0 можно не делать, покажите, что для вычисления отдельного отсчета достаточно $2R$ умножений.

- 4.40. Пусть в системе рис. 4.95 выполнены условия:

$$X_c(j\Omega) = 0 \text{ при } |\Omega| \geq \pi/T \quad \text{и} \quad H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega}, & |\omega| < \pi/L, \\ 0, & \pi/L < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Как связан выходной сигнал $y[n]$ с входным $x_c(t)$?

Рис. 4.95.



- 4.41. Рассмотрите систему из рис. 4.96, а). На ее вход подается узкополосный сигнал, чье преобразование Фурье показано на рис. 4.78 с $\Omega_0 = \pi/T$. Частотная характеристика дискретной ЛС-системы изображена на рис. 4.96, б).

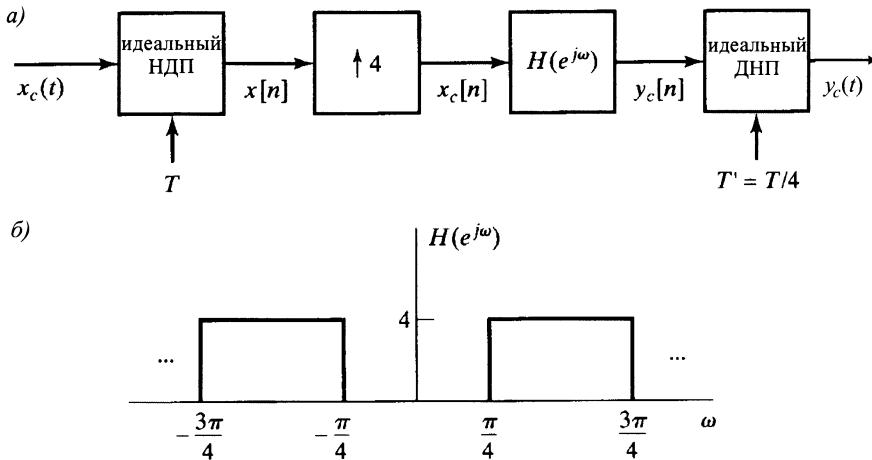


Рис. 4.96.

- а) Изобразите графики Фурье-образов: $X(e^{j\omega})$, $X_c(e^{j\omega})$, $Y_c(e^{j\omega})$ и $Y_c(j\Omega)$.
- б) Выразите $Y_c(j\Omega)$ через $X_c(j\Omega)$ в общем случае: $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq \pi/T$. Кроме того, выпишите $y_c(t)$ через $x_c(t)$ при условии узкополосности сигнала $x_c(t)$.
- 4.42. Пусть $x_c(t)$ — вещественноненулевой непрерывный сигнал с наивысшей частотой $2\pi(250)$ рад/с, а $y_c(t) = x_c(t - 1/1000)$.
- Возможно ли с теоретической точки зрения восстановить $x_c(t)$ по $x[n] = x_c(n/500)$? Поясните свой ответ.
 - Возможно ли с теоретической точки зрения восстановить $y_c(t)$ по $y[n] = y_c(n/500)$? Поясните свой ответ.
 - Возможно ли получить $y[n]$ из $x[n]$ с помощью системы из рис. 4.97? Если да, найдите $H_1(e^{j\omega})$.
 - Возможно ли получить $y[n]$ из $x[n]$, не прибегая к повышающей и понижающей дискретизациям, а только с помощью одной ЛС-системы с КЧХ $H_2(e^{j\omega})$? Найдите $H_2(e^{j\omega})$.

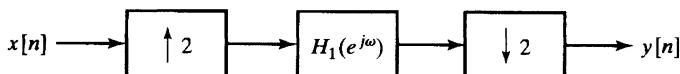


Рис. 4.97.

- 4.43. Рассмотрите систему, изображенную на рис. 4.98, а), используемую для дискретной обработки непрерывного сигнала $g_c(t)$. Известно, что входной сигнал представим в виде $g_c(t) = f_c(t) + e_c(t)$, где Фурье-образы слагаемых представлены на рис. 4.98, б). Поскольку входной сигнал не относится к узкополосным, используется непрерывный фильтр защиты от наложения спектров с характеристикой $H_{aa}(j\Omega)$. График модуля функции $H_{aa}(j\Omega)$ показан на рис. 4.98, в), а ее фаза равна $\angle H_{aa}(j\Omega) = -\Omega^3$.

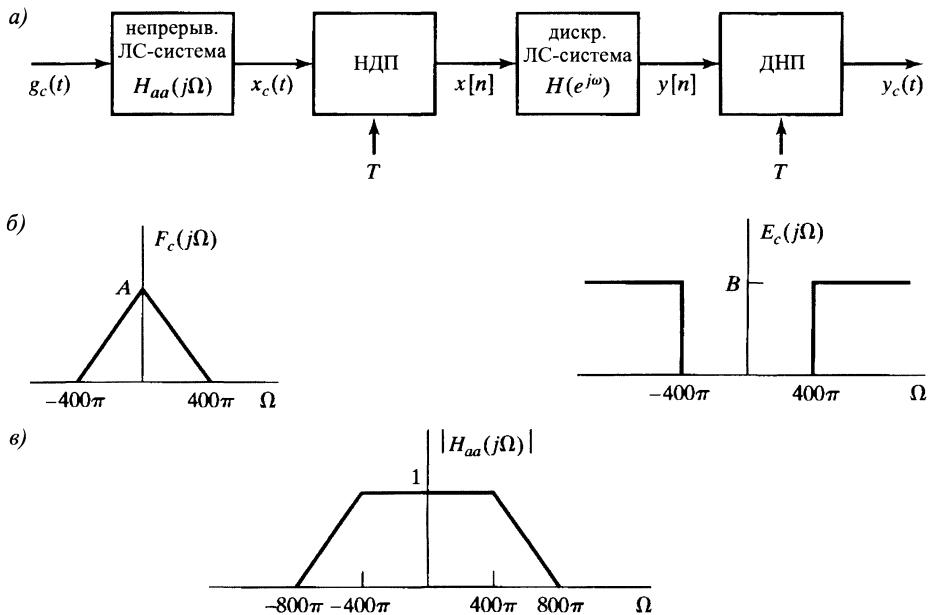
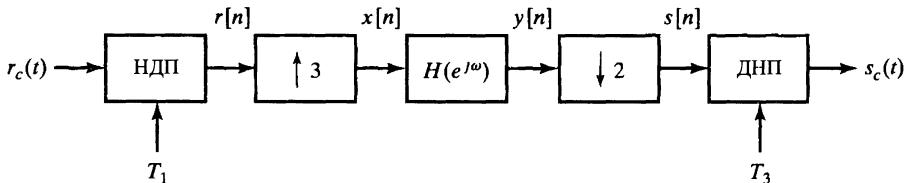


Рис. 4.98.

- а) В предположении о том, что частота дискретизации удовлетворяет соотношению $2\pi/T = 1600\pi$, определите модуль и фазу функции $H(e^{j\omega})$, КЧХ дискретной системы, при которой $y_c(t) = f_c(t)$.
- б) Возможно ли равенство $y_c(t) = f_c(t)$, если $2\pi/T < 1600\pi$? Если да, найдите минимальное значение $2\pi/T$. Выпишите $H(e^{j\omega})$ для минимального отношения $2\pi/T$.
- 4.44. Рассмотрите систему, приведенную на рис. 4.99. Можно предполагать, как отражено на рис. 4.100, что $R_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq 2\pi(1000)$.
- а) Изобразите $R(e^{j\omega})$ и $X(e^{j\omega})$.
- б) Подберите ненулевые значения ω_0 и T_2 так, чтобы $y[n] = \alpha r_c(nT_2)$ для некоторой ненулевой константы α . (Определять конкретное значение α не обязательно.)
- в) Учитывая найденное значение ω_0 , подберите T_3 так, чтобы $s_c(t) = \beta r_c(t)$ для некоторой ненулевой константы β . (Конкретное значение β определять не нужно.)



$$T_1 = \frac{1}{2000} \text{ с}, \quad H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| \leq \omega_0, \\ 0, & \omega_0 < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Рис. 4.99

- 4.45. Предположим, что непрерывный сигнал $x_c(t)$ из рис. 4.101 строго узкополосный и строго ограничен по времени, т. е.

$$x_c(t) = 0 \text{ при } t < 0 \text{ и } t > 10 \text{ с} \quad \text{и} \quad X_c(j\Omega) = 0 \text{ при } |\Omega| \geq 2\pi \cdot 10^4.$$

Несмотря на то что никакой непрерывный сигнал не может быть строго узкополосным и строго ограничен по времени, предположение о выполнении обоих условий часто оказывается превосходной приближенной моделью, на что обычно надеются при дискретной обработке непрерывных сигналов. Непрерывный сигнал $x_c(t)$ дискретизируется, как показано на рис. 4.101, в результате чего получается последовательность $x[n]$, которую мы хотим подвергнуть обработке для вычисления площади A под графиком $x_c(t)$ как можно более точно.

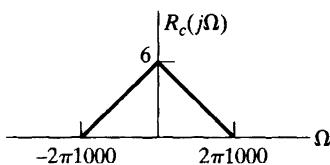


Рис. 4.100.



Рис. 4.101.

Пусть $A = \int_0^{10} x_c(t) dt$. Подберите импульсную характеристику $h[n]$ дискретной системы и максимально возможное значение T , при которых получается наиболее точная оценка A . Укажите, насколько точна ваша оценка.

- 4.46. Рассмотрите систему из рис. 4.102, где $H_0(z)$, $H_1(z)$ и $H_2(z)$ — характеристические функции ЛС-систем. Предположите, что $x[n]$ — произвольный устойчивый комплексный сигнал без каких-либо свойств симметрии.

- а) Пусть $H_0(z) = 1$, $H_1(z) = z^{-1}$ и $H_2(z) = z^{-2}$. Можете ли вы восстановить сигнал $x[n]$ по $y_0[n]$, $y_1[n]$ и $y_2[n]$? Если да, то как? Если нет, объясните свой ответ.
- б) Пусть

$$H_0(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/3, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \pi/3 < |\omega| \leq 2\pi/3, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 2\pi/3 < |\omega| \leq \pi, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Можете ли вы восстановить $x[n]$ по $y_0[n]$, $y_1[n]$ и $y_2[n]$? Если да, то как? Если нет, объясните свой ответ.

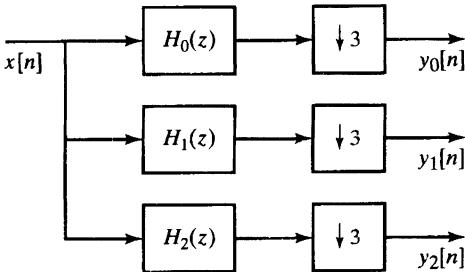


Рис. 4.102.

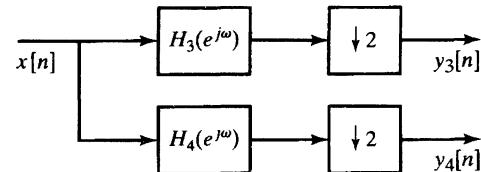


Рис. 4.103.

Теперь рассмотрите систему из рис. 4.103. Пусть $H_3(e^{j\omega})$ и $H_4(e^{j\omega})$ — КЧХ ЛС-систем из рисунка. Вновь предположите, что $x[n]$ — произвольный устойчивый комплексный сигнал без свойств симметрии.

в) Пусть

$$H_3(e^{j\omega}) = 1 \quad \text{и} \quad H_4(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega < \pi, \\ -1, & -\pi \leq \omega < 0. \end{cases}$$

Можно ли восстановить $x[n]$ по $y_3[n]$ и $y_4[n]$? Если да, то как? Если нет, объясните свой ответ.

Задачи повышенной сложности

- 4.47. Во многих приложениях дискретные случайные сигналы появляются как периодическая дискретизация непрерывных случайных сигналов. В этой задаче мы рассматриваем следствие теоремы о дискретизации для случайных сигналов. Рассмотрим непрерывный стационарный случайный процесс, определенный случайными величинами $\{x_a(t)\}$, где t — непрерывная переменная. Автокорреляционная функция имеет вид:

$$\varphi_{x_c x_c}(\tau) = \mathcal{E}\{x(t)x^*(t + \tau)\},$$

а спектральная плотность мощности:

$$P_{x_c x_c}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{x_c x_c}(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau.$$

Дискретный случайный процесс, получающийся в результате периодической дискретизации, определяется множеством случайных величин $\{x[n]\}$, где $x[n] = x_a(nT)$, а T — шаг дискретизации.

- а) Как соотносятся функции $\varphi_{xx}[n]$ и $\varphi_{x_c x_c}(\tau)$?
- б) Выразите спектральную плотность мощности дискретного процесса через спектральную плотность мощности непрерывного.

- в) При каких условиях дискретная спектральная плотность мощности является вполне строгим представлением непрерывной?
- 4.48. Рассмотрите непрерывный случайный процесс $x_c(t)$ с узкополосной спектральной плотностью мощности $P_{x_c x_c}(\Omega)$, изображенной на рис. 4.104. Предположите, что вы получаете дискретный случайный процесс $x[n] = x_c(nT)$ в результате дискретизации.
- Какова автокорреляционная последовательность дискретного случайного процесса?
 - Как следует выбрать T , чтобы дискретный случайный процесс, полученный в результате дискретизации процесса со спектральной плотностью мощности из рис. 4.104, был бы белым, т. е. его спектр мощности был бы постоянен при всех ω ?
 - Пусть непрерывная спектральная плотность мощности имеет вид, как на рис. 4.105. Как нужно выбрать T , чтобы дискретный процесс был белым?

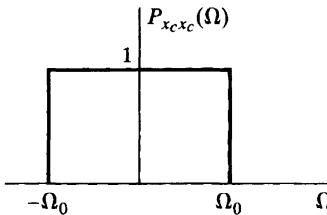


Рис. 4.104.

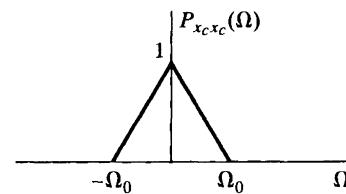


Рис. 4.105.

- г) При каких наиболее общих предположениях о непрерывном процессе и шаге дискретизации соответствующий дискретный процесс будет белым?
- 4.49. В этой задаче рассматривается эффект смены порядка двух операций над сигналом, а именно дискретизации и нелинейной операции без запоминания.
- Рассмотрим две системы обработки сигналов из рис. 4.106, а), где НДП и ДНП предполагаются идеальными. Отображение $g[x] = x^2$ представляет нелинейное устройство без запоминания. Изобразите спектры сигналов из систем рисунка в точках 1, 2 и 3, если частота дискретизации выбрана как $1/T = 2f_m$ Гц, а Фурье-образ сигнала $x_c(t)$ показан на рис. 4.106, б). Выполнено ли равенство $y_1(t) = y_2(t)$? Если нет, то почему? Верно ли, что $y_1(t) = x^2(t)$? Объясните свой ответ.
 - Пусть сигнал $x_c(t)$ в системе 1 описывается формулой $x_c(t) = A \cos 30\pi t$, а частота дискретизации $1/T = 40$ Гц. Верно ли, что $y_1(t) = x_c^2(t)$? Ответ обоснуйте.
 - Рассмотрите систему из рис. 4.107, где $g(x) = x^3$, а $g^{-1}[v]$ — (единственная) обратная операция, т. е. $g^{-1}[g(x)] = x$. Пусть $x_c(t) = A \cos 30\pi t$ и $1/T = 40$ Гц. Выразите $v[n]$ через $x[n]$. Возникает ли здесь наложение спектров? Запишите $y[n]$ в терминах $x[n]$. Какие выводы можно сделать из этого примера? Следующее тождество может оказаться полезным:

$$\cos^3 \Omega_0 t = \frac{3}{4} \cos \Omega_0 t + \frac{1}{4} \cos 3\Omega_0 t.$$

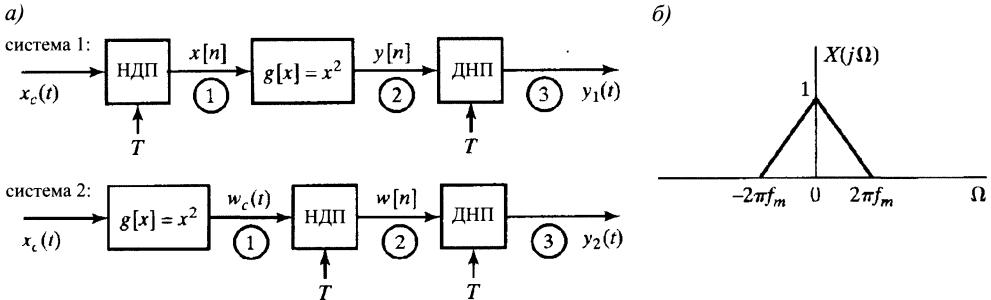
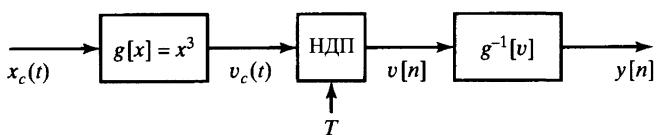


Рис. 4.106.

- г) К одной из практических проблем относится тот факт, что преобразование сигнала в цифровую форму имеет большой динамический диапазон. Предположим, что мы сжимаем динамический диапазон, пропуская сигнал через нелинейное устройство без запоминания перед АЦП, а затем вновь расширяем его, но уже после АЦП. Как повлияет нелинейная операция, предшествующая АЦП, на выбор частоты дискретизации?

Рис. 4.107.



- 4.50. На рис. 4.24 изображена система, интерполирующая сигнал с множителем L , где

$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

а фильтр нижних частот интерполирует ненулевые значения последовательности $x_e[n]$, генерируя сигнал $x_i[n]$. Если фильтр идеален, то такую интерполяцию называют *узкополосной интерполяцией*. Как отмечалось в подразделе 4.7.2, процедура интерполяции отсчетов является полезной во многих приложениях. Две из простых процедур основаны на использовании системы запоминания нулевого порядка и линейной интерполяции. Для интерполирования с системой запоминания нулевого порядка каждый отсчет $x[n]$ просто повторяется L раз, т. е.

$$x_i[n] = \begin{cases} x_e[0], & n = 0, 1, \dots, L-1, \\ x_e[L], & n = L, L+1, \dots, 2L-1, \\ x_e[2L], & n = 2L, 2L+1, \dots, 3L-1, \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Линейная интерполяция была описана в подразделе 4.7.2.

- а) Подберите подходящую импульсную характеристику фильтра нижних частот из рис. 4.24 для реализации интерполяции с запоминанием нулевого порядка. Вычислите и КЧХ фильтра.

б) Формула (4.96) (с. 187) описывает импульсную характеристику линейного интерполятора. Вычислите соответствующую КЧХ. (Может оказаться полезным тот факт, что $h_{\text{lin}}[n]$ имеет треугольный вид и, следовательно, соответствует свертке двух последовательностей прямоугольной формы.)

в) Изобразите графики АЧХ фильтров в линейной интерполяции и интерполяции с запоминанием нулевого порядка. Что служит более хорошим приближением к идеальной узкополосной интерполяции?

- 4.51. Нам нужно вычислить автокорреляционную функцию сигнала, подвергнутого повышающей дискретизации (рис. 4.108, а)). Утверждается, что это возможно сделать с помощью системы из рис. 4.108, б). Можно ли выбрать $H_2(e^{j\omega})$ таким образом, что $\varphi_3[n] = \varphi_1[n]$? Если нет, то почему; если да, то укажите $H_2(e^{j\omega})$.

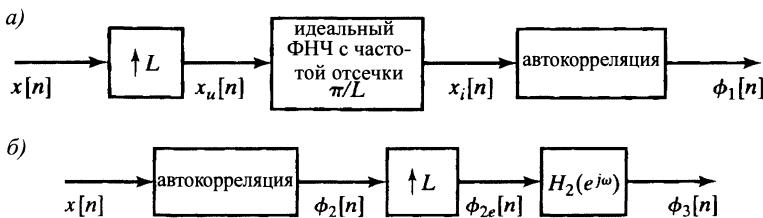


Рис. 4.108.

- 4.52. Нас интересует повышающая дискретизация с множителем 2, осуществляющаяся системой из рис. 4.24. Однако фильтр нижних частот на этом рисунке аппроксимируется пятиточечным фильтром с импульсной характеристикой $h[n]$, изображенной на рис. 4.109, а). В этой системе выходной сигнал $y_1[n]$ получается в результате прямой свертки последовательностей $h[n]$ и $w[n]$.

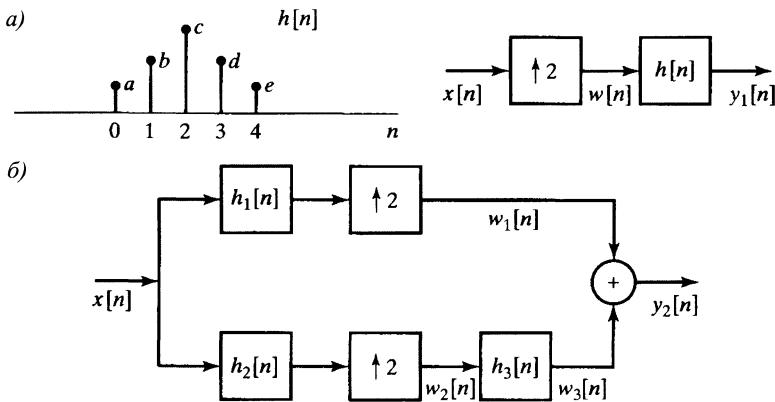


Рис. 4.109.

- а) Реализация системы с выбранной выше характеристикой $h[n]$ представлена на рис. 4.109, б). Отсчеты всех импульсных характеристик $h_1[n]$, $h_2[n]$ и $h_3[n]$ равны нулю вне промежутка $0 \leq n \leq 2$. Подберите (и обоснуйте свой выбор)

характеристики $h_1[n]$, $h_2[n]$ и $h_3[n]$ так, чтобы $y_1[n] = y_2[n]$ для любого входного сигнала $x[n]$, т. е. так, чтобы эти системы оказались эквивалентными.

- б) Определите число умножений, приходящихся на один отсчет выходного сигнала, в системах из рис. 4.109, а) и б). Из вашей оценки должно следовать, что система из рис. 4.109, б) более эффективна.

- 4.53. Рассмотрите систему анализа-синтеза из рис. 4.110, а). В качестве импульсной характеристики фильтров нижних частот в анализаторе и синтезаторе выбрана одна последовательность $h_0[n]$, а $h_1[n]$ — импульсная характеристика фильтра верхних частот в этих устройствах. Фурье-образы последовательностей $h_0[n]$ и $h_1[n]$ связаны соотношением:

$$H_1(e^{j\omega}) = H_0(e^{j(\omega+\pi)}).$$

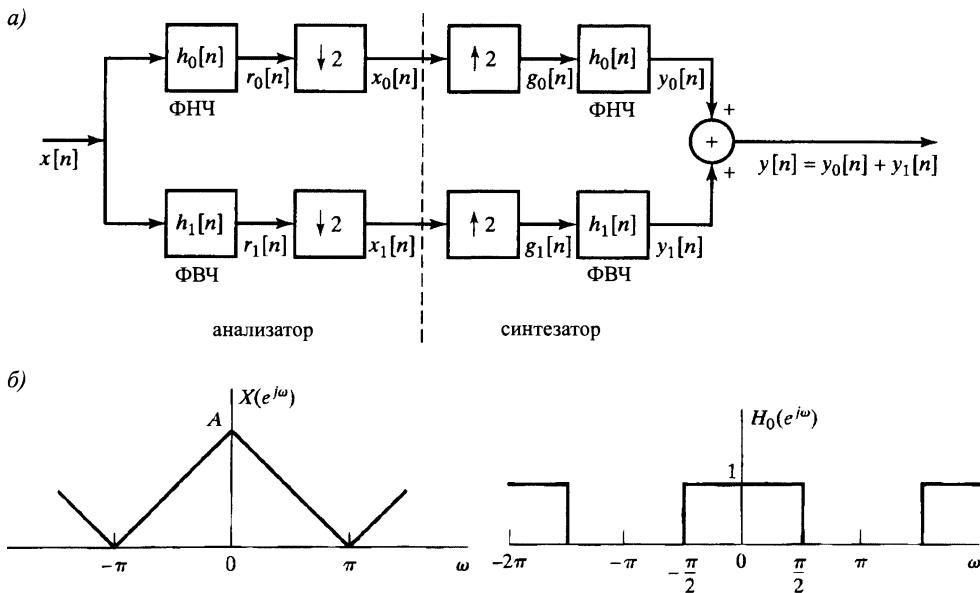


Рис. 4.110.

- а) Пусть $X(e^{j\omega})$ и $H_0(e^{j\omega})$ имеют вид, как на рис. 4.110, б). Изобразите (с точностью до скалярного множителя) графики функций $X_0(e^{j\omega})$, $G_0(e^{j\omega})$ и $Y_0(e^{j\omega})$.
- б) Выпишите общую формулу для $G_0(e^{j\omega})$ в терминах $X(e^{j\omega})$ и $H_0(e^{j\omega})$. Не следует думать, что $X(e^{j\omega})$ и $H_0(e^{j\omega})$ — конкретные указанные функции.
- в) Найдите множество наиболее общих условий на $H_0(e^{j\omega})$, при которых $y[n]$ пропорционален сигналу $x[n - n_d]$ при любом устойчивом входном сигнале $x[n]$.
- Замечание:* фильтр анализа-синтеза, о котором идет речь в этой задаче, очень похож на квадратурный зеркальный фильтр. (см. [32], с. 378–392).

- 4.54. Рассмотрите вещественноизначную последовательность $x[n]$, для которой $X(e^{j\omega}) = 0$ при $\pi/3 \leq |\omega| \leq \pi$. Одно из значений $x[n]$ может быть искажено, и нам нужно

(точно или приближенно) восстановить его. Искаженный сигнал обозначим через $\hat{x}[n]$:

$$\hat{x}[n] = x[n] \quad \text{при } n \neq n_0.$$

Предположим, что вещественное число $\hat{x}[n_0]$ никак не связано с $x[n_0]$. В каждом из следующих случаев укажите алгоритм точного или приближенного восстановления сигнала $x[n]$ поискаженной версии $\hat{x}[n]$:

- a) значение n_0 известно;
- б) точное значение n_0 неизвестно, но мы знаем, что оно четное;
- в) значение n_0 ничего неизвестно.

- 4.55. В системах коммуникаций необходимо преобразование мультиплексирования с разделением времени (МРВ) в мультиплексирование с разделением частоты (МРЧ). В этой задаче исследуется простой пример такой системы. Блок-схема изучаемой системы представлена на рис. 4.111. Предполагается, что на вход МРВ подается последовательность перемежающихся отсчетов

$$w[n] = \begin{cases} x_1[n/2], & n \text{ — четное,} \\ x_2[(n-1)/2], & n \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Пусть последовательности $x_1[n] = x_{c1}(nT)$ и $x_2[n] = x_{c2}(nT)$ получены в результате дискретизации непрерывных сигналов $x_{c1}(t)$ и $x_{c2}(t)$ без наложения спектров. Предположим также, что указанные сигналы имеют одну и ту же максимальную частотную компоненту Ω_N , а шаг дискретизации равен $T = \pi/\Omega_N$.

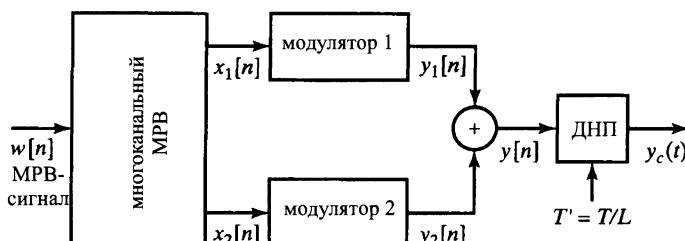


Рис. 4.111.

- а) Начертите блок-схему системы, генерирующей сигналы $x_1[n]$ и $x_2[n]$, т. е. системы, демультиплексирующей МРВ-сигнал с помощью простых операций. Выясните, является ли ваша система линейной, стационарной, детерминированной или устойчивой.

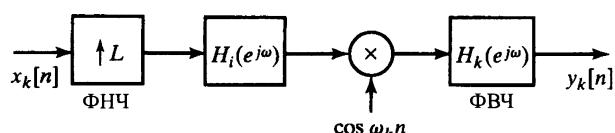


Рис. 4.112.

Блок-схема из рис. 4.112 определяет k -й модулятор ($k = 1$ или 2). В обоих каналах стоит один и тот же фильтр нижних частот с характеристикой $H_i(e^{j\omega})$, коэффициентом усиления L и частотой отсечки π/L , а фильтр верхних частот с характеристикой $H_k(e^{j\omega})$ обладает единичным коэффициентом усиления и частотой отсечки ω_k . Частоты модуляторов удовлетворяют соотношениям:

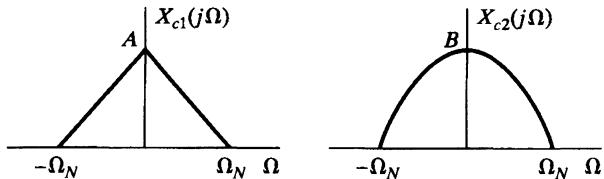
$$\omega_2 = \omega_1 + \pi/L \quad \text{и} \quad \omega_2 + \pi/L \leq \pi \quad (\text{предполагается, что } \omega_1 > \pi/2).$$

- 6) Пусть $\Omega_N = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^3$. Найдите ω_1 и ω_2 , при которых после ДНП с шагом дискретизации T/L Фурье-образ сигналов $y_c(t)$ будет нулевым вне полосы частот

$$2\pi \cdot 10^5 \leq |\omega| \leq 2\pi \cdot 10^5 + 2\Omega_N.$$

- в) Пусть Фурье-образы двух входных сигналов выглядят так, как на рис. 4.113. Изобразите Фурье-образы всех сигналов, появляющихся в системе.

Рис. 4.113.



- 4.56. В подразделе 4.9.1 мы рассмотрели предварительное фильтрование, предупреждающее наложение спектров. Идеальный фильтр защиты от наложения спектров на практике реализовать невозможно. Однако неидеальные характеристики хотя бы частично можно компенсировать применением дискретных систем к последовательности $x[n]$, выходной из НДП.

Рассмотрите две системы из рис. 4.114, а). Частотные характеристики фильтров защиты от наложения спектров $H_{\text{ideal}}(j\Omega)$ и $H_{\text{aa}}(j\Omega)$ изображены на рис. 4.114, б). Вам следует выбрать характеристику $H(e^{j\omega})$ на рис. 4.114, а) так, чтобы она компенсировала неидеальную характеристику $H_{\text{aa}}(j\Omega)$.

Начертите график функции $H(e^{j\omega})$, при которой последовательности $x[n]$ и $w[n]$ совпадают.

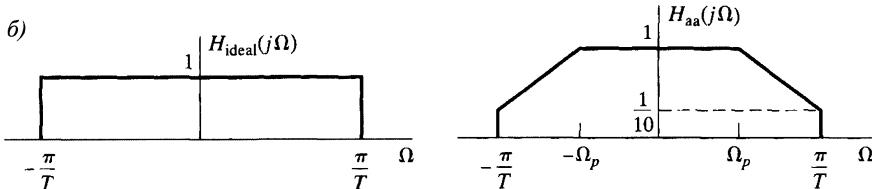
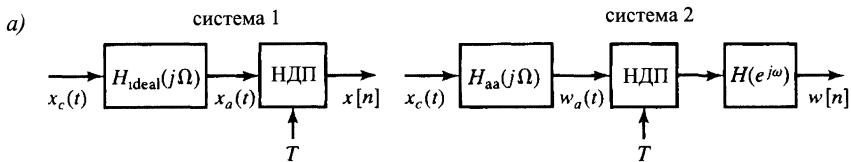


Рис. 4.114.

- 4.57. Как рассказывалось в подразделе 4.9.2, для обработки последовательности на компьютере нам необходимо проквантовать амплитуду ее отсчетов. Квантование можно выразить в терминах применения к последовательности $x[n]$ квантователя $Q(x)$ с соотношением сигнал-отклик из рис. 4.48.

В подразделе 4.9.3 мы выяснили, что если шаг квантования Δ мал по сравнению с изменением уровня входной последовательности, то можно предполагать, что выход квантователя имеет вид $y[n] = x[n] + e[n]$, где $e[n] = Q(x[n]) - x[n]$ — стационарный случайный процесс с равномерно распределенной вероятностью в интервале $(-\Delta/2, \Delta/2)$. Его отсчеты не коррелируют между собой и с отсчетами последовательности $x[n]$, так что $E\{e[n]x[m]\} = 0$ для всех m и n .

Пусть $x[n]$ — стационарный белый шум с нулевым средним значением и дисперсией σ_x^2 .

- Найдите среднее значение, дисперсию и автокорреляционную последовательность процесса $e[n]$.
- Чему равно отношение С/Ш σ_x^2/σ_e^2 ?
- Квантованный сигнал $y[n]$ фильтруется цифровым фильтром с импульсной характеристикой $h[n] = \frac{1}{2}(a^n + (-a)^n)u[n]$. Определите дисперсию шума, появляющегося на выходе из-за шума квантования, и отношение С/Ш для выходного сигнала.

В некоторых случаях нам может потребоваться нелинейный шаг квантования, например логарифмический, что можно обеспечить равномерным квантованием логарифма входного сигнала (см. рис. 4.115, где $Q[\cdot]$ — равномерный квантователь, указанный на рис. 4.48). В этой ситуации в предположении о малости Δ по сравнению с колебаниями последовательности $\ln(x[n])$ можно считать, что выход квантователя имеет вид

$$\ln(y[n]) = \ln(x[n]) + e[n],$$

откуда

$$y[n] = x[n] \cdot \exp(e[n]).$$

При малых значениях $e[n]$ экспонента $\exp(e[n])$ аппроксимируется функцией $e[n] + 1$. Поэтому

$$y[n] \approx x[n](1 + e[n]) = x[n] + f[n]. \quad (4.178)$$

Эта формула будет использоваться для описания эффектов логарифмического квантования. Будем предполагать, что $e[n]$ — стационарный случайный процесс с некоррелированными отсчетами и не зависящий от сигнала $x[n]$, равномерно распределенный на отрезке $[-\Delta/2, \Delta/2]$.

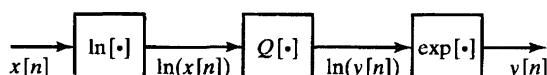


Рис. 4.115.

- Вычислите среднее значение, дисперсию и автокорреляционную последовательность *аддитивного* шума $f[n]$, определенного в формуле (4.178).
- Что можно сказать об отношении С/Ш σ_x^2/σ_f^2 ? Заметим, что в этом случае число σ_x^2/σ_f^2 не зависит от σ_x^2 . Таким образом, ввиду наших предположений отношение С/Ш не зависит от уровня сигнала на входе, тогда как при линейном квантовании отношение σ_x^2/σ_e^2 непосредственно зависит от σ_x^2 .
- Квантованный сигнал $y[n]$ будет фильтроваться с помощью цифрового фильтра с импульсной характеристикой $h[n] = \frac{1}{2}(a^n + (-a)^n)u[n]$. Определите дисперсию шума на выходе фильтра, возникающего из-за шума квантования на его входе, и вычислите отношение С/Ш на выходе фильтра.

- 4.58. На рис. 4.116 изображена система, в которой сначала перемножаются два непрерывных сигнала, а их произведение подвергается дискретизации с частотой Найквиста, т. е. $y_1[n] = y_c(nT)$, полученная с частотой Найквиста. Полоса частот сигнала $x_1(t)$ ограничена 25 кГц ($X_1(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq 5\pi \cdot 10^4$), а сигнала $x_2(t)$ — 2,5 кГц ($X_2(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq \frac{1}{2}\pi \cdot 10^4$).

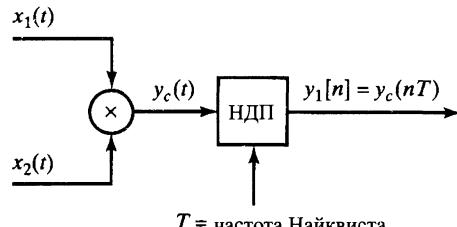
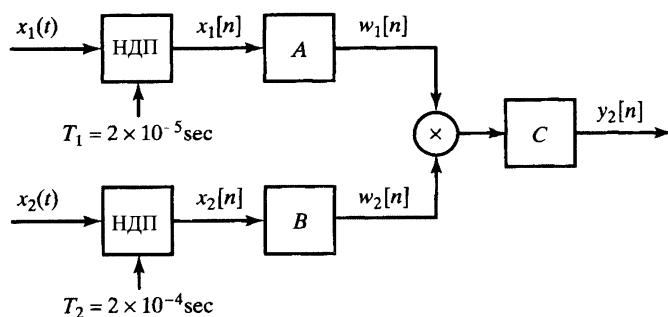


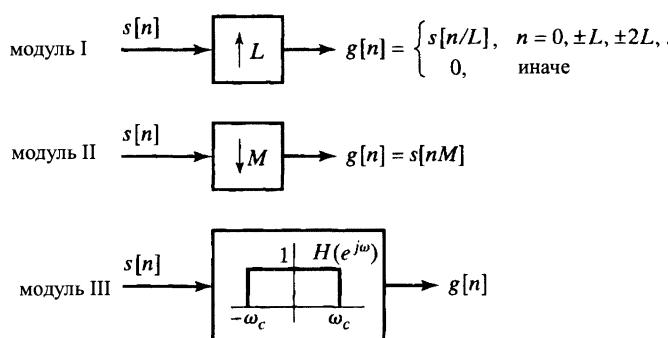
Рис. 4.116.

В некоторых ситуациях (например, цифровой передаче) непрерывный сигнал уже заранее дискретизируется со своей индивидуальной частотой Найквиста, а умножение осуществляется в дискретной системе, возможно, с некоторой дополнительной обработкой до и после умножения, как показано на рис. 4.117, а). Каждая из систем A , B и C либо тождественна, либо может быть реализована с помощью одного и более модулей, указанных на рис. 4.117, б).

Рис. 4.117. а)



б)



Про каждую из систем (A , B и C) выясните, является ли она тождественной. Если нет, то подберите подходящую комбинацию подключений одного (или нескольких) модулей из рис. 4.117, б). Вычислите, кроме того, все относительные параметры: L , M и ω_c . Системы A , B и C следует конструировать так, чтобы сигнал $y_2[n]$ был пропорционален $y_1[n]$, т. е.

$$y_2[n] = k y_1[n] = k y_c(nT) = k x_1(nT) \cdot x_2(nT).$$

Известно, что эти отсчеты получены с частотой Найквиста, т. е. $y_2[n]$ не являются результатом ни понижающей ни повышающей дискретизации сигнала $y_c(t)$.

- 4.59. Непрерывное преобразование Фурье $S_c(j\Omega)$ речевого сигнала $s_c(t)$ изображено на рис. 4.118. Речевой сигнал подается на вход системы из рис. 4.119, и получается последовательность $s_r[n]$. Функция $H(e^{j\omega})$ — КЧХ дискретного фильтра нижних частот с частотой отсечки ω_c и коэффициентом усиления L на всей полосе пропускания (как на рис. 4.28, б)). Сигнал $s_r[n]$ будет подаваться на вход речевого кодера, корректно обрабатывающего только дискретные отсчеты, представляющие дискретизованную речь с частотой 8 кГц. Подберите значения L , M и ω_c , благодаря которым получается корректный входной сигнал $s_r[n]$ речевого кодера.

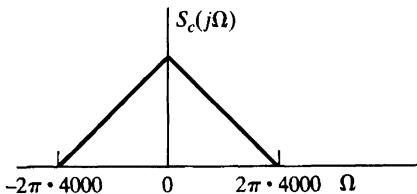


Рис. 4.118.

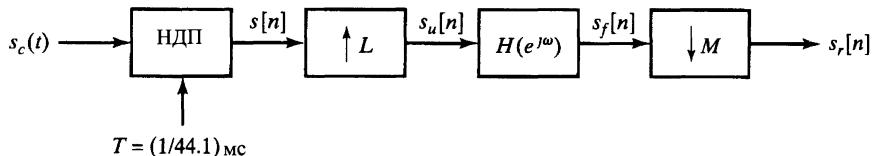


Рис. 4.119.

- 4.60. Во многих аудиоприложениях необходимо дискретизировать непрерывный сигнал $x_c(t)$ с частотой $1/T = 44$ кГц. На рис. 4.120 показана система, в которую для получения желаемых отсчетов включен непрерывный фильтр защиты от наложения спектров с характеристикой $H_{a0}(j\Omega)$. Часто вместо системы из рис. 4.120 применяют систему, осуществляющую 4-кратную пересдискретизацию (рис. 4.121). Функция $H(e^{j\omega})$ в системе рис. 4.121, равная

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/4, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

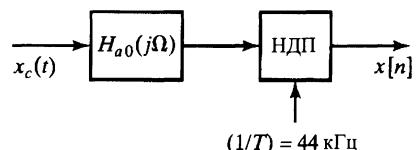


Рис. 4.120.

является КЧХ идеального фильтра нижних частот, и

$$H_{a1}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \Omega_p, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_s \end{cases}$$

для некоторых $0 \leq \Omega_p \leq \Omega_s \leq \infty$.

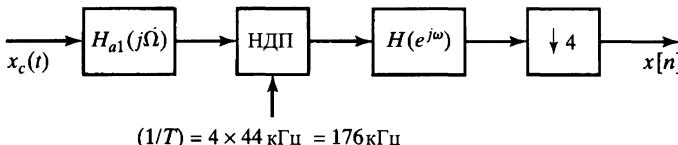


Рис. 4.121.

$$(1/T) = 4 \times 44 \text{ кГц} = 176 \text{ кГц}$$

Найдите минимальное множество спецификаций фильтра защиты от наложения спектров $H_{a1}(j\Omega)$ (т. е. наименьшее Ω_p и наибольшее Ω_s), при которых вся система из рис. 4.121 эквивалентная системе из рис. 4.120.

- 4.61. В этой задаче мы рассматриваем систему «двойного интегрирования» для квантования с формированием шумов, как показано на рис. 4.61. В этой системе

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{и} \quad H_2(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}},$$

а КЧХ прореживающего фильтра равна

$$H_3(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/M, \\ 0, & \pi/M \leq |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Предполагается, что источник шума $e[n]$, представляющий квантователь, является белым шумом с нулевым средним (постоянный спектр мощности), равномерно распределенной амплитудой и мощностью $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$.

- a) Выразите $Y(z)$ через $X(z)$ и $E(z)$, предполагая в этом пункте, что функция $E(z)$ существует. Опираясь на полученное соотношение, покажите, что $y[n]$ можно записать в виде $y[n] = x[n-1] + f[n]$, где $f[n]$ — компонента, соответствующая шуму $e[n]$. Что можно сказать о соотношении во временной области между $f[n]$ и $e[n]$?
- б) Предполагая, что $e[n]$ — белый шум, описанный в предыдущем пункте, покажите, что спектр мощности шума $f[n]$ равен

$$P_f(e^{j\omega}) = 16\sigma_e^2 \sin^4 \frac{\omega}{2}.$$

Воспользуйтесь результатом предыдущего пункта. Что можно сказать о суммарной мощности (σ_f^2) шумовой компоненты сигнала $y[n]$? Изобразите в одной системе координат спектры мощности $P_{ee}(e^{j\omega})$ и $P_f(e^{j\omega})$ на отрезке $[0; \pi]$.

- в) Пусть $X(e^{j\omega}) = 0$ при $\pi/M < \omega \leq \pi$. Найдите аргументы, подтверждающие разложение $w[n] = x[n-1] + g[n]$ (см. рис. 4.122), и дайте словесное описание последовательности $g[n]$.

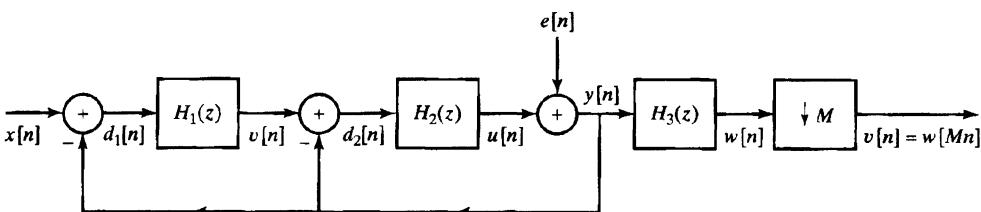


Рис. 4.122.

- г) Найдите выражение для мощности шума σ_g^2 , возникающего на выходе прореживающего фильтра. Предположите, что $\pi/M \ll \pi$, т. е. M достаточно велико и интеграл можно вычислять приближенными методами.
- д) Сигнал на выходе прореживателя имеет вид $v[n] = w[Mn] = x[Mn - 1] + q[n]$, где $q[n] = g[Mn]$. Предположите, что $x[n] = x_c(nT)$ (т. е. $x[n]$ — дискретная версия непрерывного сигнала). Какому условию должна удовлетворять функция $X_c(j\Omega)$, чтобы $x[n - 1]$ проходил через фильтр не меняясь? Выразите «сигнальную компоненту» выходного сигнала $v[n]$ через $x_c(t)$. Чему равна суммарная мощность σ_q^2 шума на выходе? Выпишите выражение для спектра мощности этого шума и изобразите в одной системе координат графики спектров мощности $P_{ee}(e^{j\omega})$ и $P_{qq}(e^{j\omega})$ на отрезке $0 \leq \omega \leq \pi$.
- 4.62. Для сигма-дельта передискретизации АЦП с обратной связью высокого порядка устойчивость становится существенным фактором. Альтернативный подход, называемый *MASH*, добивается формирования шума высокого порядка, используя обратную связь первого порядка. Структура *MASH*, формирующая шум второго порядка, показана на рис. 4.123. Ей и посвящена данная задача.

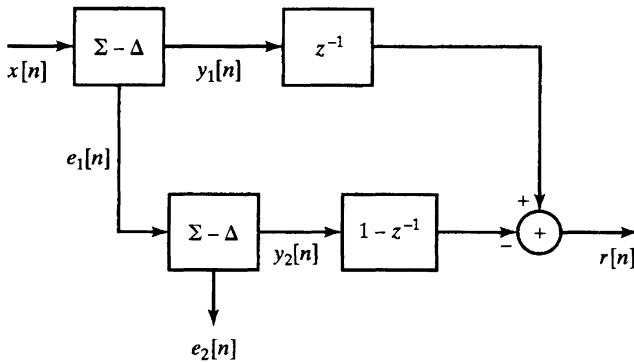


Рис. 4.123.

На рис. 4.124 приведена сигма-дельта система формирования шума первого порядка, в которой воздействие квантователя представляется аддитивным шумовым сигналом $e[n]$. Шум $e[n]$ отчетливо отмечен на диаграмме как второй выход системы. Предположим, что на ее вход подается сигнал $x[n]$, стационарный в широком смысле случайный процесс с нулевым средним значением. Будем считать, что $e[n]$ — тоже белый, стационарный в широком смысле случайный процесс с нулевым средним значением и дисперсией σ_e^2 , причем $e[n]$ не коррелирует с $x[n]$.

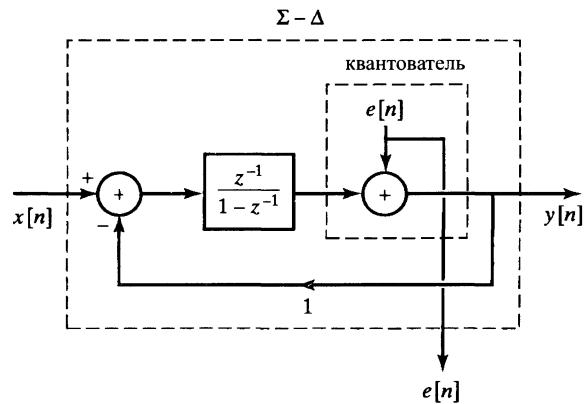
- а) Выходящий сигнал $y[n]$ в системе из рис. 4.124 имеет вид $y[n] = y_x[n] + y_e[n]$, где $y_x[n]$ появляется как реакция на сигнал $x[n]$, а $y_e[n]$ — отклик на шум $e[n]$.
- Выразите $y_x[n]$ через $x[n]$.
 - Вычислите $P_{y_e}(\omega)$, спектральную плотность мощности компоненты $y_e[n]$.
- б) Пусть теперь система из рис. 4.124 вставлена в конфигурацию из рис. 4.123, описывающую структуру системы *MASH*. Заметим, что $e_1[n]$ и $e_2[n]$ — шумовые сигналы, возникающие в результате работы квантователя в сигма-дельта системе формирования шума. Выходящий сигнал $r[n]$ имеет компоненту $r_x[n]$, связанную с $x[n]$ и $r_e[n]$, возникающую из-за шума $e[n]$, т. е. $r[n] = r_x[n] + r_e[n]$. Предположите, что $e_1[n]$ и $e_2[n]$ — стационарные в широком смысле белые

процессы с нулевым средним значением и одинаковой дисперсией σ_e^2 . Считайте, что шумы $e_1[n]$ и $e_2[n]$ не коррелируют друг с другом.

(iii) Выразите $r_x[n]$ через $x[n]$.

(iv) Вычислите $P_{r_e}(\omega)$, спектральную плотность мощности компоненты $r_e[n]$.

Рис. 4.124.



ГЛАВА 5

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

5.1. Введение

В главе 2 подробно рассказывалось о представлении дискретных сигналов и систем с помощью преобразования Фурье. Его обобщению — z -преобразованию посвящена глава 3. Особое внимание при этом уделялось самим преобразованиям и их свойствам, и лишь кратко упоминалась возможность приложения указанных преобразований к анализу линейных стационарных систем (ЛС-систем), которую и посвящена эта глава. Материал, изложенный здесь, по существу, служит основой для реализации ЛС-систем (глава 6) и для их проектирования (глава 7).

Как следует из главы 2, во временной области ЛС-системы полностью характеризуются своей импульсной характеристикой $h[n]$, свертка которой с входным сигналом $x[n]$ дает реакцию

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]. \quad (5.1)$$

С другой стороны, поскольку КЧХ связана с импульсной характеристикой преобразованием Фурье, то она, если существует (т. е. соответствующий ряд сходится), тоже дает полное описание ЛС-системы. Напомним, что в главе 3 ЛС-системы характеризовались *характеристической функцией* $H(z)$, т. е. z -преобразованием импульсной характеристики, обобщающим преобразование Фурье. При этом z -преобразования входного сигнала $X(z)$, реакции на него системы $Y(z)$ и ее импульсной характеристики $H(z)$ удовлетворяют соотношению:

$$Y(z) = H(z)X(z), \quad (5.2)$$

выполненному в пересечении областей сходимости (ОС) z -преобразований, участвующих в нем членов. Поскольку последовательность и ее z -преобразование образуют единственную пару, т. е. z -преобразование взаимно однозначно, то любая ЛС-система полностью описывается своей характеристической функцией (необходимо предполагать сходимость).

Как КЧХ, так и характеристическая функция чрезвычайно полезна при анализе ЛС-систем, поскольку они позволяют без особого труда получить многие свойства отклика системы.

5.2. Комплексная частотная характеристика ЛС-систем

КЧХ ЛС-системы была определена в § 2.7 (с. 60) как комплексный коэффициент (собственное значение), на который система умножает экспоненциальный входной сигнал (собственную функцию) $e^{j\omega n}$. Более того, в подразделе 2.10.6 мы показали, что, поскольку Фурье-образ последовательности представляется в виде линейной комбинации комплексных экспонент, Фурье-образы сигнала ($X(e^{j\omega})$) и отклика на него ($Y(e^{j\omega})$), системы связаны соотношением:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}). \quad (5.3)$$

В полярной системе координат эта формула принимает вид:

$$|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})| \cdot |X(e^{j\omega})|, \quad (5.4)$$

$$\angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega}). \quad (5.5)$$

Неотрицательная вещественнозначная функция $|H(e^{j\omega})|$ называется *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ) системы, а $\angle H(e^{j\omega})$ — *фазо-частотной характеристикой* (ФЧХ) системы.

Воздействие системы на входной сигнал, представленное в формулах (5.4) и (5.5), может быть желательным (если оно ведет к полезному преобразованию сигнала) или нежелательным (в противном случае). Нежелательное воздействие системы на сигнал, описанное формулами (5.4) и (5.5), называется *амплитудным и фазовымискажением* соответственно.

5.2.1. Идеальные частотно-избирательные фильтры

Важным следствием формулы (5.4) является тот факт, что частотные компоненты входного сигнала, при которых АЧХ $|H(e^{j\omega})|$ системы достаточно мала, подавляются на выходе. Нужно ли нам это подавление или не нужно, зависит от конкретной задачи. В примере 2.19 было formalизовано общее понятие *частотно-избирательных фильтров с помошью определения конкретных идеальных КЧХ*. Например, идеальный фильтр низких частот (ФНЧ) вводился как дискретная ЛС-система с 2π -периодической КЧХ:

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi, \end{cases} \quad (5.6)$$

благодаря которой идеальный ФНЧ пропускает низкочастотные компоненты сигнала и срезает высокочастотные. В примере 2.22 мы вычислили, что импульсная характеристика ФНЧ имеет вид:

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (5.7)$$

Аналогично, идеальный фильтр верхних частот (ФВЧ) определяется как ЛС-система с КЧХ

$$H_{hp}(e^{j\omega}) \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_c, \\ 1, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases} \quad (5.8)$$

Так как $H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega})$, его импульсная характеристика подчиняется соотношению:

$$h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n] = \delta[n] - \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}. \quad (5.9)$$

Идеальный ФНЧ пропускает сигнал неискаженным в полосе частот $\omega_c < \omega \leq \pi$ и срезает его при всех частотах ниже ω_c . Другие частотно-избирательные фильтры определялись в примере 2.19.

Идеальные ФНЧ относятся к недетерминированным системам, и их импульсная характеристика простирается от $-\infty$ до $+\infty$. Таким образом, выходной сигнал идеальных ФНЧ и ФВЧ невозможно вычислить как рекурсивным, так и нерекурсивным способом, т.е. эти фильтры не относятся к *вычислительно реализуемым* системам.

К другому важному свойству идеального ФНЧ относится тривиальность его ФЧХ. Если бы она была ненулевой, в полосе пропускания фильтра появилось фазовое искажение, что нарушило бы его идеальность. К сожалению, детерминированные аппроксимации идеальных частотно-избирательных фильтров обладают ненулевой ФЧХ, в чем мы сможем убедиться чуть позже.

5.2.2. Фазовое искажение и задержка

Чтобы разобраться с воздействием линейной системы на фазу сигнала, рассмотрим идеальную систему задержки. Ее 2π -периодическая импульсная характеристика имеет вид:

$$h_{id}[n] = \delta[n - n_d], \quad (5.10)$$

а КЧХ описывается формулой

$$H_{id}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} \quad (5.11)$$

или

$$|H_{id}(e^{j\omega})| = 1, \quad (5.12)$$

$$\angle H_{id}(e^{j\omega}) = -\omega n_d, \quad |\omega| < \pi. \quad (5.13)$$

Здесь и далее будем считать, что n_d — целое число.

Искажения, вносимые задержкой, во многих приложениях считаются довольно умеренной формой искажения фазы, поскольку при этом происходит всего лишь сдвиг последовательности во времени. Часто таким искажением можно просто пренебречь или компенсировать его, вводя задерживающие подсистемы в большую систему. Таким образом, при проектировании аппроксимаций идеальных фильтров и других ЛС-систем останавливаются на линейной ФЧХ, поскольку нулевая, присущая идеализированной ситуации, недостижима. Например,

мер, идеальный ФНЧ с линейной фазой определяется как система с КЧХ

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_d}, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases} \quad (5.14)$$

Его импульсная характеристика равна

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin \omega_c(n - n_d)}{\pi(n - n_d)}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (5.15)$$

Аналогично можно определить другие идеальные частотно-избирательные фильтры с линейной фазой. Эти фильтры могли бы оказывать желаемое воздействие на конкретную полосу частот входного сигнала и задерживать его на n_d отсчетов. Заметим, однако, что вне зависимости от величины задержки n_d идеальные ФНЧ всегда будут недетерминированными.

Отклонение ФЧХ от линейной удобно исследовать с помощью *групповой задержки*, основная концепция которой относится к действию системы на фазу узкополосного сигнала. Рассмотрим реакцию системы с КЧХ $H(e^{j\omega})$ на узкополосный сигнал вида $x[n] = s[n] \cos \omega_0 n$. Так как мы предполагаем, что функция $X(e^{j\omega})$ отлична от нуля только вблизи частоты ω_0 , ФЧХ системы в окрестности точки ω_0 можно описать приближенным равенством:

$$\angle H(e^{j\omega}) \approx -\varphi_0 - \omega n_d. \quad (5.16)$$

Учитывая эту аппроксимацию, можно показать (см. задачу 5.57), что реакция системы на сигнал $x[n] = s[n] \cos \omega_0 n$ приблизительно равна

$$y[n] \approx |H(e^{j\omega})| s[n - n_d] \cos(\omega_0 n - \varphi_0 - \omega_0 n_d).$$

Следовательно, временная задержка огибающей $s[n]$ узкополосного сигнала $x[n]$ с Фурье-преобразованием, сосредоточенным в точке ω_0 , задается отрицательным наклоном фазы в $\omega = \omega_0$. Аппроксимируя ФЧХ $\angle H(e^{j\omega})$ в окрестности точки ω_0 , как в равенстве (5.16), мы должны рассматривать эту характеристику как непрерывную функцию от ω . В связи с этим будем обозначать ФЧХ как $\arg[H(e^{j\omega})]$ и называть *непрерывной фазой* функции $H(e^{j\omega})$.

При такой точке зрения на ФЧХ групповая задержка системы определяется по формуле

$$\tau(\omega) = \text{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega} (\arg[H(e^{j\omega})]). \quad (5.17)$$

Поэтому отклонение групповой задержки от константы показывает степень нелинейности фазы.

Пример 5.1. Эффекты затухания и групповая задержка

В качестве иллюстрации групповой задержки рассмотрим фильтр, АЧХ и групповая задержка которого приведены на рис. 5.1. На рис. 5.2 показан входной сигнал фильтра и его спектр. Соответствующая реакция системы отражена на рис. 5.3. Заметим, что входной сигнал состоит из трех последовательных узкополосных импульсов, сосредоточенных в частотах $\omega = 0, 85\pi$, $\omega = 0, 25\pi$ и $\omega = 0, 5\pi$.

Так как АЧХ фильтра при частоте $\omega = 0, 85\pi$ существенно меньше, чем при более низких частотах, в выходном сигнале импульс на этой частоте практически незамечен. Кроме того, поскольку групповая задержка при $\omega = 0, 25\pi$ приблизительно равна 200,

а в точке $0,5\pi = 50$ отсчетам, второй импульс сигнала $x[n]$ задерживается на 200 отсчетов, а третий — на 50 (см. рис. 5.3). \square

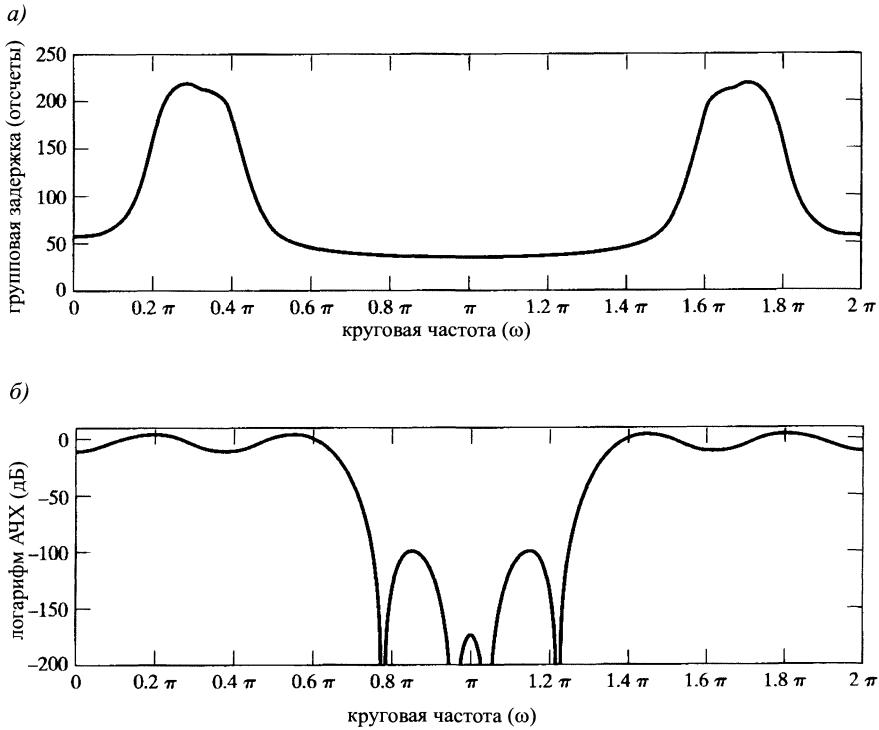


Рис. 5.1. Характеристики фильтра примера 5.1: а) групповая задержка; б) АЧХ

5.3. Характеристические функции систем, описывающихся линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами

Несмотря на то что идеальные частотно-избирательные фильтры очень полезны с теоретической точки зрения, на практике реализовать их невозможно. Поэтому интересно рассмотреть класс систем, которые, с одной стороны, можно реализовать в «железе» или на программном уровне, а с другой — служат аппроксимацией идеальных фильтров. В § 2.6 мы познакомились с системами, пара сигнал — отклик которых удовлетворяет линейному разностному уравнению с постоянными коэффициентами вида

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]. \quad (5.18)$$

Было показано, что с помощью этого уравнения отклик детерминированной системы можно вычислить рекурсивно. Если дополнительное оговорено состояние

покоя в начальном положении, то система оказывается детерминированной, линейной и стационарной.

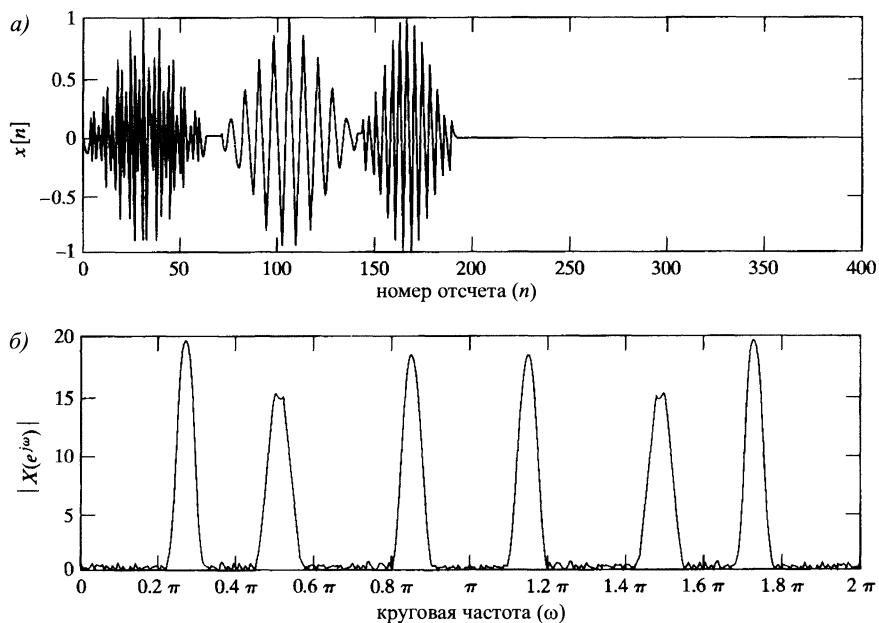


Рис. 5.2. Входной сигнал (а) и модуль его Фурье-образа (б) из примера 5.1

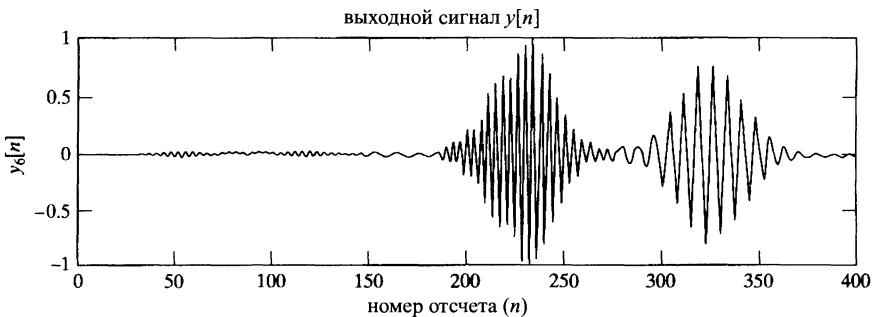


Рис. 5.3. Выходной сигнал примера 5.1

Свойства и характеристики ЛС-систем, пара сигнал – отклик которых удовлетворяет линейным разностным уравнениям с постоянными коэффициентами, лучше всего изучать на языке z -преобразования. Применяя z -преобразование к обеим частям уравнения (5.18) и учитывая свойства линейности и временного сдвига z -преобразования (подразделы 3.5.1 и 3.5.2), получаем

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

или, в равносильной записи,

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \right) Y(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) X(z). \quad (5.19)$$

Из формул (5.2) и (5.19) следует, что характеристическая функция систем, описывающих разностным уравнением, имеет вид:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}. \quad (5.20)$$

Таким образом, поскольку обе части формулы (5.18) представляют собой линейную комбинацию сдвинутых отсчетов, характеристическая функция является отношением многочленов от z^{-1} . Конечно, ее можно было бы переписать и как рациональную функцию от переменной z , но, как правило, этого не делают. Часто оказывается полезным разложение многочленов числителя и знаменателя на множители:

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}. \quad (5.21)$$

Каждый из сомножителей $(1 - c_k z^{-1})$ числителя соответствует простому нулю характеристической функции в точке $z = c_k$ и простому полюсу в точке $z = 0$. Аналогично, множитель знаменателя $(1 - d_k z^{-1})$ отвечает за полюс в точке $z = d_k$ и нуль в $z = 0$.

Существует тесная взаимосвязь между алгебраическими выражениями разностного уравнения и характеристической функции. Более точно, многочлен числителя дроби (5.20) имеет те же коэффициенты и алгебраическую структуру, что и правая часть уравнения (5.18) (члены вида $b_k z^{-k}$ получаются из слагаемых $b_k x[n - k]$), в то время как многочлен знаменателя копирует левую часть разностного уравнения (члены вида $a_k z^{-k}$ соответствуют слагаемым $a_k y[n - k]$). Следовательно, имея характеристическую функцию вида (5.20), легко получить разностное уравнение, и, наоборот, по уравнению без труда можно выписать характеристическую функцию.

Пример 5.2. Система второго порядка

Предположим, что нам дана характеристическая функция ЛС-системы:

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{3}{4}z^{-1})}. \quad (5.22)$$

Чтобы выписать разностное уравнение, отражающее связь между сигналом и откликом системы, перепишем характеристическую функцию в виде (5.20), раскрыв скобки в числителе и знаменателе.

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (5.23)$$

Значит, $(1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}) Y(z) = (1 + 2z^{-1} + z^{-2}) X(z)$, откуда получается искомое разностное уравнение:

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{3}{8}y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]. \quad (5.24)$$

Заметим, что при некотором опыте от формулы (5.23) к (5.24) и наоборот можно переходить сразу, не делая промежуточных вычислений. \square

5.3.1. Устойчивость и детерминированность

При выводе формулы (5.20) из (5.18) мы предполагали, что наша система линейна и стационарна, т. е. для нее выполнено соотношение (5.2), но никаких предположений о устойчивости и детерминированности мы не делали. Как следствие, из разностного уравнения мы можем получить алгебраическое выражение характеристической функции, но ничего не можем сказать об ОС соответствующего z -преобразования (напомним, что, допуская вольность речи, мы называем ОС ряда ОС функций, являющейся его суммой). Действительно, ОС функции $H(z)$ не определяется рассуждениями, приводящими к выражению (5.20), поскольку все, что нужно для разностного уравнения (5.19), — это пресечение ОС функций $X(z)$ и $Y(z)$. Этот факт согласуется с тем, что, как было отмечено в главе 2, импульсная характеристика ЛС-системы разностным уравнением определяется неоднозначно. Существует несколько возможностей для расположения ОС характеристической функции вида (5.20) или (5.21). При фиксированном отношении многочленов любой из возможных выборов ОС ведет к своей, отличной от других импульсной характеристике, хотя все они соответствуют одному и тому же разностному уравнению. Однако, предположив, что система детерминирована, мы получим, что импульсная характеристика $h[n]$ должна быть правосторонней и, следовательно, ОС характеристической функции $H(z)$ должна представлять собой внешность круга с максимально удаленным от центра полюсом на его границе. С другой стороны, допустив устойчивость системы, мы можем воспользоваться результатами § 2.5, согласно которым импульсная характеристика устойчивой системы должна быть абсолютно суммируемой, т. е.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty. \quad (5.25)$$

Заметим, что условие абсолютной суммируемости равносильно следующему утверждению:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]z^{-n}| < \infty \quad \text{при } |z| = 1. \quad (5.26)$$

Следовательно, устойчивость системы эквивалентна тому, что ОС характеристической функции содержит единичную окружность.

Пример 5.3. Определение ОС

Рассмотрим ЛС-систему, пара сигнал–отклик которой удовлетворяет разностному уравнению

$$y[n] - \frac{5}{2}y[n-1] + y[n-2] = x[n]. \quad (5.27)$$

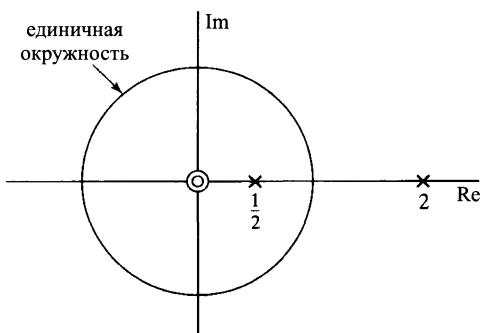


Рис. 5.4. Схема нулей и полюсов характеристической функции примера 5.3

полюсом, т. е. описывается неравенством $|z| > 2$. При этом система не может быть устойчивой, поскольку ОС не содержит единичную окружность. Предположение об устойчивости системы тоже однозначно задает ОС $\frac{1}{2} < |z| < 2$. Если же ОС расположена внутри круга радиуса $\frac{1}{2}$, то она не относится ни к устойчивым, ни к детерминированным. \square

Как видно из примера 5.3, детерминированность и устойчивость не обязательно должны идти рука об руку. Чтобы ЛС-система, описывающаяся разностным уравнением (5.18), была одновременно и детерминированной, и устойчивой, ОС характеристической функции должна, с одной стороны, располагаться далее от нуля, чем полюс с максимальным модулем, а с другой — содержать единичную окружность.

5.3.2. Обратные системы

Пусть дана ЛС-система с характеристической функцией $Y(z)$. *Обратной* к ней называется система с характеристической функцией $H_i(z)$, которая при последовательном соединении с данной дает систему с единичной характеристической функцией, т. е.

$$G(z) = H(z)H_i(z) = 1. \quad (5.29)$$

Отсюда следует, что

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)}. \quad (5.30)$$

Равносильное условие на импульсные характеристики взаимообратных систем выглядит как

$$g[n] = h[n] * h_i[n] = \delta[n]. \quad (5.31)$$

Из последней формулы вытекает связь КЧХ (при условии их существования):

$$H_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})}, \quad (5.32)$$

т. е. $H_i(e^{j\omega})$ и $H(e^{j\omega})$ — взаимно обратные величины. Следовательно, логарифмы АЧХ, ФЧХ и групповые задержки взаимообратных систем противоположны по знаку.

Методом, который мы недавно объяснили, несложно найти соответствующую характеристическую функцию:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}} = \\ &= \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

схема нулей и полюсов которой изображена на рис. 5.4.

По общей теории z -преобразования в этом случае существует три возможные ОС. Если система детерминирована, то ОС ее характеристической функции расположена за максимально удаленным от центра

Далеко не все системы обладают обратной. Например, у идеального ФНЧ таковой нет, поскольку нет принципиальной возможности восстановить компоненты частот, превышающих частоту отсечки, которые обнуляются этим фильтром.

С другой стороны, многие системы *обратимы* (т. е. имеют обратную), и класс систем с рациональной характеристической функцией — очень полезный и интересный пример таких систем. Рассмотрим функцию

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \quad (5.33)$$

с нулями в точках c_k , полюсами в d_k и возможными нулями и полюсами в 0 и ∞ . Тогда

$$H_i(z) = \left(\frac{a_0}{b_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}, \quad (5.34)$$

т. е. полюса функции $H_i(z)$ — это нули $H(z)$, и наоборот.

Интересен вопрос об ОС функции $H_i(z)$. Ответ следует из теоремы о свертки (см. равенство (5.31)). Формула (5.31) будет верна только в том случае, когда ОС функций $H(z)$ и $H_i(z)$ будут перекрываться. Например, ОС характеристической функции детерминированной системы описывается неравенством:

$$|z| > \max_k |d_k|. \quad (5.35)$$

Поэтому любое множество, имеющее точки, удовлетворяющие неравенству (5.35), годится для ОС функции $H_i(z)$. Простой пример иллюстрирует некоторые из таких возможных множеств.

Пример 5.4. Система, обратная к системе первого порядка

Пусть

$$H(z) = \frac{1 - 0,5z^{-1}}{1 - 0,9z^{-1}},$$

а ее ОС имеет вид $|z| > 0,9$. Тогда

$$H_i(z) = \frac{1 - 0,9z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}}.$$

Так как у функции $H_i(z)$ есть только один полюс, существует лишь две возможности для ее ОС: $|z| < 0,5$ и $|z| > 0,5$. Причем только последняя из них пересекается с ОС функции $H(z)$. Следовательно, импульсная характеристика обратной системы равна

$$h_i[n] = (0,5)^n u[n] - 0,9(0,5)^{n-1} u[n-1].$$

В этом случае обратная система будет как устойчивой, так и детерминированной. □

Пример 5.5. Обращение системы с нулем характеристической функции в ОС

Предположим, что

$$H(z) = \frac{z^{-1} - 0,5}{1 - 0,9z^{-1}}, \quad |z| > 0,9.$$

Характеристическая функция обратной системы равна

$$H_i(z) = \frac{1 - 0,9z^{-1}}{z^{-1} - 0,5} = \frac{-2 + 1,8z^{-1}}{1 - 2z^{-1}}.$$

Как и в предыдущем примере, существуют две возможности для ОС: $|z| < 2$ и $|z| > 2$. Однако здесь оба множества пересекаются с областью $|z| > 0,9$ и поэтому годятся в качестве ОС обратной системы. Если в качестве ОС взять первое множество, то импульсная характеристика обратной системы будет выглядеть как

$$h_{i1}[n] = 2^{n+1}u[-n-1] - 1,8 \cdot 2^{n-1}u[-n],$$

а если второе, то

$$h_{i2}[n] = -2^{n+1}u[n] + 1,8 \cdot 2^{n-1}u[n-1].$$

Легко заметить, что h_{i1} соответствует устойчивой, но недетерминированной системе, а h_{i2} — детерминированной, но неустойчивой. \square

Из рассмотренных примеров можно сделать вывод: если $H(z)$ — характеристическая функция детерминированной системы с нулями в точках c_k , $k = 1, \dots, M$, то обратная система будет детерминирована тогда и только тогда, когда ОС функции $H_i(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|z| > \max_k |c_k|.$$

А если при этом $\max_k |c_k| < 1$, то обратная система будет к тому же и устойчивой.

Иначе говоря, для устойчивости обратной системы необходимо, чтобы все нули функции $H(z)$ попадали внутрь единичного круга.

Итак, ЛС-система устойчива, детерминирована и обладает устойчивой детерминированной обратной системой тогда и только тогда, когда полюса и нули ее характеристической функции попадают внутрь единичного круга. Такие системы называют *минимально-фазовыми*. В § 5.7 мы познакомимся с ними поближе.

5.3.3. Импульсная характеристика систем с рациональной характеристической функцией

Метод разложения дроби в сумму простейших, о котором мы подробно говорили в подразделе 3.4.2 при вычислении обратного z -преобразования, можно применить к рациональной характеристической функции $H(z)$ из формулы (5.21) и получить общую формулу для соответствующей импульсной характеристики. Напомним, что любую рациональную функцию от z^{-1} с простыми полюсами можно записать в виде

$$H(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}, \quad (5.36)$$

где первое слагаемое правой части можно вычислить делением в столбик чисителя дроби на знаменатель. Ясно, что оно отлично от нуля, только если $M \geq N$.

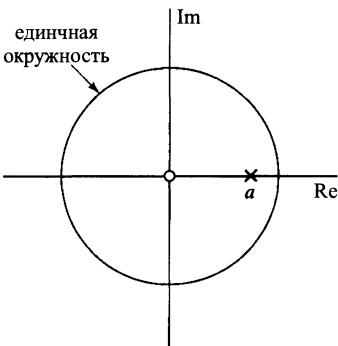


Рис. 5.5. Схема нулей и полюсов для примера 5.6

Коэффициенты A_k второго слагаемого получаются с помощью формулы (3.40). Если у функции $H(z)$ есть кратный полюс, ее разложение в сумму простейших дробей будет иметь вид (3.43). ОС детерминированной системы должна располагаться дальше от нуля, чем любой полюс ее характеристической функции, т. е. дальше любой из точек d_k . Следовательно, импульсная характеристика такой системы равна

$$h[n] = \sum_{r=0}^{M-N} B_r \delta[n-r] + \sum_{k=1}^N A_k d_k^n u[n], \quad (5.37)$$

причем первое слагаемое отлично от нуля только при $M \geq N$.

При изучении ЛС-систем их удобно разбить на два больших класса. К первому из них относятся системы с такой $H(z)$, у которой хотя бы один ненулевой полюс не сокращается с нулем. В этом случае в выражении для импульсной характеристики обязательно присутствует член вида $A_k(d_k)^n u[n]$ и $h[n]$ будет иметь бесконечно много ненулевых отсчетов. Системы такого типа называют системами с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-системами). В следующем примере описывается простая БИХ-система.

Пример 5.6. БИХ-система первого порядка

Рассмотрим детерминированную систему, чья пара сигнал – отклик удовлетворяет разностному уравнению

$$y[n] - ay[n-1] = x[n]. \quad (5.38)$$

Ее характеристическая функция имеет вид

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}. \quad (5.39)$$

На рис. 5.5 показана соответствующая схема нулей и полюсов. Ввиду детерминированности системы ОС описывается неравенством $|z| > |a|$, и при $|a| < 1$ система будет устойчивой. Обратное z -преобразование от функции $H(z)$ равно

$$h[n] = a^n u[n]. \quad \square \quad (5.40)$$

Ко второму классу относятся системы, чьи характеристические функции не имеют полюсов нигде, кроме точки $z = 0$, т. е. для таких систем в формулах (5.18) и (5.20) $N = 0$, и характеристическая функция оказывается просто многочленом от z^{-1} :

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}. \quad (5.41)$$

(Без ограничения общности можно считать, что $a_0 = 1$.) Используя таблицы z -преобразования, можно легко восстановить импульсную характеристику:

$$h[n] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k] = \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5.42)$$

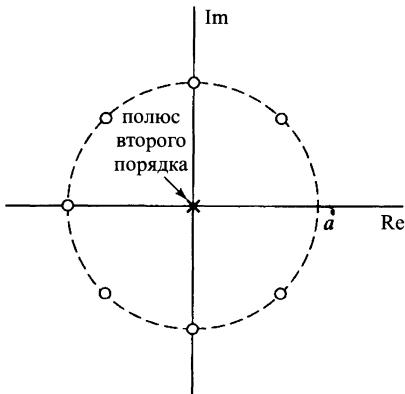
В этом случае импульсная характеристика — конечная последовательность, т. е. все ее отсчеты, за исключением конечного числа, равны нулю, благодаря чему системы с такой импульсной характеристикой называют *системами с конечной импульсной характеристикой* (КИХ-системами). Заметим, что разностное уравнение, характеризующее КИХ-системы, имеет вид свертки:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]. \quad (5.43)$$

Приведем простой пример КИХ-системы.

Пример 5.7. Простая КИХ-система

Рассмотрим импульсную характеристику, совпадающую с частью импульсной характеристики примера 5.6:



$$h[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где a предполагается положительным вещественным числом. Соответствующая характеристическая функция равна

$$H(z) = \sum_{n=0}^M a^n z^{-n} = \frac{1 - a^{M+1} z^{-M-1}}{1 - az^{-1}}. \quad (5.44)$$

Поскольку числитель обращается в нуль в точках

$$z_k = ae^{j2\pi k/(M+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, M, \quad (5.45)$$

Рис. 5.6. Схема нулей и полюсов характеристической функции из примера 5.7

то полюс в точке $z = a$ сокращается с одним из нулей. Схема нулей и полюсов функции $H(z)$ показана на рис. 5.6.

Разностное уравнение, которому удовлетворяет сигнал и отклик этой системы, выглядит как свертка:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M a^k x[n-k]. \quad (5.46)$$

Однако выражение (5.44) позволяет выписать еще одно разностное уравнение:

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] - a^{M+1} x[n-M-1]. \quad (5.47)$$

Эти уравнения должны быть эквивалентны, поскольку описывают одну и ту же систему с характеристической функцией (5.44). \square

5.4. КЧХ систем с рациональной характеристической функцией

Если характеристическая функция устойчивой ЛС-системы рациональна (т. е. ее пара сигнал – отклик удовлетворяет разностному уравнению (5.18)), то комплексная частотная характеристика (КЧХ) этой системы (если характеристическая функция (5.20) определена на единичной окружности) имеет вид:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}}. \quad (5.48)$$

Иными словами, $H(e^{j\omega})$ — отношение многочленов от переменной $e^{-j\omega}$. Для вычисления АЧХ, ФЧХ и групповой задержки этой системы следует выразить $H(e^{j\omega})$ через полюсы и нули функции $H(z)$. Такое выражение получается в результате подстановки $z = e^{j\omega}$ в формулу (5.21):

$$H(e^{j\omega}) = \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k e^{-j\omega})}. \quad (5.49)$$

Из последней формулы вытекает соотношение

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \frac{\prod_{k=1}^M |1 - c_k e^{-j\omega}|}{\prod_{k=1}^N |1 - d_k e^{-j\omega}|}. \quad (5.50)$$

Иногда бывает удобно рассматривать не сам модуль характеристической функции, а его квадрат:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}),$$

где звездочкой, как обычно, обозначается комплексное сопряжение. Вычисляя этот квадрат для функции $H(e^{j\omega})$ из выражения (5.49), находим

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \left(\frac{b_0}{a_0} \right)^2 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k e^{-j\omega})(1 - c_k^* e^{j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k e^{-j\omega})(1 - d_k^* e^{j\omega})}. \quad (5.51)$$

Из формулы (5.50) видно, что АЧХ $|H(e^{j\omega})|$ равна произведению модулей всех множителей числителя функции $H(z)$, вычисленных на единичной окружности, деленному на произведение всех множителей знаменателя, вычисленных там же. Обычно это произведение переписывают в виде суммы логарифмов. Логарифмируя соотношение (5.50), получаем

$$20 \lg |H(e^{j\omega})| = 20 \lg \left| \frac{b_0}{a_0} \right| + \sum_{k=1}^M 20 \lg |1 - c_k e^{-j\omega}| - \sum_{k=1}^N 20 \lg |1 - d_k e^{-j\omega}|. \quad (5.52)$$

Функцию $20 \lg |H(e^{j\omega})|$ называют логарифмом АЧХ системы и измеряют в децибелах (дБ). Иногда это количество называют коэффициентом усиления в дБ:

$$\text{коэффициент усиления в дБ} = 20 \lg |H(e^{j\omega})|. \quad (5.53)$$

Заметим, что 0 дБ соответствует значению $|H(e^{j\omega})| = 1$, а 20т дБ получается при $|H(e^{j\omega})| = 10^m$. Кроме того, значение $|H(e^{j\omega})| = 2^m$ приближенно равно 6т дБ.

Когда $|H(e^{j\omega})| < 1$, величина $20 \lg |H(e^{j\omega})|$ отрицательна. Такое бывает, например, в полосе задержки частотно-избирательного фильтра. Введем стандартное определение:

$$\begin{aligned} \text{коэффициент затухания в дБ} &= -20 \lg |H(e^{j\omega})| \\ &= -\text{коэффициент усиления в дБ}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Таким образом, коэффициент затухания положителен, когда АЧХ меньше единицы. Например, затухание в 60 дБ при данной частоте ω означает, что имеет место равенство $|H(e^{j\omega})| = 0,001$.

Еще одно преимущество записи АЧХ в децибелах вытекает из формулы (5.4), которая после логарифмирования принимает вид:

$$20 \lg |Y(e^{j\omega})| = 20 \lg |H(e^{j\omega})| + 20 \lg |X(e^{j\omega})|, \quad (5.55)$$

так что АЧХ, выраженная в децибелах, будучи сложенной с логарифмом модуля Фурье-образа входного сигнала, дает логарифм модуля преобразования Фурье отклика системы.

ФЧХ систем с рациональной характеристической функцией имеет вид:

$$\Delta H(e^{j\omega}) = \Delta \left(\frac{b_0}{a_0} \right) + \sum_{k=1}^M \Delta (1 - c_k e^{-j\omega}) - \sum_{k=1}^N \Delta (1 - d_k e^{-j\omega}). \quad (5.56)$$

Как и в формуле (5.52), множители числителя здесь дают вклад со знаком «+», а знаменателя — со знаком «-».

Соответствующая групповая задержка равна

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=1}^N \frac{d}{d\omega} (\arg[1 - d_k e^{-j\omega}]) - \sum_{k=1}^M \frac{d}{d\omega} (\arg[1 - c_k e^{-j\omega}]), \quad (5.57)$$

где символ $\arg[]$ закреплен за непрерывной фазой. Эту формулу можно переписать как

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=1}^N \frac{|d_k|^2 - \operatorname{Re}\{d_k e^{-j\omega}\}}{1 + |d_k|^2 - 2\operatorname{Re}\{d_k e^{-j\omega}\}} - \sum_{k=1}^M \frac{|c_k|^2 - \operatorname{Re}\{c_k e^{-j\omega}\}}{1 + |c_k|^2 - 2\operatorname{Re}\{c_k e^{-j\omega}\}}. \quad (5.58)$$

Фаза каждого члена в формуле (5.56) определена неоднозначно. Действительно, если в любом слагаемом ее правой части частоту ω заменить на $\omega + 2\pi k$ с целым k , то значение суммы, а значит, и ФЧХ не изменится. С другой стороны, вычисляя групповую задержку, мы должны дифференцировать непрерывные функции.

При поиске аргумента комплексного числа на калькуляторе, в который заложена стандартная процедура arctg , или с помощью компьютерных программ получается его главное значение. Главным значением фазы (аргумента) числа $H(e^{j\omega})$ называется величина, обозначаемая $\operatorname{ARG}[H(e^{j\omega})]$, которая удовлетворяет

ет неравенству:

$$-\pi < \text{ARG}[H(e^{j\omega})] \leq \pi. \quad (5.59)$$

Любой другой угол, дающий то же самое комплексное значение функции $H(e^{j\omega})$, выражается через главное значение:

$$\angle H(e^{j\omega}) = \text{ARG}[H(e^{j\omega})] + 2\pi r(\omega), \quad (5.60)$$

где $r(\omega)$ — целое число, зависящее от ω . Если ничего не оговорено особо, будем считать, что каждое слагаемое формулы (5.56) — это главное значение аргумента.

В общем случае функция $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$ кусочно непрерывна. Разрывы первого рода в ней появляются в точках подскока главного значения аргумента на 2π радиан. Пример такой функции показан на рис. 5.7, где изображены графики непрерывной ФЧХ $\arg[H(e^{j\omega})]$ и ее главного значения $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$ на промежутке $0 \leq \omega \leq \pi$. График непрерывной функции из рис. 5.7, *a*) выходит за границы полуинтервала $(-\pi; \pi]$. Главное значение, график которого размещен на рис. 5.7, *b*), имеет скачки в 2π радиан из-за целых кратных числа 2π , которые нужно вычесть из значений фазы, чтобы ее график поместился в полуинтервал $(-\pi; \pi]$. Эти целые, кратные $r(\omega)$, представлены на рис. 5.7, *в*).

Рассмотрим формулу (5.56), в которой для вычисления вклада в фазу каждого слагаемого используется главное значение. Ясно, что

$$\begin{aligned} \text{ARG}[H(e^{j\omega})] = \text{ARG}\left[\frac{b_0}{a_0}\right] + \sum_{k=1}^M \text{ARG}[1 - c_k e^{-j\omega}] - \\ - \sum_{k=1}^N \text{ARG}[1 - d_k e^{-j\omega}] + 2\pi r(\omega), \end{aligned} \quad (5.61)$$

где $r(\omega)$ — целые числа, зависящие от ω . Последний член $2\pi r$ необходим потому, что сумма главных значений аргумента не обязана попадать в полуинтервал $(-\pi; \pi]$, т. е. быть главным значением. Это особенно важно в теории кепстрального анализа и гомоморфных систем (см. [106] и [149]). Заметим, что формула (5.61) ничуть не сложнее выражения (5.56), поскольку они отличаются друг от друга на легко вычисляемое целое число.

Главное значение ФЧХ можно вычислять как с помощью формулы (5.61), так и через арктангенс отношения вещественной и мнимой частей функции $H(e^{j\omega})$:

$$\text{ARG}[H(e^{j\omega})] = \arctg\left[\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}\right]. \quad (5.62)$$

Однако при вычислении групповой задержки по формуле (5.17) приходится брать производную непрерывной фазовой функции, т. е. дифференцировать функцию $\arg[H(e^{j\omega})]$:

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}\{\arg[H(e^{j\omega})]\}. \quad (5.63)$$

Ясно, что всюду, за исключением точек разрыва, имеет место равенство:

$$\frac{d}{d\omega}\{\arg[H(e^{j\omega})]\} = \frac{d}{d\omega}\{\text{ARG}[H(e^{j\omega})]\}. \quad (5.64)$$

Таким образом, групповую задержку можно находить, дифференцируя и главное

значение, помня лишь о конечном числе точек разрыва. Групповую задержку можно записать и через неоднозначную фазу как

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}\{\triangle H(e^{j\omega})\}, \quad (5.65)$$

игнорируя точки разрыва функции $\triangle H(e^{j\omega})$.

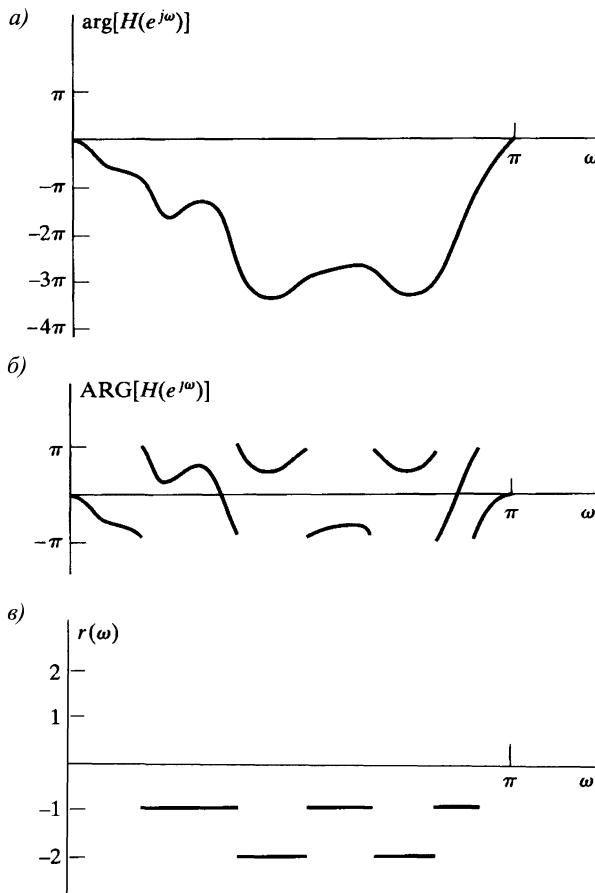


Рис. 5.7. a) график непрерывного аргумента характеристической функции, ограниченной на единичную окружность; б) главное значение функции из части (а) рисунка; в) целые кратные 2π , равные разности функций $\arg[H(e^{j\omega})]$ и $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$

5.4.1. КЧХ в случае единственного нуля или полюса характеристической функции

Формулы (5.52), (5.56) и (5.58) представляют АЧХ в децибелах, ФЧХ и групповую задержку, соответственно, как сумму вкладов, которые дают каждый полюс и нуль характеристической функции. Чтобы наработать интуицию при оперировании свойствами КЧХ устойчивой ЛС-системы с рациональной характеристической функцией, полезно исследовать свойства отдельного полюса или нуля, т. е. множителя вида $(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})$, где r — модуль, а θ — аргумент этого полюса или нуля.

Квадрат модуля такого множителя равен

$$|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}|^2 = (1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})(1 - re^{-j\theta}e^{j\omega}) = 1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta). \quad (5.66)$$

Поскольку по свойствам логарифма для любого комплексного числа C выполнено равенство:

$$10 \lg |C|^2 = 20 \lg |C|,$$

то логарифм модуля в децибелах имеет вид:

$$20 \lg |1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}| = 10 \lg(1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)). \quad (5.67)$$

Теперь выпишем главное значение фазы этого множителя:

$$\text{ARG}[1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}] = \arctg \left[\frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \right]. \quad (5.68)$$

Дифференцируя правую часть главной фазы (пропуская точки разрыва), находим групповую задержку

$$\text{grd}[1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}] = \frac{r^2 - r \cos(\omega - \theta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} = \frac{r^2 - r \cos(\omega - \theta)}{|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}|^2}. \quad (5.69)$$

Функции от ω из формул (5.66)–(5.69), конечно, 2π -периодические. На рис. 5.8, а) приведен график функции из формулы (5.67) как функции от ω над одним периодом ($0 \leq \omega < 2\pi$) для некоторых значений θ с $r = 0, 9$. Заметим, что значения функции резко уменьшаются в окрестности точек $\omega = \theta$. Кроме того, при фиксированном r логарифм модуля зависит от разности $(\omega - \theta)$. Поэтому при изменении θ меняется и положение минимума модуля. В общем случае, максимальное значение функции достигается при $\omega - \theta = \pi$ и равно

$$10 \lg(1 + r^2 + 2r) = 20 \lg(1 + r).$$

При $r = 0, 9$ максимум составляет 5,57 дБ. Минимальное значение логарифм модуля принимает при $\omega = \theta$, которое равно

$$10 \lg(1 + r^2 + 2r) = 20 \lg |1 - r|$$

(−20 дБ при $r = 0, 9$). Заметим, что график квадрата модуля из (5.66) очень похож на график из рис. 5.8, а), за исключением того, что он будет более вытянутым по вертикали, ввиду чего его форма вблизи минимумов более заострена.

На рис. 5.8, б) показан график ФЧХ (5.68) как функции от ω при $r = 0, 9$ и нескольких значений θ . ФЧХ принимает нулевое значение при $\omega = \theta$, а при фиксированном r изменение θ ведет к простому сдвигу графика. Групповая задержка (5.69) при некоторых условиях на r и θ приведена на рис. 5.8, в). Обратите внимание, что наиболее крутой положительный наклон графика ФЧХ в окрестности точек $\omega = \theta$ соответствует минимальным значениям групповой задержки.

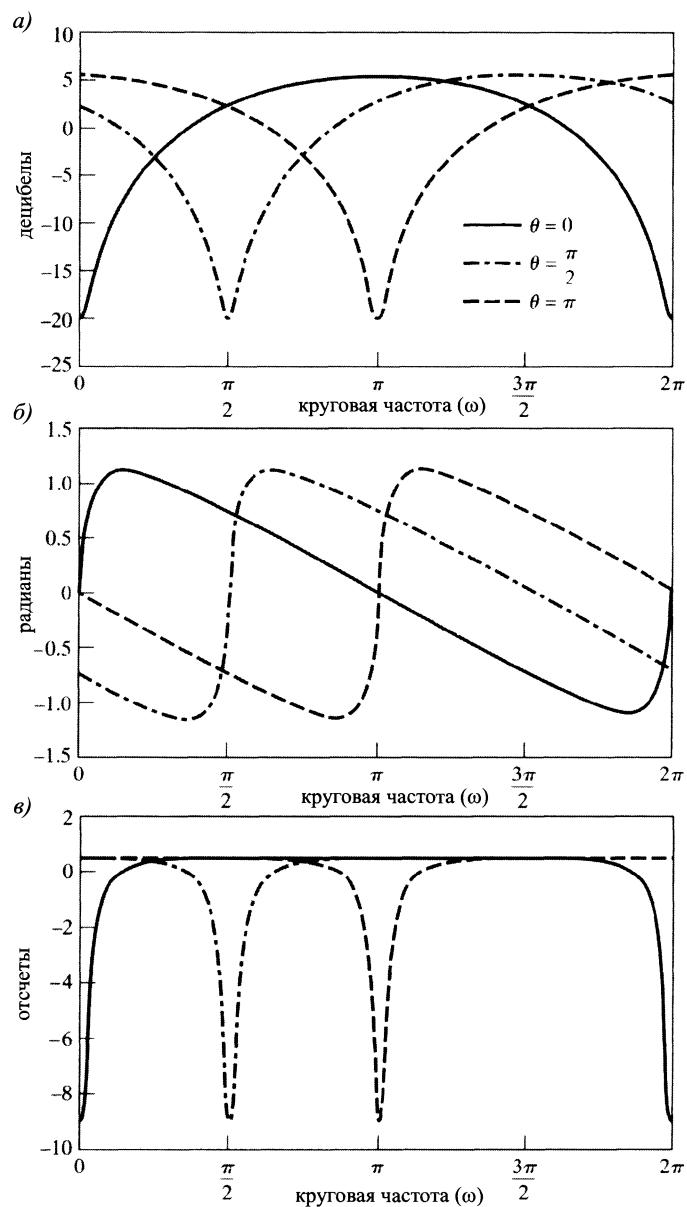
Эскизы графиков АЧХ, ФЧХ и групповой задержки системы можно сделать, исследуя лишь схему нулей и полюсов характеристической функции. Для этого привлекается некая геометрическая конструкция, идея которой состоит в том, что КЧХ — это ограничение характеристической функции на единичную окружность, а комплексное значение множителя характеристической функции, отвечающего за ее нуль или полюс, можно изобразить вектором комплексной плоскости с началом в этом нуле (или полюсе) и концом в точке единичной окружности. Начнем знакомство с конструкцией с простого примера характеристической функции

ции первого порядка:

$$H(z) = (1 - re^{j\theta} z^{-1}) = \frac{z - re^{j\theta}}{z}, \quad r < 1, \quad (5.70)$$

оставив более сложные до подраздела 5.4.2. Эта функция имеет простой полюс в точке $z = 0$ и простой нуль в $z = re^{j\theta}$, как отмечено на рис. 5.9. На этом же рисунке векторами v_1 , v_2 и $v_3 = v_1 - v_2$ представлены числа $e^{j\omega}$, $re^{j\theta}$ и $(e^{j\omega} - re^{j\theta})$ соответственно.

Рис. 5.8. КЧХ системы с единственным нулем характеристической функции при $r = 0, 9$ и трех значениях θ :
а) логарифм АЧХ; б) ФЧХ;
в) групповая задержка



Модуль комплексного числа $\frac{e^{j\omega} - re^{j\theta}}{e^{j\omega}}$ вычисляется как отношение длин векторов v_3 и v_1 :

$$|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}| = \left| \frac{e^{j\omega} - re^{j\theta}}{e^{j\omega}} \right| = \frac{|v_3|}{|v_1|}. \quad (5.71)$$

Но так как $|v_1| = 1$, то этот модуль фактически равен $|v_3|$. Поскольку аргумент отношения комплексных чисел равен разности их аргументов, получаем

$$\begin{aligned} \angle(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}) &= \\ &= \angle(e^{j\omega} - re^{j\theta}) - \angle(e^{j\omega}) = \\ &= \angle(v_3) - \angle(v_1) = \\ &= \varphi_3 - \varphi_1 = \varphi_3 - \omega. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Обычно вектор, идущий из нуля характеристической функции к точке единичной окружности, называют *вектором нуля*, а вектор с началом в полюсе и концом на той же окружности — *вектором полюса*. Итак, вклад отдельного множителя $(1 - re^{j\theta}z^{-1})$ числителя характеристической функции в АЧХ при частоте ω равен длине вектора нуля v_3 , выходящего из нуля функции к точке $z = e^{j\omega}$. При $\omega = \theta$ он будет иметь минимальную длину, что обуславливает минимум АЧХ (рис. 5.8, а)). Заметим, что длина вектора полюса v_1 , соединяющего точки $z = 0$ и $z = e^{j\omega}$, в нашем примере всегда равна единице. Поэтому он не оказывает влияния на АЧХ. Из формулы (5.72) следует, что значение ФЧХ равно разности аргументов вектора нуля и вектора полюса.

Схема нулей и полюсов для случая $\theta = \pi$ приведена на рис. 5.10, в котором векторы нуля и полюса отмечены для двух разных значений ω . Ясно, что при возрастании ω от 0 до π длина вектора v_3 уменьшается вплоть до своего минимального значения в точке $\omega = \pi$, формируя вид графика на рис. 5.8, а) при $\theta = \pi$.

При малых ω аргумент вектора v_3 (см. рис. 5.10) растет медленнее частоты, в связи с чем на этом промежутке график ФЧХ находится в отрицательной области. Затем, по мере приближения ω к π скорость роста угла φ_3 начинает

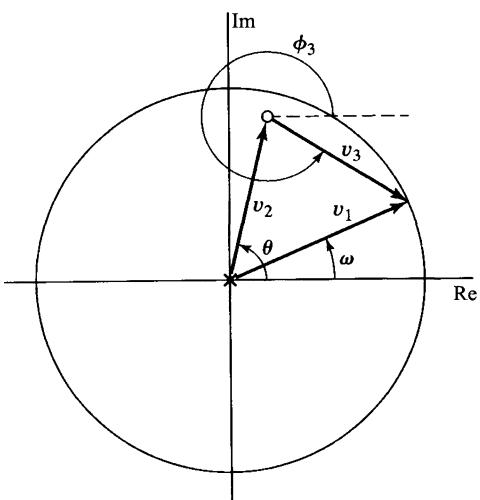


Рис. 5.9. Векторы нуля и полюса характеристической функции первого порядка при $r < 1$

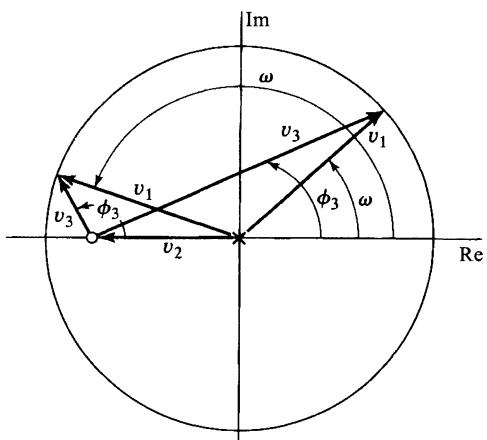
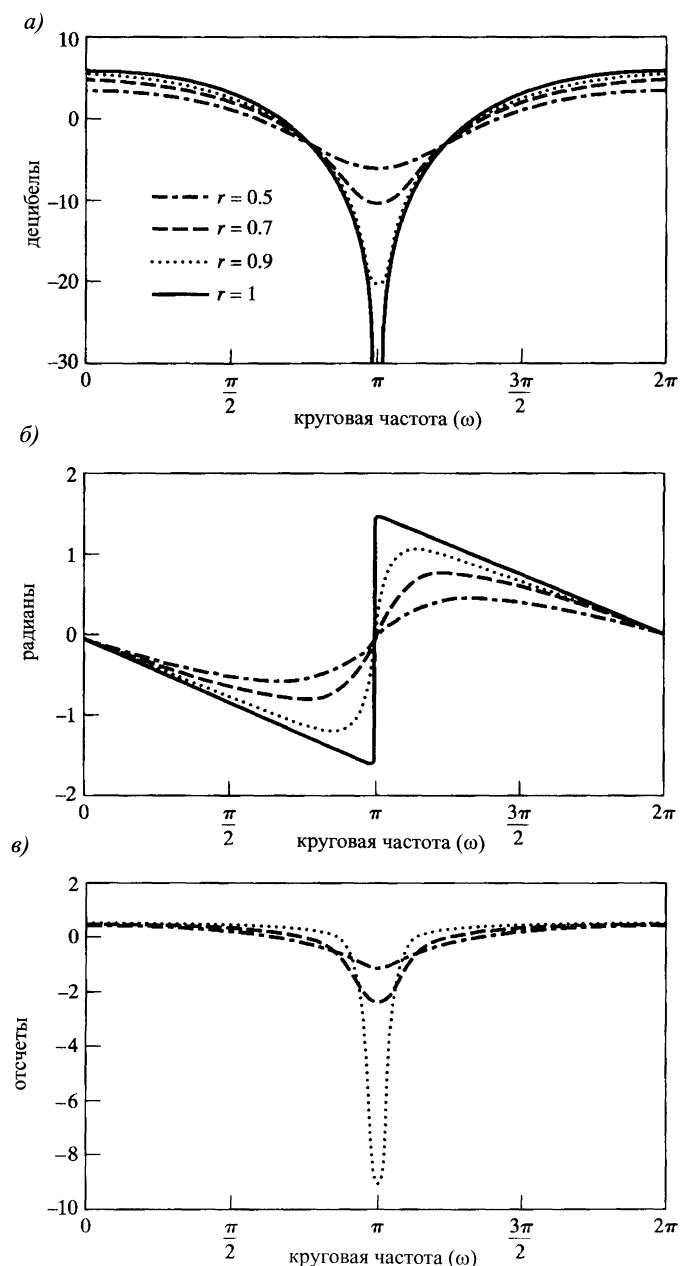


Рис. 5.10. Векторы нуля и полюса характеристической функции первого порядка при $\theta = \pi$, $r < 1$, изображенные для двух разных значений ω

обгонять скорость роста ω , что обеспечивает положительный наклон графика ФЧХ в окрестности $\omega = \pi$. Поскольку при $\omega = \pi$ аргументы векторов v_3 и v_1 совпадают, ФЧХ становится нулевой.

Зависимость вклада отдельного множителя $(1 - re^{j\theta}e^{j\omega})$ в КЧХ от радиуса r при $\theta = \pi$ показана на рис. 5.11.

Рис. 5.11. КЧХ, соответствующая характеристической функции с единственным нулем при $\theta = \pi$, $r = 1, 0, 9, 0, 7$ и $0,5$: а) логарифм АЧХ; б) ФЧХ; в) групповая задержка при $r = 0,9, 0,7$ и $0,5$

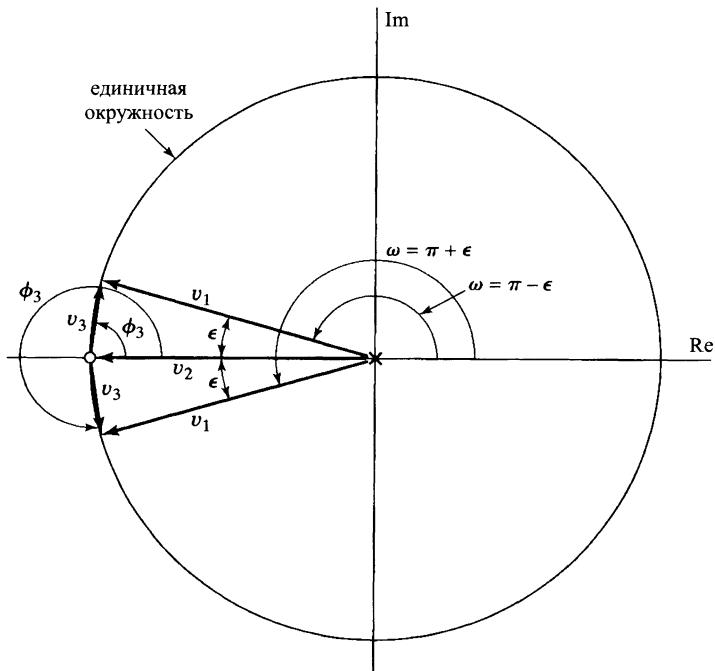


Заметим, что скорость изменения логарифма АЧХ (рис. 5.11, а)) растет с приближением r к 1; действительно, АЧХ в децибелах стремится к $-\infty$ в точке $\omega = \theta$ при стремлении r к 1. График ФЧХ (рис. 5.11, б)) имеет положительный наклон в окрестности точки $\omega = \theta$ и становится «вертикальным» при $r = 1$. Таким образом, при $r = 1$ ФЧХ терпит разрыв, где ее график «подскакивает» на π рад в точке $\omega = \theta$. И вновь невдалеке от точки $\omega = \theta$ наклон графика ФЧХ становится отрицательным. Поскольку групповая задержка противоположна по знаку наклону фазовой кривой, она отрицательна в окрестности $\omega = \theta$ и резко убывает при приближении r к 1. На рис. 5.11, в) видно, что по мере удаления от точки $\omega = \theta$ групповая задержка становится положительной и относительно плоской. При $r = 1$ групповая задержка равна $\frac{1}{2}$ всюду, кроме $\omega = \theta$, где она просто неопределена.

Геометрическая конструкция для характеристической функции с единственным нулем в точке $z = -1$ изображена на рис. 5.12. Там отмечены векторы при двух разных частотах: $\omega = \pi - \varepsilon$ и $\omega = \pi + \varepsilon$, когда ε мало. Из рисунка можно сделать два вывода. Во-первых, длина вектора v_3 приближается к нулю при стремлении ω к аргументу вектора нуля ($\varepsilon \rightarrow 0$). Следовательно, вклад этого вектора в КЧХ тоже будет стремиться к нулю ($-\infty$ дБ). Во-вторых, при изменении ω от $(\pi - \varepsilon)$ до $(\pi + \varepsilon)$ аргумент вектора v_3 терпит разрыв первого рода в точке $\omega = \pi$. Получающийся при этом скачок аргумента равен π рад.

Рис. 5.12. Векторы нуля и полюса характеристической функции с нулем в $z = -1$ при двух разных частотах:

$$\omega = \pi - \varepsilon \text{ и } \omega = \pi + \varepsilon$$



В предыдущих примерах (рис. 5.8 и 5.11) мы ограничились условием $r \leq 1$. При $r > 1$ логарифм АЧХ ведет себя так же, как и при $r < 1$, т. е. его спад становится более крутым при стремлении r к 1, как показано на рис. 5.13, а).

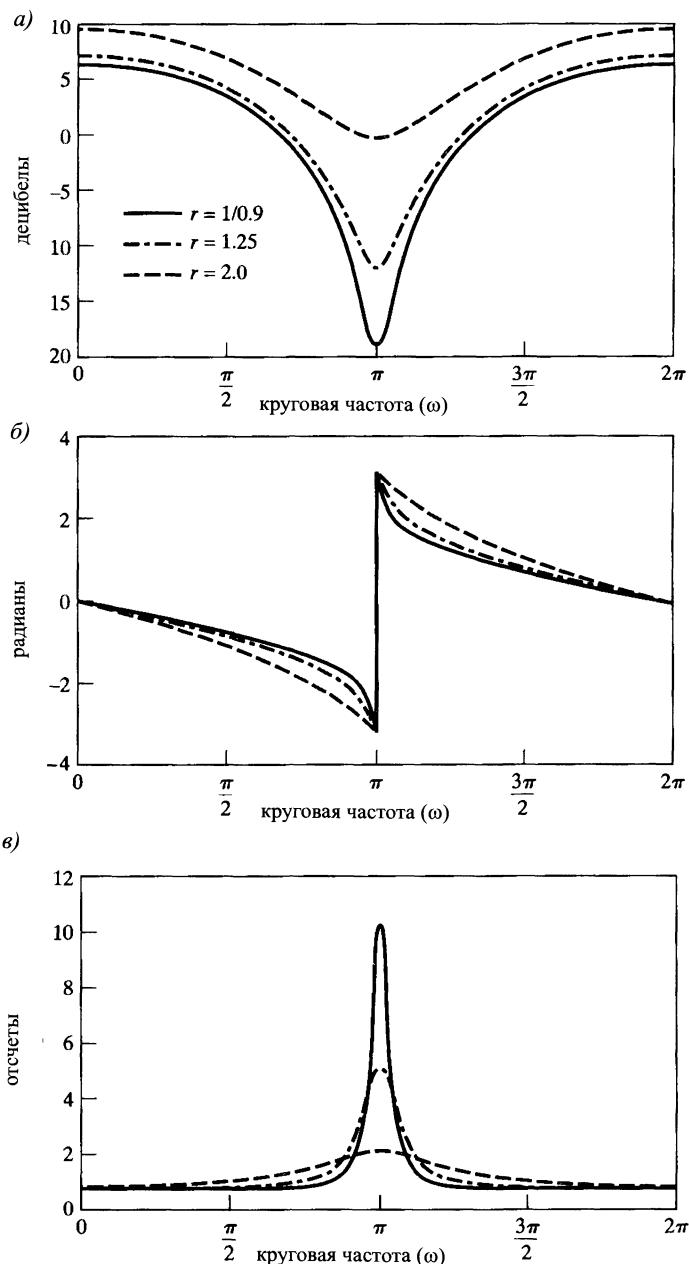
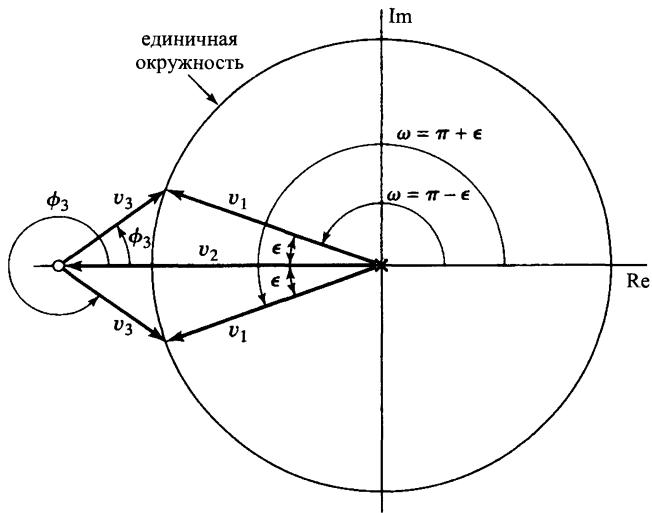


Рис. 5.13. КЧХ в случае вещественного нуля характеристической функции, лежащего вне единичного круга, при $\theta=\pi$, $r=1/0, 9, 1, 25$ и 2: а) логарифм АЧХ; б) ФЧХ (главное значение); в) групповая задержка

На рис. 5.13, б) можно увидеть разрыв ФЧХ в 2π рад в точке $\omega = \theta$ при всех значениях $r > 1$. Причину такого разрыва следует искать на рис. 5.14, где отмечены векторы при $\omega = \pi - \varepsilon$ и $\omega = \pi + \varepsilon$. Заметим, что аргумент вектора полюса v_1 , равный ω , изменяется от $\omega = 0$ до $\omega = 2\pi$ непрерывно. Аргумент вектора v_3 на рисунке обозначен символом φ_3 . Поскольку направлению против

часовой стрелки соответствуют положительные величины угла φ_3 , то при движении ω от $\pi - \varepsilon$ (величина φ_3 близка к 0) до $\pi + \varepsilon$ (φ_3 близок к 2π) величина угла φ_3 подскакивает от 0 до 2π . Этот скачок бросается в глаза на рис. 5.13, б). Ясно, что такой разрыв появляется из-за главного значения ФЧХ. Если же отказаться от главного значения, то в окрестности $\omega = \pi$ величина угла φ_3 будет малой: положительной при $\omega = \pi - \varepsilon$ и отрицательной при $\omega = \pi + \varepsilon$. При такой интерпретации аргумент φ_3 непрерывен в точке $\omega = \theta$. Однако, так как аргумент множителя $(1 - re^{j\theta}e^{j\omega})$ меньше, чем $-\pi$ рад в точке $\omega = \pi + \varepsilon$, главное значение фазы ведет себя, как на рис. 5.13, б).

Рис. 5.14. Векторы нуля и полюса характеристической функции с вещественным нулем при $\theta = \pi$ и $r > 1$



Наклон ФЧХ на рис. 5.13, б) всюду отрицателен, поэтому групповая задержка в случае $r > 1$ имеет положительные значения при всех ω . Этот факт также легко следует из формулы (5.69), если считать, что r там больше 1.

Предыдущие примеры, как и рис. 5.8, 5.11 и 5.13, относятся к отдельному множителю $(1 - re^{j\theta}e^{j\omega})$ характеристической функции. Если этот множитель соответствует нулю характеристической функции, кривые рис. 5.8, 5.11 и 5.13 вносят свой вклад в функции, ассоциированные с КЧХ, с положительным знаком. Если же множитель представляет полюс, то их вклад отрицателен. Так, соответствующие кривые для случая отдельного полюса в точке $z = re^{j\theta}$ будут симметричны кривым из рис. 5.8 и 5.11 относительно оси абсцисс. Вместо минимального значения ($-\infty$ дБ) в точке $\omega = \theta$ АЧХ будет принимать максимальное. Зависимость кривых от r в случае полюса будет той же, что и в случае нуля, т. е. при приближении r к 1 кривые становятся все более заостренными. Характеристические функции устойчивых и детерминированных систем, конечно, не имеют полюсов вне единичного круга. Таким образом, r для них всегда будет меньше 1.

5.4.2. Примеры с кратными полюсами или нулями

В этом подразделе мы покажем, как использовать только что полученные результаты к исследованию КЧХ систем с рациональной характеристической функцией.

Пример 5.8. БИХ-система второго порядка

Рассмотрим систему с характеристической функцией второго порядка:

$$H(z) = \frac{1}{(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - r^{-j\theta}z^{-1})} = \frac{1}{1 - 2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}. \quad (5.73)$$

Разностное уравнение, которому удовлетворяет пара сигнал – отклик этой системы, имеет вид

$$y[n] - 2r \cos \theta y[n-1] + r^2 y[n-2] = x[n].$$

Используя метод разложения на простейшие дроби, можно показать, что импульсная характеристика детерминированной системы с такой характеристической функцией равна

$$h[n] = \frac{r^n \sin(\theta(n+1))}{\sin \theta} u[n]. \quad (5.74)$$

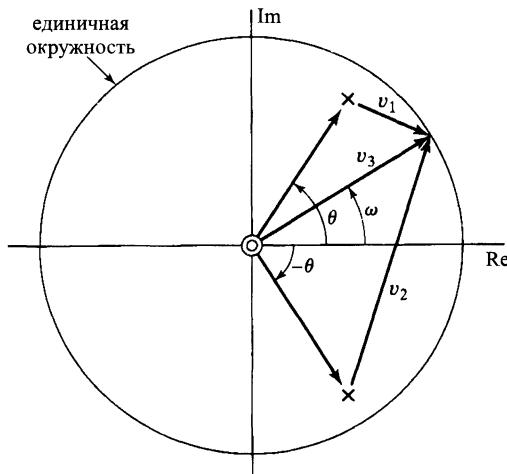


Рис. 5.15. Схема нулей и полюсов характеристической функции из примера 5.8

Характеристическая функция (5.73) имеет комплексно сопряженные полюсы в точках $z = re^{j\theta}$ и $z = r^{-j\theta}$ и нуль кратности 2 в точке $z = 0$. Ее схема нулей и полюсов приведена на рис. 5.15. Как следует из наших рассуждений в подразделе 5.4.1,

$$20 \lg |H(e^{j\omega})| = -10 \lg [1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)] - 10 \lg [1 + r^2 - 2r \cos(\omega + \theta)], \quad (5.75)$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\arctg \left[\frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \right] - \arctg \left[\frac{r \sin(\omega + \theta)}{1 - r \cos(\omega + \theta)} \right] \quad (5.76)$$

и

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{r^2 - r \cos(\omega - \theta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} - \frac{r^2 - r \cos(\omega + \theta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega + \theta)}. \quad (5.77)$$

Графики этих функций изображены на рис. 5.16 при $r = 0,9$ и $\theta = \pi/4$.

Соответствующие векторы нулей v_3 и полюсов v_1 , v_2 отмечены на рис. 5.15. АЧХ этой системы равна произведению длин векторов нулей (которые в нашем случае равны 1), деленному на произведение длин векторов полюсов:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|v_3|^2}{|v_1| \cdot |v_2|} = \frac{1}{|v_1| \cdot |v_2|}. \quad (5.78)$$

Когда $\omega \approx \theta$, длина вектора $v_1 = e^{j\omega} - re^{j\theta}$ очень мала, но меняется существенным образом при изменении ω в окрестности θ , в то время как длина вектора $v_2 = e^{j\omega} - re^{-j\theta}$ меняется мало. Поэтому можно считать, что, когда ω лежит в малой окрестности θ , АЧХ практически полностью состоит из вклада полюса в точке $re^{j\theta}$, что ясно видно на рис. 5.16. Из соображений симметрии, когда $\omega \approx -\theta$, ведущую роль в АЧХ играет полюс в точке $re^{-j\theta}$. \square

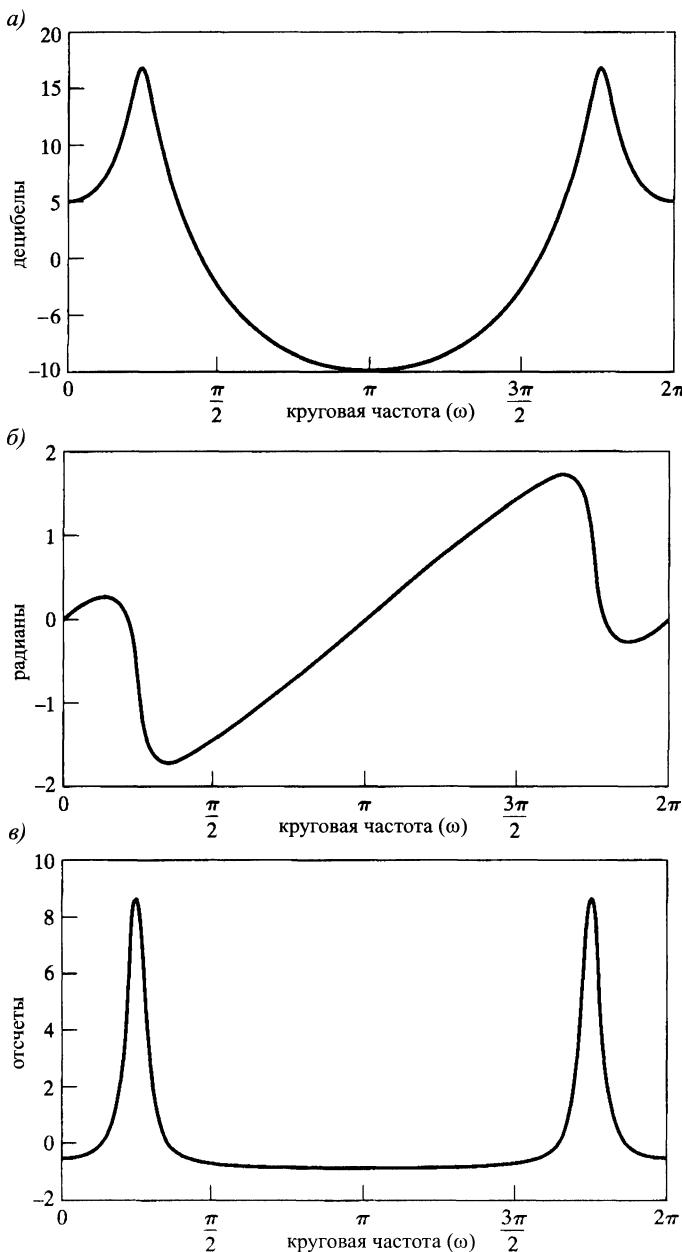


Рис. 5.16. КЧХ системы с характеристической функцией с парой комплексно сопряженных полюсов из примера 5.8 с $r = 0,9$ и $\theta = \pi/4$: а) логарифм АЧХ; б) ФЧХ; в) групповая задержка

Пример 5.9. КИХ-система второго порядка

Рассмотрим КИХ-систему с импульсной характеристики

$$h[n] = \delta[n] - 2r \cos \theta \delta[n-1] + r^2 \delta[n-2]. \quad (5.79)$$

Соответствующая характеристическая функция имеет вид

$$H(z) = 1 - 2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2}, \quad (5.80)$$

т. е. она обратна характеристической функции из предыдущего примера. Следовательно, графики функций, ассоциированных с КЧХ этой системы, получаются из кривых рис. 5.16 симметрией относительно горизонтальной оси координат. Заметим, что нули и полюса характеристической функции тоже поменяются местами. \square

Пример 5.10. БИХ-система третьего порядка

Здесь мы рассматриваем ФНЧ, разработанный одним из приближенных методов, о которых пойдет речь в главе 7. Его характеристическая функция равна

$$H(z) = \frac{0,05634(1+z^{-1})(1-1,0166z^{-1}+z^{-2})}{(1-0,683z^{-1})(1-1,4461z^{-1}+0,7957z^{-2})}. \quad (5.81)$$

Причем известно, что эта система устойчива. Положения нулей характеристической функции приведены в табл. 5.1, а полюсов — в табл. 5.2.

Таблица 5.1. Положения нулей

Модуль	Аргумент
1	π рад
1	$\pm 1,0376$ рад ($59,45^\circ$)

Таблица 5.2. Положения полюсов

Модуль	Аргумент
0,683	0 рад
0,892	$\pm 0,6257$ рад ($35,85^\circ$)

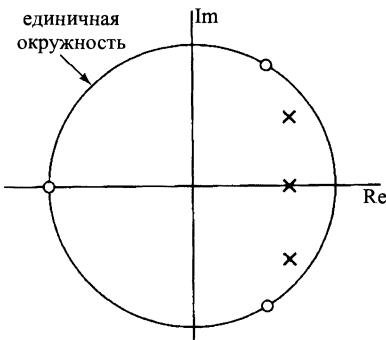


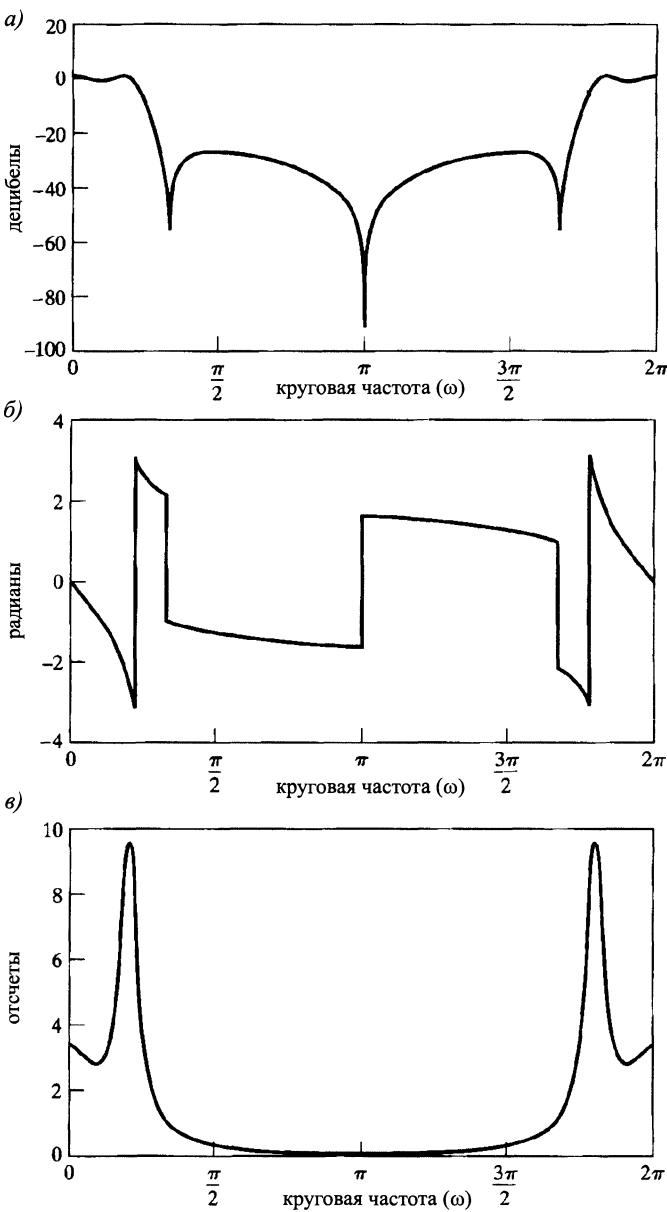
Рис. 5.17. Схема нулей и полюсов характеристической функции ФНЧ из примера 5.10

Схема нулей и полюсов этой функции дана на рис. 5.17. Графики логарифма АЧХ, ФЧХ и групповой задержки приведены на рис. 5.18. Эффект, оказываемый нулями, расположенными на единичной окружности под углами $\omega = \pm 1,0376$ и π , абсолютно очевиден. Однако полюсы расположены так, что, хотя в графике и возникают всплески при частотах, близких к их аргументам, логарифм АЧХ остается приблизительно равным 0 дБ на полосе частот от $\omega = 0$ до $\omega = 0,2\pi$ (и из-за симметрии от $\omega = 1,8\pi$ до $\omega = 2\pi$), а затем резко уходит вниз и остается меньше -25 дБ при частотах от $0,3\pi$ до $1,7\pi$. Как свидетельствует этот пример, нужные аппроксимации характеристик частотно-избирательных фильтров можно получить, используя полюса для наращивания АЧХ и нули для ее подавления.

В этом примере присутствуют оба типа разрывов ФЧХ. При $\omega \approx 0,22\pi$ возникает скачок в 2π рад ввиду использования главного значения, а в точках $\omega = \pm 1,0376$ и π разрывы получаются благодаря наличию полюсов на единичной окружности. \square

ввиду использования главного значения, а в точках $\omega = \pm 1,0376$ и π разрывы получаются благодаря наличию полюсов на единичной окружности. \square

Рис. 5.18. КЧХ ФНЧ из примера 5.10: а) логарифм АЧХ; б) ФЧХ; в) групповая задержка



5.5. Взаимосвязь АЧХ и ФЧХ

Как мы знаем, КЧХ ЛС-системы является Фурье-образом ее импульсной характеристики. В общем случае информация о АЧХ ничего не говорит о ФЧХ системы, и наоборот. Однако в системах, описываемых линейными разностными

уравнениями с постоянными коэффициентами, т. е. обладающих рациональной характеристической функцией, между АЧХ и ФЧХ некая связь присутствует. В частности, как мы увидим в этом параграфе, при фиксированной АЧХ и числе полюсов и нулей соответствующей характеристической функции существует лишь конечное число возможностей для ФЧХ. Аналогично, при известной ФЧХ по числу нулей и полюсов АЧХ выбирается из конечного числа вариантов. Более того, если добавить ограничение, называемое *минимальностью фазы*, АЧХ определяет ФЧХ однозначно, а ФЧХ задает АЧХ с точностью до скалярного множителя.

Чтобы исследовать возможные выборы характеристической функции при известном квадрате АЧХ системы, рассмотрим функцию $|H(e^{j\omega})|^2$, записанную как

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = H(z)H^*(1/z^*) \Big|_{z=e^{j\omega}}. \quad (5.82)$$

Ограничившись рациональной характеристической функцией вида (5.21):

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}, \quad (5.83)$$

получаем, что

$$H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k^* z)}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k^* z)}, \quad (5.84)$$

где b_0 и a_0 — вещественные числа. Значит, из равенства (5.82) следует, что квадрат АЧХ — это z -преобразование

$$C(z) = H(z)H^*(1/z^*) \quad (5.85)$$

$$= \left(\frac{b_0}{a_0} \right)^2 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z)}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z)}, \quad (5.86)$$

ограниченное на единичную окружность. Таким образом, по известной функции $|H(e^{j\omega})|^2$ можно построить $C(z)$ и попытаться восстановить характеристическую функцию. Прежде всего заметим, что каждый полюс d_k функции $H(z)$ индуцирует полюса функции $C(z)$ в точках d_k и $(d_k^*)^{-1}$. Аналогично, нулю c_k характеристической функции отвечают два нуля c_k и $(c_k^*)^{-1}$ функции $C(z)$. Таким образом, как нули, так и полюса функции $C(z)$ разбиваются на комплексно сопряженные взаимообратные (или инверсные) пары¹ ($a, 1/a^*$), причем один из элементов каждой пары входит в множество нулей и полюсов функции $H(z)$, а другой — $H^*(1/z^*)$. Более того, если один из элементов пары лежит внутри

¹В российской традиции преобразование комплексной плоскости, переводящее точку z в точку $1/z^*$, называют *инверсией*. При этом, очевидно, точки единичной окружности остаются на месте, а любая другая переходит в точку с тем же аргументом и модулем, обратным модулю исходной. Пары точек, связанные инверсией, называют *инверсными*. — Примеч. перев.

единичного круга, то инверсный к нему обязан выходить за границы этого круга. Причем элементы пары совпадают тогда и только тогда, когда они попадают на единичную окружность.

Предположим теперь, что $H(z)$ — характеристическая функция детерминированной устойчивой системы. Тогда все ее полюса лежат внутри единичного круга и поэтому могут быть однозначно восстановлены по полюсам функции $C(z)$. Однако предположение о детерминированности и устойчивости системы никак не помогает выделить нули характеристической функции из множества нулей функции $C(z)$, что легко увидеть из следующего примера.

Пример 5.11. Системы с одинаковой функцией $C(z)$

Рассмотрим две устойчивые системы с характеристическими функциями:

$$H_1(z) = \frac{2(1 - z^{-1})(1 + 0,5z^{-1})}{(1 - 0,8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0,8e^{-j\pi/4}z^{-1})} \quad (5.87)$$

и

$$H_2(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}{(1 - 0,8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0,8e^{-j\pi/4}z^{-1})}. \quad (5.88)$$

Схема нулей и полюсов этих функций изображены на рис. 5.19, а) и б) соответственно.

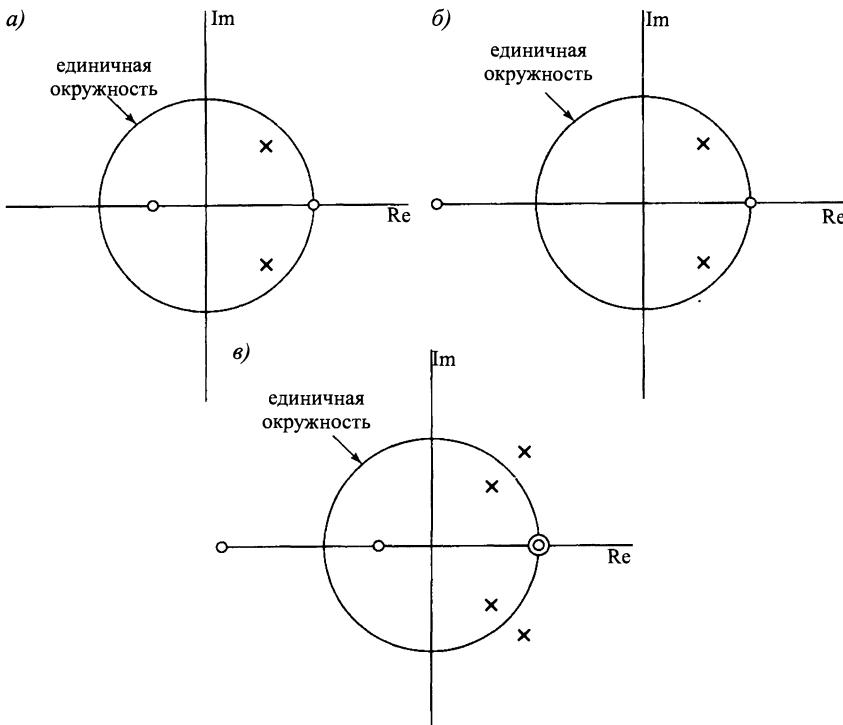


Рис. 5.19. Схемы нулей и полюсов характеристических функций и общего для них квадрата АЧХ: а) $H_1(z)$; б) $H_2(z)$; в) $C_1(z), C_2(z)$

Вычислим $C_i(z)$.

$$C_1(z) = H_1(z)H_1^*(1/z^*) =$$

$$= \frac{2(1 - z^{-1})(1 + 0,5z^{-1})2(1 - z)(1 + 0,5z)}{(1 - 0,8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0,8e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 - 0,8e^{-j\pi/4}z)(1 - 0,8e^{j\pi/4}z)}, \quad (5.89)$$

$$C_2(z) = H_2(z)H_2^*(1/z^*) =$$

$$= \frac{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})(1 - z)(1 + 2z)}{(1 - 0,8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0,8e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 - 0,8e^{-j\pi/4}z)(1 - 0,8e^{j\pi/4}z)}. \quad (5.90)$$

Учитывая тождество

$$4(1 + 0,5z^{-1})(1 + 0,5z) = (1 + 2z^{-1})(1 + 2z), \quad (5.91)$$

получаем, что $C_1(z) = C_2(z)$. Схема нулей и полюсов функций $C_i(z)$ приведена на рис. 5.19, ϵ). \square

Характеристические функции $H_1(z)$ и $H_2(z)$ из примера 5.11 отличаются друг от друга только положением нулей. Множитель $2(1 + 0,5z^{-1}) = (z^{-1} + 2)$ дает тот же вклад в квадрат АЧХ, что и множитель $(1 + 2z^{-1})$. Поэтому $|H_1(e^{j\omega})| = |H_2(e^{j\omega})|$. Однако ФЧХ этих систем различны.

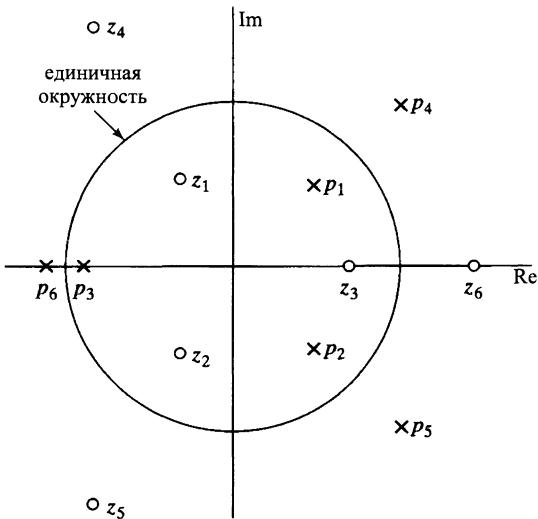


Рис. 5.20. Схема нулей и полюсов АЧХ из примера 5.12

Пример 5.12. Неоднозначность характеристической функции

Предположим, что нам нужно определить нули и полюса функции $H(z)$ по схеме нулей и полюсов функции $C(z)$ (рис. 5.20). Выпишем пары нулей и полюсов, один элемент которых связан с $H(z)$, а другой — с $H^*(1/z^*)$:

Пара полюсов 1: (P_1, P_4) Пара нулей 1: (Z_1, Z_4)

Пара полюсов 2: (P_2, P_5) Пара нулей 2: (Z_2, Z_5)

Пара полюсов 3: (P_3, P_6) Пара нулей 3: (Z_3, Z_6)

Опираясь на информацию о детерминированности и устойчивости системы, мы можем определить те полюса, которые связаны с ее характеристической функцией (их модуль меньше 1): P_1 , P_2 и P_3 . К сожалению, у нас нет оснований сделать аналогичный выбор нулей характеристической функции. Однако, предположив, что коэффициенты a_k и b_k дробей (5.18) и (5.19) вещественны, мы получим, что нули (и полюса) характеристической функции либо тоже вещественны, либо встречаются комплексно сопряженными парами. Отсюда вытекают следующие возможные тройки нулей функции $H(z)$:

$$Z_3; \quad Z_6; \quad (Z_1, Z_2); \quad (Z_4, Z_5).$$

Итак, существует всего лишь четыре кандидата на характеристическую функцию устойчивой детерминированной ЛС-системы с тремя полюсами и тремя нулями, для которых схема нулей и полюсов функции $C(z)$ имеет указанный на рис. 5.20 вид и, что равносильно, которые обладают одной и той же АЧХ. Если бы мы не предполагали вещественности коэффициентов a_k и b_k , число возможностей было бы существенно больше. Более того, если число нулей и полюсов характеристической функции не указано, количество возможностей для нее неограничено. Действительно, предположим, что у характеристической функции есть множитель $\frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$, т. е.

$$H(z) = H_1(z) \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}. \quad (5.92)$$

Такого типа множители называют *всепропускающими множителями*, поскольку их модуль равен единице, когда z бегает по единичной окружности. Мы будем изучать их более подробно в § 5.6. Нетрудно проверить, что

$$C(z) = H(z)H^*(1/z^*) = H_1(z)H_1^*(1/z^*), \quad (5.93)$$

т. е. всепропускающие множители сокращаются при построении $C(z)$ и, следовательно, их невозможно обнаружить, изучая эту функцию. Значит, если число нулей и полюсов функции $H(z)$ не указано, то любой выбор $H(z)$, сделанный по $C(z)$, можно дополнить произвольным числом всепропускающих множителей, полюса которых находятся внутри единичного круга ($|a| < 1$). \square

5.6. Всепропускающие системы

Как было отмечено в примере 5.12, АЧХ устойчивой системы с характеристической функцией вида

$$H_{\text{ap}}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \quad (5.94)$$

не зависит от ω . В этом можно убедиться, записав КЧХ как

$$H_{\text{ap}}(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} = e^{-j\omega} \frac{1 - a^*e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}. \quad (5.95)$$

Модуль члена $e^{-j\omega}$ здесь равен 1, а числитель и знаменатель дроби — комплексно сопряженные числа, в связи с чем их модули совпадают. Следовательно, $|H_{\text{ap}}(e^{j\omega})| = 1$. Системы с постоянной АЧХ называются *всепропускающими*, поскольку они пропускают все частотные компоненты входного сигнала, однородно их усиливая или ослабляя. Наиболее общий вид характеристических

функций всепропускающих систем с вещественноненеизменной импульсной характеристикой получается как произведение множителей (5.94), комплексные полюса которых дополнены своими сопряженными:

$$H_{ap}(z) = A \prod_{k=1}^{M_r} \frac{z^{-1} - d_k}{1 - d_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{(z^{-1} - e_k^*)(z^{-1} - e_k)}{(1 - e_k z^{-1})(1 - e_k^* z^{-1})}, \quad (5.96)$$

где A — положительная константа; d_k — вещественные, а e_k — комплексные полюса функции $H_{ap}(z)$. При этом для устойчивой детерминированной системы выполнено условие $|d_k| < 1$ и $|e_k| < 1$. В наших общих обозначениях характеристические функции всепропускающих систем имеют $M = N = 2M_c + M_r$ полюсов и нулей. На рис. 5.21 показана типичная схема нулей и полюсов этой характеристической функции в случае $M_r = 2$ и $M_c = 1$. Заметим, что нули и полюса функции $H_{ap}(z)$ можно разбить на инверсные пары.

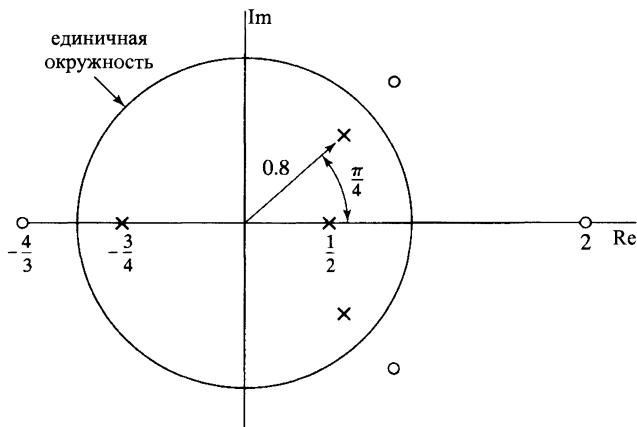


Рис. 5.21. Типичная схема нулей и полюсов характеристической функции всепропускающей системы

Комплексная частотная характеристика общей всепропускающей системы выражается через КЧХ систем первого порядка (5.94). Каждый из множителей в случае устойчивой всепропускающей системы имеет единственный полюс внутри единичного круга и инверсный ему нуль. АЧХ, соответствующая такому члену, как мы уже вычислили, равна 1. Поэтому логарифм АЧХ в децибелах нулевой. Представив a в показательной форме как $a = re^{j\theta}$, выпишем фазу характеристической функции (5.94):

$$\triangleleft \left[\frac{e^{-j\omega} - re^{-j\theta}}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}} \right] = -2 \operatorname{arctg} \left[\frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \right]. \quad (5.97)$$

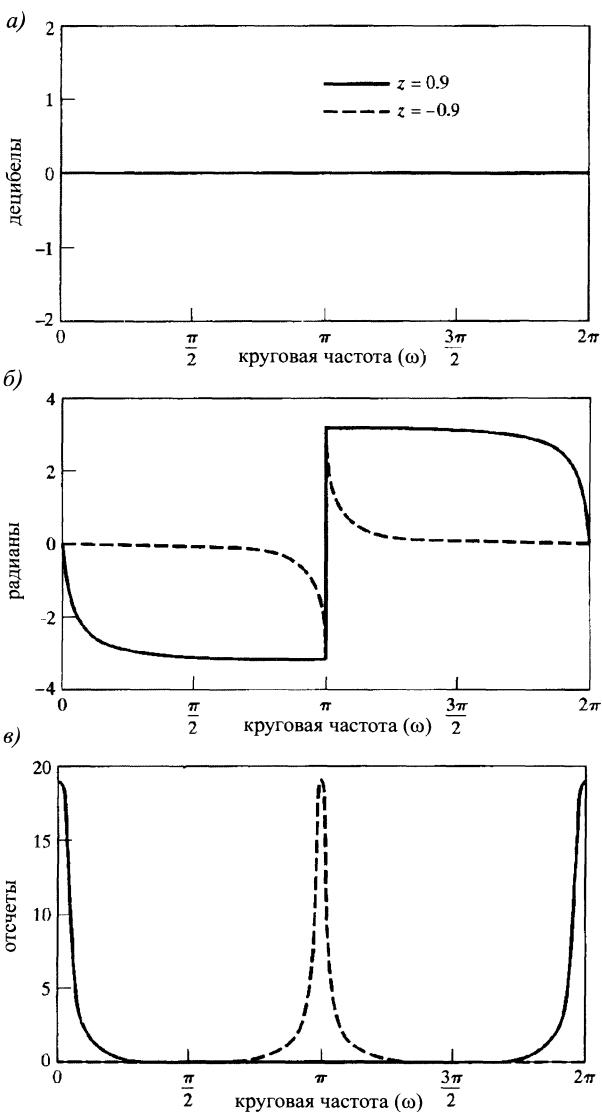
Аналогично, ФЧХ всепропускающей системы второго порядка с полюсами в точках $z = re^{j\theta}$ и $z = re^{-j\theta}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \triangleleft \left[\frac{(e^{-j\omega} - re^{-j\theta})(e^{-j\omega} - re^{j\theta})}{(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})(1 - re^{-j\theta}e^{-j\omega})} \right] = \\ = -2\omega - 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \right] - 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{r \sin(\omega + \theta)}{1 - r \cos(\omega + \theta)} \right]. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Пример 5.13. Всепропускающие системы первого и второго порядка

На рис. 5.22 показаны графики логарифма АЧХ, ФЧХ и групповой задержки двух всепропускающих систем первого порядка: с вещественными полюсами в точках $z = 0,9$ ($\theta = 0, r = 0,9$) и $z = -0,9$ ($\theta = \pi, r = 0,9$). Кроме того, на рис. 5.23 вычерчены аналогичные графики всепропускающей системы второго порядка с полюсами в точках $z = 0,9e^{j\pi/4}$ и $z = 0,9e^{-j\pi/4}$. \square

Рис. 5.22. КЧХ всепропускающих фильтров с вещественными полюсами в точках $z = 0,9$ (сплошная линия) и $z = -0,9$ (пунктирная линия): а) логарифм АЧХ; б) ФЧХ; в) групповая задержка



Предыдущий пример иллюстрирует общее свойство всепропускающих систем. На рис. 5.22, б) мы видим, что ФЧХ таких систем неположительна на интервале $0 < \omega < \pi$. Разрыв в графике фазы на рис. 5.23, б) — результат ее пересчета

в смысле главного значения. Однако значения непрерывной ФЧХ тоже неположительны на этом интервале. Поскольку характеристическая функция (5.96) общей всепропускающей системы — произведение таких множителей первого и второго порядка, то можно сделать предположение о неположительности (непрерывной) ФЧХ $\arg[H_{ap}(e^{j\omega})]$ детерминированной всепропускающей системы на интервале $(0; \pi)$. Это может оказаться неверным, если вычислять фазу в смысле главного значения, как и происходит на рис. 5.24, где показаны графики логарифма АЧХ, ФЧХ и групповой задержки всепропускающей системы, нули и полюса характеристической функции которой представлены рис. 5.21. Проверим наши гипотезы, исследовав групповую задержку.

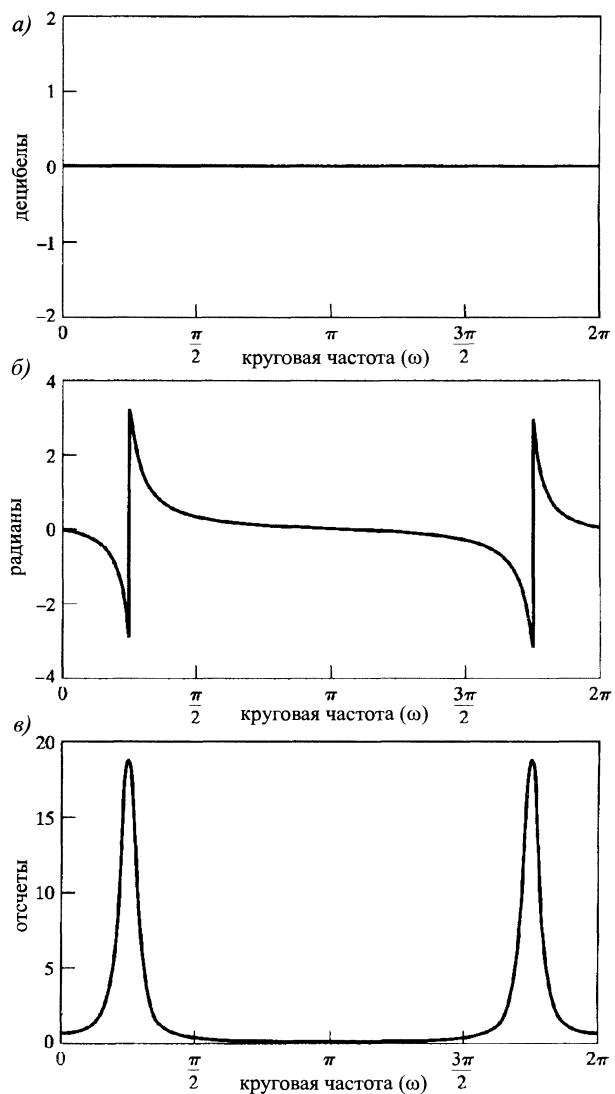
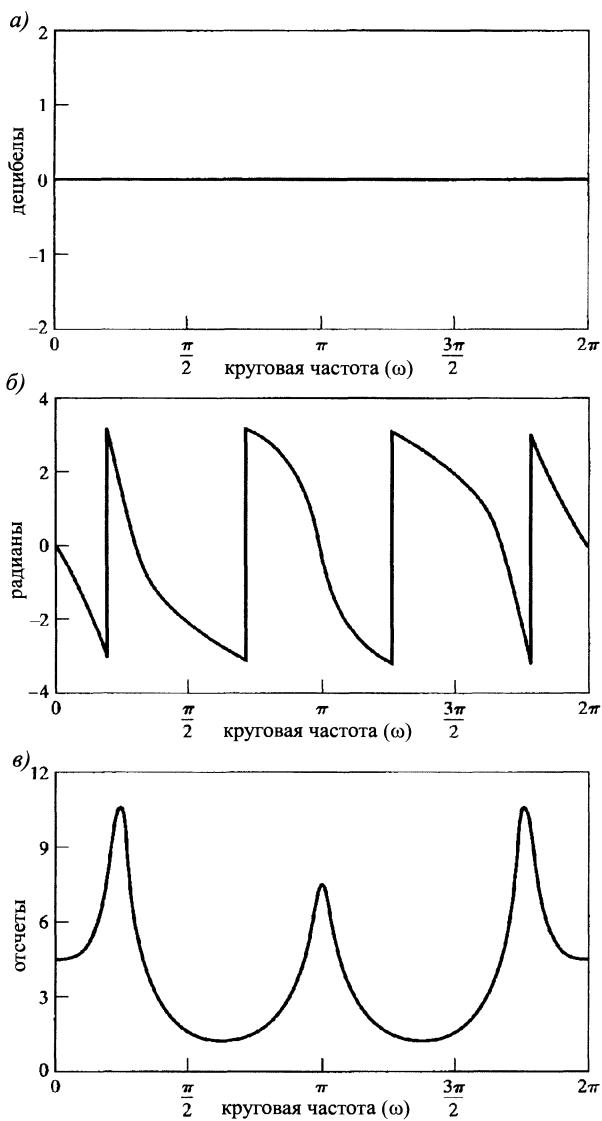


Рис. 5.23. КЧХ всепропускающей системы с полюсами в точках $z = 0, 9e^{\pm j\pi/4}$: а) логарифм АЧХ; б) ФЧХ; в) групповая задержка

Групповая задержка простой однополюсной всепропускающей системы по определению равна минус производной ФЧХ (5.97). С помощью несложных преобразований можно показать, что

$$\text{grd} \left[\frac{e^{-j\omega} - re^{-j\theta}}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}} \right] = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}|^2}. \quad (5.99)$$

Рис. 5.24. КЧХ всепропускающей системы с нулями и полюсами, отмеченными на рис. 5.21: а) логарифм АЧХ; б) ФЧХ; в) групповая задержка



Поскольку для устойчивой детерминированной системы $r < 1$, вклад, вносимый в групповую задержку одним множителем вида (5.99), всегда положителен. С другой стороны, групповая задержка всепропускающей системы большо-

го порядка является суммой положительных членов типа (5.99). Значит, значения групповой задержки детерминированной всепропускающей системы с рациональной характеристической функцией всегда положительны. Этот факт подтверждается рис. 5.22, с), 5.23, с) и 5.24, с), где приведены графики групповой задержки всепропускающих систем первого, второго и третьего порядка соответственно.

Положительность групповой задержки детерминированной всепропускающей системы — основа простого доказательства отрицательности фазы такой системы. Сначала заметим, что при $0 \leq \omega \leq \pi$ имеет место равенство:

$$\arg[H_{\text{ap}}(e^{j\omega})] = - \int_0^\omega \text{grd}[H_{\text{ap}}(e^{j\omega})] d\varphi + \arg[H_{\text{ap}}(e^{j0})]. \quad (5.100)$$

Из выражения (5.96) следует, что

$$H_{\text{ap}}(e^{j0}) = A \prod_{k=1}^{M_r} \frac{1 - d_k}{1 - d_k} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{|1 - e_k|^2}{|1 - e_k|^2} = A. \quad (5.101)$$

Следовательно, $\arg[H_{\text{ap}}(e^{j0})] = 0$ и, поскольку

$$\text{grd}[H_{\text{ap}}(e^{j\omega})] \geq 0, \quad (5.102)$$

формула (5.100) доказывает неравенство

$$\arg[H_{\text{ap}}(e^{j\omega})] \leq 0 \quad \text{при } 0 \leq \omega < \pi. \quad (5.103)$$

Положительность групповой задержки и неположительность непрерывной фазы — важные свойства детерминированных всепропускающих систем.

Всепропускающие системы находят широкое применение. Их используют, например, в качестве компенсаторов искажения фазы (или групповой задержки), о чем будет идти речь в главе 7. Они полезны и в теории минимально-фазовых систем (см. § 5.7). Кроме того, их можно использовать при преобразовании частотно-избирательных фильтров в другие виды фильтров и в конструкции фильтра с переменной частотой отсечки. Все эти приложения будут обсуждаться в главе 7.

5.7. Минимально-фазовые системы

В § 5.5 было показано, что АЧХ ЛС-системы с рациональной характеристической функцией определяет систему неоднозначно. Если дополнительно известно, что система устойчива и детерминирована, то полюса ее характеристической функции должны располагаться внутри единичного круга, однако о нулях функции при этом ничего сказать нельзя. В определенном классе задач бывает полезно вводить дополнительные ограничения на систему, а именно считать, что обратная система (с характеристической функцией $1/H(z)$) тоже устойчива и детерминирована. В подразделе 5.3.2 было продемонстрировано, что такое требование обеспечивает попадание нулей (как и полюсов) внутрь единичного круга, поскольку полюса функции $1/H(z)$ совпадают с нулями функции $H(z)$. Такие системы принято называть *минимально-фазовыми*. Термин «минимально-фазовая» обязан одному из свойств ФЧХ системы, которое непосредственно из

определения не следует. Это и другие фундаментальные свойства присущи только такому классу систем и поэтому могут фигурировать в качестве определения. Они будут изучаться в подразделе 5.7.3.

Если дан квадрат АЧХ (5.87) и известно, что система принадлежит классу минимально-фазовых, то $H(z)$ однозначно восстанавливается, поскольку включает в себя все нули и полюса функции $C(z) = H(z)H^*(1/z^*)$, попадающие внутрь единичного круга¹. Это наблюдение часто оказывается полезным при проектировании фильтров, которое обычно начинается с задания желаемой АЧХ (см. гл. 7).

5.7.1. Минимально-фазовое и всепропускающее разложение

Мы уже убедились (см. § 5.5), что квадрат АЧХ не может однозначно задавать характеристическую функцию $H(z)$, поскольку любой ее вариант с данной АЧХ может быть дополнен произвольным множителем, отвечающим всепропускающей системе. На языке формул это наблюдение говорит, что любая рациональная характеристическая функция² может быть записана как произведение

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{\text{ap}}(z), \quad (5.104)$$

где $H_{\min}(z)$ и $H_{\text{ap}}(z)$ — характеристические функции соответственно минимально-фазовой и всепропускающей систем.

Для доказательства предположим, что $H(z)$ имеет один нуль, расположенный вне единичного круга, а именно в точке $z = 1/c^*$, где $|c| < 1$, а остальные ее нули и полюса не выходят за границы этого круга. Тогда имеет место равенство:

$$H(z) = H_1(z)(z^{-1} - c^*), \quad (5.105)$$

где, по определению, $H_1(z)$ — характеристическая функция минимально-фазовой системы. Домножив и разделив это равенство на одну и ту же функцию, получим

$$H(z) = H_1(z)(1 - cz^{-1}) \frac{z^{-1} - c^*}{1 - cz^{-1}}. \quad (5.106)$$

Так как $|c| < 1$, множитель $H_1(z)(1 - cz^{-1})$ относится к минимально-фазовым системам, а отличается от $H(z)$ только тем, что нуль функции $H(z)$ в точке $z = 1/c^*$ выходит за границы единичного круга, в функции $H_1(z)(1 - cz^{-1})$ перемещается в точку $z = c$, оказываясь в положенных границах. Член $(z^{-1} - c^*)/(1 - cz^{-1})$ относится к всепропускающим системам. Этот пример непосредственно обобщается на случай, когда вне единичного круга находится много нулей и тем самым доказывается, что любая характеристическая функция представима в виде

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{\text{ap}}(z). \quad (5.107)$$

К нулям и полюсам функции $H_{\min}(z)$ относятся все те нули и полюса $H(z)$, которые лежат в единичном круге, плюс инверсные нулям функции $H(z)$, выходящим

¹Здесь мы предполагаем, что функция $C(z)$ не имеет нулей и полюсов на единичной окружности. Стого говоря, системы с полюсами на единичной окружности неустойчивы и в практической деятельности их стараются избегать. Нули же с единичным модулем часто возникают при профессиональной разработке фильтров. Согласно нашему определению, такие системы не относятся к минимально-фазовым, но обладают многими их свойствами.

²Из соображений удобства мы ограничим наши рассмотрения устойчивыми детерминированными системами, хотя наблюдение применимо к более широкому классу систем.

за границы единичного круга. Нули же функции H_{ap} совпадают с нулями $H(z)$, лежащими за единичной окружностью, а ее полюса компенсируют нули H_{\min} , принудительно помещенные в единичный круг.

Опираясь на разложение (5.107), мы можем конструировать характеристические функции неминимально-фазовых систем, инверсируя один или более нулей, лежащих внутри единичного круга, относительно его границы, или, в обратную сторону, можно строить характеристические функции минимально-фазовых систем из неминимально-фазовых, инверсируя все нули, лежащие за границами единичного круга, относительно его границы. В обоих случаях как минимально-фазовые, так и неминимально-фазовые системы обладают одной и той же АЧХ.

Пример 5.14. Разложение характеристической функции в произведение минимально-фазовой и всепропускающей

Для иллюстрации разложения характеристической функции устойчивой детерминированной системы в каскад минимально-фазовой и всепропускающей систем рассмотрим две устойчивые детерминированные системы с характеристическими функциями

$$H_1(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad (5.108)$$

$$H_2(z) = \frac{(1 + \frac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}. \quad (5.109)$$

Полюс первой характеристической функции находится внутри единичного круга ($z = -\frac{1}{2}$), а нуль лежит за его границами ($z = -3$). Нам предстоит подобрать подходящую всепропускающую систему, чтобы инверсировать этот нуль относительно единичной окружности. В нашей ситуации число c из формулы (5.105) равно $-\frac{1}{3}$. Поэтому, согласно соотношениям (5.106) и (5.107), всепропускающая компонента имеет вид:

$$H_{\text{ap}}(z) = \frac{z^{-1} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}},$$

а минимально-фазовая —

$$H_{\min}(z) = 3 \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{т. е.} \quad H_1(z) = \left(3 \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \right) \left(\frac{z^{-1} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \right).$$

У второй характеристической функции $H_2(z)$ два комплексных полюса расположены вне единичного круга, а вещественный полюс — внутри. Представим эту функцию в виде (5.105), вынеся множители $\frac{3}{2}e^{j\pi/4}$ и $\frac{3}{2}e^{-j\pi/4}$ из числителя:

$$H_2(z) = \frac{9(z^{-1} + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4})(z^{-1} + \frac{2}{3}e^{j\pi/4})}{4(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}.$$

Разлагая ее на множители как в представлении (5.106), получаем

$$H_2(z) = \left[\frac{9(1 + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1})}{4(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \right] \left[\frac{(z^{-1} + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4})(z^{-1} + \frac{2}{3}e^{j\pi/4})}{(1 + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1})} \right].$$

Первые квадратные скобки выделяют минимально-фазовый член, а вторые — всепропускающий. \square

5.7.2. Компенсирование воздействия КЧХ ЛС-системы

Сигнал во многих задачах обработки искажается ЛС-системой с нежелательной КЧХ, в связи с чем интересен процесс его обработки компенсирующей системой, как показано на рис. 5.25. Такая ситуация возникает, например, при передаче сигнала по каналу связи. Если достигается полная компенсация, то $s_c[n] = s[n]$, т. е. функция $H_c(z)$ обратна к $H_d(z)$. Однако если искажающая система устойчива и детерминирована и требуются аналогичные свойства от компенсирующей системы, то полная компенсация возможна, только когда искажающая система минимально-фазовая, т. е. обладает устойчивой детерминированной обратной системой.

Основываясь на предыдущем обсуждении, предположим, что $H_d(z)$ — известная рациональная функция. Тогда можно построить минимально-фазовую систему с $H_{d\min}(z)$, инвертируя все нули функции $H_d(z)$, расположенные вне единичного круга, относительно его границы. АЧХ исходной и минимально-фазовых систем совпадают, т. е. их характеристические функции отличаются друг от друга на всепропускающий множитель:

$$H_d(z) = H_{d\min}(z)H_{\text{ap}}(z). \quad (5.110)$$

Выбрав компенсирующий фильтр так, что

$$H_c(z) = \frac{1}{H_{d\min}(z)}, \quad (5.111)$$

получим общую характеристическую функцию, связывающую сигналы $s[n]$ и $s_c[n]$:

$$G(z) = H_d(z)H_c(z) = H_{\text{ap}}(z), \quad (5.112)$$

т. е. $G(z)$ — характеристическая функция всепропускающей системы. Следовательно, воздействие АЧХ искажающей системы полностью компенсируется, в то время как фаза сигнала меняется на $\angle H_{\text{ap}}(e^{j\omega})$.

Следующий пример иллюстрирует компенсирование воздействия АЧХ в том случае, когда компенсируемая система не принадлежит классу минимально-фазовых.

Пример 5.15. Компенсирование воздействия КИХ-системы

Рассмотрим искажающую характеристическую функцию

$$\begin{aligned} H_d(z) &= (1 - 0,9e^{j0,6\pi} z^{-1})(1 - 0,9e^{-j0,6\pi} z^{-1}) \times \\ &\times (1 - 1,25e^{j0,8\pi} z^{-1})(1 - 1,25e^{-j0,8\pi} z^{-1}), \end{aligned} \quad (5.113)$$

схема нулей и полюсов которой приведена на рис. 5.26. Так как $H_d(z)$ имеет только нули (все полюса попали в точку $z = 0$), то импульсная характеристика этой системы — конечная последовательность. Следовательно, система является устойчивой. Кроме того,

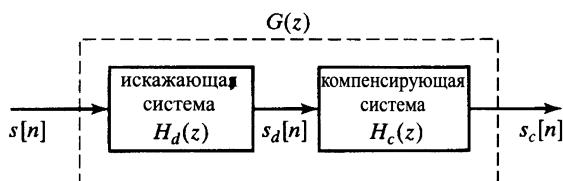


Рис. 5.25. Иллюстрация компенсирования искажения линейным фильтрованием



Рис. 5.26. Схема нулей и полюсов КИХ-системы из примера 5.15

поскольку $H_d(z)$ — многочлен с отрицательными степенями z , система детерминирована. Однако ввиду наличия двух нулей этой функции вне единичного круга система не принадлежит классу минимально-фазовых. На рис. 5.27 показаны графики логарифма АЧХ, ФЧХ и групповой задержки рассматриваемой системы.

Соответствующая минимально-фазовая система получается отражением нулей $z = 1, 25e^{\pm j0,8\pi}$ относительно единичной окружности в инверсные точки внутри единичного круга. Если записать $H_d(z)$ как

$$\begin{aligned} H_d(z) &= \\ &= (1 - 0, 9e^{j0,6\pi} z^{-1})(1 - 0, 9e^{-j0,6\pi} z^{-1})(1, 25)^2 \times \quad (5.114) \\ &\quad \times (z^{-1} - 0, 8e^{-j0,8\pi})(z^{-1} - 0, 8e^{j0,8\pi}), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} H_{\min}(z) &= \\ &= (1, 25)^2 (1 - 0, 9e^{j0,6\pi} z^{-1})(1 - 0, 9e^{-j0,6\pi} z^{-1}) \times \quad (5.115) \\ &\quad \times (1 - 0, 8e^{-j0,8\pi} z^{-1})(1 - 0, 8e^{j0,8\pi} z^{-1}), \end{aligned}$$

а характеристическая функция всепропускающей системы, связывающая $H_{\min}(z)$ и $H_d(z)$, имеет вид:

$$H_{\text{ap}}(z) = \frac{(z^{-1} - 0, 8e^{-j0,8\pi})(z^{-1} - 0, 8e^{j0,8\pi})}{(1 - 0, 8e^{j0,8\pi} z^{-1})(1 - 0, 8e^{-j0,8\pi} z^{-1})}. \quad (5.116)$$

Логарифм АЧХ, ФЧХ и групповая задержка минимально-фазовой системы показаны на рис. 5.28. Рисунки 5.27, а) и 5.28, а), конечно, совпадают. Аналогичные кривые всепропускающей системы изображены на рис. 5.29.

Заметим, что характеристическая функция, обратная для $H_d(z)$, имеет полюс в точках $z = 1, 25e^{\pm j0,8\pi}$ и $z = 0, 9e^{\pm j0,6\pi}$. Поэтому соответствующая система будет детерминированной, но неустойчивой. Характеристическая функция системы, обратной к минимально-фазовой, равна $1/H_{\min}(z)$. Если эту обратную систему использовать в каскадном подключении с системой из рис. 5.25, то общая эффективная характеристическая функция совпадет с $H_{\text{ap}}(z)$ из (5.116). □

5.7.3. Свойства минимально-фазовых систем

Термин «минимально-фазовая» закреплен за детерминированными устойчивыми системами, обладающими детерминированной и устойчивой обратной системой. Такой выбор названия обусловлен неочевидным свойством ФЧХ этих систем, вытекающим из нашего определения. В этом подразделе мы расскажем о нескольких интересных и важных свойствах минимально-фазовых систем, отличающих их от других систем с той же АЧХ.

Минимальность функции запаздывания фазы

Термин «минимально-фазовая» как описательное название систем с полюсами и нулями характеристической функции, расположенными внутри единичного

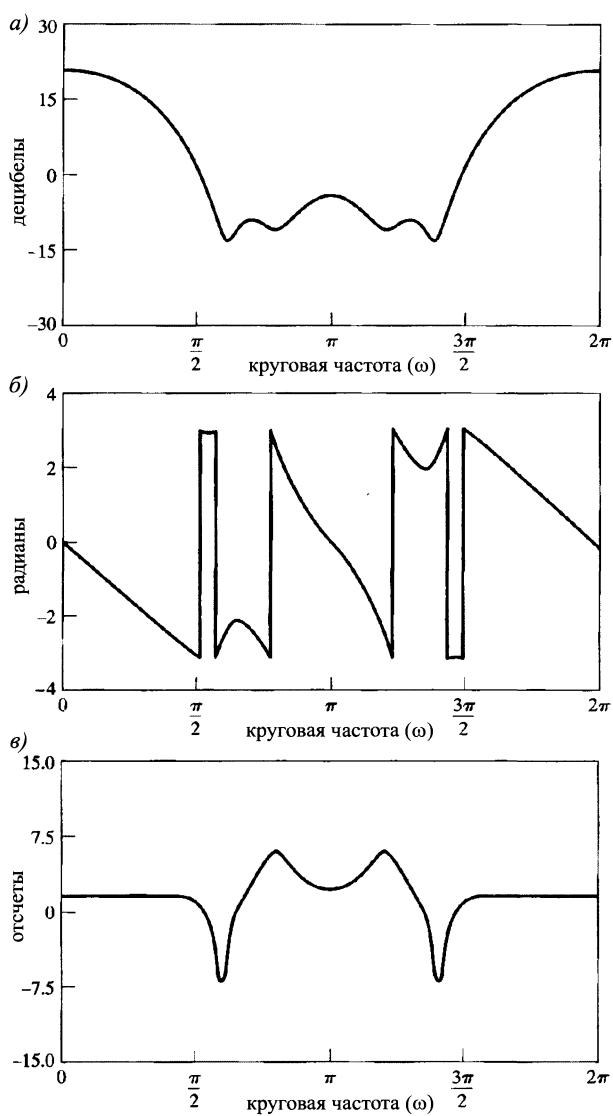
круга, объясняется примером 5.15. Напомним, что ввиду формулы (5.104) непрерывная ФЧХ произвольной ЛС-системы представляется в виде суммы ФЧХ минимально-фазовой и всепропускающей систем:

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[H_{\min}(e)] + \arg[H_{\text{ap}}(e^{j\omega})], \quad (5.117)$$

т. е.

$$\arg[H_{\min}(e)] = \arg[H(e^{j\omega})] - \arg[H_{\text{ap}}(e^{j\omega})].$$

Рис. 5.27. КЧХ КИХ-системы из примера 5.15: а) логарифм АЧХ; б) ФЧХ; в) групповая задержка



В § 5.6 было доказано, что значения непрерывной ФЧХ всепропускающей системы неположительны на полуинтервале $[0; \pi]$ (см. формулу (5.103)). Сле-

довательно, в процессе построения характеристической функции минимально-фазовой системы, инверсируя нули исходной функции внутрь единичного круга, мы постоянно увеличиваем непрерывную ФЧХ системы, не меняя ее АЧХ, или уменьшаем ФЧХ с обратным знаком, которую называют *функцией запаздывания фазы*.

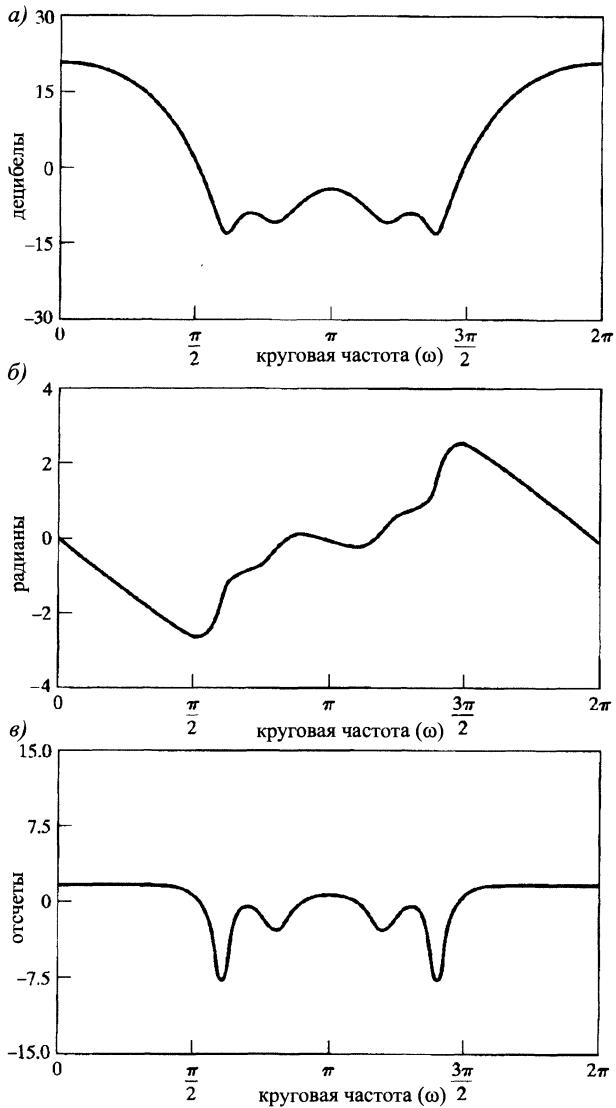
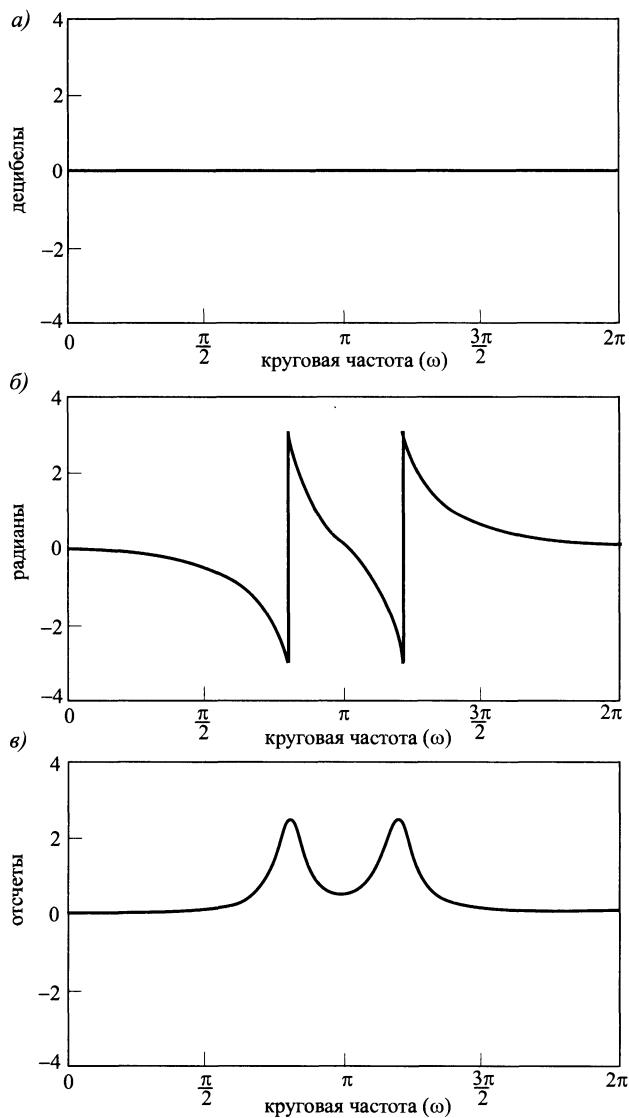


Рис. 5.28. КЧХ минимально-фазовой системы из примера 5.15:
a) логарифм АЧХ; б) ФЧХ; в) групповая задержка

Таким образом, детерминированная устойчивая система с данной АЧХ, полюса и нули характеристической функции которой расположены внутри единичного круга, обладает минимальной функцией запаздывания фазы (на полуинтервале $[0; \pi)$) среди всех систем с фиксированной АЧХ. Конечно, более подходящее

название таких систем — система с минимальным запаздыванием фазы, однако в силу сложившейся традиции используется термин «минимально-фазовая».

Рис. 5.29. КЧХ всепропускающей системы из примера 5.15 (сумма соответствующих графиков рис. 5.28 и 5.29 дает кривую из рис. 5.27, где суммирование фаз происходит по модулю 2π): а) логарифм АЧХ; б) ФЧХ (главное значение); в) групповая задержка



Надо признаться, что и минимально-фазовая система (в смысле нашего определения) не однозначно восстанавливается по схеме нулей и полюсов своей характеристической функции. Действительно, характеристические функции систем с импульсной характеристикой $\pm h[n]$ отличаются знаком, в связи с чем обладают одним набором нулей и полюсов. Но умножение характеристической функции на -1 ведет к смещению ФЧХ системы на π рад. Чтобы устраниТЬ эту неопределенность, в определение минимально-фазовой системы можно ввести дополнительные ограничения.

тельное ограничение:

$$H(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] > 0, \quad (5.118)$$

т. е. добавить условие положительности значения КЧХ при нулевой частоте. Однако этим дополнением обычно пренебрегают, и наше определение, сформулированное в начале § 5.7, его не учитывает, хотя и служит общепринятым определением класса минимально-фазовых систем.

Минимальность групповой задержки

Пример 5.15 иллюстрирует еще одно свойство систем, у которых все нули и полюса характеристической функции попадают внутрь единичного круга. Прежде всего заметим, что групповая задержка систем с фиксированной АЧХ записывается в виде:

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \text{grd}[H_{\min}(e^{j\omega})] + \text{grd}[H_{\text{ap}}(e^{j\omega})]. \quad (5.119)$$

В § 5.6 было доказано, что групповая задержка всепропускающей системы (второе слагаемое формулы (5.119)) положительна при всех значениях ω . По этой причине ввиду равенства (5.119) групповая задержка минимально-фазовых систем (рис. 5.28, б)) меньше групповой задержки неминимально-фазовых систем (рис. 5.29, б)) с той же АЧХ. Таким образом, рассмотрев все системы с данной АЧХ, мы обнаружим, что минимальной групповой задержкой обладают те из них, все полюса и нули характеристической функции которых расположены внутри единичного круга. Поэтому еще одно подходящее название таких систем — системы с минимальной групповой задержкой, хотя оно почти никогда не употребляется.

Минимальность задержки энергии

Вернемся к системе из примера 5.15. Легко заметить, что существует ровно четыре КИХ-системы с той же АЧХ, что и система с характеристической функцией (5.113). Их схемы нулей и полюсов изображены на рис. 5.30. При этом системе из примера 5.15 соответствует рис. 5.30, г), а рис. 5.30, а) — минимально-фазовой системе с характеристической функцией (5.115). Сравнивая импульсные характеристики этих четырех систем (см. рис. 5.31), можно заметить, что отсчеты импульсной характеристики минимально-фазовой системы, расположенные слева, больше соответствующих отсчетов остальных последовательностей. Действительно, в этом примере, да и в общей ситуации, имеет место равенство:

$$|h[0]| \leq |h_{\min}[0]| \quad (5.120)$$

для всех детерминированных устойчивых последовательностей $h[n]$, подчиняющихся условию:

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|. \quad (5.121)$$

Доказательству этого свойства посвящена задача 5.65.

Все импульсные характеристики с фиксированной АЧХ $|H_{\min}(e^{j\omega})|$ обладают той же суммарной энергией, что и $h_{\min}[n]$, так как согласно теореме Парсеваля,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_{\min}(e^{j\omega})|^2 d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} |h_{\min}[n]|^2. \quad (5.122)$$

Если определить частичную энергию импульсной характеристики как

$$E[n] = \sum_{m=0}^n |h[m]|^2, \quad (5.123)$$

то можно показать (см. задачу 5.66), что

$$\sum_{m=0}^n |h[m]|^2 \leq \sum_{m=0}^n |h_{\min}[m]|^2 \quad (5.124)$$

для любой импульсной характеристики $h[n]$, принадлежащей семейству систем с данной АЧХ (5.121).

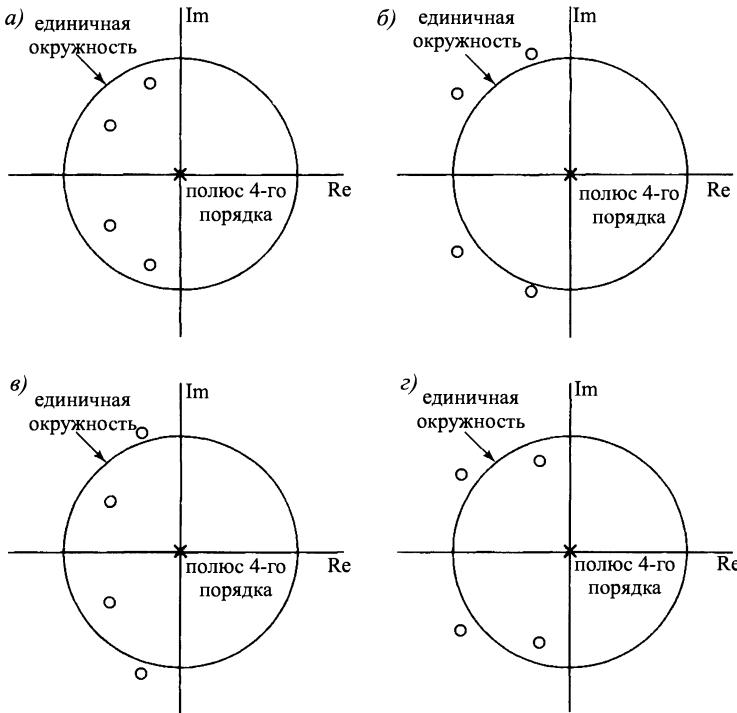


Рис. 5.30. Четыре системы с одной и той же АЧХ. Нули расположены в различных комбинациях точек $0, 9e^{\pm j0.6\pi}$, $0, 8e^{\pm j0.8\pi}$ и их образах при инверсии

Частичная энергия минимально-фазовой системы по большей части сконцентрирована вблизи нулевого отсчета, т. е. энергия минимально-фазовой системы задержана наименьшим образом по сравнению с остальными системами, имеющими ту же АЧХ. По этим причинам минимально-фазовые системы называют системами с *минимальной задержкой энергии*, или просто *минимально-задержанными системами*. Свойство задержки иллюстрируется рис. 5.32. Из нашего примера следует, что минимальная задержка энергии присуща системе, все нули характеристической функции которой находятся *внутри* единичного круга (т. е. минимально-фазовой), а максимальная задержка энергии — систе-

ме со всеми нулями *вне* единичного круга. Последнюю систему часто называют *максимально-фазовой*. Можно показать, что аналогичное утверждение справедливо и в общей ситуации.

a)

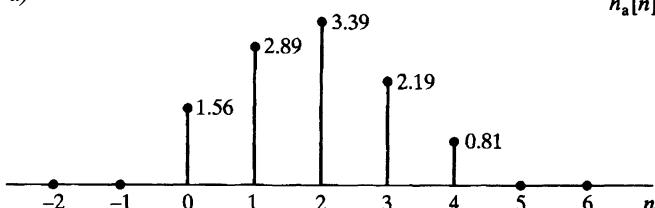
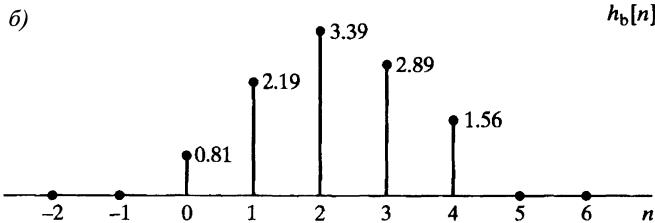
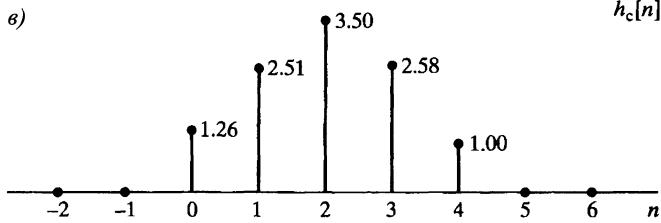
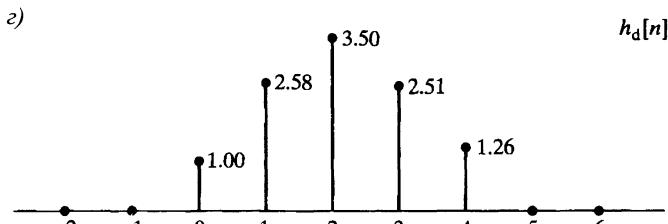
 $h_a[n]$

Рис. 5.31. Импульсные характеристики, соответствующие схемам нулей и полюсов из рис. 5.30

б)

 $h_b[n]$  $h_c[n]$

в)

 $h_d[n]$

5.8. Линейные системы с обобщенной линейной фазой

При проектировании фильтров и других систем обработки сигналов, которые пропускают сигналы в некоторых полосах частот без искажения, желательно

добиваться практически постоянной АЧХ и нулевой ФЧХ над этими полосами. К сожалению, в случае детерминированных систем получить нулевую ФЧХ невозможно, и поэтому приходится мириться с каким-то искажением фазы. Как мы видели в подразделе 5.2.2, искажение, вносимое системой с линейной ФЧХ с целочисленным угловым коэффициентом, — простой сдвиг во времени, а нелинейная ФЧХ может оказывать значительное влияние на форму сигнала даже при постоянной АЧХ. Таким образом, во многих ситуациях следует отдавать предпочтение системам с линейной или приближенно-линейной фазой. В этом параграфе мы изучаем обобщение понятия линейной фазы и идеальной временной задержки, рассматривая класс систем с постоянной групповой задержкой. Начнем с пересмотра концепции задержки в контексте дискретных систем.

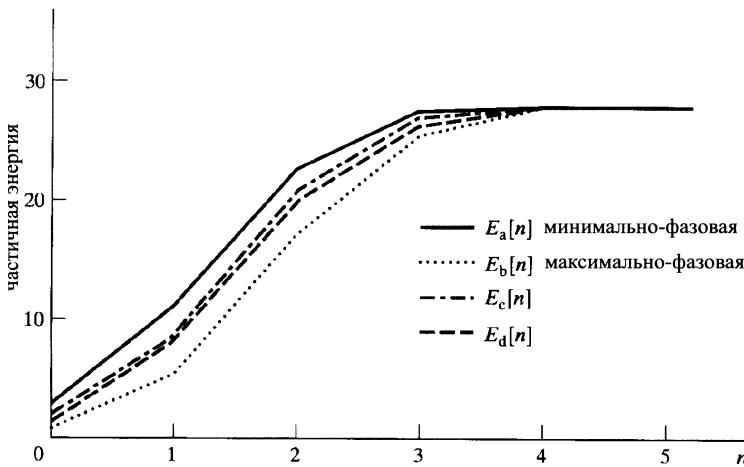


Рис. 5.32. Частичная энергия четырех последовательностей из рис. 5.31. $E_a[n]$ отвечает минимально-фазовой последовательности $h_a[n]$, а $E_b[n]$ — максимально-фазовой последовательности $h_b[n]$

5.8.1. Системы с линейной фазой

Рассмотрим ЛС-систему с КЧХ

$$H_{\text{id}}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha}, \quad |\omega| < \pi, \quad (5.125)$$

где α — вещественное (не обязательно целое) число. Такая система является системой «идеальной задержки» на α отсчетов. Обратите внимание, что АЧХ и групповая задержка этой системы постоянны, а фаза линейна, т. е.

$$|H_{\text{id}}(e^{j\omega})| = 1, \quad (5.126)$$

$$\angle H_{\text{id}}(e^{j\omega}) = -\omega\alpha, \quad (5.127)$$

$$\text{grd} H_{\text{id}}(e^{j\omega}) = \alpha. \quad (5.128)$$

Применяя обратное преобразование Фурье к КЧХ, находим импульсную характеристику

$$h_{\text{id}}[n] = \frac{\sin \pi(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (5.129)$$

Значит, реакцией системы на сигнал $x[n]$ служит

$$y[n] = x[n] * \frac{\sin \pi(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\sin \pi(n - k - \alpha)}{\pi(n - k - \alpha)}. \quad (5.130)$$

Если $\alpha = n_d \in \mathbb{Z}$, то, как упоминалось в подразделе 5.2.2,

$$h_{\text{id}}[n] = \delta[n - n_d] \quad (5.131)$$

и

$$y[n] = x[n] * \delta[n - n_d] = x[n - n_d]. \quad (5.132)$$

Итак, при целочисленном $\alpha = n_d$ система с линейной фазой и единичным коэффициентом усиления с КЧХ (5.125) просто сдвигает входную последовательность на n_d отсчетов. Интерпретация такой системы с нецелым α приведена в примере 4.9 на с. 176. Более точное представление системы с КЧХ (5.125) показано на рис. 5.33, где $h_c(t) = \delta(t - \alpha T)$ и $H_c(j\Omega) = e^{-j\Omega\alpha T}$, так что

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha}, \quad |\omega| < \pi. \quad (5.133)$$

В этом представлении параметр T можно брать какой угодно, например единичный. Важно еще раз подчеркнуть, что это представление имеет смысл вне зависимости от того, получен ли был входной сигнал $x[n]$ дискретизацией непрерывного или нет. Согласно рис. 5.33, $y[n]$ — последовательность отсчетов сдвинутой во времени узкополосной интерполяции входной последовательности $x[n]$, т. е. $y[n] = x_c(nT - \alpha T)$. Говорят, что рассматриваемая система имеет временной сдвиг на α отсчетов даже тогда, когда α не целое число. Если групповая задержка α положительна, то сдвиг — задержка времени, а если отрицательно — опережение.

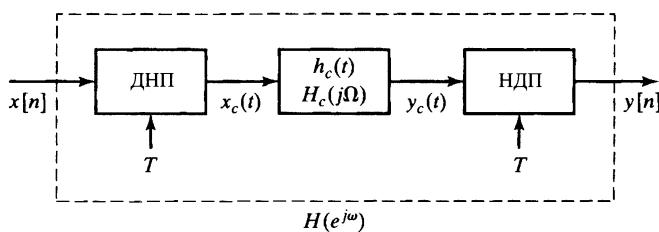


Рис. 5.33. Интерпретация нецелой задержки в дискретных системах

Описанная точка зрения помогает интерпретировать линейную ФЧХ даже в том случае, когда АЧХ не постоянна. Рассмотрим более общую КЧХ с линейной фазой:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\omega\alpha}, \quad |\omega| < \pi. \quad (5.134)$$

Эта формула предлагает свою интерпретацию системы из рис. 5.34. Сигнал $x[n]$ фильтруется системой с вещественной КЧХ $|H(e^{j\omega})|$ и нулевой фазой, а выход фильтра затем «сдвигается во времени» промежуток α (на целый или нецелый). Примером такой системы служит идеальный линейно-фазовый ФНЧ с КЧХ

$$H_{\text{lp}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases} \quad (5.135)$$

Его импульсная характеристика равна

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin \omega_c(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)}. \quad (5.136)$$

Заметим, что формула (5.129) получается из (5.136) при $\omega_c = \pi$.

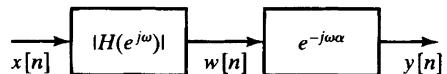


Рис. 5.34. Представление линейно-фазовой ЛС-системы как каскада фильтра АЧХ и временного сдвига

Пример 5.16. Идеальный ФНЧ с линейной фазой

Импульсная характеристика идеального ФНЧ иллюстрирует некоторые интересные свойства линейно-фазовых систем. На рис. 5.35, а) показана $h_{lp}[n]$ при $\omega_c = 0,4\pi$ и $\alpha = n_d = 5$. Заметим, что при целом α импульсная характеристика симметрична относительно $n = n_d$, т. е.

$$h_{lp}[2n_d - n] = \frac{\sin \omega_c(2n_d - n - n_d)}{\pi(2n_d - n - n_d)} = \frac{\sin \omega_c(n_d - n)}{\pi(n_d - n)} = h_{lp}[n]. \quad (5.137)$$

В этом случае мы могли бы определить *систему с нулевой фазой*, положив

$$\hat{H}_{lp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})e^{j\omega n_d} = |H_{lp}|. \quad (5.138)$$

При этом импульсная характеристика идеального ФНЧ сдвигается налево на n_d отсчетов, становясь четной последовательностью:

$$\hat{h}_{lp}[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} = \hat{h}_{lp}[-n]. \quad (5.139)$$

На рис. 5.35, б) изображена импульсная характеристика $h_{lp}[n]$ при $\omega_c = 0,4\pi$ и $\alpha = 4,5$, что является типичным случаем линейной фазы, соответствующей задержке на полуцелое число¹. Как и при целом α , импульсная характеристика фильтра симметрична относительно точки $n = \alpha$:

$$h_{lp}[2\alpha - n] = h_{lp}[n]. \quad (5.140)$$

Однако здесь центр симметрии — полуцелое число. Поэтому четную импульсную характеристику с нулевой фазой невозможно получить простым сдвигом. Такая ситуация напоминает пример 4.10 с нечетным M .

На рис. 5.35, в) представлен третий случай, где вообще нет никакой симметрии. Там $\omega_c = 0,4\pi$ и $\alpha = 4,3$. □

КЧХ общей системы с линейной фазой равна

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\omega\alpha}. \quad (5.141)$$

Как видно из примера 5.16, если 2α — целое число (т.е. α — целое или полуцелое), то соответствующая импульсная характеристика обладает свойством четной симметрии относительно центра α , т. е.

$$h[2\alpha - n] = h[n]. \quad (5.142)$$

Если $2\alpha \notin \mathbb{Z}$, то импульсная характеристика не симметрична. Этот факт отражен на рис. 5.35, в), где показана импульсная характеристика без какой-либо симметрии, но с линейной фазой или, что эквивалентно, с постоянной групповой задержкой.

¹ Целое число плюс половина. — Примеч. перев.

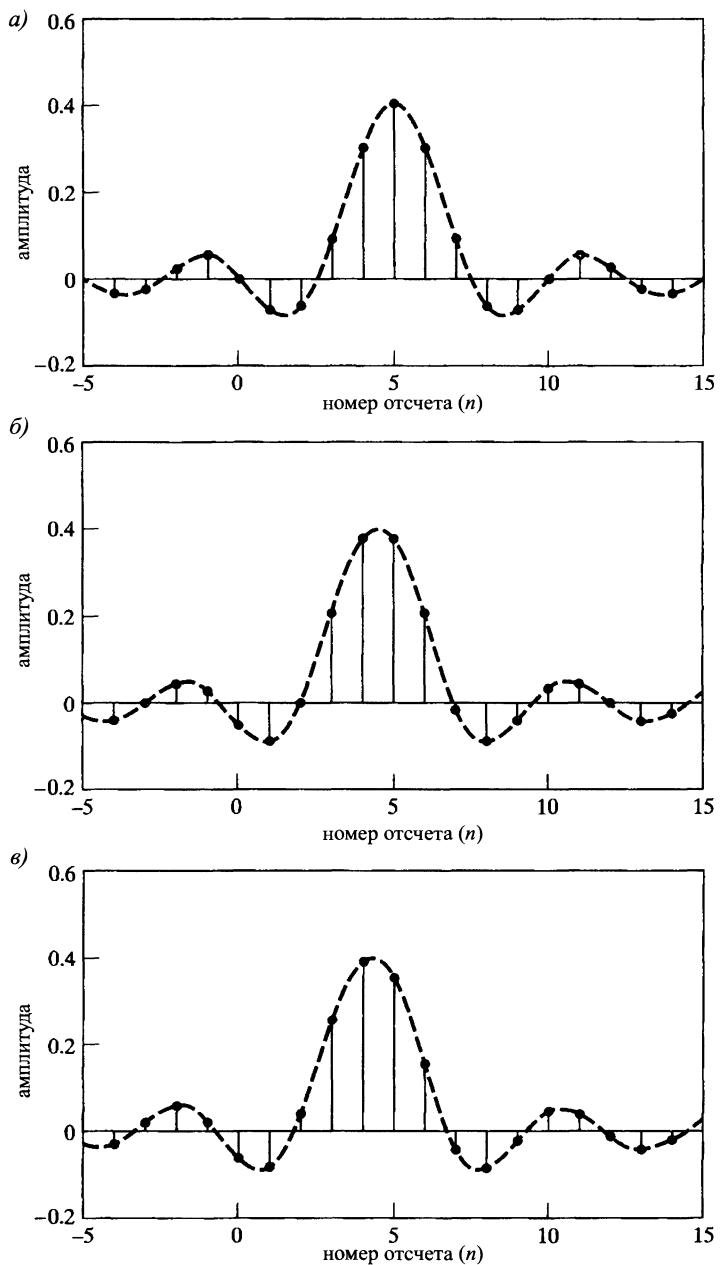


Рис. 5.35. Импульсная характеристика идеального ФНЧ с $\omega_c = 0,4\pi$:
 а) задержка = $\alpha = 5$;
 б) задержка = $\alpha = 4,5$;
 в) задержка = $\alpha = 4,3$

5.8.2. Обобщенная линейная фаза

В подразделе 5.8.1 был исследован класс систем с КЧХ $H(e^{j\omega})$ вида (5.134), т. е. вещественноненормированной неотрицательной функцией от ω , умноженной на член $e^{-j\omega\alpha}$.

с линейной фазой. Очевидно, что ФЧХ таких систем равна аргументу линейно-фазового множителя $\angle H(e^{j\omega}) = -\omega\alpha$, в связи с чем системы этого класса называют системами с линейной фазой, или линейно-фазовыми. КЧХ (4.71) скользящего среднего из примера 4.10 равна произведению вещественнонзначеной функции от ω и линейно-фазового множителя. Однако, строго говоря, ее нельзя отнести к линейно-фазовым, поскольку множитель

$$\frac{1}{M+1} \frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)},$$

принимая отрицательные значения, добавляет к фазе π радиан.

Многие из достаточно сложных систем с КЧХ вида (4.71) находят широкое применение, и, следовательно, возникает необходимость несколько обобщить определение и концепцию линейной фазы. Систему с КЧХ вида

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega+j\beta}, \quad (5.143)$$

где α и β — постоянны, а $A(e^{j\omega})$ — вещественная (необязательно положительная) функция от ω , будем называть обобщенно линейно-фазовой или системой с обобщенной линейной фазой. Для линейно-фазовых систем (5.135) и фильтра скользящего среднего из примера 4.10 число $\beta = 0$, узкополосный дифференциатор из примера 4.5 имеет вид (5.143) с $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$ и $A(e^{j\omega}) = \omega/T$.

Системы с КЧХ вида (5.143) называются обобщенно линейно-фазовыми потому, что их ФЧХ кроме основного линейного члена $-\omega\alpha$ содержит еще и аддитивную константу β , так что графиком ФЧХ служит прямая линия. Если игнорировать точки разрыва, появляющиеся в результате пересчета в главное значение добавочной постоянной фазы, такая система будет характеризоваться постоянной групповой задержкой. Иначе говоря, класс систем, для которых

$$\tau(\omega) = \text{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}\{\arg[H(e^{j\omega})]\} = \alpha, \quad (5.144)$$

обладает линейной ФЧХ более общего вида

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \beta - \omega\alpha, \quad 0 < \omega < \pi, \quad (5.145)$$

где α и β — вещественные константы.

Напомним, что в подразделе 5.8.1 мы обнаружили симметрию импульсной характеристики линейно-фазовых систем относительно α , если число 2α целое. Чтобы увидеть проявление этого свойства в обобщенно линейно-фазовых системах, полезно вывести уравнение, которому может удовлетворять импульсная характеристика $h[n]$ и константы α и β систем с постоянной групповой задержкой. Искомое уравнение получается из того факта, что КЧХ этих систем может быть записана как

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{j(\beta-\alpha\omega)} = A(e^{j\omega}) \cos(\beta - \omega\alpha) + jA(e^{j\omega}) \sin(\beta - \omega\alpha), \quad (5.146)$$

или в равносильной форме:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cos \omega n - j \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sin \omega n, \quad (5.147)$$

где предполагается вещественность отсчетов последовательности $h[n]$. Вычи-

слим тангенс аргумента $H(e^{j\omega})$.

$$\operatorname{tg}(\beta - \omega\alpha) = \frac{\sin(\beta - \omega\alpha)}{\cos(\beta - \omega\alpha)} = \frac{-\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sin \omega n}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cos \omega n}.$$

Умножая обе части последнего равенства на знаменатели и пользуясь формулой синуса суммы, получаем необходимое условие на импульсную характеристику и константы α и β системы с постоянной групповой задержкой:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sin[\omega(n - \alpha) + \beta] = 0 \quad \text{для всех } \omega, \quad (5.148)$$

Это, к сожалению, не достаточное условие и ввиду своей сложности не дает нам способа построения линейно-фазовых систем. Можно показать, что формула (5.148) справедлива при следующих данных:

$$\beta = 0 \text{ или } \pi, \quad (5.149)$$

$$2\alpha = M \in \mathbb{Z}, \quad (5.150)$$

$$h[2\alpha - n] = h[n]. \quad (5.151)$$

Если $\beta = 0$ или π , то формула (5.148) приобретает вид:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sin[\omega(n - \alpha)] = 0. \quad (5.152)$$

Выбрав теперь полуцелое α , члены этого ряда можно сгруппировать попарно таким образом, что каждая пара в сумме будет давать тождественный нуль. Это условие, в свою очередь, влечет тот факт, что соответствующая КЧХ имеет вид (5.143) с $\beta = 0$ или π и четной вещественной функцией $A(e^{j\omega})$ от ω .

С другой стороны, если $\beta = \pi/2$ или $3\pi/2$, то сумма (5.148) редуцируется к формуле:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cos[\omega(n - \alpha)] = 0, \quad (5.153)$$

и можно показать, что при любом выборе констант и последовательности $h[n]$, при котором

$$\beta = \pi/2 \text{ или } 3\pi/2, \quad (5.154)$$

$$2\alpha = M \in \mathbb{Z}, \quad (5.155)$$

$$h[2\alpha - n] = -h[n], \quad (5.156)$$

формула (5.153) превращается в верное тождество. КЧХ при этом равна (5.143) с $\beta = \pi/2$ и нечетной функцией $A(e^{j\omega})$.

Заметим, что формулы (5.149)–(5.151) и (5.154)–(5.156) дают два набора условий, гарантирующих линейную фазу или постоянную групповую задержку, но, как мы уже видели на рис. 5.35, б), существуют и другие системы, удовлетворяющие формуле (5.143), без каких-либо свойств симметрии.

5.8.3. Детерминированные системы с обобщенной линейной фазой

Для детерминированных систем формулу (5.148) можно переписать в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} h[n] \sin[\omega(n - \alpha) + \beta] = 0 \quad \text{при всех } \omega. \quad (5.157)$$

Детерминированность и условия (5.149)–(5.151) и (5.154)–(5.156) влекут конечность импульсной характеристики: $h[n] = 0$ при $n < 0$ и $n > M$. Таким образом, детерминированная КИХ-система обладает обобщенной линейной фазой, ее импульсная характеристика удовлетворяет одному из условий: (5.149) или (5.154) и имеет длину $M + 1$. Можно показать, что если

$$h[n] = \begin{cases} h[M - n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (5.158)$$

то

$$H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}, \quad (5.159)$$

где $A_e(e^{j\omega})$ — вещественноненулевая четная периодическая функция от ω . Аналогично, если

$$h[n] = \begin{cases} -h[M - n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (5.160)$$

то

$$H(e^{j\omega}) = jA_o(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2} = A_o(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2 + j\pi/2}, \quad (5.161)$$

где $A_o(e^{j\omega})$ — вещественноненулевая нечетная периодическая функция от ω . Заметим, что в обоих случаях длина импульсной характеристики равна $(M + 1)$.

Формулы (5.158) и (5.160) дают достаточные условия на детерминированность системы с обобщенной линейной фазой, но не необходимые. Клементц и Пиз ([27]) доказали, что бесконечная детерминированная импульсная характеристика тоже может обладать Фурье-образом с обобщенной линейной фазой. Соответствующая характеристическая функция, однако, оказывается нерациональной, и поэтому система не может быть описана линейным разностным уравнением.

Выражения КЧХ КИХ-систем с линейной фазой оказываются весьма полезными при проектировании фильтров и понимании отдельных свойств таких систем. Заметим, что вид этих выражений существенно зависит от типа симметрии и четности целого числа M . По этим причинам полезно ввести четыре разных типа КИХ-систем с обобщенной линейной фазой.

КИХ-системы с линейной фазой I типа

К первому типу относятся системы с симметричной импульсной характеристикой

$$h[n] = h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M \quad (5.162)$$

и четным числом M , что обуславливает целостность задержки $M/2$. Соответствующая КЧХ имеет вид

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M h[n]e^{-j\omega n}. \quad (5.163)$$

Учитывая условие симметричности (5.162), сумму из соотношения (5.163) можно переписать в виде

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \left(\sum_{k=0}^{M/2} a[k] \cos \omega k \right), \quad (5.164)$$

где

$$a[0] = h[M/2], \quad (5.165)$$

$$a[k] = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}. \quad (5.166)$$

Итак, мы видим, что $H(e^{j\omega})$ совпадает с функцией из (5.159), и в частности β из формулы (5.143) равно либо 0, либо π .

КИХ-системы с линейной фазой II типа

К системам второго типа относятся КИХ-системы с симметрией импульсной характеристики, описываемой формулой (5.162), и нечетным целым M . В этом случае

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \left(\sum_{k=1}^{(M+1)/2} b[k] \cos \left(\omega \left[k - \frac{1}{2} \right] \right) \right), \quad (5.167)$$

где

$$b[k] = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2}. \quad (5.168)$$

Здесь $H(e^{j\omega})$ имеет вид (5.159) с временнóй задержкой на $\frac{M}{2}$ и β из формулы (5.143), равной 0 или π . Но теперь задержка — полуцелое число.

КИХ-системы с линейной фазой III типа

Если импульсная характеристика системы антисимметрична

$$h[n] = -h[M-n], \quad 0 \leq n \leq M, \quad (5.169)$$

а M — четно, то $H(e^{j\omega})$ записывается как

$$H(e^{j\omega}) = j e^{-j\omega M/2} \left(\sum_{k=1}^{M/2} c[k] \sin \omega k \right), \quad (5.170)$$

где

$$c[k] = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}. \quad (5.171)$$

В этом случае $H(e^{j\omega})$ имеет вид (5.161) с целочисленной задержкой $\frac{M}{2}$, а β из (5.143) равна $\pi/2$ или $3\pi/2$.

КИХ-системы с линейной фазой IV типа

Если импульсная характеристика системы антисимметрична, т. е. удовлетворяет соотношению (5.169), а M — нечетно, то

$$H(e^{j\omega}) = j e^{-j\omega M/2} \left(\sum_{k=1}^{(M+1)/2} d[k] \sin \left[\omega \left(k - \frac{1}{2} \right) \right] \right), \quad (5.172)$$

где

$$d[k] = 2h \left[\frac{M+1}{2} - k \right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2}. \quad (5.173)$$

Как и для систем типа III, $H(e^{j\omega})$ имеет вид (5.161) с полуцелой задержкой $\frac{M}{2}$, а β из (5.143) равна $\pi/2$ или $3\pi/2$.

Примеры КИХ-систем с линейной фазой

На рис. 5.36 приведен пример импульсной характеристики каждой из четырех типов КИХ-систем с линейной фазой. КЧХ систем вычисляются в примерах 5.17–5.20.

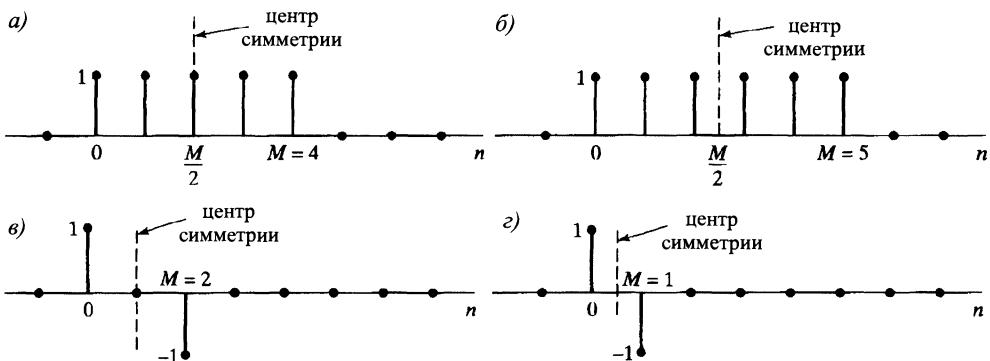


Рис. 5.36. Примеры линейно-фазовых КИХ-систем: а) тип I, M — четно, $h[n] = h[M-n]$; б) тип II, M — нечетно, $h[n] = h[M-n]$; в) тип III, M — четно, $h[n] = -h[M-n]$; г) тип IV, M — нечетно, $h[n] = -h[M-n]$

Пример 5.17. Линейно-фазовая система типа I

Если импульсная характеристика равна

$$h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (5.174)$$

то, как видно из рис. 5.36, а), система удовлетворяет условию (5.162), а ее КЧХ имеет вид:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^4 e^{-jn\omega} = \frac{1 - e^{-j\omega 5}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\omega 2} \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}. \quad (5.175)$$

АЧХ, ФЧХ и групповая задержка системы показаны на рис. 5.37. Так как $M = 4$ — четное число, групповая задержка является целой, т. е. $\alpha = 2$. \square

Пример 5.18. Линейно-фазовая система типа II

Если длину импульсной характеристики предыдущего примера увеличить на один отсчет, мы получим импульсную характеристику из рис. 5.36, б), которой соответствует КЧХ

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega 5/2} \frac{\sin 3\omega}{\sin(\omega/2)}. \quad (5.176)$$

Графики функций, ассоциированные с ней, даны на рис. 5.38. Заметим, что групповая задержка в этом случае равна $\alpha = 5/2$. \square

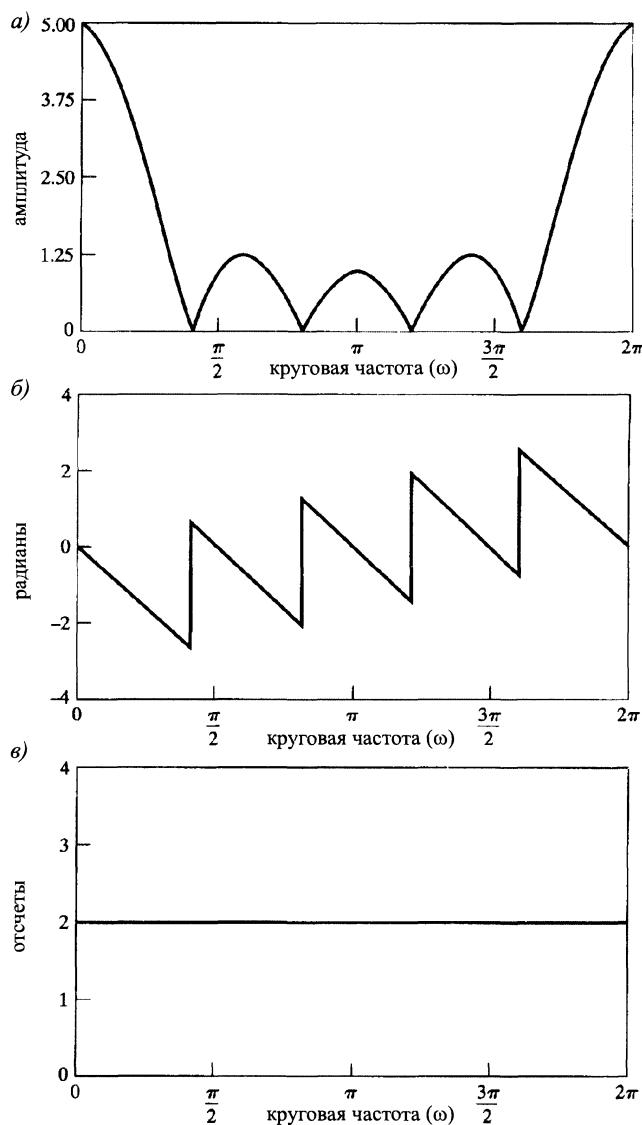


Рис. 5.37. КЧХ системы типа I из примера 5.17: а) АЧХ; б) ФЧХ; в) групповая задержка

Пример 5.19. Линейно-фазовая система типа III

Рассмотрим импульсную характеристику

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n - 2] \quad (5.177)$$

(см. рис. 5.36, в)). Соответствующая КЧХ равна

$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j2\omega} = j[2 \sin \omega]e^{-j\omega}. \quad (5.178)$$

Графики функций, связанные с этой характеристикой, показаны на рис. 5.39. Групповая задержка в этом случае равна $\alpha = 1$. \square

Пример 5.20. Линейно-фазовая система типа IV

Примером импульсной характеристики четвертого типа служит последовательность

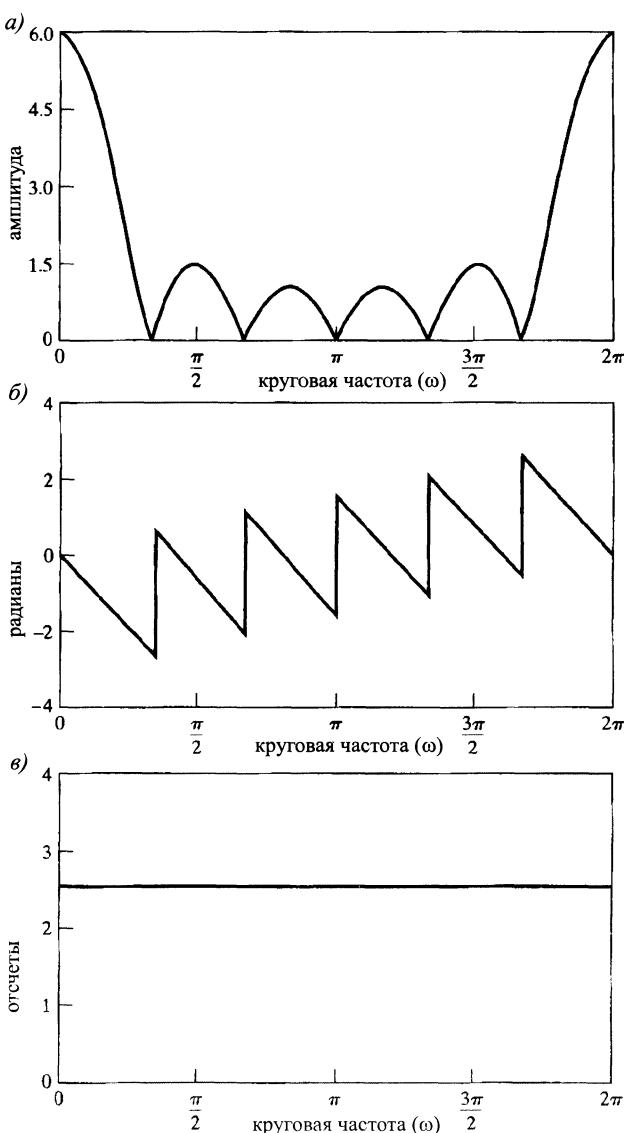
$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \quad (5.179)$$

(см. рис. 5.36, г)). КЧХ для нее описывается формулой:

$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega} = j \left(2 \sin \frac{\omega}{2} \right) e^{-j\omega/2}. \quad (5.180)$$

Связанные с ней кривые можно найти на рис. 5.40. Групповая задержка здесь равна $1/2$. □

Рис. 5.38. КЧХ системы типа II из примера 5.18: а) АЧХ; б) ФЧХ; в) групповая задержка



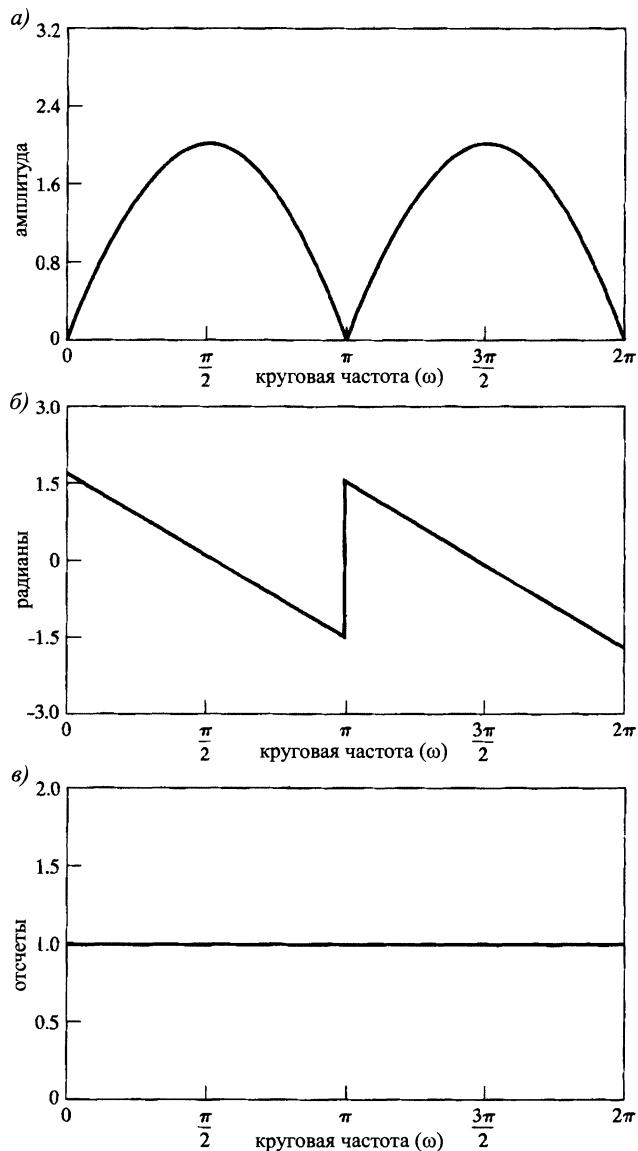


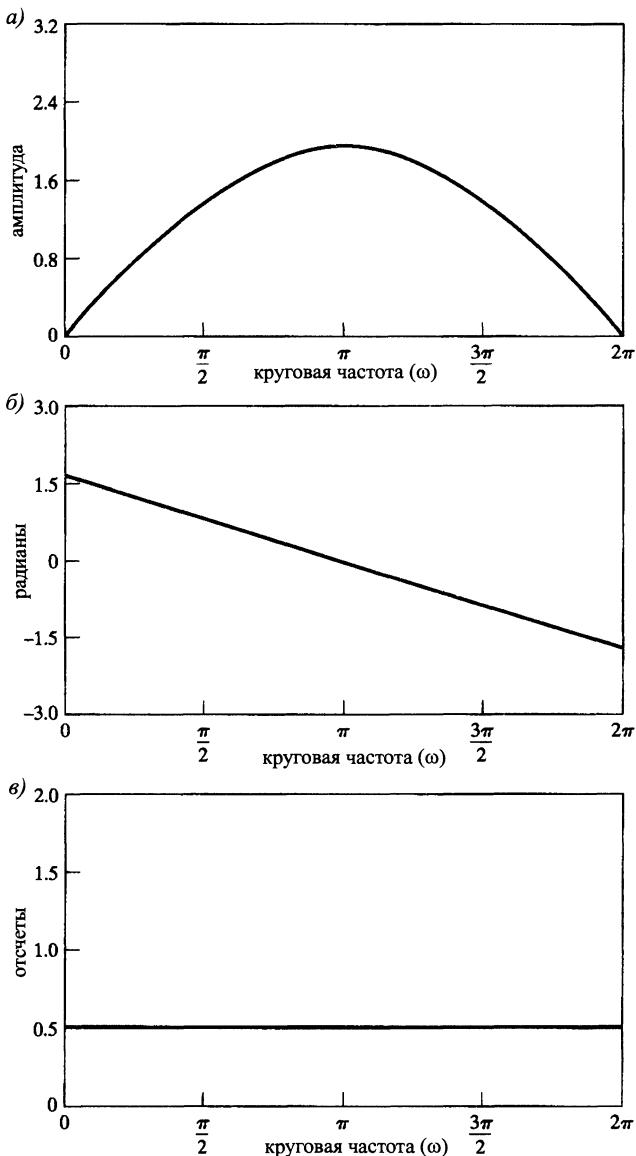
Рис. 5.39. КЧХ типа III из примера 5.19: а) АЧХ; б) ФЧХ; в) групповая задержка

Положение нулей линейно-фазовых КИХ-систем

Предыдущие примеры иллюстрируют свойства импульсной характеристики и КЧХ всех четырех типов КИХ-систем с линейной фазой. Поучительно также исследовать положение нулей характеристической функции таких систем. По определению, характеристическая функция вычисляется как сумма ряда

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n}. \quad (5.181)$$

Рис. 5.40. КЧХ типа IV из примера 5.20: а) АЧХ; б) ФЧХ; в) групповая задержка



В симметричных случаях (типы I и II), опираясь на тождество (5.162), характеристическую функцию можно записать как

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[M-n]z^{-n} = \sum_{k=M}^0 h[k]z^k z^{-M} = z^{-M} H(z^{-1}). \quad (5.182)$$

Отсюда следует, что если z_0 — нуль функции $H(z)$, то

$$H(z_0) = z_0^{-M} H(z_0^{-1}) = 0. \quad (5.183)$$

Иными словами, если $z_0 = re^{j\theta}$ — нуль характеристической функции, то $z_0^{-1} = r^{-1}e^{-j\theta}$ — тоже ее нуль. При вещественноненулевой импульсной характеристике функция $H(z)$ обращается в нуль в точках z_0 и $z_0^* = re^{-j\theta}$ одновременно. Значит, ввиду только что доказанного свойства $(z_0^*)^{-1} = r^{-1}e^{j\theta}$ тоже оказывается нулем характеристической функции. Итак, если импульсная характеристика системы вещественноненулева, то нули характеристической функции с модулем, отличным от 1, разбиваются на четверки комплексно сопряженных и взаимно обратных чисел:

$$re^{j\theta}, \quad re^{-j\theta}, \quad r^{-1}e^{j\theta}, \quad r^{-1}e^{-j\theta}.$$

Если нуль функции $H(z)$ попадает на единичную окружность, т. е. $z_0 = e^{j\theta}$, то $z_0^{-1} = e^{-j\theta} = z_0^*$. Таким образом, нули на единичной окружности группируются попарно:

$$e^{j\theta} \quad \text{и} \quad e^{-j\theta}.$$

Если характеристическая функция обращается в нуль в вещественной точке (отличной от ± 1), то обратная к ней точка тоже будет нулем $H(z)$, откуда у этой функции появятся множители вида

$$(1 \pm rz^{-1})(1 \pm r^{-1}z^{-1}).$$

Наконец, нуль, попавший в 1 или в -1 , может войти в пару только с самим собой, так как обратное число к ± 1 , как и сопряженное с ним, равно ± 1 . Следовательно, в характеристической функции линейно-фазовых КИХ-систем могут присутствовать множители вида

$$(1 \pm z^{-1}).$$

Случай нуля в точке $z = -1$ имеет особое значение. Подставив в формулу (5.182) $z = -1$, получаем

$$H(-1) = (-1)^M H(-1).$$

При четном M это равенство тривиально, но если M нечетно, то оно переписывается как $H(-1) = -H(-1)$, т. е. при нечетном M характеристическая функция всегда обращается в нуль при $z = -1$. На рис. 5.41, а) и б) приведен типичный пример схемы нулей систем типов I (M четно) и II (M нечетно) соответственно.

Если импульсная характеристика антисимметрична (типы III и IV), то, используя метод вывода равенства (5.182), можно показать, что

$$H(z) = -z^{-M} H(z^{-1}). \quad (5.184)$$

С помощью этой формулы легко доказать, что нули функции $H(z)$ в антисимметричном случае располагаются по правилам, сформулированным для симметричной импульсной характеристики. В антисимметричном случае, правда, как 1, так и -1 представляет особый интерес. Если в соотношение (5.184) подставить $z = 1$, получим равенство

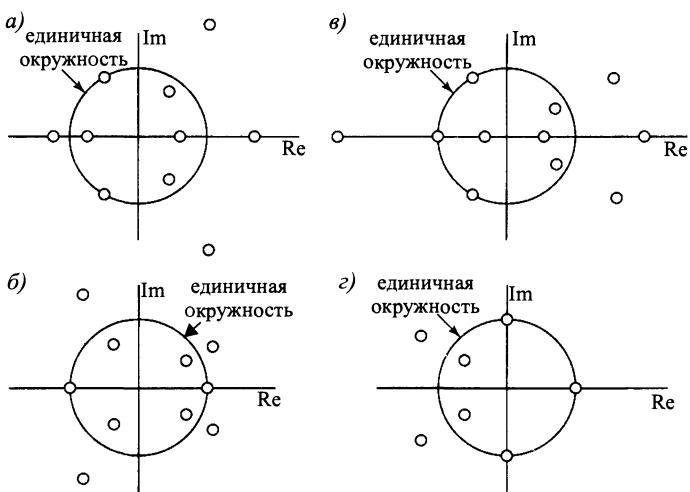
$$H(1) = -H(1), \quad (5.185)$$

возможное, только если $H(1) = 0$. Значит, 1 — нуль характеристической функции вне зависимости от четности M . Положив в той же формуле $z = -1$, придем к тождеству

$$H(-1) = (-1)^{-M+1} H(-1), \quad (5.186)$$

которое свидетельствует о том, что при нечетном ($M - 1$) (т. е. четном M) число -1 — нуль характеристической функции. На рис. 5.41, в) и г) приведены типичные схемы нулей систем типов III и IV соответственно.

Рис. 5.41. Типичная схема нулей линейно-фазовых систем: а) тип I; б) тип II; в) тип III; г) тип IV



Ограничительные условия на положение нулей характеристической функции важны с точки зрения проектирования линейно-фазовых КИХ-систем, поскольку они вносят ограничения КЧХ систем. Заметим, например, что при аппроксимации ФВЧ с помощью симметричной импульсной характеристики параметр M следует брать нечетным, так как КЧХ фильтра должна обращаться в нуль при $\omega = \pi$ ($z = -1$).

5.8.4. Связь линейно-фазовых КИХ-систем с минимально-фазовыми

Мы только что выяснили, что нули характеристической функции всех линейно-фазовых КИХ-систем либо лежат на единичной окружности, либо расположены в парах точек, переходящих друг в друга при инверсии. Нетрудно доказать, что характеристическая функция такой системы представима в виде произведения минимально- ($H_{\min}(z)$) и максимально-фазового ($H_{\max}(z)$) членов и множителя $H_{uc}(z)$, нули которого попадают только на единичную окружность, т. е.

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{\max}(z)H_{uc}(z), \quad (5.187)$$

где

$$H_{\max}(z) = H_{\min}(z^{-1})z^{-M_i}, \quad (5.188)$$

а M_i — число нулей функции $H_{\min}(z)$. Все M_i нулей функции $H_{\min}(z)$ расположены *внутри* единичного круга, все M_0 нулей функции $H_{uc}(z)$ попадают на единичную окружность, а все M_i нулей функции $H_{\max}(z)$ находятся *вне* единичного круга, причем, как следует из разложения (5.188), они обратны нулям функции $H_{\min}(z)$. Следовательно, порядок системы с характеристической функцией (5.187) равен $M = 2M_i + M_0$.

Пример 5.21. Разложение линейно-фазовой системы

В качестве простого примера разложения (5.187) рассмотрим минимально-фазовую характеристическую функцию из (5.115), КЧХ которой изображена на рис. 5.28. Применим к функции $H_{\min}(z)$ из (5.115) формулу (5.188):

$$H_{\max}(z) = (0,9)^2 (1 - 1,111e^{j0,6\pi} z^{-1}) (1 - 1,111e^{-j0,6\pi} z^{-1}) \times \\ \times (1 - 1,25e^{-j0,8\pi} z^{-1}) (1 - 1,25e^{j0,8\pi} z^{-1}).$$

КЧХ, связанная с функцией $H_{\max}(z)$, показана на рис. 5.42.

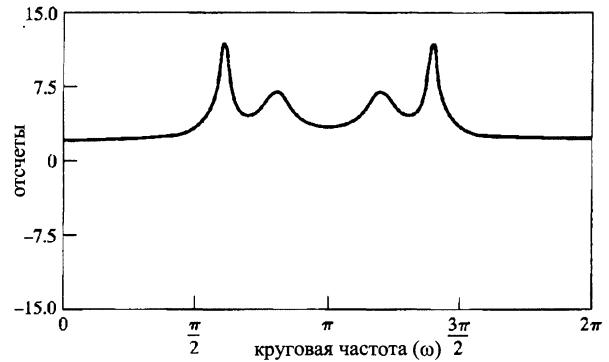
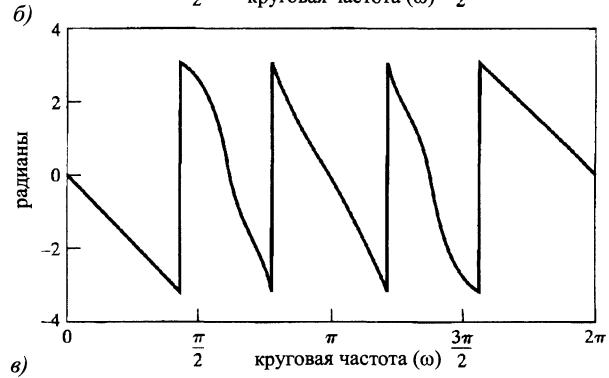
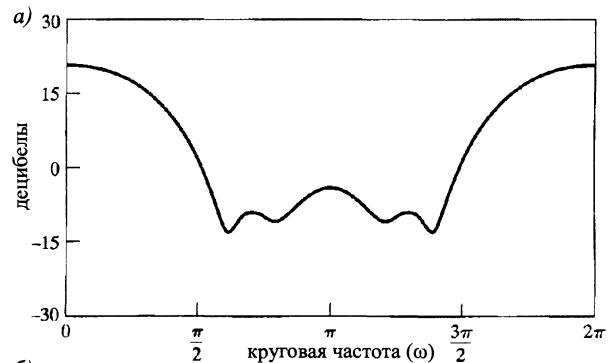


Рис. 5.42. КЧХ максимально-фазовой системы с той же АЧХ, что и система из рис. 5.28: а) АЧХ; б) ФЧХ; в) групповая задержка

Теперь, соединив две эти системы последовательно, получим, что вся система с характеристической функцией $H(z) = H_{\min}(z)H_{\max}(z)$ обладает линейной фазой. Ло-

гарифм АЧХ, ФЧХ и групповая задержка этого каскада получаются как сумма аналогичных характеристик своих компонент. Следовательно,

$$20 \lg |H(e^{j\omega})| = 20 \lg |H_{\min}(e^{j\omega})| + 20 \lg |H_{\max}(e^{j\omega})| = 40 \lg |H_{\min}(e^{j\omega})|. \quad (5.189)$$

Аналогично,

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle H_{\min}(e^{j\omega}) + \angle H_{\max}(e^{j\omega}). \quad (5.190)$$

Из тождества (5.188) следуют равенства:

$$\angle H_{\max}(e^{j\omega}) = -\omega M_i - \angle H_{\min}(e^{j\omega}) \quad \text{и} \quad \angle H(e^{j\omega}) = -\omega M_i. \quad (5.191)$$

(Напомним, что M_i — число нулей функции $H_{\min}(z)$.) В аналогичной манере, комбинируя групповые задержки для функций $H_{\min}(e^{j\omega})$ и $H_{\max}(e^{j\omega})$, получаем

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = M_i = 4.$$

Кривые, ассоциированные с КЧХ каскада систем, вычерчены на рис. 5.43. Заметим, что они являются суммами соответствующих графиков из рис. 5.28 и 5.42. \square

Рис. 5.43. КЧХ каскада максимального- и минимального-фазовых систем, обладающего линейной фазой:
а) АЧХ; б) ФЧХ

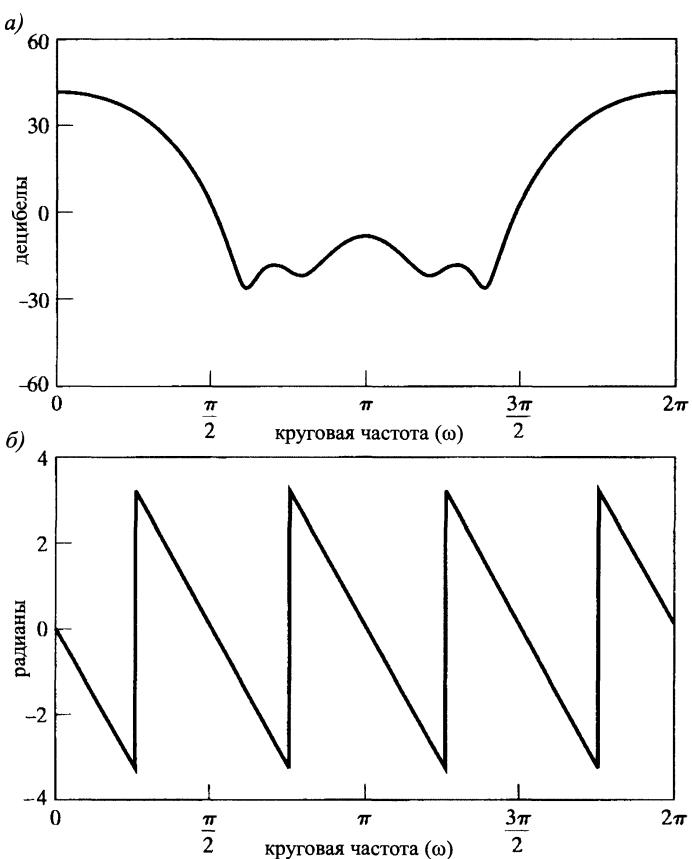
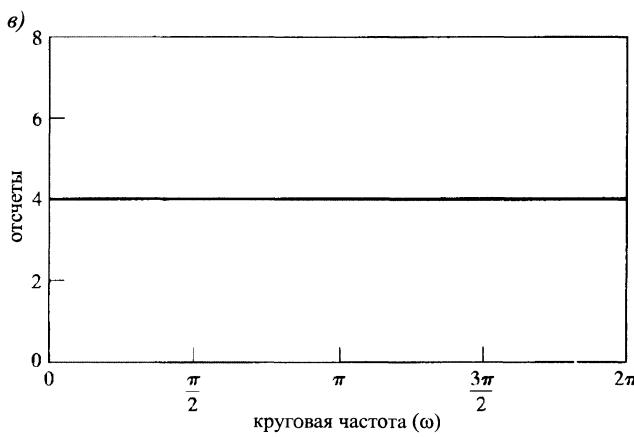


Рис. 5.43 (окончание).

в) групповая задержка



5.9. Краткое содержание главы

В этой главе мы познакомились с возможностями, которые открывают преобразование Фурье и z -преобразование для анализа и представления ЛС-систем. Важность такого анализа не вызывает сомнения благодаря тому, что комплексные экспоненты — собственные функции ЛС-систем, а их собственные значения соответствуют характеристическим функциям или КЧХ.

Особенно интересен класс ЛС-систем, характеризующихся линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами. Анализ таких систем с помощью преобразований обладает несомненными преимуществами, поскольку как преобразование Фурье, так и z -преобразование переводят разностные уравнения в алгебраические. В частности, характеристическая функция систем этого класса записывается как отношение многочленов, коэффициенты которых напрямую соответствуют коэффициентам разностного уравнения, а корни многочленов дают удобное изображение системы в виде схемы нулей и полюсов характеристической функции. Импульсная характеристика систем, описываемых разностными уравнениями, может быть как бесконечной (БИХ-системы), так и конечной (КИХ-системы).

Впечатление о КЧХ ЛС-систем удобнее получать, основываясь на графиках ее модуля (АЧХ) и аргумента (ФЧХ) или групповой задержки, равной минус производной от ФЧХ. Во многих приложениях желательно, чтобы система обладала линейной ФЧХ, поскольку при этом она вносит сравнительно небольшое искажение в сигнал, соответствующее его сдвигу во времени. Особое значение КИХ-систем объясняется отчасти тем, что они относятся к легко проектируемым системам с линейной фазой (или обобщенно линейной), в то время как линейно-фазовые БИХ-системы, удовлетворяющие данному набору спецификаций, разработать существенно сложнее. Этот и другие различия между БИХ- и КИХ-системами будут подробно обсуждаться в главе 7.

АЧХ и ФЧХ общей ЛС-системы не зависят друг от друга. Однако АЧХ минимально-фазовой системы однозначно определяет ее ФЧХ, и, наоборот, по

ФЧХ такой системы однозначно восстанавливается ее АЧХ. Неминимально-фазовые системы могут быть представлены в виде каскада минимально-фазовой и всепропускающей систем. Взаимосвязь преобразования Фурье модуля и фазы более подробно разобрана в главе 11.

Задачи

Обязательные задачи с ответами

- 5.1. Функция $H(e^{j\omega})$ из рис. 5.44 является КЧХ идеального ФНЧ. Выясните, может ли при подходящем выборе входного сигнала $x[n]$ и частоты отсечки ω_c реакция этого фильтра иметь вид

$$y[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 10, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

изображенный на рис. 5.45.

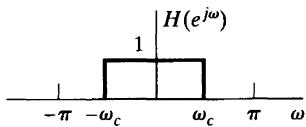
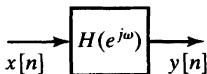


Рис. 5.44.

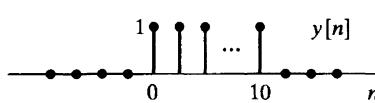


Рис. 5.45.

- 5.2. Рассмотрите детерминированную ЛС-систему, пара сигнал – отклик которой удовлетворяют разностному уравнению:

$$y[n-1] - \frac{10}{3}y[n] + y[n+1] = x[n].$$

- a) Начертите схему нулей и полюсов ее характеристической функции.
б) Найдите импульсную характеристику этой системы.

- 5.3. Рассмотрите дискретную ЛС-систему, у которой сигнал $x[n]$ и отклик $y[n]$ обрашают в тождество разностное уравнение второго порядка:

$$y[n-1] + \frac{1}{3}y[n-2] = x[n].$$

Выберете две возможные импульсные характеристики этой системы из следующего списка:

- а) $(-\frac{1}{3})^{n+1}u[n+1]$; б) $3^{n+1}u[n+1]$; в) $3(-3)^{n+2}u[-n-2]$;
г) $\frac{1}{3}(-\frac{1}{3})^nu[-n-2]$; д) $(-\frac{1}{3})^{n+1}u[-n-2]$; е) $(\frac{1}{3})^{n+1}u[n+1]$;
ж) $(-3)^{n+1}u[n]$; з) $n^{1/3}u[n]$.

- 5.4. Реакция ЛС-системы на сигнал $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[-n - 1]$ имеет вид: $y[n] = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$.
- Найдите ее характеристическую функцию, изобразите схему нулей и полюсов и отметьте ОС.
 - Вычислите значения импульсной характеристики $h[n]$ для всех n .
 - Выпишите разностное уравнение, характеризующее систему.
 - Является ли данная система устойчивой или детерминированной?
- 5.5. Данна система, описывающаяся линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами и состоянием покоя в начальном положении. Известно, что реакция на единичный скачок этой системы имеет вид:

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + u[n].$$

- Выпишите соответствующее дифференциальное уравнение.
 - Найдите импульсную характеристику системы.
 - Выясните, является ли данная система устойчивой?
- 5.6. О ЛС-системе собрана следующая информация:
- система детерминирована;
 - z -преобразование реакции системы на сигнал

$$x[n] = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}(2)^n u[-n - 1]$$

равно

$$Y(z) = \frac{1 - z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}.$$

- Вычислите z -преобразование от $x[n]$.
 - Какой может быть ОС функции $Y(z)$?
 - Что можно сказать об импульсной характеристике данной системы?
- 5.7. Реакция ЛС-системы на сигнал $x[n] = 5u[n]$ равна $y[n] \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right) u[n]$.
- Найдите характеристическую функцию системы, изобразите схему ее нулей и полюсов и отметьте на ней ОС.
 - Вычислите импульсную характеристику системы.
 - Выпишите разностное уравнение, характеризующее данную систему.
- 5.8. Детерминированная ЛС-система описывается разностным уравнением

$$y[n] = \frac{3}{2}y[n - 1] + y[n - 2] + x[n - 1].$$

- Найдите характеристическую функцию $H(z) = Y(z)/X(z)$, нарисуйте схему ее нулей и полюсов и отметьте на ней ОС.
- Вычислите импульсную характеристику системы.

- в) Вы должны были заметить, что данная система неустойчива. Найдите устойчивую (недетерминированную) импульсную характеристику системы, удовлетворяющей данному уравнению.

5.9. Данна ЛС-система, вход и выход которой связаны уравнением:

$$y[n-1] - \frac{5}{2}y[n] + y[n+1] = x[n].$$

Система может быть, а может и не быть устойчивой или детерминированной.

Исследуя схему нулей и полюсов соответствующей характеристической функции, найдите три возможные импульсные характеристики этой системы. Покажите, что каждый вариант $h[n]$ удовлетворяет данному уравнению. Укажите, какая из трех характеристик присуща устойчивой системе, а какая детерминированной?

- 5.10. Схема нулей и полюсов характеристической функции $H(z)$ детерминированной ЛС-системы изображена на рис. 5.46. Может ли обратная к ней система, т.е. система с характеристической функцией $H_i(z)$, удовлетворяющей равенству $H(z)H_i(z) = 1$, быть как детерминированной, так и устойчивой? Поясните свой ответ.
- 5.11. Схема нулей и полюсов характеристической функции ЛС-системы показана на рис. 5.47. Выясните, какие из нижеперечисленных утверждений верны, какие должны, а о каких вообще ничего нельзя сказать, основываясь на этой схеме?

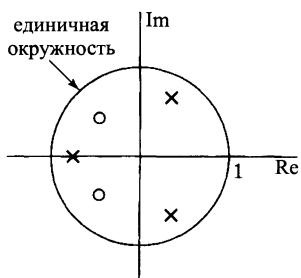


Рис. 5.46.

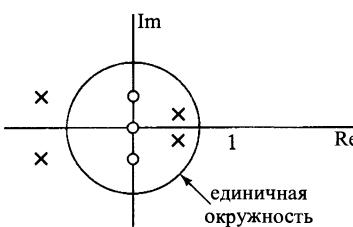


Рис. 5.47.

- а) Система устойчива.
 б) Система детерминирована.
 в) Если система детерминирована, то она должна быть устойчива.
 г) Если система устойчива, то у нее будет двусторонняя импульсная характеристика.

5.12. Характеристическая функция дискретной детерминированной ЛС-системы имеет вид:

$$H(z) = \frac{(1 + 0,2z^{-1})(1 - 9z^{-2})}{1 + 0,81z^{-2}}.$$

- а) Устойчива ли данная система?
 б) Найдите характеристические функции минимально-фазовой $H_1(z)$ и всепропускающей $H_{ap}(z)$ систем, для которых $H(z) = H_1(z)H_{ap}(z)$.

- 5.13. На рис. 5.48 изображены схемы нулей и полюсов характеристических функций четырех разных ЛС-систем. Основываясь на схемах, выясните про каждую из них, относится ли она к всепропускающим системам.

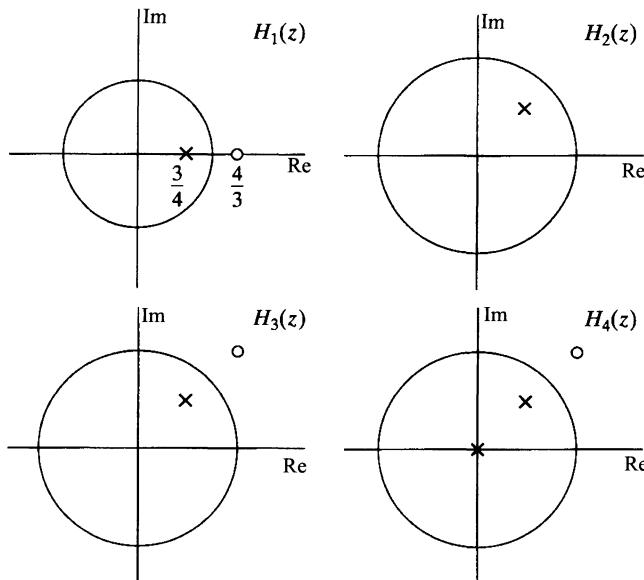


Рис. 5.48.

- 5.14. Вычислите групповую задержку на промежутке $0 < \omega < \pi$ каждой из следующих последовательностей:

$$\text{a) } x_1[n] = \begin{cases} n-1, & \text{если } 1 \leq n \leq 5, \\ 9-n, & \text{если } 5 < n \leq 9, \\ 0 & \text{в других случаях;} \end{cases} \quad \text{б) } x_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n-1|} + \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}.$$

- 5.15. Рассмотрите класс дискретных фильтров с КЧХ вида

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\alpha\omega},$$

где α — вещественная константа. Напомним (подраздел 5.8.1), что фильтры этого класса называют линейно-фазовыми. Рассмотрите также совокупность фильтров с КЧХ

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega+\beta},$$

где $A(e^{j\omega})$ — вещественнозначная функция ω , а α и β — вещественные числа. Такие фильтры называются фильтрами с обобщенной линейной фазой (см. подраздел 5.8.2).

О каждом из фильтров, импульсная характеристика которых представлена на рис. 5.49, выясните, имеет ли он обобщенно линейную фазу? Если да, то найдите $A(e^{j\omega})$, α и β . Кроме того, в каждом из случаев с положительным ответом выясните, можно ли найти прямой критерий принадлежности данного фильтра к классу обобщенно линейно-фазовых?

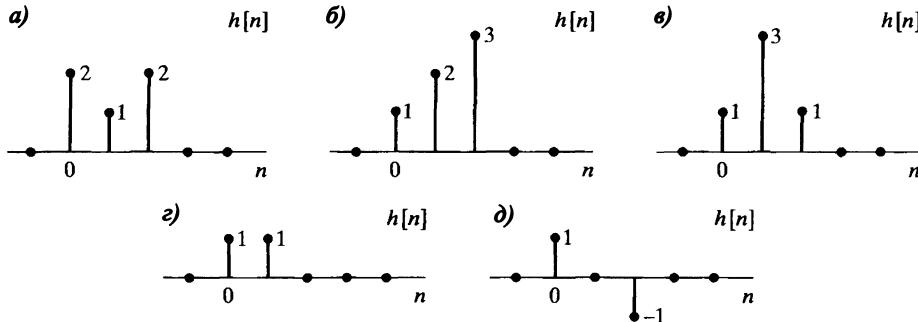


Рис. 5.49.

- 5.16. На рис. 5.50 приведен график непрерывной ФЧХ $\arg[H(e^{j\omega})]$ специфической ЛС-системы, где $\arg[H(e^{j\omega})] = -\alpha\omega$ при $|\omega| < \pi$, а α — положительное целое число.

Является ли импульсная характеристика этой системы устойчивой? Ответьте, принадлежит ли данная система классу детерминированных. Докажите свой ответ. Если детерминированность системы из рис. 5.50 не следует, приведите пример недетерминированной и детерминированной импульсных характеристик, обладающих указанной ФЧХ $\arg[H(e^{j\omega})]$.

- 5.17. Выясните о каждой из следующих характеристических функций, задают ли они минимально-фазовую систему. Ответ обоснуйте.

$$H_1(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad H_2(z) = \frac{(1 + \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}{(1 - \frac{2}{3}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}z^{-1})},$$

$$H_3(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}, \quad H_4(z) = \frac{z^{-1}(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}{(1 - \frac{i}{2}z^{-1})(1 + \frac{i}{2}z^{-1})}.$$

- 5.18. Для каждой из представленных ниже характеристических функций $H_k(z)$ укажите минимально-фазовую характеристическую функцию $H_{\min}(z)$, удовлетворяющую условию: $|H_k(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$.

а) $H_1(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$; б) $H_2(z) = \frac{(1 + 3z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{z^{-1}(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}$; в) $H_3(z) = \frac{(1 - 3z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}{(1 - \frac{3}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}$.

- 5.19. На рис. 5.51 показаны импульсные характеристики нескольких разных ЛС-систем. Найдите соответствующие групповые задержки.

- 5.20. На рис. 5.52 отмечены нули нескольких характеристических функций. Укажите в каждом случае, может ли функция с такой схемой нулей быть характе-

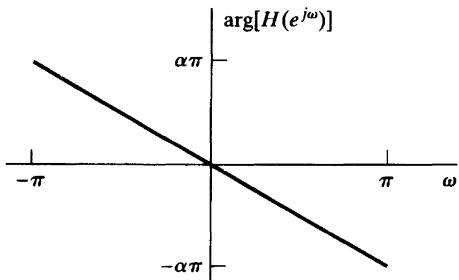


Рис. 5.50.

ристической для обобщенно линейно-фазовой системы, описываемой линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами.

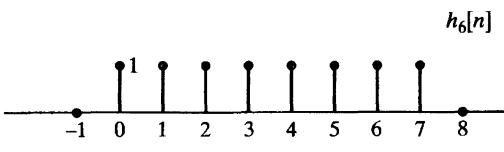
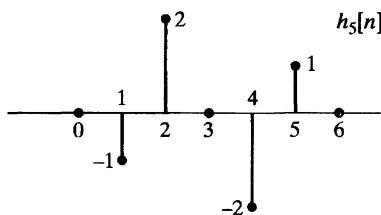
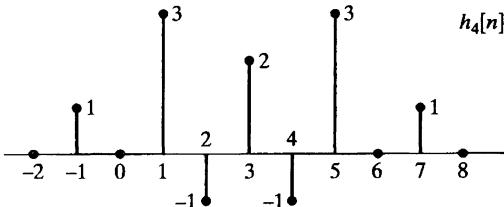
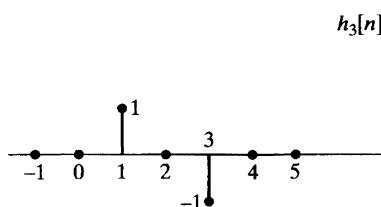
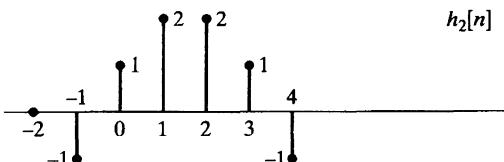
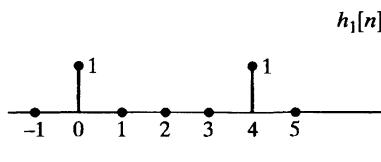


Рис. 5.51.

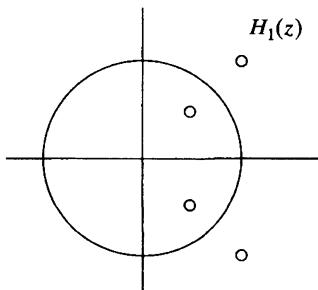
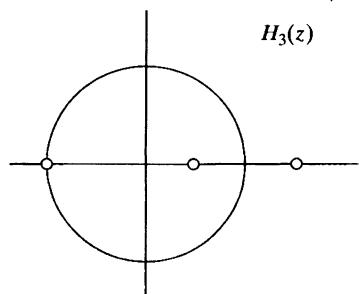
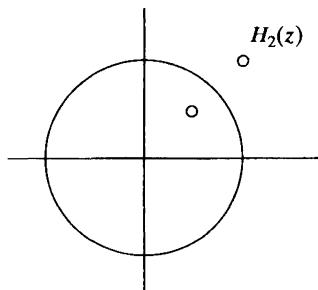


Рис. 5.52.



Обязательные задачи без ответов

- 5.21. Пусть $h_{lp}[n]$ — импульсная характеристика идеального ФНЧ с единичным коэффициентом усиления и частотой отсечки $\omega_c = \pi/4$. На рис. 5.53 приведены пять систем, каждая из которых эквивалентна идеальному частотно-избирательному ЛС-фильтру. Для каждой из этих систем изобразите КЧХ и точно укажите полосу пропускания в терминах ω_c . Кроме того, определите, к какому типу фильтров относится каждый из них: нижних частот, верхних частот, полосно-задерживающему, полосовому или многополосному.

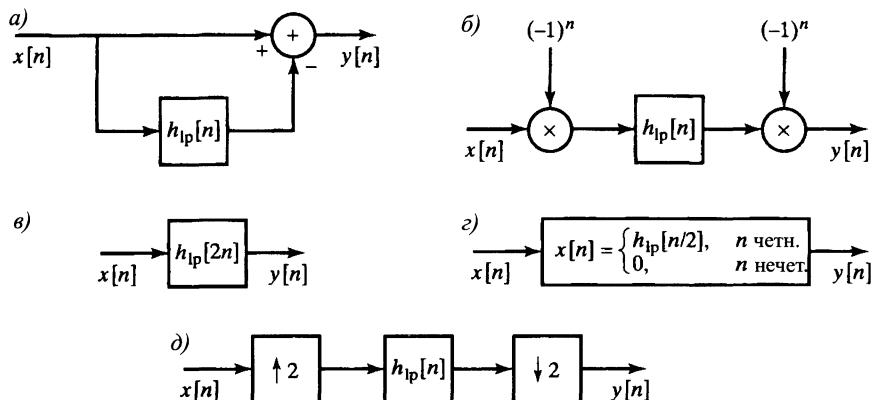


Рис. 5.53.

- 5.22. Рассмотрите детерминированную ЛС-систему с характеристической функцией $H(z) = \frac{1-a^{-1}z^{-1}}{1-az^{-1}}$, где a — вещественное число.
- Выпишите разностное уравнение, которому удовлетворяют вход и выход этой системы.
 - При каких значениях a данная система устойчива?
 - Изобразите схему нулей и полюсов характеристической функции и отметьте на ней ОС для случая $a = \frac{1}{2}$.
 - Найдите импульсную характеристику системы.
 - Вычислив АЧХ, покажите, что система относится к классу всепропускающих.
- 5.23.
- Для каждого из четырех типов детерминированных линейных КИХ-фильтров, обсуждавшихся в подразделе 5.8.3, выясните, накладывает ли какое-либо ограничение его тип симметрии на значение КЧХ фильтра в $\omega = 0$ и/или $\omega = \pi$?
 - Какой бы тип фильтра вы выбрали для аппроксимации ФНЧ, ФВЧ, полосового фильтра, полосно-задерживающего фильтра, дифференциатора?
- 5.24. Пусть отсчеты детерминированной N -членной последовательности $x[n]$ равны нулю при $n \notin [0, N - 1]$. Сигнал $x[n]$ и реакция $y[n]$ на него детерминированной

ЛС-системы удовлетворяют соотношению:

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] = x[n-2] - \frac{1}{4}x[n].$$

Известно, что $y[n]$ — тоже N -членная детерминированная последовательность.

а) Покажите, что эта система является всепропускающим фильтром.

б) Вычислите сумму $\sum_{n=0}^{N-1} |y[n]|^2$, если $\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = 5$.

5.25. Верно ли следующее утверждение:

Недетерминированная система не может иметь постоянную групповую задержку $\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \tau_0 > 0$?

Если утверждение верно, коротко обоснуйте его. Если же нет, приведите контрпример.

5.26. Рассмотрите характеристическую функцию

$$H(z) = \frac{rz^{-1}}{1 - (2r \cos \omega_0)z^{-1} + r^2 z^{-2}}, \quad |z| > r, \quad \omega_0 \neq 0.$$

а) Изобразите схему ее нулей и полюсов и найдите $h[n]$.

б) Выполните задание п. «а», предположив, что $\omega_0 = 0$. Систему с такой характеристической функцией называют системой с коротким затуханием.

5.27. ЛС-система с импульсной характеристикой $h_1[n]$ является идеальным ФНЧ с частотой отсечки $\omega_c = \pi/2$. КЧХ фильтра обозначена через $H_1(e^{j\omega})$. Предположите, что вам дана новая ЛС-система с импульсной характеристикой $h_2[n] = (-1)^n h_1[n]$, и выразите КЧХ $H_2(e^{j\omega})$ новой системы в терминах $H_1(e^{j\omega})$.

Дополнительные задачи

5.28. Конфигурация нулей и полюсов характеристической функции $H(z)$ детерминированной ЛС-системы приведена на рис. 5.54. Известно, что $H(z) = 6$ при $z = 1$.

а) Найдите $H(z)$.

б) Вычислите импульсную характеристику $h[n]$ системы.

в) Вычислите реакцию этой системы на сигналы

(i) $x[n] = u[n] - \frac{1}{2}u[n-1]$;

(ii) $x[n]$, полученный дискретизацией непрерывного сигнала $x(t) = 50 + 10 \cos 20\pi t + 30 \cos 40\pi t$ с частотой дискретизации $\Omega_s = 2\pi(40)$ рад/с.

5.29. Характеристическая функция ЛС-системы имеет вид:

$$H(z) = \frac{21}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})(1 - 4z^{-1})}.$$

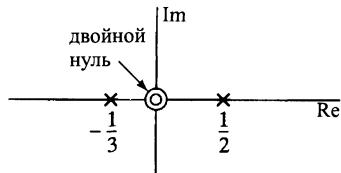


Рис. 5.54.

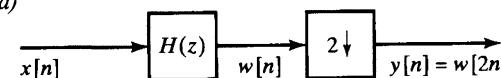
Известно, что система неустойчива, а ее импульсная характеристика — двусторонняя последовательность.

- а) Найдите импульсную характеристику системы.
 б) Эта импульсная характеристика может быть представлена в виде суммы детерминированной импульсной характеристики $h_1[n]$ и антидетерминированной $h_2[n]$. Вычислите соответствующие характеристические функции $H_1(z)$ и $H_2(z)$.

- 5.30. Сигнал $x[n]$ обрабатывается ЛС-системой с характеристической функцией $H(z)$, после чего подвергается понижающей дискретизации с множителем 2 и получается сигнал $y[n]$, как показано на рис. 5.55, а). Схема нулей и полюсов функции $H(z)$ приведена на рис. 5.55, б).

- а) Определите и начертите импульсную характеристику $h[n]$ системы.
 б) Вторая система, показанная на рис. 5.55, б), входной сигнал $x[n]$ сжимает в 2 раза, а результат сжатия пропускает через ЛС-систему с характеристической функцией $G(z)$. Существует ли функция $G(z)$, при которой равенство $y[n] = r[n]$ достигается на любом входном сигнале $x[n]$? Если существует, укажите $G(z)$. Если ваш ответ зависит от числа M , четко объясните эту зависимость. (Считается, что $M \geq 2$ — целое число.)

Рис. 5.55. а)



- 5.31. Рассмотрите ЛС-систему с характеристической функцией

$$H(z) = \frac{z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 3z^{-1})}.$$

- а) Допустив, что эта система устойчива, определите ее реакцию на входной сигнал $x[n] = u[n]$.
 б) Предположив, что ОС $H(z)$ включает точку $z = \infty$, вычислите отсчет $y[2]$, если входной сигнал показан на рис. 5.56.

Рис. 5.56.



в) Допустим, нам нужно восстановить сигнал $x[n]$ по реакции системы $y[n]$, обрабатывая $y[n]$ ЛС-системой с импульсной характеристикой $h_i[n]$. Найдите $h_i[n]$. Зависит ли $h_i[n]$ от ОС функции $H(z)$?

- 5.32. КЧХ устойчивой ЛС-системы — вещественная функция (рис. 5.57). Выясните, имеет ли эта система обратную устойчивую систему?

- 5.33. Последовательность $x[n]$ — реакция ЛС-системы на сигнал $s[n]$. Система описывается разностным уравнением:

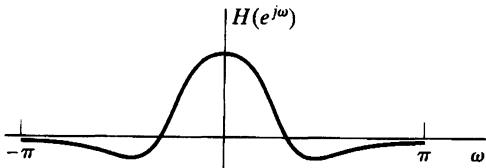


Рис. 5.57.

$$x[n] = s[n] - e^{-8\alpha} s[n-8], \quad (5.192)$$

где $\alpha > 0$.

- а) Найдите характеристическую функцию $H_1(z) = \frac{X(z)}{S(z)}$, изобразите схему ее нулей и полюсов на комплексной плоскости и отметьте там ОС.
б) Нам хотелось бы восстановить сигнал $s[n]$ по $x[n]$ с помощью ЛС-системы. Вычислите ее характеристическую функцию $H_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$, где $y[n] = s[n]$. Найдите все возможные ОС такой функции и для каждой из них выясните, является ли система с такой ОС детерминированной и/или устойчивой?
в) Найдите все возможные импульсные характеристики $h_2[n]$, при которых

$$y[n] = h_2[n] * x[n] = s[n]. \quad (5.193)$$

- г) Для всех найденных в предыдущем пункте последовательностей продемонстрируйте явными вычислениями, что если $s[n] = \delta[n]$, то $y[n] = \delta[n]$.

Замечание: как обсуждалось в задаче 4.7, формула (5.192) представляет простую модель многолучевого канала. Таким образом, системы, определенные в п. «б» и «в» этой задачи, соответствуют компенсационным системам, корректирующим многолучевое искажение.

- 5.34. Рассмотрите ЛС-систему с импульсной характеристикой

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

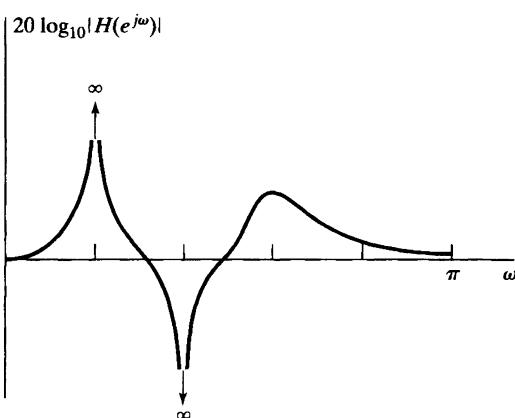
Нам нужно вычислить ее реакцию $y[n]$ на правосторонний сигнал $x[n]$ при $0 \leq n \leq 10^9$ и сравнить преимущества и недостатки КИХ- и БИХ-фильтров, позволяющих получить указанные отсчеты.

- а) Выпишите линейное разностное уравнение, связывающее $x[n]$ и $y[n]$.
б) Найдите импульсную характеристику $h_1[n]$ минимальной длины линейного стационарного КИХ-фильтра, чья реакция на сигнал $x[n]$ совпадает с $y[n]$ при $0 \leq n \leq 10^9$.
в) Конкретизируйте линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами, ассоциированное с КИХ-фильтром из предыдущего пункта.

- г) Сравните число арифметических операций (умножений и сложений), необходимых для вычисления $y[n]$ на отрезке $[0, 10^9]$ с помощью разностных уравнений из п. «а» и «б».

- 5.35. Рассмотрите детерминированную ЛС-систему с характеристической функцией $H(z)$ и вещественноизначной импульсной характеристикой. График ограничения $H(z)$ на единичную окружность ($z = e^{j\omega}$) показан на рис. 5.58.

Рис. 5.58.



- а) Аккуратно изобразите схему нулей и полюсов функции $H(z)$, отражающую всю информацию, которую можно почерпнуть из рис. 5.58.
 б) Что можно сказать о длине импульсной характеристики этой системы?
 в) Уточните, является ли функция $\angle H(e^{j\omega})$ линейной?
 г) Относится ли эта система к устойчивым?

- 5.36. Данна характеристическая функция детерминированной ЛС-системы:

$$H(z) = \frac{(1 - 1,5z^{-1} - z^{-2})(1 + 0,9z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0,7z^{-1})(1 - 0,7z^{-1})}.$$

- а) Выпишите разностное уравнение, связывающее сигнал и отклик этой системы.
 б) Изобразите схему нулей и полюсов характеристической функции и отметьте там ОС.
 в) Начертите эскиз графика АЧХ $|H(e^{j\omega})|$.
 г) Установите истинность или ложность следующих высказываний об этой системе:
 (i) система устойчива;
 (ii) при больших n импульсная характеристика почти постоянна;
 (iii) экстремумы АЧХ расположены в окрестности точек $\pm\pi/4$;
 (iv) система обладает устойчивой детерминированной обратной.

5.37. Рассмотрите детерминированную последовательность $x[n]$ с z -преобразованием

$$X(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{5}z^{-1})}{1 - \frac{1}{6}z^{-1}}.$$

При каких значениях α последовательность $\alpha^n x[n]$ является вещественноненеизменной и минимально-фазовой?

5.38. Рассмотрите ЛС-систему с характеристической функцией

$$H(z) = (1 - 0,9e^{j0,6\pi} z^{-1})(1 - 0,9e^{-j0,6\pi} z^{-1})(1 - 1,25e^{j0,8\pi} z^{-1})(1 - 1,25e^{-j0,8\pi} z^{-1}).$$

- a) Найдите характеристические функции всех систем с АЧХ, равной $|H(z)|$, импульсная характеристика которых вещественноизменна и имеет ту же длину, что и импульсная характеристика, ассоциированная с $H(z)$. (Существуют четыре разных системы, удовлетворяющие условию задачи.) Выделите среди них минимально-фазовую и (с точностью до сдвига во времени) максимально-фазовую.
- б) Вычислите импульсные характеристики, отвечающие характеристическим функциям из предыдущей подзадачи.
- в) Для каждой из найденных импульсных характеристик вычислите и изобразите отсчеты последовательности $E[n] = \sum_{m=0}^n (h[m])^2$ при $0 \leq n \leq 5$. Укажите, какой из ваших рисунков соответствует минимально-фазовой системе.

5.39. На рис. 5.59 приведены восемь четырехчленных последовательностей с одним и тем же модулем Фурье-образа. Для каких последовательностей все нули их z -преобразования расположены *внутри* единичного круга?

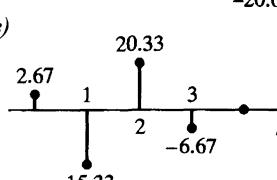
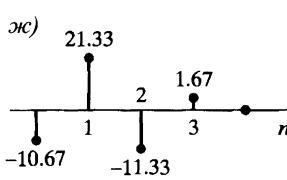
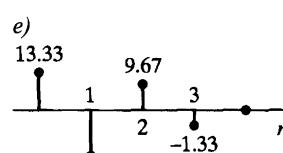
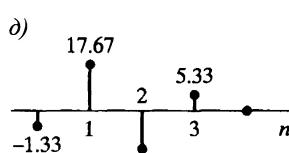
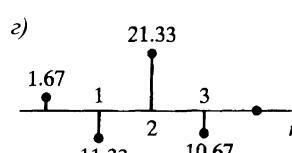
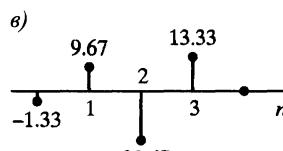
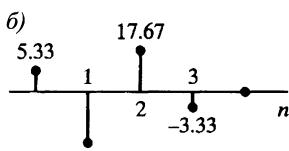
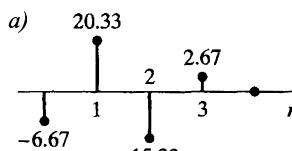


Рис. 5.59.

- 5.40. Каждая из схем нулей и полюсов из рис. 5.60 вместе с отмеченными там ОС описывают характеристическую функцию $H(z)$ ЛС-системы. Выясните для каждой из систем, какие из следующих утверждений для нее справедливы.

a) Система обладает нулевой ФЧХ или относится к обобщенно линейно-фазовым системам.

б) Система имеет устойчивую обратную систему.

Коротко обоснуйте свой ответ или подтвердите его контрпримером.

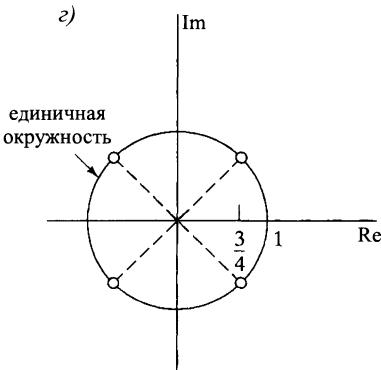
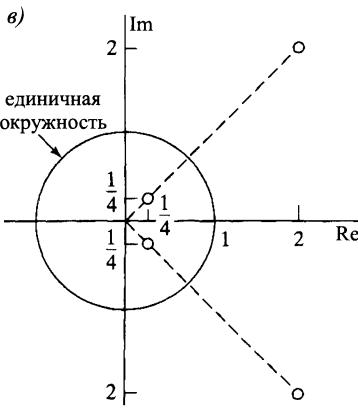
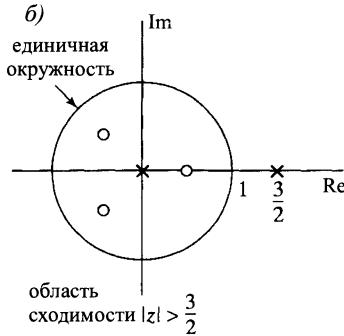
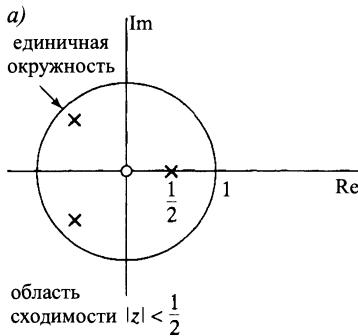


Рис. 5.60.

- 5.41. На рис. 5.61, а) показаны два способа подключения трех систем. Их импульсные характеристики $h_1[n]$, $h_2[n]$ и $h_3[n]$ приведены на рис. 5.61, б). Выясните, является ли система A и/или B обобщенно линейно-фазовой?

- 5.42. Система, заключенная в пунктирный прямоугольник на рис. 5.62, является дискретной ЛС-системой с КЧХ $H(e^{j\omega})$ и импульсной характеристикой $h[n]$.

а) Известно, что $H(e^{j\omega})$ можно записать в виде $H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{j\varphi(\omega)}$, где $A(e^{j\omega})$ — вещественноизначная функция. Подберите подходящие функции $A(e^{j\omega})$ и $\varphi(\omega)$ на интервале $|\omega| < \pi$ и начертите их графики.

б) Изобразите члены последовательности $h[n]$ в следующих случаях:

$$(i) \alpha = 3; (ii) \alpha = 3\frac{1}{2}; (iii) \alpha = 3\frac{1}{4}.$$

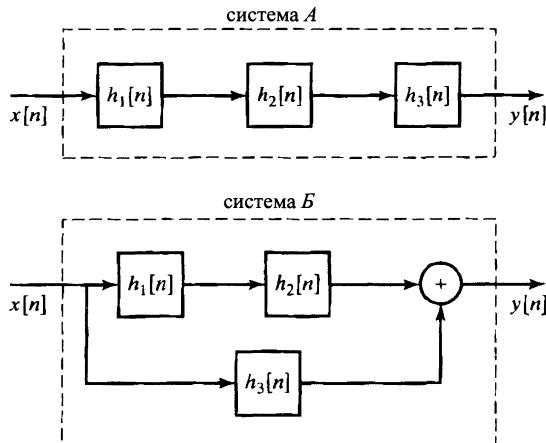
в) Рассмотрите дискретную ЛС-систему, для которой

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{j\alpha\omega}, \quad |\omega| < \pi$$

и $A(e^{j\omega})$ — вещественноизначна. Что можно сказать о симметрии импульсной характеристики $h[n]$ системы, если

- (i) $\alpha \in \mathbb{Z}$;
- (ii) $\alpha = M/2$, где M — нечетное целое число;
- (iii) никаких условий на α нет?

а)



б)

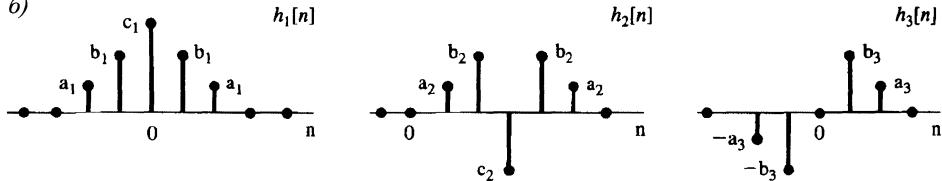
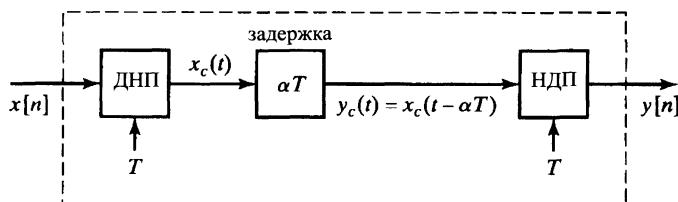


Рис. 5.61.

Рис. 5.62.



- 5.43. Рассмотрите совокупность КИХ-фильтров с вещественноизначной импульсной характеристикой $h[n]$, удовлетворяющей условию $h[n] = 0$ при $n < 0$ и $n > M$, с одним из следующих свойств симметрии:

симметрична
антисимметрична

$$h[n] = h[M - n], \\ h[n] = -h[M - n].$$

Все фильтры этой совокупности обладают обобщенной линейной фазой, т. е. их КЧХ имеет вид $H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega+j\beta}$, с вещественно-изначной функцией $A(e^{j\omega})$ от ω и вещественными константами α и β . Для каждой строки табл. 5.3 покажите, что вид $A(e^{j\omega})$ указан верно, и определите соответствующие константы α и β .

Таблица 5.3. Вид функции $A(e^{j\omega})$ из задачи 5.43 в различных случаях

Тип	Симметрия	Длина фильтра ($M + 1$)	Вид $A(e^{j\omega})$
I	симметрична	нечетна	$\sum_{n=0}^{M/2} a[n] \cos \omega n$
II	симметрична	четна	$\sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n] \cos \omega(n - 1/2)$
III	антисимметрична	нечетна	$\sum_{n=1}^{M/2} c[n] \sin \omega n$
IV	антисимметрична	четна	$\sum_{n=1}^{(M+1)/2} d[n] \sin \omega(n - 1/2)$

Указание.

- Для фильтров типа I покажите сначала, что $H(e^{j\omega})$ может быть записана как

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n] e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[M-n] e^{-j\omega(M-n)} + h[M/2] e^{-j\omega(M/2)}.$$

- КЧХ фильтров типа III может быть представлена, как и в случае типа I, с точностью до одного знака и одного слагаемого.
- КЧХ фильтров второго типа перепишите в виде

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[n] e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[M-n] e^{-j\omega(M-n)},$$

после чего вынесите множитель $e^{-j\omega(M/2)}$ из обеих сумм.

- Анализ фильтров типа IV аналогичен анализу фильтров типа II.

- 5.44. Пусть $h_{lp}[n]$ — импульсная характеристика КИХ-фильтра нижних частот с обобщенной линейной фазой. Импульсная характеристика $h_{hp}[n]$ КИХ-фильтра верхних частот с обобщенной линейной фазой может быть выражена как $h_{hp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n]$. Допустим, вам нужно спроектировать симметричный ФВЧ, используя это соотношение. На каком из четырех типов КИХ-фильтров нижних частот с обобщенной линейной фазой вы остановитесь? Вам следует перечислить все возможные типы.

- 5.45. Данна характеристическая функция детерминированной ЛС-системы:

$$H(z) = \frac{(1 - 0, 5z^{-1})(1 + 4z^{-2})}{1 - 0, 64z^{-2}}.$$

- a) Найдите мнимально-фазовую $H_1(z)$ и всепропускающую $H_{ap}(z)$ характеристические функции, для которых $H(z) = H_1(z)H_{ap}(z)$.

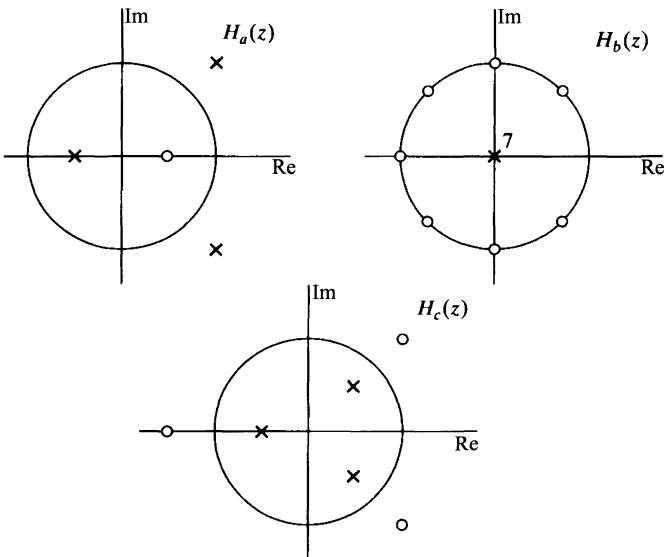
- б) Найдите еще одну характеристическую функцию минимально-фазовой системы $H_2(z)$ и такую характеристическую функцию $H_{\text{lin}}(z)$ КИХ-системы с обобщенной линейной фазой, что $H(z) = H_2(z)H_{\text{lin}}(z)$.
- 5.46. а) Пусть $H_{\min}(z)$ — характеристическая функция минимально-фазовой системы, причем $H_{\min}(z)H_{\text{ap}}(z) = H_{\text{lin}}(z)$, где $H_{\text{ap}}(z)$ — характеристическая функция всепропускающей системы, а $H_{\text{lin}}(z)$ — характеристическая функция детерминированной обобщенно линейно-фазовой. Что говорит вам эта информация о нулях и полюсах $H_{\min}(z)$?
- б) КИХ-система с обобщенной линейной фазой обладает вещественноненулевой импульсной характеристики с нулевыми значениями при $n \notin [1, 7]$, причем $h[n] = -h[7-n]$. Соответствующая характеристическая функция имеет два нуля: $z = 0,8e^{j\pi/4}$ и $z = -2$. Что можно сказать о $H(z)$?
- 5.47. Рассмотрите ЛС-систему, реакция которой на сигнал
- $$x[n] = 5 \frac{\sin 0,4\pi n}{\pi n} + 10 \cos(0,5\pi n)$$
- равна
- $$y[n] = 10 \frac{\sin(0,3\pi(n-10))}{\pi(n-10)}.$$
- Найдите КЧХ и импульсную характеристику этой системы.
- 5.48. На рис. 5.63 изображены схемы нулей и полюсов трех разных детерминированных ЛС-систем с вещественноненулевой импульсной характеристикой. Укажите, какие из следующих свойств согласуются со схемами: устойчивость, БИХ, КИХ, минимальность фазы, всепропускаемость, обобщенность линейной фазы, положительность групповой задержки при всех значениях ω .
- 5.49. Пусть S_1 — ЛС-система с характеристической функцией
- $$H_1(z) = \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 0$$
- и импульсной характеристикой $h_1[n]$.
- а) Является ли система S_1 детерминированной? Поясните свой ответ.
- б) Пусть $g[n] = h_1[n] * h_2[n]$. Подберите $h_2[n]$ таким образом, чтобы у $g[n]$ было по крайней мере девять ненулевых отсчетов и ее можно было рассматривать как импульсную характеристику детерминированной ЛС-системы со строго линейной фазой, т. е. чтобы $G(e^{j\omega}) = |G(e^{j\omega})|e^{-j\omega n_0}$ для некоторого $n_0 \in \mathbb{Z}$.
- в) Пусть $q[n] = h_1[n] * h_3[n]$. Найдите последовательность $h_3[n]$, для которой $q[n] = \delta[n]$ при $0 \leq n \leq 19$.
- 5.50. Даны обобщенно линейно-фазовые системы с КЧХ $H_1(e^{j\omega})$ и $H_2(e^{j\omega})$. Какие из следующих КЧХ (может быть, и никакие) имеют отношение к системам с обобщенной линейной фазой:
- а) $G_1(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})$; б) $G_2(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})$;
- в) $G_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_1(e^{j\theta})H_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$?

- 5.51. Эта задача посвящена дискретным фильтрам с вещественноненеизменной импульсной характеристикой. Выясните, верно ли следующее утверждение:

Если групповая задержка фильтра постоянна при $0 < \omega < \pi$, то его импульсная характеристика обладает одним из свойств: либо $h[n] = h[M - n]$, либо $h[n] = -h[M - n]$, где $M \in \mathbb{Z}$?

Если вы считаете утверждение верным, обоснуйте его. В противном случае приведите контрпример.

Рис. 5.63.



- 5.52. Характеристическая функция $H_{\Pi}(z)$ представляет КИХ-систему типа II с обобщенной линейной фазой и импульсной характеристикой $h_{\Pi}[n]$. Эта система последовательно соединяется с ЛС-системой, чья характеристическая функция равна $(1 - z^{-1})$. В результате получается третья система с характеристической функцией $H(z)$ и импульсной характеристикой $h[n]$. Докажите, что третья система принадлежит классу обобщенно линейно-фазовых и определите, к какому из четырех типов она относится.

- 5.53. В этой задаче рассматриваются три ЛС-системы. Все они детерминированы и обладают вещественноненеизменной импульсной характеристикой. Основываясь на дополнительной информации, которая будет сообщена вам о каждой из этих систем, выясните как можно больше о нулях и полюсах соответствующих характеристических функций и длине импульсных характеристик.

- $H_1(z)$ имеет полюс в точке $z = 0,9e^{j\pi/3}$, и, если $x[n] = u[n]$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = 0$.
- $H_2(z)$ имеет нуль в точке $z = 0,8e^{j\pi/4}$, обладает линейной фазой $\angle H_2(e^{j\omega}) = -2,5\omega$ и $20 \lg |H_2(e^{j0})| = -\infty$.
- Полюс функции $H_3(z)$ находится в точке $z = 0,8e^{j\pi/4}$ и $|H_3(e^{j\omega})| = 1$ при всех ω .

- 5.54. О сигнале $x[n]$ с z -преобразованием $X(z)$ известно следующее:
- $x[n]$ — минимально-фазовая вещественноненеизменяющая последовательность;
 - отсчеты $x[n]$ равны нулю вне отрезка $0 \leq n \leq 4$;
 - $X(z)$ обращается в нуль в точках $z = \frac{1}{2}e^{j\pi/4}$ и $z = \frac{1}{2}e^{j3\pi/4}$;
- а) Является ли функция $X(z)$ рациональной? Объясните свой ответ.
- б) Изобразите схему нулей и полюсов функции $X(z)$ и отметьте там ОС.
- в) Нарисуйте схему нулей и полюсов функции $Y(z)$, выделив там ОС, если известно, что $y[n] * x[n] = \delta[n]$, причем $y[n]$ — правосторонняя последовательность.
- 5.55. Основываясь на следующих фактах о вещественной последовательности $x[n]$ и ее Фурье-образе $X(e^{j\omega})$, вычислите последовательность и изобразите все ее отсчеты:
- $x[n]$ — конечная последовательность;
 - в точке $z = 0$ расположен полюс кратности 5 функции $X(z)$, причем у нее могут быть полюса и нули в других точках;
 - развернутая фаза функции $X(e^{j\omega})$ имеет вид:
- $$\arg[X(e^{j\omega})] = \begin{cases} -\alpha\omega + \frac{\pi}{2}, & 0 < \omega < \pi, \\ -\alpha\omega - \frac{\pi}{2}, & -\pi < \omega < 0, \end{cases}$$
- где α — некоторая вещественная константа;
- значение групповой задержки в точке $\omega = \frac{\pi}{2}$ равно 2, т. е. $\text{grd}[X(e^{j\omega})]\Big|_{\omega=\pi/2} = 2$;
 - $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 28$;
 - если $y[n] = x[n] * u[n]$, то $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega}) d\omega = 4$, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega}) e^{j\omega} d\omega = 6$;
 - $X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi} = 0$;
 - пятый отсчет последовательности $v[n]$ с Фурье-образом $V(e^{j\omega}) = \text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$ равен $v[5] = -\frac{3}{2}$.

- 5.56. Пусть S_1 — детерминированная устойчивая ЛС-система с импульсной характеристикой $h_1[n]$ и КЧХ $H_1(e^{j\omega})$, пара сигнал — отклик которой удовлетворяет разностному уравнению:

$$y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n].$$

- а) Можно ли утверждать, что ЛС-система S_2 с КЧХ $H_2(e^{j\omega}) = H_1(-e^{j\omega})$ является ФНЧ, полосовым фильтром или ФВЧ? Обоснуйте свой ответ.
- б) Предположим, что КЧХ третьей ЛС-системы S_3 обладает свойством:

$$H_3(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega}) = 1.$$

Можно ли отнести S_3 к минимально-фазовым фильтрам, к одному из четырех типов КИХ-фильтров с обобщенной линейной фазой? Аргументируйте свой ответ.

- в) Пусть S_4 — устойчивая недетерминированная ЛС-система с КЧХ $H_4(e^{j\omega})$, описываемая разностным уравнением:

$$y[n] + \alpha_1 y[n-1] + \alpha_2 y[n-2] = \beta_0 x[n],$$

где α_1, α_2 и β_0 — вещественные ненулевые константы. Подберите значения этих констант так, чтобы выполнялось равенство $|H_4(e^{j\omega})| = |H_1(e^{j\omega})|$.

- г) S_5 — КИХ-фильтр с импульсной характеристикой $h_5[n]$ и КЧХ $H_5(e^{j\omega})$, при чем $|H_5(e^{j\omega})| = |A(e^{j\omega})|^2$ для некоторого Фурье-образа $A(e^{j\omega})$ (т. е. S_5 — фильтр с нулевой фазой). Найдите такую последовательность $h_5[n]$, что свертка $h_5[n] * h_1[n]$ — импульсная характеристика недетерминированного КИХ-фильтра.

Задачи повышенной сложности

- 5.57. Предположим, что на вход системы из рис. 5.64 подается сигнал вида $x[n] = s[n] \cos(\omega_0 n)$, где $s[n]$ — низкочастотный и относительно узкополосный сигнал, т. е. $S(e^{j\omega}) = 0$ при $|\omega| > \Delta$, с $\Delta \ll \omega_0$, так что $X(e^{j\omega})$ имеет узкую полосу в окрестностях частот $\omega = \pm\omega_0$.

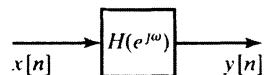


Рис. 5.64.

- а) Покажите, что

$$y[n] = s[n] \cos(\omega_0 n - \varphi_0),$$

если $|H(e^{j\omega})| = 1$, а график $\triangle H(e^{j\omega})$ изображен на рис. 5.65.

- б) Докажите, что

$$y[n] = s[n - n_d] \cos(\omega_0 n - \varphi_0 - \omega_0 n_d),$$

если $|H(e^{j\omega})| = 1$, а график $\triangle H(e^{j\omega})$ изображен на рис. 5.66. Покажите также, что

$$y[n] = s[n - n_d] \cos(\omega_0 n - \varphi_1)$$

является эквивалентным выражением для $y[n]$, где $-\varphi_1$ — значение аргумента функции $H(e^{j\omega})$ в точке $\omega = \omega_0$.

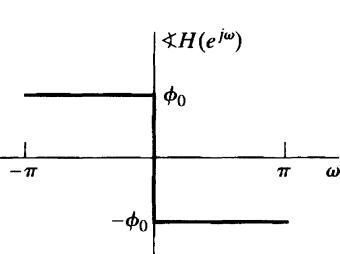


Рис. 5.65.

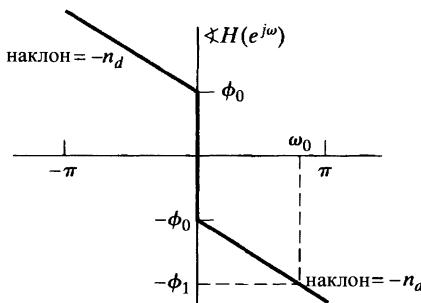


Рис. 5.66.

- в) Напомним, что групповая задержка системы с КЧХ $H(e^{j\omega})$ определяется формулой: $\tau_{gr}(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg[H(e^{j\omega})]$, а фазовая задержка вычисляется как $\tau_{ph}(\omega) = -(1/\omega) \triangle H(e^{j\omega})$. Предположим, что $|H(e^{j\omega})| = 1$ над полосой частот

сигнала $x[n]$. Основываясь на результатах, полученных в п. «а» и «б» этой задачи, покажите, что если $\tau_{\text{gr}}(\omega_0)$ и $\tau_{\text{ph}}(\omega_0)$ — целые числа, то при узкополосном входном сигнале $x[n]$ имеет место равенство:

$$y[n] = s[n - \tau_{\text{gr}}(\omega_0)] \cos(\omega_0 [n - \tau_{\text{ph}}(\omega_0)]).$$

Эта формула говорит о том, что в случае узкополосного сигнала $x[n]$ ФЧХ системы задерживает огибающую $s[n]$ входного сигнала на $\tau_{\text{gr}}(\omega_0)$, а несущую частоту $\cos \omega_0 n$ — на $\tau_{\text{ph}}(\omega_0)$.

- г) Учитывая материал § 4.6 о нецелой задержке последовательности, интерпретируйте воздействие ФЧХ системы на узкополосный сигнал, если $\tau_{\text{gr}}(\omega_0)$ или $\tau_{\text{ph}}(\omega_0)$ (или сразу обе) не принадлежат множеству целых чисел.

5.58. Пусть $y[n]$ — отклик ЛС-системы, характеризующейся разностным уравнением:

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad b_0 = 1$$

на белый шум $x[n]$ с нулевым средним значением.

- а) Вычислите z -преобразование $\Phi_{yy}(z)$ автокорреляционной функции $\varphi_{yy}[n]$.

Иногда возникает необходимость в такой обработке сигнала $y[n]$ линейным фильтром, при которой спектр мощности соответствующего выхода оказывается плоским. Эта процедура называется отбеливанием сигнала $y[n]$, а линейный фильтр, осуществляющий процедуру, называют отбеливающим. Допустим, вам известны автокорреляционная функция $\varphi_{yy}[n]$ и ее z -преобразование $\Phi_{yy}(z)$, но не коэффициенты разностного уравнения.

- б) Разработайте процедуру поиска характеристической функции $H_w(z)$ отбелывающего фильтра.
- в) Можно ли утверждать, что существует только один отбелывающий фильтр?

5.59. Во многих практических ситуациях мы сталкиваемся с задачей восстановления сигнала, «размазанного» в процессе сверки с импульсной характеристикой системы. В качестве модели этого размазывания можно рассмотреть процедуру линейного фильтрования, изображенную на рис. 5.67, с импульсной характеристикой из рис. 5.68. Попытаемся теперь восстановить сигнал $x[n]$ по $y[n]$.

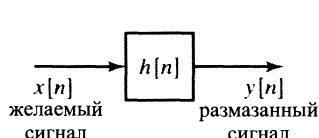


Рис. 5.67.

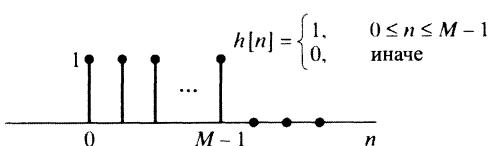


Рис. 5.68.

- а) Один из способов достижения цели основан на применении обратного фильтра, т. е. сигнал $y[n]$ фильтруется системой с КЧХ $H_i(e^{j\omega}) = 1/H(e^{j\omega})$, где $H(e^{j\omega})$ — КЧХ исходного фильтра. Учитывая известную импульсную характеристику (рис. 5.68), исследуйте трудности, возникающие при реализации такого подхода к восстановлению. Постарайтесь привести краткое, но исчерпывающее рассуждение.

- 6) Ввиду трудностей, связанных с инверсным фильтрованием, был разработан еще один метод восстановления. Размазанный сигнал $y[n]$ пропускается через систему из рис. 5.69, и получается сигнал $w[n]$, из которого мы можем извлечь уточненный сигнал $x[n]$. Импульсные характеристики подсистем $h_1[n]$ и $h_2[n]$ изображены на рис. 5.70. Подробно объясните работу каскада. В частности, сформулируйте условия, при которых мы сможем точно восстановить сигнал $x[n]$ из $w[n]$.

Указание: исследуйте импульсную характеристику всей системы, преобразующей сигнал $x[n]$ в $w[n]$.

Рис. 5.70.

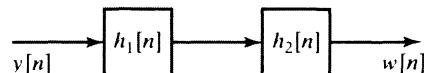
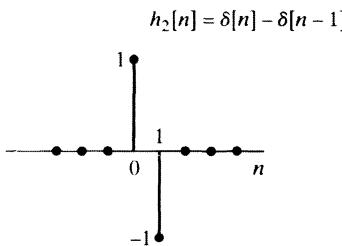
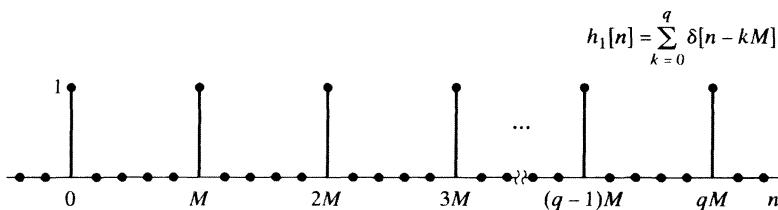


Рис. 5.69.



- в) Попытайтесь обобщить метод, описанный в предыдущем пункте, на случай произвольной конечной импульсной характеристики $h_1[n]$ с нулевыми отсчетами при $n < 0$ и $n \geq M$. Допустив, что $h_1[n]$ совпадает с последовательностью из рис. 5.70, найдите соотношение, связывающее $H_2(z)$ и $H(z)$, при котором система работает, как в п. «б» задачи. При каких ограничениях на характеристическую функцию $H(z)$ можно найти детерминированную систему с характеристической функцией $H_2(z)$?
- 5.60. Задача посвящена проверке того факта, что множители $(z - z_0)$ и $z/(z - 1/z_0^*)$ добавляют к рациональной функции одну и ту же фазу.
- а) Пусть $H(z) = z - 1/a$, где a — вещественное число из интервала $(0; 1)$. Отметьте нули и полюса этой функции на расширенной комплексной плоскости (т. е. включая бесконечно удаленную точку $z = \infty$). Вычислите $\angle H(e^{j\omega})$ — фазу этой функции.
- б) Предположим, что полюса функции $G(z)$ инверсны нулям функции $H(z)$ (т. е. если z_0 — нуль $H(z)$, то полюс $G(z)$ расположен в точке $1/z_0^*$), а ее

нули инверсны полюсам $H(z)$, включая точки 0 и ∞ . Изобразите схему нулей и полюсов функции $G(z)$, вычислите фазу $\angle G(e^{j\omega})$ и покажите, что она совпадает с $\angle H(e^{j\omega})$.

5.61. Докажите истинность следующих утверждений.

- Свертка двух минимально-фазовых последовательностей является минимально-фазовой.
- Сумма двух минимально-фазовых последовательностей может оказаться неминимально-фазовой. Подберите минимально- и неминимально-фазовые последовательности, которые являются суммой двух минимально-фазовых.

5.62. Известно, что последовательность

$$r[n] = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{4}{3} 2^n u[-n-1]$$

получается по формуле:

$$r[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]h[n+m] = h[n]*h[-n],$$

где $h[n]$ — минимально-фазовая последовательность.

- Вычислите z -преобразование $R(z)$ и начертите схему его нулей и полюсов.
- Подберите последовательность $h[n]$, удовлетворяющую условию задачи с точностью до множителя ± 1 , и найдите ее z -преобразование $H(z)$.

5.63. Напомним, что *максимально-фазовой* называется устойчивая последовательность, все нули и полюса z -преобразования которой находятся *вне* единичного круга.

- Покажите, что максимально-фазовые последовательности антидетерминированы, т. е. их отсчеты с положительными номерами равны нулю.

Конечную максимально-фазовую последовательность можно преобразовать в детерминированную с помощью конечного числа задержек. Детерминированная конечная максимально-фазовая последовательность с данным модулем Фурье-образа может быть получена инверсированием ($z \rightarrow 1/z^*$) всех нулей соответствующего z -преобразования минимально-фазовой последовательности во внешнюю область, ограниченную единичной окружностью. Иначе говоря, мы можем выразить z -преобразование максимально-фазовой детерминированной конечной последовательности в виде:

$$H_{\max}(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z).$$

Очевидно, при этом выполнено равенство $|H_{\max}(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$. Кроме того, z -преобразование конечной минимально-фазовой последовательности может быть записано как произведение:

$$H_{\min}(z) = h_{\min}[0] \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1}), \quad |c_k| < 1.$$

- Подберите выражение характеристической функции всепропускающей системы, необходимой для инверсирования всех нулей функции $H_{\min}(z)$ относительно единичной окружности.

- в) Покажите, что $H_{\max}(z)$ можно переписать как $H_{\max}(z) = z^{-M} H_{\min}(z^{-1})$.
 г) Опираясь на полученные результаты, выразите максимально-фазовую последовательность $h_{\max}[n]$ через $h_{\min}[n]$.

- 5.64. К сожалению, устойчивую детерминированную обратную систему (совершенный компенсатор) к неминимально-фазовой системе построить невозможно. Здесь исследуется вопрос о компенсировании АЧХ неминимально-фазовой системы.

Допустим, что устойчивая неминимально-фазовая дискретная ЛС-система с рациональной характеристической функцией $H(z)$ последовательно соединена с компенсирующей системой с характеристической функцией $H_c(z)$, как показано на рис. 5.71.

- а) Подберите $H_c(z)$, чтобы соответствующая система была устойчивой и детерминированной, а АЧХ всего каскада равнялась 1. (Напомним, что $H(z)$ всегда можно записать как $H(z) = H_{\text{ap}}(z)H_{\min}(z)$.)
 б) Какой будет соответствующая функция $G(z)$?
 в) Пусть
- $$H(z) = (1 - 0,8e^{j0,3\pi}z^{-1})(1 - 0,8e^{-j0,3\pi}z^{-1})(1 - 1,2e^{j0,7\pi}z^{-1})(1 - 1,2e^{-j0,7\pi}z^{-1}).$$
- Найдите $H_{\min}(z)$, $H_{\text{ap}}(z)$, $H_c(z)$ и $G(z)$ для этого случая и постройте схемы нулей и полюсов каждой из найденных функций.
- 5.65. Пусть $h_{\min}[n]$ — минимально-фазовая последовательность с z -преобразованием $H_{\min}(z)$. Покажите, что, если $h[n]$ — детерминированная неминимально-фазовая последовательность с модулем Фурье-образа, равным $|H_{\min}(e^{j\omega})|$, то $|h[0]| < |h_{\min}[0]|$. (Используйте теорему о начальном значении (с. 141) вместе с формулой (5.107).)
- 5.66. К одному из интересных и важных свойств минимально-фазовых последовательностей относится минимальность задержки энергии, т. е. отсчеты $E[n] = \sum_{m=0}^n |h[m]|^2$ в случае минимально-фазовой последовательности $h[n]$ являются наибольшими при всех $n > 0$ по сравнению с другими детерминированными последовательностями с фиксированной функцией модуля Фурье-образа $|H(e^{j\omega})|$. Приведем доказательство этого утверждения. Пусть $h_{\min}[n]$ — тоже минимально-фазовая последовательность с z -преобразованием $H_{\min}(z)$, а z_k — нуль функции $H_{\min}(z)$, так что

$$H_{\min}(z) = Q(z)(1 - z_k z^{-1}), \quad |z_k| < 1,$$

где $Q(z)$ — снова минимально-фазовая функция. Рассмотрим теперь другую последовательность $h[n]$ с z -преобразованием $H(z)$, имеющим нуль в точке $z = 1/z_k^*$ вместо z_k , для которой $|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$.

- а) Выразите $H(z)$ через $Q(z)$.
 б) Запишите $h[n]$ и $h_{\min}[n]$ через минимально-фазовую последовательность $q[n]$ с z -преобразованием $Q(z)$.

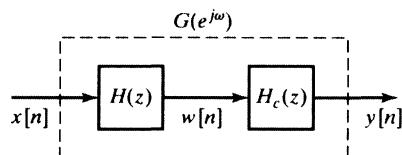


Рис. 5.71.

в) Для сравнения распределения энергии двух последовательностей покажите, что

$$\varepsilon = \sum_{m=0}^n |h_{\min}[m]|^2 - \sum_{m=0}^n |h[m]|^2 = (1 - |z_k|^2)|q[n]|^2.$$

г) Опираясь на предыдущее тождество, докажете неравенство:

$$\sum_{m=0}^n |h[m]|^2 \leq \sum_{m=0}^n |h_{\min}[m]|^2 \quad \forall m.$$

5.67. Реакцией детерминированной всепропускающей системы с характеристической функцией $H_{\text{ap}}(z)$ на сигнал $x[n]$ служит последовательность $y[n]$.

а) Опираясь на формулу (5.124), покажите, что

$$\sum_{k=0}^n |x[k]|^2 \geq \sum_{k=0}^n |y[k]|^2, \quad (5.194)$$

если $x[n]$ — вещественная минимально-фазовая последовательность (в частности, $x[n] = 0$ при $n < 0$).

б) Покажите, что формула (5.194) остается в силе даже для неминимально-фазовых последовательностей $x[n]$, удовлетворяющих условию $x[n] = 0$ при $n < 0$.

5.68. При проектировании как непрерывных, так и дискретных фильтров приходится аппроксимировать какую-то специальную АЧХ, не учитывая фазы. Так, например, поступают при стандартном проектировании ФНЧ и полосовых фильтров.

С другой стороны, в большинстве задач фильтрования было бы желательно иметь нулевую или линейную ФЧХ. К сожалению, невозможно разработать детерминированный фильтр с нулевой фазой. Однако во многих процессах фильтрования тривиальность отсчетов импульсной характеристики при $n < 0$ не является необходимым требованием, особенно если процесс происходит не в реальном времени.

Одна из методик, обычно применяемая при дискретном фильтровании, состоит в том, что данные, которые предстоит профильтровать, имею конечную длительность, хранятся, например, в памяти компьютера и затем пропускаются вперед и назад через один и тот же фильтр.

Пусть $h[n]$ — импульсная характеристика детерминированного фильтра с произвольной ФЧХ. Предположим, что $h[n]$ — вещественная последовательность и обозначим через $H(e^{j\omega})$ ее Фурье-образ, а через $x[n]$ — данные, которые мы хотим отфильтровать.

а) *Метод A.* Операция фильтрования осуществляется системой из рис. 5.72, а).

(i) Определите импульсную характеристику $h_1[n]$ системы с реакцией $s[n]$ на сигнал $x[n]$ и покажите, что ФЧХ у нее — нулевая.

(ii) Вычислите АЧХ $|H_1(e^{j\omega})|$ и выразите ее через $|H(e^{j\omega})|$ и $\angle H(e^{j\omega})$.

б) *Метод B.* Как показано на рис. 5.72, б), сигнал $x[n]$ пропускается через фильтр с импульсной характеристикой $h[n]$ и на выходе получается $g[n]$. Затем $x[n]$

опять пропускается через этот фильтр, но в обратном направлении и превращается в $r[n]$. Результат фильтрования получается в виде суммы $g[n]$ и $r[-n]$. Вся совокупность операций может быть представлена составным фильтром с входом $x[n]$, выходом $y[n]$ и импульсной характеристики $h_2[n]$.

(iii) Покажите, что составной фильтр обладает нулевой ФЧХ.

(iv) Вычислите $|H_2(e^{j\omega})|$ и запишите эту функцию через $|H(e^{j\omega})|$ и $\angle H(e^{j\omega})$.

- в) Предположим, что нам предстоит подвергнуть полосовому фильтрованию с нулевой ФЧХ конечную последовательность. Допустим, что у нас есть полосовой фильтр с импульсной характеристикой $h[n]$, ФЧХ которого указана на рис. 5.72, в). Причем АЧХ фильтра нас устраивает, но он обладает линейной фазой. Чтобы добиться нулевой фазы, можно прибегнуть к методу А или Б. Вычислите и изобразите $|H_1(e^{j\omega})|$ и $|H_2(e^{j\omega})|$. Основываясь на своих вычислениях, выберите наиболее удобный метод для достижения желаемого полосового фильтрования и объясните, почему именно на нем вы остановились.

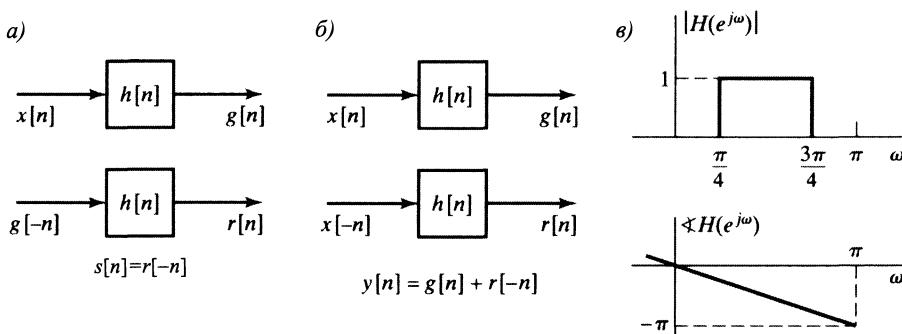


Рис. 5.72.

- 5.69. Выясните, верно ли следующее утверждение:

Если у характеристической функции $H(z)$ есть нули где-нибудь, кроме $z = 0$ и $z = \infty$, то соответствующая система не может иметь нулевую или обобщенно линейную фазу?

- 5.70. На рис. 5.73 показана схема нулей характеристической функции $H(z)$ вещественного детерминированного линейно-фазового КИХ-фильтра. Все отмеченные нули соответствуют множителям вида $(1 - az^{-1})$. Полюс в точке $z = 0$ не показан на рисунке. Коэффициент усиления фильтра в полосе пропускания приблизительно равен единице.

- а) Определите точное положение как можно большего числа нулей характеристической функции, если известно, что модуль одного из них равен 0,5, а его аргумент — 153° .
- б) Характеристическая функция $H(z)$ используется в системе дискретной обработки непрерывного сигнала, изображенной на рис. 4.11, с шагом дискретизации $T = 0,5$ мс. Предположите, что входной непрерывный сигнал $X_c(j\Omega)$ узкополосный и частота дискретизации достаточно высока, так что ложные частоты не появляются. Чему равна временная задержка (в миллисекундах),

вносимая всей большой системой, если временем работы как НДП, так и ДНП можно пренебречь?

- в) Начертите график логарифма АЧХ $20 \lg |H_{\text{eff}}(j\Omega)|$ непрерывной системы из предыдущего пункта задачи на отрезке $0 \leq \Omega \leq T/\pi$, основываясь на известных вам фактах. Вычислите частоты, при которых $H_{\text{eff}}(j\Omega) = 0$, и отметьте их на чертеже.

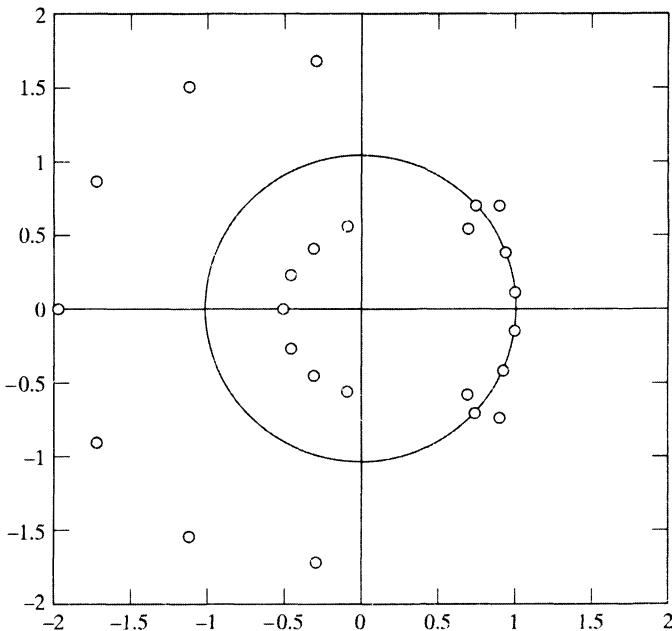


Рис. 5.73.

- 5.71. Сигнал $x[n]$ подвергается обработке ЛС-системой с характеристической функцией $H(z)$, а затем поникающей дискретизации с множителем 2 до получения сигнала $y[n]$, как показано на рис. 5.74. Во втором случае (см. рис.) сигнал $x[n]$ сначала подвергается поникающей дискретизации, а потом уже пропускается через ЛС-систему с характеристической функцией $G(z)$ до получения $r[n]$.

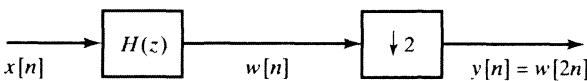
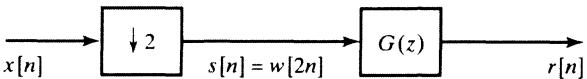


Рис. 5.74.



- а) Подберите (непостоянные) функции $H(z)$ и $G(z)$ так, чтобы $r[n] = y[n]$ при любом входном сигнале $x[n]$.
- б) Задайте такую функцию $H(z)$, что при любом выборе $G(z)$ равенство $r[n] = y[n]$ будет нарушаться на каком-то сигнале $x[n]$.
- в) Найдите максимально общие условия на $H(z)$, при которых найдется характеристическая функция $G(z)$, обеспечивающая равенство $r[n] = y[n]$ при любом

входном сигнале $x[n]$. Если ваши условия описывают импульсную характеристику $h[n]$, переформулируйте их в терминах характеристической функции.

- г) Используя результат предыдущего пункта задачи, выразите $g[n]$, при которой $r[n] = y[n]$, через $h[n]$.

- 5.72. Рассмотрите дискретную ЛС-систему с вещественноненеизменной импульсной характеристикой $h[n]$. Мы хотим вычислить $h[n]$ или, что эквивалентно, $H(z)$, исходя из автокорреляции $c_{hh}[\ell]$ импульсной характеристики. По определению,

$$c_{hh}[\ell] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]h[k+\ell].$$

- а) Можете ли вы однозначно восстановить $h[n]$ по $c_{hh}[\ell]$, если система детерминирована и устойчива? Обоснуйте свой ответ.
б) Допустим, что $h[n]$ устойчива, детерминирована и характеристическая функция имеет вид:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

для некоторых конечных a_k . Можете ли вы теперь однозначно восстановить $h[n]$ по $c_{hh}[\ell]$? Четко объясните ответ.

- 5.73. Пусть $h[n]$ и $H(z)$ — соответственно импульсная характеристика и характеристическая функция устойчивой всепропускающей ЛС-системы, а $h_i[n]$ — импульсная характеристика обратной (устойчивой) ЛС-системы. Предполагая, что $h[n]$ имеет вещественные отсчеты, докажите равенство $h_i[n] = h[-n]$.

- 5.74. Рассмотрите вещественную последовательность $x[n]$, для которой $X(e^{j\omega}) = 0$ при $\frac{\pi}{4} \leq |\omega| \leq \pi$. Пусть $g[n]$ — сигнал $x[n]$ с одним искаженным отсчетом:

$$g[n] = x[n], \quad \text{при } n \neq n_0,$$

причем $g[n_0]$ — вещественное число, никак не связанное с $x[n_0]$. В каждом из следующих случаев укажите удобный алгоритм приближенного или точного восстановления сигнала $x[n]$ по искаженной версии $g[n]$:

- а) Точное значение n_0 неизвестно, но вы знаете, что это нечетное число.
б) Ничего о n_0 неизвестно.

- 5.75. Покажите, что если $h[n]$ — импульсная характеристика N -точечного КИХ-фильтра, при которой $h[n] = h[N-1-n]$ и $H(z_0) = 0$, то $H(1/z_0)$ тоже равно 0. Иными словами, нули характеристической функции симметричного КИХ-фильтра разбиваются на пары взаимно обратных чисел. (Если $h[n]$ — вещественноненеизменна, то нули характеристической функции будут тоже вещественными или попарно комплексно сопряженными.)

ГЛАВА 6

СТРУКТУРЫ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

6.1. Введение

Как мы видели в главе 5, пара сигнал–отклик линейной стационарной системы с рациональной характеристической функцией удовлетворяет линейному разностному уравнению с постоянными коэффициентами. Поскольку характеристическая функция — это z -преобразование импульсной характеристики, а разностное уравнение, связывающее сигнал и отклик, однозначно восстанавливается по характеристической функции (и наоборот), то разностное уравнение, характеристическая функция и импульсная характеристика эквивалентно характеризуют соотношение между входом и выходом дискретной ЛС-системы. Для реализации системы дискретным, аналоговым или цифровым устройством необходимо преобразовать ее характеристическую функцию или соответствующее разностное уравнение в алгоритм, или структуру, которые, в свою очередь, реализуются уже на программном или аппаратном уровне. Как мы убедимся в этой главе, системы, описываемые линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами, представляются структурами, состоящими из совокупности базисных операций: сложения, умножения на константу и задержки, точная реализация которых зависит от используемой технологии.

В качестве примера вычислений, связанных с разностным уравнением, рассмотрим систему, описываемую характеристической функцией

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|. \quad (6.1)$$

Импульсная характеристика этой системы равна

$$h[n] = b_0 a^n u[n] + b_1 a^{n-1} u[n-1], \quad (6.2)$$

а разностное уравнение первого порядка, связывающее ее вход и выход, имеет вид:

$$y[n] - ay[n-1] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]. \quad (6.3)$$

Ввиду бесконечности импульсной характеристики реализация системы с помощью дискретной свертки невозможна. Однако, переписав уравнение (6.3) в виде

$$y[n] = ay[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1], \quad (6.4)$$

мы получим основу алгоритма, вычисляющего отсчет $y[n]$ реакции системы через предыдущий отсчет $y[n - 1]$ и два последовательных отсчета входного сигнала $x[n]$ и $x[n - 1]$. В § 2.6 было показано, что предположение о состоянии покоя в начальном положении (т. е. считая, что если $x[n] = 0$ при $n < 0$, то $y[n] = 0$ при $n < 0$) и метод рекуррентного вычисления отсчетов реакции, основанный на формуле (6.4), наделяют линейную систему свойством стационарности (см. с. 58). Аналогичная процедура возможна и в более общем случае разностного уравнения порядка N . Однако алгоритм, вытекающий из формулы (6.4), и его обобщение на уравнение более высокого порядка — не единственный способ реализации конкретных систем, и зачастую более предпочтительными оказываются другие алгоритмы. Более того, из данного соотношения между $x[n]$ и $y[n]$ можно извлечь неограниченное число вычислительных структур.

Эта глава посвящена важным моментам реализации дискретных ЛС-систем. Прежде всего мы познакомимся с блок-схемами и сигнальными потоковыми графиками, которые схематично изображают вычислительные структуры, или сети, для линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, характеризующих дискретные детерминированные ЛС-системы. Комбинируя алгебраические вычисления с преобразованием блочно-диаграммного представления, мы выведем несколько основных эквивалентных структур для реализации детерминированных ЛС-систем. Две такие структуры могут быть абсолютно тождественными с точки зрения точного отражения соотношения между сигналом и откликом в терминах переменных и коэффициентов, однако их поведение и эффективность могут значительно отличаться друг от друга при конечной точности вычислений. Этим объясняется повышенный интерес к исследованию различных структур реализации. Проблемы, связанные с неточным представлением коэффициентов и переменных в цифровых реализациях, будут обсуждаться в последних параграфах этой главы.

6.2. Блок-схемы линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами

Разностное уравнение, описывающее ЛС-системы, — это линейное соотношение на текущие и предыдущие отсчеты входной и выходной последовательностей. Поэтому при реализации ЛС-систем через итерационное вычисление выходного сигнала по рекуррентной формуле, полученной из разностного уравнения, нам приходится обращаться как к текущему, так и к предшествующим отсчетам сигналов. Таким образом, к основным элементам реализации дискретных ЛС-систем относятся сумматоры, умножители и память для хранения задержанных членов последовательностей. Подключение друг к другу базисных элементов удобно изображать с помощью блок-схемы, где они обозначаются специальными графическими символами (рис. 6.1). На рис. 6.1, а) показано сложение двух последовательностей. В общем случае сумматор может иметь любое число входов, однако в большинстве практических случаев их только два. На всех блок-схемах этой главы число входов сумматора (и других элементов) будет указываться явно, как это сделано на рис. 6.1, а). Схема умножения последовательности на

константу показана на рис. 6.1, б), а рис. 6.1, в) представляет блок-схему, отражающую задержку последовательности на один отсчет. При цифровой реализации операция задержки может осуществляться запоминающими регистрами, по одному на каждую единицу задержки, а аналогово-дискретной, например в фильтрах на переключаемых конденсаторах задержка осуществляется устройствами накопления зарядов. Система единичной задержки на блок-схеме обозначается своей характеристической функцией z^{-1} . Аналогично можно изображать задержку на большее число отсчетов, заменив лишь z^{-1} на z^{-M} , где M — число задерживаемых отсчетов. Однако в реальной реализации большой задержки используется каскадное соединение систем единичной задержки. При реализации системы в виде интегральной микросхемы эти единичные задержки могут образовывать сдвиговый регистр, такты которого совпадают с частотой дискретизации входного сигнала. В случае программного воплощения схемы M соединенных в каскаде задержек реализуются как M последовательных регистров памяти.

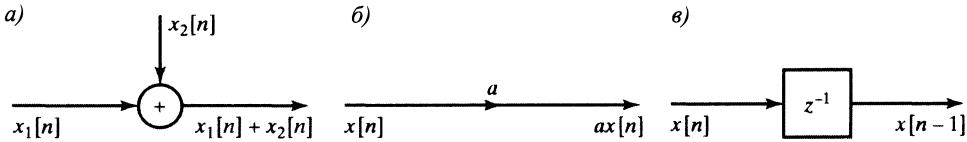


Рис. 6.1. Символы блок-схем: а) сложение двух последовательностей; б) умножение последовательности на константу; в) единичная задержка.

Пример 6.1. Блок-схема разностного уравнения

В качестве примера схематического изображения разностного уравнения рассмотрим уравнение второго порядка:

$$y[n] = a_1 y[n - 1] + a_2 y[n - 2] + b_0 x[n]. \quad (6.5)$$

Соответствующая характеристическая функция имеет вид:

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}. \quad (6.6)$$

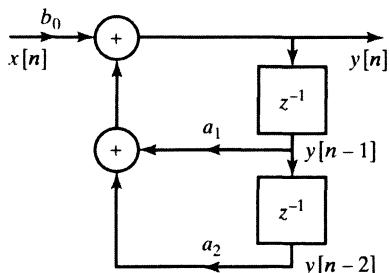


Рис. 6.2. Пример блок-схемы разностного уравнения

Блок-схема системы, описываемой уравнением (6.5), дает графическое представление вычислительного алгоритма, реализующего систему (рис. 6.2). Когда система реализуется на универсальном компьютере или на цифровом процессоре, структура сети, аналогичная приведенной на рис. 6.2, служит основой программы. Если система реализуется дискретными компонентами или как полная система с помощью СБИС-технологий, блок-схема помогает определить архитектуру аппаратных средств для этой системы. В обоих случаях такие диаграммы показывают порядок арифметических действий и указывают отсчеты, которые необходимо хранить в памяти. В нашем примере блок-схема из рис. 6.2

говорит, что мы должны обеспечить хранение переменных $y[n-1]$, $y[n-2]$ и коэффициентов разностного уравнения a_1 , a_2 и b_0 . Кроме того, на схеме видно, что для вычисления отсчета $y[n]$ выходной последовательности сначала формируются произведения $a_1y[n-1]$ и $a_2y[n-2]$, затем они складываются и, наконец, к их сумме прибавляется $b_0x[n]$. Таким образом, рис. 6.2 иллюстрирует сложность соответствующего вычислительного алгоритма, его шаги и количество элементарных устройств, необходимых для воплощения системы. \square

Пример 6.1 легко обобщается на случай разностного уравнения более высокого порядка¹:

$$y[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad (6.7)$$

с соответствующей характеристической функцией

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}. \quad (6.8)$$

Переписывая уравнение (6.7) как рекуррентную формулу, получаем

$$y[n] = \sum_{k=1}^n a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]. \quad (6.9)$$

Блок-схема из рис. 6.3 служит явным графическим представлением рекуррентной формулы (6.9). Строго говоря, она изображает пару разностных соотношений:

$$v[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad (6.10)$$

$$y[n] = \sum_{k=1}^n a_k y[n-k] + v[n]. \quad (6.11)$$

Соглашение о двух входах сумматора влечет, что сложение должно выполняться в определенном порядке. В частности, рис. 6.3 показывает, что сначала вычисляются произведения $a_N y[n-N]$ и $a_{N-1} y[n-N+1]$, затем они складываются, к их сумме прибавляется произведение $a_{N-2} y[n-N+2]$ и т. д. После того как $y[n]$ вычислен, отсчет $y[n-N+1]$ сдвигается в регистр, хранящий $y[n-N]$, $y[n-N-2]$ — в регистр со значением $y[n-N-1]$ и т. д., т. е. происходит процесс обновления значений переменных.

¹ В предыдущих главах мы пользовались другой формой записи общего разностного уравнения N -го порядка:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k].$$

Здесь и далее более удобен вид (6.7) уравнения с коэффициентами, нормализованными так, чтобы коэффициент при $y[n]$ был равен 1, а коэффициенты при задержанных отсчетах выходного сигнала появлялись с положительным знаком после их переноса в правую часть уравнения (см. уравнение (6.9)).

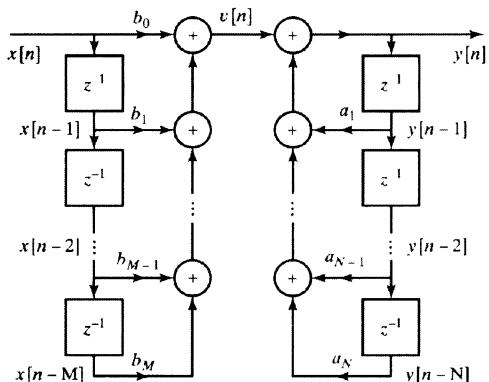


Рис. 6.3. Блок-схема разностного уравнения порядка N

Блок-схему можно перерисовывать и видоизменять многими способами, не меняя при этом характеристической функции. Любая приемлемая перестановка элементов схемы представляет свой вычислительный алгоритм, реализующий одну и ту же систему. Например, блок-схему рис. 6.3 можно представлять себе как каскад двух систем, первая из которых вычисляет $v[n]$ по $x[n]$, а вторая — $y[n]$ по $v[n]$. Так как обе эти системы линейны и стационарны (предполагаются условия состояния покоя в начальном положении), порядок следования их друг за другом несуществен и может быть изменен, как показано на рис. 6.4. В целях упрощения рисунка мы предполагаем, что $M = N$. Ясно, что это не нарушает общности, поскольку при $M \neq N$ некоторые из коэффициентов a_k или b_k на рисунке можно положить равными нулю.

Рисунок 6.3 можно воспринимать как реализацию характеристической функции (6.8), отвечающую разложению

$$H(z) = H_2(z)H_1(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right) \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right), \quad (6.12)$$

или, что равносильно, как реализацию пары соотношений:

$$V(z) = H_1(z)X(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) X(z), \quad (6.13)$$

$$Y(z) = H_2(z)V(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right) V(z). \quad (6.14)$$

С другой стороны, рис. 6.4 представляет $H(z)$ как

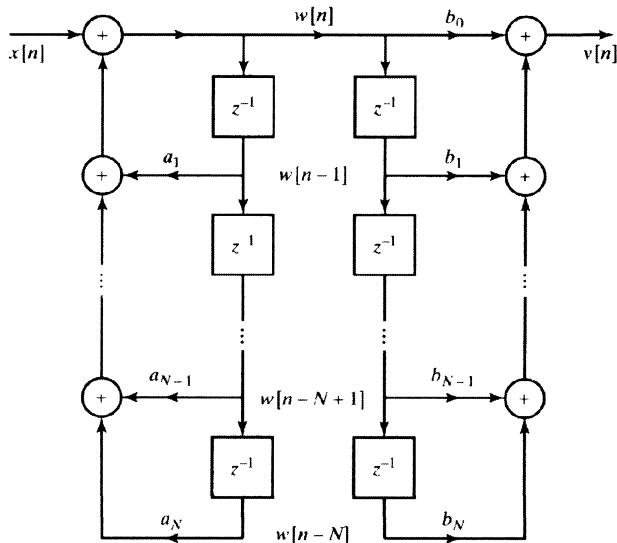
$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right) \quad (6.15)$$

или как соотношения:

$$W(z) = H_2(z)X(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right) X(z), \quad (6.16)$$

$$Y(z) = H_1(z)W(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) W(z). \quad (6.17)$$

Рис. 6.4. Реконфигурация блок-схемы из рис. 6.3. Предполагается, что $M = N$. Если это не так, некоторые из коэффициентов могут быть нулевыми



Во временной области рис. 6.4 (как и формулам (6.16) и (6.17)) соответствуют два разностных уравнения:

$$w[n] = \sum_{k=1}^N a_k w[n - k] + x[n], \quad (6.18)$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k w[n-k]. \quad (6.19)$$

Блок-схемы из рис. 6.3 и 6.4 отличаются друг от друга не только внешне. На первой из них сначала реализуются нули характеристической функции, представленные функцией $H_1(z)$, а затем полюса, участвующие в $H_2(z)$. А на второй в первую очередь реализуются полюса, а затем уже нули. Теоретически, порядок реализации не оказывается на характеристической функции, однако, как мы убедимся, в арифметике конечной точности между этими теоретически эквивалентными вариантами может появиться существенная разница. Другой важный момент касается числа элементов задержки в этих системах. В приведенных вариантах схемы рисунков 6.3 и 6.4 насчитывают по $(M + N)$ задержанных

переменных, но блок-схему из рис. 6.4 можно перерисовать так, что станет видно, как отсчеты сигнала $w[n]$ хранятся в двух цепочках элементов задержки. Следовательно, эти цепочки можно объединить, что и сделано на рис. 6.5.

Количество элементов задержки, присутствующих на блок-схеме рис. 6.5, меньше, чем на предыдущих эквивалентных схемах, и фактически совпадает с минимальным числом, необходимым для реализации системы с характеристической функцией (6.8). Действительно, легко показать, что минимальное число задержек, необходимое для реализации общего разностного уравнения, равно $\max(M, N)$. Реализацию системы с минимальным числом задержек принято называть *канонической формой* реализации. Неканоническая блок-схема из рис. 6.3 называется *прямой формой I* реализации общей системы N -го порядка, так как это прямое переписывание разностного уравнения, задающего соотношение между входным и выходным сигналами, которое, в свою очередь, может быть получено непосредственно из характеристической функции. Блок-схему из рис. 6.5 иногда называют *прямой формой II* или *канонической прямой формой* реализации. Зная, что блок-схема 6.5 дает подходящую структуру реализации характеристической функции $H(z)$ из формулы (6.8), мы можем легко переходить от характеристической функции к блок-схеме и назад (или к соответствующему разностному уравнению).

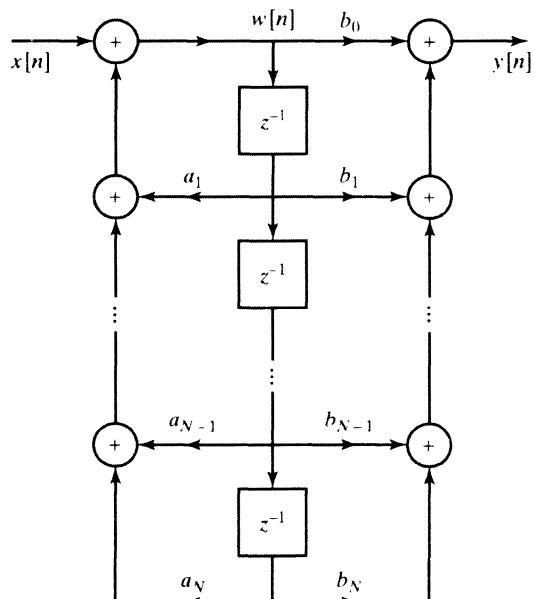


Рис. 6.5. Комбинация задержек из рис. 6.4

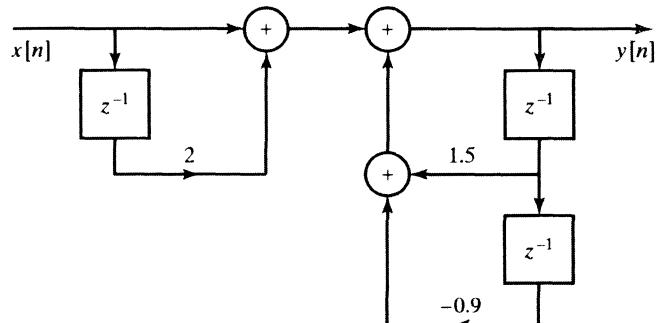
Пример 6.2. Прямые формы I и II реализации ЛС-системы

Рассмотрим ЛС-систему с характеристической функцией

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 1,5z^{-1} + 0,9z^{-2}}. \quad (6.20)$$

Сравнивая ее с общей формой (6.8), мы видим, что в нашем случае $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $a_1 = +1,5$ и $a_2 = -0,9$, так что, используя рис. 6.3 как образец, мы можем реализовать нашу систему в прямой форме I, как показано на рис. 6.6, или, основываясь на рис. 6.5, — в прямой форме II (рис. 6.7). Отметим, что коэффициенты в ветвях обратной связи на обеих схемах имеют знак, противоположный знаку коэффициентов перед z^{-1} и z^{-2} в дроби (6.20). Хотя такая замена иногда приводит к недоразумениям, важно помнить, что коэффициенты обратной связи $\{a_k\}$ и соответствующие коэффициенты характеристической функции всегда обладают противоположными знаками. Обратите внимание, что для реализации нашей системы в прямой форме II потребовалось только две задержки, на одну меньше, чем в форме I. \square

Рис. 6.6. Прямая форма I реализации характеристической функции (6.20)



Мы познакомились с двумя эквивалентными формами блок-схем, реализующими ЛС-систему с характеристической функцией (6.8). Схемы, представляющие разные вычислительные алгоритмы, были получены преобразованиями, основанными на линейности систем и алгебраических свойствах характеристической функции. Действительно, поскольку разностное уравнение, представляющее ЛС-систему, линейно, эквивалентные формы его записи можно получить простой линейной заменой переменных, в связи с чем можно найти неограниченное число эквивалентных реализаций любой данной системы. В § 6.4, используя подход, аналогичный описанному в этом параграфе, мы исследуем несколько других важных и полезных эквивалентных структур реализации системы с рациональной характеристической функцией. Но перед обсуждением этих форм полезно ввести понятие сигнального потокового графа, еще одного представления разностных уравнений.

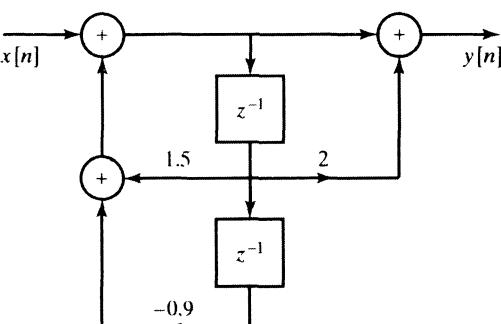


Рис. 6.7. Прямая форма II реализации характеристической функции (6.20)

6.3. Сигнальный потоковый граф линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами

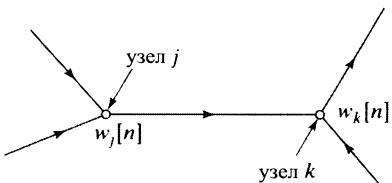


Рис. 6.8. Пример узлов и ветвей сигнального потокового графа

Символ (j, k) обозначает ветвь потокового графа, исходящую из узла j и заканчивающуюся в узле k (рис. 6.8). Каждой ветви отвечает входной и выходной сигналы. Входным сигналом для ветви (j, k) служит последовательность, взятая в качестве метки узла, т. е. $w_j[n]$. В линейном сигнальном потоковом графе, а именно такие мы и рассматриваем, выходной сигнал, соответствующий ветви, получается линейным преобразованием ее входного сигнала. Простейшим примером служит постоянное усиление, когда выходной сигнал ветви — это входной сигнал, умноженный на константу. Линейная операция, изображаемая ветвью, обычно ставится рядом со стрелкой, указывающей ориентацию. В случае умножителя на константу, или масштабного преобразователя, эта константа просто ставится рядом со стрелкой. Ветвь, обозначение операции которой опущено, представляет собой ветвь с единичным коэффициентом усиления, или тождественное преобразование. По определению, значение каждого узла графа равно сумме всех входящих в него сигналов.

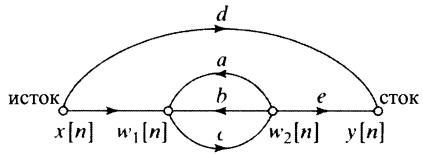


Рис. 6.9. Пример сигнального потокового графа со стоком и истоком

длящие ветви. Он, как правило, обозначает общий выход системы. Сток, исток и ветви с единичным коэффициентом усиления иллюстрируются рис. 6.9, который представляет следующие линейные соотношения:

$$\begin{aligned} w_1[n] &= x[n] + aw_2[n] + bw_2[n], \\ w_2[n] &= cw_1[n], \\ y[n] &= dx[n] + ew_2[n]. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Сложение, умножение на константу и задержка — базисные операции, необходимые для реализации линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами

Представление разностных уравнений с помощью сигнальных потоковых графов аналогично блок-схемам, за исключением нескольких обозначений. С формальной точки зрения сигнальный потоковый граф — это сеть направленных ветвей, соединяющих узлы. Каждый узел обозначен переменной или меткой. Метка, соответствующая узлу k , может выглядеть как w_k , или, подчеркивая тот факт, что переменные, относящиеся к узлам, как правило — последовательности, ее обозначают через $w_k[n]$.

Для завершения определения сигнального потокового графа нам необходимо ввести два специальных типа узлов: сток и исток. Истоком называется узел, в который не входит ни одной ветви, иначе говоря, стрелки, стоящие на всех ветвях, инцидентных с ним, направлены от этого узла. Исток используется для обозначения входного сигнала всей системы или источников сигнала внутри нее.

Стоком называют узел, имеющий лишь входящие ветви. Он, как правило, обозначает общий выход системы. Сток, исток и ветви с единичным коэффициентом усиления иллюстрируются рис. 6.9, который представляет следующие линейные соотношения:

циентами, в связи с чем алгоритмы, реализующие ЛС-системы, можно изображать сигнальными потоковыми графиками, состоящими из этих элементов. Как пример такой реализации рассмотрим блок-схему из рис. 6.10, а), где в прямой форме II реализована система с характеристической функцией (6.1). Сигнальный потоковый граф, соответствующий этой системе, приведен на рис. 6.10, б). Узел 0 на рис. 6.10, б) является истоком, чьим значением служит входная последовательность $x[n]$, а узел 5 — стоком; его метка — выходной сигнал $y[n]$. Обратите внимание, для четкого выделения входа и выхода системы сток и исток соединены с остальным графом ветвями с единичным коэффициентом усиления. Очевидно, узлы 3 и 5 имеют одинаковые значения. Все ветви на рис. 6.10, б), за исключением одной (ветвь задержки (2, 4)), являются простыми ветвями усиления, т. е. выходной сигнал ветви получается из ее входного сигнала умножением на константу. Задержку во временной области представить ветвью усиления нельзя. Однако z -преобразование единичной задержки — это умножение на z^{-1} . Заменив разностное уравнение его эквивалентом, полученным с помощью z -преобразования, можно обозначать все ветви соответствующими характеристическими функциями. При этом каждый коэффициент ветви будет являться функцией от z . В частности, коэффициент усиления ветви единичной задержки — z^{-1} . По договоренности узлы графа обозначаются последовательностями, а не их z -преобразованиями, но рядом с задерживающей ветвью будем ставить коэффициент z^{-1} . Необходимо осознавать, что выходом этой ветви служит входная последовательность, сдвинутая на один отсчет. Граф из рис. 6.10, б) с учетом этого соглашения перерисован на рис. 6.11. Уравнения, представляемые рис. 6.11, имеют следующий вид:

$$w_1[n] = aw_4[n] + x[n], \quad (6.22)$$

$$w_2[n] = w_1[n], \quad (6.23)$$

$$w_3[n] = b_0w_2[n] + b_1w_4[n], \quad (6.24)$$

$$w_4[n] = w_2[n - 1], \quad (6.25)$$

$$y[n] = w_3[n]. \quad (6.26)$$

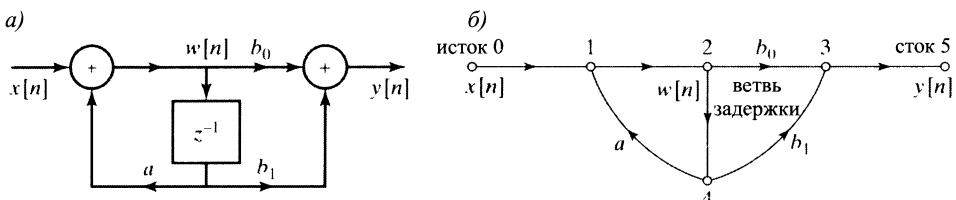


Рис. 6.10. а) блок-схемное представление цифрового фильтра первого порядка; б) сигнальный потоковый граф, соответствующий блок-схеме из п. а)

Сравнивая рис. 6.10, а) и 6.11, легко заметить, что существует прямое соответствие между ветвями потокового графа и стрелками блок-схемы. Фактически, граф отличается от блок-схемы тем, что узлы в нем изображают как точки ветвления, так и сумматоры, в то время как в блок-схемах за сумматором закреплен определенный символ. Точка ветвления блок-схемы соответствует узлу

графа, снабженному одной входящей ветвью и несколькими выходящими. Сумматор же на сигнальном потоковом графе представляется узлом с двумя (или более) входными ветвями. Таким образом, сигнальный потоковый граф полностью эквивалентен блок-схеме в смысле графического изображения разностного уравнения, но его легче рисовать. Как и в случае блок-схем, узлы и ветви потокового графа можно переставлять, не меняя свойств реализуемой ЛС-системы. Разработан большой раздел теории сигнальных потоковых графов, который можно непосредственно прилагать к дискретным системам, характеризуемым разностными уравнениями (см. [97, 24 и 117]). Хотя потоковые графы в нашем учебнике присутствуют прежде всего в иллюстративных целях, мы будем использовать некоторые теоремы, касающиеся приложения сигнальных потоковых графов к исследованию альтернативных структур реализации линейных систем.

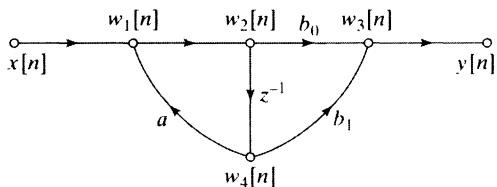


Рис. 6.11. Потоковый график из рис. 6.10, б) с ветвью задержки, обозначенной z^{-1}

как (6.23) и (6.26) — простое переобозначение переменных. Формула (6.25) представляет собой «обновление» памяти системы, которое может быть реализовано замещением содержащегося в регистре памяти значения $w_4[n]$ на $w_2[n - 1]$, что необходимо осуществить либо перед, либо после вычисления всех остальных величин. Условие состояния покоя в начальном положении в этом случае сводится к одному из равенств: $w_2[-1] = 0$ или $w_4[0] = 0$. Ясно, что вычисления выражений (6.22)–(6.26) должны проводиться в том порядке, в котором они выписаны, за исключением того, что два последних можно поменять местами и/или (6.25) поставить на первое место.

Потоковый график представляет множество разностных уравнений, по одному на каждый узел сети. В случае графа из рис. 6.11 мы можем довольно легко исключить некоторые переменные, оставив всего два соотношения:

$$w_2[n] = aw_2[n - 1] + x[n], \quad (6.27)$$

$$y[n] = b_0w_2[n] + b_1w_2[n - 1], \quad (6.28)$$

определяющих структуру прямой формы II.

Решение разностных уравнений, соответствующих потоковому графу, — довольно сложная задача ввиду всевозможных задержек переменных. Чтобы ее облегчить, следует применить z -преобразование. Действенность этого метода подтверждается задачами 6.1–6.26, где демонстрируется анализ потокового графа в терминах z -преобразования, позволяющий легко находить разнообразные эквивалентные системы разностных уравнений.

Формулы (6.22)–(6.26) определяют многошаговый алгоритм, вычисляющий реакцию ЛС-системы на входной сигнал $x[n]$, и служат типичным примером соотношений, возникающих при реализации общей БИХ-системы. Очевидно, что выполнять действия, указанные в формулах, можно только в определенном порядке. В выражениях (6.22) и (6.24) осуществляется умножение и сложение, в то время

когда (6.23) и (6.26) — простое переобозначение переменных. Формула (6.25) пред-

ставляет собой «обновление» памяти системы, которое может быть реализовано

замещением содержащегося в регистре памяти значения $w_4[n]$ на $w_2[n - 1]$, что

необходимо осуществить либо перед, либо после вычисления всех остальных ве-

личин. Условие состояния покоя в начальном положении в этом случае сводится

к одному из равенств: $w_2[-1] = 0$ или $w_4[0] = 0$. Ясно, что вычисления выраже-

ний (6.22)–(6.26) должны проводиться в том порядке, в котором они выписаны,

за исключением того, что два последних можно поменять местами и/или (6.25)

поставить на первое место.

Пример 6.3. Вычисление характеристической функции по потоковому графу

Рассмотрим рис. 6.12, где изображен граф, непосредственно по которому не удается выписать характеристическую функцию. Однако, помня о том, что значение каждой переменной — линейная комбинация смежных узловых переменных, коэффициенты которой приписаны соответствующим ветвям, можно легко получить систему разностных уравнений.

В нашем примере эта система имеет следующий вид:

$$w_1[n] = w_4[n] - x[n], \quad (6.29)$$

$$w_2[n] = \alpha w_1[n], \quad (6.30)$$

$$w_3[n] = w_2[n] + x[n], \quad (6.31)$$

$$w_4[n] = w_3[n - 1], \quad (6.32)$$

$$y[n] = w_2[n] + w_4[n]. \quad (6.33)$$

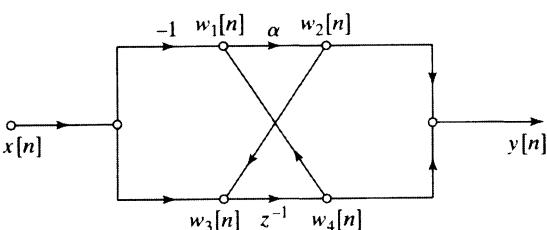


Рис. 6.12. Потоковый график, изображенный не в стандартной прямой форме

На основе уравнений можно написать вычислительный алгоритм, реализующий систему в форме, диктуемой данным графом, но нет гарантии, что этот алгоритм окажется самым эффективным. Поэтому имеет смысл попытаться найти как характеристическую функцию, так и различные эквивалентные системы уравнений.

Применив к выписанным уравнениям z -преобразования, придем к системе:

$$W_1(z) = W_4(z) - X(z), \quad (6.34)$$

$$W_2(z) = \alpha W_1(z), \quad (6.35)$$

$$W_3(z) = W_2(z) + X(z), \quad (6.36)$$

$$W_4(z) = z^{-1} W_3(z), \quad (6.37)$$

$$Y(z) = W_2(z) + W_4(z). \quad (6.38)$$

Функции $W_1(z)$ и $W_3(z)$ можно исключить из системы уравнений, подставляя (6.34) в (6.35), а (6.36) в (6.37):

$$W_2(z) = \alpha(W_4(z) - X(z)), \quad (6.39)$$

$$W_4(z) = z^{-1}(W_2(z) + X(z)), \quad (6.40)$$

$$Y(z) = W_2(z) + W_4(z). \quad (6.41)$$

Из первых двух уравнений находим

$$W_2(z) = \frac{\alpha(z^{-1} - 1)}{1 - \alpha z^{-1}} X(z), \quad (6.42)$$

$$W_4(z) = \frac{z^{-1}(1 - \alpha)}{1 - \alpha z^{-1}} X(z). \quad (6.43)$$

Подставив (6.42) и (6.43) в (6.41), получим

$$Y(z) = \left(\frac{\alpha(z^{-1} - 1) + z^{-1}(1 - \alpha)}{1 - \alpha z^{-1}} \right) X(z) = \left(\frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \right) X(z). \quad (6.44)$$

Следовательно, характеристическая функция, соответствующая потоковому графу из рис. 6.12, равна

$$H(z) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad (6.45)$$

откуда извлекаем импульсную характеристику системы

$$h[n] = \alpha^{n-1} u[n-1] - \alpha^{n+1} u[n]$$

и прямую форму I потокового графа, которая приведена на рис. 6.13. \square

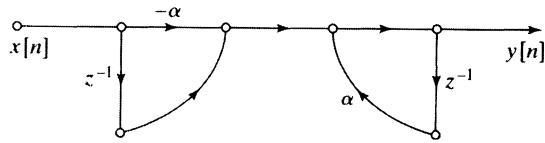


Рис. 6.13. Прямая форма I графа из рис. 6.12

Из разобранного примера видно, что трудноразрешимая система разностных уравнений, включающая в себя задержанные переменные, или обратную связь, в результате применения z -преобразования превращается в систему линейных алгебраических уравнений, решение которых легко может быть найдено стандартными методами. Кроме того, сравнивая потоковые графы 6.12 и 6.13, иллюстрирующие реализацию одной и той же дискретной системы, легко убеждаемся, что они представляют разные вычислительные алгоритмы, требующие *различный* объем вычислений. Так, в исходной реализации (рис. 6.12) нужно только одно умножение и одна задержка (т. е. один элемент памяти), в то время как для цифровой реализации прямой формы I уже потребуется два умножения и два задерживающих элемента. Заметим еще, что при реализации той же системы в прямой форме II будет задействован один элемент памяти и два умножения.

6.4. Основные структуры БИХ-систем

В § 6.2 мы познакомились с двумя альтернативными структурами реализации ЛС-систем с характеристической функцией (6.8). Здесь мы более подробно поговорим о представлении систем в виде сигнальных потоковых графов и введем несколько других стандартных эквивалентных структур. Из объяснения станет ясным, что с любой рациональной характеристической функцией связано широкое многообразие эквивалентных наборов разностных уравнений и сетевых структур. При выборе той или иной структуры, реализующей данную систему, важно обращать внимание на ее вычислительную сложность. Например, в некоторых цифровых реализациях предпочтение отдают структурам с минимальным количеством умножений на константу и задерживающих элементов, поскольку эта операция в общей ситуации занимает слишком много времени и являются одной из дорогостоящих операций, реализуемых цифровыми аппаратными средствами, а для обеспечения каждой задержки необходим регистр памяти. Таким образом, снижение числа умножений ведет к увеличению скорости обработки, а минимизация количества задержек — к экономии памяти.



Другими, более тонкими соображениями руководствуются в СБИС-технологиях, где важной мерой эффективности часто служит размер чипа. Модульность и простота обмена данными является еще одним фактором, влияющим на выбор той или иной структуры реализации. При реализации систем на мультипроцессорах наиболее важными критериями становятся возможность разделения алгоритма на отдельные процедуры и скорость обмена информацией между процессорами. С другой стороны, необходимо учитывать конечную длину регистров и возможности арифметики конечной точности, которые зависят от способа организации вычислений, т. е. от структуры соответствующего сигнального потокового графа. Иногда отдают предпочтение структуре, обладающей неминимальным числом умножений и задержек, если она менее чувствительна к эффектам, связанным с конечной длиной регистров.

В этом параграфе мы изучим несколько из наиболее употребительных форм реализации линейных стационарных БИХ-систем и получим их представление в терминах потоковых графов.

6.4.1. Прямые формы

В § 6.2 были введены блок-схемные представления в прямой форме I (рис. 6.3) и II, или канонической прямой форме (рис. 6.5), структуры для ЛС-систем, характеризуемых разностным уравнением вида

$$y[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad (6.46)$$

с характеристической функцией

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}. \quad (6.47)$$

На рис. 6.14 показана структура прямой формы I из рис. 6.3 в виде сигнального потокового графа, а рис. 6.15 представляет сигнальный потоковый граф прямой формы II, соответствующий блок-схеме из рис. 6.5. Здесь мы тоже предполагаем, что $M = N$.

Заметим, что каждый узел наших графов имеет не более двух входов. Конечно, узел потокового графа может обладать любым числом входов, но, как мы уже отмечали, соглашение о двух входах продиктовано желанием приблизить графы к программам и архитектуре реализации вычислений, связанных с разностными уравнениями, представленных графиком.

Пример 6.4. Иллюстрация структур прямых форм I и II

Рассмотрим характеристическую функцию

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,75z^{-1} + 0,125z^{-2}}. \quad (6.48)$$

Так как коэффициенты в структуре прямой формы непосредственно соответствуют коэффициентам числителя и знаменателя (с учетом смены знака в знаменателе из (6.47)),

мы можем легко изобразить эти структуры (рис. 6.16 и 6.17), используя рис. 6.14 и 6.15 в качестве образца. \square

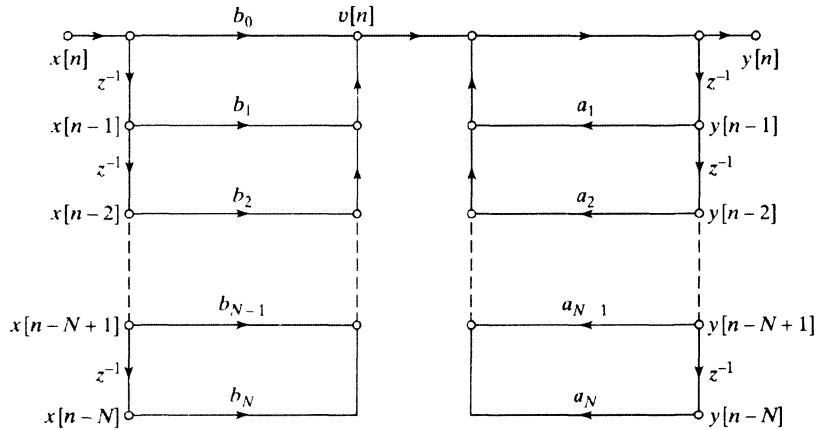


Рис. 6.14. Сигнальный потоковый граф прямой формы I для системы порядка N

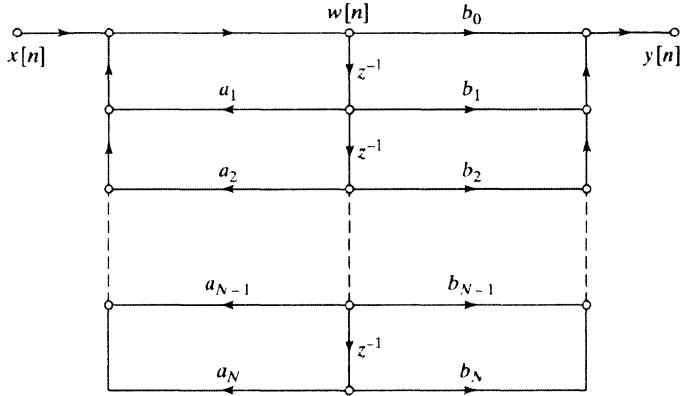


Рис. 6.15. Сигнальный потоковый граф прямой формы II для системы порядка N

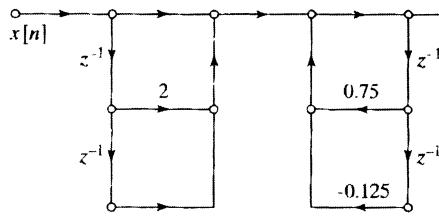


Рис. 6.16. Структура прямой формы I из примера 6.4

6.4.2. Каскадные формы

Структуры прямых форм получаются непосредственно из характеристической функции $H(z)$, записанной как отношение двух многочленов переменной z^{-1} , как

в формуле (6.47). Разложив на множители числитель и знаменатель, получим

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - f_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - g_k z^{-1})(1 - g_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}, \quad (6.49)$$

где $M = M_1 + 2M_2$ и $N = N_1 + 2N_2$.

В этом выражении линейные множители представляют вещественные нули в точках f_k и вещественные полюса в точках c_k , а множители второго порядка — комплексно сопряженные пары нулей g_k, g_k^* и полюсов d_k, d_k^* характеристической функции. Формула (6.49) дает наиболее общее распределение нулей и полюсов рациональной функции (6.47) с вещественными коэффициентами. Вид (6.49) характеристической функции подсказывает класс структур, состоящий из каскада систем первого и второго порядка. Существует большая свобода в выборе состава подсистем и порядка их подключения. На практике, однако, имеет смысл выбирать систему, в которой задействован минимальный объем памяти и вычислений. Модульная структура, обеспечивающая немалую выгоду многих типов реализации, получается группировкой вещественных и комплексно сопряженных множителей попарно, ведущей к следующему виду характеристической функции:

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_s} \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}, \quad (6.50)$$

где $N_s = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$ — целая часть дроби $(N+1)/2$, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее ее значения. Записывая $H(z)$ в таком виде, мы предполагаем, что $M \leq N$, а вещественные полюса и нули можно разбить на пары. Если число вещественных нулей нечетно, один из коэффициентов b_{2k} надо положить равным нулю, а в случае нечетного числа полюсов нужно обнулить один из коэффициентов a_{2k} . Отдельные подсистемы второго порядка можно реализовать в любой из прямых форм, однако, как мы уже говорили, исходя из соображений экономии операций и памяти, стоит остановиться на прямой форме II. Пример каскадной структуры системы шестого порядка, состоящей из трех структур второго порядка в прямой форме II, приведен на рис. 6.18. Выпишем разностные уравнения, соответствующие всему каскаду прямых форм II участков второго порядка:

$$y_0[n] = x[n], \quad (6.51)$$

$$w_k[n] = a_{1k}w_k[n-1] + a_{2k}w_k[n-2] + y_{k-1}[n], \quad k = 1, 2, \dots, N_s, \quad (6.52)$$

$$y_k[n] = b_{0k}w_k[n] + b_{1k}w_k[n-1] + b_{2k}w_k[n-2], \quad k = 1, 2, \dots, N_s, \quad (6.53)$$

$$y[n] = y_{N_s}[n]. \quad (6.54)$$

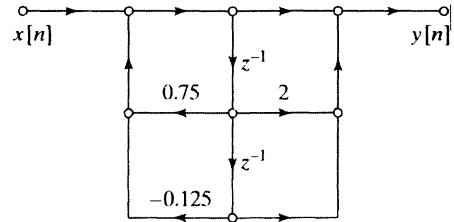


Рис. 6.17. Структура прямой формы II из примера 6.4

Ясно, что, группируя вещественные нули и полюса разными способами и представляя квадратные многочлены в числите и знаменателе, мы можем получить большое число теоретически эквивалентных каскадных форм. Действительно, если у нас есть N_s участков второго порядка, то существует $N_s!$ (N_s факториал¹) спариваний полюсов с нулями и столько же возможностей упорядочить участки второго порядка, т. е. суммарное число различных каскадных реализаций равно $(N_s!)^2$. Хотя все они представляют одну и ту же характеристическую функцию и уравнение пары сигнал–отклик, их поведение при использовании арифметики конечной точности может существенно отличаться друг от друга, в чем мы убедимся в § 6.9.

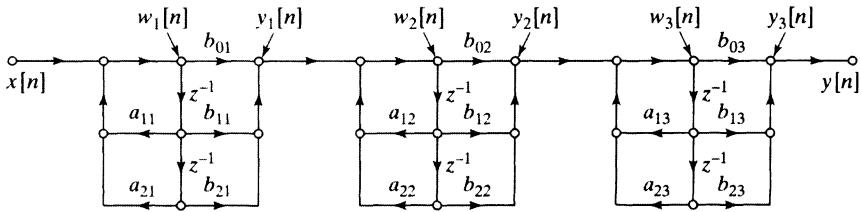


Рис. 6.18. Каскадная структура системы шестого порядка, с подсистемами второго порядка, реализованными в прямой форме II

Пример 6.5. Иллюстрация каскадных структур

Обратимся еще раз к характеристической функции (6.48). Поскольку она имеет порядок 2, каскадная структура с подсистемами второго порядка в прямой форме II сводится к структуре, изображенной на рис. 6.17. С другой стороны, для лучшего знакомства с каскадной структурой мы можем выразить $H(z)$ в виде отношения произведений множителей первого порядка:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,75z^{-1} + 0,125z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 0,25z^{-1})}. \quad (6.55)$$

Поскольку все полюсы и нули характеристической функции вещественны, каскадная структура с компонентами первого порядка обладает вещественными коэффициентами. Если же у характеристической функции появляется комплексный нуль и/или полюс, то вещественные коэффициенты будут только у компонент второго порядка. На рис. 6.19 показаны эквивалентные каскадные структуры, отвечающие форме записи характеристической функции (6.55). Разностные уравнения, представленные потоковыми графиками рисунка, записываются легко. В задаче 6.22 предлагается найти другие эквивалентные конфигурации. □

В качестве заключительных комментариев к нашему определению вида характеристической функции для каскадной структуры заметим, что, как видно из выражения (6.50), каждая из компонент второго порядка насчитывает пять постоянных множителей. Предположим для сравнения, что в формуле (6.21) $M = N$ — четное число, так что $N_s = N/2$. Тогда структуры прямых форм I и II

¹ По определению $N!$ равен произведению всех натуральных чисел от 1 до N включительно. — Примеч. перев.

потребуют $2N + 1$ умножения на константу, в то время как каскадные структуры, вытекающие из представления (6.50), — $5N/2$ таких умножений. В случае системы шестого порядка из рис. 6.18 нам понадобится 15 умножений, а применяя эквивалентную прямую форму, мы обойдемся тринадцатью. Еще одним определением каскадной формы служит следующее выражение:

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^{N_s} \frac{1 + \bar{b}_{1k} z^{-1} + \bar{b}_{2k} z^{-2}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}, \quad (6.56)$$

где b_0 — старший коэффициент числителя дроби (6.47) и $\bar{b}_{ik} = b_{ik}/b_{0k}$ при $i = 1$ и 2 , $k = 1, 2, \dots, N_s$. Эта форма записи характеристической функции говорит о возможности каскада подсистем второго порядка с четырьмя умножениями на константу и отдельным умножением на b_0 . При такой конфигурации мы получаем то же суммарное число умножений, что и при использовании структур прямых форм. Как мы расскажем в § 6.9, участки второго порядка с пятью умножениями обычно используют совместно с арифметикой с фиксированной точкой, так как они дают возможность распределить коэффициенты усиления системы и тем самым контролировать уровень сигналов в ее критических точках. Когда привлекается арифметика с плавающей точкой и динамический диапазон не является проблемой, предпочитают каскадные структуры с четырьмя умножениями на каждом участке второго порядка, стремясь к экономии вычислений. К еще большему упрощению ситуации ведут нули с единичным модулем. В этом случае $\bar{b}_{2k} = 1$ и нам достаточно трех умножений на каждый участок второго порядка.

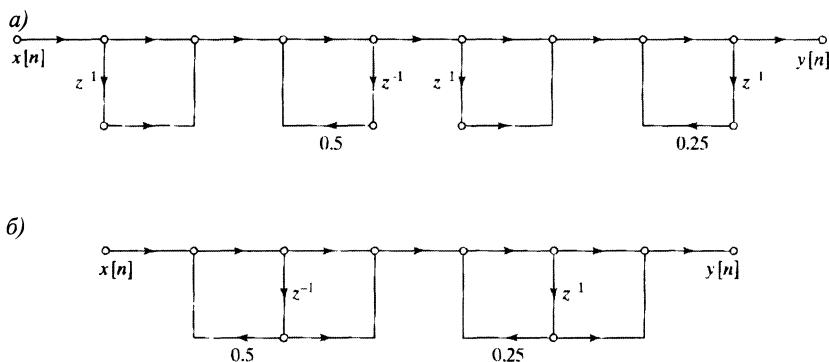


Рис. 6.19. Каскадные структуры примера 6.5: а) с подсистемами в прямой форме I; б) с подсистемами в прямой форме II

6.4.3. Параллельные формы

В качестве альтернативы разложению числителя и знаменателя характеристической функции на множители, данные в формуле (6.47) или (6.49), можно рассмотреть ее разложение в сумму простейших дробей:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k (1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}, \quad (6.57)$$

где $N = N_1 + 2N_2$. Если $M \geq N$, то $N_p = M - N$; в противном случае первое слагаемое этого разложения вообще отсутствует. При вещественных коэффициентах a_k и b_k формулы (6.47) вещественными же будут и числа A_k , B_k , C_k , c_k и e_k . Характеристическую функцию, записанную в таком виде, можно интерпретировать как параллельную комбинацию БИХ-систем первого и второго порядков, возможно, с N_p масштабированными задерживающими ветвями. С другой стороны, сгруппировав полюса и нули, сумму (6.57) можно переписать как

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{e_{0k} + e_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}, \quad (6.58)$$

где, как и в каскадной форме, $N_s = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$ — целая часть дроби, и, если $N_p = M - N$ — отрицательно, то первая сумма отсутствует. Типичный пример для случая $N = M = 6$ показан на рис. 6.20. Выпишем общие разностные уравнения, возникающие при параллельной реализации с участками второго порядка в прямой форме II:

$$w_k[n] = a_{1k} w_k[n-1] + a_{2k} w_k[n-2] + x[n], \quad k = 1, 2, \dots, N_s, \quad (6.59)$$

$$y_k[n] = e_{0k} w_k[n] + e_{1k} w_k[n-1], \quad k = 1, 2, \dots, N_s, \quad (6.60)$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N_p} C_k x[n-k] + \sum_{k=1}^{N_s} y_k[n]. \quad (6.61)$$

Если $M < N$, то в (6.61) нужно убрать первую сумму.

Пример 6.6. Иллюстрация параллельной формы структур

Обратимся к характеристической функции примеров 6.4 и 6.5. Теперь мы должны представить $H(z)$ либо в виде (6.57), либо в виде (6.58). Если в нашей структуре будут участки второго порядка, то нам потребуется такое выражение:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,75z^{-1} + 0,125z^{-2}} = 8 + \frac{-7 + 8z^{-1}}{1 - 0,75z^{-1} + 0,125z^{-2}}. \quad (6.62)$$

Параллельная форма реализации этого примера с компонентами второго порядка показана на рис. 6.21.

Поскольку все полюсы вещественны, можно получить альтернативную реализацию в параллельной форме, разложив $H(z)$ на простейшие дроби:

$$H(z) = 8 + \frac{18}{1 - 0,5z^{-1}} - \frac{25}{1 - 0,25z^{-1}}. \quad (6.63)$$

Итоговая форма с подсистемами первого порядка приведена на рис. 6.22. Как и в общем случае, разностные уравнения, представленные рис. 6.21 и 6.22, можно выписать, глядя на потоковый граф. \square

6.4.4. Обратная связь в БИХ-системах

Все потоковые графы этого подраздела наделены петлями обратной связи, т. е. в них есть замкнутые пути с началом и концом в одном узле. Наличие такого участка в потоковом графе говорит о прямой (или не совсем прямой) зависимости переменной, соответствующей узлу, от самой себя. Простой пример петель

показан на рис. 6.23, а), где представлено разностное уравнение

$$y[n] = ay[n - 1] + x[n]. \quad (6.64)$$

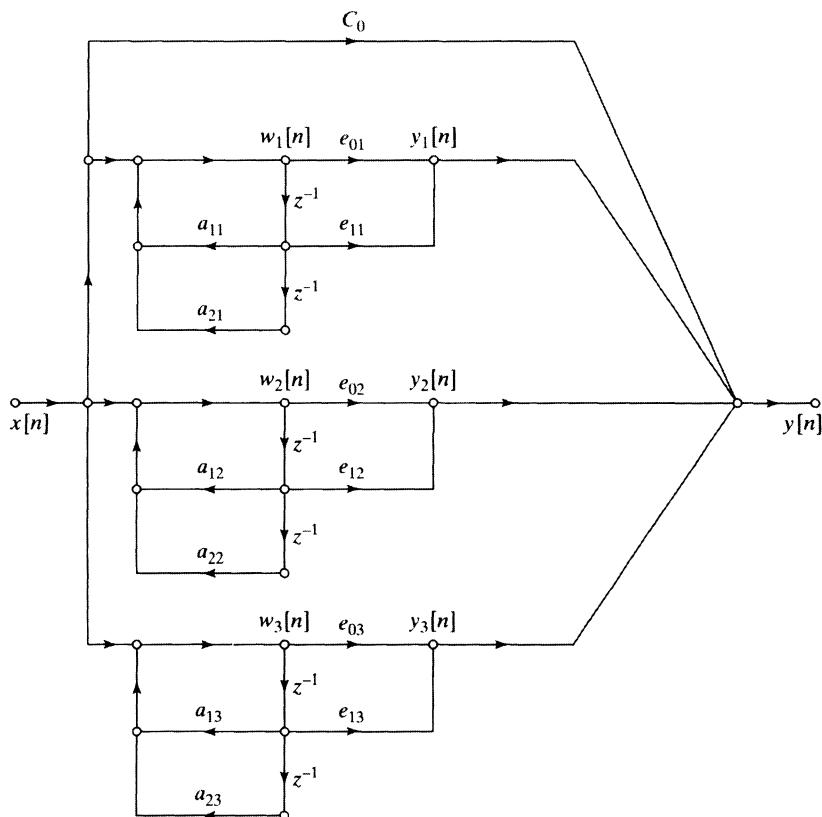


Рис. 6.20. Параллельная структура для системы шестого порядка ($M = N = 6$) с вещественными и комплексными полюсами, сгруппированными в пары

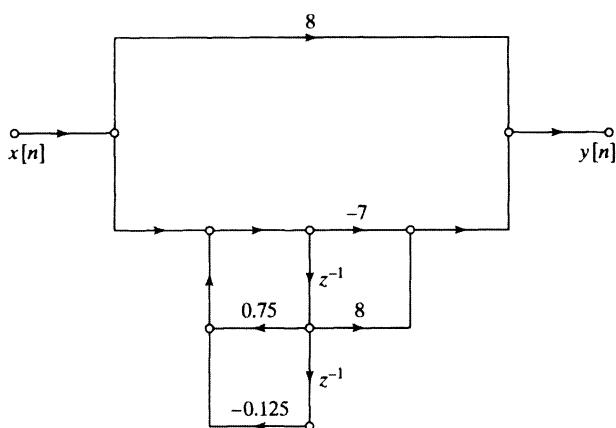


Рис. 6.21. Структура в параллельной форме для примера 6.6 с подсистемами второго порядка

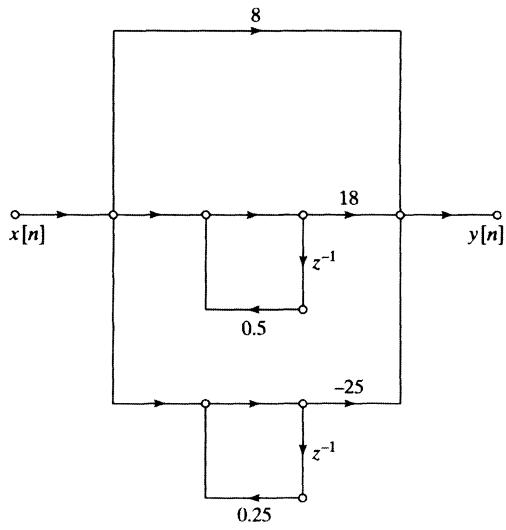


Рис. 6.22. Структура в параллельной форме для примера 6.6 с подсистемами первого порядка

Такие петли необходимы (но недостаточны) для генерирования импульсной характеристики бесконечной длительности. В этом легко убедиться, рассмотрев сеть без петель обратной связи. Любой путь от входа до выхода такого графа может пройти через каждый задерживающий элемент только один раз. Следовательно, наибольшая задержка между входом и выходом появится только на том пути, который проходит через все задерживающие элементы сети. Значит, длина импульсной характеристики, соответствующей сети без петель, не может превышать числа всех задерживающих элементов графа. Отсюда приходим к выводу: если в сети отсутствуют петли, то характеристическая функция имеет только нули (за исключением полюса в $z = 0$), причем их число не превышает количества задерживающих элементов сети.

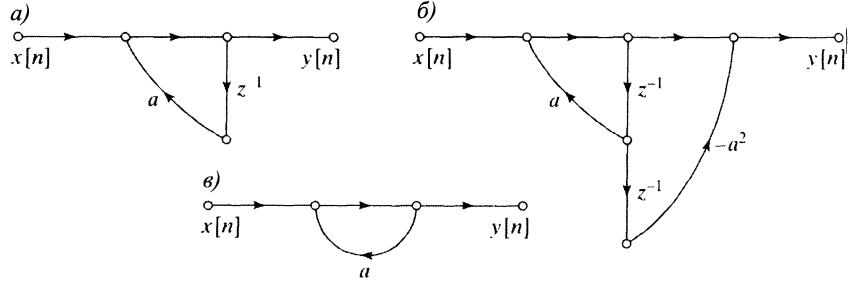


Рис. 6.23. а) система с петлей обратной связи; б) КИХ-система с петлей обратной связи; в) невычислимая система

Возвращаясь к простому примеру (рис. 6.23, а)), мы видим, что если входная последовательность — единичный импульс, то отдельный ее отсчет будет непрерывно циркулировать по петле обратной связи с увеличивающейся (если $|a| > 1$) или с уменьшающейся (при $|a| < 1$) амплитудой ввиду постоянного умно-

жения на константу a . Так что импульсная характеристика здесь будет равна $h[n] = a^n u[n]$. Именно таким и аналогичными путями петли обратной связи порождают импульсную характеристику бесконечной длительности.

Полюсу характеристической функции соответствует петля обратной связи в блок-схеме и сигнальном потоковом графе. С другой стороны, ни полюса характеристической функции, ни петли обратной связи графического представления системы не обеспечивают бесконечную длину импульсной характеристики. На рис. 6.23, б) приведен пример потокового графа с петлей, представляющего систему с конечной импульсной характеристикой. Конечность характеристики получается из-за того, что полюс характеристической функции сокращается с ее нулем, т. е. в случае системы из рис. 6.23, б)

$$H(z) = \frac{1 - a^2 z^{-2}}{1 - az^{-1}} = \frac{(1 - az^{-1})(1 + az^{-1})}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1}. \quad (6.65)$$

Импульсная характеристика этой системы равна $h[n] = \delta[n] + a\delta[n - 1]$, а сама система служит простым примером общего класса КИХ-систем, называемых *системами с дискретизированной частотой*. Более подробно указанный класс систем исследуется в задачах 6.30 и 6.37.

Наличие петель создает дополнительные сложности при реализации вычислений, диктуемых сетью. Как мы уже обсуждали, необходимо организовать такой порядок вычислений значений переменных сети, чтобы все необходимые для каждой операции значения были уже подсчитаны и доступны. Для некоторых потоковых графов, называемых *невычислимыми*, такой порядок вообще невозможен [31]. На рис. 6.23, в) показан пример простого невычислимого графа. Разностное уравнение, соответствующее этой сети, имеет вид:

$$y[n] = ay[n] + x[n]. \quad (6.66)$$

Используя его как рекуррентную формулу, мы, естественно, не сможем вычислить отсчеты последовательности $y[n]$, поскольку правая часть этой формулы содержит неизвестную, которую мы хотим определить. Тот факт, что потоковый график невычислим, не означает, что разностное уравнение, представляемое им, не может быть решено. (Действительно, решением уравнения (6.66) служит последовательность $y[n] = x[n]/(1 - a)$.) Этот термин просто говорит о том, что система разностных уравнений, записанная с графа, не может быть решена последовательным вычислением значений узловых переменных. Ключом к вычислимости потокового графа служит наличие по крайней мере одной единичной задержки у каждой петли. Таким образом, рисуя потоковые графы, представляющие реализацию ЛС-систем, необходимо внимательно следить за тем, чтобы все появляющиеся петли были снабжены задерживающими элементами. В задаче 6.28 рассматривается система с петлей без задержки, а в задаче 7.45 показано, как можно ввести такие петли в потоковый график.

6.5. Транспонированные формы

В теории линейных сигнальных потоковых графов предусмотрено множество процедур преобразований графов, не меняющих характеристическую функцию,

связывающую вход и выход системы. Одна из них, называемая *сменой ориентации* потокового графа, или *транспонированием*, приводит к многообразию транспонированных структур, представляющих собой некоторые полезные альтернативы к структурам, обсуждавшимся в предыдущем параграфе.

Транспонирование потокового графа заключается в смене направлений всех ветвей сети (при котором сток становится истоком и наоборот) с сохранением обозначений всех внутренних узлов и коэффициентов пропускания и перестановке меток входа и выхода. Транспонированный граф систем с единственным входом и выходом обладает той же самой характеристической функцией, что и исходный, в котором переставлены вход и выход. Мы не будем доказывать этот результат¹, а ограничимся демонстрацией его истинности на двух примерах.

Пример 6.7. Транспонированная форма системы первого порядка без нулей

Передаточная функция системы первого порядка, соответствующей потоковому графу из рис. 6.24, а), имеет вид:

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}. \quad (6.67)$$

Чтобы получить транспонированную форму этой системы, обратим все стрелки графа, поменяв обозначения входа и выхода. Транспонированный граф изображен на рис. 6.24, б). Удобно рисовать транспонированную сеть так, чтобы вход попал в ее левую часть, а выход оказался справа, как показано на рис. 6.24, в). Сравнивая рис. 6.24, а) и в), заметим, что единственное отличие между ними состоит в том, что на рис. 6.24, а) мы умножаем задержанную выходную последовательность $y[n-1]$ на коэффициент a , а на рис. 6.24, в) мы сначала умножаем $y[n]$ на a , а затем задерживаем произведение. Поскольку перестановка указанных операций не влияет на окончательный результат, мы заключаем, что оригинальный и транспонированный графы представляют одну и ту же характеристическую функцию. \square

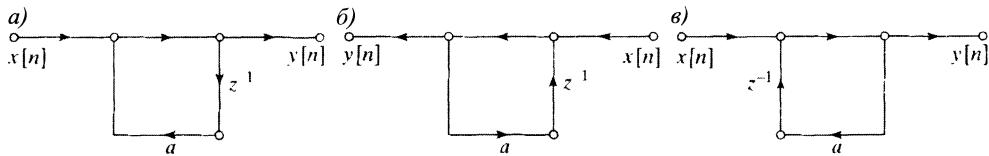


Рис. 6.24. а) сигнальный потоковый график простой системы первого порядка; б) транспонированная форма графа; в) структура транспонированной формы, перерешенная так, чтобы вход попал на левую сторону

Тождественность характеристических функций графа и его транспонированной формы из примера 6.7 видна сразу. Однако в случае более сложных систем этот результат далеко не очевиден, в чем можно убедиться, исследовав следующий пример.

¹ Теорема следует непосредственно из формулы Мэйсона для коэффициента усиления, доказываемая в теории сигнальных потоковых графов (см. [97], [24] или [117]).

Пример 6.8. Транспонированная форма базисной системы второго порядка

Рассмотрим базисную систему второго порядка, изображенную на рис. 6.25, а). Соответствующие разностные уравнения имеют вид:

$$w[n] = a_1 w[n-1] + a_2 w[n-2] + x[n], \quad (6.68)$$

$$y[n] = b_0 w[n] + b_1 w[n-1] + b_2 w[n-2]. \quad (6.69)$$

Транспонированный потоковый граф изображен на рис. 6.25, б). Выпишем разностные уравнения, представленные им:

$$v_0 = b_0 x[n] + v_1[n-1], \quad (6.70)$$

$$y[n] = v_0[n], \quad (6.71)$$

$$v_1[n] = a_1 y[n] + b_1 x[n] + v_2[n-1], \quad (6.72)$$

$$v_2[n] = a_2 y[n] + b_2 x[n]. \quad (6.73)$$

Формулы (6.68)–(6.69) и (6.70)–(6.73) дают разные способы организации вычислений отсчета выходного сигнала $y[n]$ по отсчетам $x[n]$, в связи с чем их эквивалентность неочевидна. Один из методов проверки этого факта состоит в применении z -преобразования к обоим наборам формул, вычислении отношения $Y(z)/X(z) = H(z)$ и сравнении результатов. Другой заключается в подстановке равенства (6.73) в (6.72), а результата подстановки — в формулу (6.70), и, наконец, нужно подставить последнее полученное равенство в (6.73). В итоге,

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]. \quad (6.74)$$

Поскольку сеть на рис. 6.25, а) представляет собой структуру прямой формы II, то легко увидеть, что вход и выход соответствующей системы тоже удовлетворяют разностному уравнению (6.74). Следовательно, при условии состояния покоя в начальном положении системы рис. 6.25, а) и б) эквиваленты. \square

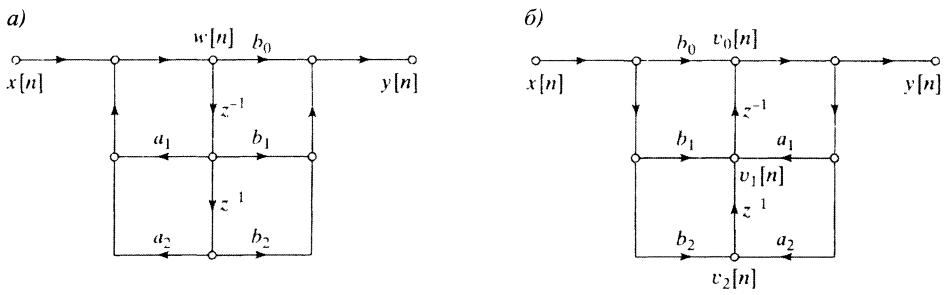


Рис. 6.25. а) структура прямой формы II для примера 6.8; б) транспонированная прямая форма II

Теорема о транспонировании применима к любой из структур, которые мы до сих пор обсуждали. Например, результат применения теоремы к структуре прямой формы I из рис. 6.14 совпадает со структурой из рис. 6.26, а структура, полученная транспонированием прямой формы II из рис. 6.15, показана на

рис. 6.27. Ясно, что при транспонировании конфигурации сигнального потокового графа число ветвей задержек, как и число коэффициентов, остается неизменным. Таким образом, транспонирование прямой формы II приводит к той же канонической форме.

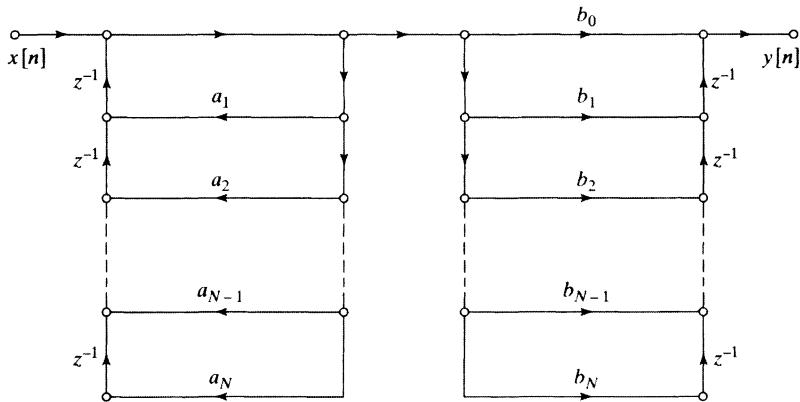


Рис. 6.26. Общий потоковый график, получающийся в результате применения теоремы о транспонировании к структуре прямой формы I из рис. 6.14

Сравнение рис. 6.15 и 6.27 приводит к важному наблюдению. В то время как структура прямой формы II сначала реализует полюса, а затем нули характеристической функции, транспонированная форма в первую очередь реализует нули, а затем уже полюса. Смена порядка полюсов и нулей может оказаться в присутствии квантования при цифровой реализации с конечной точностью или из-за шума в дискретно-аналоговой реализации.

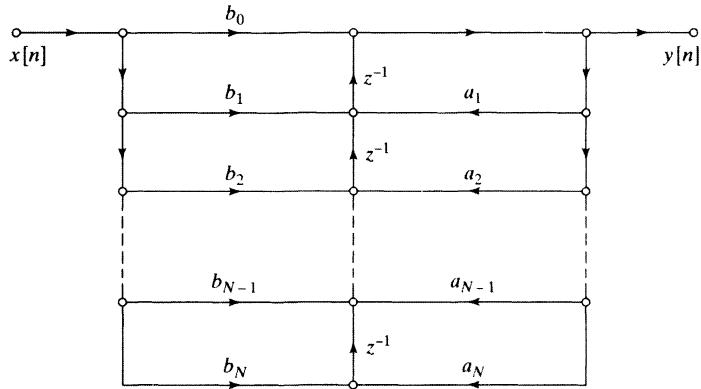


Рис. 6.27. Общий потоковый график, получающийся в результате применения теоремы о транспонировании к структуре прямой формы II из рис. 6.15

При применении теоремы о транспонировании к каскадной или параллельной форме отдельные системы второго порядка замещаются транспонированными структурами. Например, результатом приложения этой теоремы к рис. 6.18 является каскад трех транспонированных прямых форм II (подобных разобранной в примере 6.8) с теми же коэффициентами, что и на рис. 6.18, но с обрат-



ным порядком подключения. Аналогичное утверждение можно сформулировать о транспонировании графа из рис. 6.20.

Теорема о транспонировании дает простой способ генерирования новых структур. Задачи реализации систем в арифметике конечной точности мотивируют изучение гораздо большего класса эквивалентных структур, чем мы здесь рассматривали, поскольку мы уделили внимание лишь наиболее часто используемым структурам.

6.6. Основные сетевые структуры КИХ-систем

Структуры прямых, параллельных и каскадных форм, исследованные в § 6.4 и 6.5, служат наиболее общими основными структурами для БИХ-систем. Эти структуры были введены в предположении о том, что характеристическая функция имеет как нули, так и полюса. Хотя прямые и каскадные формы БИХ-систем включают в себя КИХ-системы как частный случай, для систем с конечной импульсной характеристикой разработаны свои специфические формы.

6.6.1. Прямая форма

Характеристическая функция детерминированных КИХ-систем обладает лишь нулями (за исключением полюса в точке $z = 0$), и, поскольку все коэффициенты a_k равны нулю, разностное уравнение (6.9) сводится к виду:

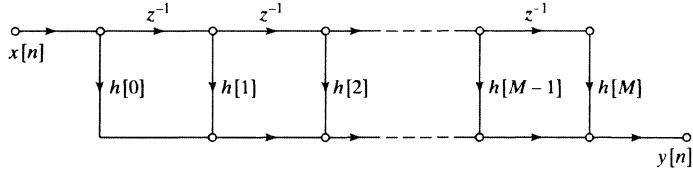
$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad (6.75)$$

который можно интерпретировать как свертку входного сигнала $x[n]$ с импульсной характеристикой

$$h[n] = \begin{cases} b_n, & n = 0, 1, \dots, M, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (6.76)$$

В этом случае структуры прямой формы I (рис. 6.14) и II (рис. 6.15) трансформируются в прямую форму КИХ-структур из рис. 6.28. Поскольку цепочка задерживающих элементов расположена вверху диаграммы, такую структуру иногда называют также линией задержки с отводами или структурой трансверсального (поперечного) фильтра. Как следует из рис. 6.28, сигнал на каждом отводе этой цепи умножается на подходящий коэффициент (отсчет импульсной характеристики), а затем результаты произведения суммируются и получается реакция $y[n]$.

Рис. 6.28. Прямая форма реализации КИХ-системы



Транспонированная прямая форма в случае КИХ-систем получается в результате применения теоремы о транспонировании к рис. 6.28 или, что равносильно,

обнулением коэффициентов a_k на рис. 6.26 или 6.27. Результату транспонирования посвящен рис. 6.29.

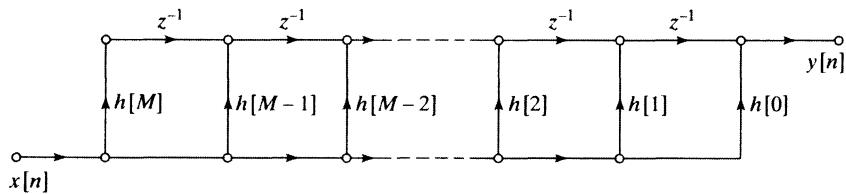


Рис. 6.29. Транспонированная сеть из рис. 6.28

6.6.2. Каскадная форма

Каскадная форма для КИХ-систем основывается на разложении характеристической функции на множители, т. е. представлением $H(z)$ в виде

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n} = \prod_{k=1}^{M_s} (b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}), \quad (6.77)$$

где $M_s = \lfloor (M+1)/2 \rfloor$ — целая часть дроби $(M+1)/2$. Если M нечетно, один из коэффициентов b_{2k} должен быть равен нулю, поскольку $H(z)$ в этом случае имеет нечетное число вещественных нулей.

Потоковый граф, представляющий формулу (6.77), показан на рис. 6.30. Он совпадает с формой из рис. 6.18, где все коэффициенты a_{1k} и a_{2k} взяты равными нулю. Каждый из участков второго порядка на рис. 6.30 использует прямую форму, приведенную на рис. 6.28. Другой способ заключается в использовании транспонированной прямой формы участков второго порядка или, что эквивалентно, применении теоремы о транспонировании к рис. 6.30.

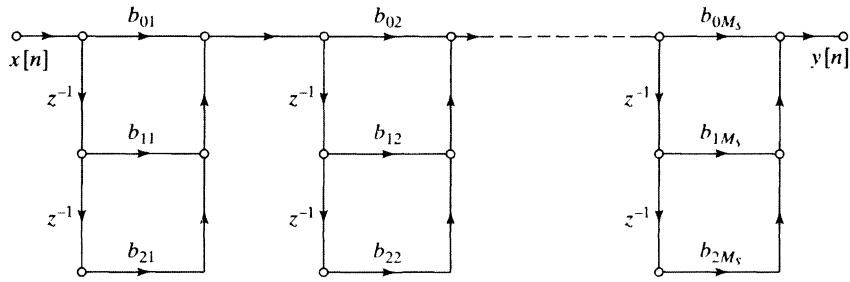


Рис. 6.30. Каскадная форма реализации КИХ-систем

6.6.3. Структуры КИХ-систем с линейной фазой

В главе 5 мы показали, что детерминированная КИХ-система обладает обобщенной линейной фазой, если ее импульсная характеристика удовлетворяет одному

из требований симметрии:

$$h[M - n] = h[n], \quad n = 0, 1, \dots, M \quad (6.78)$$

или

$$h[M - n] = -h[n], \quad n = 0, 1, \dots, M. \quad (6.79)$$

При наличии любой из этих симметрий число умножений на константы можно фактически ополовинить. Действительно, предполагая, что M — четное число, соответствующее системам I или III типа, преобразуем выражение дискретной свертки следующим образом:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k] = \\ &= \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k]x[n-k] + h[M/2]x[n-M/2] + \sum_{k=M/2+1}^M h[k]x[n-k] = \\ &= \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k]x[n-k] + h[M/2]x[n-M/2] + \sum_{k=0}^{M/2-1} h[M-k]x[n-M+k]. \end{aligned}$$

Учитывая (6.78) для систем первого типа, получаем

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k](x[n-k] + x[n-M+k]) + h[M/2]x[n-M/2]. \quad (6.80)$$

В случае систем третьего типа нужно воспользоваться симметрией (6.79) и прийти к выражению:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k](x[n-k] - x[n-M+k]). \quad (6.81)$$

При нечетном M соответствующая формула для системы типа II имеет вид:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h[k](x[n-k] + x[n-M+k]), \quad (6.82)$$

а для системы типа IV —

$$y[n] = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h[k](x[n-k] - x[n-M+k]). \quad (6.83)$$

Формулы (6.80)–(6.83) дают возможность построения структур с $M/2 + 1$, $M/2$ или $(M + 1)/2$ умножениями на константы, в отличие от M умножений в структуре общей прямой формы из рис. 6.28. На рис. 6.31 показан граф, вытекающий из формулы (6.80), а на рис. 6.32 — из (6.82).

Обсуждая системы с линейной фазой в подразделе 5.8.3, мы показали, что из-за условий симметрии (6.78) и (6.79) нули характеристической функции располагаются во взаимнообратных точках, т. е. если функция $H(z)$ обращается в нуль в точке z_0 , то $1/z_0$ тоже относится к ее нулям. Более того, если $h[n]$ — вещественнозначна, то нули характеристической функции разбиваются на комплексно сопряженные пары.

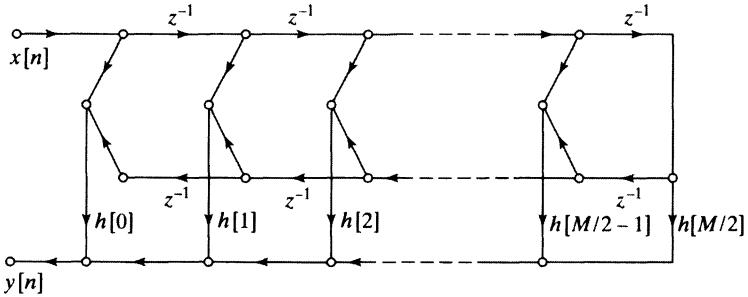


Рис. 6.31. Структура прямой формы для КИХ-системы с линейной фазой при четном M

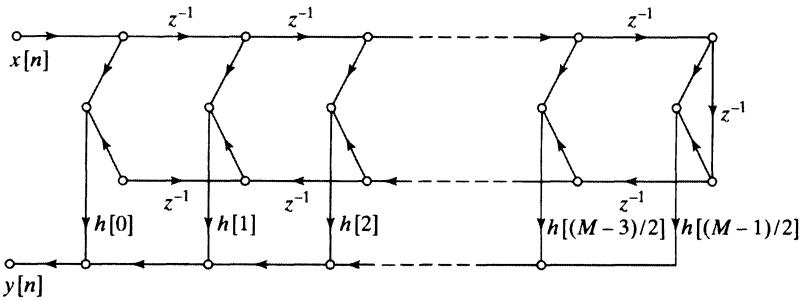


Рис. 6.32. Структура прямой формы для КИХ-системы с линейной фазой при нечетном M

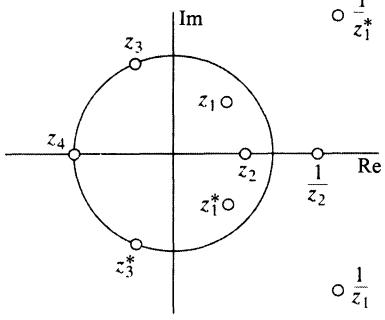


Рис. 6.33. Симметрии множества нулей характеристической функции линейно-фазового КИХ-фильтра

z_3 и z_3^* . Нуль в точке z_4 стоит отдельно. Если нули функции $H(z)$ расположены, как на рис. 6.33, ее можно разложить на множители первой, второй и четвертой степени в соответствии с группами нулей. Каждый из множителей является многочленом, чьи коэффициенты обладают той же симметрией, что и коэффициенты $H(z)$, т. е. все множители — линейно-фазовые многочлены от z^{-1} . Сле-

дующее, вещественные нули, не попавшие на единичную окружность, тоже разбиваются на пары взаимно обратных. Комплексные нули с неединичным модулем группируются в четверки комплексно сопряженных и взаимно обратных точек. Число, обратное нулю, расположенному на единичной окружности, комплексно сопряжено с ним. Значит, комплексные нули с единичным модулем удобно разбивать на пары сопряженных. Нули в точках ± 1 сопряжены сами себе, и обратные к ним числа попадают в те же точки.

Разобранные случаи группировки отражены на рис. 6.33, в котором нули в точках z_1 , z_1^* , $1/z_1$ и $1/z_1^*$ рассматриваются как одна группа. Нули z_2 и $1/z_2$ составляют пару, как и нули в точках

довательно, эту систему можно реализовать как каскад систем первого, второго и четвертого порядков. Например, характеристическую функцию, нули которой изображены на рис. 6.33, можно записать как

$$H(z) = h[0] (1 + z^{-1})(1 + az^{-1} + z^{-2})(1 + bz^{-1} + z^{-2}) \times \\ \times (1 + cz^{-1} + dz^{-2} + cz^{-3} + z^{-4}), \quad (6.84)$$

где

$$a = (z_2 + 1/z_2), \quad b = 2\operatorname{Re}\{z_3\}, \quad c = -2\operatorname{Re}\{z_1 + 1/z_1\}, \quad d = 2 + |z_1 + 1/z_1|^2.$$

Такое представление подсказывает мысль о каскадной структуре, состоящей из линейно-фазовых подсистем. Легко вычислить, что степень $H(z)$ как многочлена равна 9, а вот число мультипликативных коэффициентов — 5, т. е. совпадает с числом $\frac{M+1}{2} = 5$ умножений на константу, необходимых для реализации системы в линейно-фазовой прямой форме, как на рис. 6.31. Итак, не вводя дополнительных операций умножения, мы получили модульную структуру в терминах каскада небольших линейно-фазовых КИХ-систем.

6.7. Обзор проблем цифрового представления

Мы узнали, что отдельные дискретные ЛС-системы можно реализовать массой всевозможных вычислительных структур. Одна из причин, по которой одной структурой не ограничиваются, заключается в том, что теоретически эквивалентные структуры могут по-разному себя вести при реальных вычислениях с конечной точностью. В этом параграфе мы даем короткое введение в главные задачи вычислительной математики, возникающие при реализации дискретных систем. Более подробный анализ проблем, связанных со словами конечной длины, приведен в § 6.8–6.10.

6.7.1. Численное представление

При теоретических исследованиях дискретных систем мы, как правило, предполагаем, что значения сигнала и коэффициенты системы представлены вещественными (или комплексными) числами. Однако при реализации аналоговых и дискретных систем в железе ограниченность регистров не позволяет реализовать коэффициенты абсолютно точно. Аналогично, при реализации цифровых систем обработки сигналов мы вынуждены изображать сигналы и коэффициенты в некоторой цифровой системе, всегда имеющей конечную точность. Наиболее универсальные компьютеры, цифровые процессоры или специализированные аппаратные средства используют двоичную систему счисления.

Проблема конечной точности уже обсуждалась в подразделе 4.9.2 в контексте аналого-цифрового преобразования. Там мы рассказали, что отсчеты, выходящие из АЦП, квантованы и поэтому могут быть представлены двоичными числами с фиксированной точкой. В целях компактности и простоты представления чисел один из битов двоичного числа зарезервирован за его знаком (плюсом или минусом). Возможны такие форматы представления чисел, как *модуль со знаком*, *обратный код* и *дополнительный код*, но наиболее употребителен по-

следний¹. Вещественное число может быть записано в дополнительном коде с бесконечной точностью, как

$$x = X_m \left(-b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i} \right), \quad (6.85)$$

где X_m — произвольный скалярный множитель, а b_i — цифры 0 или 1. Коэффициент b_0 называют *знаковым битом*. Если $b_0 = 0$, то $0 \leq x \leq X_m$, а если $b_0 = 1$, то $-X_m \leq x < 0$. Таким образом, любое вещественное число с модулем, не превосходящим X_m , можно представить в виде (6.85). Для точной записи общего вещественного числа x необходимо бесконечное количество двоичных знаков. Как мы видели в случае АЦП, имея лишь конечное число ($B + 1$) битов, число x можно представить лишь приближенно как

$$\hat{x} = Q_B[x] = X_m \left(-b_0 + \sum_{i=1}^B b_i 2^{-i} \right) = X_m \hat{x}_B. \quad (6.86)$$

Итоговое двоичное представление является квантованным, так что наименьшая разница между представлениями равна

$$\Delta = X_m 2^{-B}, \quad (6.87)$$

а все числа попадают в полуинтервал $-X_m \leq \hat{x} < X_m$. Позиционная запись дробной части числа \hat{x} выглядит как

$$\hat{x}_B = b_0 \diamond b_1 b_2 b_3 \dots b_B, \quad (6.88)$$

где \diamond изображает двоичную точку.

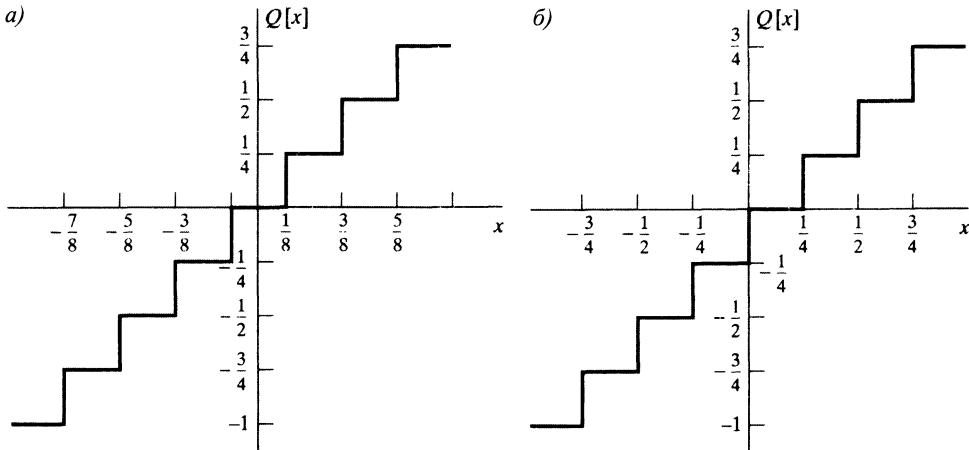


Рис. 6.34. Нелинейные соотношения между входом и выходом округления чисел для представления их в дополнительном коде при $B = 2$: *a*) округление; *б*) усечение

Квантование числа в $(B + 1)$ -битовую последовательность можно осуществить, округляя его с избытком или усекая², но в любом случае это нелинейная операция

¹Подробное описание двоичной системы счисления и соответствующей арифметики даны в [83].

²Термин «усечение» здесь закреплен за округлением с недостатком. — Примеч. перев.

без запоминания. На рис. 6.34 показана связь между входом и выходом процедур округления и усечения чисел для представления их в дополнительном коде при $B = 2$. Ошибка квантования определяется по формуле:

$$e = Q_B[x] - x. \quad (6.89)$$

При округлении в случае дополнительного кода имеет место неравенство $-\Delta/2 < e \leq \Delta/2$, а при усечении³ — $-\Delta < e \leq 0$.

Бывают ситуации, когда нам нужно проквантовать число, модуль которого больше X_m (они называются переполнением). В дополнительном коде переполнения могут возникать, например, при сложении двух достаточно больших чисел. Действительно, рассмотрим двоичное число 0111 в 4-битовом дополнительном коде, равное 7 в десятичной записи. Прибавив к нему число 0001, получим 1000, что соответствует -8 в десятичной записи, а не 8, как должно быть. Получается слишком большая ошибка. На рис. 6.35, а) показано округление чисел при представлении их в дополнительном коде вместе с регулярными переполнениями.

Альтернативой, называемой *насыщенным переполнением*, или *резанием*, служит метод борьбы⁴ с переполнениями, изображенный на рис. 6.35, б). Он, как правило, применяется при АЦП и иногда в специализированных цифровых микропроцессорах для сложения чисел, представленных в дополнительном коде. При насыщенном переполнении размер ошибки не может резко увеличиться при возникновении переполнения. Недостаток этого метода заключается в том, что в нем отсутствует следующее интересное и полезное свойство арифметики в дополнительном коде: *Если несколько чисел, записанных в дополнительном коде, имеют сумму, не вызывающую переполнения, то результат суммирования этих чисел будет верным даже тогда, когда промежуточные результаты превышали допустимые величины.*

Как квантование, так и переполнение вносят ошибки в цифровое представление чисел. К сожалению, для минимизации переполнения при фиксированном числе используемых битов мы должны увеличить X_m , пропорционально увеличивая при этом размер ошибок квантования. Следовательно, для достижения более широкого динамического диапазона и одновременного уменьшения ошибок квантования нам следует увеличить число разрядов в двоичном представлении чисел.

До этого момента мы считали X_m произвольным скалярным множителем, однако он имеет несколько полезных интерпретаций. При АЦП X_m выступает как масштаб шкалы амплитуды АЦП. В этом случае X_m , как правило, обозначает напряжение или силу тока аналоговой части системы. Таким образом, X_m является калибровочным множителем для приведения двоичных чисел из диапазона $-1 \leq \hat{x}_B < 1$ к амплитуде аналогового сигнала.

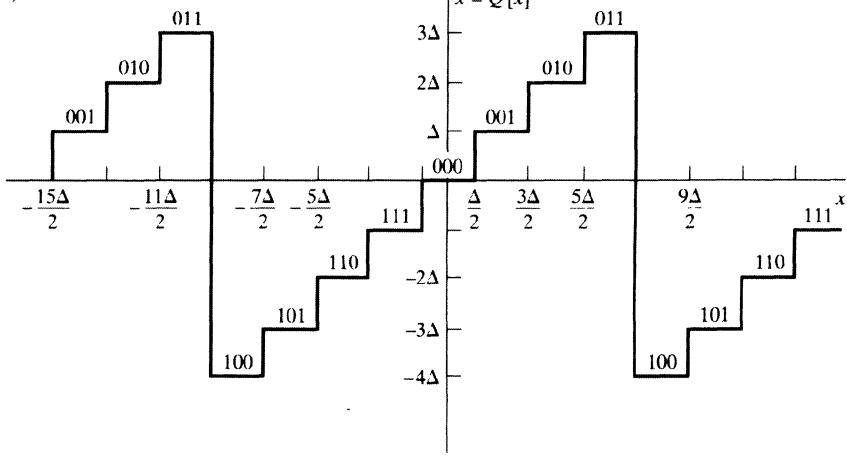
При цифровой обработке сигналов обычно предполагают, что все сигнальные переменные и коэффициенты — двоичные дроби. Так, при умножении $(B + 1)$ -битовой сигнальной переменной на $(B + 1)$ -битовый коэффициент получается $(2B + 1)$ -битовая дробь, которая сводится к $(B + 1)$ -битовому числу с помощью

³Заметим, что формула (6.86) также представляет результат округления или усечения любого $(B_1 + 1)$ -битового числа, где $B_1 > B$. В этом случае Δ на концах полуинтервала, ограничивающих ошибку, следует заменить на $(\Delta - X_m 2^{-B_1})$.

⁴Для обнаружения переполнения при выполнении арифметических операций используется «расширенный» дополнительный код. — Примеч. ред.

округления или усечения. Учитывая это соглашение, коэффициент X_m можно считать скалярным множителем, позволяющим представлять числа, модуль которых больше единицы. При вычислениях с фиксированной точкой, например, исходят из предположения, что каждое двоичное число обладает скалярным множителем вида $X_m = 2^c$. Соответственно, значение $c = 2$ означает, что двоичная точка расположена между знаками b_2 и b_3 двоичного слова (6.88). Зачастую этот масштабирующий множитель фигурирует неявно, он скрыт, например, при реализации программ или архитектуры аппаратных средств.

a)



б)

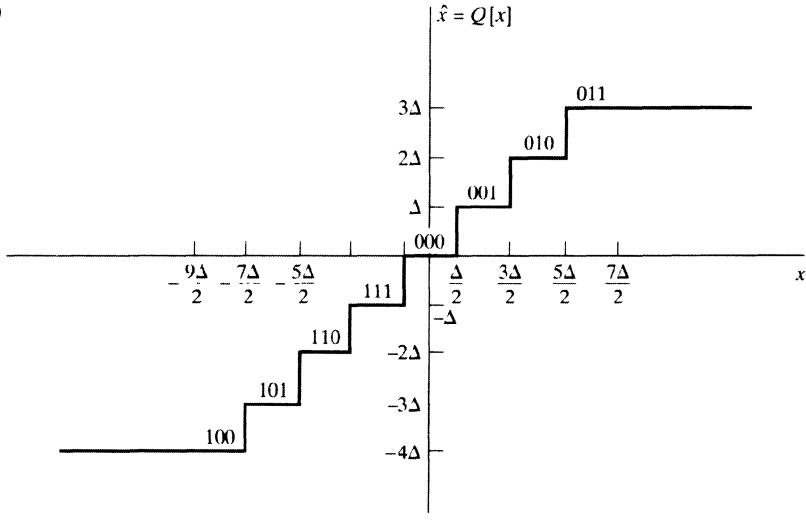


Рис. 6.35. Округление при пересчете чисел в дополнительный код: а) естественное переполнение; б) насыщение

Несколько другой взгляд на множитель X_m идет от представления чисел с плавающей точкой, где показатель скалярного множителя называется *характе-*

ристикой, а дробная часть \hat{x}_B — мантиссой. И характеристика, и мантисса в арифметике с плавающей точкой представлены в явном виде двоичными числами. Система записи чисел с плавающей точкой дает удобные средства поддержки как широкого динамического диапазона, так и малого шума квантования. Однако при такой системе ошибки квантования обнаруживаются несколько иным способом.

6.7.2. Квантование при реализации систем

Квантование чисел влияет на реализацию дискретных ЛС-систем несколькими способами. В качестве простейшей иллюстрации рассмотрим рис. 6.36, а), где показана блок-схема системы, в которой полученная в результате дискретизации непрерывного сигнала $x_c(t)$ последовательность $x[n]$ подается на вход ЛС-системы с характеристической функцией

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}. \quad (6.90)$$

Реакция ЛС-системы $y[n]$ затем преобразуется идеальным узкополосным интерполятором в узкополосный сигнал $y_c(t)$.

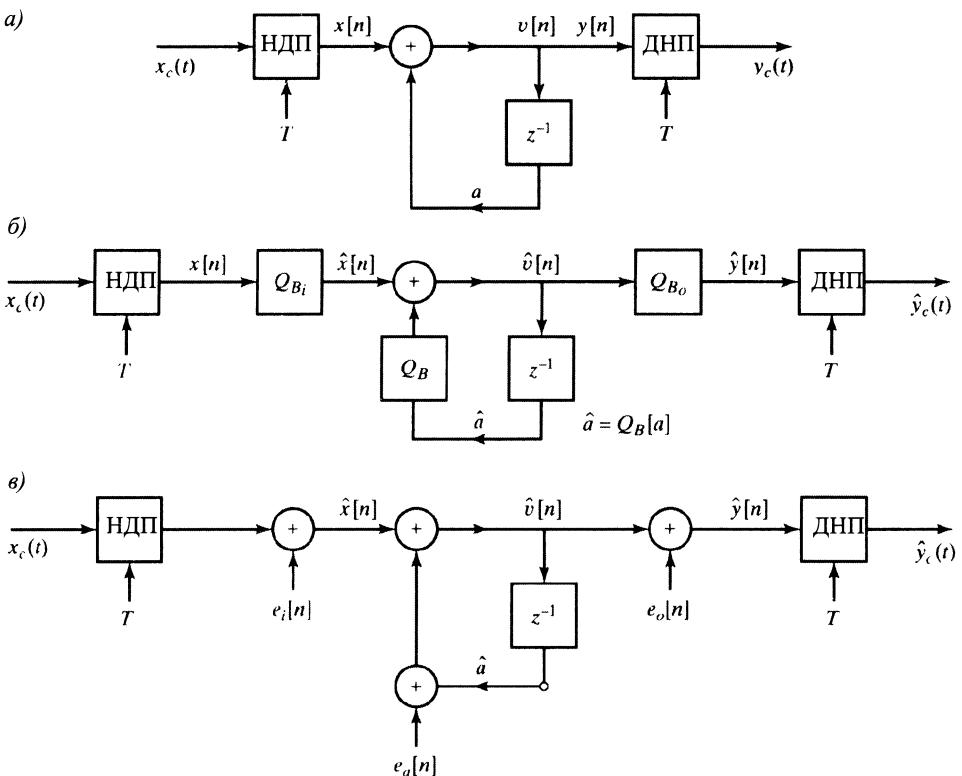


Рис. 6.36. Интерполяция дискретного фильтрования аналогового сигнала: а) идеальная система; б) нелинейная модель; в) линеаризованная модель

Более реалистичная модель изображена на рис. 6.36, б). При практических установках дискретизация осуществляется АЦП с конечной точностью в $(B_i + 1)$ битов, а дискретная ЛС-система реализуется в $(B + 1)$ -битовой арифметике. Коэффициент a из рис. 6.36, а) представляется $(B + 1)$ -значным двоичным словом. Кроме того, задержанная переменная $\hat{v}[n - 1]$ запоминается в $(B + 1)$ -битовом регистре, и когда $(B + 1)$ -значное число $\hat{v}[n - 1]$ умножается на $(B + 1)$ -битовое число \hat{a} , получается строка из $(2B + 1)$ битов. Предполагая, что используется $(B + 1)$ -битовый сумматор, произведение $\hat{a}\hat{v}[n - 1]$ необходимо проквантовать (т. е. округлить или усечь) до $(B + 1)$ бита, а потом уже складывать его с $(B_i + 1)$ -битовым отсчетом входа $\hat{x}[n]$. Если $B_i < B$, то $(B_i + 1)$ битов отсчета входной последовательности можно записать на любое место $(B + 1)$ -битового двоичного слова с подходящим знаком. Различные записи соответствуют разному масштабированию входа. Поскольку коэффициент a был проквантован, то даже оставляя в стороне другие ошибки квантования, можно утверждать, что реакция системы в общей ситуации не может быть такой, как на рис. 6.36, а). Наконец, $(B + 1)$ -битовые отсчеты $\hat{v}[n]$, вычисляемые с помощью итераций разностного уравнения, представленного блок-схемой, преобразуются в аналоговый сигнал посредством $(B_o + 1)$ -битового ЦАП. Когда $B_o < B$, отсчеты выхода перед преобразованием тоже необходимо проквантовать.

Хотя модель из рис. 6.36, б) могла бы быть точным представлением реальной системы, она довольно сложна для анализа, поскольку становится нелинейной ввиду наличия квантователя и возможных переполнений в сумматоре. Кроме того, во многих узлах системы появляются ошибки квантования. Влияние этих ошибок на поведение системы не поддается точному анализу, так как они зависят от входного сигнала, который обычно считается неизвестным. В связи с этим для упрощения анализа таких систем мы вынуждены сделать несколько различных аппроксимирующих допущений.

Эффект квантования параметров системы, таких как коэффициент из рис. 6.36, а), обычно исследуется отдельно от ошибок квантования, возникающих при преобразовании данных или реализации разностных уравнений. Иными словами, идеальные коэффициенты характеристической функции заменяются их квантованными версиями, а получающаяся в итоге КЧХ тестируется на предмет вырождения поведения системы. Например, в системе из рис. 6.36 при квантовании вещественного коэффициента a до $(B + 1)$ -битового числа \hat{a} мы должны выяснить, насколько квантованная характеристическая функция

$$\hat{H}(z) = \frac{1}{1 - \hat{a}z^{-1}} \quad (6.91)$$

близка к исходной функции $H(z)$ из формулы (6.90). Заметим, что существует только 2^{B+1} различных $(B + 1)$ -значных двоичных чисел, поэтому полюс функции $H(z)$ может появиться лишь в 2^{B+1} местах вещественной оси комплексной плоскости. Анализ такой ситуации в общих терминах будет обсуждаться в § 6.8.

Нелинейность системы из рис. 6.36, б) провоцирует явления, которые отсутствуют в линейных системах, а именно в системах такого типа появляются так называемые *пределные циклы при отсутствии входного сигнала*: отклик системы начинает периодически осциллировать в тот момент, когда ненулевые отсчеты входного сигнала заканчиваются и на вход подаются одни нули. Пре-



дельные циклы вызываются как ошибками квантования, так и переполнениями. Хотя этот феномен весьма сложно поддается анализу, были найдены некоторые полезные приближенные результаты, его характеризующие. Мы еще вернемся к предельным циклам в § 6.10.

При достаточно аккуратном подходе к проектированию цифровой реализации можно гарантировать, что переполнения будут происходить не столь уж часто, а ошибки квантования окажутся незначительными. При этих условиях поведение системы из рис. 6.36, б) становится близким к поведению линейной (с квантованным коэффициентом), в которой ошибки квантования вносятся на входе, выходе и внутренних узлах сети при округлениях или усечениях. Следовательно, модель из рис. 6.36, б) можно заменить линеаризованной моделью, приведенной на рис. 6.36, в), где квантователи замещены источниками аддитивного шума [49, 68, 69]. Система из рис. 6.36, в) эквивалентна изображенной на рис. 6.36, б) при условии, что нам точно известен каждый из источников шума. Однако, как рассказано в подразделе 4.9.3, полезную информацию можно извлечь и из модели случайного шума квантования. Этот же подход можно использовать при анализе эффектов арифметического квантования при цифровой реализации линейных систем. Как следует из рис. 6.36, в), каждый источник шума генерирует случайный сигнал, который затем обрабатывается различными частями системы, но, поскольку мы предполагаем, что все части системы линейны, общий эффект можно вычислить с помощью суперпозиции. В § 6.9 этот стиль анализа будет иллюстрироваться на примере исследования нескольких важных систем.

В простейшем случае (рис. 6.36) присутствует небольшая свобода в выборе структуры. Однако, как мы уже убедились, для систем высокого порядка существует огромное число различных конфигураций. Некоторые из них оказываются менее чувствительными к квантованию коэффициентов, чем другие. Аналогично, поскольку разные структуры обладают разными источниками шумов квантования, причем эти шумы фильтруются разными участками системы, можно убедиться, что теоретически эквивалентные системы работают по-разному при цифровой реализации с конечной точностью.

6.8. Квантование коэффициентов

Дискретные ЛС-системы используют, как правило, для фильтрования сигналов. Методы проектирования КИХ- и БИХ-фильтров, обсуждаемые в главе 7, предполагают поиск характеристической функции специального вида. Результатом проектирования является характеристическая функция, для которой мы должны выбрать структуру реализации (набор разностных уравнений) из бесконечно большого числа теоретически эквивалентных вариантов. Хотя практически во всех случаях нас интересует реализация с минимальной аппаратной и программной сложностью, часто приходится учитывать и другие факторы, такие как, например, шум квантования, который в сильной степени зависит от структуры реализации (см. § 6.9). Кроме того, некоторые структуры более, чем другие, чувствительны к возмущению коэффициентов. В § 6.7 было отмечено, что стандартный подход к изучению этих проблем состоит в независимом исследовании

каждого источника шума. В этом параграфе мы рассматриваем эффекты квантования параметров системы.

6.8.1. Квантование коэффициентов в БИХ-системах

При квантовании коэффициентов рациональной характеристической функции или соответствующих разностных уравнений полюса и нули характеристической функции передвигаются на новые места комплексной плоскости, что вызывает возмущение исходной КЧХ. Если структура реализации обладает высокой чувствительностью к возмущению коэффициентов, получающаяся в результате квантования система может далеко отойти от исходных спецификаций проекта, а БИХ-система может вообще стать неустойчивой.

Детальный анализ чувствительности в общем случае сложен, поэтому обычно ограничиваются анализом конкретных реализаций цифровых фильтров. Имея в своем распоряжении мощные инструменты моделирования, самым легким кажется путь, заключающийся в квантовании коэффициентов соответствующих разностных уравнений, вычислении получившейся КЧХ и сравнении ее с желаемой. Несмотря на то что моделирование системы является необходимой составной частью задач проектирования, теоретическое исследование реакции характеристической функции на квантование коэффициентов разностных уравнений заслуживает особого внимания. Рассмотрим, например, рациональную характеристическую функцию:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}. \quad (6.92)$$

Здесь наборы коэффициентов $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ представляют собой идеальные абсолютно точные коэффициенты прямых форм структур реализации. После квантования получается следующая характеристическая функция:

$$\hat{H}(z) = \frac{\sum_{k=0}^M \hat{b}_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=0}^N \hat{a}_k z^{-k}}, \quad (6.93)$$

где $\hat{a}_k = a_k + \Delta a_k$ и $\hat{b}_k = b_k + \Delta b_k$ — квантованные коэффициенты, отличающиеся от исходных на ошибки квантования Δa_k и Δb_k .

Выясним теперь, как корни числителя и знаменателя (нули и полюса характеристической функции) зависят от возмущения коэффициентов при квантовании. Ясно, что на любой корень воздействуют ошибки квантования всех коэффициентов многочленов. Более точная информация приведена в работе [74], где доказано, что если полюса (или нули) характеристической функции сгруппированы тесно, то сравнительно небольшие возмущения коэффициентов приводят к значительному их сдвигу. Итак, если полюса (нули) расположены близко друг от друга, как, например, в случае фильтра с узкой полосой пропускания, то можно ожидать, что при прямой форме реализации они будут довольно чувствитель-



ны к ошибкам квантования коэффициентов. Более того, большее число тесно сгруппированных полюсов ведет к большей чувствительности.

Каскадная и параллельная формы характеристических функций, приведенные в формулах (6.50) и (6.58) соответственно, состоят из комбинации подсистем прямых форм второго порядка. Однако в обоих случаях каждая пара комплексно сопряженных полюсов реализуется независимо от других. Таким образом, ошибка в каждой конкретной паре полюсов не зависит от длины промежутков до других полюсов функции. В случае каскадной формы те же аргументы можно высказать и в отношении нулей характеристической функции, т. е. они реализуются с помощью независимых множителей второго порядка. Отсюда вытекает, что каскадная форма реализации гораздо менее чувствительна к квантованию коэффициентов, чем эквивалентные прямые формы реализации.

Как следует из (6.58), нули характеристической функции в параллельной форме реализуются неявным образом, посредством комбинирования квантованных участков второго порядка для получения общего знаменателя. Таким образом, отдельный нуль функции подвержен влиянию ошибок квантования коэффициентов числителя и знаменателя всех участков второго порядка. Однако было установлено, что в наиболее практических проектах параллельная форма тоже менее чувствительна к квантованию коэффициентов, чем эквивалентные прямые формы, поскольку подсистемы второго порядка мало восприимчивы к возмущению коэффициентов. Во многих реальных фильтрах нули характеристической функции распределены вблизи единичной окружности, или, иногда, все они попадают в точки ± 1 . В последнем случае нули главным образом обеспечивают более сильное затухание сигнала в районе частот $\omega = 0$ и $\omega = \pi$, чем ожидалось, и, таким образом, отдаление нулей от $z = \pm 1$ не наносит существенного ущерба характеристикам системы.

6.8.2. Пример квантования коэффициентов в эллиптическом фильтре

Чтобы проиллюстрировать эффекты, связанные с квантованием коэффициентов, рассмотрим пример полосового эллиптического фильтра. Он разрабатывается на основе следующих спецификаций:

$$\begin{aligned} 0,99 &\leq |H(e^{j\omega})| \leq 1,01, & 0,3\pi &\leq |\omega| \leq 0,4\pi, \\ |H(e^{j\omega})| &\leq 0,01 \text{ (т. е. } -40 \text{ дБ}), & |\omega| &\leq 0,29\pi, \\ |H(e^{j\omega})| &\leq 0,01 \text{ (т. е. } -40 \text{ дБ}), & 0,41\pi &\leq |\omega| \leq \pi. \end{aligned}$$

Для достижения намеченной цели необходима система 12-го порядка.

При проектировании фильтра коэффициенты каскадной формы были вычислены с 32-разрядной точностью в системе с плавающей запятой и определены как «неквантованные». Коэффициенты шести участков второго порядка (в соответствии с формулой (6.50)) приведены в табл. 6.1. На рис. 6.37, а) показан логарифм АЧХ в децибелах, а на рис. 6.37, б) — АЧХ неквантованной системы в полосе пропускания (т. е. $0,3\pi \leq |\omega| \leq 0,4\pi$).

Коэффициенты табл. 6.1 были проквантованы с 16-битовой точностью, а результат квантования занесен в табл. 6.2. Коэффициенты с фиксированной точкой

показаны как десятичные целые числа, умноженные на степень двойки. Двоичное их представление можно получить, преобразовывая десятичную запись целых чисел в двоичную. При реализации с фиксированной точкой скалярный множитель может быть представлен лишь в неявной форме, сдвигом данных, которые необходимо выравнивать по двоичной точке перед их сложением. Отметим, что двоичная точка коэффициентов не всегда находится на одном и том же месте. Например, у всех коэффициентов с множителем 2^{-15} двоичная точка расположена между знаковым битом b_0 и наивысшим дробным битом b_1 , как показано в (6.88). Однако числа, модуль которых не превышает $1/2$, такие как коэффициент b_{02} , могут быть сдвинуты налево на один или несколько знаков¹. Так, двоичная точка в коэффициенте b_{02} находится слева от знакового бита. С другой стороны, у чисел с модулем между 1 и 2, например a_{16} , двоичная точка сдвигается на одну позицию вправо и попадает между b_1 и b_2 (см. формулу (6.88)).

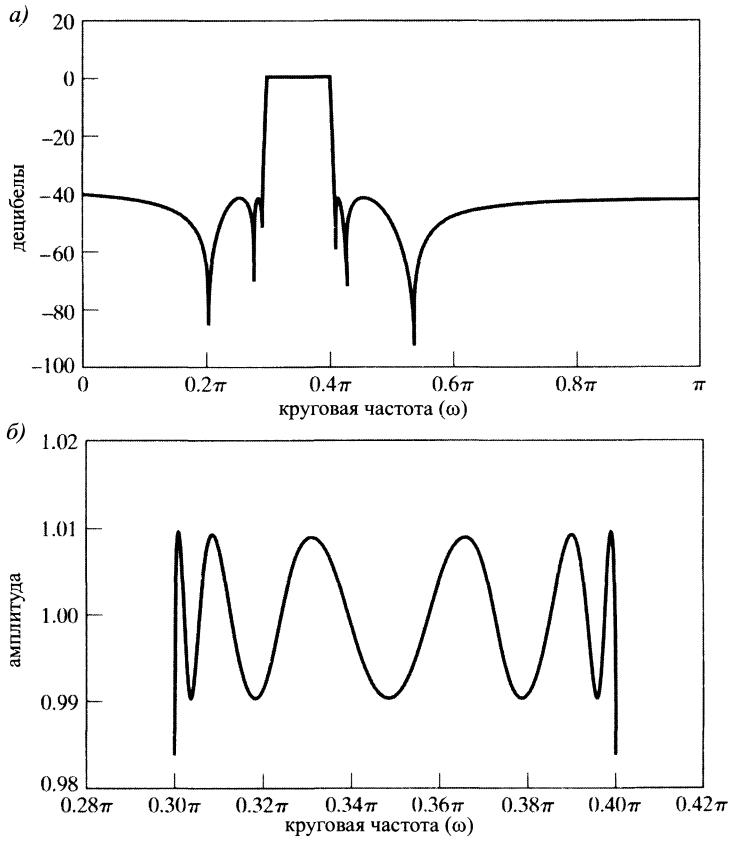


Рис. 6.37. Пример квантования коэффициентов БИХ-системы: а) логарифм АЧХ для неквантованного эллиптического фильтра; б) полоса пропускания для неквантованной каскадной реализации

¹ Вариация положения двоичной точки нацелена на увеличение точности представления коэффициентов, но создает дополнительные сложности программирования или архитектуры системы.

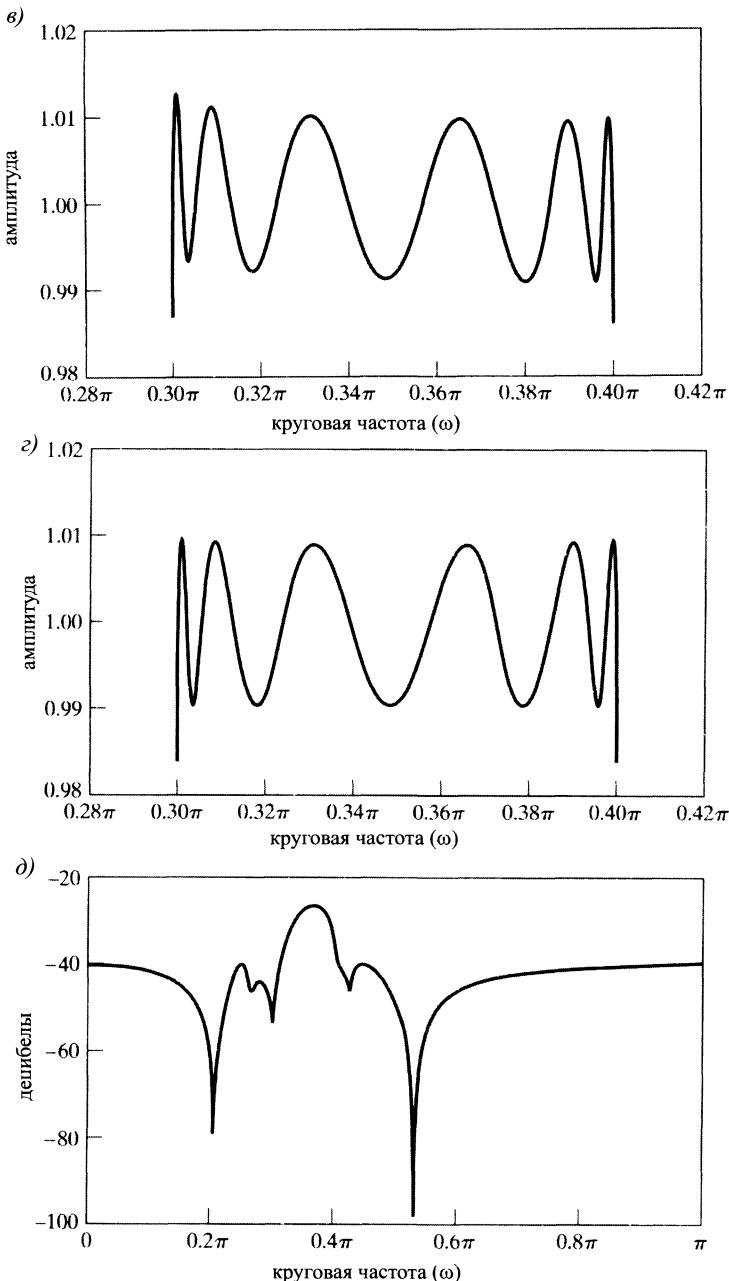


Рис. 6.37 (окончание). б) полоса пропускания каскадной структуры с 16-битовыми коэффициентами; в) полоса пропускания для параллельной структуры с 16-битовыми коэффициентами; г) логарифм АЧХ прямой формы с 16-битовыми коэффициентами

Таблица 6.1. Неквантованные коэффициенты каскадной формы для эллиптического фильтра 12-го порядка

k	a_{1k}	a_{2k}	b_{0k}	b_{1k}	b_{2k}
1	0,738409	-0,850835	0,135843	0,026265	0,135843
2	0,960374	-0,860000	0,278901	-0,444500	0,278901
3	0,629449	-0,931460	0,535773	-0,249249	0,535773
4	1,116458	-0,940429	0,697447	-0,891543	0,697447
5	0,605182	-0,983693	0,773093	-0,425920	0,773093
6	1,173078	-0,986166	0,917937	-1,122226	0,917937

Таблица 6.2. 16-битовые квантованные коэффициенты каскадной формы для эллиптического фильтра 12-го порядка

k	a_{1k}	a_{2k}	b_{0k}	b_{1k}	b_{2k}
1	24196×2^{-15}	-27880×2^{-15}	17805×2^{-17}	3443×2^{-17}	17805×2^{-17}
2	31470×2^{-15}	-28180×2^{-15}	18278×2^{-16}	-29131×2^{-16}	18278×2^{-16}
3	20626×2^{-15}	-30522×2^{-15}	17556×2^{-15}	-8167×2^{-15}	17556×2^{-15}
4	18292×2^{-14}	-30816×2^{-15}	22854×2^{-15}	-29214×2^{-15}	22854×2^{-15}
5	19831×2^{-15}	-32234×2^{-15}	25333×2^{-15}	-13957×2^{-15}	25333×2^{-15}
6	19220×2^{-14}	-32315×2^{-15}	15039×2^{-14}	-18387×2^{-14}	15039×2^{-14}

На рис. 6.37, в) показана АЧХ квантованной каскадной реализации системы в полосе пропускания. Рисунок подтверждает, что КЧХ системы лишь незначительно ухудшается в этой полосе.

Для получения других эквивалентных структур характеристическую функцию нужно переписывать в ином виде. Например, для реализации системы в параллельной форме мы раскладываем неквантованную характеристическую функцию в сумму простейших дробей, коэффициенты которых подвергаем квантованию, как и раньше. Соответствующая КЧХ в полосе пропускания приведена на рис. 6.37, г).

Если квантованные множители числителя и знаменателя неквантованной каскадной формы характеристической функции перемножить и получить многочлены 12-ой степени, проквантовать соответствующие коэффициенты до 16-битовых чисел и реализовать результат в прямой форме, то логарифм АЧХ итоговой структуры будет иметь график, отраженный на рис. 6.37, д). Из рисунка видно, что в этом случае характеристика системы в полосе пропускания сильно искается квантованием. Сравнивая рис. 6.37, д) и а), можно заметить, что далеко отстоящие друг от друга нули характеристической функции, расположенные с обеих сторон полосы пропускания (приблизительно в $\omega = 0,2\pi$ и $\omega = 0,54\pi$), практически не сдвинулись с единичного круга. Однако неквантованная характеристическая функция обладает парой нулей на единичной окружности в точности на границах полосы непропускания. Эти нули, стоящие близко друг от друга, в результате квантования заметно удаляются от единичной окружности и таким образом вносят вклад в общую деградацию КЧХ.

6.8.3. Полюса квантованных участков второго порядка

Разобранный пример, с одной стороны, иллюстрирует устойчивость каскадных и параллельных форм к ошибкам квантования коэффициентов, а с другой — чрезвычайную чувствительность к этим ошибкам прямых форм реализа-

ции фильтров большого порядка. В связи с этим прямые формы редко используются для реализации чего-либо, кроме систем второго порядка². Поскольку конфигурации в каскадной и параллельной формах требуют практически того же объема вычислений, что и прямые формы, эти модульные структуры являются наиболее употребительными. Более сложные структуры могут оказаться и более устойчивыми при квантовании до малого числа знаков. Но при таких реализациях объем вычислений может заметно вырасти.

Даже при реализации систем второго порядка в каскадной или параллельной форме остается некоторая свобода, которую можно использовать для улучшения устойчивости системы к ошибкам квантования. Рассмотрим реализацию пары комплексно сопряженных полюсов в прямой форме, приведенную на рис. 6.38. Если коэффициенты абсолютно точны, то характеристическая функция обладает полюсами в точках $z = re^{j\theta}$ и $z = re^{-j\theta}$. Однако после квантования коэффициентов $2r \cos \theta$ и $-r^2$ остается лишь конечное число возможных положений полюсов. Полюса могут располагаться только в узлах сетки, получающейся в результате пересечения концентрических окружностей (соответствующих квантованию коэффициента r^2) и вертикальных линий (соответствующих квантованию $2r \cos \theta$). Эта решетка в случае 4-битового квантования (с одним битом для знака и тремя битами значащих цифр) изображена на рис. 6.39, а). Здесь r^2 , кроме нулевого, может принимать семь положительных значений, а $2r \cos \theta$ — семь положительных, восемь отрицательных и нулевое. На рис. 6.39, б) приведена более частая решетка возможных положений полюсов при 7-битовом квантовании коэффициентов (шесть значащих цифр и знак). Схемы рис. 6.39, естественно, симметрично продолжаются на все квадранты комплексной плоскости. Заметим, что в случае прямой формы узлы сетки вблизи вещественной оси встречаются редко. Таким образом, полюса с аргументами из окрестности $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ при квантовании сдвигаются сильнее, нежели те, аргументы которых попадают в окрестность $\pi/2$. Конечно, не исключена возможность попадания неквантованного полюса в очень малую окрестность какого-то узла сетки. В этом случае квантование не создает никаких проблем, но, поскольку надеяться на такую удачу наивно, в общей ситуации нужно быть готовым к ухудшению характеристик системы.

Альтернативная структура реализации системы второго порядка с полюсами в точках $z = re^{j\theta}$ и $z = re^{-j\theta}$ показана на рис. 6.40. Такую структуру принято называть *парной формой* системы второго порядка [129]. Легко проверить, что системы из рис. 6.38 и 6.40 имеют одни и те же полюса в представлении коэффициентов с бесконечной точностью. Для реализации системы из рис. 6.40 нам нужно проквантовать коэффициенты $r \cos \theta$ и $r \sin \theta$. Поскольку эти числа

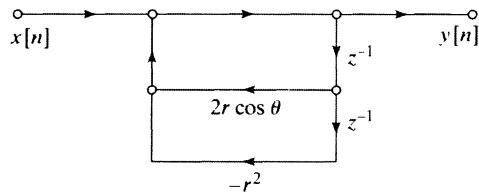


Рис. 6.38. Прямая форма реализации в случае пары комплексно сопряженных полюсов

²Исключения лежат в области синтеза речи, где системы 10-го порядка и выше запросто реализуются в прямой форме. Это возможно благодаря тому, что при речевом синтезе полюса характеристической функции удалены друг от друга [123].

являются соответственно вещественной и мнимой частями полюсов, возможные положения полюсов после квантования будут располагаться в точках пересечения равномерно распределенных вертикальных и горизонтальных прямых. На рис. 6.41 показаны сетки полюсов при 4- и 7-битовом квантовании. Здесь положения полюсов квантованной системы равномерно распределены по единичному кругу. Однако такая равномерность получается за счет удвоения числа умножений на константу. Но в некоторых ситуациях дополнительные вычисления могут быть оправданы более точным положением полюсов при малой длине битовых строк.

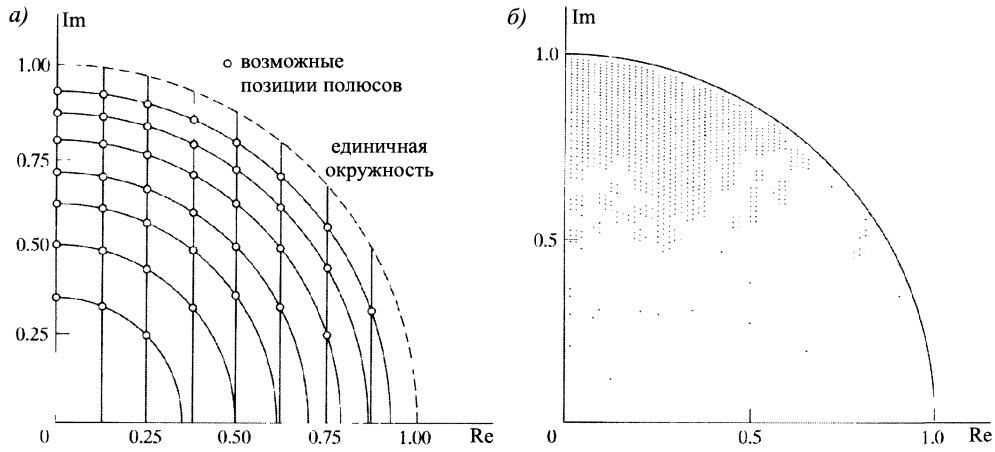


Рис. 6.39. Возможные положения полюсов прямой формы реализации БИХ-системы второго порядка из рис. 6.38: а) 4-битовое квантование коэффициентов; б) 7-битовое квантование коэффициентов

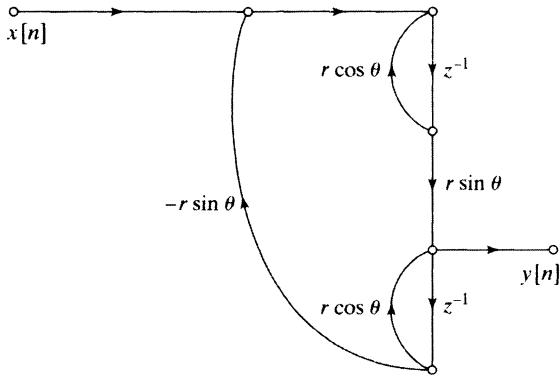


Рис. 6.40. Парная форма реализации комплексно сопряженных полюсов

6.8.4. Квантование коэффициентов в КИХ-системах

При реализации КИХ-систем нас интересует лишь положение нулей характеристической функции, поскольку все ее полюса в случае детерминированной КИХ-системы попадают в точку $z = 0$. Как мы только что убедились, при реализации

БИХ-систем большого порядка прямых форм стоит избегать, а в случае КИХ-систем обычно используются именно прямые формы. Чтобы понять причину, выразим характеристическую функцию как

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n}. \quad (6.94)$$

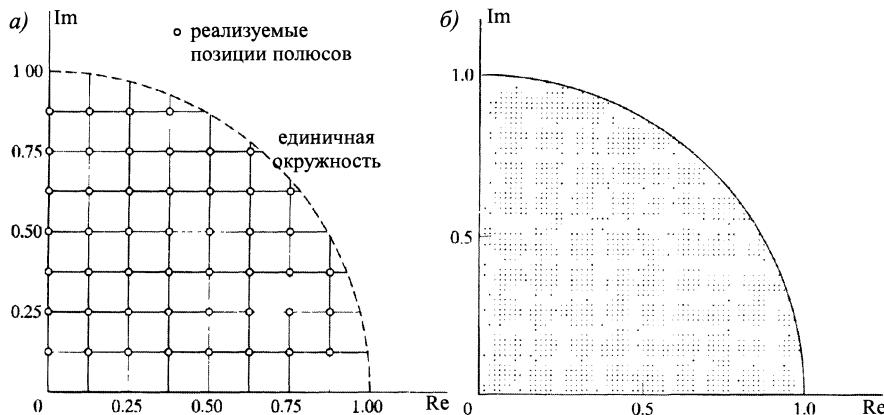


Рис. 6.41. Положения полюсов для парной формы реализации БИХ-системы из рис. 6.40:
а) 4-битовое квантование коэффициентов; б) 7-битовое квантование коэффициентов

Теперь предположим, что коэффициенты импульсной характеристики после квантования становятся равными $\hat{h}[n] = h[n] + \Delta h[n]$. Тогда характеристическая функция приобретет вид:

$$\hat{H}(z) = \sum_{n=0}^M \hat{h}[n]z^{-n} = H(z) + \Delta H(z), \quad (6.95)$$

где

$$\Delta H(z) = \sum_{n=0}^M \Delta h[n]z^{-n}. \quad (6.96)$$

Таким образом, характеристическая функция (а значит, и КЧХ) квантованной системы связана с ошибками квантования коэффициентов импульсной характеристики линейным соотношением. В связи с этим квантованная система может быть представлена так, как показано на рис. 6.42, где неквантованная система подключается параллельно с системой ошибок, коэффициенты импульсной характеристики которой — суть ошибка квантования, т. е. $\Delta h[n]$, а характеристическая функция $\Delta H(z)$ — соответствующее z -преобразование.

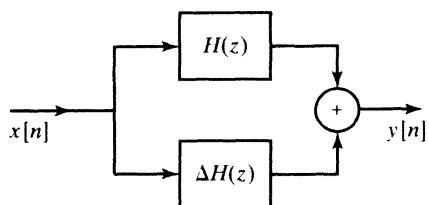


Рис. 6.42. Представление квантованных коэффициентов в КИХ-системе

Еще один подход к изучению чувствительности прямой формы КИХ-систем заключается в исследовании восприимчивости нулей к ошибкам квантования коэффициентов импульсной характеристики, которые, очевидно, совпадают с коэффициентами многочлена $H(z)$. При высокой концентрации нули характеристической функции имеют большую чувствительность к ошибкам квантования коэффициентов импульсной характеристики. Но причина, по которой прямые формы широко применяются при реализации КИХ-систем, состоит в том, что нули линейно-фазовых КИХ-фильтров более или менее равномерно распределены по комплексной плоскости. Продемонстрируем это на следующем примере.

6.8.5. Пример квантования оптимального КИХ-фильтра

В качестве примера эффектов квантования коэффициентов в случае КИХ-систем рассмотрим линейно-фазовый фильтр нижних частот, проект которого определяется следующими спецификациями:

$$0,99 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1,01, \quad 0 \leq |\omega| \leq 0,4\pi, \quad (6.97)$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0,001 \text{ (т. е. } -60 \text{ дБ}), \quad 0,6\pi \leq |\omega| \leq \pi. \quad (6.98)$$

Этот фильтр разрабатывался с помощью техники Пакса–Мак–Клеллана, которую мы будем изучать в подразделе 7.5.3. Подробностям проекта этого фильтра посвящен подраздел 7.6.1.

В табл. 6.3 приведены неквантованные коэффициенты импульсной характеристики системы вместе с квантованными 16, 14, 13 и 8-битовыми значениями. Сравнительный анализ КЧХ разных вариантов реализации системы показан на рис. 6.43. Логарифму АЧХ в децибелах при неквантованных коэффициентах отведен рис. 6.43, а).

Таблица 6.3. Неквантованные и квантованные коэффициенты для оптимального КИХ-фильтра нижних частот ($M = 27$)

Коэффициент	Неквантованный	16 бит	14 бит	13 бит	8 бит
$h[0] = h[27]$	$1,359657 \times 10^{-3}$	45×2^{-15}	11×2^{-13}	6×2^{-12}	0×2^{-7}
$h[1] = h[26]$	$-1,616993 \times 10^{-3}$	-53×2^{-15}	-13×2^{-13}	-7×2^{-12}	0×2^{-7}
$h[2] = h[25]$	$-7,738032 \times 10^{-3}$	-254×2^{-15}	-63×2^{-13}	-32×2^{-12}	-1×2^{-7}
$h[3] = h[24]$	$-2,686841 \times 10^{-3}$	-88×2^{-15}	-22×2^{-13}	-11×2^{-12}	0×2^{-7}
$h[4] = h[23]$	$1,255246 \times 10^{-3}$	411×2^{-15}	103×2^{-13}	51×2^{-12}	2×2^{-7}
$h[5] = h[22]$	$6,591530 \times 10^{-3}$	216×2^{-15}	54×2^{-13}	27×2^{-12}	1×2^{-7}
$h[6] = h[21]$	$-2,217952 \times 10^{-2}$	-727×2^{-15}	-182×2^{-13}	-91×2^{-12}	-3×2^{-7}
$h[7] = h[20]$	$-1,524663 \times 10^{-2}$	-500×2^{-15}	-125×2^{-13}	-62×2^{-12}	-2×2^{-7}
$h[8] = h[19]$	$3,720668 \times 10^{-2}$	1219×2^{-15}	305×2^{-13}	152×2^{-12}	5×2^{-7}
$h[9] = h[18]$	$3,233332 \times 10^{-2}$	1059×2^{-15}	265×2^{-13}	132×2^{-12}	4×2^{-7}
$h[10] = h[17]$	$-6,537057 \times 10^{-2}$	-2142×2^{-15}	-536×2^{-13}	-268×2^{-12}	-8×2^{-7}
$h[11] = h[16]$	$-7,528754 \times 10^{-2}$	-2467×2^{-15}	-617×2^{-13}	-308×2^{-12}	-10×2^{-7}
$h[12] = h[15]$	$1,560970 \times 10^{-1}$	5115×2^{-15}	1279×2^{-13}	639×2^{-12}	20×2^{-7}
$h[13] = h[14]$	$4,394094 \times 10^{-1}$	14399×2^{-15}	3600×2^{-13}	1800×2^{-12}	56×2^{-7}

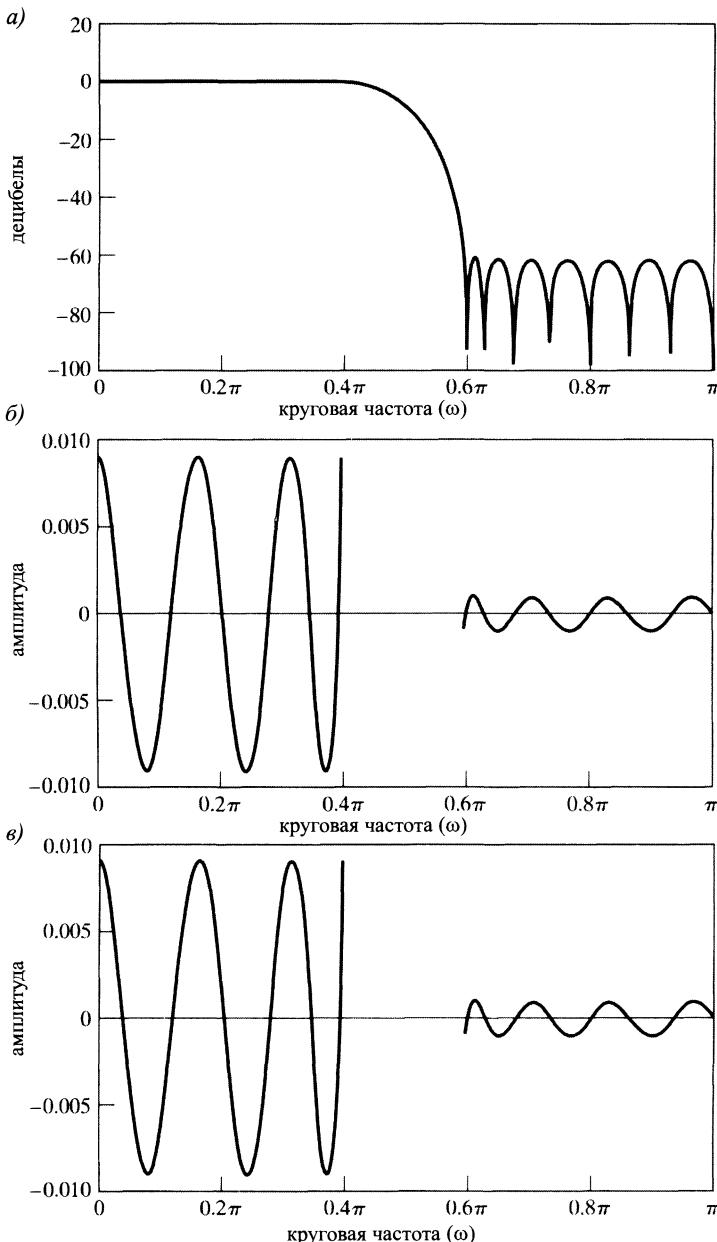


Рис. 6.43. Пример квантования коэффициентов КИХ-системы: а) логарифм АЧХ в неквантованном случае; б) ошибка аппроксимации для неквантованного случая (ошибка не определена в переходной полосе); в) ошибка аппроксимации для 16-битового квантования

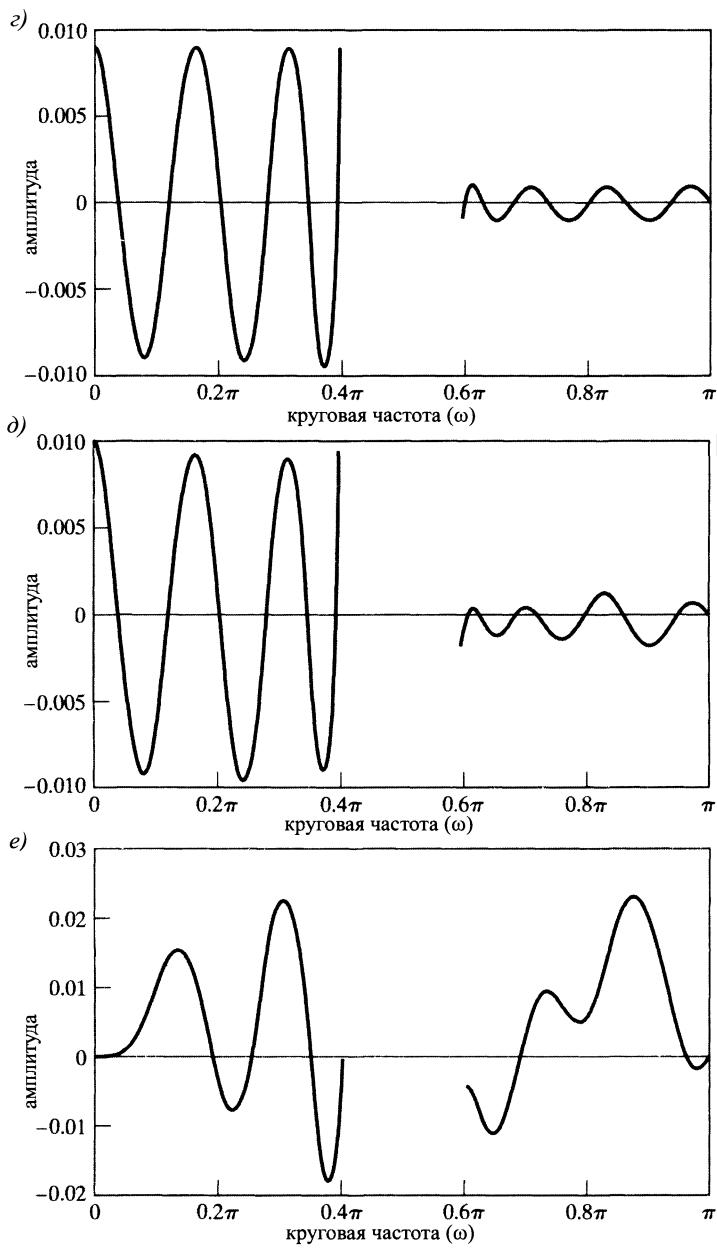


Рис. 6.43 (окончание). *г)* ошибка аппроксимации 14-битового квантования; *д)* ошибка аппроксимации 13-битового квантования; *е)* ошибка аппроксимации 8-битового квантования

Рисунки 6.43 *б)-е*) показывают ошибки аппроксимации полос пропускания и непропускания (ошибки аппроксимации единицы в полосе пропускания и нуля в полосе непропускания) для неквантованного случая и 16, 14, 13 и 8-битового

квантования соответственно. На этих рисунках видно, что система обладает заявленными спецификациями в неквантованном случае и при 16- и 14-битовом квантовании. В то же время при 13-битовом квантовании ошибка в полосе непропускания становится больше чем 0,001, а при 8-битовом — более чем в 10 раз превышает параметры спецификации. Таким образом, для получения желаемого результата необходимы по крайней мере 14-битовые коэффициенты в прямой форме реализации системы. Однако это ограничение не очень обременительно, поскольку 16- или 14-битовые коэффициенты хорошо согласуются с общепринятыми технологиями, используемыми для реализации таких фильтров.

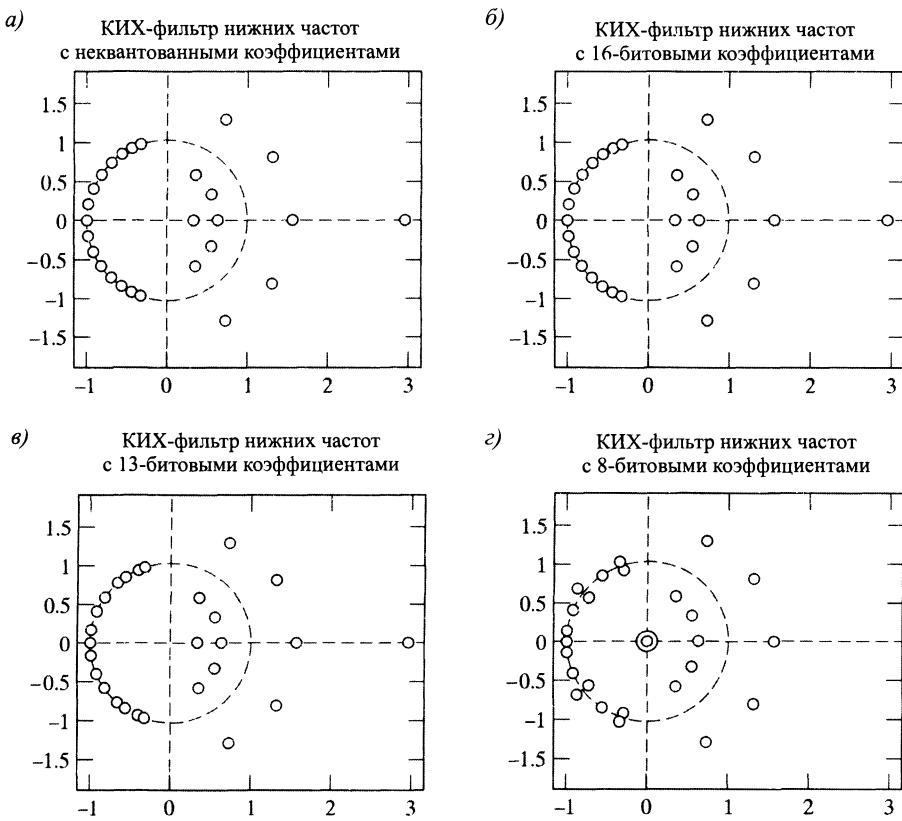


Рис. 6.44. Влияние квантования импульсной характеристики на нули характеристической функции: а) неквантованный случай; б) 16-битовое квантование; в) 13-битовое квантование; г) 8-битовое квантование

Влияние квантования коэффициентов фильтра на положение нулей характеристической функции показано на рис. 6.44. Заметим, что в неквантованном случае (рис. 6.44, а)) нули рассредоточены по всей комплексной плоскости, хотя заметно некоторое их накапливание на единичной окружности. Нули на единичной окружности прежде всего отвечают за полосу непропускания, в то время как нули, расположенные вне ее, воздействуют на полосу пропускания. Заметим, что отличие картинки на рис. 6.44, б) (16-битовое квантование) от оригинальной

практически не заметно, а вот при 13-битовом квантовании (рис. 6.44, *б*) смещение нулей вдоль единичной окружности довольно значительно. Наконец, при 8-битовом квантовании (рис. 6.44, *г*) некоторые нули на единичной окружности группируются попарно и съезжают с единичной окружности в позиции, связанные инверсией. Такое поведение нулей полностью согласуется с видоизменением КЧХ (см. рис. 6.43).

Поставим точку в обсуждении этого примера. Модуль всех неквантованных коэффициентов меньше $1/2$. Следовательно, если удвоить все коэффициенты (а значит, и импульсную характеристику) перед квантованием, то мы сможем более эффективно использовать доступные биты, что соответствует увеличению B на 1. В табл. 6.3 и рис. 6.43 эта возможность увеличения точности не была принята в расчет.

6.8.6. Поддержка линейной фазы

До этого момента мы не делали каких-либо специальных предположений о ФЧХ КИХ-систем. Однако возможность реализации обобщенной линейной фазы — одно из главных преимуществ КИХ-систем. Напомним, что линейно-фазовая КИХ-система обладает симметричной ($h[M - n] = h[n]$) или антисимметричной ($h[M - n] = -h[n]$) импульсной характеристикой. Эти условия линейности фазы легко сохраняются при квантовании прямых форм. Таким образом, все системы, рассматривавшиеся в предыдущем примере, обладают линейной фазой вне зависимости от шага квантования. Это легко подметить на рис. 6.44, где нули разбиваются на четверки взаимно обратных и комплексно сопряженных чисел.

Рисунок 6.44, *г*) наводит на мысль, что при слишком грубом квантовании или при реализации систем большого порядка с тесными группами нулей имеет смысл реализовать небольшие множества нулей независимо друг от друга и подключать их в каскадной форме. Для сохранения линейной фазы каждый из участков каскада тоже должен иметь линейную фазу. Напомним, что нули линейно-фазовой системы расположены, как на рис. 6.33. Например, при использовании подсистем второго порядка с характеристической функцией вида $(1 + az^{-1} + z^{-2})$ для каждой из комплексно сопряженных пар нулей на единичной окружности отдельный нуль при квантовании коэффициентов может перемещаться только вдоль окружности. Это предотвращает отдаление нулей от единичной окружности. Аналогично, вещественные нули внутри единичного круга и обратные к ним, выходящие за его границы, должны оставаться вещественными. Кроме того, нули в ± 1 должны быть реализованы точно подсистемами первого порядка. При реализации пары комплексно сопряженных нулей подсистемой второго порядка, а не четвертого мы должны быть уверены, что каждому комплексному нулю z_0 внутри единичного круга соответствует нуль $1/z_0^*$, расположенный в инверсной точке вне единичного круга. Это можно обеспечить, записывая множители четвертой степени с нулями в $z = re^{j\theta}$ и $r^{-1}e^{-j\theta}$ как

$$\begin{aligned} 1 + cz^{-1} + dz^{-2} + cz^{-3} + z^{-4} = \\ = (1 - 2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2}) \frac{1}{r^2} (r^2 - 2r \cos \theta z^{-1} + z^{-2}). \end{aligned} \quad (6.99)$$

Такое разложение соответствует подсистеме, изображенной на рис. 6.45, в которой используются одни и те же коэффициенты $-2r \cos \theta$ и r^2 для реализации

обоих нулей внутри единичного круга и инверсных к ним за его пределами. Итак, условия, обеспечивающие линейность фазы, при квантовании сохраняются. Заметим, что член $(1 - 2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2})$ совпадает со знаменателем характеристической функции БИХ-системы второго порядка, представленной для реализации в прямой форме (рис. 6.38). Следовательно, множество квантованных нулей выглядит, как на рис. 6.39. Более подробное изложение каскадной реализации КИХ-систем можно найти в [63].

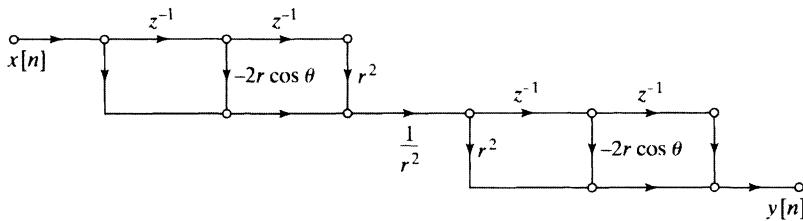


Рис. 6.45. Подсеть, реализующая множители четвертого порядка линейно-фазовой КИХ-системы с независимым от квантования параметром сохранением линейности фазы

6.9. Шумы округления в цифровых фильтрах

Разностные уравнения, реализованные в арифметике с конечной точностью, уже нелинейны. Хотя очень важно понимать, как эта нелинейность оказывается на функционировании дискретных систем, точный анализ эффектов, связанных с арифметикой квантования, обычно не требуется в практических приложениях, где заинтересованы в работе вполне конкретных систем. Действительно, как и в случае квантования коэффициентов, наиболее эффективный подход сводится к моделированию системы и исследованию ее работоспособности. Например, обычна цель анализа ошибок квантования состоит в выборе такой длины цифрового слова, чтобы цифровая система достаточно точно реализовывала желаемую линейную систему и в то же время требовала как можно меньше аппаратных и программных средств. Длина цифрового слова может, естественно, меняться лишь с шагом в один бит и, как мы уже видели в подразделе 4.9.2, его увеличение на один бит снижает размер ошибок квантования в два раза. Таким образом, выбор длины слова нечувствителен к погрешностям в анализе ошибок квантования; анализ, точность которого не превышает 30–40%, как правило, считается приемлемым. По этой причине многие важные эффекты квантования можно изучать на линейных моделях. В этом параграфе мы вводим такие модели и иллюстрируем работу с ними на нескольких примерах. Исключением является феномен предельных циклов при нулевом входе, который относится к строго нелинейным. В изучении нелинейных моделей для цифровых фильтров мы ограничимся коротким введением в предельные циклы в § 6.10.

6.9.1. Анализ прямой формы БИХ-структур

Чтобы познакомиться с основными идеями, рассмотрим структуру прямой формы ЛС-системы. Потоковый график прямой формы I системы второго порядка

показан на рис. 6.46, а). Общее разностное уравнение, подготовленное для реализации в прямой форме I, выглядит как

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad (6.100)$$

а характеристическую функцию удобно рассматривать в виде дроби:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (6.101)$$

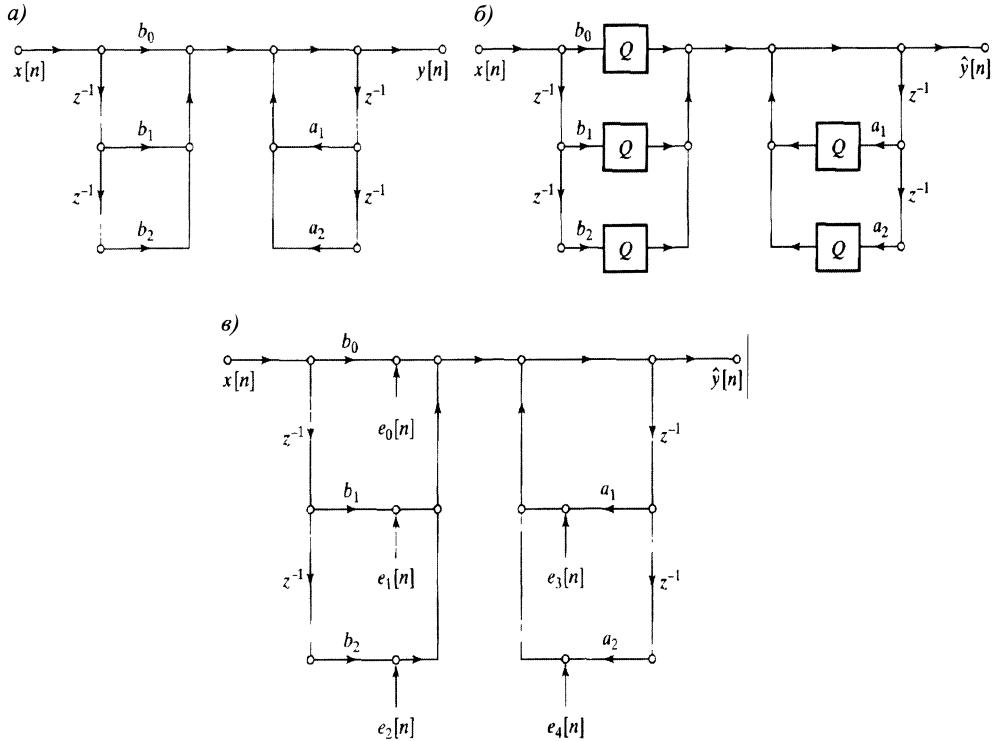


Рис. 6.46. Модели для прямой формы I: а) модель с бесконечной точностью; б) нелинейная квантованная модель; в) модель линейного шума.

Допустим, что отсчеты сигнала и коэффициенты системы изображаются $(B+1)$ -битовыми двоичными числами с фиксированной точкой. Тогда в реализации уравнения (6.100) с $(B+1)$ -битовым сумматором необходимо проквантовать $(2B+1)$ -значные произведения до $(B+1)$ -значных чисел, что можно сделать, либо округляя их, либо усекая. В структуре (рис. 6.46, а)), реализующей систему, это действие представляется вставкой в каждую ветвь умножения на константу квантователя, как показано на нелинейной модели из рис. 6.46, б). При этом

разностные уравнения становятся нелинейными:

$$\hat{y}[n] = \sum_{k=1}^N Q[a_k \hat{y}[n-k]] + \sum_{k=0}^M Q[b_k x[n-k]]. \quad (6.102)$$

Рисунок 6.46 *в*) представляет альтернативную модель, в которой квантователи заменены источниками шума, генерирующими ошибки квантования на выходе соответствующего квантователя. Например, округление или усечение произведения $bx[n]$ представляется источником шума вида

$$e[n] = Q[bx[n]] - bx[n]. \quad (6.103)$$

Если источник шума известен, то структура из рис. 6.46, *в*) в точности эквивалентна структуре рис. 6.46, *б*). Однако потоковый график рис. 6.46, *в*) используется в следующих предположениях об источнике шума квантования.

1. Каждый источник шума квантования $e[n]$ — стационарный в широком смысле белый шум.
2. Амплитуда каждого источника шума квантования равномерно распределена по одному интервалу квантования.
3. Любой источник шума квантования некоррелирует с входным сигналом соответствующего квантователя, остальными источниками шума квантования и входом всей системы.

Отметим, что эти предположения аналогичны допущениям, принятым при анализе АЦП (см. § 4.9). Строго говоря, наши предположения не могут быть верными в реальной ситуации, поскольку ошибки квантования прямо зависят от сигнала, поданного на вход квантователя, что четко видно на примере постоянного или синусоидального сигналов. Однако как эксперимент, так и теоретический анализ показывает (см. [6, 160 и 159]), что во многих ситуациях только что описанная модель позволяет точно предсказывать статистические средние, такие как математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция. Это утверждение относится, например, к сложным широкополосным входным сигналам, подобным речевому, в которых сигнал случайно колеблется в пределах всех уровней квантования и пересекает многие из них от отсчета к отсчету [49]. Простая модель линейного шума, представленная здесь, позволяет нам характеризовать шум, генерируемый в системе, в терминах средних (математическое ожидание, дисперсия) и определять, как эти средние изменяются под влиянием системы.

В § 6.7 мы показали, что при $(B+1)$ -битовом квантовании шум, возникающий при округлении, удовлетворяет неравенству:

$$-\frac{1}{2}2^{-B} < e[n] \leq \frac{1}{2}2^{-B}, \quad (6.104)$$

а при усечении в дополнительном коде —

$$-2^{-B} < e[n] \leq 0. \quad (6.105)$$

Таким образом, согласно нашему второму предположению, функция плотности вероятности случайных переменных, представляющих ошибку квантования, постоянна и выглядит, как на рис. 6.47, *а*), при округлении и, как на рис. 6.47, *б*), при усечении.

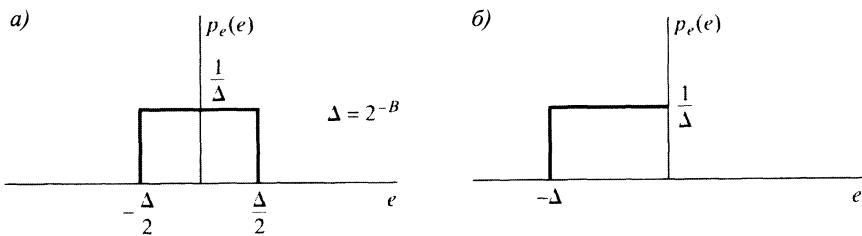


Рис. 6.47. Плотность распределения ошибок квантования: а) при округлении; б) при усечении

Среднее значение и дисперсия при округлении вычисляются по формулам:

$$m_e = 0, \quad (6.106)$$

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12}, \quad (6.107)$$

а при усечении в дополнительном коде —

$$m_e = -\frac{2^{-B}}{2}, \quad (6.108)$$

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12}. \quad (6.109)$$

Согласно третьему предположению, общая автокорреляционная функция источника шума квантования выглядит как

$$\varphi_{ee}[n] = \sigma_e^2 \delta[n] + m_e^2. \quad (6.110)$$

При округлении, когда здесь и далее мы будем считать, что $m_e = 0$, автокорреляционная функция равна $\varphi_{ee}[n] = \sigma_e^2 \delta[n]$, а спектр мощности — $\Phi_{ee}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2$ при $|\omega| \leq \pi$. В этом случае дисперсия совпадает со средней мощностью. При усечении математическое ожидание не равно нулю, так что к средней мощности, выведенной для случая округления, нужно добавить квадрат математического ожидания сигнала.

Опираясь на такую модель источника шума, мы можем теперь определять влияние ошибок квантования на выходе системы. Для этого полезно заметить, что все источники шума из рис. 6.46, б) можно поместить между подсистемой, реализующей нули, и подсистемой, реализующей полюса характеристической функции. Так что структура из рис. 6.48 будет эквивалента изображенной на рис. 6.46, б), если $e[n]$ из рис. 6.48 равен

$$e[n] = e_0[n] + e_1[n] + e_2[n] + e_3[n] + e_4[n]. \quad (6.111)$$

Поскольку мы предполагаем независимость источников шума друг от друга и от входного сигнала, дисперсия комбинации источников шума для прямой формы I второго порядка равна

$$\sigma_e^2 = \sigma_{e_0}^2 + \sigma_{e_1}^2 + \sigma_{e_2}^2 + \sigma_{e_3}^2 + \sigma_{e_4}^2 = 5 \cdot \frac{2^{-2B}}{12}, \quad (6.112)$$

а для общего случая прямой формы I —

$$\sigma_e^2 = (M+1+N) \frac{2^{-2B}}{12}. \quad (6.113)$$

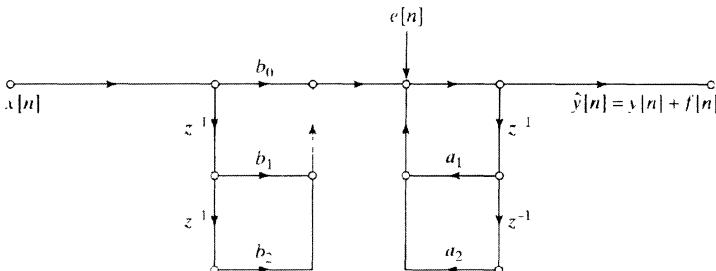


Рис. 6.48. Модель линейного шума для прямой формы I с комбинацией источников шума

Чтобы вычислить шум на выходе системы, заметим (рис. 6.48), что система обладает двумя входными сигналами: $x[n]$ и $e[n]$, и ввиду ее линейности выходной сигнал представляется как сумма: $\hat{y}[n] = y[n] + f[n]$, где $y[n]$ — отклик идеальной неквантованной системы на сигнал $x[n]$, а $f[n]$ — ее реакция на шум $e[n]$. Отклик $y[n]$ определяется из разностного уравнения (6.100), а поскольку $e[n]$ подается в систему после нулей, но перед полюсами, то реакция системы на него удовлетворяет соотношению:

$$f[n] = \sum_{k=1}^N a_k f[n-k] + e[n], \quad (6.114)$$

т. е. свойства реакции системы на шум в ее реализации в прямой форме I зависят только от полюсов характеристической функции.

Чтобы вычислить среднее значение и дисперсию отклика системы на источник шума, можно использовать некоторые результаты § 2.11. Рассмотрим линейную систему с характеристической функцией $H_{ef}(z)$, белым шумом $e[n]$ и соответствующей реакцией на него $f[n]$. Тогда по формулам (2.192) и (2.193) среднее значение реакции равно

$$m_f = m_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{ef}[n] = m_e H_{ef}(e^{j0}). \quad (6.115)$$

Так как при округлении $m_e = 0$, среднее значение реакции будет нулевым, так что о нем не нужно беспокоиться. Поскольку $e[n]$ у нас последовательность белого шума с нулевым средним значением, то из формул (6.110) и (2.198) вытекает, что спектральная плотность мощности реакции на шум имеет вид:

$$P_{ff}(\omega) = \Phi_{ff}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 |H_{ef}(e^{j\omega})|^2. \quad (6.116)$$

Опираясь на (2.200), можно показать, что дисперсия шума на выходе равна

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{ff}(\omega) d\omega = \sigma_e^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_{ef}(e^{j\omega})|^2 d\omega. \quad (6.117)$$

Учитывая теорему Парсеваля (2.170), σ_f^2 можно еще представить в виде

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_{ef}[n]|^2. \quad (6.118)$$

Когда характеристическая функция, соответствующая $h_{ef}[n]$, рациональна, как будет предполагаться всюду в этой главе, для вычисления бесконечной суммы квадратов (6.118) можно использовать соотношение (A.81) из приложения А.

Формулы (6.115)–(6.118) будут часто использоваться при анализе шума квантования в линейных системах. Например, для реализации системы в прямой форме I из рис. 6.48 $H_{ef}(z) = 1/A(z)$, т. е. характеристическая функция подсистемы, на вход которой подается шум, состоит только из знаменателя функции $H(z)$ из (6.101) и, соответственно, имеет только ее полюса. Поэтому в общей ситуации суммарная дисперсия на выходе при округлении или усечении равна

$$\sigma_f^2 = (M+1+N) \frac{2^{-2B}}{12} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\omega}{|A(e^{j\omega})|^2} = (M+1+N) \frac{2^{-2B}}{12} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_{ef}[n]|^2, \quad (6.119)$$

где $h_{ef}[n]$ — импульсная характеристика, соответствующая $H_{ef}(z) = 1/A(z)$. Применение полученных результатов иллюстрируется следующим примером.

Пример 6.9. Шум округления в системе первого порядка

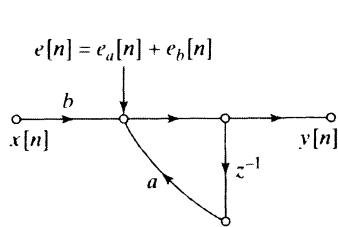
Допустим, нам нужно реализовать устойчивую систему с характеристической функцией

$$H(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}}, \quad |a| < 1. \quad (6.120)$$

На рис. 6.49 показан потоковый граф модели линейного шума, возникающего при реализации, в которой произведения квантуются перед сложением. Каждый источник шума фильтруется частью системой, переводящей $e[n]$ в выходной сигнал. Ее импульсная характеристика равна $h_{ef}[n] = a^n u[n]$. Спектр мощности выходного шума получаем с помощью формулы (6.116):

$$P_{ff}(\omega) = 2 \frac{2^{-2B}}{12} \left(\frac{1}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} \right). \quad (6.121)$$

Рис. 6.49. Модель линейного шума первого порядка



Суммарная дисперсия шума на выходе имеет вид:

$$\sigma_f^2 = 2 \frac{2^{-2B}}{12} \sum_{n=0}^{\infty} |a|^{2n} = 2 \frac{2^{-2B}}{12} \left(\frac{1}{1 - |a|^2} \right). \quad (6.122)$$

Из (6.122) видно, что дисперсия шума на выходе возрастает при приближении полюса в точке $z = a$ к единичной окружности. Таким образом, для обеспечения заданного уровня шума при значениях $|a|$, близких к единице, необходимо использовать большую длину слов. Этот же момент хорошо виден и в следующем примере. \square

Пример 6.10. Шум округления в системе второго порядка

Рассмотрим прямую форму реализации устойчивой системы второго порядка с характеристической функцией

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{(1 - re^{j\theta} z^{-1})(1 - re^{-j\theta} z^{-1})}. \quad (6.123)$$

Модель линейного шума в этом случае показана на рис. 6.46, б) и 6.48, где $a_1 = 2r \cos \theta$ и $a_2 = -r^2$. Здесь суммарная мощность шума на выходе может быть подсчитана как

$$\sigma_f^2 = 5 \frac{2^{-2B}}{12} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\omega}{|(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})(1 - re^{-j\theta}e^{-j\omega})|^2}. \quad (6.124)$$

Учитывая формулу (A.81) из приложения А, получаем

$$\sigma_f^2 = 5 \frac{2^{-2B}}{12} \left(\frac{1 + r^2}{1 - r^2} \right) \frac{1}{r^4 + 1 - 2r^2 \cos 2\theta}. \quad (6.125)$$

Как и в примере 6.9, мы видим, что при приближении пары комплексно сопряженных полюсов к единичной окружности ($r \rightarrow 1$) суммарная дисперсия выходного шума возрастает и нужно увеличивать длину слов, чтобы уровень шума не выходил за заданные пределы. \square

Техника анализа, развитая к этому моменту для структур прямой формы I, может быть приложена и к структурам прямой формы II. Нелинейные разностные уравнения для структур прямой формы II имеют вид:

$$\hat{w}[n] = \sum_{k=1}^N Q[a_k \hat{w}[n-k]] + x[n], \quad (6.126)$$

$$\hat{y}[n] = \sum_{k=0}^M Q[b_k \hat{w}[n-k]]. \quad (6.127)$$

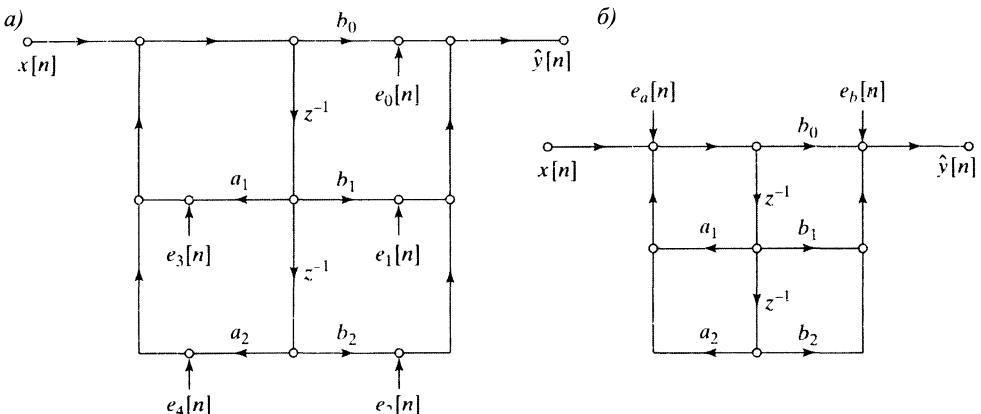


Рис. 6.50. Модели линейного шума для прямой формы II: а) квантование отдельных произведений; б) комбинированные источники шума

Модель линейного шума для прямой формы II системы второго порядка показана на рис. 6.50, а). Источник шума в ней вводится после каждого умножения, подчеркивая тем самым, что квантование до $(B + 1)$ бита осуществляется перед сложением. Эквивалентная линейная модель представлена на рис. 6.50, б), где источники шума, возникающие при реализации полюсов, скомпанованы в единый

источник шума $e_a[n] = e_3[n] + e_4[n]$ на входе. Аналогично, источники шума, обвязанные своим существованием реализацией нулей, комбинируются в единый источник шума $e_b[n] = e_0[n] + e_1[n] + e_2[n]$, который добавляется прямо к выходному сигналу.

Из этой модели следует, что при M нулях и N полюсах в случае округления ($m_e = 0$) спектр мощности шума на выходе равен

$$P_{ff}(\omega) = N \frac{2^{-2B}}{12} |H(e^{j\omega})|^2 + (M+1) \frac{2^{-2B}}{12}, \quad (6.128)$$

а дисперсия этого шума —

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= N \frac{2^{-2B}}{12} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega + (M+1) \frac{2^{-2B}}{12} = \\ &= N \frac{2^{-2B}}{12} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2 + (M+1) \frac{2^{-2B}}{12}. \end{aligned} \quad (6.129)$$

Таким образом, белый шум, производимый при реализации полюсов, фильтруется внутри системы, в то время как белый шум, возникающий вследствие реализации нулей, добавляется непосредственно к выходному сигналу. При выводе формулы (6.129) мы предполагали, что N источников шума на выходе независимы друг от друга, так что дисперсия их суммы в N раз больше дисперсии отдельного источника шума квантования. Аналогичные предположения были сделаны в отношении $(M+1)$ источника шума на выходе. Полученные результаты легко обобщаются на случай усечения в дополнительном коде. Напомним (см. формулы (6.106)–(6.107) и (6.108)–(6.109)), что дисперсия источника шума при усечении совпадает с дисперсией при округлении, а среднее значение шума при усечении отлично от нуля. Следовательно, формулы (6.119) и (6.129) дисперсии суммарного шума на выходе остаются справедливыми и при усечении. Ненулевое среднее значение шума, возникающего при усечении, можно вычислить с помощью формулы (6.115).

Сравнение формул (6.119) и (6.129) показывает, что структуры прямых форм I и II по-разному реагируют на квантование произведений при реализации соответствующих разностных уравнений. В общей ситуации, остальные эквивалентные формы структур, такие как каскадная параллельная и транспонированная, будут обладать суммарным шумом на выходе с дисперсией, отличной от дисперсии шума в любой из структур прямых форм. Однако даже при том, что формулы (6.119) и (6.129) разные, мы не можем утверждать, какая из систем будет обладать наименьшей дисперсией выходного шума, если не знаем конкретные значения коэффициентов системы. Иначе говоря, невозможно утверждать, что та или иная форма структуры всегда будет производить наименьший шум на выходе.

Улучшить ситуацию с шумами в системах, реализованных в прямой форме (и, следовательно, в каскадной и параллельной формах), можно при использовании $(2B+1)$ -битового сумматора для сложения произведений, необходимого в обеих прямых формах. Для реализации в прямой форме I, например, мы могли бы остановиться на разностных уравнениях вида

$$\hat{y}[n] = Q \left[\sum_{k=1}^N a_k \hat{y}[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \right], \quad (6.130)$$

в которых суммы произведений вычисляются с $(2B+1)$ - или $(2B+2)$ -битовой точностью, а результат квантуется до $(B+1)$ -го бита для выхода и сохраняется в памяти на линиях задержки. В случае прямой формы I это означает, что шум квантования фильтруется полюсами системы, но множитель $(M+1+N)$ в выражении (6.119) заменяется единицей. Аналогично в прямой форме II реализации разностные уравнения (6.126)–(6.127) можно заменить на

$$\hat{w}[n] = Q \left[\sum_{k=1}^N a_k \hat{w}[n-k] + x[n] \right], \quad (6.131)$$

$$\hat{y}[n] = Q \left[\sum_{k=1}^M b_k \hat{w}[n-k] \right], \quad (6.132)$$

что дает единственный источник шума как на входе, так и на выходе. Так что множители N и $(M+1)$ в (6.129) становятся равными единице. Таким образом, использование сумматора с удвоенной длинной битовых слов, встроенных в большинство цифровых процессоров, позволяет существенно снизить уровень шума квантования в прямых формах реализации систем.

6.9.2. Масштабирование в реализациях БИХ-систем с фиксированной точкой

Напомним, что переполнения — еще одна неприятность, встречающаяся в реализации БИХ-систем в арифметике с фиксированной точкой. Если следовать соглашению о том, что каждое число с фиксированной точкой представляет дробь (возможно, умноженную на известный масштабный множитель), то для предупреждения переполнений модуль всех узловых переменных сети не должен превосходить единицу. Пусть $w_k[n]$ — значение переменной в k -м узле и $h_k[n]$ — импульсная характеристика участка системы, преобразующего сигнал $x[n]$ в переменную узла $w_k[n]$. Тогда

$$|w_k[n]| = \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m] h_k[m] \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x[n-m]| |h_k[m]|. \quad (6.133)$$

Заменяя в правой части этого равенства $|x[n-m]|$ на максимальное значение x_{\max} , получаем оценку:

$$|w_k[n]| \leq x_{\max} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k[m]|. \quad (6.134)$$

Следовательно, достаточным условием для неравенства $|w_k[n]| < 1$ является требование:

$$x_{\max} < \frac{1}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k[m]|}. \quad (6.135)$$

Если x_{\max} не обладает этим свойством, то можно умножить $x[n]$ на масштабирующий множитель s на входе системы так, чтобы произведение sx_{\max} удовлетворяло неравенству (6.135) для всех узлов сети, т. е.

$$sx_{\max} < \frac{1}{\max_k \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k[m]| \right]}. \quad (6.136)$$

Такое масштабирование входного сигнала исключает переполнения в любом узле сети. Неравенство (6.135) служит также и необходимым условием, поскольку всегда найдется сигнал, при котором неравенство (6.134) превращается в равенство. (См. формулу (2.61) из обсуждения устойчивости в § 2.5 на с. 50.) Однако неравенство (6.135) ведет к большой перестраховке в масштабировании большинства сигналов.

Другой подход к масштабированию основывается на предположении о том, что входной сигнал является узкополосным и выглядит как $x[n] = x_{\max} \cos \omega_0 n$. В этом случае узловая переменная равна

$$w_k[n] = |H_k(e^{j\omega_0})| x_{\max} \cos(\omega_0 n + \angle H_k(e^{j\omega_0})). \quad (6.137)$$

Значит, для предупреждения переполнений при любом синусоидальном входном сигнале достаточно потребовать, чтобы

$$\max_{k, |\omega| \leq \pi} |H_k(e^{j\omega})| x_{\max} < 1, \quad (6.138)$$

что эквивалентно неравенству:

$$sx_{\max} < \frac{1}{\max_{k, |\omega| \leq \pi} |H_k(e^{j\omega})|}. \quad (6.139)$$

Еще один способ масштабирования состоит в подборе такого множителя, что суммарная энергия каждой узловой переменной будет меньше или равна суммарной энергии входной последовательности. Необходимый множитель можно получить, опираясь на неравенство Шварца и теорему Парсеваля. Суммарная энергия последовательности $w_k[n]$ оценивается как

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |w_k[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_k(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})|^2 d\omega \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_k(e^{j\omega})|^2 d\omega. \quad (6.140)$$

Значит, чтобы быть уверенным в неравенстве $\sum |w_k[n]|^2 \leq \sum |x[n]|^2$, нам следует умножить последовательность $x[n]$ на такой множитель s , что

$$s^2 \leq \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_k(e^{j\omega})|^2 d\omega} = \frac{1}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_k[n]|^2}. \quad (6.141)$$

Можно показать, что

$$\sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_k[n]|^2} \leq \max_{k, \omega} |H_k(e^{j\omega})| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_k[n]|. \quad (6.142)$$

Следовательно, формулы (6.136), (6.139) и (6.141) дают три способа получения

масштабирующего множителя входного сигнала цифрового фильтра, выстроенных в порядке уменьшения перестраховки. Правая часть неравенства (6.141) проще остальных вычисляется аналитически, поскольку сумма квадратов легко находится с помощью метода разложения в сумму простейших дробей, описанного в приложении А. С другой стороны, (6.136) вычислить аналитически очень трудно, за исключением случая наиболее простых систем. Конечно, для конкретных систем с известными коэффициентами масштабирующий множитель можно найти, определяя импульсную характеристику или КЧХ численными методами.

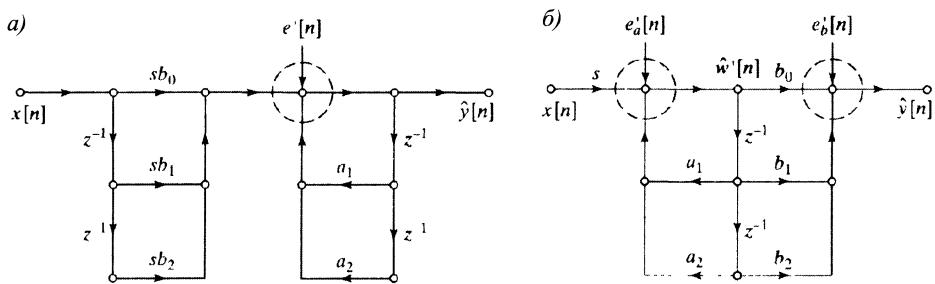


Рис. 6.51. Масштабирование систем в прямых формах: а) прямая форма I; б) прямая форма II

Если масштаб входного сигнала нужно уменьшить ($s < 1$), отношение С/Ш на выходе системы тоже уменьшится. На рис. 6.51 показаны прямые формы I и II систем второго порядка с масштабирующими множителями на входе. При определении величины множителей для этих систем нет необходимости исследовать каждый узел сети. В некоторых из них суммирования не происходит, и поэтому они гарантированы от переполнений. Другие представляют частичные суммы. Если мы используем ненасыщенную арифметику в дополнительном коде, то в таких узлах может происходить переполнение, если в определенных ключевых узлах оно не допускается. Например, на рис. 6.51, а) мы можем обратить внимание на узел, обведенный пунктирным кружочком. Масштабирующий множитель на рисунке показан в комбинации с коэффициентами b_k , так что источник шума остается таким, как на рис. 6.48, т. е. у него пятикратная мощность отдельного источника шума квантования¹. Так как источник шума фильтруется только полюсами, мощность шума на выходе в рис. 6.51, а) остается той же, что и на рис. 6.48. Однако характеристическая функция всей системы из рис. 6.51, а) равна $sH(z)$, а не $H(z)$, так что неквантованная компонента выходного сигнала $\hat{y}[n] = sy[n]$, а не $y[n]$. Поскольку шум подается после масштабирования, отношение мощности сигнала к мощности шума умножается на s^2 и на отношение С/Ш, вычисленное для системы из рис. 6.48. В связи с тем что $s < 1$, если масштабирование вводится для предупреждения переполнений, отношение С/Ш при этом уменьшается.

¹Это позволяет избежать отдельного масштабирования умножения и источника шума квантования. Однако масштабирование (и квантование) коэффициентов b_k может изменить КЧХ системы. Если отдельный масштабирующий множитель входного сигнала предшествует реализации нулей на рис. 6.51, а), то дополнительный источник шума квантования будет вносить свой вклад в шум на выходе после прохождения сигнала через всю систему.

То же самое имеет место для системы прямой формы II из рис. 6.51, б). В этом случае нам нужно определить масштабирующий множитель, устраниющий переполнения в обоих обведенных пунктирными кружками узлах. При этом общий коэффициент усиления системы равен коэффициенту системы из рис. 6.50, б), умноженному на s . Но в этом случае может оказаться необходимым реализовать масштабирующий множитель явно во избежание переполнений в левом узле. С другой стороны, масштабирующий множитель вносит дополнительную шумовую компоненту в $e_a[n]$, так что мощность шума на входе равна (в общей ситуации) $(N + 1)2^{-2B}/12$. В противном случае источники шума фильтруются системой точно тем же способом, как на рис. 6.50 б) и 6.51 б). Следовательно, мощность сигнала умножается на s^2 , и мощность шума на выходе вновь определяется формулой (6.129), где N нужно только заменить на $(N + 1)$. Отношение С/Ш уменьшается и при таком масштабировании.

Пример 6.11. Взаимодействие шумов масштабирования и округления

Для иллюстрации взаимодействия шумов, возникающих при масштабировании и округлении, рассмотрим систему примера 6.9 с характеристической функцией (6.120). При комбинированном масштабирующем множителе с коэффициентом b получается потоковый граф, изображенный на рис. 6.52. Допустим, что на вход системы подается белый шум с равномерно распределенной на отрезке $[-1; 1]$ амплитудой. Тогда суммарная дисперсия сигнала равна $\sigma_x^2 = 1/3$. Чтобы с уверенностью избежать переполнений при вычислении $\hat{y}[n]$, для определения масштабирующего множителя воспользуемся формулой (6.136):

$$s = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} |b||a|^n} = \frac{1 - |a|}{|b|}. \quad (6.143)$$

Дисперсия шума на выходе найдена в примере 6.9 и равна

$$\sigma_{f'}^2 = 2 \frac{2^{-2B}}{12} \frac{1}{1 - a^2} = \sigma_f^2, \quad (6.144)$$

а дисперсия сигнала $y'[n]$ составляет

$$\sigma_{y'}^2 = \left(\frac{1}{3}\right) \frac{s^2 b^2}{1 - a^2} = s^2 \sigma_y^2. \quad (6.145)$$

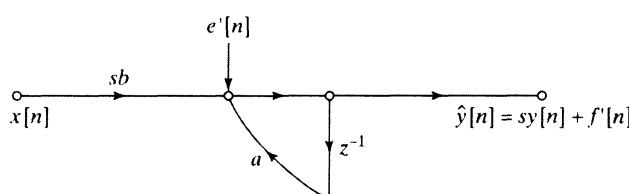


Рис. 6.52. Масштабированная система первого порядка

Таким образом, отношение С/Ш имеет вид:

$$\frac{\sigma_{y'}^2}{\sigma_{f'}^2} = s^2 \frac{\sigma_y^2}{\sigma_f^2} = \left(\frac{1 - |a|}{|b|}\right) \frac{\sigma_y^2}{\sigma_f^2}. \quad (6.146)$$



При приближении полюса системы к единичной окружности масштабирующий коэффициент, выбираемый для устранения переполнений, становится малым. Поэтому уменьшается и отношение С/Ш. На этом примере мы вновь убеждаемся, что переполнения и шум квантования мешают нормальной работе системы. \square

6.9.3. Пример анализа каскада БИХ-структур

Полученные результаты можно применить к анализу параллельных и каскадных структур, составленных из прямых форм реализации подсистем второго порядка. Взаимодействие масштабирования и квантования особенно интересно в каскадной форме, которое мы исследуем на конкретном примере.

Эллиптический фильтр нижних частот проектировался в свете следующих спецификаций:

$$0,99 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1,01, \quad |\omega| \leq 0,5\pi, \quad (6.147)$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0,01, \quad 0,56\pi \leq |\omega| \leq \pi. \quad (6.148)$$

При этом была найдена следующая характеристическая функция:

$$H(z) = 0,079459 \prod_{k=1}^3 \left(\frac{1 + b_{1k}z^{-1} + z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}} \right) = 0,079459 \prod_{k=1}^3 H_k(z), \quad (6.149)$$

значения коэффициентов которой сведены в табл. 6.4. Заметим, что в этом примере все нули характеристической функции попадают на единичную окружность, что, однако, не является общим случаем.

Таблица 6.4. Коэффициенты характеристической функции эллиптического фильтра нижних частот в каскадной форме

<i>k</i>	<i>a_{1k}</i>	<i>a_{2k}</i>	<i>b_{1k}</i>
1	0,478882	-0,172150	1,719454
2	0,137787	-0,610077	0,781109
3	-0,054779	-0,902374	0,411452

На рис. 6.53, а) показан потоковый график возможной реализации этой системы как каскада подсистем в транспонированной прямой форме II. Коэффициент усиления 0,079459 выбран из тех соображений, чтобы, с одной стороны, коэффициент усиления всей системы в полосе пропускания был близок к единице, а с другой — гарантировал бы отсутствие переполнений на выходе системы. На рисунке коэффициент помещен на вход системы. При таком подходе мгновенно уменьшается амплитуда сигнала, вследствие чего для обеспечения единичного коэффициента на выходе все подсистемы должны обладать высоким коэффициентом усиления. Поскольку источники шума квантования стоят после коэффициента 0,079459, но усиливаются остальной частью системы, это не очень удачная конфигурация. В идеале, общий коэффициент усиления, будучи меньше единицы, следует поместить в самый конец системы, чтобы сигнал и шум ослаблялись бы одинаково. Однако при этом открывается возможность для переполнений внутри каскада. Поэтому наилучшим выходом является рассредоточение коэффициента усиления по трем участкам системы, с тем чтобы переполнения пресекались каждой подсистемой каскада. Этому рассредоточению соответствует следующее

разложение характеристической функции:

$$H(z) = s_1 H_1(z) s_2 H_2(z) s_3 H_3(z), \quad (6.150)$$

где $s_1 s_2 s_3 = 0,079459$. Масштабирующие множители можно комбинировать с коэффициентами числителя отдельных характеристических функций и получить $H'_k = s_k H_k(z)$, так что

$$H(z) = \prod_{k=1}^3 \left(\frac{b'_{0k} + b'_{1k} z^{-1} + b'_{2k} z^{-2}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}} \right) = \prod_{k=1}^3 H'_k(z), \quad (6.151)$$

где $b'_{0k} = b'_{2k} = s_k$, а $b'_{1k} = s_k b_{1k}$. Получившаяся масштабированная система изображена на рис. 6.53, б). Источники шума квантования там представляют квантование произведений перед их сложением.

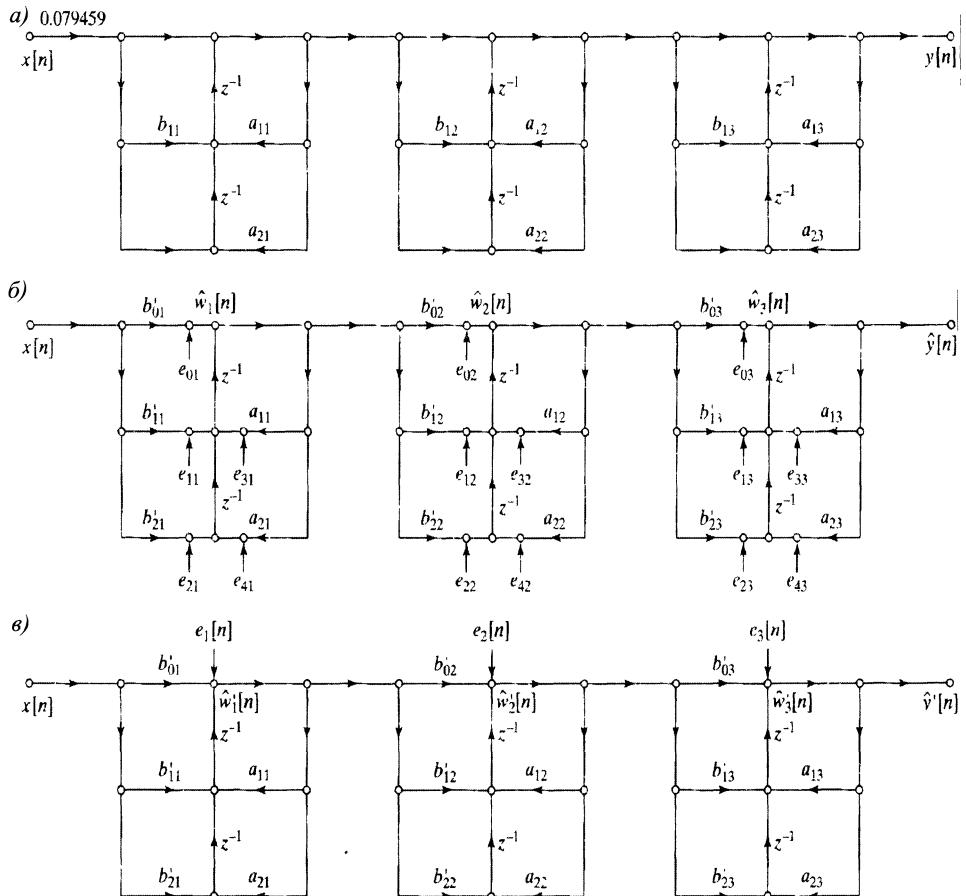


Рис. 6.53. Модели каскадной системы шестого порядка с подсистемами в транспонированной прямой форме II

Рисунок 6.53 в) показывает эквивалентную модель шума, в которой все источники шумов каждой из подсистем фильтруются только полюсами системы

(и подсистем каскада). Там используется тот факт, что задержанный белый шум остается белым шумом и независим от остальных источников шумов, так что пять отдельных источников шума каждой подсистемы можно объединить в один с пятикратной дисперсией отдельного источника². В предположении о независимости шумов дисперсия шума на выходе равна сумме дисперсий трех источников шума из рис. 6.53, в). Следовательно, спектр мощности шума на выходе, возникающий при округлениях, имеет вид:

$$P_{f'f'}(\omega) = 5 \frac{2^{-2B}}{12} \left[\frac{s_2^2 |H_2(e^{j\omega})|^2 s_3^2 |H_3(e^{j\omega})|^2}{|A_1(e^{j\omega})|^2} + \frac{s_3^2 |H_3(e^{j\omega})|^2}{|A_2(e^{j\omega})|^2} + \frac{1}{|A_3(e^{j\omega})|^2} \right], \quad (6.152)$$

а его суммарная дисперсия —

$$\sigma_{f'}^2 = 5 \frac{2^{-2B}}{12} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{s_2^2 |H_2(e^{j\omega})|^2 s_3^2 |H_3(e^{j\omega})|^2}{|A_1(e^{j\omega})|^2} d\omega + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{s_3^2 |H_3(e^{j\omega})|^2}{|A_2(e^{j\omega})|^2} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|A_3(e^{j\omega})|^2} d\omega \right]. \quad (6.153)$$

Если доступен сумматор с удвоенным числом разрядов, то квантовать необходимо лишь суммы, подающиеся на вход задерживающих элементов из рис. 6.53, б). В этом случае множитель 5 можно заменить на 3. Более того, если и задерживающие элементы реализуются регистрами с удвоенной длиной слов, то квантовать нужно лишь переменные $\hat{w}_k[n]$, что сводит число источников шумов до одного на подсистему. Следовательно, коэффициент 5 из формул (6.152) и (6.153) становится равным 1.

Масштабирующие множители s_k выбираются, чтобы избежать переполнений во внутренних точках каскада. Учитывая соотношение (6.139), получаем, что эти множители должны удовлетворять неравенствам:

$$s_1 \max_{|\omega| \leqslant \pi} |H_1(e^{j\omega})| < 1, \quad (6.154)$$

$$s_1 s_2 \max_{|\omega| \leqslant \pi} |H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{j\omega})| < 1, \quad (6.155)$$

$$s_1 s_2 s_3 = 0,079459. \quad (6.156)$$

Последнее условие гарантирует отсутствие переполнений на выходе системы при синусоидальном входном сигнале с единичной амплитудой, поскольку максимальный коэффициент усиления всей системы — единица. При коэффициентах из табл. 6.4 эти множители равны: $s_1 = 0,186447$, $s_2 = 0,529236$ и $s_3 = 0,805267$.

Из формул (6.152) и (6.153) видно, что форма спектра мощности шума на выходе и суммарная дисперсия этого шума зависят от того, как группируются нули и полюса при выделении подсистем второй степени, и от порядка следования подсистем в каскаде. Легко подсчитать, что при N подсистемах существует $N!$ способов разбиения на пары полюсов и нулей и столько же возможностей упорядочивания участков второго порядка, так что суммарное количество вариантов

²Эти рассуждения можно обобщить до доказательства того, что транспонированная прямая форма II обладает тем же поведением шумов, что и прямая форма I.

реализаций составляет $(N!)^2$. Кроме того, при реализации подсистем второго порядка мы вольны выбирать между прямыми формами I и II (или транспонированным к ним). В нашем примере получается всего 144 различных теоретически эквивалентных каскадов, среди которых предстоит отыскать конфигурацию с наименьшей дисперсией шума на выходе. При пяти каскадных участках это число возрастает до 57 600. Ясно, что при таких объемах полный анализ даже систем малого порядка представляет собой утомительнейшую задачу, поскольку выражение типа (6.153) необходимо вычислить для каждого разбиения на пары и упорядочения подсистем. Хуанх в 1974 г. [67] для уменьшения количества вычислений при полном переборе использовал динамическое программирование, а Лиу и Пелед в 1975 г. [89] — эвристический подход. Программа Денера [37], предназначенная для проектирования и анализа каскадных форм БИХ-фильтров, предусматривает оптимизацию как разбиения на пары, так и расстановки подсистем.

Несмотря на трудность обнаружения оптимального разбиения на группы и порядка подсистем, Джексон [68, 69, 70] обосновал, что соблюдение следующих простых правил почти всегда дает хороший результат:

- 1) полюс, наиболее близко расположенный к единичной окружности, следует группировать с ближайшим к нему нулем;
- 2) правило 1) необходимо повторять до тех пор, пока не будут сгруппированы все нули и полюса;
- 3) получившиеся подсистемы второго порядка следует упорядочить по убыванию или возрастанию расстояний от их полюсов до единичной окружности.

Правила группировки основаны на замечании, что подсистемы с высоким максимальным коэффициентом усиления нежелательны ввиду возможности переполнений и усиления шума квантования, а спаривание полюса, близкого к единичной окружности с соседствующим нулем, ведет к уменьшению максимального коэффициента усиления этого участка.

Одна из мотиваций правила 3) вытекает из (6.152). Мы видим, что КЧХ некоторых подсистем в формуле спектра мощности шума на выходе появляется более одного раза. Если мы не хотим, чтобы спектр мощности имел высокий всплеск в окрестности полюса, близкого к единичной окружности, нужно, чтобы компонента КЧХ, относящаяся к этому полюсу в формуле (6.152), появлялась не слишком часто. Следовательно, стоит передвинуть такой полюс «с высоким Q » в начало каскада. С другой стороны, КЧХ участка от входа до конкретного узла сети включает в себя произведение КЧХ подсистем, предшествующих этому узлу. Таким образом, во избежание чрезмерного уменьшения уровня сигнала на ранних участках системы нам следует размещать полюсы, расположенные рядом с единичной окружностью, ближе к концу каскада. Отсюда видно, что при решении задачи упорядочивания подсистем вступает в игру большое разнообразие соображений, включающее суммарную дисперсию шума на выходе и форму его спектра. Джексон [68, 69] использовал L_p -нормы для количественного анализа задачи группировки и упорядочивания подсистем и сформулировал довольно много уточнений к «практическому методу» достижения хороших результатов, служащему альтернативой полному перебору.

Рис. 6.54. Схема нулей и полюсов системы шестого порядка из рис. 6.53 с отмеченными группами полюсов и нулей

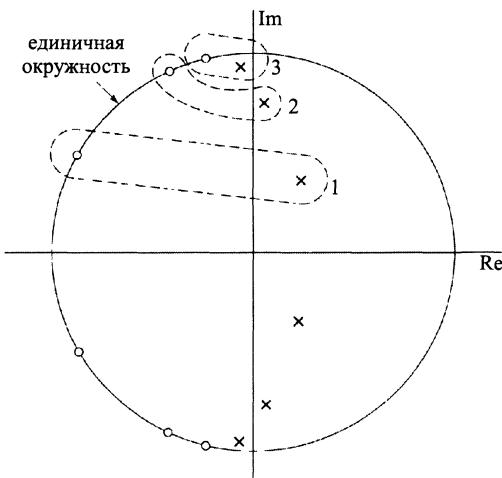


Схема нулей и полюсов системы из нашего примера с отмеченными парами приведена на рис. 6.54. В этом случае подсистемы следуют в порядке увеличения максимумов КЧХ. На рис. 6.55 показано комбинирование КЧХ отдельных участков для формирования КЧХ всей системы. Графики логарифмов АЧХ отдельных подсистем до масштабирования представлены на рис. 6.55, а)–б), а на рис. 6.55, г)–е) изображено построение аналогичного графика для всей системы. Заметим, что на этих рисунках хорошо видно, как масштабирующие формулы (6.154)–(6.156) обеспечивают тот факт, что коэффициент пропускания каждой системы был бы меньше единицы. Сплошная линия на рис. 6.56 соответствует спектру мощности шума на выходе каскада этих систем, подключенных в порядке 1-2-3 (от меньшего максимума к большему). Все графики построены в предположении, что $B + 1 = 16$. Обратите внимание, что спектр достигает максимума в окрестности ближайшего к единичной окружности полюса. График спектра мощности шума на выходе каскада подсистем, подключенных в обратном порядке (т. е. 3-2-1), изображен на рис. 6.56 пунктирной кривой. Поскольку максимум коэффициента усиления первой подсистемы достигается в нижних частотах, спектр шума становится заметно большим на этом участке и слегка понижается в окрестности максимума. Полюс с высоким Q все еще фильтрует источники шума первого участка каскада, так что он доминирует в спектре. Оказывается, что суммарная мощность шума для рассматриваемых порядков подключения практически одинакова.

Разобранный пример демонстрирует сложность проблем, возникающих при реализации каскада БИХ-систем в арифметике с фиксированной точкой. Параллельная форма несколько более проста, поскольку там не возникает задачи перебора вариантов группировки и упорядочивания. Однако, чтобы избежать переполнений в каждой подсистеме и при суммировании их выходных сигналов для вычисления отклика всей системы, требуется масштабирование. Техника масштабирования, развитая для каскада, применима и к параллельной форме. Джексон [70] подробно обсуждает анализ параллельных форм и приходит к выводу, что суммарная мощность шума на выходе таких систем обычно сопоставима

с аналогичной характеристикой наилучшего варианта группировки и порядка в каскадной форме. Несмотря на это, каскадная форма является более общей, ввиду того что активно используемые БИХ-фильтры, нули характеристической функции которых расположены на единичной окружности, реализованные в каскадной форме, требуют меньшего количества умножений на константу и обеспечивают больший контроль над положением нулей.

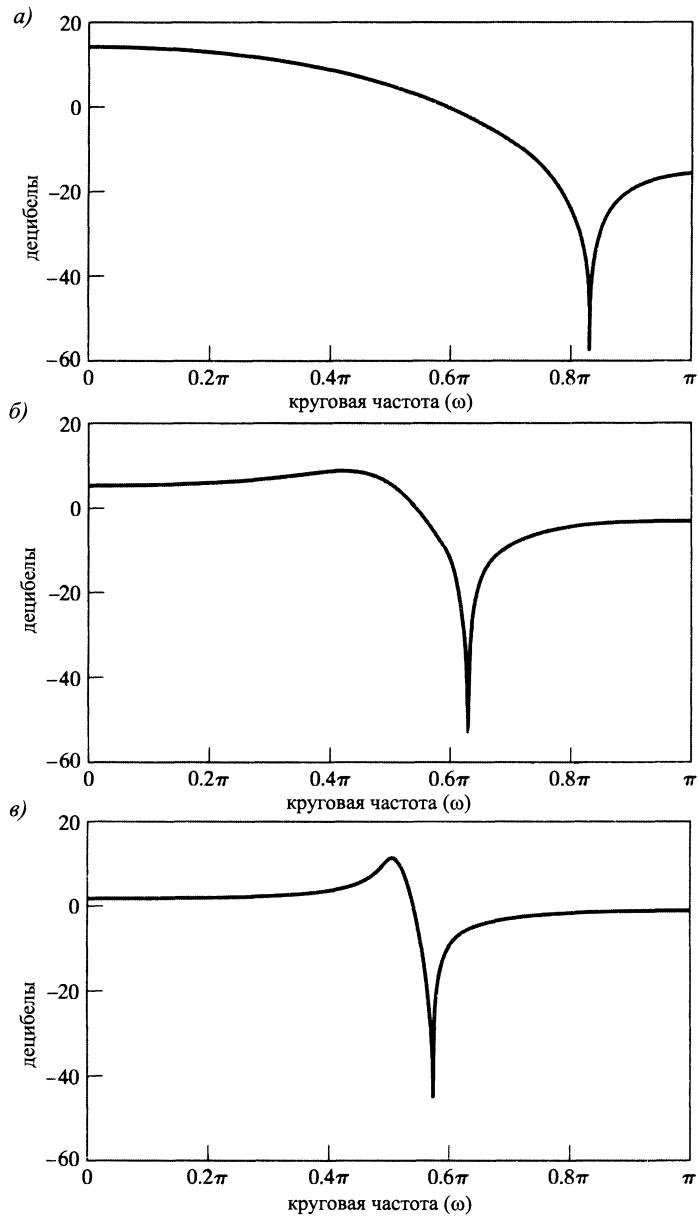


Рис. 6.55. Графики логарифмов АЧХ подсистем из примера:
 а) $20 \lg |H_1(e^{j\omega})|$;
 б) $20 \lg |H_2(e^{j\omega})|$;
 в) $20 \lg |H_3(e^{j\omega})|$

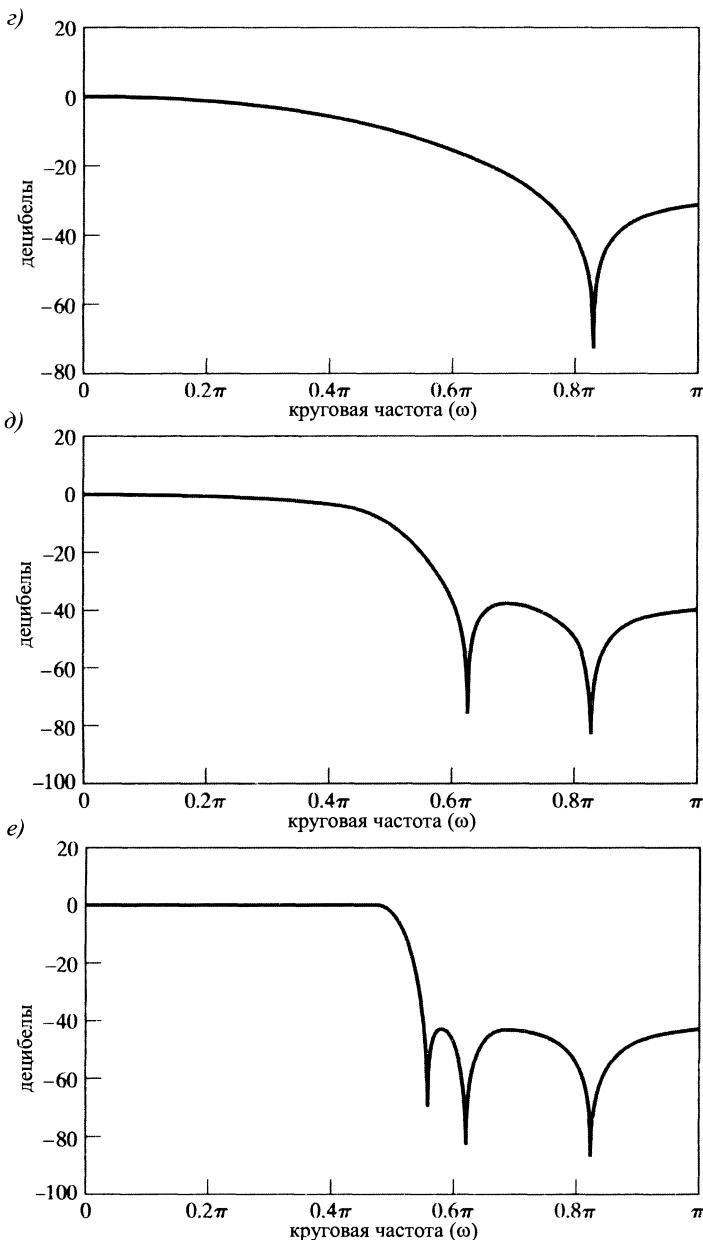


Рис. 6.55 (окончание). г) $20 \lg |H'_1(e^{j\omega})|$; д) $20 \lg |H'_1(e^{j\omega})H'_2(e^{j\omega})|$;
е) $20 \lg |H'_1(e^{j\omega})H'_2(e^{j\omega})H'_3(e^{j\omega})| = 20 \lg |H'(e^{j\omega})|$

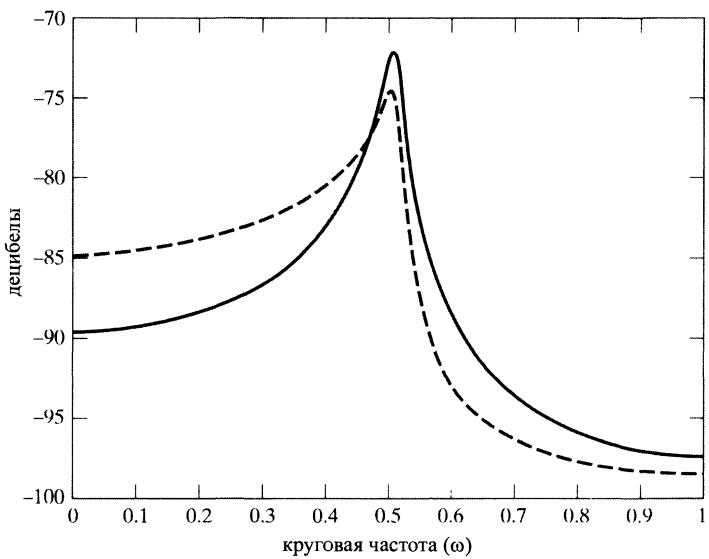


Рис. 6.56. Спектр мощности шума на выходе каскада подсистем 1-2-3 (сплошная линия) и 3-2-1 (пунктирная)

6.9.4. Анализ прямой формы КИХ-систем

Так как прямые формы БИХ-систем включают прямые формы КИХ-систем как частный случай (получающийся, когда все коэффициенты a_k из рис. 6.14 и 6.15 равны нулю), все результаты и приемы из подразделов 6.9.1 и 6.9.2 применимы к КИХ-системам. Единственное, что нужно сделать, это отбросить все ссылки на полюса характеристической функции и петли обратной связи в потоковых графах.

Прямая форма КИХ-систем — это просто дискретная свертка

$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k]. \quad (6.157)$$

На рис. 6.57, а) показана идеальная неквантованная прямая форма КИХ-системы, а на рис. 6.57, б) — модель линейного шума для этой системы, в которой все произведения квантуются перед операцией сложения. Источники белого шума, помещенные непосредственно на выход системы (всего $M + 1$), дают суммарную дисперсию шума на выходе, равную

$$\sigma_f^2 = (M + 1) \frac{2^{-2B}}{12}. \quad (6.158)$$

Это в точности та формула, которую мы получили бы, положив в (6.119) и (6.129) $N = 0$ и $h_{ef}[n] = \delta[n]$. При использовании сумматора с удвоенной длиной слов множитель $(M + 1)$ в формуле (6.158) заменяется единицей, что делает такой сумматор весьма привлекательным устройством при реализации КИХ-систем.

При реализации КИХ-систем в арифметике с фиксированной точкой переполнения тоже создают свои проблемы, но здесь мы должны следить лишь за размером выхода, поскольку все остальные суммы из рис. 6.57, б) частичны. Таким

образом, в целях уменьшения вероятности переполнений необходимо масштабировать коэффициенты импульсной характеристики. Масштабирующий коэффициент можно подобрать любым из методов, обсуждавшихся в подразделе 6.9.2. Масштабирование импульсной характеристики, естественно, уменьшает коэффициент усиления системы и, следовательно, отношение С/Ш на ее выходе.

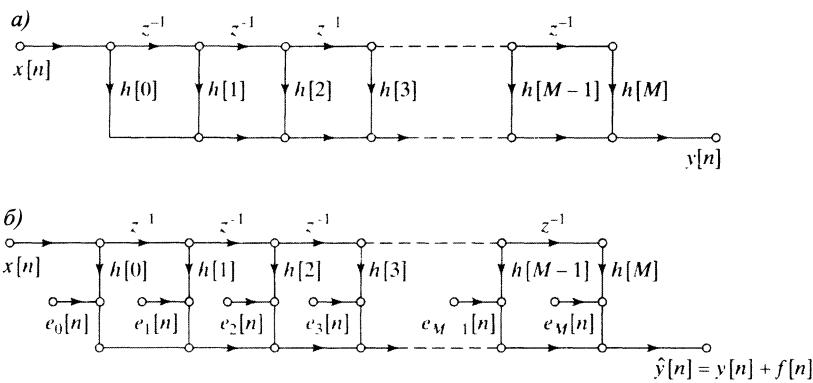


Рис. 6.57. Реализация КИХ-системы в прямой форме: а) модель с абсолютной точностью; б) модель линейного шума

Пример 6.12. Анализ масштабирования КИХ-системы из подраздела 6.8.5

Коэффициенты импульсной характеристики системы из 6.8.5 даны в табл. 6.3. Простые вычисления показывают, что

$$\sum_{n=0}^{27} |h[n]| = 1,751352, \quad \sqrt{\sum_{n=0}^{27} |h[n]|^2} = 0,679442, \quad \max_{|\omega| \leq \pi} |H(e^{j\omega})| \approx 1,009$$

(см. рис. 6.43, б)). Так как эти значения удовлетворяют соотношению (6.142), то с теоретической точки зрения при синусоидальном входном сигнале переполнения возможны, только если его амплитуда превышает $1/1,009 = 0,9911$. Но даже в этом случае переполнений практически никогда не бывает. Действительно, благодаря линейной фазе фильтра мы можем утверждать, что при широкополосном входном сигнале ввиду почти единичного коэффициента усиления в полосе пропускания и меньшим его значением в остальной области выходной сигнал будет меньше входного. \square

В подразделе 6.6.3 мы показали, что линейно-фазовые системы, аналогичные системе из примера 6.12, могут быть реализованы с приблизительно половинным числом умножений, необходимых для общей КИХ-системы. Это легко увидеть на сигнальных потоковых графах из рис. 6.31 и 6.32. В этих случаях должно быть ясным, что дисперсия шума на выходе уменьшается в два раза, если произведения квантуются перед сложением. Однако использование таких структур подразумевает более сложный алгоритм индексации, чем в структуре прямой формы. Архитектура большинства цифровых процессоров объединяет сумматор с удвоенной длиной слов с конвейерной операцией умножения с накоплением и простой циклический контроль для оптимизации прямой формы КИХ-систем

в этой ситуации. По этой причине реализация КИХ-систем в прямой форме зачастую более привлекательна даже по сравнению с БИХ-фильтрами, обладающими КЧХ с малым числом умножений.

Результаты и техника анализа подраздела 6.9.3 вполне применимы к каскадным реализациям КИХ-систем, описанных в подразделе 6.6.3. Но поскольку их характеристическая функция не имеет нетривиальных полюсов, задача группировки и упорядочивания сводится к проблеме выбора порядка подсистем. Как и в случае каскадной реализации БИХ-систем, перебор всех возможных подключений составных компонент крайне громоздок (при достаточно большом их количестве). Чан и Рэбинер [18] изучали эту проблему экспериментальным путем и нашли, что шумовые эффекты в КИХ-системах относительно нечувствительны к переупорядочиванию. Их результаты говорят о том, что хорошим порядком следует признать тот, при котором КЧХ участков от каждого узла до выхода относительно плоская, а коэффициент усиления мал.

6.9.5. Реализация дискретных систем в арифметике с плавающей точкой

Из предыдущего анализа становится ясным, что при цифровой реализации систем в арифметике с фиксированной точкой ограниченный динамический диапазон требует тщательного масштабирования уровня входного и внутренних сигналов. При реализации систем в арифметике с плавающей точкой масштабирование перестает быть острой необходимостью.

В арифметике с плавающей точкой вещественное число x представляется двоичным числом $2^c \hat{x}_M$, где показатель c называется *характеристикой*, а дробная часть \hat{x}_M — *мантиссой* числа x . Как характеристика, так и мантисса изображаются двоичными числами с фиксированной точкой. Представление чисел в системе с плавающей точкой обеспечивает широкий динамический диапазон и низкий уровень шума квантования, однако ошибки квантования здесь возникают несколько иным образом, нежели в арифметике с фиксированной точкой. Высокая точность представления чисел и широкий динамический диапазон достигается за счет такого выбора характеристики и мантиссы, при котором $0,5 \leq \hat{x}_M < 1$. При перемножении чисел в этой системе их характеристики складываются, а мантиссы перемножаются. Поэтому при квантовании произведения этой операции подвергается лишь мантисса чисел. При сложении чисел с плавающей точкой их характеристики выравниваются сдвигом двоичной точки мантиссы наименьшего слагаемого. Как следствие, после сложения чисел тоже возникает необходимость квантования. Предположим, что диапазон характеристики достаточно большой и в нашем алгоритме не появляются числа, превышающие 2^c . Тогда квантуется только мантисса числа, но ошибка квантования при этом умножается на 2^c . Таким образом, квантованные числа с плавающей точкой можно записать как

$$\hat{x} = x(1 + \varepsilon) = x + \varepsilon x. \quad (6.159)$$

Обозначая ошибку квантования как часть ε числа x , мы автоматически подчеркиваем тот факт, что ее масштаб увеличивается или уменьшается вместе с уровнем сигнала.

Перечисленные особенности арифметики с плавающей точкой усложняют анализ ошибок квантования при реализации дискретных систем в такой арифметике.

ке. Прежде всего источники шумов необходимо вставлять в систему после каждого умножения и каждого сложения, происходящих при обработке сигналов, в связи с чем, в отличие от реализаций систем в арифметике с фиксированной точкой, смена порядка умножений и сложений может привести к существенным изменениям поведения системы. Более важное наблюдение состоит в том, что теперь мы не можем обоснованно предполагать, что источники шумов квантования генерируют белый шум и независимы от входного сигнала. Фактически, шум в формуле (6.159) явно выражен через сигнал, и мы не можем анализировать шум, игнорируя природу сигнала. Если входной сигнал известен (например, является белым шумом), то разумно предположить, что относительная ошибка ε не зависит от x и является равномерно распределенным белым шумом.

В предположениях такого типа полезные результаты были получены Санбергом [137], Лиу и Канеко [88], Вайнстейном и Оппенгеймом [155] и Каном и Аггэрвalem [78]. В частности, Вайнштейн и Оппенгейм, сравнивая реализации БИХ-систем первого и второго порядков в арифметиках с плавающей и фиксированной точкой, показали, что если число бит представления мантиссы равно длине слов системы с фиксированной точкой, то арифметика с плавающей точкой дает более высокое отношение С/Ш на выходе. Неудивительно, что большое отличие в качестве реализаций проявляется на системах с полюсами характеристической функции, расположенными близко к единичной окружности. Однако в арифметике с плавающей точкой, необходимо какие-то биты закрепить за характеристикой числа, причем, чем больший динамический диапазон мы хотим использовать, тем большее количество бит идет на характеристику. Кроме того, аппаратные средства, реализующие арифметику с плавающей точкой, гораздо более сложные, нежели реализующие альтернативное представление чисел. Следовательно, использование плавающей точки ведет к увеличению числа разрядов и усложнению арифметических устройств. К основному преимуществу арифметики с плавающей точкой нужно отнести тот факт, что она существенно упрощает проблему переполнения и при достаточном числе разрядов, отведенных под мантиссу, практически сводит на нет неприятности, связанные с ошибкой квантования, что обеспечивает большую свободу в проектировании и реализации систем.

6.10. Предельные циклы при отсутствии входного сигнала в реализациях цифровых БИХ-фильтров

Если сигнал, поданный на вход дискретной устойчивой БИХ-системы, реализованной в арифметике с бесконечной точностью, становится нулевым при n больше некоторого n_0 , то ее реакция при $n > n_0$ будет асимптотически стремиться к нулю. Если же эту систему реализовать в арифметике с конечной точностью, то аналогичная реакция системы может продолжать колебаться, несмотря на нулевые отсчеты подаваемого сигнала. Этот эффект, обычно называемый *предельными циклами при нулевом входе*, возникает как следствие нелинейного квантования в петлях обратной связи или при переполнениях в сумматоре. Предельные циклы цифровых фильтров крайне сложны для анализа, и мы не станем даже пытаться рассуждать о них в сколь-нибудь общих предположениях. Однако

приведем пару простых примеров, из которых станет понятна природа возникновения таких циклов.

6.10.1. Предельные циклы, возникающие при округлении и усечении

Последовательные округления или усечения, выполняемые при итерационном решении разностных уравнений, иногда приводят к повторяющимся операциям, что можно увидеть на следующем примере.

Пример 6.13. Предельные циклы в системе первого порядка

Рассмотрим систему первого порядка, характеризующуюся разностным уравнением:

$$y[n] = ay[n - 1] + x[n], \quad |a| < 1, \quad (6.160)$$

сигнальный потоковый граф которой приведен на рис. 6.58, а).

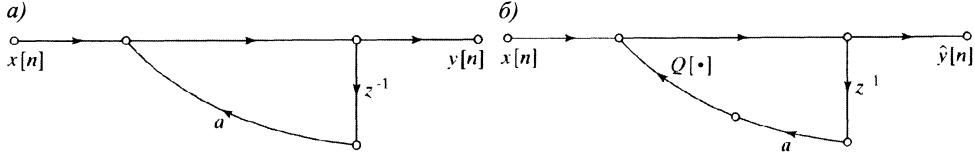


Рис. 6.58. БИХ-система первого порядка: а) линейная система с абсолютной точностью; б) нелинейная квантованная система

Предположим, что регистры, хранящие коэффициент a , отсчеты входного сигнала $x[n]$ и узловую переменную фильтра $y[n - 1]$, состоят из четырех битов (т. е. один бит слева от двоичной точки и три бита справа от нее). Ввиду конечной точности реализации перед сложением значений $ay[n - 1]$ и $x[n]$ необходимо округлить произведение или усечь его до 4 битов. Потоковый график, соответствующий фактической реализации, основанной на уравнении (6.160), показан на рис. 6.58, б). Предполагая, что произведение округляется, получим следующее нелинейное соотношение на реальный отсчет $\hat{y}[n]$:

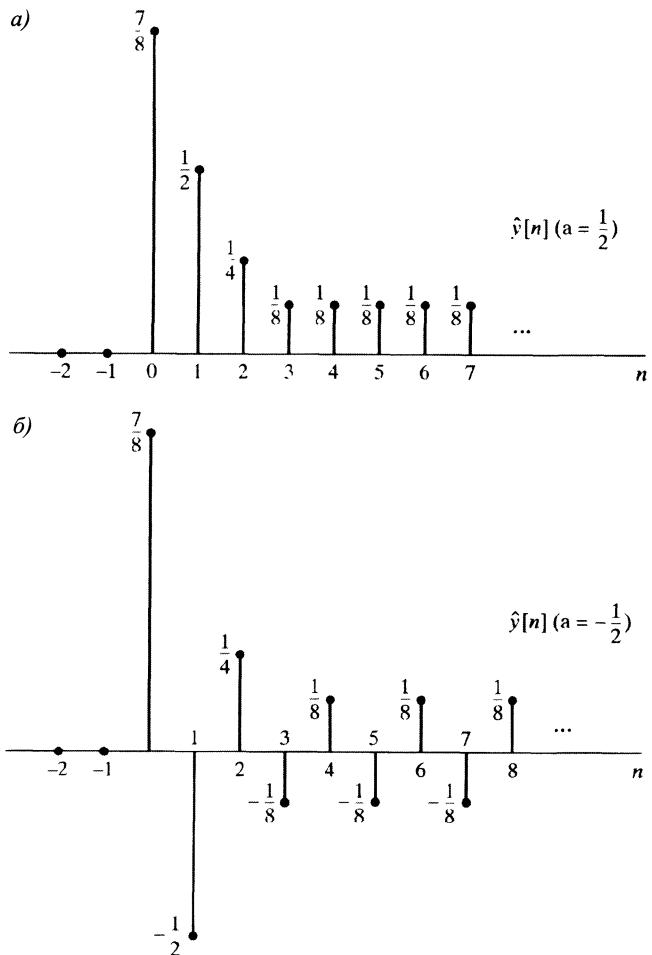
$$\hat{y}[n] = Q[a\hat{y}[n - 1]] + x[n], \quad (6.161)$$

где $Q[\cdot]$ обозначает операцию округления. Допустим, что $a = 1/2 = 0.100$, а входной сигнал имеет вид: $x[n] = (7/8)\delta[n] = (0.111)\delta[n]$. Учитывая (6.161), мы видим, что $\hat{y}[0] = 7/8 = 0.111$. Чтобы найти $\hat{y}[1]$, мы сначала умножаем $\hat{y}[0]$ на a и получаем $a\hat{y}[0] = 0.011100$, т. е. 7-битовое число, которое необходимо округлить до 4 битов. Это число равно $7/16$ и лежит строго посередине между соседними уровнями квантования $4/8$ и $3/8$. Договорившись всегда в такой ситуации выбирать больший уровень, получим, что 0.011100 округляется до 4-битового числа $0.100 = 1/2$.

Так как $x[1] = 0$, то $\hat{y}[1] = a\hat{y}[0] = 0.100 = 1/2$. Продолжая итерационный процесс решения, находим $\hat{y}[2] = Q[a\hat{y}[1]] = 0.010 = 1/4$ и $\hat{y}[3] = 0.001 = 1/8$. В обоих случаях округлять результаты ненужно. Однако при вычислении $\hat{y}[4]$ мы округляем 7-битовое число $a\hat{y}[3] = 0.000100$ до 0.001 . Аналогичный результат получается при вычислении всех остальных отсчетов с номерами $n \geq 3$. Выходная последовательность этого примера изображена на рис. 6.59, а). Если $a = -1/2$, мы можем повторить предыдущие вычисления и убедиться, что реакция системы на то же возбуждение выглядит, как на рис. 6.59, б). Таким образом, ввиду округления произведений $a\hat{y}[n - 1]$ выходной сигнал сохраняет постоянное значение в $1/8$ при $a = 1/2$ и колеблется между $\pm 1/8$ при

$a = -1/2$. Аналогичные периодические колебания выходного сигнала будут и у системы первого порядка с полюсом $z = \pm 1$

Рис. 6.59. Реакция системы первого порядка из рис. 6.58 на импульсную последовательность: а) $a = 1/2$; б) $a = -1/2$



При $a = 1/2$ период колебаний равен единице, а при $a = -1/2$ — двум. Такое установившееся осциллирование называется предельными циклами, впервые зарегистрированными Блэкманом [7], назвавшим промежутки амплитуды, в пределах которых происходят такие колебания, *мертвой зоной*. В нашем примере мертвая зона описывается неравенством $-2^{-B} \leq \hat{y}[n] \leq 2^{-B}$, где $B = 3$. \square

Предыдущий пример показывает, что предельные циклы при нулевом входе появляются в результате округления вычислений в БИХ-системе первого порядка. Аналогичный эффект может присутствовать и при усечении. Системы второго порядка тоже незащищены от предельных циклов. При параллельной реализации систем большого порядка выходы отдельных подсистем второго порядка независимы при нулевом входном сигнале. В этой ситуации одна или более подсистем могут добавлять предельные циклы в общий выходной сигнал. При

каскадной реализации только на первую подсистему каскада подается нулевое возбуждение, следующие за ней участки могут как индуцировать собственные предельные циклы, так и фильтровать предельные циклы, произведенные предшествующими компонентами каскада. При реализации фильтров высокого порядка структурами в других формах поведение предельных циклов еще более сложно, как, собственно, и их анализ.

В дополнение к сказанному стоит отметить, что предыдущие результаты полезны в ситуациях, когда предельные циклы на выходе системы — желаемый эффект. Такое происходит, например, при необходимости генерировать синусоидальную волну, или коэффициенты для вычисления ДПФ.

6.10.2. Предельные циклы, вызываемые переполнениями

Кроме предельных циклов, которые мы уже обсуждали, существуют более неприятные, обязаные своим появлением переполнениям. Из-за переполнений в выходной сигнал закрадывается грубая ошибка, что в некоторых случаях приводит к колебаниям выхода фильтра с большой амплитудой. Предельные циклы такого типа называют *колебаниями переполнений*. Подробно проблемы, связанные с осцилляцией, вызванной переполнениями, обсуждаются в [41], а мы познакомимся с ними на следующем примере.

Пример 6.14. Колебания переполнений в системе второго порядка

Рассмотрим систему второго порядка, характеризуемую разностным уравнением

$$\hat{y}[n] = x[n] + Q[a_1 \hat{y}[n-1]] + Q[a_2 \hat{y}[n-2]], \quad (6.162)$$

где $Q[\cdot]$ обозначает округление чисел в дополнительном коде до трех значащих цифр и одного знакового бита. Переполнения могут происходить при сложении округленных произведений. Предположим, что $a_1 = 3/4 = 0_{\circ}110$, $a_2 = -3/4 = 1_{\circ}010$, а сигнал $x[n]$ имеет нулевые отсчеты при $n \geq 0$. Более того, допустим, что $\hat{y}[-1] = 3/4 = 0_{\circ}110$ и $\hat{y}[-2] = -3/4 = 1_{\circ}010$. Теперь вычислим отсчет выходной последовательности с номером 0:

$$\hat{y}[0] = 0_{\circ}110 \cdot 0_{\circ}110 + 1_{\circ}010 \cdot 1_{\circ}010 = 0_{\circ}100100 + 0_{\circ}100100.$$

Выбрав больший допустимый уровень при округлении числа, расположенного ровно посередине между ними, найдем, что округленный отсчет выхода равен

$$\hat{y}[0] = 0_{\circ}101 + 0_{\circ}101 = 1 \diamond 010 = -\frac{3}{4}.$$

В этой ситуации правило переноса в двоичном числе вытесняет переполнение в знаковый бит, превращая положительное число в отрицательное. Повторение вычислений дает

$$\hat{y}[1] = 1_{\circ}011 + 1_{\circ}011 = 0_{\circ}110 = \frac{3}{4}.$$

В результате переполнения здесь опять теряется знак, и отрицательная сумма становится положительной. Ясно, что $\hat{y}[n]$ будет продолжать осциллировать между $\pm 3/4$ до тех пор, пока на вход системы не поступит какая-то нагрузка. Таким образом, $\hat{y}[n]$

обладает периодическим предельным циклом периода 2 и амплитудой, равной практически всему доступному диапазону амплитуд в этой реализации. \square

Разобранный пример раскрывает причину возникновения колебаний переполнения. Намного более сложное поведение предельных циклов можно проследить на примерах систем высокого порядка, где могут появляться другие частоты. Есть некоторые результаты, освещенные в [41], касающиеся предсказания возникновения колебаний переполнения по анализу разностного уравнения. Предупредить этот феномен можно с помощью характеристики насыщенного переполнения (см. рис. 6.35, a)), о чем рассказано в том же источнике.

6.10.3. Предупреждение предельных циклов

Возможное существование предельных циклов при отсутствии входного сигнала — важный момент, который необходимо учитывать при обработке непрерывных сигналов цифровым фильтром. Действительно, ведь в такой ситуации желательно получать нулевой отклик на нулевое возбуждение. Предположим, например, что мы дискретизируем речевой сигнал, пропускаем его через цифровой фильтр, а результат фильтрования снова конвертируем в акустический сигнал с помощью ЦАП. При этом периодические колебания на выходе фильтра, возникающие в качестве реакции на нулевую входную последовательность, дают слышимый тон и крайне нежелательны.

Один из методов решения общей проблемы предельных циклов заключается в поиске структур, исключающих этот феномен. Такие структуры были получены с помощью представления в пространстве состояний (см. [4 и 102] и концепций, аналогичных пассивности в аналоговых системах [133, 43]). Однако в таких структурах необходимо большее количество вычислений, чем при эквивалентных реализациях в каскадной или параллельной формах. Увеличивая число бит в словах, изображающих числа, мы можем, как правило, предупреждать переполнения. Аналогично, так как предельные циклы, возникающие из-за округления двоичных слов, обычно ограничены наименьшим значащим битом, вводя дополнительные биты, можно уменьшить амплитуду предельных циклов. В работе [26] показано, что при удвоенной длине слов в сумматоре и квантовании произведений после их сложения предельные циклы, обязаные своему появлению операции округления, будут много меньше, нежели в системах второго порядка. Таким образом, возникает компромисс между длиной слов и вычислительной сложностью алгоритма для предупреждения предельных циклов, так же как и при квантовании коэффициентов и шума округления.

Наконец, важно отметить, что предельные циклы, появляющиеся как при округлениях, так и при переполнениях, — феномен, присущий лишь БИХ-системам. В КИХ-системах предельных циклов не бывает, поскольку в них отсутствуют петли обратной связи. Реакция КИХ-систем становится нулевой не позднее чем через $(N + 1)$ отсчет после того, как на ее вход стал подаваться нулевой сигнал. В этом состоит главное преимущество КИХ-систем, если в данном приложении колебания предельных циклов недопустимы.

6.11. Краткое содержание главы

В этой главе мы всесторонне изучали проблему реализации дискретных ЛС-систем. Первая ее часть была посвящена основным структурам реализации. После введения блок-схем и сигнальных потоковых графов как графических представлений разностных уравнений мы обсудили несколько базисных структур реализации БИХ- и КИХ-систем, включая прямые формы I и II, каскадные, параллельные и транспонированные формы. Было показано, что все они эквивалентны, если реализация происходит с абсолютной точностью. Однако между ними возникают существенные отличия, если используемая арифметика обладает лишь конечной точностью. Поэтому во второй части главы мы занимались проблемами, связанными с конечной точностью представлений чисел, или квантованием, в цифровых реализациях базисных структур.

Исследование эффектов, возникающих при вычислениях с конечной точностью, мы начали с короткого обзора цифрового представления чисел и показали, что возможности и недостатки квантования очень важны как при дискретизации сигналов (обсуждаемой в главе 4), так и при представлении коэффициентов дискретных систем, а также при реализации вычислений в арифметике с конечной точностью. Проблемы квантования коэффициентов разностных уравнений были проиллюстрированы несколькими примерами. Задачу квантования коэффициентов мы рассматривали независимо от вычислений в арифметике конечной точности, введя нелинейные компоненты в систему. Было продемонстрировано, что эта нелинейность может стать причиной возникновения предельных циклов, т. е. колебаний выходного сигнала при отсутствии возбуждения системы.

Мы показали, что эффекты квантования можно моделировать с помощью независимых источников случайного белого шума, вставляемых внутрь сети. Модель линейного шума исследовалась для структур прямых и каскадных форм. На всем протяжении обсуждения квантования основной темой был конфликт между стремлением к совершенному квантованию и необходимостью поддерживать широкий диапазон амплитуды сигналов. Мы видели, что при реализации системы в арифметике с фиксированной точкой предпочтение, отданное одной из сторон проблемы, ведущее к усложнению ситуации с другой, вынуждает нас увеличить число бит, представляющих коэффициенты системы и амплитуду сигнала. Для численного решения указанной проблемы можно привлекать арифметику с плавающей точкой.

Наше обсуждение квантования преследовало две цели. Первая — знакомство с некоторыми результатами, которые могут стать полезными при разработке практических реализаций. Мы нашли, что эффекты квантования зависят в основном от используемой структуры и конкретных параметров реализуемой системы, и, несмотря на необходимость моделирования системы для проверки ее работоспособности, многие результаты крайне важны для теоретического поиска проекта. Вторая, не менее важная цель этой части главы заключалась в иллюстрировании различных стилей анализа, применяемого при исследовании эффектов квантования в многообразных алгоритмах цифровой обработки сигналов. Разобранные примеры посвящены типам предположений и приближений, которые обычно принимают при изучении эффектов квантования. В главе 9 мы

будем применять развитую здесь технику к исследованию квантования при вычислении ДПФ.

Задачи

Обязательные задачи с ответами

- 6.1. Определите характеристические функции, соответствующие сетям, приведенным на рис. 6.60, и покажите, что они имеют одни и те же полюса.

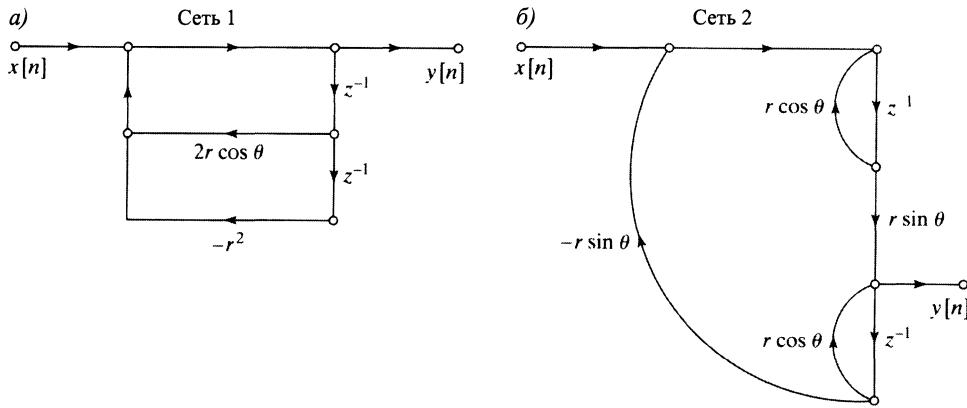


Рис. 6.60.

- 6.2. Выпишите линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами, связывающее входной сигнал и реакцию системы, представленную сигнальным потоковым графом на рис. 6.61.

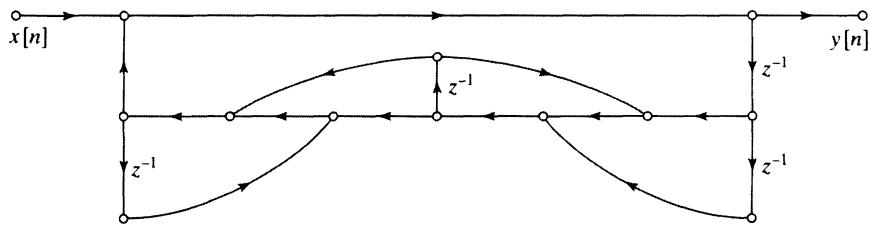


Рис. 6.61.

- 6.3. На рис. 6.62 изображены потоковые графы шести систем. Определите, какая из последних пяти систем имеет ту же характеристическую функцию, что и система из рис. 6.62, а). Вам следует исключить некоторые варианты, не проводя громоздких вычислений, а основываясь лишь на рисунке.
- 6.4. Рассмотрите систему из рис. 6.62, г).
- а) Найдите характеристическую функцию, связывающую z -преобразования входного и выходного сигналов.

б) Выпишите разностное уравнение, которому удовлетворяет пара сигнал – отклик этой системы.

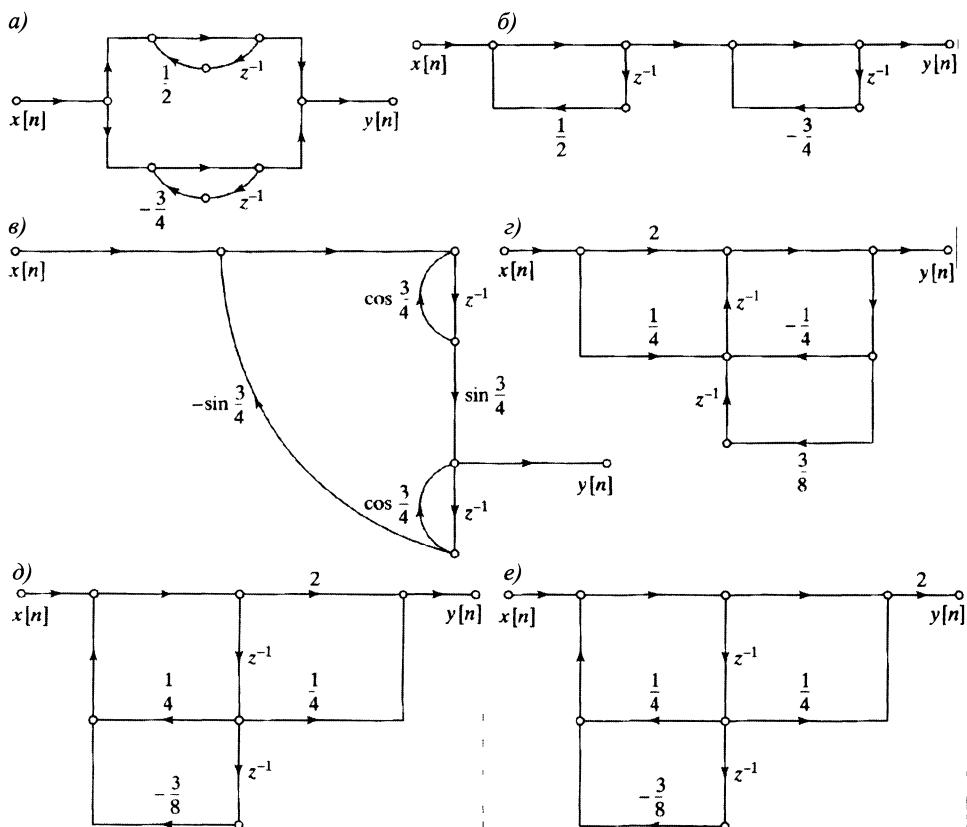


Рис. 6.62.

6.5. ЛС-система реализована потоковым графом из рис. 6.63.

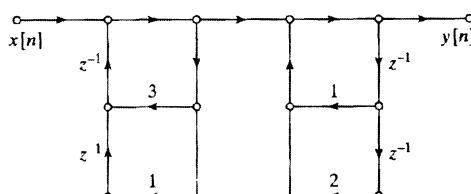


Рис. 6.63.

а) Выпишите разностное уравнение, соответствующее этому графу.

б) Найдите характеристическую функцию.

в) Подсчитайте количество умножений и сложений вещественных чисел, необходимых для вычисления каждого отсчета выхода при такой реализации системы, в предположениях о вещественноизначности входного сигнала $x[n]$ и не учитывая умножение на 1.

- г) При реализации системы, показанной на рис. 6.63, необходимо четыре запоминающих регистра (задерживающих элементов). Можно ли уменьшить их количество, воспользовавшись эквивалентной структурой? Если да, изобразите соответствующий потоковый граф. Если нет, объясните почему.

6.6. Определите импульсную характеристику каждой системы из рис. 6.64.

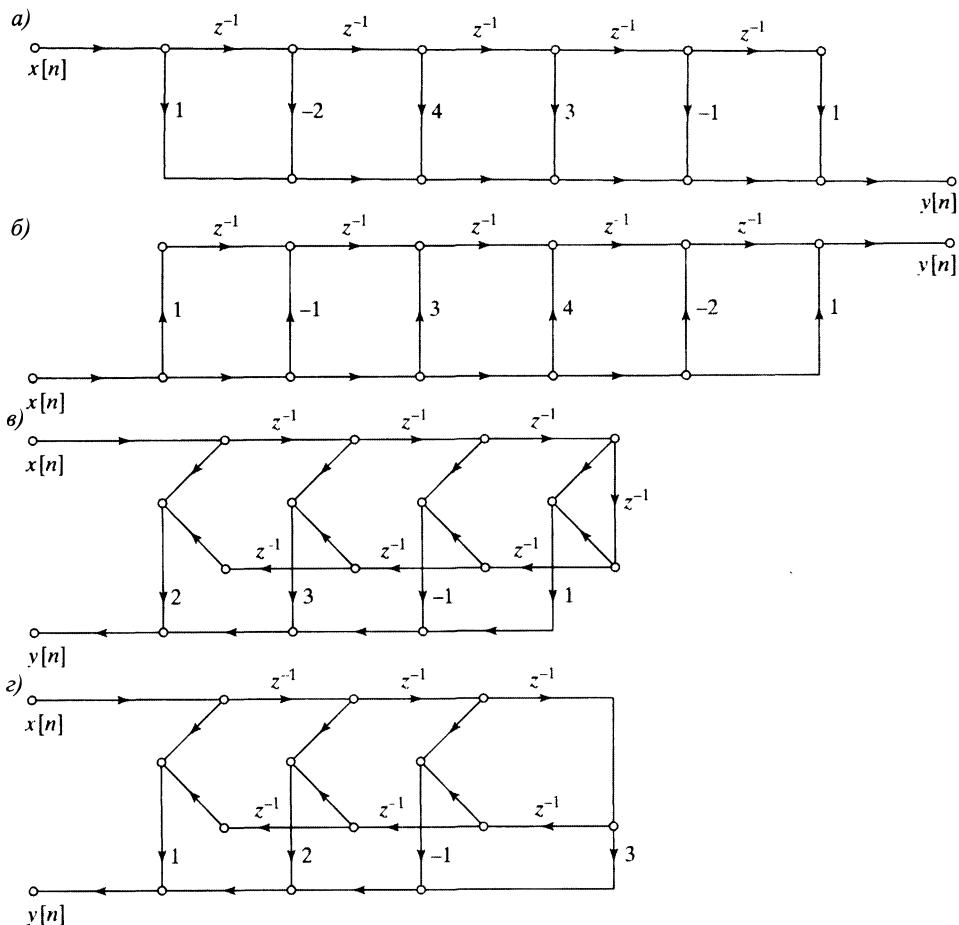


Рис. 6.64.

- 6.7. Пусть $x[n]$ и $y[n]$ — N -членные последовательности ($N > 3$), связанные разностным уравнением

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] = x[n-2] - \frac{1}{4}x[n].$$

Нарисуйте сигнальный потоковый граф в прямой форме II, реализующий детерминированную ЛС-систему, характеризуемую этим уравнением.

- 6.8. Сигнальный потоковый граф из рис. 6.65 представляет ЛС-систему. Определите разностное уравнение, связывающее ее входной $x[n]$ и выходной $y[n]$ сигналы.

Как обычно, все ветви сигнального потокового графа имеют единичный коэффициент усиления, если на них не стоит дополнительного обозначения.

- 6.9. Сигнальный потоковый граф, представляющий детерминированную дискретную ЛС-системы, показан на рис. 6.66. Ветви, не имеющие обозначений, обладают единичным коэффициентом усиления.

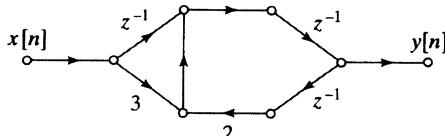


Рис. 6.65.

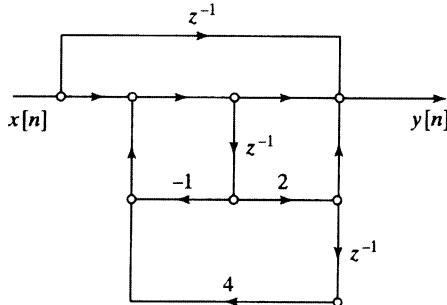


Рис. 6.66.

- a) Найдите отсчет с номером 1 импульсной характеристики $h[1]$.
б) Выпишите разностное уравнение, характеризующее систему.

- 6.10. Рассмотрите сигнальный потоковый граф из рис. 6.67.
а) Используя указанные обозначения узловых переменных, выпишите систему разностных уравнений, представленную этой сетью.
б) Нарисуйте эквивалентный потоковый график, изображающий каскад двух подсистем первого порядка.
в) Является ли данная система устойчивой? Ответ обоснуйте.

- 6.11. Рассмотрите детерминированную ЛС-систему S с импульсной характеристикой $h[n]$ и характеристической функцией вида

$$H(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})(1 - 4z^{-1})}{z(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}.$$

- а) Нарисуйте прямую форму потокового графа системы S .
б) Изобразите транспонированную форму графа из предыдущего пункта задачи.

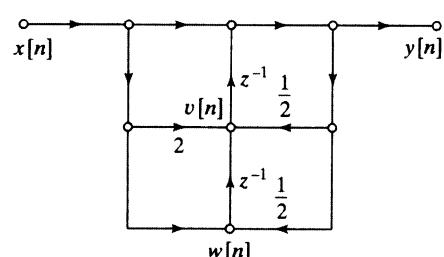


Рис. 6.67.

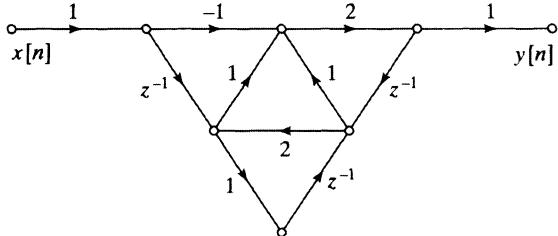
- 6.12. Выпишите разностное уравнение, характеризующее ЛС-систему, реализованную потоковым графом из рис. 6.68.
6.13. Начертите сигнальный потоковый график в прямой форме I, реализующий ЛС-систему с характеристической функцией

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}.$$

- 6.14. Начертите сигнальный потоковый граф в прямой форме II, реализующий ЛС-систему с характеристической функцией

$$H(z) = \frac{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}.$$

Рис. 6.68.

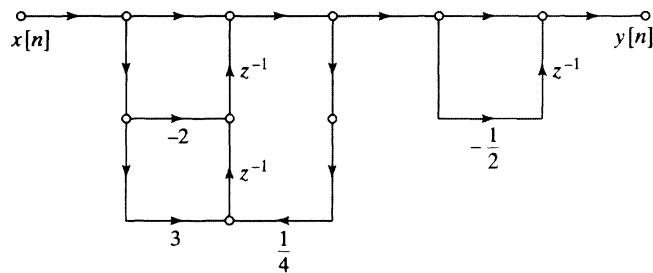


- 6.15. Начертите сигнальный потоковый граф в транспонированной прямой форме II, реализующий ЛС-систему с характеристической функцией

$$H(z) = \frac{1 - \frac{7}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}{1 + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}.$$

- 6.16. Рассмотрите сигнальный потоковый граф, приведенный на рис. 6.69.

Рис. 6.69.



- а) Изобразите сигнальный потоковый график, получающийся в результате применения теоремы о транспонировании к этому графу.
 б) Убедитесь, что изображенный вами в предыдущем пункте график обладает той же характеристической функцией, что и график из рис. 6.69.

- 6.17. Рассмотрите детерминированную ЛС-систему с характеристической функцией

$$H(z) = 1 - \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2} + z^{-3}.$$

- а) Начертите сигнальный потоковый график прямой формы реализации этой системы.
 б) Нарисуйте сигнальный потоковый график транспонированной прямой формы, эквивалентный предыдущему.

- 6.18. При некоторых значениях параметра a сигнальный потоковый график из рис. 6.70 можно заменить сигнальным потоковым графиком второго порядка в прямой

форме II, реализующим ту же характеристическую функцию. Найдите одно из таких значений и выпишите соответствующую характеристическую функцию $H(z)$.

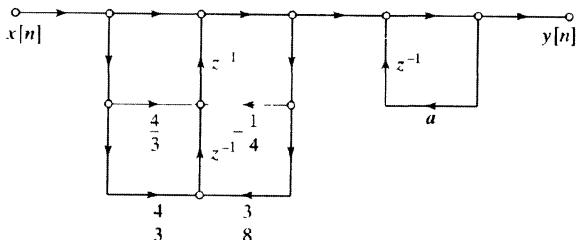


Рис. 6.70.

- 6.19. Начертите сигнальный потоковый граф, реализующий детерминированную ЛС-систему с характеристической функцией

$$H(z) = \frac{2 - \frac{8}{3}z^{-1} - 2z^{-2}}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}z^{-1})},$$

в виде параллельной комбинации участков первого порядка в транспонированной прямой форме II.

- 6.20. Изобразите сигнальный потоковый граф, реализующий ЛС-систему с характеристической функцией

$$H(z) = \frac{(1 + (1 - j/2)z^{-1})(1 + (1 + j/2)z^{-1})}{(1 + (j/2)z^{-1})(1 - (j/2)z^{-1})(1 - (1/2)z^{-1})(1 - 2z^{-1})},$$

в виде каскада участков второго порядка в транспонированной прямой форме II с вещественными коэффициентами.

Обязательные задачи без ответов

- 6.21. Во многих приложениях полезно иметь систему, генерирующую синусоидальные последовательности. Один из способов конструирования такой системы заключается в реализации импульсной характеристики $h[n] = e^{j\omega_0 n} u[n]$. Вещественная и мнимая части $h[n]$ в этом случае равны $h_r[n] = (\cos \omega_0 n)u[n]$ и $h_i[n] = (\sin \omega_0 n)u[n]$ соответственно.

При реализации системы с комплекснозначной импульсной характеристикой ее вещественная и мнимая части рассматриваются как отдельные выходные сигналы. Перед выписыванием комплексного разностного уравнения, необходимого для получения желаемой импульсной характеристики и разделения ее на вещественную и мнимую части, нарисуйте потоковый граф, реализующий систему. Этот граф может иметь только вещественные коэффициенты. Такая реализация иногда называется *спаренной формой осциллятора*, поскольку реакция системы на импульсное возбуждение имеет синусоидальную форму.

- 6.22. Нарисуйте все возможные потоковые графы, реализующие характеристическую функцию

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}},$$

в виде каскада подсистем первого порядка.

6.23. Рассмотрите детерминированную ЛС-систему с характеристической функцией

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)}.$$

- a) Начертите сигнальный потоковый граф, реализующий эту систему, в каждой из следующих форм:
- (i) прямая форма I;
 - (ii) прямая форма II;
 - (iii) каскадная форма участков первого и второго порядков в прямой форме II;
 - (iv) параллельная форма участков первого и второго порядков в прямой форме II;
 - (v) транспонированная прямая форма II.
- б) Выпишите разностное уравнение, соответствующее потоковому графу из п. (v), и покажите, что эта система обладает корректной характеристической функцией.

6.24. На рис. 6.71 представлено несколько сигнальных потоковых графов. Найдите транспонированный граф к каждому из них и проверьте, что каждая получившаяся пара графов реализует одну и ту же характеристическую функцию.

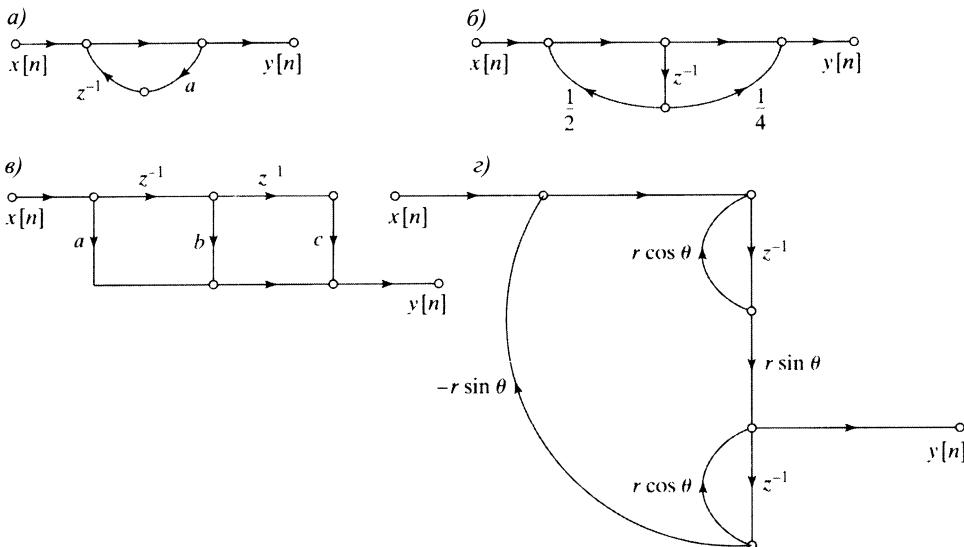


Рис. 6.71.

6.25. Рассмотрите систему из рис. 6.72.

- a) Найдите ее характеристическую функцию.
- б) Выпишите соответствующее разностное уравнение.
- в) Изобразите эквивалентный сигнальный потоковый граф с минимальным числом задерживающих элементов.

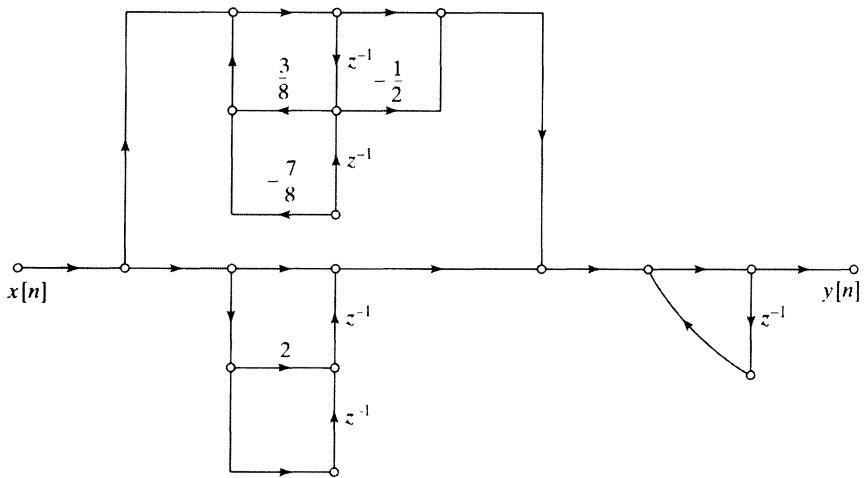


Рис. 6.72.

6.26. ЛС-система с характеристической функцией

$$H(z) = \frac{0,2(1+z^{-1})^6}{(1-2z^{-1}+\frac{7}{8}z^{-2})(1+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2})(1-\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-2})}$$

реализована сигнальным потоковым графом из рис. 6.73.

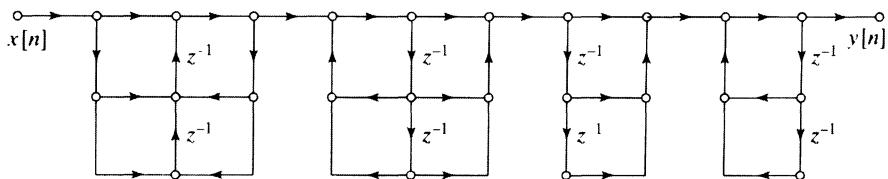


Рис. 6.73.

- Расставьте коэффициенты на ветвях графа. Единственным ли способом это можно сделать?
- Обозначьте узловые переменные и выпишите систему разностных уравнений, представляемую данным графом.

Дополнительные задачи

- 6.27. Рассмотрите общий потоковый граф (сеть A), состоящий из умножений коэффициентов и элементов задержек, изображенный на рис. 6.74, а). Если начальное положение системы — состояние покоя, ее поведение полностью описывается импульсной характеристикой $h[n]$. Нам хотелось бы модифицировать систему, создав новый потоковый граф (сеть A_1) с импульсной характеристикой $h_1[n] = (-1)^n h[n]$.

- а) Изобразите график функции $H_1(e^{j\omega})$, опираясь на чертеж графика $H(e^{j\omega})$ из рис. 6.74, б).

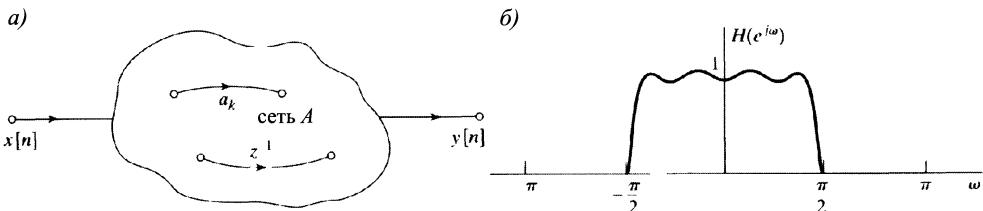


Рис. 6.74.

- б) Объясните, как из сети, реализующей систему A , получить сеть для системы A_1 с импульсной характеристикой $h_1[n]$, модифицируя коэффициенты сети и/или задерживающие ветви.
- в) Предположим, что сеть из рис. 6.75 реализует систему A . Покажите, как, меняя только ее коэффициенты, можно получить сеть для системы A_1 .

- 6.28. Потоковый график, приведенный на рис. 6.76, невычислим, т. е., основываясь на системе разностных уравнений, которую он представляет, невозможно вычислить отсчеты выходной последовательности, поскольку он содержит петли без задержек.

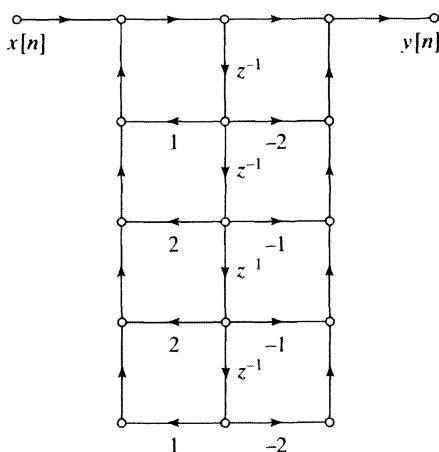


Рис. 6.75.

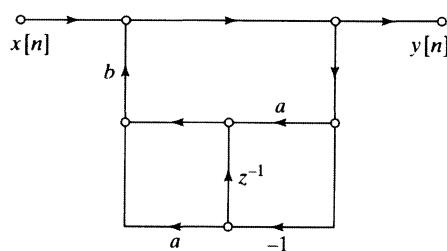


Рис. 6.76.

- а) Выпишите разностные уравнения, соответствующие сети из рисунка, и восстановите по ним характеристическую функцию.
- б) Используя найденную характеристическую функцию, постройте для нее вычислимый потоковый график.

- 6.29. Данна импульсная характеристика ЛС-системы:

$$h[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq 7, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- а) Нарисуйте потоковый граф, реализующий эту систему, в прямой нерекурсивной форме.
- б) Покажите, что соответствующая характеристическая функция может быть записана в виде:

$$H(z) = \frac{1 - a^8 z^{-8}}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|.$$

- в) Начертите потоковый граф, реализующий такой вид $H(z)$, представляющий собой каскад КИХ-систем (числитель) и БИХ-систем (знаменатель).
- г) Рекурсивная ли реализация получилась в предыдущем пункте? К какому типу — КИХ или БИХ относится этот каскад?
- д) Для какой реализации системы на один отсчет выхода приходится больше
 - (i) задерживающих элементов;
 - (ii) арифметических операций (умножений и сложений)?

6.30. Рассмотрите КИХ-систему с импульсной характеристикой

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{13} \left(1 + \cos \frac{2\pi(n-n_0)}{15} \right), & 0 \leq n \leq 14, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Эта система служит примером фильтров с дискретизованной частотой. В задаче 6.37 они обсуждаются подробно, а здесь мы рассмотрим один конкретный пример.

- а) Изобразите импульсную характеристику системы в случаях $n_0 = 0$ и $n_0 = 15/2$.
- б) Покажите, что характеристическую функцию фильтра можно записать как

$$H(z) = (1 - z^{-15}) \frac{1}{15} \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2} e^{-j2\pi n_0/15}}{1 - e^{j2\pi/15} z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2} e^{j2\pi n_0/15}}{1 - e^{-j2\pi/15} z^{-1}} \right].$$

- в) Покажите, что при $n_0 = 15/2$ КЧХ системы можно представить в виде:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{15} e^{-j\omega 7} \left(\frac{\sin \frac{15\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} + \frac{1}{2} \frac{\sin \left(\frac{15}{2} (\omega - \frac{2\pi}{15}) \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} (\omega - \frac{2\pi}{15}) \right)} + \frac{1}{2} \frac{\sin \left(\frac{15}{2} (\omega + \frac{2\pi}{15}) \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} (\omega + \frac{2\pi}{15}) \right)} \right).$$

Опираясь на эту формулу, изобразите график АЧХ фильтра при $n_0 = 15/2$. Получите аналогичное выражение для $n_0 = 0$. При каком значении n_0 система обладает обобщенной линейной фазой?

- г) Нарисуйте сигнальный потоковый граф, реализующий систему в виде каскада КИХ-системы с характеристической функцией $1 - z^{-15}$ и параллельной комбинацией БИХ-систем первого и второго порядков.

6.31. Рассмотрите дискретную систему, изображенную на рис. 6.77, а).

- а) Выпишите систему разностных уравнений, представленную потоковым графиком рисунка.
- б) Найдите соответствующую характеристическую функцию $H_1(z) = Y_1(z)/X(z)$ и выразите модули и аргументы ее полюсов через $r \in (-1; 1)$.

- в) Потоковый граф, изображенный на рис. 6.77, б), получен из графа, представленного на рис. 6.77, а), перемещением задерживающих элементов на противоположные ветви квадратов. Как характеристическая функция $H_2(z) = Y_2(z)/X(z)$ связана с $H_1(z)$?

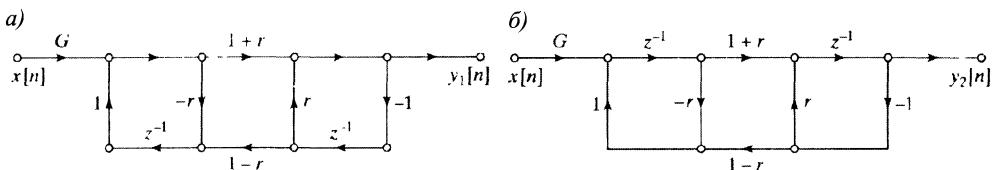


Рис. 6.77.

- 6.32. Три сети, присутствующие на рис. 6.78, эквивалентны реализации одной и той же ЛС-системы с двумя входами и выходами.

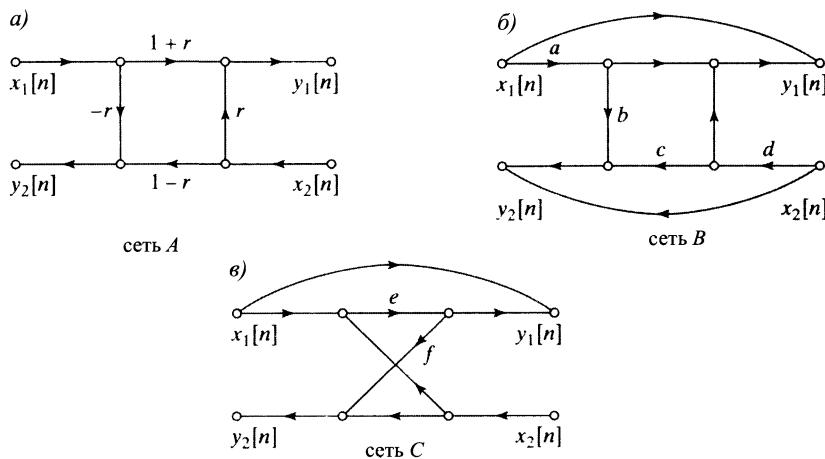


Рис. 6.78.

- Выпишите разностные уравнения, соответствующие системе А.
- Помня об эквивалентности систем А и Б, выразите значения коэффициентов a , b , c и d из сети Б через параметр r системы А.
- Найдите коэффициенты e и f сети С в терминах параметра r эквивалентной системы А.
- Почему сети Б и С эквивалентны А? В чем возможные преимущества реализации А перед Б и С?

- 6.33. Рассмотрите всепропускающую систему с характеристической функцией

$$H(z) = \frac{z^{-1} - 0,54}{1 - 0,54z^{-1}}.$$

Реализующий ее потоковый граф показан на рис. 6.79.

- а) Найдите значения коэффициентов b , c и d , при которых потоковый граф из рисунка действительно реализует функцию $H(z)$.

- б) При практической реализации этой системы коэффициенты b , c и d могут округляться до первого знака после запятой (т. е. 0,54 округляется до 0,5, 1,8518 — до 1,9 и т. д.). Будет ли система с округленными коэффициентами всепропускающей?

Разностное уравнение, связывающее вход и выход всепропускающей системы с характеристической функцией $H(z)$, имеет вид:

$$y[n] = 0,54(y[n - 1] - x[n]) + x[n - 1].$$

- в) Нарисуйте потоковый граф, реализующий это уравнение, в котором присутствуют два задерживающих элемента, но только одно умножение на константу, отличную от ± 1 .

- г) Останется ли реализация системы из предыдущего пункта всепропускающей после квантования коэффициентов?

Основной недостаток реализации «в» системы по сравнению с реализацией «а» состоит в наличии двух задержек. Однако системы высшего порядка необходимо реализовывать в виде каскада всепропускающих систем. Если в каскаде существует N всепропускающих подсистем, то реализация отдельных участков вида «в» потребует лишь $(N+1)$ задерживающий элемент, поскольку отдельные задержки могут быть общими для разных участков.

- д) Рассмотрите всепропускающую систему с характеристической функцией

$$H(z) = \left(\frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \right) \left(\frac{z^{-1} - b}{1 - bz^{-1}} \right).$$

Нарисуйте потоковый граф реализации этой системы в виде каскада двух участков, как в п. «в», с одним задерживающим элементом, общим для этих подсистем. Вся сеть должна иметь только три задерживающих элемента.

- е) Останется ли система из предыдущего пункта всепропускающей после квантования коэффициентов a и b ?

- 6.34. Все ветви сигнального потокового графа в этой задаче обладают единичным коэффициентом усиления, если не оговорено его специального значения.

- а) Сигнальный потоковый граф детерминированной ЛС-системы A представлен на рис. 6.80, а). Можно ли реализовать ту же систему с меньшим числом задержек? Если да, то каково минимальное их число? Если нет, объясните почему.
- б) Верно ли, что потоковый граф системы B (рис. 6.80, б)) реализует то же самое соотношение, связывающее пару сигнал–отклик, что и граф системы A ? Ответ обоснуйте.

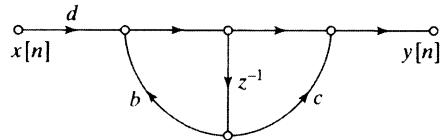
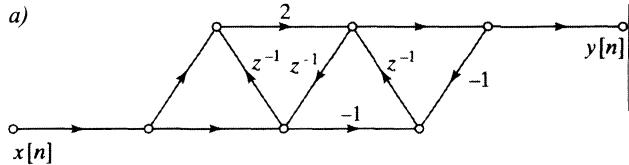
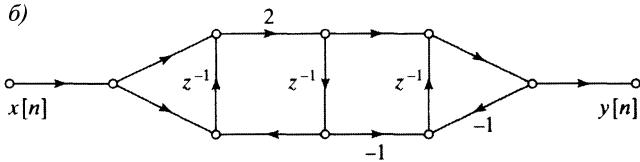


Рис. 6.79.

Рис. 6.80. а)



б)



6.35. Рассмотрите характеристическую функцию

$$H(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

всепропускающей системы.

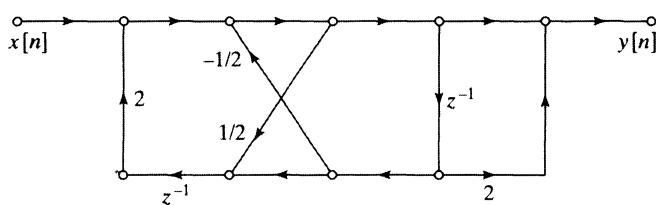
- Нарисуйте сигнальный потоковый граф, реализующий эту систему в прямой форме I. Как много задержек и умножений на константу необходимо в этой форме? (Умножения на ± 1 не учитывать.)
- Нарисуйте потоковый граф, реализующий систему, в котором задействовано лишь одно умножение. Минимизируйте число задержек.
- Рассмотрите еще одну всепропускающую систему, чья характеристическая функция равна

$$H(z) = \frac{(z^{-1} - \frac{1}{3})(z^{-1} - 2)}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}.$$

Найдите потоковый граф для этой системы с двумя умножениями и тремя задержками.

6.36. Потоковый граф из рис. 6.81 реализует детерминированную ЛС-систему.

Рис. 6.81.



- Начертите транспонированный сигнальный граф.
- Опираясь на исходный или транспонированный граф, выпишите соотношение, связывающее вход $x[n]$ системы с ее выходом.
- Является ли эта система устойчивой?
- Вычислите $y[2]$, если $x[n] = (1/2)^n u[n]$.

Задачи повышенной сложности

- 6.37. Здесь мы исследуем некоторые свойства класса дискретных систем, называемых фильтрами с дискретизованной частотой. Характеристическая функция таких фильтров имеет вид:

$$H(z) = (1 - z^{-N}) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{H}[k]/N}{1 - z_k z^{-1}},$$

где $z_k = e^{j(2\pi/N)k}$ при $k = 0, 1, \dots, N-1$.

- Характеристическая функция $H(z)$ может быть реализована как каскад КИХ-системы с характеристической функцией $(1 - z^{-N})$ и параллельной комбинацией БИХ-систем первого порядка. Нарисуйте потоковый граф каскада.
- Покажите, что $H(z)$ — многочлен от z^{-1} степени $(N-1)$. Для этого необходимо и достаточно показать, что у $H(z)$ нет полюсов, кроме точки $z = 0$, и степеней z^{-1} выше чем $(N-1)$. Что это свойство говорит о длине импульсной характеристики системы?
- Покажите, что импульсная характеристика системы записывается как

$$h[n] = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}[k] e^{j(2\pi/N)kn} \right) (u[n] - u[n-N]).$$

Указание: найдите импульсные характеристики КИХ- и БИХ-частей и сверьтесь с ними.

- С помощью правила Лопитала покажите, что

$$H(z_m) = H(e^{j(2\pi/N)m}) = \tilde{H}[m], \quad m = 0, 1, \dots, N-1.$$

Иными словами, докажите, что константы $\tilde{H}[m]$ — отсчеты КЧХ $H(e^{j\omega})$ системы, вычисленные при $\omega_m = \frac{2\pi m}{N}$, $m = 0, 1, \dots, N-1$. Название системы возникло благодаря этому свойству.

- В общей ситуации как полюса z_k БИХ-части системы, так и отсчеты КЧХ будут комплексными. Однако если $h[n]$ — вещественнозначна, то можно найти реализацию системы лишь с вещественными коэффициентами. Покажите, что при вещественнозначной $h[n]$ и четном N функция $H(z)$ может быть записана в виде

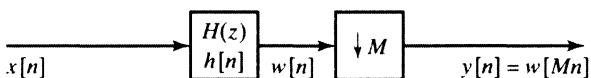
$$H(z) = (1 - z^{-N}) \left(\frac{H(1)/N}{1 - z^{-1}} + \frac{H(-1)/N}{1 + z^{-1}} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{(N/2)-1} \frac{2|H(e^{j(2\pi/N)k})|}{N} \cdot \frac{\cos \frac{2\pi k \theta}{N} - z^{-1} \cos \left(\frac{2\pi k \theta}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)}{1 - 2z^{-1} \cos \frac{2\pi k}{N} + z^{-2}} \right),$$

где $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$. Изобразите сигнальный потоковый график, представляющий эту систему при $N = 16$ и $H(e^{j\omega_k}) = 0$ для $k = 3, 4, \dots, 14$.

- 6.38. В главе 4 мы показали, что можно уменьшить частоту дискретизации дискретного сигнала с помощью комбинации линейного фильтрования и сжатия по времени. На рис. 6.82 приведена блок-схема M -к-1 прореживателя, который можно

использовать для уменьшения частоты дискретизации в целое число M раз. Согласно модели, линейный фильтр оперирует высокой частотой дискретизации. Однако, если M велико, большинство отсчетов выхода фильтра будет отброшено компрессором. В некоторых случаях возможна более эффективная реализация.

Рис. 6.82.



- Предположим, что фильтр — это КИХ-система с нулевой импульсной характеристикой при $n < 0$ и $n > 10$. Изобразите систему из рис. 6.82, заменив фильтр $h[n]$ эквивалентным сигнальным потоковым графом. Заметим, что M -к-1 компрессор невозможно реализовать сигнальным потоковым графом, так что вам следует оставить соответствующий блок на чертеже, как показано на рис. 6.82.
- Заметим, что некоторые из операций, соответствующие ветвям, можно осуществить с помощью сжатия. Учитывая этот факт, начертите потоковый граф, который более эффективно реализует систему из предыдущего пункта. Во сколько раз можно уменьшить суммарное количество умножений при вычислении $y[n]$?
- Предположим, что характеристическая функция фильтра из рис. 6.82 имеет вид:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

Начертите потоковый график, реализующий полную систему из рисунка в прямой форме. Можно ли уменьшить общее число вычислений, затрачиваемых на один отсчет выхода, при такой системе линейного фильтра? Если да, то во сколько раз?

- Предположим, наконец, что характеристическая функция фильтра из рис. 6.82 равна

$$H(z) = \frac{1 + \frac{7}{8}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

Изобразите потоковый график всей системы из рисунка с каждой из следующих форм реализации линейного фильтра:

- (i) прямая форма I;
- (ii) прямая форма II;
- (iii) транспонированная прямая форма I;
- (iv) транспонированная прямая форма II.

Какой из этих графов представляет более эффективную реализацию системы из рис. 6.82?

- 6.39. Речеобразование можно моделировать линейной системой, представляющей голосовой резонатор, который возбуждается колебаниями воздуха, прошедшим через голосовые связки. Один из подходов к синтезированию речи включает в себя интерпретацию голосового резонатора как совокупности цилиндрических акустических трубок равной длины, но с варьируемой площадью сечения, как

показано на рис. 6.83. Допустим, нам нужно моделировать эту систему в терминах объемной вязкости, представляющей поток воздуха. Входной сигнал формируется в речевом тракте малым натяжением голосовых связок. Будем предполагать, что входной сигнал представляется изменением объемной вязкости на левом конце, но граничное условие для бегущей волны на левом конце состоит в равенстве нулю объемной вязкости. Это аналогично разомкнутой линии электропроводки с источником тока на одном из ее концов. Ток в линии передачи аналогичен объемной вязкости в акустической среде, в то время как напряжение аналогично акустическому давлению. Выходом системы служит объемная вязкость на правом конце. Мы предполагаем, что каждый участок является акустической линией передачи без потерь.

На каждой границе между участками прямая волна f^+ передается на следующий участок с одним коэффициентом, а возвращается как обратная волна f^- с другим. Аналогично, обратная волна f^- , подходящая к границе, передается с одним, а возвращается с другим коэффициентом. Если мы рассматриваем прямую волну f^+ в трубке с площадью сечения A_1 , подходящую к границе с трубкой, площадь сечения которой — A_2 , то передаваемая прямая волна будет равна $(1 + r)f^+$, а отраженная — rf^+ , где $r = \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1}$. Пусть длина каждой трубки равна 3,4 см, а скорость звука — 34 000 см/с. Нарисуйте потоковый график, реализующий четырехсекционную модель из рис. 6.83, с дискретизованным (при частоте 20 000 отч./с.) выходом.

Несмотря на столь длинное введение, это довольно простая задача. Если вам покажется сложным рассуждать в терминах акустических труб, рассуждайте в терминах участков линии электропроводки с различным сопротивлением. Впрочем, и для линий передачи трудно выразить импульсную характеристику аналитически. Поэтому вам стоит нарисовать сеть, опираясь непосредственно на физическую задачу в терминах прямых и обратных импульсов на каждом участке.

- 6.40. При моделировании шумов округления и усечения в реализации цифровых фильтров квантованные переменные представляются как

$$\hat{x}[n] = Q[x[n]] = x[n] + e[n],$$

где $Q[\cdot]$ обозначает округление или усечение чисел до $(B + 1)$ битов, а $e[n]$ — ошибку квантования. Мы предполагаем, что последовательность шума квантования — стационарный белый шум, так что

$$\mathcal{E}\{(e[n] - m_e)(e[n + m] - m_e)\} = \sigma_e^2 \delta[m],$$

а амплитуда шума равномерно распределена по отрезку шага квантования $\Delta = 2^{-B}$. Плотность вероятности округления и усечения показана на рис. 6.84.

- Найдите среднее значение m_e и дисперсию σ_e^2 шума, возникающего при округлении.
- Найдите среднее значение m_e и дисперсию σ_e^2 шума, возникающего при усечении.

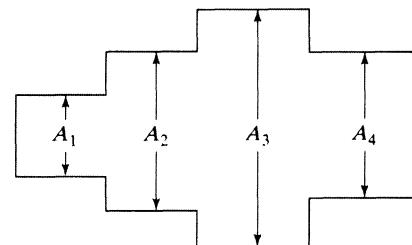
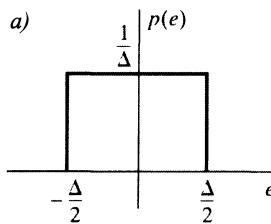
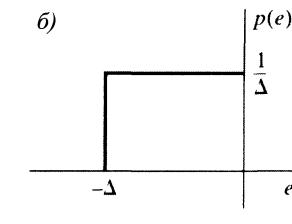


Рис. 6.83.

Рис. 6.84. а)

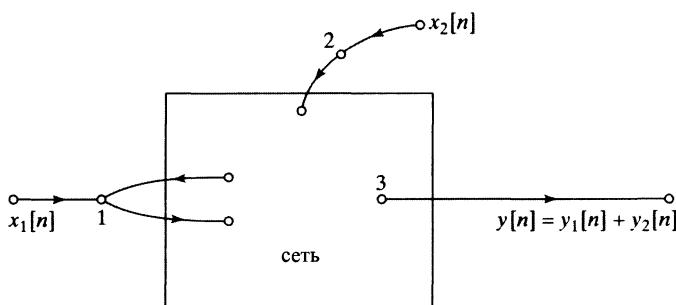


б)



- 6.41. Рассмотрите ЛС-систему с двумя входами, как на рис. 6.85. Пусть $h_1[n]$ и $h_2[n]$ — ее импульсные характеристики от узлов 1 и 2 до выхода, обозначенного узлом 3, соответственно. Покажите, что при некоррелированных входных сигналах $x_1[n]$ и $x_2[n]$ соответствующие отклики тоже некоррелированы.

Рис. 6.85.



- 6.42. Все сети из рис. 6.86 представляют одну и ту же характеристическую функцию. Предположите, что при реализации системы этими сетями используется $(B+1)$ -битовая арифметика с фиксированной точкой, а все произведения округляются до $(B+1)$ бита перед сложением.

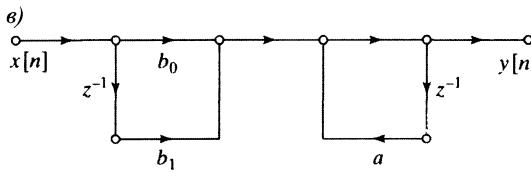
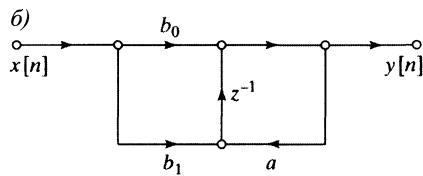
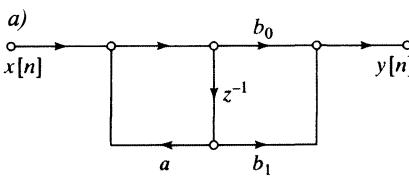


Рис. 6.86.

- а) Изобразите модель линейного шума для каждой из сетей рисунка.
- б) Две сети из рис. 6.86 имеют одну и ту же мощность шума на выходе, возникающего ввиду округления. Не вычисляя эту мощность, определите, о каких сетях идет речь.

- в) Найдите мощность шума на выходе каждой из сетей, выразив свой ответ через мощность источника шума округления σ_B^2 .

- 6.43. Потоковый график системы первого порядка приведен на рис. 6.87.

- а) Предполагая, что все вычисления осуществляются точно, найдите реакцию системы на сигнал

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Рис. 6.87.

Что можно сказать о значениях реакции при больших n ?

Пусть теперь система реализуется в арифметике конечной точности. Коэффициенты и все переменные сети представляются 5 битами, зарезервированными для знака и модуля, т. е. все числа имеют знак b_0 и 4 значащие двоичные цифры, так что

$$|\text{число}| = b_1 2^{-1} + b_2 2^{-2} + b_3 2^{-3} + b_4 2^{-4}.$$

Если $b_0 = 0$, то дробь положительна, а если $b_0 = 1$, то отрицательна. Результат произведения членов последовательности на коэффициент перед сложением усекается, т. е. оставляют только знаковый бит и 4 первые значащие цифры, отбрасывая все остальные.

- б) Вычислите отклик квантованной системы на сигнал из предыдущего пункта и нарисуйте характеристики квантованной и неквантованной систем при $0 \leq n \leq 5$. Как соотносятся характеристики при больших n ?

- в) Рассмотрите систему из рис. 6.88, где

$$x[n] = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{2}, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Повторите решения подзадач а) и б) для этой системы и входного сигнала.

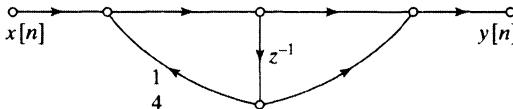


Рис. 6.88.

- 6.44. Характеристическая функция детерминированной ЛС-системы равна

$$H(z) = \frac{1}{1 - 1,04z^{-1} + 0,98z^{-2}}.$$

- а) Устойчива ли эта система?

- б) Будет ли она устойчивой, если округлить коэффициенты системы до первого знака после десятичной запятой?

- 6.45. При абсолютно точных вычислениях графы из рис. 6.89 представляют одну и ту же характеристическую функцию.

- а) Покажите, что эти системы имеют общую характеристическую функцию.

- б) Предположите, что предыдущие системы реализованы в арифметике с конечной точностью в дополнительном коде, причем округление произведений происходит перед сложением. Нарисуйте сигнальный потоковый граф, вставив на подходящих места графа из рис. 6.89 источники шума округления.
- в) Укажите узлы в вашем графе из предыдущего пункта, где могут происходить переполнения.
- г) Определите максимальный размер отсчетов выходного сигнала, при котором переполнений не будет ни в одной из этих двух систем.
- д) Пусть $|a| < 1$. Найдите суммарную мощность шума на выходе для каждой системы и максимальное значение $|a|$, при котором сеть 1 имеет меньшую мощность выходного шума, чем сеть 2.

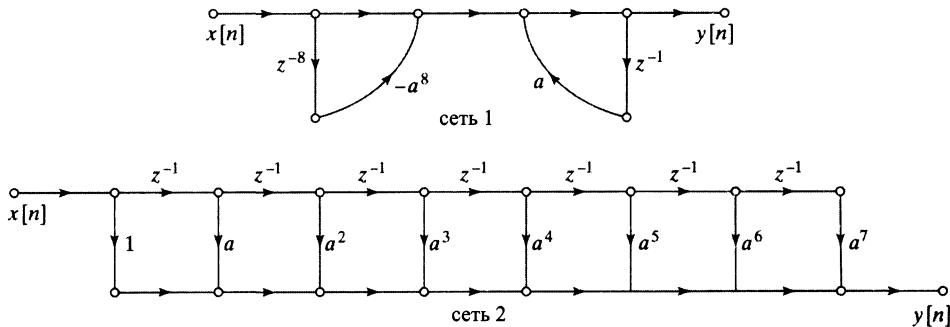


Рис. 6.89.

ГЛАВА 7

ТЕХНИКА ПРОЕКТИРОВАНИЯ ФИЛЬТРОВ

7.1. Введение

Фильтры — особо важный класс линейных стационарных систем. Строго говоря, термин «частотно-избирательный фильтр» обозначает систему, которая пропускает определенные частотные компоненты и полностью задерживает все остальные. Но в более широком смысле фильтром можно называть любую систему, меняющую определенные частоты входного сигнала. Несмотря на то что основной акцент в этой главе сделан на частотно-избирательных фильтрах, некоторые разбираемые приемы имеют более широкое применение. Кроме того, мы будем изучать проектирование детерминированных фильтров, хотя во многих ситуациях нет необходимости в таком ограничении. Довольно часто проектирование и реализация недетерминированных фильтров сводится к модификации детерминированных.

Проектирование фильтров состоит из следующих шагов:

- 1) спецификация желаемых свойств системы;
- 2) аппроксимация спецификаций с помощью детерминированной дискретной системы;
- 3) реализация системы.

Хотя эти три шага, несомненно, не зависят друг от друга, большую часть времени мы уделим второму, поскольку первый сильно зависит от приложений, а третий — от технологии, используемой для реализации системы. На практике желаемый фильтр, как правило, реализуется с помощью цифровых вычислений и используется для фильтрования сигнала, полученного из непрерывного периодической дискретизацией и аналогово-цифрового преобразования. По этой причине дискретные фильтры принято относить к цифровым, несмотря на то что техника их проектирования по большей части относится только к сигналам и системам, дискретным по своей природе.

Если дискретный фильтр предназначен для дискретной обработки непрерывного сигнала (см. рис. 7.1), его спецификации, как и спецификации эффективного непрерывного фильтра, обычно (но не всегда) указываются в частотной области. В особенности это верно для таких частотно-избирательных фильтров, как

полосовые фильтры и фильтры нижних и верхних частот. В § 4.5 было показано, что если дискретная ЛС-система применяется так, как на рис. 7.1, входной сигнал является узкополосным, а достаточно высокая частота дискретизации обеспечивает отсутствие ложных частот, то вся система из рис. 7.1 ведет себя как непрерывная ЛС-система с КЧХ

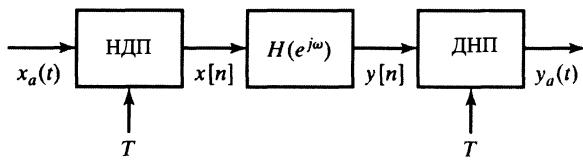
$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| > \pi/T. \end{cases} \quad (7.1)$$

В таком случае спецификации дискретного фильтра выводят из спецификаций *эффективного непрерывного фильтра, основываясь на соотношении $\omega = \Omega T$.* Иными словами, КЧХ $H(e^{j\omega})$ дискретного фильтра определяется формулой:

$$H(e^{j\omega}) = H_{\text{eff}}\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi. \quad (7.2)$$

Этот прием иллюстрируется в следующем примере.

Рис. 7.1. Базисная система, предназначенная для дискретного фильтрования непрерывных сигналов



Пример 7.1. Определение спецификаций дискретного фильтра

Рассмотрим дискретный фильтр, встроенный в базисную конфигурацию из рис. 7.1, предназначенную для фильтрования низких частот непрерывного сигнала. Нам нужно, чтобы вся система из этого рисунка при частоте дискретизации 10^4 отсч./с ($T = 10^{-4}$ с) обладала следующими свойствами.

- Коэффициент усиления $|H_{\text{eff}}(j\Omega)|$ в полосе частот $0 \leq \Omega \leq 2\pi(2000)$ должен отличаться от единицы не более чем на $\pm 0,01$.
- В полосе частот $2\pi(3000) \leq \Omega$ этот коэффициент не должен превышать величины 0,001.

Требования, предъявляемые к коэффициенту пропускания $|H_{\text{eff}}(j\Omega)|$, можно изображать графически, как это сделано на рис. 7.2, a), где серыми полосками обозначена допустимая ошибка приближения коэффициента усиления. Для нашего конкретного примера параметры, указанные на рисунке, равны

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0,01, & \Omega_p &= 2\pi(2000), \\ \delta_2 &= 0,001, & \Omega_s &= 2\pi(3000). \end{aligned}$$

Таким образом, идеальный коэффициент усиления в полосе пропускания, равный единице, варьируется от $(1 + \delta_1)$ до $(1 - \delta_1)$, а в области непропускания — от 0 до δ_2 . Максимальные коэффициенты пропускания принято выражать в децибелах. В нашем примере имеем:

идеальный коэффициент усиления в полосе пропускания	= 0 дБ,
максимальный коэффициент усиления в полосе пропускания	= 0,086 дБ,
максимальный коэффициент усиления в полосе непропускания	= -60 дБ.

Так как частота дискретизации равна 10^4 отч./с, коэффициент пропускания непрерывной системы при частотах, превышающих значение $\Omega = 2\pi(5000)$, тождественно равен нулю благодаря идеальному ДНП, присутствующему в системе.

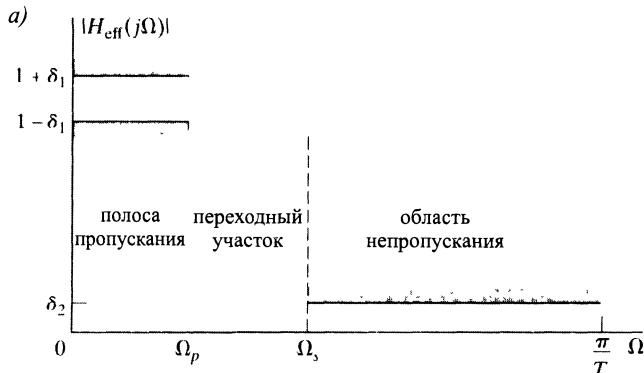
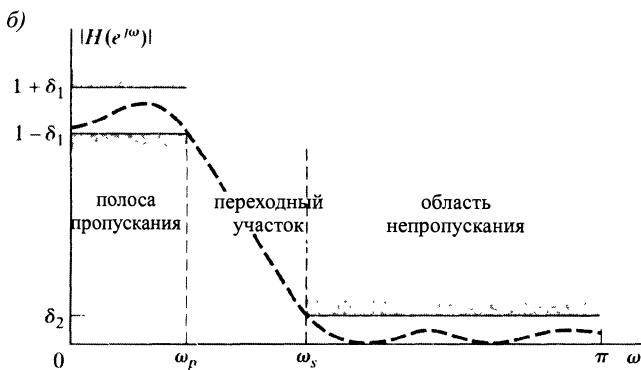


Рис. 7.2. а) спецификации эффективной КЧХ непрерывной системы из рис. 7.1; б) соответствующие спецификации дискретного фильтра из того же рисунка



Допустимые характеристики дискретного фильтра приведены на рис. 7.2, б). Они совпадают с кривыми из рис. 7.2, а), за исключением того, что изображены как графики функций от нормализованной частоты ($\omega = \Omega T$) на промежутке $0 \leq \omega \leq \pi$. Оставшиеся части графиков можно восстановить из соображений симметрии (в предположении вещественности импульсной характеристики $h[n]$) и периодичности КЧХ $H(e^{j\omega})$. Из формулы (7.2) следует, что в АЧХ *полосе пропускания* должна быть равна единице с допуском $\pm\delta_1$, т. е.

$$1 - \delta_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_1, \quad |\omega| \leq \omega_p, \quad (7.3)$$

где $\delta_1 = 0,01$ и $\omega_p = 2\pi(2000) \cdot 10^{-4} = 0,4\pi$ рад. Следующая интересующая нас полоса частот — *полоса непропускания*. Там АЧХ должна быть нулевой с точностью до δ_2 :

$$|H(e^{j\omega})| \leq \delta_2, \quad \omega_s \leq |\omega| \leq \pi. \quad (7.4)$$

В нашем примере $\delta_2 = 0,001$, а $\omega_s = 2\pi(3000) \cdot 10^{-4} = 0,6\pi$ рад. Частота отсечки ω_p , определяющая полосу пропускания, и частота отсечки ω_s , ограничивающая полосу непропускания, даны в терминах нормализованной круговой частоты или, что тоже самое, в терминах аргумента комплексной плоскости. Для аппроксимации идеального

фильтра нижних частот с такими характеристиками реальной системой нам необходимо ввести переходный участок ненулевой ширины ($\omega_s - \omega_p$), в котором АЧХ гладко меняется от значения в полосе пропускания до значения в полосе непропускания. Пунктирная линия на рис. 7.2, б) обозначает АЧХ системы, соответствующей указанным спецификациям. □

Во многих приложениях фильтруемый дискретный сигнал получается не из непрерывного сигнала, и существуют другие многообразные средства, кроме периодической дискретизации, представляющие непрерывный сигнал в виде последовательности. (См., например, [146 и 107].) Кроме того, в большинстве технических приемов проектирования, которые мы обсуждаем, шаг дискретизации не играет никакой роли в процедуре аппроксимации. По этой причине можно считать, что задача проектирования фильтров начинается с набора желаемых спецификаций, выраженных в терминах переменной дискретной частоты ω . В зависимости от конкретного приложения или контекста эти характеристики могут быть (а могут и не быть) получены из рассмотрения фильтрования в рамках системы из рис. 7.1.

Многие из фильтров, используемых на практике, разрабатываются исходя из схемы допустимых значений АЧХ, аналогичной приведенной на рис. 7.1. При этом на свойства ФЧХ практически не обращают внимания, следя лишь за устойчивостью или детерминированностью системы. Например, полюса характеристической функции детерминированной устойчивой системы с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-системы) должна лежать внутри единичного круга. С другой стороны, при проектировании фильтров с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтров) часто заботятся о линейности фазы, что, однако, не вынуждает нас заниматься ею особо при разработке фильтров.

Имея спецификации фильтра, аналогичные представленным на рис. 7.2, б), нам необходимо определить характеристическую функцию дискретной линейной системы, чья КЧХ удовлетворяет наложенным требованиям с учетом допустимых ошибок. Эта задача относится к аппроксимации функций. При создании БИХ-фильтров мы должны найти рациональную функцию от z , приближенно удовлетворяющую данным спецификациям, т. е. решаем задачу о рациональной аппроксимации, в то время как при проектировании КИХ-фильтров мы ограничены полиномиальными характеристическими функциями и наилучшее приближение надо искать среди них (задача полиномиальной аппроксимации). При изложении материала было учтено различие в методах решения задачи аппроксимации для БИХ- и КИХ-фильтров. Мы обсудим методы проектирования обоих типов фильтров, начиная от компактной процедуры, при которой мы должны лишь подставить конкретные спецификации в стандартные формулы, и заканчивая алгоритмическими методами, в которых решение получается в результате итераций.

7.2. Проектирование дискретных БИХ-фильтров, основанное на непрерывных фильтрах

Традиционный подход к проектированию дискретных БИХ-фильтров основан на преобразовании непрерывного фильтра в дискретный, обладающий необходимыми спецификациями. Это разумный подход по следующим причинам.

- Искусство проектирования непрерывных БИХ-фильтров на данный момент является широко развитой областью знания, и, поскольку в ней уже получено большое число полезных и красивых результатов, было бы странно ими не воспользоваться при проектировании дискретных систем.
- Многие из найденных методов проектирования непрерывных БИХ-фильтров сводятся к относительно простой и компактной формуле. Следовательно, разработку дискретных БИХ-фильтров, основанную на стандартной формуле для непрерывных, осуществить довольно просто.
- Стандартные аппроксимационные методы, корректно работающие в случае непрерывных фильтров, не допускают простой компактной формулы проектирования при применении этих методов непосредственно к созданию дискретных БИХ-фильтров.

Тот факт, что проект непрерывного фильтра можно трансформировать в проект дискретного, никак не связан с тем, будет ли дискретный вариант проекта использоваться в конфигурации из рис. 7.1 для обработки непрерывных сигналов. Подчеркнем еще раз, что процедура создания дискретного фильтра начинается с набора дискретных спецификаций. Впредь будем считать, что упомянутый набор требований был определен анализом, аналогичным приведенному в примере 7.1, или иным способом. Мы используем методы, приближенные к разработке непрерывных фильтров, только в целях упрощения поиска дискретной системы с желаемыми характеристиками. Действительно, непрерывный фильтр, на аппроксимации которого мы основываемся, может обладать КЧХ, значительно отличающейся от эффективной КЧХ системы из рис. 7.1, в которую дискретный фильтр входит составной частью.

Спецификации непрерывного фильтра, служащего прототипом дискретного, получаются преобразованием спецификаций последнего. Характеристическая функция $H_c(s)$ или импульсная характеристика $h_c[n]$ непрерывного фильтра при этом определяются с помощью одного из существующих аппроксимационных методов, примеры которых разобраны в приложении Б. После этого характеристическая функция $H(z)$ или импульсная характеристика $h[n]$ искомого дискретного фильтра находится из $H_c(s)$ (соответственно из $h_c[n]$) в результате некоторого преобразования, которое мы будем обсуждать в этом параграфе.

Мы требуем, чтобы существенные свойства непрерывной КЧХ оставались выполненными и для КЧХ интересующего нас дискретного фильтра. Заметим, что преобразование $H_c(s)$ в $H(z)$ заключается в отображении s -плоскости на z -плоскость, при котором мнимая ось¹ переходит в единичную окружность². Следующая цель, преследуемая при преобразовании, состоит в сохранении устойчивости фильтров при трансформации из непрерывного в дискретный. Это означает, что если характеристическая функция непрерывного фильтра имела полюса только в левой s -полуплоскости, то все полюса характеристической функции соответствующего дискретного фильтра должны попасть внутрь единичного круга на z -плоскости. Именно этими соображениями мы будем руководствоваться в этом параграфе.

¹Область определения функции $H_c(s)$. — Примеч. перев.

²Область определения функции $H(z)$. — Примеч. перев.

7.2.1. Разработка фильтров с помощью импульсной инвариантности

В подразделе 4.5.2 мы обсуждали понятие *импульсной инвариантности*, отражающее ситуацию, при которой дискретная система получается дискретизацией импульсной характеристики непрерывной. Там было показано, что импульсная инвариантность дает простое средство вычисления отсчетов реакции узкополосной непрерывной системы на узкополосный входной сигнал. В качестве альтернативы в контексте проектирования фильтров мы можем представлять себе импульсную инвариантность как метод получения дискретной системы, чья КЧХ определяется частотной характеристикой непрерывной системы.

При трансформировании непрерывного фильтра в дискретный с использованием импульсной инвариантности импульсная характеристика дискретного фильтра задается формулой:

$$h[n] = T_d h_c(nT_d), \quad (7.5)$$

где T_d — шаг дискретизации. Как мы увидим несколько позже, параметр T_d из соотношения (7.5) фактически не играет никакой роли ни в процессе проектирования, ни в конечном дискретном фильтре. Однако его принято включать в определение процедуры, и мы будем учитывать этот параметр в наших рассуждениях. Мы вскоре убедимся, что, даже если фильтр используется в основной конфигурацию из рис. 7.1, проектный шаг дискретизации T_d не обязан совпадать с шагом дискретизации T , задействованным в НДП или ДНП.

При использовании импульсной инвариантности для проектирования дискретных фильтров с конкретной КЧХ нас особенно интересует соотношение между КЧХ исходного непрерывного и искомого дискретного фильтров. Как вытекает из результатов главы 4, КЧХ дискретного фильтра, полученного с помощью формулы (7.5), связана с КЧХ прототипа следующей формулой:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c \left(j \frac{\omega}{T_d} + j \frac{2\pi}{T_d} k \right). \quad (7.6)$$

Если непрерывный фильтр узкополосный, т. е.

$$H_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \pi/T_d, \quad (7.7)$$

то

$$H(e^{j\omega}) = H_c \left(j \frac{\omega}{T_d} \right), \quad |\omega| \leq \pi. \quad (7.8)$$

Иначе говоря, дискретная и непрерывная КЧХ связаны между собой линейным преобразованием частотной оси, а именно $\omega = \Omega T_d$ при $|\omega| < \pi$. К сожалению, никакой интересный с практической точки зрения непрерывный фильтр не может быть идеально узкополосным и, следовательно, соседние члены суммы (7.6) интерферируют, индуцируя ложные частоты, что отражено на рис. 7.3. Однако если характеристика непрерывного фильтра становится практически нулевой при больших частотах, то наложение спектров может оказаться пренебрежительно малым, и полезный дискретный фильтр получится в результате дискретизации импульсной характеристики непрерывного фильтра.

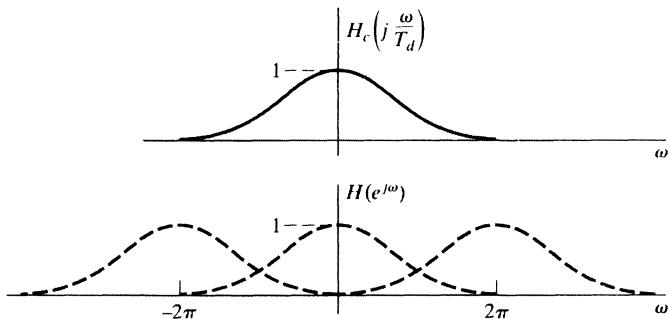


Рис. 7.3. Иллюстрация ложных частот при проектировании дискретного фильтра на основе импульсной инвариантности

Опираясь при проектировании на импульсную инвариантность, мы прежде всего трансформируем заданные спецификации дискретного фильтра в характеристики непрерывного с помощью формулы (7.8). Предполагая, что ложными частотами, возникающими при преобразовании функции $H_c(j\Omega)$ в $H(e^{j\omega})$, можно пренебречь, получаем список спецификаций функции $H_c(j\Omega)$, применяя подстановку

$$\Omega = \omega/T_d \quad (7.9)$$

к характеристикам функции $H(e^{j\omega})$. Найдя подходящий непрерывный фильтр с характеристической функцией $H_c(s)$, удовлетворяющий полученным требованиям, мы преобразуем его в желаемый дискретный фильтр с характеристической функцией $H(z)$.

Коротко обсудим детали преобразования функции $H_c(s)$ в $H(z)$, заметив, что при обратном переходе к дискретной частоте функция $H(e^{j\omega})$ будет связана с $H_c(j\Omega)$ формулой (7.6), которая применяет преобразование (7.9) к частотной оси. Как следствие, параметр «дискретизации» T_d нельзя использовать для контроля над ложными частотами. Поскольку основные спецификации заданы в терминах дискретной частоты, то при увеличении частоты дискретизации (т. е. уменьшении параметра T_d) частота отсечки непрерывного фильтра должна пропорционально увеличиваться. На практике для компенсирования наложения спектров, которое может появиться в результате преобразования функции $H_c(s)$ в $H(z)$, непрерывный фильтр отчасти перепроектируется, т. е. спроектирован с превышением спецификаций, в особенности в области непропускания.

Так как преобразование непрерывной ситуации в дискретную методом импульсной инвариантности определено в терминах дискретизации во временной области, его легко осуществить, преобразуя характеристические функции. Для раскрытия этого преобразования рассмотрим характеристическую функцию непрерывного фильтра, записанную в виде суммы простейших дробей³:

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}. \quad (7.10)$$

³ Для упрощения изложения будем считать, что все полюса функции $H_c(s)$ имеют первый порядок. В задаче 7.24 рассматривается случай кратных полюсов.

Соответствующая импульсная характеристика имеет вид:

$$h_c(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (7.11)$$

Импульсная характеристика дискретного фильтра, получаемая дискретизацией функции $T_d h_c(t)$, равна

$$h[n] = T_d h_c(nT_d) = \sum_{k=1}^N T_d A_k e^{s_k n T_d} u[n] = \sum_{k=1}^N T_d A_k (e^{s_k T_d})^n u[n]. \quad (7.12)$$

Следовательно, характеристическая функция дискретного фильтра записывается как

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}. \quad (7.13)$$

Из сравнения формул (7.10) и (7.13) видно, что полюс в точке $s = s_k$ на s -плоскости переходит в полюс $z = e^{s_k T_d}$ z -плоскости, а коэффициенты разложения функций $H_c(s)$ и $H(z)$ в сумму простейших дробей совпадают с точностью до умножения на T_d . У характеристической функции устойчивого непрерывного фильтра вещественная часть полюсов s_k отрицательна. Поэтому модуль полюсов $e^{s_k T_d}$ оказывается меньше единицы, т. е. все полюса характеристической функции $H(z)$ дискретного фильтра попадают внутрь единичного круга, обеспечивая его устойчивость.

Несмотря на то что при преобразовании, ассоциированном с импульсной инвариантностью, полюса s -плоскости переходят в полюса z -плоскости по правилу $s_k \mapsto z_k = e^{s_k T_d}$, отображение всей s -плоскости на z -плоскость далеко не такое простое. В частности, нули характеристической функции дискретного фильтра зависят от полюсов и коэффициентов $T_d A_k$ простейших дробей, причем в общей ситуации их связь с нулями функции $H_c(s)$ существенно более сложная, чем связь между полюсами.

Проиллюстрируем метод импульсной инвариантности проектирования дискретного фильтра на следующем примере.

Пример 7.2. Импульсная инвариантность и фильтр Баттервортта

Рассмотрим проектирование дискретного фильтра нижних частот методом импульсной инвариантности на основе подходящего непрерывного фильтра Баттервортта⁴. Спецификации искомого дискретного фильтра представлены списком:

$$0,89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1, \quad 0 \leq |\omega| \leq 0,2\pi, \quad (7.14)$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0,17783, \quad 0,3\pi \leq |\omega| \leq \pi. \quad (7.15)$$

Поскольку параметр T_d несуществен для процедуры импульсной инвариантности, можно положить его равным единице, так что $\omega = \Omega$. В задаче 7.2 разбирается тот же пример, но с нетривиальным параметром T_d , чтобы на собственном опыте убедиться, как и в каком месте процедуры он пропадает.

⁴Непрерывные фильтры Баттервортта и Чебышева обсуждаются в приложении Б.

Согласно алгоритму проектирования с помощью импульсной инвариантности, мы начинаем с преобразования спецификаций дискретного фильтра в характеристики непрерывного. Напомним, что импульсной инвариантности при отсутствии ложных частот соответствует линейное преобразование, связывающее Ω и ω . Будем предполагать, что в этом примере эффектом наложения спектров можно пренебречь. После того как мы разработаем желаемый фильтр, можно будет сравнить его КЧХ с перечисленными спецификациями.

Ввиду предыдущих рассуждений нам нужно разработать непрерывный фильтр Баттервортса с АЧХ $|H_c(j\Omega)|$, удовлетворяющей требованиям:

$$0,89125 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1, \quad 0 \leq |\omega| \leq 0,2\pi, \quad (7.16)$$

$$|H_c(j\Omega)| \leq 0,17783, \quad 0,3\pi \leq |\omega| \leq \pi. \quad (7.17)$$

Поскольку АЧХ аналогового фильтра Баттервортса — монотонная функция частоты, то неравенства (7.16) и (7.17) будут выполнены, если

$$|H_c(j0, 2\pi)| \geq 0,89125, \quad (7.18)$$

$$|H_c(j0, 3\pi)| \leq 0,17783. \quad (7.19)$$

Будем искать искомую АЧХ в виде

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} \quad (7.20)$$

с целым числом N , так что нам достаточно подобрать нужные значения N и Ω_c , при которых получаются ограничения (7.18) и (7.19). Используя верхние границы этих неравенств, из равенства (7.20) получаем

$$\begin{cases} 1 + \left(\frac{0,2\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0,89125}\right)^2, \\ 1 + \left(\frac{0,3\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0,17783}\right)^2. \end{cases} \quad (7.21)$$

Решением системы уравнений служат числа $N = 5,8858$ и $Q = 0,70474$. Но параметр N должен быть целым. Следовательно, чтобы добиться нужных спецификаций, нам следует округлить N до ближайшего целого числа $N = 6$. Естественно, из-за округления фильтр теперь не будет удовлетворять уравнениям системы (7.21). Остановившись на $N = 6$, нам теперь следует подправить и параметр Ω_c так, чтобы превысить спецификационные требования в полосе пропускания или в полосе непропускания (или в обеих сразу). Можно показать, что при варьировании параметра Ω_c между ошибками значений спецификационных требований в полосах пропускания и непропускания происходит обмен. Подставив $N = 6$ в первое уравнение системы и найдя из него параметр $\Omega_c = 0,7032$, мы получим, что при таком выборе параметров условие на полосу пропускания непрерывного фильтра выполнено точно, а вот его спецификации в полосе непропускания будут превышены, что провоцирует ложные частоты в дискретном фильтре. При $\Omega_c = 0,7032$ и $N = 6$ двенадцать полюсов функции $H_c(s)H_c(-s) = 1/(1+(s/\Omega_c)^{2N})$ равномерно распределены в секторе круга радиуса $\Omega_c = 0,7032$ (рис. 7.4). Значит, полюсы функции $H_c(s)$ разбиваются на три пары в левой части s -плоскости и имеют координаты:

$$\text{пара полюсов 1: } -0,182 \pm j(0,679),$$

$$\text{пара полюсов 2: } -0,497 \pm j(0,497),$$

$$\text{пара полюсов 3: } -0,679 \pm j(0,182).$$

Следовательно,

$$H_c(s) = \frac{0,12093}{(s^2 + 0,3640s + 0,4945)(s^2 + 0,9945s + 0,4945)(s^2 + 1,3585s + 0,4945)}. \quad (7.22)$$

Разложим $H_c(s)$ в сумму простейших дробей и выпишем функцию $H(z)$, воспользовавшись формулой (7.13). Сгруппировав затем комплексно сопряженные члены, получим

$$H(z) = \frac{0,2871 - 0,4466z^{-1}}{1 - 1,2971z^{-1} + 0,6949z^{-2}} + \frac{-2,1428 + 1,1455z^{-1}}{1 - 1,0691z^{-1} + 0,3699z^{-2}} + \frac{1,8557 - 0,6303z^{-1}}{1 - 0,9972z^{-1} + 0,2570z^{-2}}. \quad (7.23)$$

Отсюда видно, что характеристическую функцию, полученную процедурой, основанной на импульсной инвариантности, можно сразу реализовать в параллельной форме. Если предпочтительнее каскадная или прямая форма, то нужно сгруппировать отдельные члены второго порядка подходящим образом.

Характеристики дискретной системы показаны на рис. 7.5. Напомним, что служащий прототипом нашего проекта непрерывный фильтр был разработан, исходя из спецификаций точных в срезе полосы пропускания и превышающих желаемые характеристики в срезе полосы непропускания. Это свойство остается верным и для полученного дискретного фильтра, что является признаком узкополосности исходного непрерывного фильтра, при которой исключается эффект наложения спектров. Действительно, разница между $20 \lg |H(e^{j\omega})|$ и $20 \lg |H_c(j\Omega)|$ на чертеже в таком масштабе незаметна нигде, за исключением небольшого отклонения в окрестности $\omega = \pi$. (Напомним, что $T_d = 1$, так что $\Omega = \omega$.) Иногда ложные частоты создают большие проблемы. Если в спроектированном дискретном фильтре необходимые спецификации не достигнуты ввиду ложных частот, то стоит попытаться его разработать, исходя из непрерывного фильтра более высокого порядка или того же порядка, но с другими параметрами. □

Основная идея метода импульсной инвариантности заключается в выборе импульсной характеристики дискретного фильтра, в некотором смысле аналогичной импульсной характеристике непрерывного фильтра. Применение этой процедуры часто мотивируется не столько желанием получить импульсную характеристику определенной формы, сколько знанием о достаточной близости КЧХ узкополосного непрерывного фильтра и соответствующего дискретного. Однако в некоторых задачах проектирования главным объектом разработки служат отдельные аспекты временной характеристики, например импульсной или переходной⁵. При этом естественный способ проектирования основывается на импульсной или переходной инвариантности. В последнем случае переходная характеристика дискретного фильтра определяется как дискретизация реакции

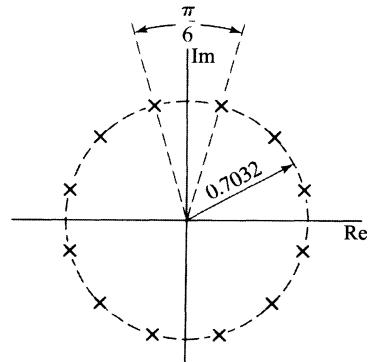


Рис. 7.4. Полюса $H_c(s)H_c(-s)$ для фильтра Баттерворт шестого порядка

⁵ Переходной характеристикой называется реакция системы на единичный скачок. — Примеч. перев.

соответствующего непрерывного фильтра на единичный скачок. Хорошие свойства переходной характеристики непрерывного фильтра, такие, например, как малое время нарастания, и небольшие выбросы на фронте импульса сохраняются и в случае дискретного фильтра.

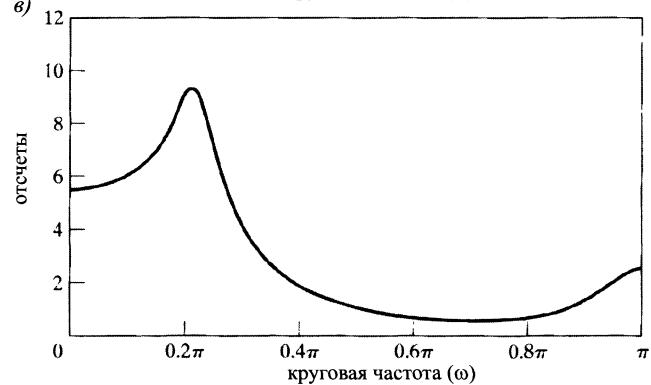
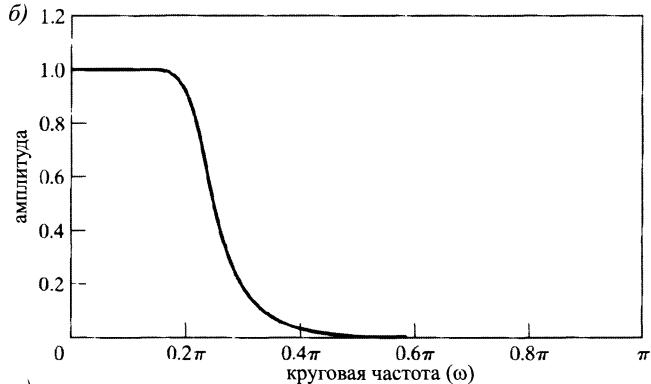
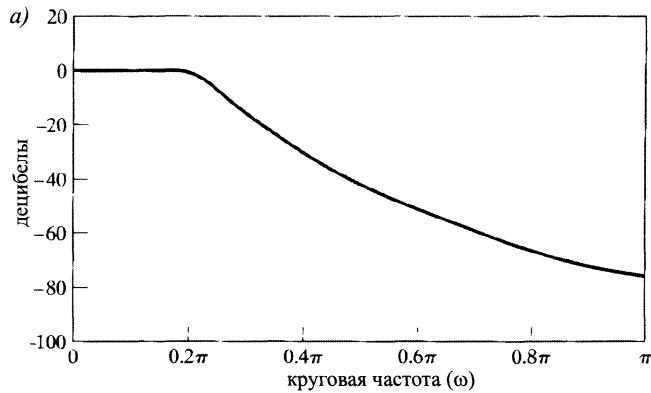


Рис. 7.5. КЧХ фильтра Баттерворта, преобразованная с помощью импульсной инвариантности: а) логарифм АЧХ в децибелах; б) АЧХ; в) групповая задержка

Ясно, что концепцию инвариантности формы волны можно обобщить на форму отклика системы при большом числе входных сигналов, что иллюстрируется в задаче 7.1. В ней подчеркивается тот факт, что «дискретизация» одного и

того же непрерывного фильтра, основанного на импульсной и переходной инвариантности (или некоторых других инвариантностях формы волны), приводит к *разным* дискретным фильтрам.

Соотношение между непрерывной и дискретной частотой при процедуре проектирования, исходящей из импульсной инвариантности, линейно. Следовательно, при этом сохраняется форма КЧХ, если, конечно, не появляются ложные частоты. Это контрастирует с процедурой, обсуждаемой ниже, которая основана на алгебраических преобразованиях. В заключение этого подраздела заметим, что техника импульсной инвариантности работает только для узкополосных фильтров, фильтров низких частот или полосовых фильтров, например потому, что при таком подходе необходимы дополнительные ограничения полосы, предохраняющие от серьезного искажения за счет ложных частот.

7.2.2. Дробно-линейное преобразование

Техника, обсуждаемая в этом подразделе, исключает проблемы, связанные с наложением спектров. Она основана на так называемом дробно-линейном преобразовании переменных s и z , при котором вся прямая $j\Omega$ s -плоскости один раз оборачивается вокруг единичной окружности z -плоскости. Так как множество $-\infty < \Omega < \infty$ отображается на отрезок $-\pi \leq \omega \pi$, закон, связывающий непрерывную и дискретную частоты, не может быть линейным. Поэтому такой прием применяется лишь в тех ситуациях, когда соответствующая деформация частотных осей приемлема.

Обозначая стандартным образом характеристическую функцию непрерывной системы через $H_c(s)$, а дискретной через $H(z)$, определим дробно-линейное преобразование формулой⁶:

$$s = \frac{2}{T_d} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right), \quad (7.24)$$

так что

$$H(z) = H_c \left(\frac{2}{T_d} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \right). \quad (7.25)$$

Как и при импульсной инвариантности в определение дробно-линейного преобразования включен «дискретизирующий» параметр T_d . Этот параметр — дань традиции. Он появился как шаг численного интегрирования по формуле трапеций, применяемого к дифференциальному уравнению, соответствующему $H_c(s)$, для вывода разностного уравнения, соответствующего $H(z)$ (см. [74] и задачу 7.43). Однако при проектировании фильтров мы исходим из алгебраического преобразования (7.24). Как и в импульсной инвариантности, коэффициент T_d не несет здесь никакой особой смысловой нагрузки, поскольку мы считаем, что процедура проектирования начинается с набора спецификаций КЧХ $H(e^{j\omega})$ дискретного фильтра. При переводе этого списка в спецификации непрерывного фильтра и последующей трансформации непрерывного фильтра в дискретный эффект присутствия параметра T_d аннулируется. Несмотря на то что в нашем обсуждении

⁶Понятие дробно-линейного преобразования происходит из теории функций комплексного переменного и обозначает отображение $z \mapsto s = \frac{a+bz}{c+dz}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ и $ad - bc \neq 0$. — Примеч. перев.

параметр T_d все же присутствует, в каждой конкретной задаче и примере мы можем положить его равным любому удобному для нас значению.

Для исследования свойств дробно-линейного преобразования выразим из этой формулы (7.24) переменную z :

$$z = \frac{1 + (T_d/2)s}{1 - (t_d/2)s}. \quad (7.26)$$

Подставляя теперь в дробь (7.26) $s = \sigma + j\Omega$, получаем

$$z = \frac{1 + \sigma T_d/2 + j\Omega T_d/2}{1 - \sigma T_d/2 - j\Omega T_d/2}. \quad (7.27)$$

Если $\sigma < 0$, то из соотношения (7.27) следует, что $|z| < 1$ при любом значении Ω . Аналогично, при $\sigma > 0$ для всех Ω имеем неравенство: $|z| > 1$. Таким образом, полюс функции $H_c(s)$, лежащей в левой полуплоскости переменной s , при таком преобразовании попадает внутрь единичного круга. Следовательно, детерминированные устойчивые непрерывные фильтры преобразуются в детерминированные устойчивые дискретные.

Покажем теперь, что мнимая ось s -плоскости при дробно-линейном преобразовании переходит в единичную окружность. Подставим для этого в (7.26) $s = j\Omega$:

$$z = \frac{1 + j\Omega T_d/2}{1 - j\Omega T_d/2}. \quad (7.28)$$

Так как числитель и знаменатель этой дроби комплексно сопряжены, т. е. имеют одинаковый модуль, то $|z| = 1$ для всех значений Ω , что и требовалось показать. При этом, обозначив z через $e^{j\omega}$, получим

$$e^{j\omega} = \frac{1 + j\Omega T_d/2}{1 - j\Omega T_d/2}. \quad (7.29)$$

Для вывода формулы, связывающей частоты ω и Ω , полезно вернуться к равенству (7.24) и подставить в нее $z = e^{j\omega}$:

$$s = \frac{2}{T_d} \left(\frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} \right). \quad (7.30)$$

Значит,

$$s = \sigma + j\Omega = \frac{2}{T_d} \left(\frac{2e^{-j\omega/2}(j \sin \frac{\omega}{2})}{2e^{-j\omega/2}(j \cos \frac{\omega}{2})} \right) = \frac{2j}{T_d} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}. \quad (7.31)$$

Сравнивая вещественные и мнимые части в этом равенстве, находим, что $\sigma = 0$ и

$$\Omega = \frac{2}{T_d} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \quad (7.32)$$

или

$$\omega = 2 \operatorname{arctg} \frac{\Omega T_d}{2}. \quad (7.33)$$

Эти свойства дробно-линейного преобразования иллюстрируются рис. 7.6, а) и б). Из функции (7.33) и ее графика на рис. 7.6, б) видно, что область частот $0 \leq \Omega \leq \infty$ переходит при таком преобразовании в отрезок $0 \leq \omega \leq \pi$, а противоположный луч $-\infty \leq \Omega \leq 0$ — в отрезок $-\pi \leq \omega \leq 0$. При дробно-линейном преобразовании ложные частоты не появляются, как это было в случае импульс-

ной инвариантности, поскольку здесь вся мнимая ось s -плоскости переходит в единичную окружность z -плоскости. Однако цена такому приобретению — нелинейность преобразования частотных осей, что хорошо видно как из (7.33), так и на рис. 7.6, б). Следовательно, дробно-линейное преобразование при проектировании дискретных фильтров следует применять только тогда, когда такая деформация частот допустима или может быть компенсирована, как в случае фильтров, аппроксимирующих идеальную ситуацию с кусочно-постоянной АЧХ. На рис. 7.7 показано, как КЧХ непрерывного фильтра и область допустимых ошибок трансформируются в КЧХ дискретного фильтра и ее область ошибок при дробно-линейном преобразовании в соответствии с формулами (7.32) и (7.33). Если при этом критические частоты (как, например, полосы пропускания или непропускания) непрерывного фильтра искажаются не слишком сильно, то его дискретная версия, полученная посредством преобразования (7.25), будет обладать желаемыми спецификациями.

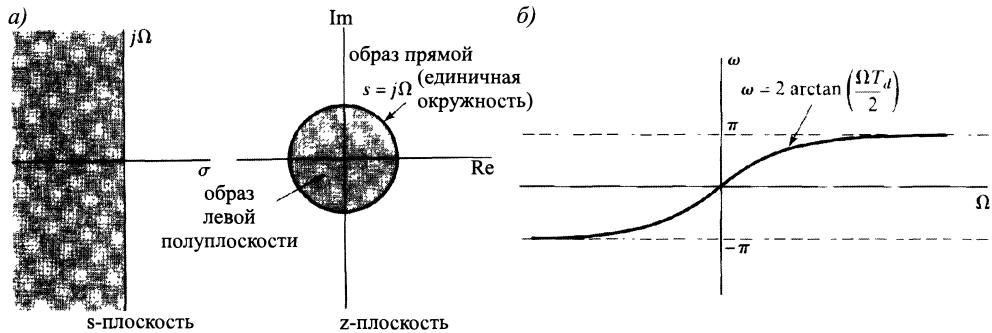


Рис. 7.6. а) дробно-линейное преобразование s -плоскости в z -плоскость; б) зависимость дискретной частоты от непрерывной при дробно-линейном преобразовании

Типичными аппроксимациями идеальных частотно-избирательных фильтров являются фильтры Баттервортса, Чебышева и эллиптический. Компактные формулы непрерывных аппроксимационных методов сильно упрощают процедуру проектирования. В приложении Б показано, что характеристика непрерывного фильтра Баттервортса монотонна в полосе пропускания и непропускания. Фильтр Чебышева первого типа обладает равномерно пульсирующей характеристикой в полосе пропускания и монотонно меняющейся в полосе задерживания. Характеристика второго типа фильтра Чебышева монотонна в полосе пропускания и равномерно пульсирует в полосе непропускания. Эллиптический фильтр пульсирует в обоих критических полосах. Ясно, что эти свойства сохраняются при трансформировании перечисленных фильтров в дискретные аналоги с помощью дробно-линейного преобразования, что отмечено пунктирной аппроксимацией на рис. 7.7.

Хотя дробно-линейное преобразование довольно эффективно при отображении кусочно-постоянной АЧХ из s -плоскости в z -плоскость, искажение частотной оси проявляется и в деформации ФЧХ фильтра. На рис. 7.8 в качестве примера приведен результат применения дробно-линейного преобразования к идеальному линейно-фазовому множителю $e^{-s\alpha}$. Подставив в эту экспоненту вместо

переменной s правую часть формулы (7.24) и ограничив значения z точками единичной окружности, получим, что линейно-фазовый множитель на s -плоскости переходит в множитель вида

$$e^{-s\alpha} \mapsto \exp \left\{ -j \frac{2\alpha}{T_d} \tan \frac{\omega}{2} \right\}.$$

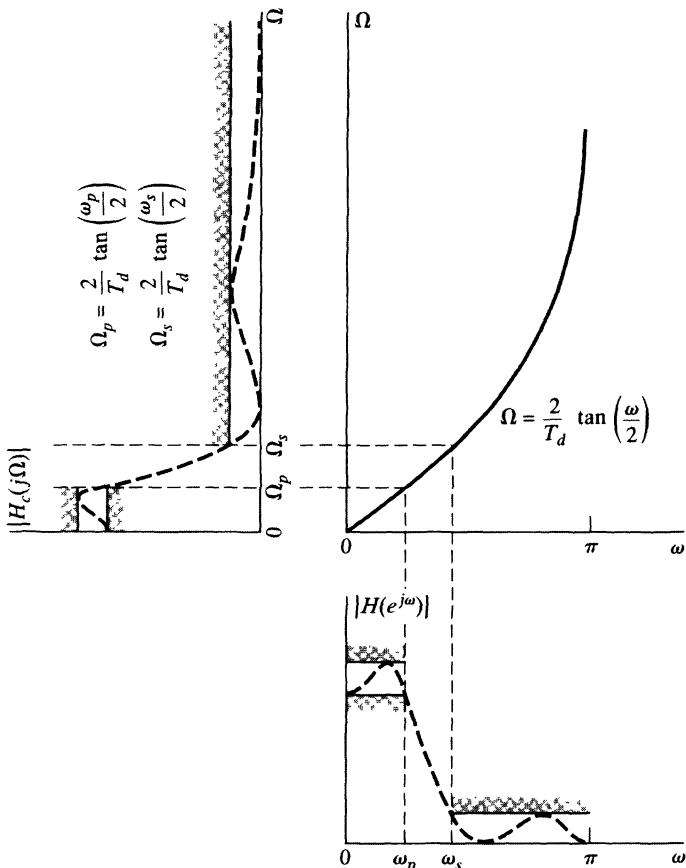


Рис. 7.7. Исажение частот при дробно-линейном преобразовании непрерывного фильтра нижних частот в дискретный. Для достижения необходимой частоты отсечки в дискретном варианте частота отсечки исходного фильтра должна быть предварительно подправлена

Следовательно, линейная фаза деформируется в фазу $-\frac{2\alpha}{T_d} \tan \frac{\omega}{2}$. Сплошной линией на рис. 7.8 отмечен график функции $-\frac{2\alpha}{T_d} \tan \frac{\omega}{2}$, а пунктирной — периодической линейно-фазовой функции $-\frac{\omega\alpha}{T_d}$, получающейся при аппроксимации: $\omega/2 \approx \tan(\omega/2)$. Отсюда становится очевидным, что дискретный фильтр нижних частот с линейно-фазовой характеристикой нельзя получить, применяя дробно-линейное преобразование к непрерывному линейно-фазовому фильтру нижних частот.

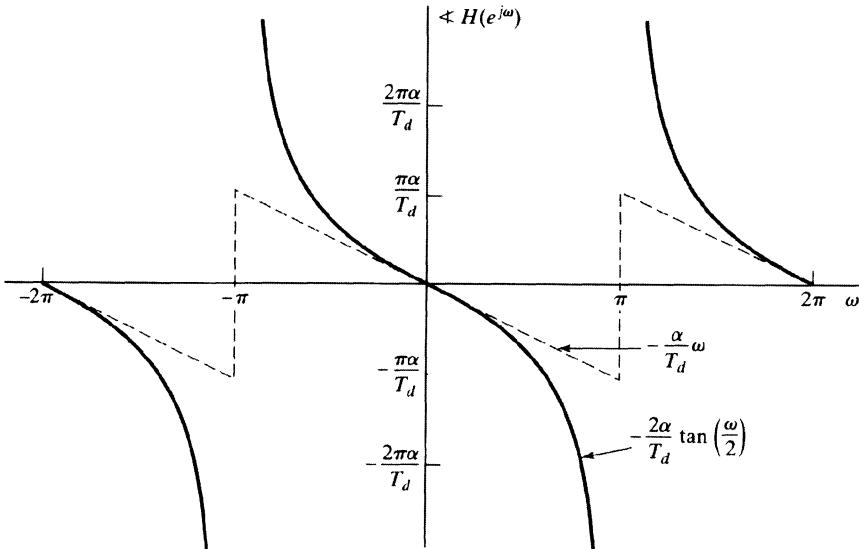


Рис. 7.8. Иллюстрация воздействия дробно-линейного преобразования на линейно-фазовую характеристику. (Пунктирная линия — линейная фаза, а сплошная — фаза, получающаяся дробно-линейным преобразованием)

Как отмечалось ранее, ввиду частотного искажения область приложения дробно-линейного преобразования ограничена проектированием аппроксимаций фильтров с кусочно-постоянной АЧХ, таких как фильтры верхних частот, нижних частот и полосовых фильтров. Напомним, что в примере 7.2 мы проектировали фильтр нижних частот на основе импульсной инвариантности. Однако импульсную инвариантность нельзя применять для трансформирования проекта непрерывного фильтра верхних частот в дискретный, поскольку непрерывный прототип не относится к узкополосным фильтрам.

В примере 4.5 обсуждался класс фильтров, которые часто называют дискретными дифференциаторами. Важная отличительная черта дифференциаторов заключается в линейности их КЧХ относительно частоты. Нелинейное искажение частотной оси при дробно-линейном преобразовании не сохраняет это важное свойство характеристики. Следовательно, результат применения дробно-линейного преобразования к непрерывному дифференциатору уже не будет дифференциатором. Однако остается возможность разрабатывать дискретные дифференциаторы с помощью импульсной инвариантности, применяемой к подходящему узкополосному непрерывному дифференциатору.

7.2.3. Примеры проектирования на основе дробно-линейного преобразования

Здесь речь пойдет о нескольких примерах, иллюстрирующих проектирование БИХ-фильтров через дробно-линейное преобразование. В примере 7.3 мы сравниваем процедуры проектирования, основанные на дробно-линейном преобразовании и импульсной инвариантности. Примеры 7.4, 7.5 и 7.6 посвящены соот-

ветственно фильтрам Баттервортса, Чебышева и эллиптическому, разрабатываемым, исходя из одного и того же списка спецификаций, с помощью дробно-линейного преобразования.

Пример 7.3. Дробно-линейное преобразование фильтра Баттервортса

Рассмотрим набор спецификаций дискретного фильтра из примера 7.2, иллюстрирующего проектирование дискретных фильтров на основе импульсной инвариантности:

$$0,89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1, \quad 0 \leq \omega \leq 0,2\pi, \quad (7.34)$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0,17783, \quad 0,3\pi \leq \omega \leq \pi. \quad (7.35)$$

Первым делом нам необходимо перевести критические частоты желаемого дискретного фильтра в частоты непрерывного, используя формулу (7.32), так, чтобы искажение частот, присущее дробно-линейному преобразованию, примененному к характеристикам непрерывного фильтра, привело к необходимым спецификациям дискретного. В нашем случае получается следующий набор спецификаций на $|H_c(j\Omega)|$, АЧХ соответствующего непрерывного фильтра:

$$0,89125 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1, \quad 0 \leq \Omega \leq \frac{2}{T_d} \operatorname{tg}\left(\frac{0,2\pi}{2}\right), \quad (7.36)$$

$$|H_c(j\Omega)| \leq 0,17783, \quad \frac{2}{T_d} \operatorname{tg}\left(\frac{0,3\pi}{2}\right) \leq \Omega \leq \infty. \quad (7.37)$$

Будем считать, что $T_d = 1$. Кроме того, ввиду монотонности АЧХ фильтра Баттервортса достаточно требовать выполнения неравенств:

$$|H_c(j2 \operatorname{tg}(0,1\pi))| \geq 0,89125, \quad (7.38)$$

$$|H_c(j2 \operatorname{tg}(0,15\pi))| \leq 0,17783. \quad (7.39)$$

Квадрат АЧХ фильтра Баттервортса имеет вид:

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}. \quad (7.40)$$

Поэтому пограничные уравнения неравенств (7.38) и (7.39) можно записать как

$$1 + \left(\frac{2 \operatorname{tg}(0,1\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0,89}\right)^2, \quad (7.41)$$

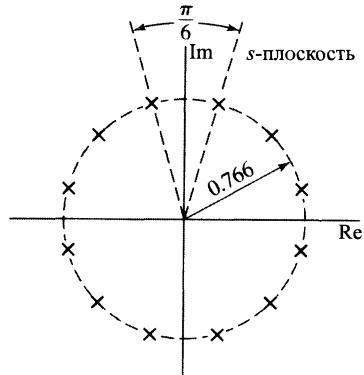
$$1 + \left(\frac{2 \operatorname{tg}(0,15\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0,178}\right)^2. \quad (7.42)$$

Решая полученные уравнения относительно N , находим

$$N = \frac{\ln \left[\left(\left(\frac{1}{0,178} \right)^2 - 1 \right) / \left(\left(\frac{1}{0,89} \right)^2 - 1 \right) \right]}{2 \ln[\operatorname{tg}(0,15\pi) / \operatorname{tg}(0,1\pi)]} = 5,305. \quad (7.43)$$

Поскольку N должно быть целым, положим $N = 6$. Подставив это значение в равенство (7.42), найдем $\Omega_c = 0,766$. При таком Ω_c спецификации полосы пропускания несколько завышаются, а характеристики полосы непропускания выполняются точно, что приемлемо при дробно-линейном преобразовании, так как мы не заботимся о ложных частотах. Иными словами, при подходящем предварительном искажении мы можем быть уверены, что итоговый дискретный фильтр будет обладать точными характеристиками в желаемой полосе непропускания.

Рис. 7.9. Расположение полюсов функции $H_c(s)H_c(-s)$ на s -плоскости в случае фильтра Баттерворт шестого порядка из примера 7.3



Двенадцать полюсов квадрата АЧХ непрерывного фильтра равномерно распределены вдоль окружности радиуса 0,766 (см. рис. 7.9). Соответствующая характеристическая функция непрерывного фильтра, получающаяся при выборе полюсов, расположенных в левой полуплоскости, равна

$$H_c(s) = \frac{0,20238}{(s^2 + 0,3996s + 0,5871)(s^2 + 1,0836s + 0,5871)(s^2 + 1,4802s + 0,5871)}. \quad (7.44)$$

Применив к $H_c(s)$ дробно-линейное преобразование с $T_d = 1$, получим характеристическую функцию дискретного фильтра:

$$H(z) = \frac{0,0007378(1+z^{-1})^6}{(1 - 1,2686z^{-1} + 0,7051z^{-2})(1 - 1,0106z^{-1} + 0,3583z^{-2})} \times \frac{1}{(1 - 0,9044z^{-1} + 0,2155z^{-2})}. \quad (7.45)$$

АЧХ, логарифм АЧХ и групповая задержка дискретного фильтра показаны на рис. 7.10. В точке $\omega = 0,2\pi$ логарифм АЧХ равен $-0,56$ дБ, а в $\omega = 0,3\pi$ — в точности -15 дБ.

Так как при дробно-линейном преобразовании мнимая ось s -плоскости переходит в единичную окружность z -плоскости, АЧХ дискретного фильтра уменьшается существенно быстрее, чем АЧХ исходного фильтра. В частности, поведение функции $H(e^{j\omega})$ в окрестности точки $\omega = \pi$ соответствует поведению $H_c(j\Omega)$ на бесконечности. Следовательно, нуль кратности 6 функции $H_c(j\Omega)$ в бесконечно удаленной точке превращается в нуль той же кратности в точке $z = -1$ у КЧХ дискретного фильтра. \square

Любопытно отметить, что так как общий вид непрерывного фильтра Баттерворта N -го порядка определен формулой (7.40), а частоты ω и Ω связаны соотношением (7.32), то квадрат АЧХ общего дискретного фильтра Баттерворта N -го порядка равен

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\operatorname{tg}(\omega/2)}{\operatorname{tg}(\omega_c/2)}\right)^{2N}}, \quad (7.46)$$

где $\operatorname{tg}(\omega_c/2) = \Omega_c T_d / 2$.

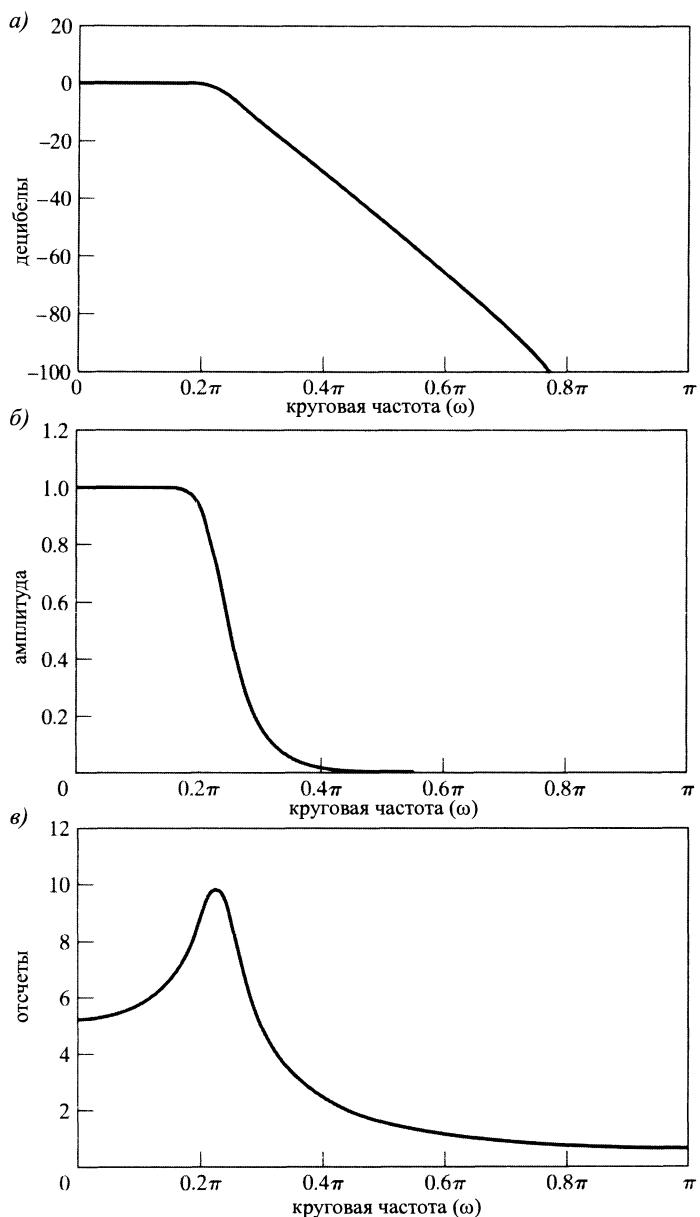


Рис. 7.10. КЧХ фильтра Баттервортта шестого порядка, полученного в результате дробно-линейного преобразования: а) логарифм АЧХ в децибелах; б) АЧХ; в) групповая задержка

Функция (7.46) обладает теми же свойствами, что и соответствующая характеристика непрерывного фильтра Баттервортта, т. е. она является максимально плоской⁷ и $|H(e^{j\omega_c})|^2 = 0,5$. Однако функция из тождества (7.46) — 2π -периодическая и спадает более резко, чем характеристика непрерывного фильтра Баттервортта.

⁷Первые $(2N - 1)$ производные от $|H(e^{j\omega})|^2$ равны 0 в $\omega = 0$.



Мы не стали разрабатывать дискретный фильтр Баттервортса, исходя из его АЧХ (7.46), потому, что прямого пути выявления положений полюсов этой функции не существует. А для разложения функции $H(z)H(z^{-1})$ на множители, а значит, и определения $H(z)$ эти полюса найти необходимо. Гораздо легче определить положения полюсов на s -плоскости (все нули попадают на бесконечность), разложить на множители непрерывную характеристическую функцию и затем применить дробно-линейное преобразование, как это было сделано в примере 7.3.

Формулу вида (7.46) можно вывести и для дискретного фильтра Чебышева, но при ее использовании возникают те же трудности. Однако описанный выше прием двухшагового проектирования, наиболее приемлемый на сегодняшний день метод разрабатывания частотно-избирательных БИХ-фильтров.

Основные аппроксимационные методы создания частотно-избирательных аналоговых БИХ-фильтров — это методы Баттервортса, Чебышева и эллиптических функций. Их детальное описание можно найти в [52, 33, 154 и 85]. В этих книгах методы объясняются в основном на примерах аппроксимации фильтра нижних частот. Этому же принципу мы следуем в приложении Б, где приводятся важные особенности некоторых из этих методов. В следующих трех примерах иллюстрируется реализация набора спецификаций для каждого из перечисленных классов фильтров. При этом мы опускаем утомительные длинные вычисления, поскольку их лучше осуществлять на компьютерах с соответствующим программным обеспечением.

Мы исходим из спецификаций дискретного фильтра нижних частот из примера 7.1:

$$0,99 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1,01, \quad |\omega| \leq 0,4\pi, \quad (7.47)$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 1,001, \quad 0,6\pi \leq |\omega| \leq \pi. \quad (7.48)$$

В обозначениях схемы допустимых погрешностей из рис. 7.2, б) мы предполагаем, что $\delta_1 = 0,01$, $\delta_2 = 0,001$, $\omega_p = 0,4\pi$ и $\omega_s = 0,6\pi$. Этих требований достаточно для определения параметров, необходимых для проектных формул Баттервортса, Чебышева и эллиптической. Заметим, что указаны лишь спецификации АЧХ, поскольку фаза явно определяется из природы аппроксимирующих функций.

Пример 7.4. Аппроксимация Баттервортса

Для аппроксимации спецификаций (7.47) и (7.48) методом Баттервортса потребуетсяся система 14-го порядка. КЧХ дискретного фильтра, получающегося дробно-линейным преобразованием из подходящего предварительноискаженного фильтра Баттервортса, показана на рис. 7.11. В части а) этого рисунка представлен график логарифма АЧХ в децибелах, в части б) — АЧХ над полосой пропускания, а на в) — групповая задержка фильтра. Из графиков видно, что АЧХ монотонно убывает с ростом частоты и коэффициент усиления становится очень маленьким в окрестности частоты $\omega = 0,7\pi$. Заметим, что в этом примере КЧХ Баттервортса нормализована так, что коэффициент усиления фильтра в полосе пропускания больше единицы (см. рис. 7.11, б)), как и должно быть согласно спецификациям (7.47). \square

В этом примере (ввиду округления порядка до следующего целого числа) спецификации превышены как в полосе пропускания, так и в полосе непропускания.

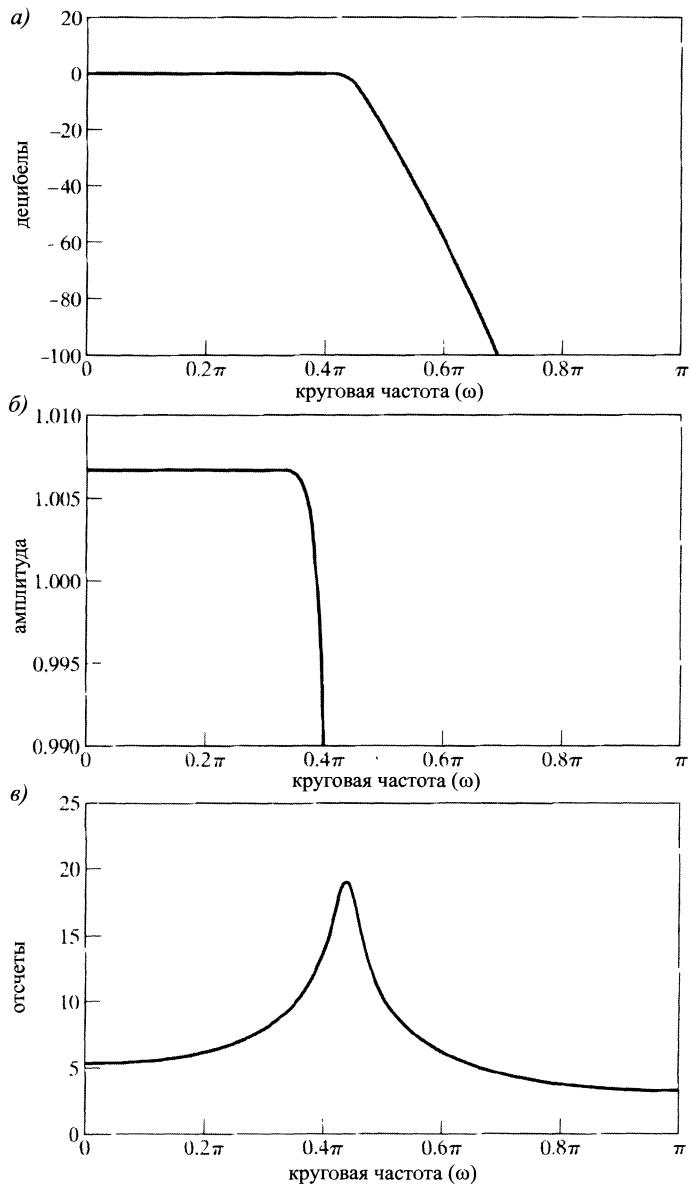
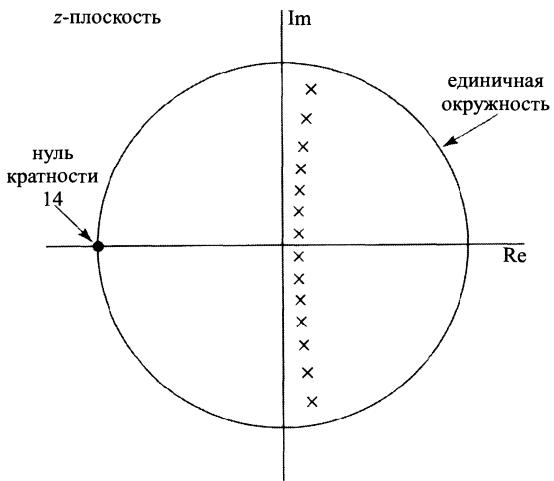


Рис. 7.11. КЧХ фильтра Баттервортса 14-го порядка из примера 7.4: а) логарифм АЧХ в децибелах; б) АЧХ над полосой пропускания; в) групповая задержка

Однако характеристика в полосе непропускания завышается довольно сильно. Причина такого явления отчетливо видна на рис. 7.12, где показана схема нулей и полюсов фильтра Баттервортса 14-го порядка. Поскольку непрерывная версия этого фильтра обладает 14-кратным нулем в бесконечно удаленной точке, то после дробно-линейного преобразования 14-кратный нуль дискретного фильтра попадает в точку $z = -1$. Естественно ожидать, что фильтр меньшего порядка тоже будет удовлетворять требуемым спецификациям, даже если не превысит их

столь сильно в полосе непропускания. Это ожидание мотивирует использование Чебышевской, или равномерно пульсирующей, аппроксимации.

Рис. 7.12. Схема нулей и полюсов фильтра Баттервортса 14-го порядка из примера 7.4



Пример 7.5. Аппроксимация Чебышева

Методы Чебышева можно разбить на два типа. К первому относятся аппроксимации КЧХ, которые равномерно пульсируют в полосе пропускания, а ко второму — в полосе непропускания. Методы обоих типов приводят к системам одного порядка при одинаковом списке спецификаций. Для спецификаций, указанных в формулах (7.47) и (7.48), здесь потребуется система 8-го порядка, а не 14-го, как в случае аппроксимации Баттервортса. На рис. 7.13 изображены графики логарифма АЧХ, АЧХ над полосой пропускания и групповая задержка для первого типа аппроксимации спецификаций (7.47) и (7.48). Обратите внимание, что КЧХ в полосе пропускания колеблется между постоянными минимальным и максимальным значениями, равноотстоящими от желаемого единичного коэффициента усиления.

Рисунок 7.14 представляет КЧХ аппроксимации Чебышева второго типа того же самого списка спецификаций. В этом случае равномерная пульсация характеристикики наблюдается в полосе пропускания. Схемы нулей и полюсов фильтров Чебышева показаны на рис. 7.15. Заметим, что схема для фильтра Чебышева типа I напоминает схему нулей и полюсов фильтра Баттервортса в том смысле, что все ее нули сконцентрированы в точке $z = -1$. В свою очередь, нули фильтра Чебышева второго типа распределены вдоль единичной окружности, что обусловлено проектной формулой для достижения осциллирующего поведения КЧХ в полосе непропускания. □

В обоих типах аппроксимации Чебышева монотонность КЧХ в полосах пропускания или непропускания наводит на мысль, что можно добиться снижения порядка системы, если КЧХ будет равномерно пульсировать как в полосе пропускания, так и в полосе непропускания. Действительно, можно показать (см. [111]), что при фиксированных значениях δ_1 , δ_2 , ω_p и ω_s в схеме допустимых погрешностей рис. 7.2, б) наименьший порядок фильтра получается при такой аппроксимации, когда ошибка приближения равномерно колеблется между экстремумами

двух аппроксимационных полос. Так как желаемое равномерное колебание достигается в классе рациональных функций, включающих в себя эллиптические, такие системы принято называть эллиптическими фильтрами.

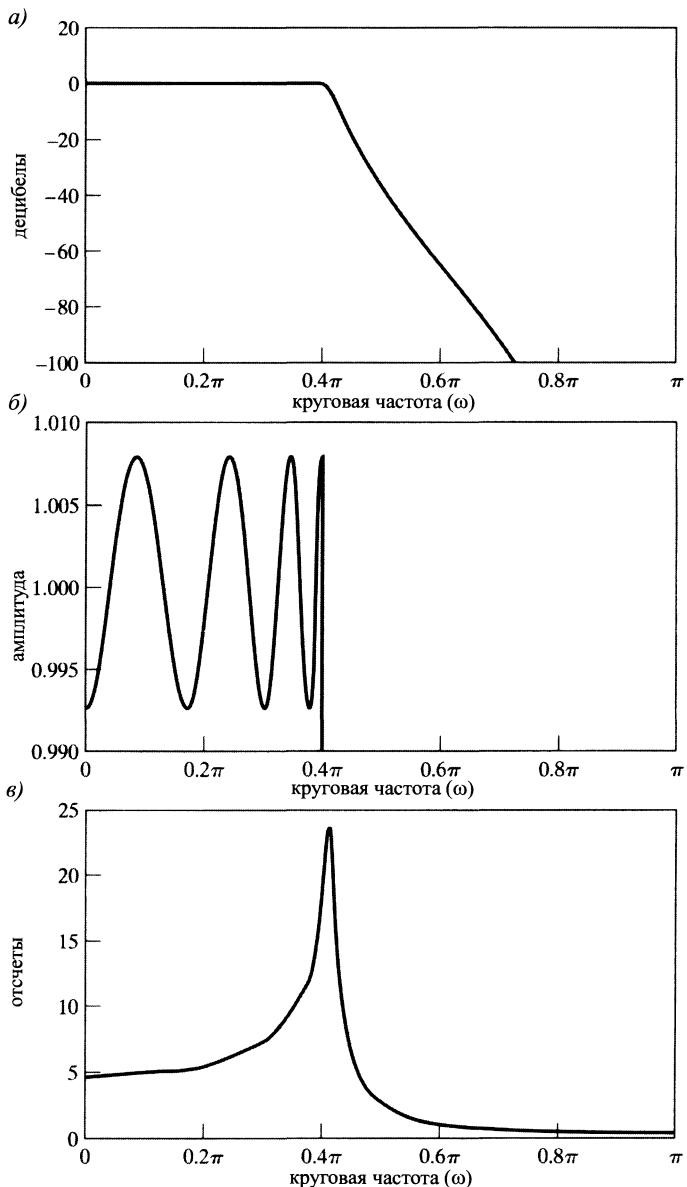
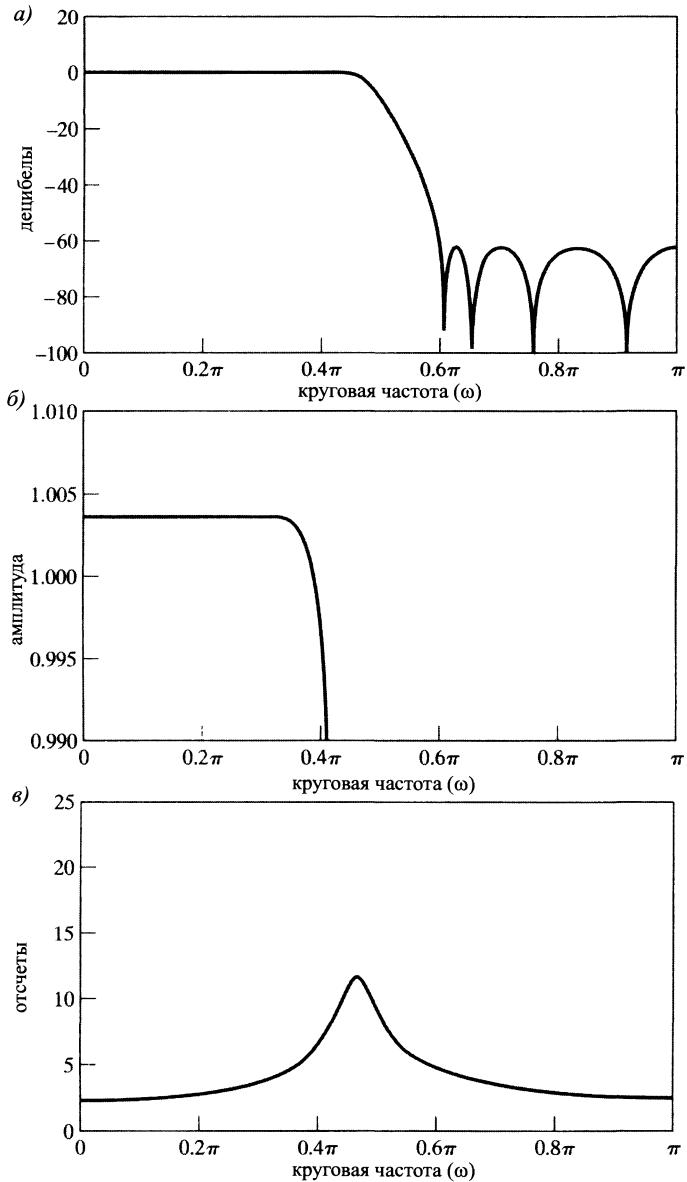


Рис. 7.13. КЧХ фильтра Чебышева 8-го порядка типа I из примера 7.5: а) логарифм модуля в децибелах; б) модуль характеристики над полосой пропускания; в) групповая задержка

Рис. 7.14. КЧХ фильтра Чебышева 8-го порядка типа II из примера 7.5: а) логарифм АЧХ в децибелах; б) АЧХ над полосой пропускания; в) групповая задержка



Пример 7.6. Эллиптическая аппроксимация

Спецификации, перечисленные в (7.47) и (7.48), реализуются эллиптическим фильтром 6-го порядка. Это наименьший возможный порядок рациональной функции, аппроксимирующей данные требования. На рис. 7.16 хорошо видна равномерная пульсация в обеих аппроксимируемых полосах. На рис. 7.17 отмечено, что нули эллиптического фильтра, как и в случае фильтра Чебышева типа II, попадают на дугу единичной окружности, соответствующую области непропускания.

Проектная формула для эллиптических фильтров тоже включена в приложение Б. Подробное ее объяснение можно найти в [148, 154 и 113]. Программа проектирования эллиптических фильтров была предложена Грэем и Мерклем в 1976 [50], а обширные таблицы для эллиптических фильтров представлены в [163]. Все три типа фильтров можно проектировать, используя функции инструментальной панели обработки сигналов в пакете программ *Matlab*. \square

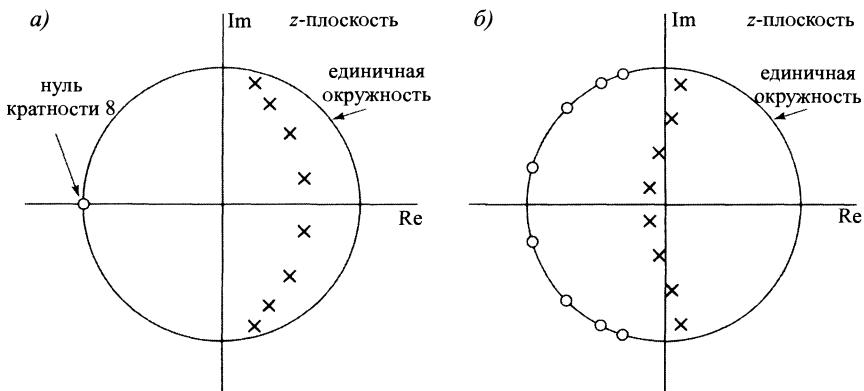


Рис. 7.15. Схема нулей и полюсов фильтра Чебышева 8-го порядка из примера 7.4:
а) тип I; б) тип II

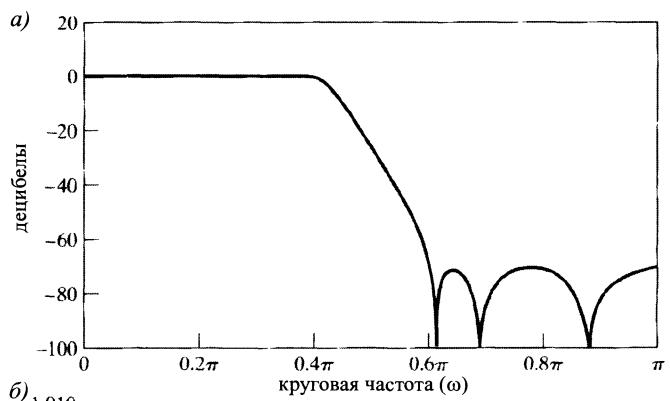


Рис. 7.16. КЧХ эллиптического фильтра 6-го порядка из примера 7.6: а) логарифм АЧХ в децибелах; б) АЧХ над полосой пропускания

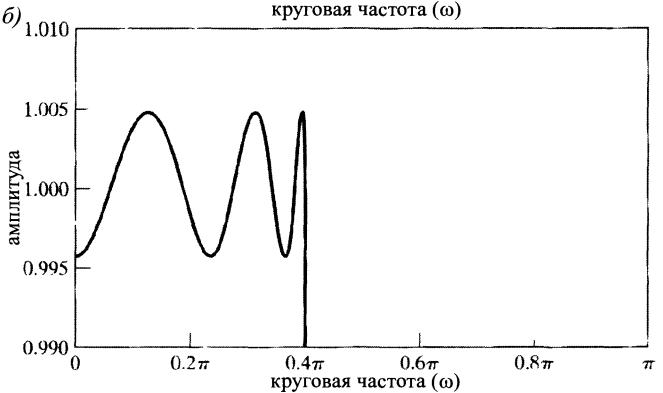
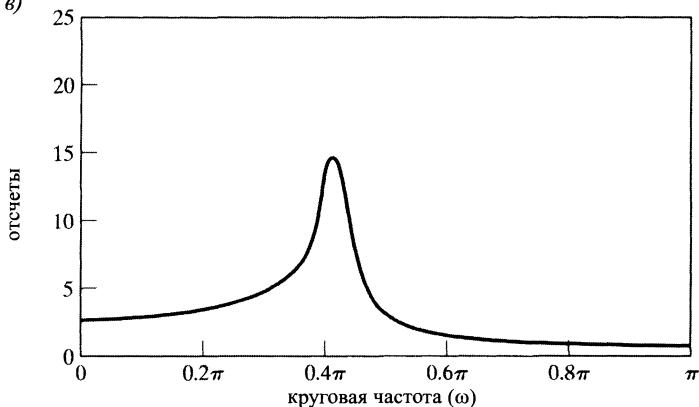


Рис. 7.16 (окончание). в)
в) групповая задержка



Дробно-линейное преобразование аналоговых фильтров, разработанных методами аппроксимаций Баттервортса, Чебышева или эллиптической, — стандартный прием проектирования дискретных КИХ-фильтров. Предыдущие примеры иллюстрируют несколько важных общих особенностей таких систем. Во всех случаях нули итоговой характеристической функции $H(z)$ расположены на единичной окружности, и все ее полюса (для обеспечения устойчивости) попадают во внешность единичного круга. В результате все аппроксимационные методы приводят к цифровым фильтрам с непостоянной групповой задержкой или, что то же самое, с нелинейной фазой. Во всех случаях максимальное отклонение значения групповой задержки от постоянного происходит на границах полос пропускания и переходной. Аппроксимационный метод Чебышева второго типа дает самую малую задержку в полосе пропускания и самую широкую область полосы пропускания, где задержка почти постоянна. Однако если линейность фазы не очень важна для данной задачи, то имеет смысл применять эллиптический метод аппроксимации, приводящий к системе с минимально возможным порядком характеристической функции, обеспечивающим минимальные затраты на ее реализацию.



Рис. 7.17. Схема нулей и полюсов эллиптического фильтра 6-го порядка из примера 7.4

7.3. Разработка КИХ-фильтров оконным методом

В § 7.2 мы уже отмечали, что наиболее используемая техника проектирования БИХ-фильтров основывается на трансформировании непрерывных БИХ-систем в дискретные. Это частично связано с тем, что проектирование непрерывных фильтров стало хорошо разработанной областью еще до того, как к дискретным

фильтрам стал проявляться интерес, а отчасти — с трудностью реализации прямых неитерационных проектов БИХ-фильтров.

Использование КИХ-фильтров, напротив, почти полностью ограничено дискретной областью. Поэтому техника их проектирования заключается в непосредственной аппроксимации желаемой КЧХ. Более того, в большинстве методов аппроксимации АЧХ КИХ-систем предполагается линейность фазы фильтра, что позволяет избежать проблемы факторизации спектра, которая довольно сложна при прямом проектировании.

Простейший метод разработки КИХ-фильтров называется *оконным методом*. Как правило, он начинается с задания идеальной КЧХ, которая может быть записана как

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n]e^{-j\omega n}, \quad (7.49)$$

где $h_d[n]$ — соответствующая импульсная характеристика со следующей зависимостью от $H_d(e^{j\omega})$:

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega. \quad (7.50)$$

Многие идеализированные системы имеют кусочно-постоянную или кусочно-непрерывную КЧХ с точками разрыва в граничных точках между критическими полосами частот. В результате импульсная характеристика таких систем недетерминирована и бесконечна. Большинство прямых способов получения детерминированной КИХ-аппроксимации систем заключается в обрезании идеальной импульсной характеристики. Формулу (7.49) можно представлять себе как ряд Фурье периодической КЧХ $H_d(e^{j\omega})$, где члены последовательности $h_d[n]$ играют роль коэффициентов этого ряда. Поэтому аппроксимация идеального фильтра методом усечения идеальной импульсной характеристики эквивалентна задаче о сходимости ряда Фурье, т. е. хорошо изученной проблеме. Особенно важный момент этой теории — эффект Гиббса, о котором говорилось в примере 2.22. Далее мы увидим, как это следствие неравномерной сходимости ряда проявляется при проектировании КИХ-фильтров.

Простейший способ проектирования детерминированного КИХ-фильтра на основе $h_d[n]$ заключается в определении новой системы с импульсной характеристикой¹

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (7.51)$$

которую можно записать в более общем виде как произведение идеальной им-

¹ Мы используем обозначения, введенные в главе 5. Напомним, что M — это порядок полиномиальной характеристической функции. Поэтому $(M + 1)$ — это длина, или длительность, импульсной характеристики. В современной литературе можно встретить параметр N , которым обозначается длина импульсной характеристики, однако в этой книге переменная N обозначает степень числителя рациональной характеристической функции БИХ-фильтра. Всюду в этом тексте (во избежание недоразумений) для обозначения длины импульсной характеристики КИХ-фильтра используется величина $(M + 1)$.

пульсной характеристики и конечного «окна» $w[n]$:

$$h[n] = h_d[n]w[n]. \quad (7.52)$$

В случае простого усечения, определенного формулой (7.51), окно имеет вид прямоугольника (*прямоугольное окно*):

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (7.53)$$

Теорема о преобразовании Фурье произведения (см. подраздел 2.10.7) говорит о том, что

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta. \quad (7.54)$$

Иными словами, $H(e^{j\omega})$ — периодическая свертка желаемой идеальной КЧХ с Фурье-образом окна, так что КЧХ $H(e^{j\omega})$ — «смазанная» версия идеальной характеристики $H_d(e^{j\omega})$. На рис. 7.18, а) показаны графики типичных функций $H_d(e^{j\theta})$ и $W(e^{j(\omega-\theta)})$, фигурирующих в интеграле (7.54).

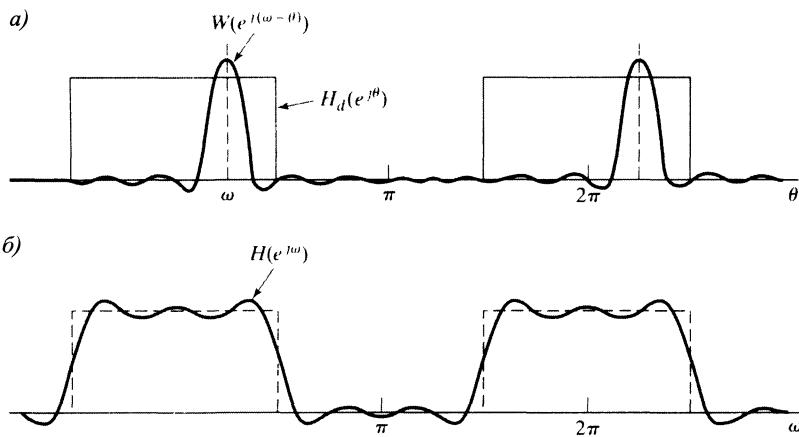


Рис. 7.18. а) процесс свертки, обеспечивающий усечение идеальной импульсной характеристики; б) типичная аппроксимация, получающаяся оконным методом, из идеальной импульсной характеристики

Если $w[n] = 1$ для всех n (т. е. усечения вообще не происходит), $W(e^{j\omega})$ — 2π -периодическая цепочка импульсов и, следовательно, $H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega})$. Следовательно, если Фурье-образ $W(e^{j\omega})$ окна сконцентрирован в узкой полосе частот, окружающей $\omega = 0$, то КЧХ $H(e^{j\omega})$ «похожа» на идеальную почти всюду, за исключением окрестностей точек разрыва $H_d(e^{j\omega})$. В связи с этим при выборе окна руководствуются двумя соображениями: во-первых, оно должно быть достаточно коротким для обеспечения небольшого объема вычислений при реализации фильтра; а, во-вторых, Фурье-образ окна $W(e^{j\omega})$ должен быть сконцентрирован в узкой полосе частот, чтобы свертка (7.54) как можно более точно воспроизводила идеальную КЧХ. В противоречивости этих условий легко убедиться на

примере прямоугольного окна (7.53), где

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega(M+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\omega M/2} \frac{\sin(\omega(M+1)/2)}{\sin(\omega/2)}. \quad (7.55)$$

График модуля функции $\frac{\sin(\omega(M+1)/2)}{\sin(\omega/2)}$ при $M = 7$ изображен на рис. 7.19. Заметим, что $W(e^{j\omega})$ в случае прямоугольного окна обладает обобщенной линейной фазой.

При возрастании M ширина «главного лепестка» уменьшается. *Главный лепесток* Фурье-образа окна обычно определяется как область между ближайшими к началу координат точками пересечения его графика с горизонтальной координатной осью (см. рис. 7.19). Если окно имеет прямоугольную форму, то ширина главного лепестка равна $\Delta\omega_m = 4\pi/(M+1)$. Однако в этом случае *боковые лепестки* получаются довольно большими, и, фактически, при возрастании M всплески амплитуды главного и боковых лепестков растут, а их ширина сокращается; причем площадь, которую они ограничивают, сохраняется постоянной. Следовательно, в окрестности точек разрыва идеальной КЧХ свертка $W(e^{j\omega}) * H_d(e^{j\Omega T})$ сильно осциллирует, что легко увидеть на рис. 7.18, б). Так как площадь под каждым лепестком остается постоянной, то при росте M колебания будут становиться все более резкими, но неуменьшающимися по амплитуде.

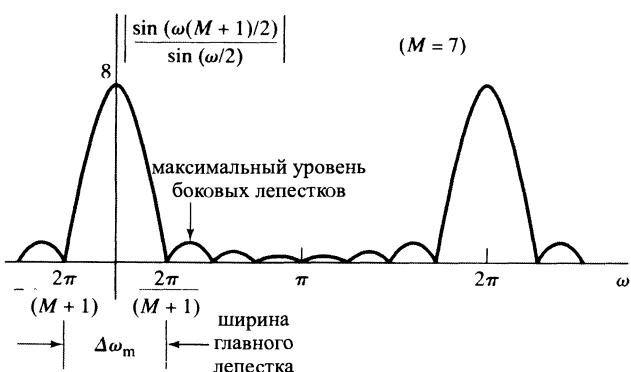


Рис. 7.19. Модуль Фурье-образа прямоугольного окна ($M = 7$)

Из теории рядов Фурье известно, что неравномерность сходимости, приводящая к эффекту Гиббса, может быть уменьшена, если использовать менее резкое усечение ряда. Сглаживая вертикальные границы окна, можно уменьшить высоту боковых лепестков, однако это приводит к более широкому главному лепестку и, тем самым, к более широкой переходной полосе в окрестности точек разрыва.

7.3.1. Стандартные окна и их свойства

Некоторые из широко используемых стандартных окон изображены на рис. 7.20. Определяются они следующим образом:

$$\text{прямоугольное: } w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (7.56)$$

$$\text{Барлетта (треугольное): } w[n] = \begin{cases} 2n/M, & 0 \leq n \leq M/2, \\ 2 - 2n/M, & M/2 < n \leq M, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (7.57)$$

$$\text{Хеннинга: } w[n] = \begin{cases} 0,5 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (7.58)$$

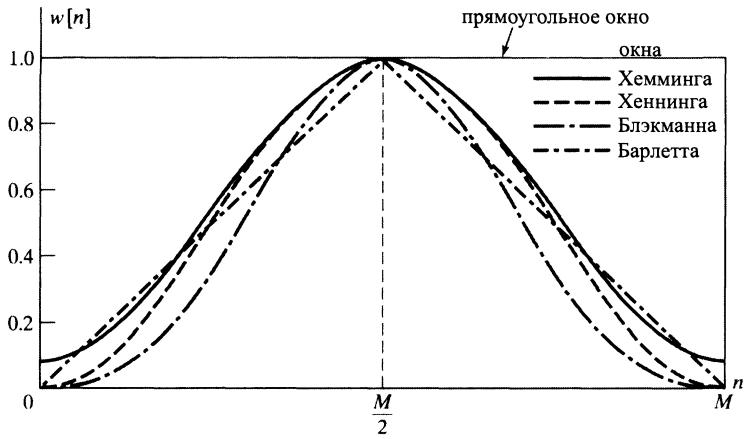
$$\text{Хемминга: } w[n] = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (7.59)$$

$$\text{Блэкмана: } w[n] = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (7.60)$$

Окна Барлетта, Хеннинга, Хемминга и Блэкмана названы в честь их изобретателей. Окно Хеннинга связано с именем Юлиуса фон Хенна, австрийского метеоролога, и иногда называется окном Хенна. Термин «хеннинг» введен Блэкманом и Таки (1958) для описания применения этого метода к сигналам и хорошо прижился в научной литературе, но написание его варьируется от «хеннинг» до «Хеннинг».

В целях наглядности окна на рис. 7.20 показаны как графики функций непрерывной переменной, хотя, как следует из определений (7.56)–(7.60), они определены лишь при целых значениях переменной n .

Рис. 7.20. Часто используемые окна



В главе 10 мы увидим, что окна, определенные формулами (7.56)–(7.60), обычно используются как в спектральном анализе, так и при проектировании КИХ-фильтров, что обусловлено их замечательными свойствами: во-первых, Фурьеобраз окон сконцентрирован в окрестности частоты $\omega = 0$, а во-вторых, он описывается простыми формулами, что сильно упрощает вычисления. Фурье-

образ окна Барлетта выражается как произведение преобразований Фурье прямоугольных окон, а Фурье-образ остальных — как сумма сдвинутых по частоте копий Фурье-образа все того же прямоугольного окна. (см. задачу 7.34).

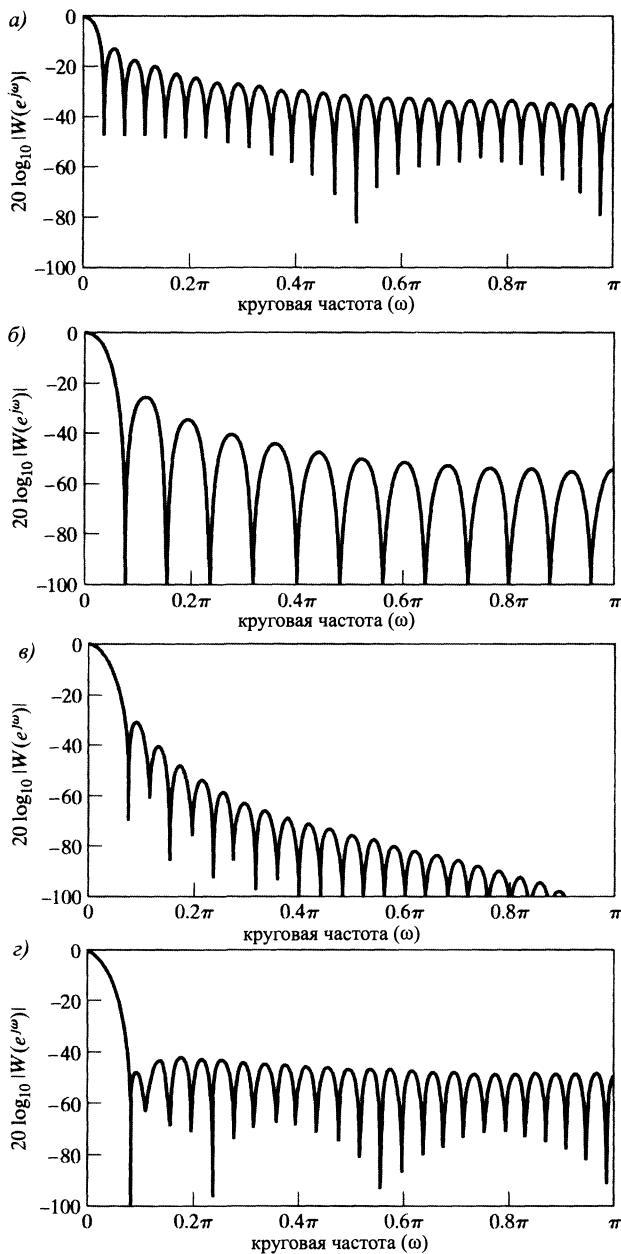


Рис. 7.21. Фурье-образы (логарифм модуля) окон из рис. 7.20 с $M = 50$: а) прямоугольное; б) Барлетта

Графики функции $20 \lg |W(e^{j\omega})|$ для каждого из этих окон изображены на рис. 7.21 (в случае $M = 50$). На рисунке видно, что самый узкий главный ле-

лесток получается у прямоугольного окна, и поэтому при фиксированной длине оно дает наиболее крутые переходные участки графика $H(e^{j\omega})$ над точками разрыва $H_d(e^{j\omega})$. В то же время первый его боковой лепесток всего лишь на 13 дБ ниже главного, что провоцирует значительные колебания $H(e^{j\omega})$ в окрестности точек разрыва идеальной КЧХ. В табл. 7.1 приведены сравнительные характеристики Фурье-образов окон в порядке гладкости перехода от ненулевых значений окна к тождественному нулю. Из таблицы следует, что чем более плавно график окна стремится к нулю, тем меньше становится высота бокового лепестка (вторая колонка), но одновременно с этим увеличивается высота главного лепестка (третья колонка) и ширина переходной полосы. Остальные колонки таблицы мы обсудим позже.

Рис. 7.21 (окончание).

д) Блэкмана

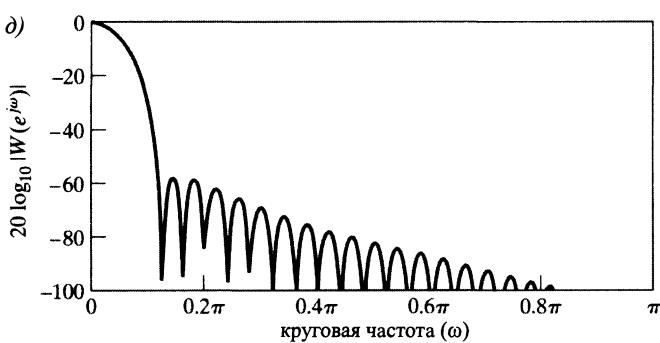


Таблица 7.1. Сравнительные характеристики основных окон

Тип окна	Высота бокового лепестка	Ширина главного лепестка	Максимум ошибки, $20 \lg \delta$	Эквивалентное окно Кайзера, β	Ширина переходной полосы окна Кайзера
прямоуг.	-13	$\approx 4\pi/(M+1)$	-21	0	$1,81\pi/M$
Барлэтта	-25	$\approx 8\pi/M$	-25	1,33	$2,37\pi/M$
Хеннинга	-31	$\approx 8\pi/M$	-44	3,86	$5,01\pi/M$
Хемминга	-41	$\approx 8\pi/M$	-53	4,86	$6,27\pi/M$
Блэкмана	-57	$\approx 12\pi/M$	-74	7,04	$9,19\pi/M$

7.3.2. Обобщенная линейная фаза

Многие проекты КИХ-фильтров нацелены на детерминированную систему с обобщенной линейной фазой. При определении стандартных окон (7.56)–(7.60) эта цель была учтена. Действительно, заметим, что окна обладают следующим свойством:

$$w[n] = \begin{cases} w[M-n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (7.61)$$

т. е. окна симметричны относительно точки $M/2$. Как следствие, их Фурье-образ удовлетворяет равенству:

$$W(e^{j\omega}) = W_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}, \quad (7.62)$$

где $W_e(e^{j\omega})$ — вещественнозначная четная функция от ω , что легко видно на примере прямоугольного окна (см. (7.55)). Свойство (7.61) подводит к детерминированным фильтрам, и если желаемая импульсная характеристика тоже симметрична относительно точки $M/2$, т. е. $h_d[M-n] = h_d[n]$, то она сохранит свою симметрию и после обработки оконным способом, а соответствующая КЧХ будет обладать обобщенной линейной фазой:

$$H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}, \quad (7.63)$$

где $A_e(e^{j\omega})$ — вещественнозначная четная функция ω . Аналогично, при обработке окном антисимметричной импульсной характеристики ($h_d[M-n] = -h_d[n]$) получается антисимметричная последовательность с центром в точке $M/2$, а результатирующая КЧХ имеет обобщенную линейную фазу, сдвинутую на 90° :

$$H(e^{j\omega}) = jA_o(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}, \quad (7.64)$$

где $A_o(e^{j\omega})$ — вещественнозначная нечетная функция ω .

Хотя предыдущие утверждения непосредственно следуют из свойств произведения симметричного окна и симметричной (антисимметричной) импульсной характеристики, полезно рассмотреть представление этих произведений в частотной области. Предположим, что $h_d[M-n] = h_d[n]$. Тогда

$$H_d(e^{j\omega}) = H_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}, \quad (7.65)$$

где $H_e(e^{j\omega})$ — вещественнозначная четная функция.

Если окно симметрично, то, подставляя равенства (7.62) и (7.65) в формулу (7.54), получаем:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_e(e^{j\theta})e^{-j\theta M/2} W_e(e^{j(\omega-\theta)})e^{-j(\omega-\theta)M/2} d\theta. \quad (7.66)$$

Простые манипуляции с множителями подынтегральной функции позволяют прийти к выводу:

$$H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}, \quad (7.67)$$

где

$$A_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_e(e^{j\theta})W_e(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta. \quad (7.68)$$

Итак, мы вновь убедились, что итоговая система обладает обобщенной линейной фазой, но, кроме того, обнаружили, что вещественнозначная функция $A_e(e^{j\omega})$ — это периодическая свертка вещественных функций $H_e(e^{j\omega})$ и $W_e(e^{j\omega})$.

Свойства свертки (7.68) определяют АЧХ фильтра, полученного оконным методом. Следующий пример иллюстрирует это утверждение в случае фильтра низких частот с линейной фазой.

Пример 7.7. Линейно-фазовый фильтр низких частот

Желаемая КЧХ фильтра определяется формулой:

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega M/2}, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi, \end{cases} \quad (7.69)$$

которая получена из КЧХ идеального ФНЧ добавлением множителя, отвечающего за обобщенную линейную фазу. Соответствующая идеальная импульсная характеристика имеет вид:

$$h_{lp}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega M/2} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n - M/2)]}{\pi(n - M/2)}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (7.70)$$

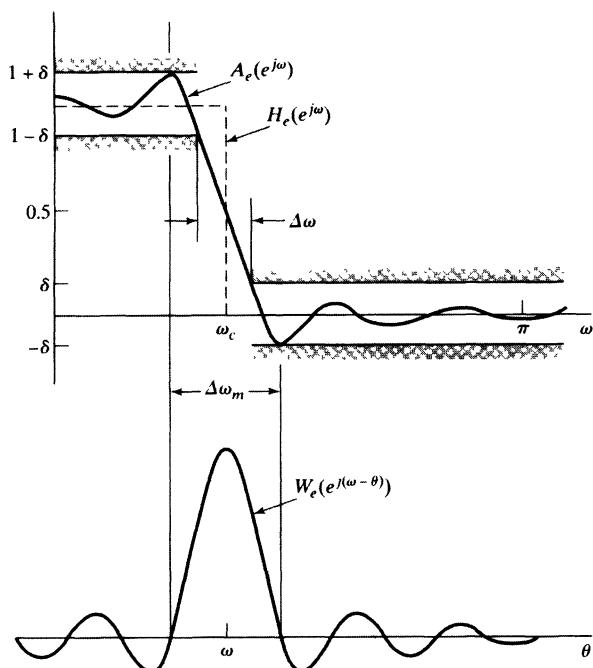
Легко показать, что $h_{lp}[M-n] = h_{lp}[n]$, так что, умножив $h_{lp}[n]$ на симметричное окно, получим импульсную характеристику

$$h[n] = \frac{\sin[\omega_c(n - M/2)]}{\pi(n - M/2)} w[n] \quad (7.71)$$

обобщенно-линейно-фазовой системы.

Верхняя часть рис. 7.22 отражает характер амплитудной характеристики, которая получится, если в качестве $w[n]$ взять любое из окон (7.56)–(7.60), за исключением окна Барлетта, которое редко используется при проектировании дискретных фильтров. (Окно Барлетта давало бы монотонную функцию $A_e(e^{j\omega})$, поскольку все значения $W_e(e^{j\omega})$ положительны.) Этот рисунок иллюстрирует важные свойства оконного метода аппроксимации КЧХ с разрывом первого рода (т. е. разрывом ступенчатого характера). Метод наиболее хорош, когда частота отсечки ω_c далеко расположена как от 0, так и от π , а ширина главного лепестка меньше чем $2\omega_c$.

Рис. 7.22. Иллюстрация типичной аппроксимации идеальной КЧХ с разрывом первого рода



В нижней части рис. 7.22 приведено типичное преобразование Фурье симметричного окна (исключая линейно-фазовое). Для лучшего понимания формы графика аппроксимации $A_e(e^{j\omega})$ вблизи точки ω_c важно отчетливо представлять поведение этого преобразования Фурье.

Когда $\omega = \omega_c$, центр симметрии функции $W_e(e^{j(\omega-\theta)})$ попадает в точку разрыва и около половины площади под ее графиком дает вклад в $A_e(e^{j\omega})$. Глядя на рисунок, легко заметить, что максимум функции $W_e(e^{j(\omega-\theta)})$ сдвинут так, что первый отрицательный боковой лепесток справа от главного расположен правее ω_c . Это означает, что расстояние между экстремумами амплитудной характеристики, находящимися по обе стороны от точки разрыва, примерно равно ширине главного лепестка $\Delta\omega_m$, как показано на рис. 7.22. Поэтому ширина переходной полосы $\Delta\omega$ получается несколько меньше ширины главного лепестка. Наконец, из-за симметрии $W_e(e^{j(\omega-\theta)})$ аппроксимация имеет тенденцию быть симметричной относительно ω_c , т. е. график аппроксимации заходит на δ в полосу пропускания и на столько же не доходит до полосы непропускания. □

В четвертом столбце табл. 7.1 приведены максимальные ошибки аппроксимации (в децибелах) для окон из определений (7.56)–(7.60). Ясно, что окно с меньшими боковыми лепестками дает лучшую аппроксимацию идеальной характеристики в точке разрыва. Третий столбец таблицы, содержащий ширину главного лепестка, подсказывает, что чем больше коэффициент M , тем уже переходная полоса. Таким образом, выбирая форму и ширину окна, можно контролировать свойства итогового КИХ-фильтра. Однако метод проб и ошибок в выборе формы и ширины окна — не самый лучший способ проектирования фильтров. К счастью, Кайзером в 1974 г. была найдена довольно простая формализация оконного метода [75].

7.3.3. Метод Кайзера проектирования фильтров

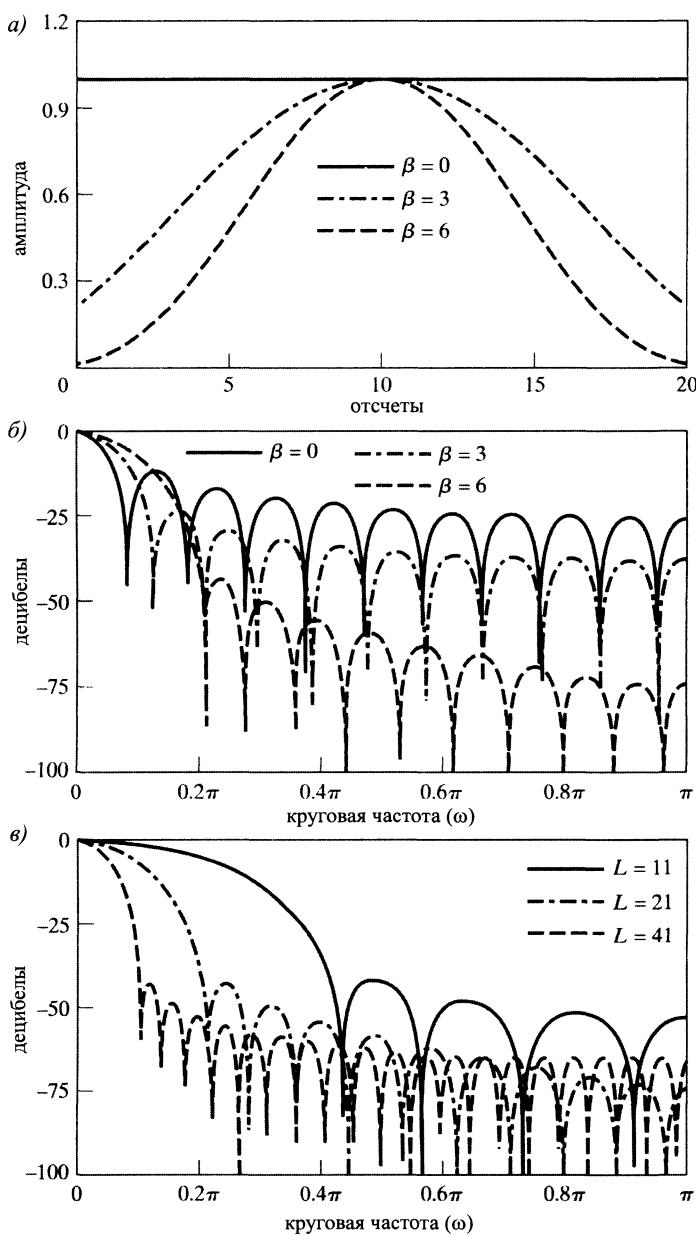
Взаимозависимость между шириной главного лепестка и площадью под боковым лепестком можно выразить количественно с помощью функции окна (вырезающей функции), Фурье-образ которого максимально сконцентрирован в окрестности точки $\omega = 0$. Этой задаче была посвящена серия классических работ Слепиана и других авторов [145]. Решение, найденное в этих статьях, оперировало многочисленными функциями, описывающими сферические волны, которые трудны для вычислений и поэтому при проектировании фильтров малопривлекательны. Однако Кайзер [74, 75] нашел, что окно, близкое к оптимальному, можно построить, используя модифицированную функцию Бесселя первого типа нулевого порядка, производить вычисления с которой существенно более просто. Окно Кайзера определяется как

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0[\beta(1 - [(n - \alpha)/\alpha]^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (7.72)$$

где $\alpha = M/2$, а $I_0(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя первого типа нулевого порядка. В отличие от остальных окон (7.56)–(7.60), в окне Кайзера участвуют два параметра: длина $(M + 1)$ и параметр формы β . Варьируя $(M + 1)$ и β , длину окна и его форму можно приспособить к взаимному влиянию амплитуды бокового лепестка на ширину главного, и наоборот. На рис. 7.23, а) показана непрерывная огибающая окон Кайзера с $M + 1 = 21$ и $\beta = 0, 3$ и 6. Заметим, что формула (7.72) при $\beta = 0$ дает прямоугольное окно. На рис. 7.23, б) представлено преобразование Фурье окон Кайзера из рис. 7.23, а), а на рис. 7.23, в) — преобразование Фурье окон Кайзера с $\beta = 6$ и $M = 10, 20$ и 40. Графики рисунков 7.23 б)

и в) ясно показывают, что искомое влияние действительно достигается на таких окнах. Чем сильнее сужается окно, тем меньше боковые лепестки его преобразования Фурье, а главный лепесток становится более широким.

Рис. 7.23. а) окна Кайзера при $\beta = 0,3$ и 6 с $M = 20$; б) Фурье-образ окон из части а) рисунка; в) Фурье-образ окон Кайзера при $\beta = 6$, $M = 10, 20$ и 40



Из рис. 7.23, в) следует, что при фиксированном β увеличение M приводит к уменьшению ширины главного лепестка, но не сказывается на амплитуде бо-

ковых. Фактически, проведя исчерпывающие численные эксперименты, Кайзер получил пару формул, позволяющих проектировщику подобрать параметры M и β для обеспечения данных спецификаций частотно-избирательного фильтра. Рисунок 7.22 представляет типичную аппроксимацию, полученную с помощью окна Кайзера. Кайзер нашел, что, кроме широкого диапазона полезных свойств, максимальная ошибка аппроксимации (δ на рис. 7.22) определяется параметром β . Считая, что δ фиксирована, частота отсечки ω_p полосы пропускания фильтра нижних частот определяется как наименьшее значение ω , удовлетворяющее неравенству $|H(e^{j\omega})| \geq 1 - \delta$. Частота отсечки полосы непропускания ω_s , в свою очередь, может быть получена как наименьшее значение ω , при котором $|H(e^{j\omega})| \leq \delta$. Ширина переходной области в аппроксимации фильтра нижних частот равна

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p. \quad (7.73)$$

Введя обозначение

$$A = -20 \lg \delta, \quad (7.74)$$

Кайзер эмпирическим путем установил, что параметр β , необходимый для достижения заданной величины A , получается по следующему правилу:

$$\beta = \begin{cases} 0,1102(A - 8,7), & A > 50, \\ 0,5842(A - 21)^{0,4} + 0,07886(A - 21), & 21 \leq A \leq 50, \\ 0,0, & A < 21. \end{cases} \quad (7.75)$$

(Напомним, что значение $\beta = 0$ дает прямоугольное окно, для которого $A = 21$). Более того, Кайзер нашел, что для обеспечения предписанных значений A и $\Delta\omega$ параметр M должен подчиняться равенству:

$$M = \frac{A - 8}{2,285\Delta\omega}. \quad (7.76)$$

Формула (7.76) определяет значение M (с точностью до ± 2) для широкого диапазона значений $\Delta\omega$ и A . С такими формулами метод Кайзера проектирования почти не нуждается в итерациях или многочисленных пробах и ошибках. Пример 7.8 дает схему метода Кайзера и иллюстрирует процедуру проектирования.

Пример 7.8. Метод окна Кайзера проектирования фильтра нижних частот

Используя проектные формулы для окна Кайзера, можно разработать КИХ-фильтр нижних частот с нужными спецификациями. Алгоритм проектирования выглядит следующим образом.

- Сначала нужно установить спецификации фильтра, т. е. выбрать желаемые значения частот ω_p и ω_s и размер максимально допустимой ошибки. При оконном методе проектирования в итоговом фильтре допускается одинаковый максимум ошибки δ как в полосе пропускания, так и в полосе непропускания. Спецификации этого примера совпадают с характеристиками примеров 7.4, 7.5 и 7.6, т. е. $\omega_p = 0,4\pi$, $\omega_s = 0,6\pi$, $\delta_1 = 0,01$ и $\delta_2 = 0,001$. Так как δ_1 и δ_2 здесь должны совпадать, положим $\delta_1 = \delta_2 = \delta = 0,001$.
- Затем нужно вычислить частоту отсечки соответствующего идеального фильтра нижних частот. Ввиду симметричности аппроксимации относительно точки

разрыва функции $H_d(e^{j\omega})$ следует остановиться на значении

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2} = 0,5\pi.$$

3. Перед определением параметров окна Кайзера нужно вычислить величины:

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0,2\pi, \quad A = -20\lg\delta = 60.$$

Подставив их в формулы (7.75) и (7.76), получим требуемые значения M и β , которые для нашего примера равны

$$\beta = 5,653, \quad M = 37.$$

4. Импульсная характеристика фильтра рассчитывается, исходя из формул (7.71) и (7.72). В нашем примере:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\sin \omega_c(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)} \cdot \frac{I_0[\beta(1 - [(n-\alpha)/\alpha]^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\alpha = M/2 = 37/2 = 18,5$.

Поскольку $M = 37$ — нечетное целое число, итоговая линейно-фазовая система будет относиться ко второму типу. (Напомним, что четыре типа КИХ-систем с обобщенной линейной фазой определены в подразделе 5.8.3.) Графики, связанные с характеристиками проектируемого фильтра, изображены на рис. 7.24. На рис. 7.24, а), представляющем импульсную характеристику, видна симметрия, характерная для систем типа II. График логарифма АЧХ (рис. 7.24, б)) свидетельствует, что $H(e^{j\omega})$ обращается в нуль в точке $\omega = \pi$, т. е. соответствующая характеристическая функция имеет нуль в точке $z = -1$, что и должно быть в случае КИХ-систем второго типа. На рис. 7.24, в) показана ошибка аппроксимации в полосах пропускания и непропускания. Соответствующая функция определена правилом:

$$E_A(\omega) = \begin{cases} 1 - A_e(e^{j\omega}), & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ 0 - A_e(e^{j\omega}), & \omega_s \leq \omega \leq \pi. \end{cases} \quad (7.77)$$

(Ошибка не определена в переходной полосе, т. е. при $0,4\pi < \omega < 0,6\pi$.) Обратите внимание на симметрию ошибки аппроксимации и на то, что максимум ошибки несколько больше, чем $\delta = 0,001$. Увеличивая M до 38, можно получить фильтр типа I, для которого $\delta = 0,0008$.

Отметим, наконец, что здесь не нужно исследовать графики фазы и групповой задержки, поскольку мы знаем, что фаза линейна, а задержка составляет $M/2 = 18,5$ отсчета. □

7.3.4. Сравнение окна Кайзера с остальными окнами

Основной принцип оконного метода проектирования состоит в обрезании идеальной импульсной характеристики одним из окон конечной длины, рассматриваемых в этом параграфе. В частотной области эта процедура соответствует сворачиванию идеальной КЧХ с Фурье-образом окна. Если идеальный фильтр является фильтром нижних частот, точка разрыва его КЧХ «размазывается» в результате свертки в процессе движения главного лепестка Фурье-образа окна через эту точку.

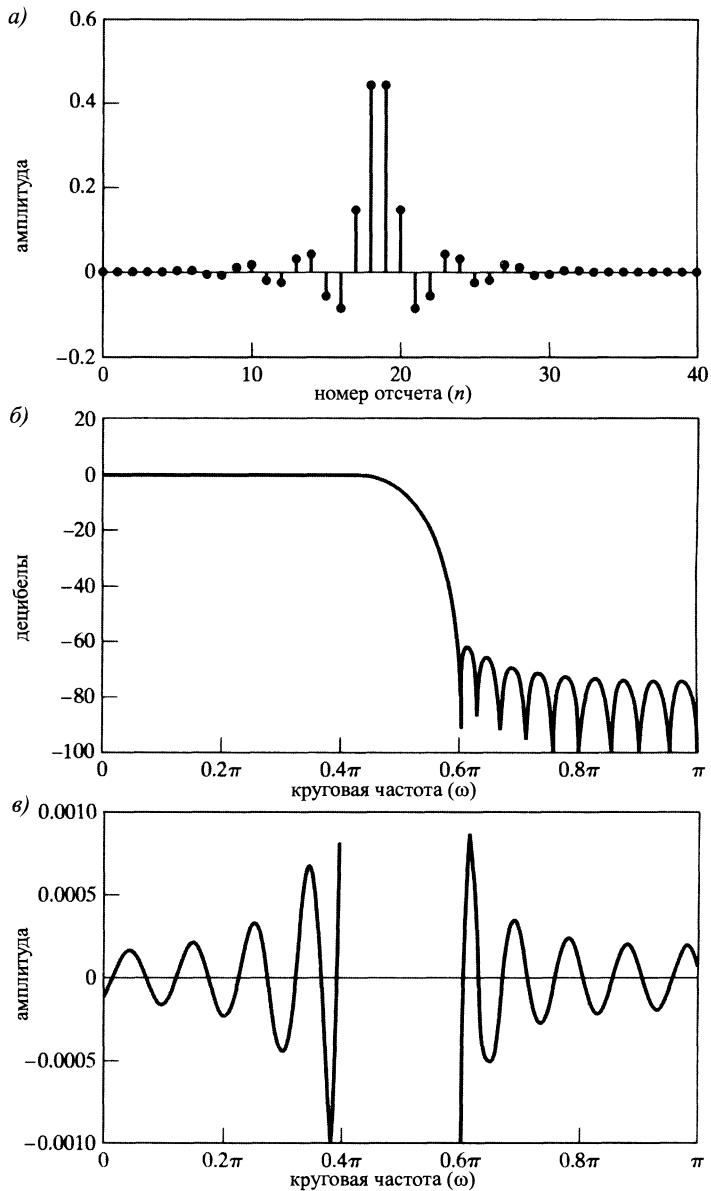


Рис. 7.24. Графики, связанные с характеристиками фильтра из примера 7.8: а) импульсная характеристика ($M = 37$); б) логарифм АЧХ; в) ошибка аппроксимации

В первом приближении ширина итоговой переходной полосы определяется шириной главного лепестка, а колебания пропускающей и непропускающей полос — боковыми лепестками Фурье-образа окна. Поскольку колебания полос пропускания и непропускания возникают в результате интегрирования симметричных боковых лепестков, они практически совпадают. Более того, при очень хорошем аппроксимировании отклонения полос пропускания и непропускания от указанных спецификаций не зависят от M и могут корректироваться лишь

выбором формы используемого окна. Этот феномен подтверждается формулой Кайзера (7.75), где присутствует параметр формы β , не зависящий от M . Два последних столбца табл. 7.1 сравнивают окно Кайзера с окнами из (7.56)–(7.60). В первом из них указан параметр формы окна Кайзера, дающий ту же максимальную ошибку аппроксимации δ , что и окно в самом первом столбце таблицы. Шестой столбец показывает ширину соответствующей переходной полосы (из формулы (7.76)) фильтра, спровоцированного методом Кайзера. Формула (7.76) определяет ширину переходной полосы намного лучше, чем ширина главного лепестка из третьего столбца таблицы.

7.4. Примеры проектирования КИХ-фильтра методом Кайзера

Оконный метод, конечно, не ограничивается проектированием фильтров нижних частот. Его можно применять для обрезания любой идеальной импульсной характеристики в целях получения детерминированной КИХ-аппроксимации. В этом параграфе собрано несколько примеров, иллюстрирующих технику применения окна Кайзера, в которых отражены некоторые важные свойства КИХ-систем.

7.4.1. Фильтр верхних частот

КЧХ идеального фильтра верхних частот с обобщенной линейной фазой имеет вид:

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_c, \\ e^{-j\omega M/2}, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases} \quad (7.78)$$

Соответствующую импульсную характеристику можно вычислить с помощью обратного преобразования Фурье или, исходя из наблюдения:

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} - H_{lp}(e^{j\omega}), \quad (7.79)$$

где $H_{lp}(e^{j\omega})$ определена формулой (7.69). Таким образом,

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin \pi(n - M/2)}{\pi(n - M/2)} - \frac{\sin \omega_c(n - M/2)}{\pi(n - M/2)}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (7.80)$$

Проектирование аппроксимации фильтра верхних частот может следовать схеме, описанной в примере 7.8.

Пример 7.9. Проектирование фильтра верхних частот методом Кайзера

Допустим, нам нужен фильтр со следующими спецификациями:

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &\leq \delta_2, & |\omega| &\leq \omega_s, \\ 1 - \delta_1 &\leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_1, & \omega_p &\leq |\omega| \leq \pi, \end{aligned}$$

где $\omega_s = 0,35\pi$, $\omega_p = 0,5\pi$ и $\delta_1 = \delta_2 = \delta = 0,021$. Так как и в этом случае идеальная характеристика разрывна, для определения подходящих параметров $\beta = 2,6$ и $M = 24$ можно применить формулы Кайзера (7.75) и (7.76). На рис. 7.25 показаны графики, отражающие поведение КЧХ, получающейся по методу Кайзера из $h_{lp}[n]$ с

$\omega_c = \frac{1}{2}(0,35\pi + 0,5\pi)$. Заметим, что M здесь четно. Поэтому мы приходим к линейно-фазовой КИХ-системе типа I с задержкой на $M/2 = 12$ отсчетов. В этом случае фактический максимум ошибки аппроксимации равен $\delta = 0,0213$, а не $0,021$, как требовалось.

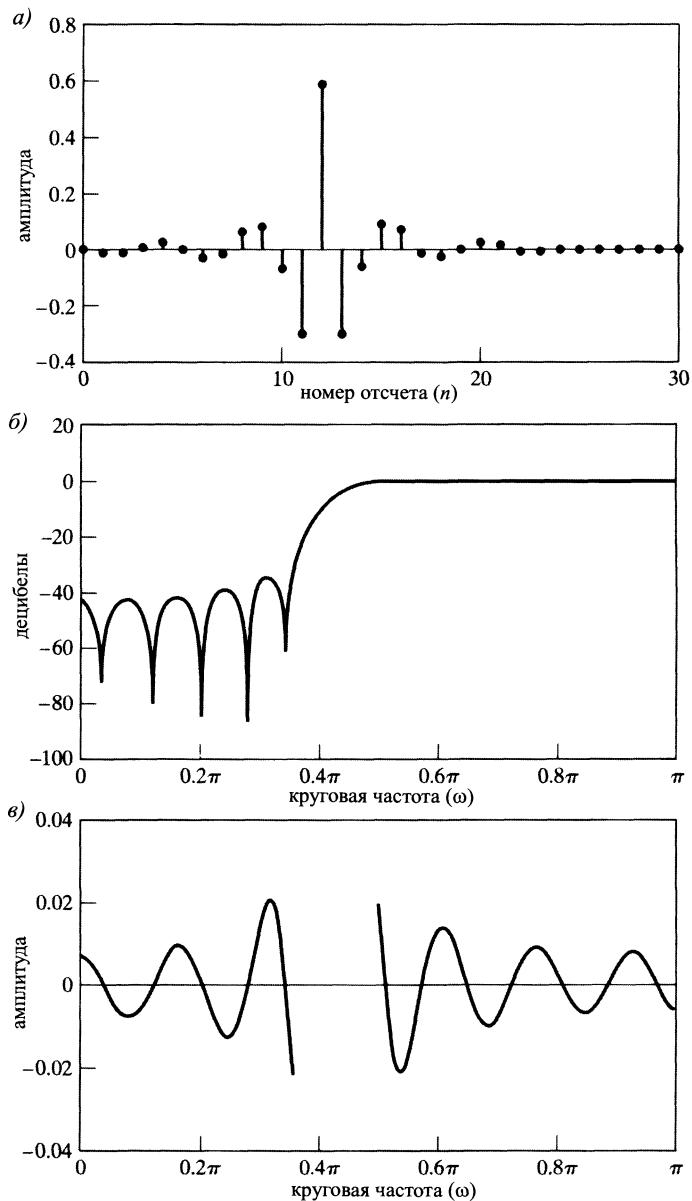
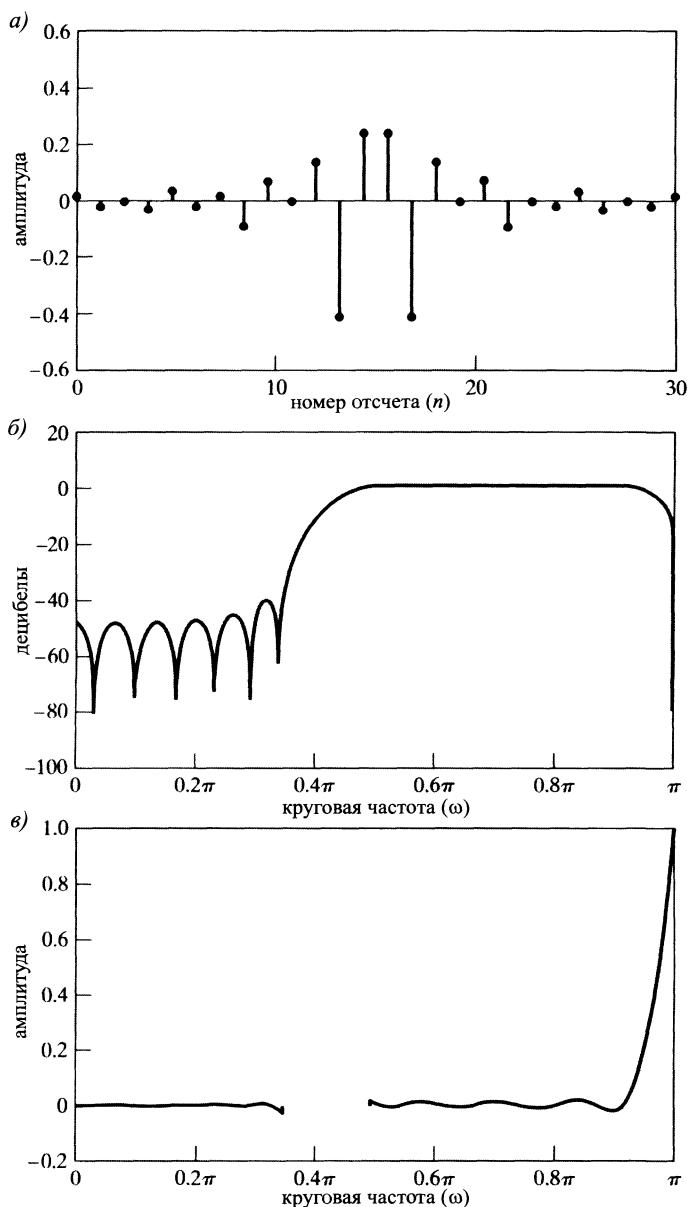


Рис. 7.25. Характеристические функции фильтра верхних частот типа I: а) импульсная характеристика ($M = 24$); б) логарифм АЧХ; в) ошибка аппроксимации

Поскольку всюду, кроме полосы непропускания, ошибка меньше чем $0,021$, соблазнительно увеличить M до 25 , оставив параметр β без изменения, что приведет к сужению переходной полосы. Но при этом получается фильтр второго типа (см. рис. 7.26), который нам совсем не подходит из-за нуля характеристической функции, который

(ввиду линейности фазы) обязан попадать в точку $z = -1$, т. е. $\omega = \pi$. Несмотря на то что увеличение длины окна на единицу ведет к неприемлемому результату, увеличение его до 26 дает фильтр типа I, в котором спецификации будут превышены. Ясно, что линейно-фазовые КИХ-системы типа II, как правило, не подходят в качестве аппроксимаций фильтров верхних частот и полосно-задерживающих фильтров. \square

Рис. 7.26. Характеристические функции фильтра верхних частот типа II: а) импульсная характеристика ($M = 25$); б) логарифм АЧХ; в) ошибка аппроксимации



Предыдущее проектирование фильтра верхних частот можно обобщить на случай многократных полос пропускания и задерживания. Класс многополос-

ных фильтров включает в себя фильтры нижних и верхних частот и полосовые фильтры как частный случай. На рис. 7.27 показана АЧХ идеального многополосного частотно-избирательного фильтра. Если умножить эту АЧХ на линейно-фазовый множитель $e^{-j\omega M/2}$, то получится АЧХ фильтра с идеальной импульсной характеристикой вида:

$$h_{mb}[n] = \sum_{k=1}^{N_{mb}} (G_k - G_{k-1}) \frac{\sin \omega_k (n - M/2)}{\pi(n - M/2)}, \quad (7.81)$$

где N_{mb} — число полос, а $G_{N_{mb}+1} = 0$. В результате умножения $h_{mb}[n]$ на окно Кайзера получается аппроксимация идеальной КЧХ, где точки разрыва сглаживаются так же, как и в случае ФНЧ, если эти точки достаточно удалены друг от друга. Значит, формула Кайзера, определяющая параметры окна по предписанным ошибкам и ширине переходных полос, применима и в этом случае. Заметим, что ошибки аппроксимации умножаются на величину скачка в точке разрыва. Например, если разрыв в одну единицу дает ошибку δ , то разрыв в половину единицы — ошибку $\delta/2$.

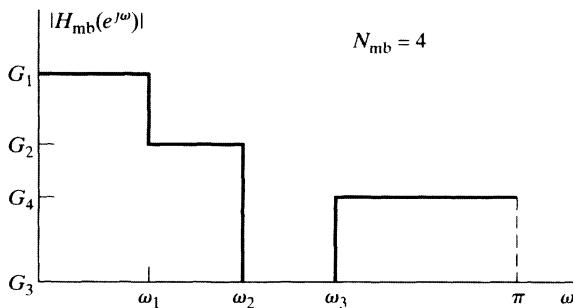


Рис. 7.27. Идеальная АЧХ многополосного фильтра

7.4.2. Дискретный дифференциатор

В примере 4.5 мы сталкивались с ситуацией, когда было полезно уметь вычислять отсчеты производной узкополосного сигнала по отсчетам самого сигнала. Так как при преобразовании Фурье операция дифференцирования переходит в операцию произведения на $j\Omega$, то дискретная система с 2π -периодической КЧХ, определенной над периодом $(-\pi, \pi)$ как $(j\omega/T)$, будет выдавать отсчеты производной непрерывного узкополосного сигнала. Система с таким свойством называется *дискретным дифференциатором*.

В идеальной модели линейно-фазовый дискретный дифференциатор обладает следующей КЧХ:

$$H_{diff}(e^{j\omega}) = (j\omega)e^{-j\omega M/2}, \quad -\pi < \omega < \pi. \quad (7.82)$$

(Мы выбросили здесь множитель $1/T$.) Соответствующая идеальная импульсная характеристика может быть записана как

$$h_{diff}[n] = \frac{\cos \pi(n - M/2)}{n - M/2} - \frac{\sin \pi(n - M/2)}{\pi(n - M/2)^2}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (7.83)$$

Легко заметить, что при умножении последовательности $h_{\text{diff}}[n]$ на симметричное окно длины $(M+1)$ получается антисимметричный результат: $h[n] = -h[M-n]$. Поэтому тип итоговой обобщенно-линейно-фазовой системы будет либо III, либо IV.

Так как формула Кайзера была получена для АЧХ с единственной точкой разрыва, то непосредственно применять ее к дифференциатору, где разрыв получается из-за фазой, нельзя. Тем не менее, как мы убедимся на следующем примере, оконный метод очень эффективен при проектировании таких систем.

Пример 7.10. Проектирование дифференциатора методом Кайзера

Предположим, что $M = 10$ и $\beta = 2, 4$. Характеристики системы, полученные методом Кайзера с такими параметрами, приведены на рис. 7.28. Антисимметричная импульсная характеристика представлена на рис. 7.28, а).

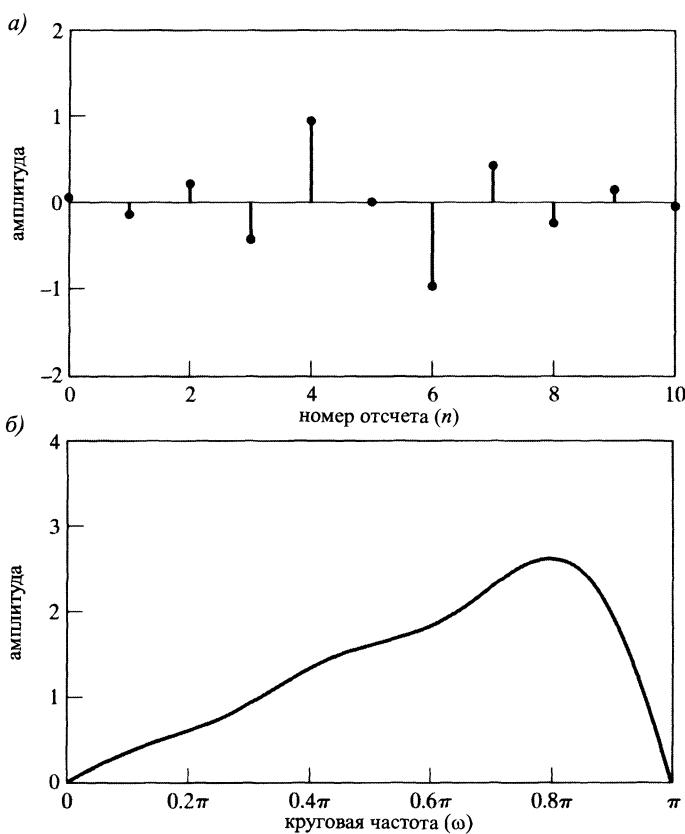


Рис. 7.28. Характеристические функции дискретного линейно-фазового дифференциатора с конечной импульсной характеристикой типа III: а) импульсная характеристика ($M = 10$); б) АЧХ

Ввиду четности M итоговую дискретную систему следует отнести к третьему типу линейно-фазовых систем. Поэтому ее характеристическая функция $H(z)$ обращается в нуль как в точке $z = +1$ ($\omega = 0$), так и в $z = -1$ ($\omega = \pi$). Этот факт отчетливо

виден на графике АЧХ (рис. 7.28, б)). Фаза точна, так как системы типа III обладают постоянным сдвигом фазы на $\pi/2$ радиан плюс линейной фазой, соответствующей (в нашем случае) задержке на $M/2 = 5$ отсчетов. Ошибка аппроксимации амплитуды

$$E_{\text{diff}}(\omega) = \omega - A_0(e^{j\omega}), \quad 0 \leq \omega \leq 0,8\pi \quad (7.84)$$

изображена на рис. 7.28, в). В этой формуле $A_0(e^{j\omega})$ обозначает амплитуду аппроксимации. (Обратите внимание, что своего максимума ошибка достигает в районе $\omega = \pi$, а при частотах выше $0,8\pi$ она вообще не вычерчена.) Ясно, что над всей полосой линейного возрастания модуля не получается и, очевидно, относительная ошибка (то есть $E_{\text{diff}}(\omega)/\omega$) становится очень большой при низких и верхних частотах (в окрестности $\omega = \pi$).

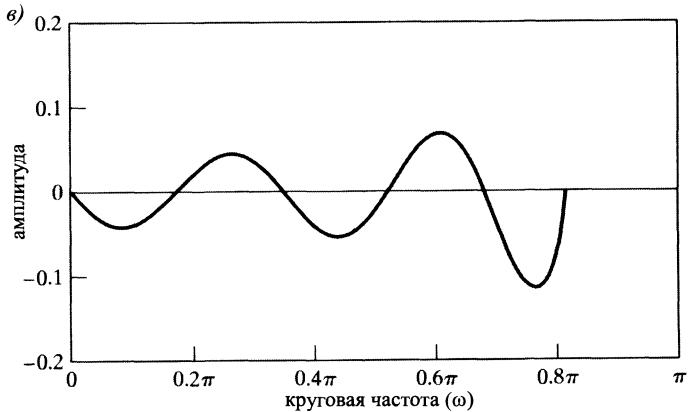


Рис. 7.28 (окончание).
в) ошибка аппроксимации

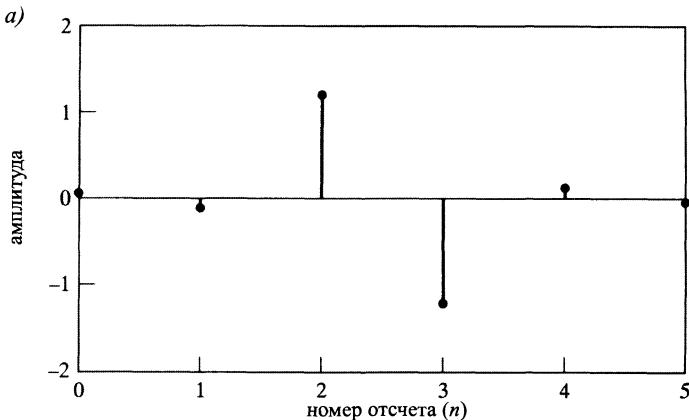


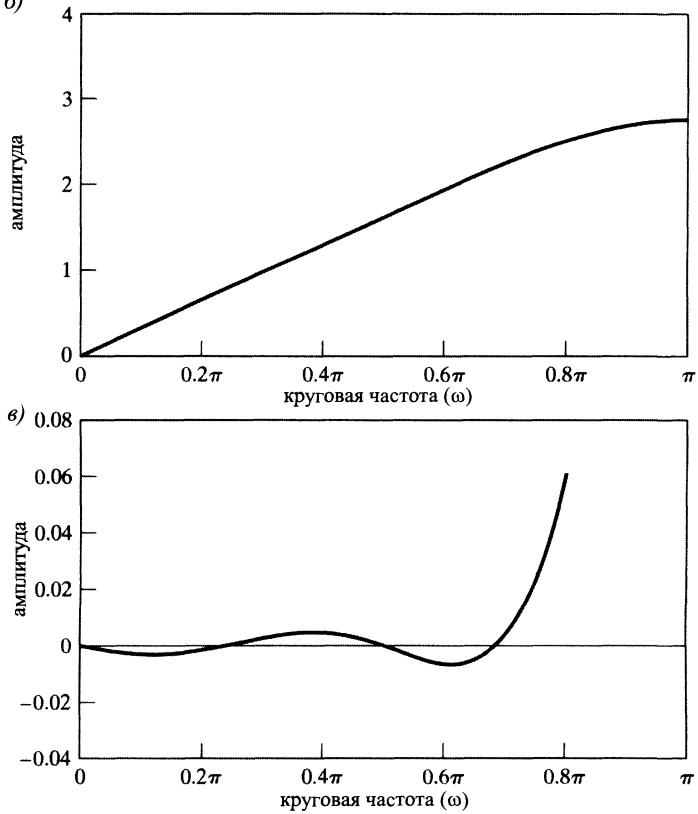
Рис. 7.29. Характеристические функции дискретного линейно-фазового дифференциатора с конечной импульсной характеристикой типа IV: а) импульсная характеристика ($M = 5$)

Характеристическая функция линейно-фазовых КИХ-систем четвертого типа не обязана обращаться в нуль в точке $z = -1$. Четвертый тип систем допускает значительно более хорошую аппроксимацию АЧХ, что можно увидеть на рис. 7.29 (там $M = 5$ и $\beta = 2,4$). В этом случае ошибка аппроксимации амплитуды очень мала как до некоторой окрестности точки $w = 0,8\pi$, так и после нее. Фаза этой системы тоже состоит из постоянного члена в $\pi/2$ радиан и линейного, соответствующего задержке в $M/2 = 2,5$ отсчетов.

отсчета. Полученная задержка — цена, которую приходится платить за аппроксимацию амплитуды с высокой степенью точности. Вместо того чтобы получать отсчеты производной непрерывного сигнала в исходные моменты времени $t = nT$, мы вычисляем их в моменты $t = (n-2, 5)T$. Однако для многих приложений такая полуцелая задержка несущественна или ее можно компенсировать еще одной полуцелой задержкой в более сложной системе, содержащей другие линейно-фазовые фильтры. \square

Рис. 7.29 (окончание). б)

б) АЧХ; в) ошибка аппроксимации



7.5. Оптимальная аппроксимация КИХ-фильтров

Проектирование КИХ-фильтров с помощью окон является прямым и достаточно общим методом, несмотря на то что имеет некоторые ограничения. Однако зачастую возникает необходимость разработать «лучший» фильтр, нежели это можно сделать при данном значении M . Бессмысленно уточнять выражение «лучший», не сформулировав критерий аппроксимации. Например, в случае оконного метода проектирования из теории рядов Фурье следует, что при данном значении M прямоугольное окно обеспечивает наилучшее приближение желаемой КЧХ в среднеквадратичном. Более точно это высказывание выглядит так: импульсная

характеристика

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (7.85)$$

минимизирует ошибку

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega. \quad (7.86)$$

(См. задачу 7.32.) Однако, как мы уже видели, этот критерий «хорошести» аппроксимации допускает неприемлемое поведение АЧХ в окрестности точек разрыва. Более того, оконный метод не позволяет индивидуально контролировать ошибку аппроксимации над различными полосами частот. Для многих приложений более хорошие результаты дает принцип **минимакса** (минимизация максимальной ошибки) или критерий частотно-взвешенной ошибки. Такие проекты выполняются с помощью алгоритмической техники.

Как показывают предыдущие примеры, частотно-избирательные фильтры, спроектированные оконным методом, обладают тем свойством, что ошибка аппроксимации достаточно велика в окрестности точки разрыва идеальной КЧХ и уменьшается по мере удаления от нее. Более того, как было отмечено (см., например, рис. 7.22, 7.24 в) и 7.25 в), ошибка аппроксимации в полосах пропускания и непропускания практически одинакова. В случае проектирования БИХ-фильтров мы видели, что если ошибка аппроксимации распределена равномерно по частотам, а колебания полос пропускания и непропускания регулируются отдельно друг от друга, то данный набор спецификаций можно обеспечить системой меньшего порядка, чем при достижении точности одного параметра за счет превышения остальных. Аналогичное утверждение можно сформулировать и для КИХ-фильтров.

Далее мы будем изучать особенно эффективные часто используемые алгоритмические процедуры проектирования КИХ-фильтров с обобщенной линейной фазой. Хотя подробно будет рассмотрен лишь тип I фильтров, мы объясним, как эти методы можно адаптировать для проектирования фильтров остальных трех типов.

При разработке детерминированного линейно-фазового КИХ-фильтра полезно остановиться на самом простом случае, а именно фильтре с нулевой фазой, для которого

$$h_e[n] = h_e[-n], \quad (7.87)$$

а затем добавить в него задержку, достаточную для детерминированности. Итак, рассмотрим импульсную характеристику $h_e[n]$, удовлетворяющую условию (7.87). Соответствующая КЧХ описывается формулой:

$$A_e(e^{j\omega}) = \sum_{n=-L}^L h_e[n]e^{-j\omega n}, \quad (7.88)$$

где $L = M/2$ — целое число. Ввиду (7.87) КЧХ можно переписать в виде

$$A_e(e^{j\omega}) = h_e[0] + \sum_{n=1}^L 2h_e[n] \cos \omega n. \quad (7.89)$$

Заметим, что $A_e(e^{j\omega})$ — вещественноненеизменяющаяся четная периодическая функция от ω . Задержав систему с характеристикой $h_e[n]$ на $L = M/2$ отсчетов, мы получим детерминированную систему. Итоговая импульсная характеристика равна:

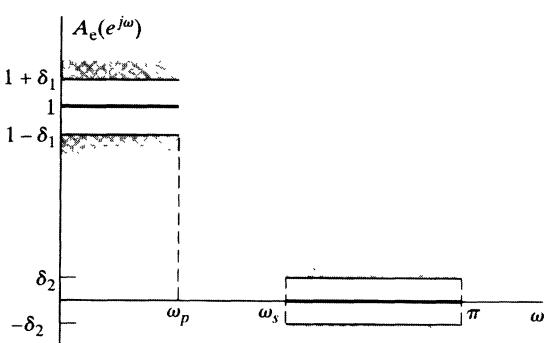
$$h[n] = h_e[n - M/2] = h[M - n], \quad (7.90)$$

а КЧХ записывается как

$$H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}. \quad (7.91)$$

На рис. 7.30 показана схема допустимых ошибок аппроксимации фильтра нижних частот с вещественной функцией типа $A_e(e^{j\omega})$. Единица аппроксимируется в полосе $0 \leq |\omega| \leq \omega_p$ с максимально допустимой абсолютной ошибкой δ_1 , а нуль — в полосе $\omega_s \leq |\omega| \leq \pi$ с максимумом абсолютной ошибки δ_2 . Алгоритмические методы проектирования фильтров для достижения указанных спецификаций должны, в сущности, систематически варьировать $(L+1)$ ничем неограниченные значения импульсной характеристики $h_e[n]$, где $0 \leq n \leq L$. В известных алгоритмах проектирования некоторые из параметров: L , δ_1 , δ_2 , ω_s и ω_p фиксируются, а затем, в результате итерационной процедуры, определяются оптимальные значения остальных. Существуют два различных типа алгоритмов. В книгах [60, 62 и 66] описаны алгоритмы, в которых фиксируются L , δ_1 и δ_2 , а оптимизируются значения параметров ω_p и ω_s . Авторы изданий [114, 115, 99, 119 и 120] предлагают фиксировать L , ω_p , ω_s и отношение δ_1/δ_2 , а варьировать δ_1 (или δ_2). С момента появления этих различных подходов доминирующим среди алгоритмов оптимального проектирования КИХ-фильтров стал алгоритм Пакса–Мак–Клеллана, поскольку он наиболее гибок и эффективен с вычислительной точки зрения. Поэтому здесь мы ограничимся обсуждением именно этого алгоритма.

Рис. 7.30. Идеальная КЧХ и схема допустимых ошибок фильтра нижних частот



Алгоритм Пакса–Мак–Клеллана основывается на переформулировке задачи проектирования фильтров в терминах полиномиальной аппроксимации. Функцию $\cos \omega n$ в формуле (7.89) можно представить в виде многочлена от $\cos \omega$:

$$\cos \omega n = T_n(\cos \omega), \quad (7.92)$$

где $T_n(x)$ — многочлен¹ степени n . Следовательно, функцию из (7.89) можно

¹ Точнее, это многочлен Чебышева степени n , определяемый как $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

записать как многочлен степени L от $\cos \omega$:

$$A_e(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^L a_k \cdot \cos^k \omega, \quad (7.93)$$

где a_k — постоянные коэффициенты, зависящие от значений импульсной характеристики $h_e[n]$. Введя замену $x = \cos \omega$, перепишем соотношение (7.93) в виде

$$A_e(e^{j\omega}) = P(x) \Big|_{x=\cos \omega}. \quad (7.94)$$

Здесь $P(x)$ — многочлен степени L :

$$P(x) = \sum_{k=0}^l a_k x^k. \quad (7.95)$$

Позже мы убедимся, что точная информация о связи коэффициентов a_k с импульсной характеристикой не нужна (хотя соответствующую формулу и можно получить). Достаточно знать, что $A_e(e^{j\omega})$ может быть записана как тригонометрический многочлен (7.93) степени L .

Ключом к контролированию параметров ω_p и ω_s является их фиксация и варьирование значений δ_1 и δ_2 . Пакс и Мак-Клеллан показали [114, 115], что при фиксированных параметрах L , ω_p и ω_s задача о проектировании частотно-избирательного фильтра с заданными характеристиками сводится к проблеме аппроксимации Чебышева над непересекающимися множествами, важной задаче теории аппроксимации, которой посвящены несколько полезных теорем и процедур (см, например, [23]). Для формализации задачи аппроксимации в этом случае определим функцию ошибки приближения как

$$E(\omega) = W(\omega)(H_d(e^{j\omega}) - A_e(e^{j\omega})), \quad (7.96)$$

где весовая функция $W(\omega)$ включает в себя параметр ошибки аппроксимации. При этом функция ошибки $E(\omega)$, весовая функция $W(\omega)$ и желаемая КЧХ $H_d(e^{j\omega})$ задаются только на замкнутых подмножествах отрезка $0 \leq \omega \leq \pi$. Например, для аппроксимации фильтра нижних частот эти функции определяются на отрезках $0 \leq \omega \leq \omega_p$ и $\omega_s \leq \omega \leq \pi$. Аппроксимирующая функция $A_e(e^{j\omega})$ ничем не связывается в переходной области (например, $\omega_p \leq \omega \leq \omega_s$) и может иметь любую форму, необходимую для обеспечения желаемой характеристики в остальных полосах.

В качестве примера предположим, что нам нужно получить аппроксимацию, соответствующую рис. 7.30, где L , ω_p и ω_s фиксированы. Тогда

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ 0, & \omega_s \leq \omega \leq \pi. \end{cases} \quad (7.97)$$

Весовая функция $W(\omega)$ позволяет по-разному масштабировать ошибку аппроксимации в разных полосах. При решении задачи об аппроксимации фильтра нижних частот в качестве весовой берут функцию

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{K}, & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ 1, & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases} \quad (7.98)$$

с параметром K , равным отношению δ_1/δ_2 . Если $A_e(e^{j\omega})$ имеет график, как на рис. 7.31, то взвешенная ошибка аппроксимации $E(\omega)$, определенная формулой (7.96), будет совпадать с представленной на рис. 7.32. Заметим, что при такой весовой функции максимум взвешенной ошибки аппроксимации равен $\delta = \delta_2$ в обеих полосах.

Рис. 7.31. Типичная КЧХ, удовлетворяющая спецификациям из рис. 7.30

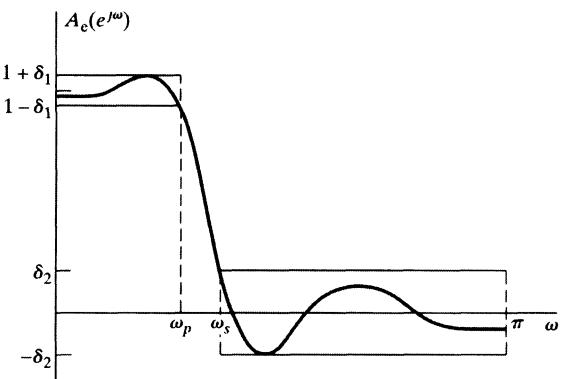
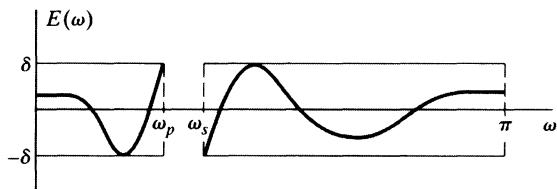


Рис. 7.32. Взвешенная ошибка аппроксимации из рис. 7.31



При такой процедуре проектирования пользуются критерием минимакса, или критерием Чебышева, согласно которому мы ищем КЧХ $A_e(e^{j\omega})$, которая минимизирует максимальную взвешенную ошибку (7.96) внутри представляющих интерес интервалов частот (полосы пропускания и непропускания в случае фильтра нижних частот). На формульном языке наилучшей считается аппроксимация, на которой достигается следующий минимум:

$$\min_{h_e[n]: 0 \leq n \leq L} (\max_{\omega \in F} |E(\omega)|),$$

где F обозначает объединение отрезков $[0; \omega_p]$ и $[\omega_s; \pi]$. Иначе говоря, мы ищем множество значений импульсной характеристики, минимизирующую δ из рис. 7.32.

Пакс и Мак-Келлан [114, 115] к задаче проектирования фильтров применили следующую теорему из теории аппроксимаций:

Теорема о чередованиях. Пусть F_P — замкнутое множество, состоящее из непересекающихся объединения отрезков числовой прямой с координатой x , $P(x)$ — многочлен степени r :

$$P(x) = \sum_{k=0}^r a_k x^k.$$

Пусть, кроме того, $D_P(x)$ — функция, непрерывная на множестве F_P , а $W_P(x)$ — произвольная положительная функция, непрерывная на F_P . Определим взвешенную ошибку как

$$E_P(x) = W_P(x)(D_P(x) - P(x))$$

и обозначим через $\|E\|$ ее максимум:

$$\|E\| = \max_{x \in F_P} |E_P(x)|.$$

Тогда $P(x)$ — единственный многочлен степени r , минимизирующий $\|E\|$, если и только если $E_P(x)$ имеет по крайней мере $(r+2)$ чередования, т. е. должно найтись по крайней мере $r+2$ точки $x_i \in F_P$, для которых $x_1 < x_2 < \dots < x_{r+2}$ и $E_P(x_i) = -E_P(x_{i+1}) = \pm \|E\|$ при $i = 1, 2, \dots, (r=1)$.

На первый взгляд, соотнести формальную теорему с задачей проектирования фильтров может показаться трудным. Однако, как мы увидим из дальнейшего обсуждения, все предположения теоремы важны с точки зрения алгоритма проектирования. Для более полного понимания теоремы о чередованиях в подразделе 7.5.1 она будет адаптирована для случая фильтра нижних частот типа I. Но сначала на примере 7.11 мы покажем, как эта теорема применяется к многочленам.

Пример 7.11. Теорема о чередованиях и многочлены

Теорема чередования указывает необходимые и достаточные условия, при которых многочлен данной степени аппроксимирует данную функцию с минимальной из максимальных взвешенных ошибок. Для иллюстрации применения этой теоремы предположим, что мы хотим исследовать многочлен $P(x)$, аппроксимирующий единицу на отрезке $-1 \leq x \leq -0,1$ и нуль на отрезке $0,1 \leq x \leq 1$. Рассмотрим три таких многочлена, графики которых приведены на рис. 7.33. Степень всех этих многочленов равна пяти, и нам хотелось бы определить, какой из них (или никакой) удовлетворяет условиям теоремы о чередованиях. Замкнутое подмножество F_P , о котором идет речь в теореме, в данном случае состоит из объединения отрезков $[-1; -0,1] \cup [0, 1; 1]$. Определим на нем весовую функцию как $W_P(x) = 1$.

Согласно теореме о чередованиях, оптимальный многочлен пятой степени должен иметь по крайней мере семь чередований максимальной ошибки на множестве F_P . В многочлене $P_1(x)$ встречается только пять чередований: три на отрезке $[-1; -0,1]$ и два на $[0, 1; 1]$. Самая правая точка его графика с горизонтальной касательной не вносит вклада в число чередований, поскольку она «не дотягивает» до максимальной ошибки, обозначенной пунктирной линией. В формулировке теоремы требуется, чтобы соседние элементы последовательности «чередований» имели противоположный знак, поэтому точка $x = 1$ тоже не может давать вклад в число чередований, поскольку значение $P_1(x)$ в ней отрицательно, как и в ближайшей к ней точке x_4 слева, в которой модуль значения многочлена совпадает с модулем максимальной ошибки.

В следующем многочлене $P_2(x)$ тоже встречается только пять чередований, и поэтому он не может быть оптимальным. Действительно, три чередования многочлена $P_2(x)$ попадают на отрезок $[-1; -0,1]$ и только два — на $[0, 1; 1]$. Трудности возникают в связи с тем, что $x = 0,1$ не является экстремальной точкой (график многочлена над этой точкой проходит чуть ниже максимального значения ошибки). Предыдущее чередование в точке $x = -0,1$ имеет отрицательный знак, так что соседние чередования должны быть положительными. Первая точка на отрезке $[0, 1; 1]$ с горизонтальной ка-

касательной не подходит, поскольку значение многочлена в ней отрицательно. Поэтому к чередованиям можно отнести лишь следующую точку графика с касательной нулевого наклона и 1. Таким образом, суммарное число чередований для этого многочлена не превосходит пяти.

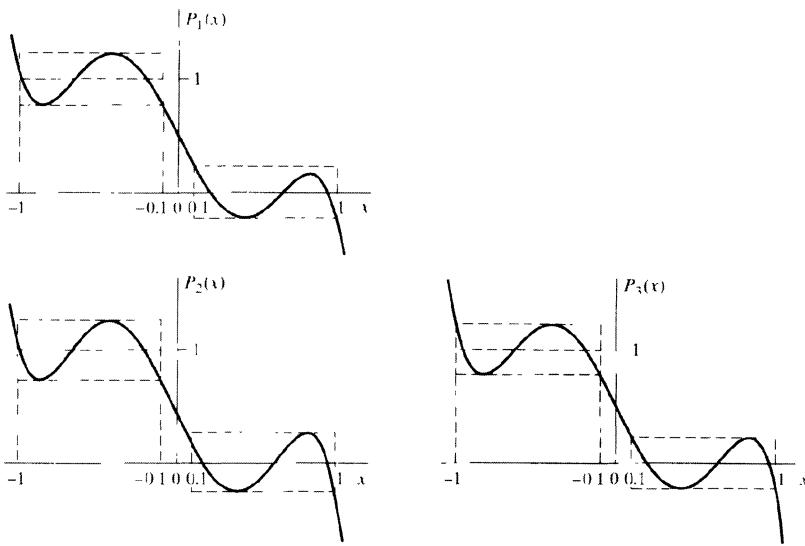


Рис. 7.33. Многочлены пятой степени из примера 7.11

Наконец, в многочлене $P_3(x)$ наличествует восемь чередований: все точки локальных экстремумов многочлена и точки $x = -1, x = -0, 1, x = 0, 1$ и $x = 1$. Так как в теореме требуется по крайней мере семь чередований, то можно утверждать, что $P_3(x)$ — единственный многочлен пятой степени, минимизирующий максимум ошибки аппроксимации кусочно постоянной функции на множестве F_P . \square

7.5.1. Оптимальный фильтр нижних частот I типа

Приспособливая теорему о чередованиях к фильтрам типа I, многочлен $P(x)$ из формулировки теоремы положим равным многочлену от косинуса (7.93), т. е.

$$P(\cos \omega) = \sum_{k=0}^L a_k \cos^k \omega. \quad (7.99)$$

В качестве функции $D_P(x)$ возьмем желаемую КЧХ фильтра нижних частот из формулы (7.97), в которой $x = \cos \omega$:

$$D_P(\cos \omega) = \begin{cases} 1, & \cos \omega_p \leq \cos \omega \leq 1, \\ 0, & -1 \leq \cos \omega \leq \cos \omega_s. \end{cases} \quad (7.100)$$

Весовую функцию возьмем из (7.98), переписав ее в терминах $\cos \omega$:

$$W_P(\cos \omega) = \begin{cases} \frac{1}{K}, & \cos \omega_p \leq \cos \omega \leq 1, \\ 1, & -1 \leq \cos \omega \leq \cos \omega_s. \end{cases} \quad (7.101)$$

Тогда взвешенная ошибка аппроксимации вычисляется по формуле:

$$E_P(\cos \omega) = W_P(\cos \omega)(D_P(\cos \omega) - P(\cos \omega)). \quad (7.102)$$

Замкнутое множество F_P в этом случае совпадает с объединением отрезков $[0; \omega_p] \cup [\omega_s; \pi]$, или (в терминах $\cos \omega$) $F_P = [-1; \cos \omega_s] \cup [\cos \omega_P; 1]$. Тогда, по теореме о чередованиях, набор коэффициентов a_k многочлена (7.99) будет соответствовать фильтру, представляющему единственную наилучшую аппроксимацию идеального фильтра нижних частот среди аппроксимаций с фиксированным отношением $\delta_1/\delta_2 = K$, границами полос пропускания и непропускания ω_p и ω_s тогда и только тогда, когда у функции $E_P(\cos \omega)$ будет по крайней мере $(L+2)$ чередования на множестве F_P , т. е. если и только если она будет поочередно принимать свое максимальное и минимальное значение по меньшей мере $(L+2)$ раза. Такая аппроксимация называется *равномерно пульсирующей*.

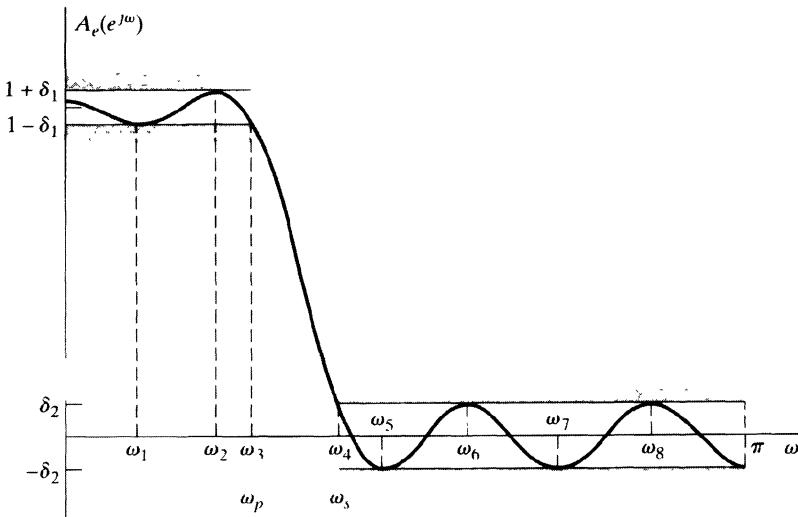


Рис. 7.34. Типичный пример оптимальной аппроксимации фильтра нижних частот, согласно теореме о чередованиях при $L = 7$

На рис. 7.34 приведена КЧХ фильтра, оптимально аппроксимирующая (при $L = 7$) идеальную с точки зрения теоремы о чередованиях. На этом рисунке $A_e(e^{j\omega})$ показана как функция от ω . Чтобы применить критерий оптимальности, перепишем сначала A_e как функцию от $x = \cos \omega$ и явно исследуем чередования $E_P(x)$. На рис. 7.35, а–в) вычерчены графики функций $P(x)$, $W_P(x)$ и $E_P(x)$ соответственно ($x = \cos \omega$). В этом примере $L = 7$, и мы видим ровно девять чередований экстремумов ошибки. Значит, условия теоремы о чередованиях выполнены. Важно отметить, что при подсчете чередований мы учитывали точки $\cos \omega_p$ и $\cos \omega_s$, поскольку по предположениям теоремы о чередованиях множество F_P , где эти чередования ищутся, замкнуто, т. е. концы всех рассматриваемых интервалов в него входят. Несмотря на то что отдельные точки множества могут показаться несущественными для аппроксимации, мы увидим в дальнейшем, что это не так.

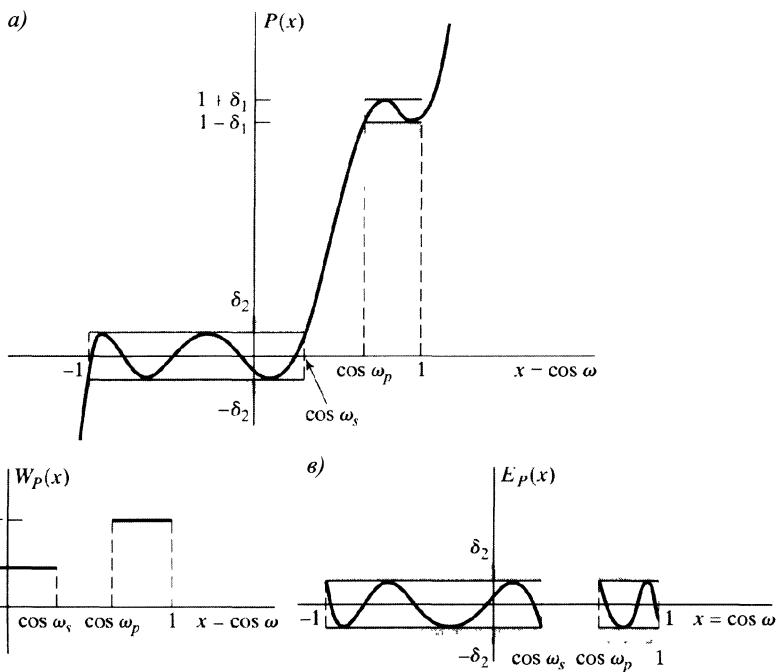


Рис. 7.35. Функции полиномиальной аппроксимации от переменной $x = \cos \omega$: а) аппроксимирующий многочлен; б) весовая функция; в) ошибка аппроксимации

Сравнение рис. 7.34 и 7.35 говорит о том, что, когда аппроксимируется идеальный фильтр нижних частот (или любой другой с кусочно-постоянной КЧХ), мы фактически можем подсчитывать чередования прямым исследованием КЧХ, помня о том, что максимальные ошибки в полосах пропускания и непропускания различны.

Теорема о чередованиях утверждает, что оптимальный фильтр должен иметь не меньше $(L + 2)$ чередований, но не исключает, что таких чередований будет больше. Фактически, мы покажем, что в случае фильтра нижних частот максимально возможное число чередований равно $(L + 3)$. Сначала, однако, мы иллюстрируем это для частного случая, $L = 7$ (рис. 7.36, а). На рис. 7.36, а) встречается $L + 3 = 10$ чередований, в то время как на каждом из рис. 7.36, б)-в) только $L + 2 = 9$. Аппроксимацию с $L + 3$ чередованиями часто называют *фильтром с ограничением максимума неравномерности*. Заметим, что в случае фильтра с ограничением максимума неравномерности чередования появляются в точках $\omega = 0, \omega = \pi, \omega = \omega_p$ и $\omega = \omega_s$, т. е. во всех граничных точках интересующих нас полос (см. рис. 7.36, а)). На рис. 7.36, б) и в) в точках ω_p и ω_s тоже встречаются чередования, а вот в 0 и π их нет. На рис. 7.36, г) чередования присутствуют во всех граничных точках, но в полосе пропускания у графика ровно на один экстремум (точки с горизонтальной касательной) меньше.

Кроме того, заметим, что во всех случаях отмечается равномерная пульсация внутри полос пропускания и непропускания, т. е. все экстремальные точки внутри

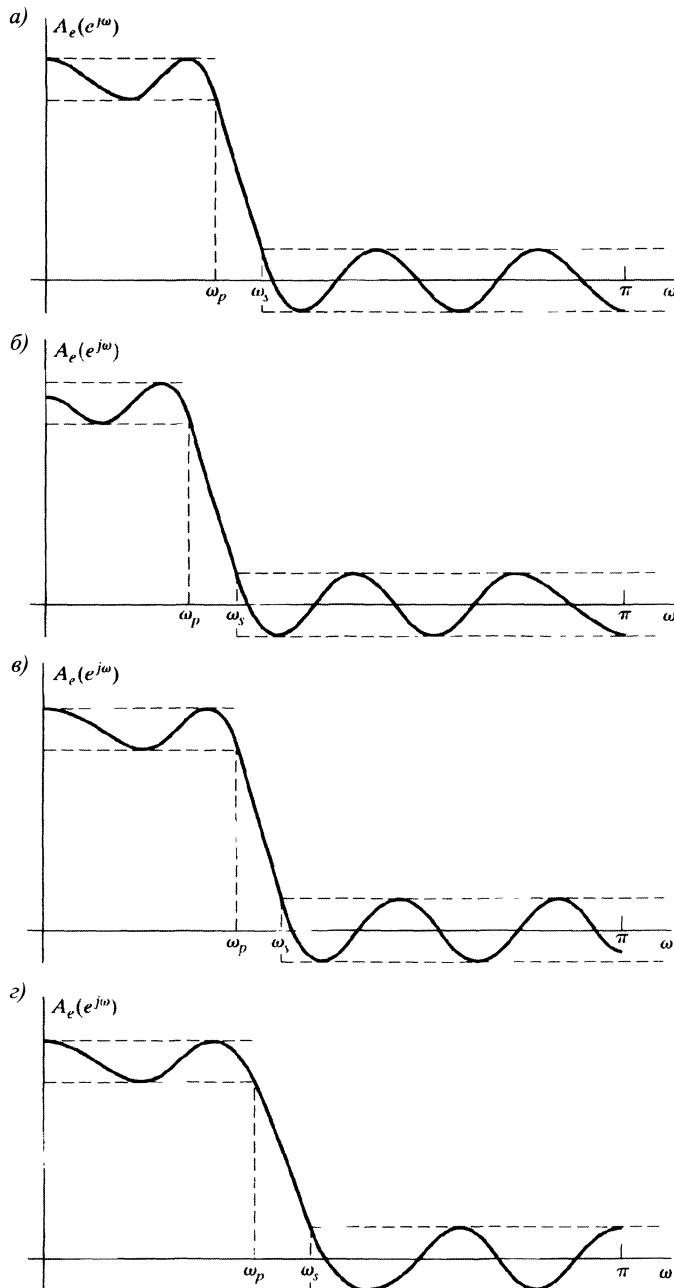


Рис. 7.36. Возможные оптимальные аппроксимации фильтра нижних частот при $L = 7$:

- $L + 3$ чередования (случай с ограничением максимума неравномерности);
- $L + 2$ чередования (экстремум в точке $\omega = \pi$); в) $L + 2$ чередования (экстремум в точке $\omega = 0$); г) $L + 2$ чередования (экстремум в точках $\omega = 0$ и π)

интервала $(0; \pi)$ соответствуют частотам с максимальным модулем взвешенной ошибки. Наконец, так как все фильтры из рис. 7.36 удовлетворяют условиям теоремы чередования при $L = 7$ с одним и тем же значением параметра $K = \delta_1/\delta_2$, то значения границ ω_p и/или ω_s должны меняться от фильтра к фильтру ввиду единственности оптимальной аппроксимации с данным набором параметров.

Особенности фильтров из рис. 7.36, отмеченные в предыдущих абзацах, являются следствиями теоремы о чередованиях. Мы покажем, что фильтры нижних частот первого типа обладают следующими свойствами:

- 1) максимально возможное число чередований ошибок равно $L + 3$;
- 2) в чередовании всегда участвуют точки ω_p и ω_s ;
- 3) все локальные минимумы и максимумы внутри полос пропускания и не-пропускания $((0; \omega_p) \cup (\omega_s; \pi))$ входят в чередования, т. е. фильтр является равномерно пульсирующим, за исключением, быть может, точек $\omega = 0$ и $\omega = \pi$.

Максимально возможное число чередований равно $L + 3$

В комментариях к рис. 7.34 и 7.36 отмечалось, что при максимально возможном числе чередований максимальной ошибки точки чередования расположены в четырех граничных ($\omega = 0, \pi, \omega_p, \omega_s$) и локальных экстремумах, т. е. таких точках, где производная функции $A_e(e^{j\omega})$ обращается в нуль. Так как у многочлена степени L может быть не более чем $L - 1$ экстремум, то суммарное число чередований не может превосходить $L + 3$. Необходимо отметить, что производная тригонометрического многочлена

$$P(\cos \omega) = \sum_{k=0}^L a_k \cos^k \omega, \quad (7.103)$$

рассматриваемого как функция от ω , обязательно обращается в нуль в точках $\omega = 0$ и $\omega = \pi$, даже в том случае, когда многочлен $P(x)$ как функция переменной x и не имеет локальных экстремумов в точках $x = \pm 1$. Действительно,

$$\frac{d P(\cos \omega)}{d \omega} = -\sin \omega \cdot \sum_{k=0}^L k a_k \cos^{k-1} \omega = -\sin \omega \cdot \sum_{k=0}^{L-1} (k+1) a_{k+1} \cos^k \omega \quad (7.104)$$

обращается в нуль при $\omega = 0$ и $\omega = \pi$ и еще в $(L - 1)$ корне многочлена степени $L - 1$, заключенного в круглые скобки. Тривиальность производной функции $A_e(e^{j\omega})$ в точках 0 и π отчетливо видна на рис. 7.36. На рис. 7.36, г) отражена ситуация, когда и $\sin \omega$ и многочлен

$$\sum_{k=0}^{L-1} (k+1) a_{k+1} \cos^k \omega$$

одновременно обращаются в нуль, т. е. многочлен $P(x)$ имеет нулевую производную в точке $x = -1 = \cos \pi$.

Чередование в точках ω_p и ω_s

Во всех случаях, отраженных на рис. 7.36, функция $A_e(e^{j\omega})$ принимает значение $1 - \delta_1$ на границе полосы пропускания ω_p и $+ \delta_2$ — на границе полосы непропускания ω_s . Чтобы понять, почему это всегда происходит, выясним, сохранит

ли аппроксимация из рис. 7.36, *a*) свою оптимальность, если мы сдвинем границу ω_p влево, как показано на рис. 7.37. Частоты, при которых модуль взвешенной ошибки аппроксимации из этого рисунка принимает свое максимальное значение, суть точки: $\omega = 0, \omega_1, \omega_2, \omega_s, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ и $\omega = \pi$, т. е. всего $L + 2 = 9$ точек. Однако знак максимальной ошибки меняется не во всех точках (в ω_2 и ω_s она положительна). С другой стороны, в силу теоремы о чередованиях нужно учитывать лишь те точки, где максимальная ошибка *меняет знак*. Поэтому под условие теоремы подпадают лишь частоты $\omega = 0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ и $\omega = \pi$ — всего 8. Значит, условия теоремы о чередованиях не выполнены и данная аппроксимация не оптимальна. Короче говоря, принудительно удалив ω_p из последовательности чередований (сдвинув ее влево или вправо), мы удалим из нее целых две точки и оставим не более $L + 1$ чередование, что не достаточно для оптимальности аппроксимации. Точно так же легко показать, что принудительный сдвиг границы ω_s нарушает оптимальность аппроксимации.

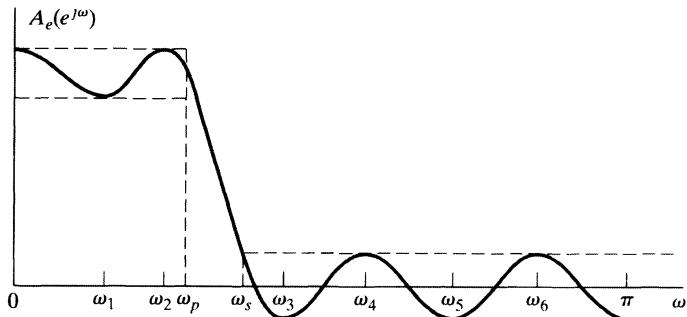


Рис. 7.37. Аппроксимация фильтра из рис. 7.36, *a*) со сдвинутой границей ω_p

Аналогичные рассуждения годятся и для фильтра верхних частот, но они не достаточны в случаях полосового и многополосного фильтров (см. задачу 7.57).

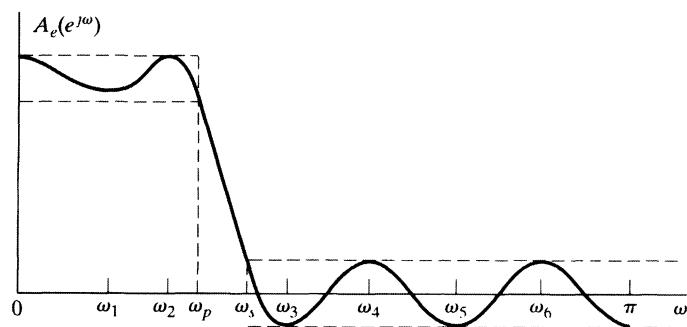


Рис. 7.38. Модифицированная аппроксимация фильтра из рис. 7.36, *a*) с приподнятым первым локальным минимумом

Фильтр будет равнопульсирующим за исключением, быть может, точек $\omega = 0$ и $\omega = \pi$

Аргументы здесь очень напоминают те, которые использовались для доказательства вхождения границ полос пропускания и непропускания в число чередований.

Предположим, например, что в аппроксимации фильтра из рис. 7.36, а) немного приподняли ее первый локальный минимум и тем самым исключили его из числа чередований (см. рис. 7.38). Теперь, несмотря на то что максимальная ошибка появляется в девяти точках, лишь восемь из них удовлетворяют теореме о чередованиях. Таким образом, исключение одной из экстремальных точек аппроксимации из числа чередований приводит к уменьшению числа чередований на 2, оставляя в качестве максимально возможного $L + 1$ чередование.

Мы рассказали лишь о нескольких из многочисленных свойств аппроксимаций, которые можно вывести из теоремы о чередованиях. Множество других обсуждаются в книге [121]. Более того, мы рассмотрели только фильтр нижних частот первого типа, в то время как намного более интересное обсуждение фильтров остальных трех типов или фильтров с более общими КЧХ осталось за рамками нашей книги. Чтобы хоть как-то восполнить этот пробел и заодно подчеркнуть еще некоторые аспекты теоремы о чередованиях, мы кратко разберем случай фильтра нижних частот второго типа.

7.5.2. Оптимальный фильтр нижних частот II типа

Напомним, что к детерминированным фильтра типа II относятся те, чья импульсная характеристика равна нулю вне интервала $[0, M]$ с нечетным числом M , т. е. четной длиной фильтра $M + 1$, причем импульсная характеристика симметрична:

$$h[n] = h[M - n]. \quad (7.105)$$

Следовательно, КЧХ такого фильтра можно записать как

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \sum_{n=0}^{(M-1)/2} 2h[n] \cos\left(\omega\left(\frac{M}{2} - n\right)\right). \quad (7.106)$$

Положив $b[n] = 2h[(M + 1)/2 - n]$, $n = 1, 2, \dots, (M + 1)/2$, формулу (7.106) можно переписать в виде

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n] \cos\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right). \quad (7.107)$$

Чтобы применить теорему о чередованиях к проектированию фильтров типа II, нам нужно переформулировать задачу проектирования как задачу о полиномиальной аппроксимации. Поэтому перепишем сумму в формуле (7.107) как

$$\sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n] \cos\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) = \cos(\omega/2) \left(\sum_{n=0}^{(M-1)/2} \tilde{b}[n] \cos(\omega n) \right) \quad (7.108)$$

(см. задачу 7.52). Сумму в правой части равенства (7.108) теперь можно представить в виде тригонометрического многочлена $P(\cos \omega)$:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \cos(\omega/2) P(\cos \omega), \quad (7.109)$$

где

$$P(\cos \omega) = \sum_{k=0}^L a_k \cos^k \omega, \quad (7.110)$$

а $L = (M - 1)/2$. Коэффициенты a_k этого многочлена связаны с коэффициентами $\tilde{b}[n]$ из (7.108), зависящими, в свою очередь, от коэффициентов $b[n] = 2h[(M + 1)/2 - n]$ формулы (7.107). Как и в случае фильтров первого типа, явная зависимость коэффициентов a_k от импульсной характеристики нам не нужна. Применим теорему о чередованиях к многочлену $P(\cos \omega)$, аппроксимирующему желаемую КЧХ. Для фильтров нижних частот типа I при фиксированном отношении K пульсаций в полосах пропускания и непропускания желаемая функция определяется формулой (7.97), а весовая функция — формулой (7.98). В случае фильтра типа II ввиду множителя $\cos(\omega/2)$ в (7.109), КЧХ, которую предстоит аппроксимировать многочленом $P(\cos \omega)$, равна

$$H_d(e^{j\omega}) = D_P(\cos \omega) = \begin{cases} \frac{1}{\cos(\omega/2)}, & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ 0, & \omega_s \leq \omega \leq \pi, \end{cases} \quad (7.111)$$

а весовая функция имеет вид:

$$W(\omega) = W_P(\cos \omega) = \begin{cases} \frac{\cos(\omega/2)}{K}, & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ \cos(\omega/2), & \omega_s \leq \omega \leq \pi. \end{cases} \quad (7.112)$$

Таким образом, здесь у нас возникает совсем другая задача о полиномиальной аппроксимации, нежели при проектировании фильтра первого типа.

В этом подразделе мы всего лишь наметили способ проектирования фильтров типа II, сведя его к четкой постановке задачи о полиномиальной аппроксимации. Аналогичные моменты возникают и в проектировании линейно-фазовых фильтров типов III и IV. Для них тоже необходимо сформулировать задачу о полиномиальной аппроксимации, но в каждом случае весовая функция будет иметь тригонометрический вид, как и для фильтров типа II (см. задачу 7.52). Обсуждение проектирования и свойств этих классов фильтров можно найти в [121].

Подробная формулировка задач полиномиальной аппроксимации, помогающая при проектировании линейно-фазовых систем первых двух типов, была проиллюстрирована на примере фильтра нижних частот. Однако для систем второго типа существует большая свобода в выборе идеальной КЧХ $H_d(e^{j\omega})$ и весовой функции $W(\omega)$. Например, весовую функцию можно определить в терминах желаемой КЧХ и получить процентную ошибку аппроксимации. Такой подход особенно полезен при проектировании дифференциаторов третьего и четвертого типов.

7.5.3. Алгоритм Пакса–Мак-Клеллана

Теорема о чередованиях предлагает необходимое и достаточное условие оптимальности полиномиальной аппроксимации в смысле Чебышева, или минимакса. Хотя она и не дает четкого рецепта поиска оптимального фильтра, ее формулировка служит отправной точкой итерационного приближения к такому оптимуму. Мы будем знакомиться с алгоритмом на примере фильтра нижних частот первого типа, но надо помнить о том, что он легко обобщается на остальные случаи.

Из теоремы о чередованиях мы знаем, что оптимальная аппроксимация $A_e(e^{j\omega})$ КЧХ фильтра удовлетворяет системе уравнений:

$$W(\omega_i)(H_d(e^{j\omega_i}) - A_e(e^{j\omega_i})) = (-1)^{i+1}\delta, \quad i = 1, 2, \dots, (L + 2), \quad (7.113)$$

где δ — максимальная ошибка, а $A_e(e^{j\omega})$ определяется формулой (7.89) или (7.93). Опираясь на последнюю из них, эти уравнения можно переписать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^L & \frac{1}{W(\omega_1)} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^L & \frac{-1}{W(\omega_2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{L+2} & x_{L+2}^2 & \cdots & x_1^{L+2} & \frac{(-1)^{L+2}}{W(\omega_{L+2})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_d(e^{j\omega_1}) \\ H_d(e^{j\omega_2}) \\ \vdots \\ H_d(e^{j\omega_{L+2}}) \end{bmatrix}, \quad (7.114)$$

где $x_i = \cos \omega_i$. Полученная система уравнений служит базой итерационного алгоритма поиска оптимальной аппроксимации $A_e(e^{j\omega})$. Процедура начинается с гипотетического набора частот чередования ω_i ($i = 1, 2, \dots, (L+2)$). Заметим, что границы ω_p и ω_s фиксированы и должны входить в этот набор. Более того, если $\omega_\ell = \omega_p$, то $\omega_{\ell+1} = \omega_s$. Выписанная система уравнений может быть решена относительно неизвестных коэффициентов a_k и δ . Однако полиномиальная интерполяция дает более эффективный способ. Пакс и Мак-Келлан выяснили, что при данном наборе экстремальных частот

$$\delta = \frac{\prod_{k=1}^{L+2} b_k H_d(e^{j\omega_k})}{\prod_{k=1}^{L+2} \frac{(-1)^{k+1} b_k}{W(\omega_k)}}, \quad (7.115)$$

где

$$b_k = \prod_{i=1, i \neq k}^{L+2} \frac{1}{x_k - x_i} \quad (7.116)$$

и, как и раньше, $x_i = \cos \omega_i$. Таким образом, если функция $A_e(e^{j\omega})$ определяется набором коэффициентов a_k , удовлетворяющим системе (7.114), а δ вычисляется по формуле (7.115), то функция ошибки проходит через $\pm\delta$ над $(L+2)$ частотами ω_i , или, что то же самое, $A_e(e^{j\omega})$ принимает значения $1 \pm K$, если $0 \leq \omega_i \leq \omega_p$ и $\pm\delta$, если $\omega_s \leq \omega_i \leq \pi$. Теперь, так как $A_e(e^{j\omega})$ — тригонометрический многочлен степени L , мы можем его восстановить по любым $(L+1)$ значениям из $(L+2)$ известных. Пакс и Мак-Келлан воспользовались для этого интерполяционной формулой Лагранжа и нашли, что

$$A_e(e^{j\omega}) = P(\cos \omega) = \frac{\sum_{k=1}^{L+1} [d_k / (x - x_k)] C_k}{\sum_{k=1}^{L+1} [d_k / (x - x_k)]}, \quad (7.117)$$

где $x = \cos \omega$, $x_i = \cos \omega_i$,

$$C_k = H_d(e^{j\omega_k}) - \frac{(-1)^{k+1} \delta}{W(\omega_k)} \quad (7.118)$$

и

$$d_k = \prod_{i=1, i \neq k}^{L+1} \frac{1}{x_k - x_i} = b_k (x_k - x_{L+2}). \quad (7.119)$$

Несмотря на то что в конструировании многочлена степени L участвуют только частоты $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{L+1}$, мы можем быть уверены, что построенный многочлен принимает предписанное значение и в точке ω_{L+2} , поскольку он удовлетворяет системе (7.114).

Теперь аппроксимацию $A_e(e^{j\omega})$ можно строить, не решая громоздкой системы уравнений, связывающей коэффициенты a_k . Многочлен (7.117) используется для вычисления $A_e(e^{j\omega})$ и $E(\omega)$ на плотном множестве частот в полосах пропускания и непропускания. Если $|E(\omega)| \leq \delta$ для всех частот в полосах пропускания и непропускания, то найдена оптимальная аппроксимация. Если же это неравенство нарушается, нам следует подобрать другой набор экстремальных частот.

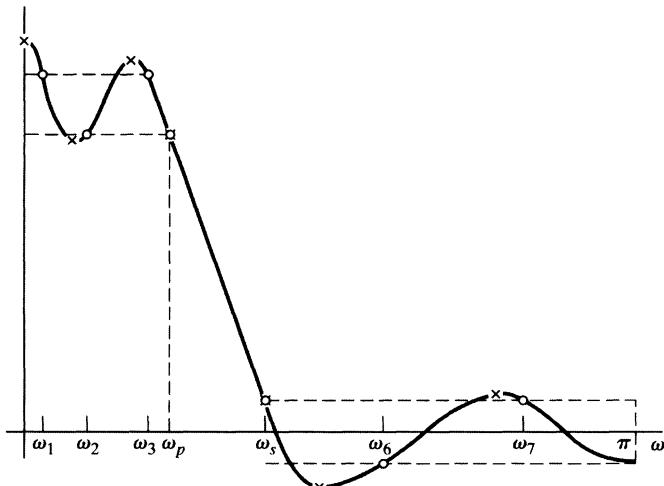
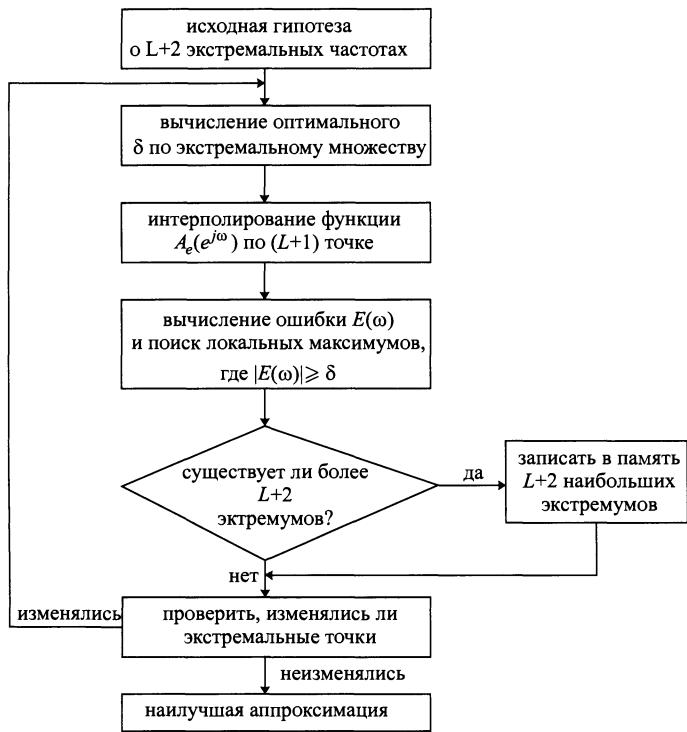


Рис. 7.39. Иллюстрация алгоритма Пакса – Мак-Келла на равнопульсирующей аппроксимации

На рис. 7.39 показан типичный пример промежуточной аппроксимации фильтра нижних частот первого типа, полученной только что описанным способом. Ясно, что набор частот ω_i (отмеченных на рисунке кружочками), по которому определялась максимальная ошибка δ , оказался неподходящим, поскольку ошибка вышла слишком маленькой. Принимая на веру метод Ремеца, мы должны поменять весь набор частот на новый, определяемый локальными экстремумами кривой ошибок. На рисунке новые частоты помечены крестиками, но, как и раньше, частоты ω_p и ω_s должны входить в набор чередований. Напомним, что число локальных экстремумов внутри интервалов $(0; \omega_p)$ и $(\omega_s; \pi)$ не может превосходить $(L - 1)$. Поэтому в качестве недостающих экстремальных частот нужно выбрать 0 или π . Если функция ошибки достигает локальных экстремумов как в 0, так и в π , то из них в качестве экстремальной частоты следует выбрать ту точку, где модуль ошибки больше. Цикл — вычисление значения δ , конструирование многочлена по найденному значению максимальной ошибки, определение фактических экстремумов функции ошибки — следует повторять до тех пор, пока разность нового и старого значений δ не превысит некоторого наперед заданного числа. Последнее значение δ и будет искомым минимумом максимальной взвешенной ошибки.

Блок-схема алгоритма Пакса–Мак-Клеллана приведена на рис. 7.40. В этом алгоритме все значения импульсной характеристики $h_e[n]$ неявно меняются при каждой итерации в поисках желаемой оптимальной аппроксимации, однако явно они никогда не вычисляются. После того как алгоритм сойдется, импульсную характеристику можно будет вычислить по отсчетам полиномиального представления, используя дискретное преобразование Фурье, как рассказывается в главе 8.

Рис. 7.40. Блок-схема алгоритма Пакса – Мак-Клеллана



7.5.4. Характеристики оптимальных КИХ-фильтров

Оптимальный КИХ-фильтр нижних частот обладает наименьшей максимальной взвешенной ошибкой для предписанных частот ω_p и ω_s , ограничивающих полосы пропускания и непропускания. В весовой функции (7.98) итоговое значение максимальной ошибки аппроксимации над полосой непропускания равно $\delta_2 = \delta$, а над полосой пропускания — $\delta_1 = K\delta$. Рисунок 7.41 иллюстрирует зависимость δ от порядка фильтра и границы полосы пропускания ω_p . В этом примере фиксирован параметр $K = 1$ и ширина переходной полосы $\omega_s - \omega_p = 0,2\pi$. На кривых рисунка отчетливо видно, как по мере увеличения ω_p ошибка δ достигает локальных минимумов. Эти минимальные ошибки соответствуют фильтрам с ограничением максимума неравномерности (т. е. с $L + 3$ чередованиями). Точки между минимумами соответствуют оптимальным (с точки зрения теоремы о чередованиях) аппроксимациям фильтра. Фильтры с $M = 8$ и $M = 10$ относятся к типу I,

а с $M = 9$ и $M = 11$ — к типу II. Интересно отметить, что некоторый набор параметров короткого фильтра ($M = 9$) приводит к более хорошей (т. е. с меньшей ошибкой) аппроксимации, чем набор параметров длинного фильтра ($M = 10$). На первый взгляд это кажется удивительным и даже противоречивым. Однако случаи $M = 9$ и $M = 10$ относятся к существенно разным типам фильтров. Другими словами, фильтры с $M = 9$ нельзя рассматривать как частный случай фильтров с $M = 10$, у которых обнулили один из отчетов импульсной характеристики, поскольку это приводит к нарушению линейно-фазовой симметрии. С другой стороны, фильтры с $M = 8$ всегда можно считать частным случаем фильтров с $M = 10$, у которых первый и последний отсчеты импульсной характеристики положили равными нулю. По этой причине оптимальный фильтр с $M = 8$ никогда не сможет стать лучше фильтра с $M = 10$, что хорошо заметно на рис. 7.41. Действительно, кривая, изображающая ошибку аппроксимации фильтра с $M = 8$, всюду расположена выше соответствующей кривой для фильтра с $M = 10$ (или совпадает с ней). Точки пересечения кривых соответствуют одинаковым импульсным характеристикам, в частности первый и последний отсчеты импульсной характеристики фильтра с $M = 10$ в таких точках просто равны нулю.

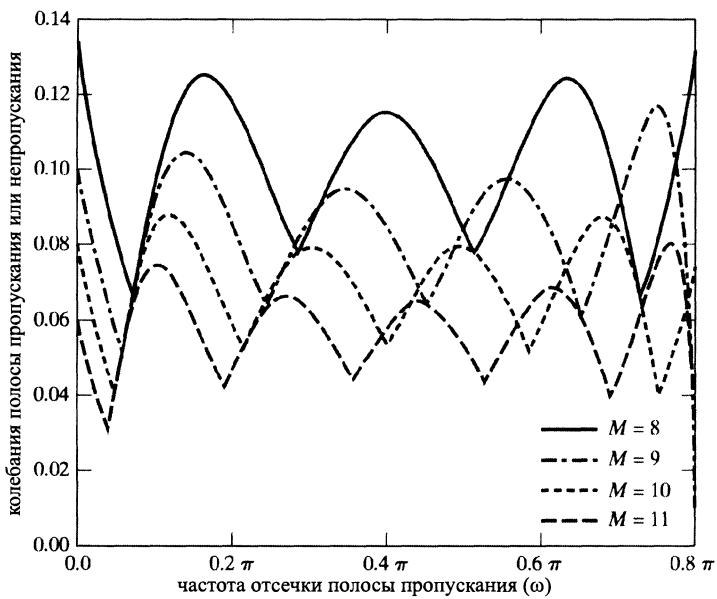


Рис. 7.41. Зависимость ошибки аппроксимации над полосами пропускания и непропускания от ω_p оптимальной аппроксимации фильтра низких частот. Здесь $K = 1$ и $\omega_s - \omega_p = 0,2\pi$

Геррманн и его соавторы (см. [61]) провели численные эксперименты, направленные на исследование взаимосвязей между параметрами M , δ_1 , δ_2 , ω_p и ω_s равнопульсирующей аппроксимации фильтра низких частот, на основании которых Кайзер [75] получил следующую формулу:

$$M = \frac{-10 \lg(\delta_1 \delta_2) - 13}{2,324 \Delta \omega}, \quad (7.120)$$

где $\Delta \omega = \omega_s - \omega_p$. Сравнивая это соотношение с проектной формулой (7.76)

из оконного метода Кайзера, легко заметить, что в сравнимом случае ($\delta_1 = \delta_2 = \delta$) при фиксированном M ошибка оптимальной аппроксимации примерно на 5 дБ меньше, чем в проекте, полученном по методу Кайзера. Другое важное преимущество равнопульсирующих фильтров заключается в том, что ошибки δ_1 и δ_2 не обязаны совпадать.

7.6. Примеры равнопульсирующей КИХ-аппроксимации

Алгоритм Пакса–Мак–Келлана проектирования оптимальной равномерно пульсирующей аппроксимации КИХ-систем можно использовать при разработке многообразных фильтров. В этом параграфе собрано несколько примеров, иллюстрирующих свойства оптимальной аппроксимации и свидетельствующих о большой гибкости метода.

7.6.1. Фильтр нижних частот

Воспользуемся набором спецификаций примеров 7.4–7.6 и 7.8, чтобы иметь возможность сравнить преимущества и недостатки основных методов проектирования. Напомним, что мы аппроксимируем фильтр нижних частот с $\omega_p = 0,4\pi$, $\omega_s = 0,6\pi$, $\delta_1 = 0,01$ и $\delta_2 = 0,001$. В отличие от оконного метода алгоритм Пакса–Мак–Келлана допускает разные ошибки в полосах пропускания и непропускания при фиксированном отношении $K = \delta_1/\delta_2$, которое в нашем примере равно 10.

Подставляя перечисленные значения параметров в формулу (7.120) и округляя полученный результат, находим, что для достижения спецификаций необходимо взять $M = 26$. На рис. 7.42, а)–в) показаны импульсная характеристика, логарифм АЧХ и ошибка аппроксимации оптимального фильтра с $M = 26$, $\omega_p = 0,4\pi$ и $\omega_s = 0,6\pi$. Кривая рис. 7.42, в) отражает *невзвешенную* функцию ошибки

$$E_A(\omega) = \frac{E(\omega)}{W(\omega)} = \begin{cases} 1 - A_e(e^{j\omega}), & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ 0 - A_e(e^{j\omega}), & \omega_s \leq \omega \leq \pi. \end{cases} \quad (7.121)$$

Взвешенная ошибка практически совпадает с невзвешенной, если учесть, что первую следует поделить на 10 в полосе пропускания¹. Чередование максимальной ошибки аппроксимации видно на рис. 7.42, в): семь чередований приходится на полосу пропускания и восемь на полосу непропускания, т. е. всего пятнадцать. Так как для систем типа I $L = M/2$ (M четно) и $M = 26$, то минимальное число чередований, обеспечивающее оптимальность аппроксимации, равно $L + 2 = 26/2 + 2 = 15$. Таким образом, фильтр, представленный рис. 7.42, оптимален при $M = 26$, $\omega_p = 0,4\pi$ и $\omega_s = 0,6\pi$. Однако рис. 7.42, в) показывает, что в этом фильтре желаемые значения ошибок аппроксимации полос пропускания и непропускания не достигаются. (Максимальная ошибка в полосе пропускания — 0,0116 а в полосе задерживания — 0,00116.) Чтобы получить или даже превысить необходимые спецификации, нам следует увеличить M .

¹ Невзвешенная ошибка аппроксимации частотно-избирательных фильтров тоже хорошо отражает поведение полос пропускания и непропускания, поскольку $A_e(e^{j\omega}) = 1 - E(\omega)$ в полосе пропускания и $A_e(e^{j\omega}) = -E(\omega)$ в полосе непропускания.

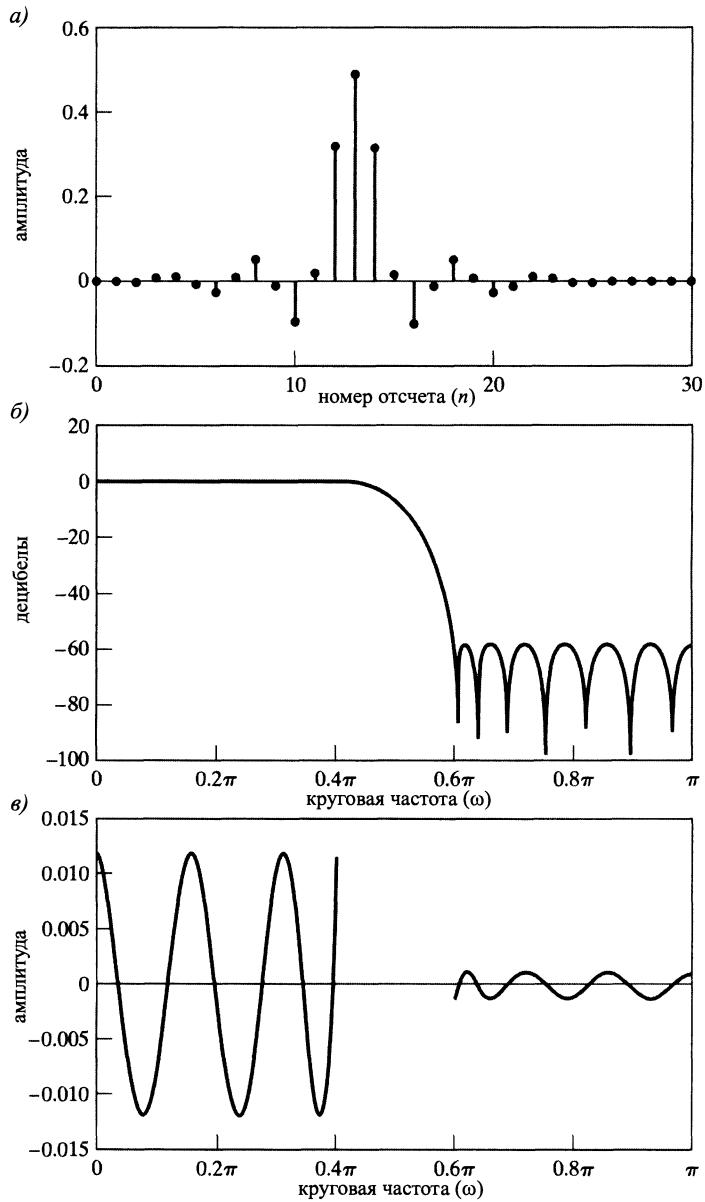
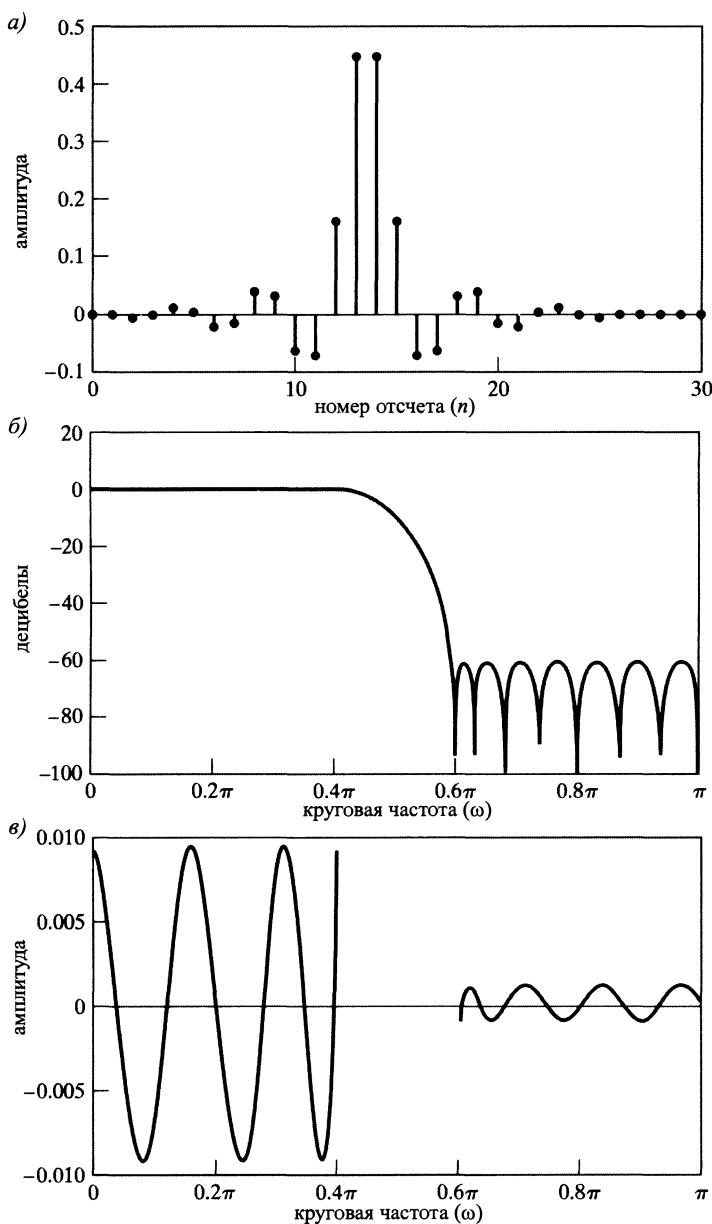


Рис. 7.42. Оптимальный КИХ-фильтр нижних частот типа I с $\omega_p = 0,4\pi$, $\omega_s = 0,6\pi$, $K = 10$ и $M = 26$: а) импульсная характеристика; б) логарифм АЧХ; в) ошибка аппроксимации (невзвешенная)

Графики характеристик фильтра с $M = 27$ приведены на рис. 7.43. Здесь ошибки аппроксимации в полосах пропускания и непропускания несколько меньше требуемых. (Максимальная ошибка в полосе пропускания — 0,0092, а в полосе непропускания — 0,00092.) В этом случае число чередований в полосах пропускания и непропускания то же самое, что и в предыдущей аппроксимации. Напомним, что ввиду равенства $M = 27$ данный фильтр относится ко второму типу и степень аппроксимирующего многочлена равна $L = (M - 1)/2 = (27 - 1)/2 = 13$.

Так что минимальное число чередований, обеспечивающих оптимальность аппроксимации, остается равным пятнадцати. Заметим также, что характеристическая функция фильтров второго типа должна обращаться в нуль в точке $z = -1$, т. е. $\omega = \pi$, что хорошо видно на рис. 7.43, б) и в).

Рис. 7.43. Оптимальный КИХ-фильтр нижних частот типа II с $\omega_p = 0,4\pi$, $\omega_s = 0,6\pi$, $K = 10$ и $M = 27$: а) импульсная характеристика; б) логарифм АЧХ; в) ошибка аппроксимации (невзвешенная)



При сравнении результатов этого примера и примера 7.8 легко заметить, что для достижения необходимых спецификаций в методе окна Кайзера требуется

фильтр с $M = 38$, в то время как в алгоритме Пакса–Мак-Клеллана достаточно взять фильтр с $M = 27$. Такая экономия возникает из-за того, что в методе Кайзера ошибка в полосах пропускания и непропускания должна быть практически одинаковой, а в алгоритме Пакса–Мак-Клеллана она может быть разной.

7.6.2. Компенсация для схемы запоминания нулевого порядка

Во многих случаях дискретные фильтры проектируются для систем, пример которых приведен на рис. 7.44, т. е. фильтры применяются для обработки отсчетов входного сигнала $x[n]$, результат $y[n]$ которой служит входом ЦАП, а непрерывный фильтр нижних частот (как аппроксимация идеального ДНП) восстанавливает непрерывный сигнал $y_c(t)$. Такие системы возникают как составные части устройств, предназначенных для дискретного фильтрования непрерывных сигналов, что обсуждалось в § 4.9. Если ЦАП сохраняет свои выходные отсчеты постоянными на протяжении шага дискретизации T , то преобразование Фурье выходного сигнала $y_c(t)$ имеет вид:

$$Y_c(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega)H_o(j\Omega)H(e^{j\Omega T})X(e^{j\Omega T}), \quad (7.122)$$

где $H_r(j\Omega)$ — КЧХ поддающего восстанавливающего фильтра низких частот и

$$H_o(j\Omega) = \frac{\sin(\Omega T/2)}{\Omega/2}e^{-j\Omega T/2} \quad (7.123)$$

КЧХ системы запоминания нулевого порядка в ЦАП. (Заметим, что коэффициент усиления $H_r(j\Omega)$ может быть единичным, поскольку этот коэффициент у $H_0(j\Omega)$ при $\Omega = 0$ равен T .) В подразделе 4.9.4 мы говорили, что компенсация для $H_o(j\Omega)$ может быть включена в непрерывный восстанавливающий фильтр, т. е. в качестве функции $\tilde{H}_r(j\Omega)$ может быть выбрана

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \frac{\Omega T/2}{\sin(\Omega T/2)}H_r(j\Omega), \quad (7.124)$$

где $H_r(j\Omega)$ — КЧХ идеального восстанавливающего фильтра низких частот из формулы (4.132), так что воздействие дискретного фильтра $H(e^{j\Omega T})$ неискажалось бы схемой запоминания нулевого порядка.

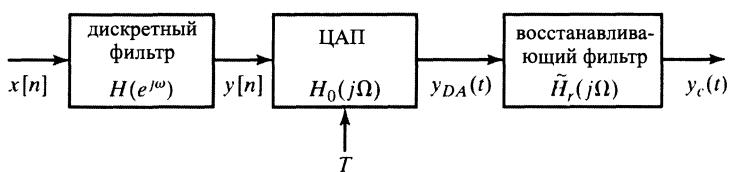


Рис. 7.44. Предкомпенсация эффектов ЦАП дискретным фильтром

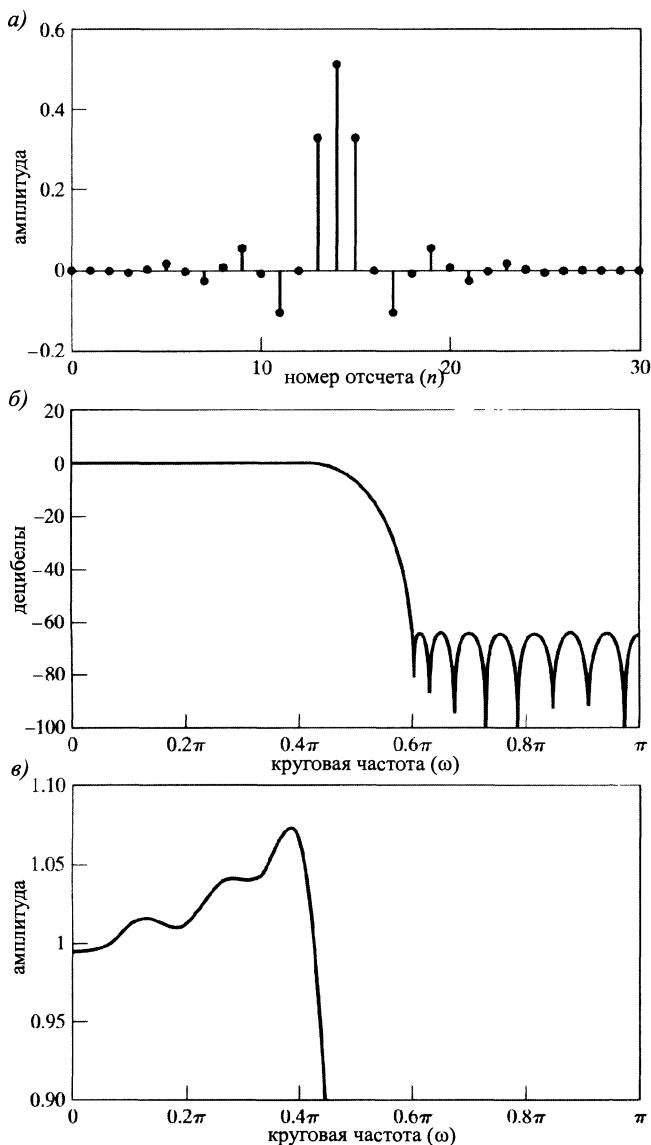
Другой подход к компенсированию состоит во включении компенсации внутрь дискретного фильтра, для чего следует спроектировать фильтр, КЧХ которого равна

$$\tilde{H}(e^{j\Omega T}) = \frac{\Omega T/2}{\sin(\Omega T/2)}H(e^{j\Omega T}). \quad (7.125)$$

Такой фильтр можно быстро разработать с помощью алгоритма Пакса–МакКеллана, если положить в качестве аппроксимируемой КЧХ

$$\tilde{H}_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{\omega/2}{\sin(\omega/2)}, & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ 0, & \omega_s \leq \omega \leq \pi. \end{cases} \quad (7.126)$$

Рис. 7.45. Оптимальный компенсирующий ЦАП фильтр низких частот с $\omega_p = 0,4\pi$, $\omega_s = 0,6\pi$, $K = 10$ и $M = 28$:
а) импульсная характеристика; б) логарифм АЧХ; в) АЧХ в полосе пропускания



На рис. 7.45 показаны функции, связанные с КЧХ такого фильтра. Спецификации прежние: $\omega_p = 0,4\pi$, $\omega_s = 0,6\pi$, $\delta_1 = 0,01$ и $\delta_2 = 0,001$. В этом случае

необходим фильтр с $M = 28$, а не 27, как в предыдущем примере. Таким образом, по существу, без каких-либо потерь компенсация ЦАП была включена в дискретный фильтр, причем эффективная полоса пропускания фильтра оказалась плоской. (Чтобы подчеркнуть наклонную природу АЧХ в полосе пропускания, на рис. 7.45, б) показан ее график над этой полосой, а не ошибка аппроксимации, как в других примерах.)

7.6.3. Полосовой фильтр

Параграф 7.5 посвящен исключительно оптимальным КИХ-фильтрам нижних частот, имеющим только две аппроксимируемые полосы. А вот в полосовом фильтре предстоит аппроксимировать три полосы. Проектирование таких фильтров нуждается в обобщении приемов, освещенных в § 7.5, на многополосный случай, т. е. в адаптировании теоремы о чередованиях и исследовании свойств аппроксимирующего многочлена в более общем контексте. Прежде всего напомним, что в теореме о чередованиях нет каких-либо ограничений на количество связных кусков замкнутой области определения аппроксимируемой функции. Поэтому минимальное число чередований в оптимальной аппроксимации остается ($L + 2$). Однако многополосные фильтры могут обладать больше чем ($L + 3$) чередованиями, поскольку у них больше границ полос. (Количество чередований посвящена задача 7.57.) Это означает, что некоторые из утверждений, доказанных в подразделе 7.5.1, теряют свою силу в многополосном случае. Например, далеко не все локальные экстремумы функции $A_e(e^{j\omega})$ должны лежать внутри аппроксимируемых интервалов, а какой-нибудь вполне может попасть на переходную полосу, и аппроксимация может не оказаться равнопульсирующей внутри характерных полос.

В качестве иллюстрации рассмотрим идеальную КЧХ:

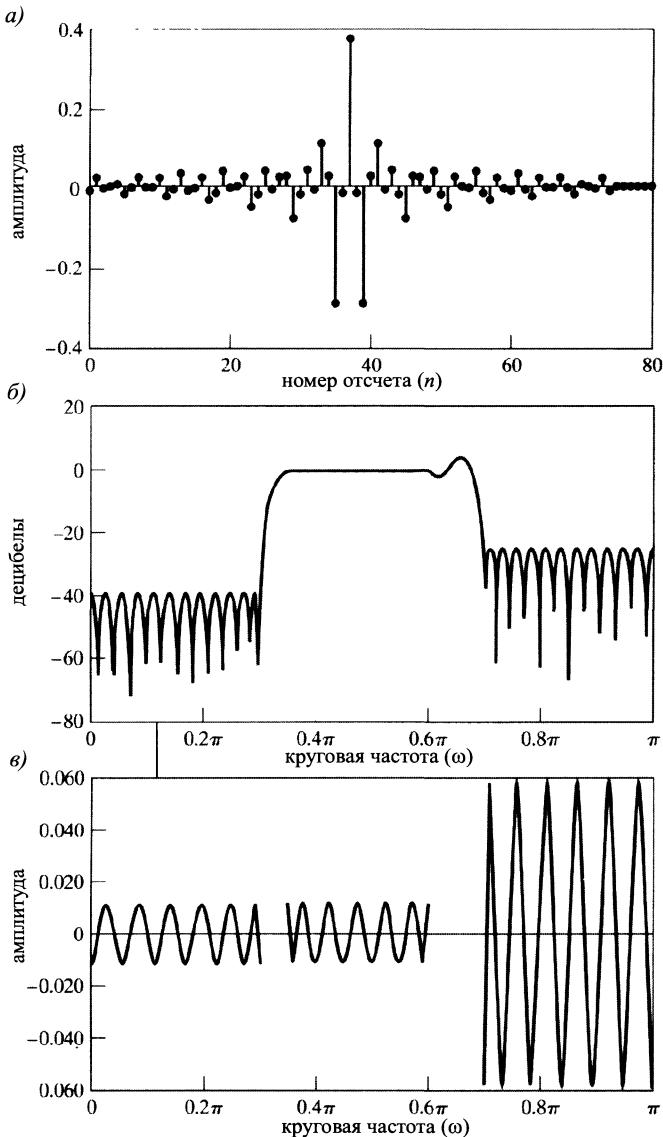
$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \omega \leq 0,3\pi, \\ 1, & 0,35\pi \leq \omega \leq 0,6\pi, \\ 0, & 0,7\pi \leq \omega \leq \pi \end{cases} \quad (7.127)$$

и весовую функцию ошибки:

$$W(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq 0,3\pi, \\ 1, & 0,35\pi \leq \omega \leq 0,6\pi, \\ 0,2, & 0,7\pi \leq \omega \leq \pi. \end{cases} \quad (7.128)$$

Длину импульсной характеристики фильтра положим равной $M + 1 = 75$. На рис. 7.46 показаны характеристические функции итогового фильтра. Заметим, что АЧХ над переходной областью между второй и третьей аппроксимируемыми полосами не монотонна, однако два его экстремума в этом интервале не противоречат теореме о чередованиях. Так как $M = 74$, фильтр относится к системам типа I и степень аппроксимирующего многочлена равна $L = M/2 = 74/2 = 37$. Поэтому, согласно теореме о чередованиях, в оптимальной аппроксимации должно встретиться $L + 2 = 39$ чередований. Их легко подсчитать на рис. 7.46, б), где показана невзвешенная ошибка аппроксимации. В каждой из аппроксимируемых полос присутствует по 13 чередований, так что всего их — 39.

Рис. 7.46. Оптимальный полосовой КИХ-фильтр $M = 74$:
 а) импульсная характеристика;
 б) логарифм АЧХ; в) ошибка аппроксимации (невзвешенная)



Аппроксимация, который посвящен рис. 7.46, оптимальна с точки зрения теоремы о чередованиях, но она, скорее всего, неприемлема в приложениях. В общей ситуации никто не гарантирует, что переходные области многополосного фильтра будут монотонны, поскольку алгоритм Пакса–Мак–Клеллана их не контролирует. Когда такого типа характеристика получается в результате выбора конкретного набора параметров фильтра, приемлемых переходных участков можно добиться, систематически варьируя одну или несколько границ полос частот, длину импульсной характеристики или весовую функцию.

7.7. Комментарии к дискретным БИХ- и КИХ-фильтрам

В этой главе рассказывалось о методах проектирования линейных стационарных дискретных фильтров. Был освещен широкий спектр методов разработки фильтров как с бесконечной, так и с конечной импульсной характеристикой. При этом естественным образом возникали следующие вопросы:

- какие из систем предпочтительнее: с конечной или бесконечной импульсной характеристикой;
- почему существует большое число методов проектирования и какой из них дает наилучший результат?

Как и в любой инженерной задаче, общий точный ответ на эти вопросы дать невозможно. Именно потому мы и изучали различные методы, созданные как для БИХ-, так и для КИХ-фильтров, что не существует единственного типа фильтров и единственного метода проектирования, которые были бы наилучшими при всех условиях.

Выбор между КИХ- и БИХ-фильтрами зависит от достоинств и недостатков каждого из этих типов с точки зрения конкретной задачи. БИХ-фильтры, например, имеют то преимущество, что в их рамках можно разработать большое число частотно-избирательных фильтров с помощью компактной формулы. Иными словами, как только задача проектирования сформулирована в терминах, подходящих для данного метода (например, Баттерворт, Чебышева или эллиптического), то легко вычисляется порядок искомого фильтра, на котором достигается указанный набор спецификаций, а его коэффициенты (или полюса и нули) определяются прямой подстановкой в систему соответствующих уравнений. Такая упрощенная процедура дает возможность ручного проектирования БИХ-фильтров (при большой необходимости) и позволяет написать прямые, неитерационные компьютерные программы, облегчающие разработку БИХ-фильтров. К сожалению, упомянутые методы ограничены частотно-избирательными фильтрами, а с их помощью удается получить лишь АЧХ. Если требуется другая форма АЧХ или необходимо аппроксимировать предписанную фазу или групповую задержку, то прибегают к алгоритмической процедуре.

С другой стороны, КИХ-фильтры могут иметь (обобщенную) линейную fazu. Однако компактной проектной формулы для разработки КИХ-фильтров не существует. Хотя оконный метод довольно прост для применения, могут потребоваться некоторые итерации для достижения данного набора спецификаций. Алгоритм Пакса–Мак–Келлана позволяет подбирать более низкий порядок фильтров, нежели оконный метод, и оба способа можно легко реализовать на персональном компьютере или рабочей станции. Оконный метод, как и большинство других алгоритмов, предоставляет возможность аппроксимировать практически любую функцию, связанную с КЧХ, быть может, с чуть большими трудностями, чем при проектировании фильтров низких частот. Кроме того, решение задачи проектирования КИХ-фильтров поддается лучшему контролю, нежели аналогичная задача для БИХ-фильтров, поскольку для них существует критерий оптимальности аппроксимации, применимый в большом числе практических ситуаций. Техника проектирования нелинейно-фазовых КИХ-фильтров освещена в работах [22, 113, 141 и 80].

Экономические вопросы занимают не последнее место при реализации фильтров. Экономическая сторона проектирования измеряется обычно в терминах сложности аппаратного оборудования, микропроцессоров или скорости вычислений. Эти факторы более или менее напрямую зависят от порядка фильтра, обеспечивающего данные спецификации. Если не принимать в расчет фазу, то, как правило, данные параметры АЧХ наиболее эффективно реализуются БИХ-фильтрами. Однако во многих случаях линейная фаза, которую могут обеспечить КИХ-фильтры, вполне оправдывает дополнительные затраты, и в таких приложениях, как прореживание или интерполирование, КИХ-фильтры становятся значительно более эффективными. Более того, узкоспециализированные цифровые процессоры сигналов, или микрокомпьютеры, обладают арифметическими возможностями, разработанными для накопления сумм произведений, как это нужно в КИХ-фильтрах. Подробное исследование вопросов эффективности вычислений приведено в [122].

Итак, при проектировании дискретных фильтров необходимо учитывать множество иногда противоречивых требований. Ясно, что окончательный выбор зачастую зависит от инженерной оценки таких вопросов, как набор спецификаций, метод реализации фильтра и программные средства, с помощью которых будет осуществляться проектирование.

7.8. Краткое содержание главы

В этой главе мы рассмотрели технику проектирования дискретных фильтров как с конечной, так и с бесконечной импульсной характеристикой. Целью проектирования было достичь желаемых спецификаций в частотной области, что согласуется со стандартной практикой. Мы хотели обрисовать общую картину широкого диапазона возможностей, доступных при проектировании дискретных фильтров, но в то же время рассказать о некоторых методах достаточно подробно, чтобы их стало возможным применять на практике, не прибегая к дополнительной обширной литературе по этому вопросу. Были основательно представлены как оконный метод, так и алгоритм Пакса–Мак–Келлана проектирования КИХ-фильтров.

Окончание главы посвящено нескольким замечаниям относительно выбора между двумя классами цифровых фильтров. Основной вывод, следующий из этих замечаний, заключается в том, что выбор типа фильтра может зависеть от множества факторов, которые практически невозможно выразить количественно или обсуждать их в общих терминах. Однако из этой и шестой главы должно стать ясным, что цифровые фильтры отличаются большой гибкостью в проектировании, позволяющей реализовать их в довольно замысловатых схемах обработки сигналов, когда крайне трудно, если вообще возможно, реализовать аналоговый эквивалент.

Задачи

Обязательные задачи с ответами

- 7.1. Рассмотрите детерминированную непрерывную систему с импульсной характеристикой $h_c(t)$ и характеристической функцией $H_c(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$.

- Опираясь на импульсную инвариантность, определите характеристическую функцию $H_1(z)$ дискретной системы, для которой $h_1[n] = h_c(nT)$.
- Используя переходную инвариантность, найдите $H_2(z)$ — характеристическую функцию дискретной системы, для которой $s_2[n] = s_c(nT)$, где

$$s_2[n] = \sum_{k=-\infty}^n h_2[k] \quad \text{и} \quad s_c(t) = \int_{-\infty}^t h_c(\tau) d\tau.$$

- в) Вычислите переходную характеристику $s_1[n]$ системы 1 и импульсную характеристику $h_2[n]$ системы 2. Верно ли, что $h_2[n] = h_1[n] = h_c(nT)$? Выполнено ли равенство $s_1[n] = s_2[n] = s_c(nT)$?

- 7.2. Дискретный фильтр нижних частот проектируется с помощью применения импульсной инвариантности к непрерывному фильтру Баттервортса со следующим квадратом АЧХ:

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}.$$

Желаемые спецификации дискретного фильтра совпадают с приведенными в примере 7.2, т. е.

$$\begin{aligned} 0,89125 &\leq |H(e^{j\omega})| \leq 1, & 0 \leq |\omega| \leq 0, 2\pi, \\ |H(e^{j\omega})| &\leq 0,17783, & 0, 3\pi \leq |\omega| \leq \pi. \end{aligned}$$

Считайте, что ложные частоты не создают проблем, т. е. характеристики полос пропускания и непропускания в проекте непрерывного фильтра Баттервортса, соответствующие желаемым параметрам дискретного фильтра, достигнуты.

- Укажите допустимые границы погрешности АЧХ $|H_c(j\Omega)|$ фильтра Баттервортса, при которых дискретный фильтр, получающийся из непрерывного в результате импульсной инвариантности ($h[n] = T_d h_c(nT_d)$), будет удовлетворять указанным спецификациям. Не следует считать, что $T_d = 1$, как в примере 7.2.
- Определите порядок N и вычислите произведение $T_d \Omega_c$, при которых непрерывный фильтр Баттервортса обладает точными спецификациями из предыдущего пункта в полосе пропускания.
- Заметим, что если $T_d = 1$, то, отвечая на вопрос п.«б», вы должны получить те же значения N и $T_d \Omega_c$, что и в примере 7.2. Основываясь на этом наблюдении, вычислите характеристическую функцию $H_c(s)$ при $T_d \neq 1$ и покажите, что характеристическая функция $H(z)$ соответствующего дискретного фильтра не зависит от значения T_d и совпадает с функцией из формулы (7.23), полученной в предположении, что $T_d = 1$.

- 7.3. Нам хотелось бы, используя импульсную инвариантность или дробно-линейное преобразование, спроектировать дискретный фильтр со следующими спецификациями:

$$\begin{aligned} 1 - \delta_1 &\leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_1, \quad 0 \leq |\omega| \leq \omega_p, \\ |H(e^{j\omega})| &\leq \delta_2, \quad \omega_s \leq |\omega| \leq \pi. \end{aligned} \quad (7.129)$$

В силу сложившейся традиции в большинстве формул, таблиц и схем, разработанных для проектирования непрерывных фильтров, считается, что максимальный коэффициент усиления должен быть равен 1, т. е.

$$\begin{aligned} 1 - \hat{\delta}_1 &\leq |H_c(j\Omega)| \leq 1, \quad 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_p, \\ |H_c(j\Omega)| &\leq \hat{\delta}_2, \quad \Omega_s \leq |\Omega|. \end{aligned} \quad (7.130)$$

Полезные проектные схемы для спецификаций непрерывных фильтров такого вида приведены в [122].

- Чтобы воспользоваться упомянутыми таблицами и схемами при проектировании дискретной системы с максимальным коэффициентом усиления $(1 + \delta_1)$, необходимо пересчитать ее спецификации в спецификации непрерывной системы (7.130). Это можно сделать, разделив неравенства (7.129) на $(1 + \delta_1)$. Воспользовавшись этим советом, выразите δ_1 и δ_2 через δ_1 и δ_2 .
- В примере 7.2 мы проектировали дискретный фильтр с единичным коэффициентом усиления в полосе пропускания. Его можно трансформировать в фильтр со спецификациями, перечисленными в (7.129), умножая на $(1 + \delta_1)$. Найдите подходящие значения δ_1 и δ_2 для этого примера и, опираясь на (7.23), найдите коэффициенты характеристической функции нового фильтра.
- Повторите п. «б» для фильтра из примера 7.3.

- 7.4. Данна характеристическая функция дискретной системы:

$$H(z) = \frac{2}{1 - e^{-0,2}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-0,4}z^{-1}}.$$

- Предположите, что этот дискретный фильтр разработан методом импульсной инвариантности с $T_d = 2$, т. е. $h[n] = 2h_c(2n)$, где $h_c(t)$ — вещественно-значная функция. Найдите характеристическую функцию $H_c(s)$ непрерывного фильтра, послужившего основой для проектирования. Единственный ли ответ возможен? Если нет, найдите другую $H_c(s)$.
- Теперь предположите, что $H(z)$ была получена дробно-линейным преобразованием с $T_d = 2$, и вычислите соответствующую характеристическую функцию $H_c(s)$ непрерывного фильтра. Единственный ли ответ возможен? Если нет, найдите другую $H_c(s)$.

- 7.5. Нам хотелось бы спроектировать обобщенно-линейно-фазовый дискретный фильтр с помощью окна Кайзера, причем фильтр должен иметь следующие параметры:

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &< 0,01, & 0 \leq |\omega| \leq 0,25\pi, \\ 0,95 < |H(e^{j\omega})| &< 1,05, & 0,35\pi \leq |\omega| \leq 0,6\pi, \\ |H(e^{j\omega})| &< 0,01, & 0,65\pi \leq |\omega| \leq \pi. \end{aligned}$$

- а) Определите минимальную длину $(M + 1)$ импульсной характеристики и значение параметра β из метода Кайзера, при которых достигаются указанные спецификации.
- б) Чему равна задержка в фильтре?
- в) Выпишите идеальную импульсную характеристику $h_d[n]$, к которой применяется метод Кайзера.
- 7.6. Нам хотелось бы спроектировать вещественноненулевой дискретный КИХ-фильтр с обобщенной линейной фазой и со следующими спецификациями:

$$\begin{aligned} 0,9 < H(e^{j\omega}) &< 1,1, & 0 \leq |\omega| \leq 0,2\pi, \\ -0,06 < H(e^{j\omega}) &< 0,06, & 0,3\pi \leq |\omega| \leq 0,475\pi, \\ 1,9 < H(e^{j\omega}) &< 2,1, & 0,525\pi \leq |\omega| \leq \pi. \end{aligned}$$

Метод проектирования заключается в умножении идеальной вещественноненулевой импульсной характеристики, ассоциированной с идеальной КЧХ

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| \leq 0,2\pi, \\ 0, & 0,25\pi \leq |\omega| \leq 0,5\pi, \\ 2, & 0,5\pi \leq |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

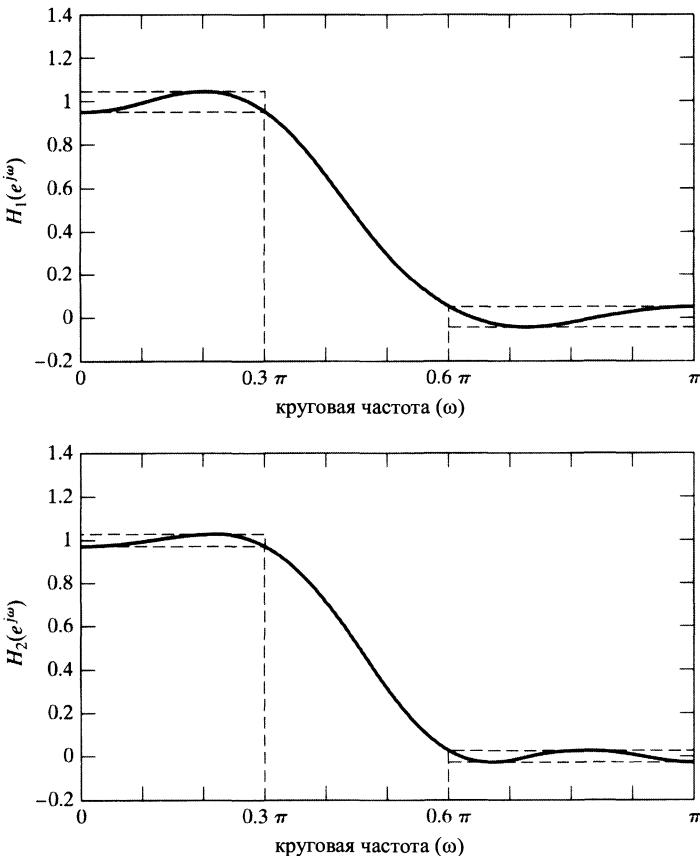
на окно Кайзера.

- а) Чему равно максимальное значение δ , при котором достигаются указанные спецификации? Каково соответствующее значение параметра β ? Обоснуйте свои ответы.
- б) Определите максимальное значение $\Delta\omega$, при котором получающаяся аппроксимация фильтра обладает требуемым набором спецификаций. Чему равно соответствующее значение M ? Ответы обоснуйте.
- 7.7. Мы интересуемся реализацией непрерывного ЛС-фильтра нижних частот с КЧХ $H(j\Omega)$ с помощью системы из рис. 4.11, КЧХ дискретной системы в которой равна $H_d(e^{j\omega})$. Шаг дискретизации $T = 10^{-4}$ с, а входной сигнал $x_c(t)$ узкополосный: $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq 2\pi(5000)$. Найдите спецификации КЧХ $H_d(e^{j\omega})$, если на непрерывную частотную характеристику наложены следующие ограничения:

$$\begin{aligned} 0,99 &\leq |H_e(j\Omega)| \leq 1,01, & |\Omega| \leq 2\pi(1000), \\ |H_e(j\Omega)| &\leq 0,01, & |\Omega| \geq 2\pi(1100). \end{aligned}$$

- 7.8. Нам хотелось бы спроектировать оптимальный (в смысле Пакса–Мак–Клеллана) КИХ-фильтр нижних частот первого типа с нулевой фазой, имеющий следующие границы полос пропускания и непропускания: $\omega_p = 0,3\pi$, $\omega_s = 0,6\pi$, при одинаковой ошибке над полосами пропускания и непропускания. Длина импульсной характеристики желаемого фильтра равна 11, т. е. $h[n] = 0$ при $n < -5$ и $n > 5$. На рис. 7.47 показана КЧХ $H(e^{j\omega})$ двух разных фильтров. В каждом из случаев определите число чередований и выясните, является ли соответствующий фильтр оптимальной аппроксимацией.

Рис. 7.47.



- 7.9. Предположим, что мы разрабатываем дискретный фильтр с помощью импульсной инвариантности, используя в качестве прототипа непрерывный фильтр нижних частот. Частота отсечки непрерывного фильтра — $\Omega_c = 2\pi(1000)$ рад/с, а параметр T_d , задействованный в импульсной инвариантности, равен 0,2 мс. Определите частоту отсечки ω_c итогового дискретного фильтра.
- 7.10. Мы проектируем дискретный фильтр нижних частот, применяя дробно-линейное преобразование к непрерывному идеальному фильтру нижних частот. Предположим, что частота отсечки исходного фильтра составляет $\Omega_c = 2\pi(2000)$ рад/с, а в качестве параметра дробно-линейного преобразования выбран $T_d = 0,4$ мс. Определите частоту отсечки ω_c итогового дискретного фильтра.
- 7.11. Дан идеальный дискретный фильтр нижних частот с частотой отсечки $\omega_c = \pi/4$. Известно, что он получен с помощью импульсной инвариантности из непрерывного фильтра. При этом использовался параметр $T_d = 0,1$ мс. Чему равна частота отсечки Ω_c прототипа?
- 7.12. Идеальный дискретный фильтр верхних частот с частотой отсечки $\omega_c = \pi/2$ проектируется методом импульсной инвариантности с $T_d = 1$ мс. Что можно

сказать о частоте отсечки Ω_c исходного непрерывного идеального фильтра верхних частот?

- 7.13. Идеальный дискретный фильтр нижних частот с частотой отсечки $\omega_c = 2\pi/5$ спроектирован на основе импульсной инвариантности, исходя из непрерывного идеального фильтра нижних частот с частотой отсечки $\Omega_c = 2\pi(4000)$ рад/с. Чему равен параметр T_d ? Единственное ли он может иметь значение? Если нет, найдите другое подходящее значение T_d .
- 7.14. С помощью дробно-линейного преобразования проектируется идеальный дискретный фильтр нижних частот с частотой отсечки $\omega_c = 3\pi/5$. Прототипом служит непрерывный идеальный фильтр нижних частот с частотой отсечки $\Omega_c = 2\pi(300)$ рад/с. Найдите значение параметра T_d дробно-линейного преобразования, совместимое с данной информацией. Единственное ли его значение? Если нет, подберите еще одно.
- 7.15. Нам нужно спроектировать КИХ-фильтр нижних частот со следующими спецификациями:

$$\begin{aligned} 0,95 < H(e^{j\omega}) < 1,05, \quad & 0 \leq |\omega| \leq 0,25\pi, \\ -0,1 < H(e^{j\omega}) < 0,1, \quad & 0,35\pi \leq |\omega| \leq \pi. \end{aligned}$$

Для этого мы применяем окно $w[n]$ к импульсной характеристики $h_d[n]$ идеального дискретного фильтра нижних частот с частотой отсечки $\omega_c = 0,3\pi$. Какое из стандартных окон, перечисленных в подразделе 7.3.1, следует взять для достижения намеченной цели? Для каждого подходящего на ваш взгляд окна уточните длину $M + 1$ требуемого фильтра.

- 7.16. Перед нами поставлена задача о проектировании КИХ-фильтра нижних частот со следующим набором спецификаций:

$$\begin{aligned} 0,98 < H(e^{j\omega}) < 1,02, \quad & 0 \leq |\omega| \leq 0,63\pi, \\ -0,15 < H(e^{j\omega}) < 0,15, \quad & 0,65\pi \leq |\omega| \leq \pi. \end{aligned}$$

Для этого можно применить окно Кайзера к импульсной характеристике $h_d[n]$ идеального дискретного фильтра нижних частот с частотой отсечки $\omega_c = 0,64\pi$. Найдите параметры β и M окна Кайзера, при которых получаются указанные спецификации.

- 7.17. Предположим, что нам нужно спроектировать полосовой фильтр со следующими спецификациями:

$$\begin{aligned} -0,02 < |H(e^{j\omega})| < 0,02, \quad & 0 \leq |\omega| \leq 0,2\pi, \\ 0,95 < |H(e^{j\omega})| < 1,05, \quad & 0,3\pi \leq |\omega| \leq 0,7\pi, \\ -0,001 < |H(e^{j\omega})| < 0,001, \quad & 0,75\pi \leq |\omega| \leq \pi. \end{aligned}$$

Воспользуемся импульсной инвариантностью с $T_d = 5$ мс. Перечислите спецификации исходного непрерывного фильтра.

- 7.18. Нам нужно разработать проект фильтра верхних частот, удовлетворяющего условиям:

$$\begin{aligned} -0,04 < |H(e^{j\omega})| < 0,04, & \quad 0 \leq |\omega| \leq 0,2\pi, \\ 0,995 < |H(e^{j\omega})| < 1,005, & \quad 0,3\pi \leq |\omega| \leq \pi. \end{aligned}$$

Применим дробно-линейное преобразование с $T_d = 2$ мс к непрерывному прототипу. Укажите спецификации непрерывного фильтра, обеспечивающие решение поставленной задачи.

- 7.19. Пред нами стоит задача о проектировании идеального дискретного полосового фильтра с полосой пропускания $\pi/4 \leq \omega \leq \pi/2$ на основе импульсной инвариантности, применяемой к идеальному непрерывному полосовому фильтру с полосой пропускания $2\pi(300) \leq \Omega \leq 2\pi(600)$. Вычислите подходящее значение параметра T_d . Нет ли других подходящих значений этого параметра?
- 7.20. Выясните, справедливо ли следующее утверждение:

если непрерывная всепропускающая система трансформируется в дискретную с помощью дробно-линейного преобразования, то получающаяся дискретная система тоже будет всепропускающей.

Объясните свой ответ.

Обязательные задачи без ответов

- 7.21. Допустим, что нам дан непрерывный фильтр нижних частот с КЧХ $H_c(j\Omega)$, удовлетворяющей условиям:

$$\begin{aligned} 1 - \delta_1 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1 + \delta_1, & \quad |\Omega| \leq \Omega_p, \\ |H_c(j\Omega)| \leq \delta_2, & \quad |\Omega| \geq \Omega_s. \end{aligned}$$

С помощью дробно-линейного преобразования, варьируя параметр T_d , получаем набор дискретных фильтров нижних частот:

$$H(z) = H_c(s) \Big|_{s=(2/T_d)(1-z^{-1})/(1+z^{-1})}.$$

- а) Считая, что Ω_p фиксировано, найдите все значения T_d , при которых частота отсечки полосы пропускания дискретных систем равна $\omega_p = \pi/2$.
- б) Считая, что Ω_p фиксировано, начертите график зависимости ω_p от T_d из промежутка $(0; \infty)$.
- в) Зафиксировав Ω_p и Ω_s , изобразите график зависимости ширины переходной области $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$ от $T_d \in (0; \infty)$.

- 7.22. Рассмотрите непрерывную систему с характеристической функцией $H_c(s) = 1/s$. Такую систему принято называть *интегратором*, поскольку ее входной $x_c(t)$ и выходной $y_c(t)$ сигналы связаны соотношением:

$$y_c(t) = \int_{-\infty}^t x_c(\tau) d\tau.$$

Предположите, что дискретная система получена дробно-линейным преобразованием функции $H_c(s)$.

- Найдите характеристическую функцию $H(z)$ и импульсную характеристику $h[n]$ получившейся дискретной системы.
- Выпишите разностное уравнение, связывающее сигналы $x[n]$ (входной) и $y[n]$ (выходной) этой дискретной системы. С какими проблемами можно столкнуться при реализации дискретной системы на основе полученного разностного уравнения?
- Подберите выражение для КЧХ $H(e)$ дискретной системы. Изобразите ее модуль и фазу на отрезке $[-\pi; \pi]$. Сравните полученные графики с модулем и фазой КЧХ $H_c(j\Omega)$ непрерывного интегратора. При каких условиях дискретный «интегратор» можно считать хорошей аппроксимацией непрерывного?

Теперь рассмотрите непрерывную систему с характеристической функцией $G_c(s) = s$, которую называют *дифференциатором*, поскольку ее выход — производная входа. Предположите, что дискретная система получена в результате дробно-линейного преобразования функции $G_c(s)$.

- Найдите характеристическую функцию $G(z)$ и импульсную характеристику $g[n]$ дискретной системы.
- Получите выражение для КЧХ $G(e)$ дискретной системы. Изобразите ее модуль и фазу на отрезке $[-\pi; \pi]$. Сравните полученные графики с модулем и фазой частотной характеристики $G_c(j\Omega)$. При каких условиях дискретный «дифференциатор» можно считать хорошей аппроксимацией непрерывного?
- Непрерывные дифференциатор и интегратор являются взаимно обратными системами. Верно ли это утверждение для их дискретных аппроксимаций?

7.23. Непрерывный фильтр с импульсной характеристикой $h_c(t)$ и АЧХ вида

$$|H_c(j\Omega)| = \begin{cases} |\Omega|, & |\Omega| < 10\pi, \\ 0, & |\Omega| > 10\pi \end{cases}$$

используется в качестве прототипа при проектировании дискретного фильтра, который будет использоваться в конфигурации рис. 7.48 для фильтрования непрерывного сигнала $x_c(t)$.

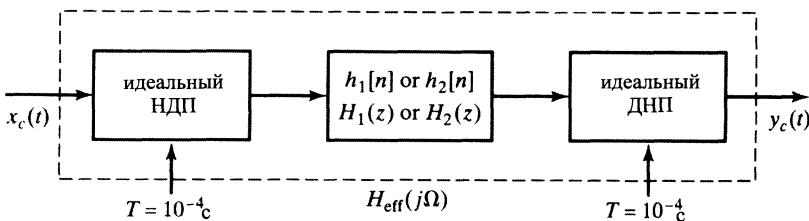


Рис. 7.48.

- Дискретная система с импульсной характеристикой $h_1[n]$ и характеристической функцией $H_1(z)$ получена из непрерывной с помощью импульсной инвариантности с $T_d = 0,01$, т. е. $h_1[n] = 0,01h_c(0,01n)$, и вставлена в систему

рис. 7.48. Начертите график эффективной АЧХ $|H_{\text{eff}}(j\Omega)| = |Y_c(j\Omega)/X_c(j\Omega)|$ всей системы.

- 6) С другой стороны, предположим, что дискретная система с импульсной характеристистикой $h_2[n]$ и характеристической функцией $H_2(z)$ получена из непрерывной с помощью дробно-линейного преобразования с $T_d = 2$, т. е.

$$H_2(z) = H_c(s) \Big|_{s=(1-z^{-1})/(1+z^{-1})},$$

и вставлена в систему рис. 7.48. Начертите график эффективной АЧХ всей системы.

Дополнительные задачи

- 7.24. Функция $H_c(s)$ обладает полюсом кратности r в точке $s = s_0$, в связи с чем она может быть представлена в виде

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^r \frac{A_k}{(s - s_0)^k} + G_c(s),$$

где $G_c(s)$ имеет полюса лишь первого порядка. Известно, что $H_c(s)$ детерминирована.

- а) Найдите формулу, определяющую коэффициенты A_k по функции $H_c(s)$.
 б) Выразите импульсную характеристику $h_c(t)$ через s_0 и $g_c(t)$, обратное преобразование Лапласа от функции $G_c(s)$.

- 7.25. Напомним, что *импульсная инвариантность и дробно-линейное преобразование* — методы проектирования дискретных фильтров. Оба метода преобразуют характеристическую функцию $H_c(s)$ непрерывной системы в характеристическую функцию $H(z)$ дискретной. Ответьте на перечисленные ниже вопросы, указав, каким из методов можно получить желаемый результат.

- а) Все полюса и нули характеристической функции минимально-фазовой непрерывной системы расположены в левой полуплоскости. Какой из методов проектирования приводит к минимально-фазовой дискретной системе?
 б) Если непрерывная система относится к всепропускающим, то полюса ее характеристической функции располагаются в точках s_k левой полуплоскости, а нули — в точках $-s_k$ правой. Какой из методов проектирования приводит к дискретной всепропускающей системе?
 в) Какой из методов проектирования гарантирует равенство:

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = H_c(j\Omega) \Big|_{\Omega=0} ?$$

- г) Пусть непрерывная система — полосно-задерживающий фильтр. Какой из методов дает дискретный полосно-задерживающий фильтр?
 д) Пусть $H_1(z)$, $H_2(z)$ и $H(z)$ — «дискретизованные» версии характеристических функций $H_{c1}(s)$, $H_{c2}(s)$ и $H_c(s)$ соответственно. При каком из методов проектирования равенство $H_c(s) = H_{c1}(s)H_{c2}(s)$ сохранится для «дискретизованных» версий?

е) Пусть $H_1(z)$, $H_2(z)$ и $H(z)$ — «дискретизованные» версии характеристических функций $H_{c1}(s)$, $H_{c2}(s)$ и $H_c(s)$ соответственно. При каком из методов проектирования равенство $H_c(s) = H_{c1}(s) + H_{c2}(s)$ сохранится для «дискретизованных» версий?

ж) Предположим, что КЧХ непрерывных систем удовлетворяют соотношению:

$$\frac{H_{c1}(j\Omega)}{H_{c2}(j\Omega)} = \begin{cases} e^{-j\pi/2}, & \Omega > 0, \\ e^{j\pi/2}, & \Omega < 0. \end{cases}$$

Обозначим через $H_1(z)$ и $H_2(z)$ характеристические функции дискретных систем, полученных одним из методов проектирования из $H_{c1}(s)$ и $H_{c2}(s)$. Какой метод при этом использовался, если

$$\frac{H_1(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} = \begin{cases} e^{-j\pi/2}, & 0 < \omega < \pi, \\ e^{j\pi/2}, & -\pi < \omega < 0? \end{cases}$$

(Такие системы называют «90-градусным расщепителем фазы».)

- 7.26. Дискретный фильтр с характеристической функцией $H(z)$ проектируется на основе непрерывного фильтра с характеристической функцией $H_c(s)$. При этом необходимо соблюсти равенство:

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = H_c(j\Omega) \Big|_{\Omega=0}.$$

- а) Может ли это равенство быть выполненным, если в качестве метода проектирования используется импульсная инвариантность? Если да, то сформулируйте необходимые условия (если они вообще нужны) на функцию $H_c(j\Omega)$, обеспечивающие это равенство.
- б) Может ли это равенство быть выполненным, если в качестве метода проектирования используется дробно-линейное преобразование? Если да, то сформулируйте необходимые условия (если они вообще нужны) на функцию $H_c(j\Omega)$.

- 7.27. Дан идеальный дискретный фильтр нижних частот с КЧХ

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/4, \\ 0, & \pi/4 < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Нам хотелось бы получить новые фильтры, преобразуя импульсную характеристику данного. Начертите графики КЧХ с импульсными характеристиками:

- а) $h_1[n] = h[2n]$; б) $h_2[n] = \begin{cases} h[n/2], & n/2 \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases}$ в) $h_3[n] = e^{j\pi n} h[n] = (-1)^n h[n]$.

- 7.28. Рассмотрите непрерывный фильтр нижних частот, характеристическая функция $H_c(s)$ которого удовлетворяет условиям:

$$1 - \delta_1 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1 + \delta_1, \quad |\Omega| \leq \Omega_p, \\ |H_c(j\Omega)| \leq \delta_2, \quad \Omega_s \leq |\Omega|.$$

Его трансформируют в дискретный фильтр нижних частот с характеристической функцией

$$H_1(z) = H_c(s) \Big|_{s=(1-z^{-1})/(1+z^{-1})}$$

и в дискретный фильтр верхних частот с характеристической функцией

$$H_2(z) = H_c(s) \Big|_{s=(1+z^{-1})/(1-z^{-1})}.$$

- Найдите выражение, связывающее границу полосы пропускания Ω_p непрерывного фильтра нижних частот и частоту отсечки ω_{p1} дискретного фильтра нижних частот.
- Найдите выражение, связывающее границу полосы пропускания Ω_p непрерывного фильтра нижних частот с частотой отсечки ω_{p2} дискретного фильтра верхних частот.
- Найдите выражение, связывающее частоты отсечки ω_{p1} и ω_{p2} дискретных фильтров нижних и верхних частот.
- Сеть, представленная на рис. 7.49, изображает реализацию дискретного фильтра нижних частот с характеристической функцией $H_1(z)$. Коэффициенты A , B , C и D — вещественные. Как нужно изменить коэффициенты, чтобы получить сеть, реализующую дискретный фильтр верхних частот с характеристической функцией $H_2(z)$?

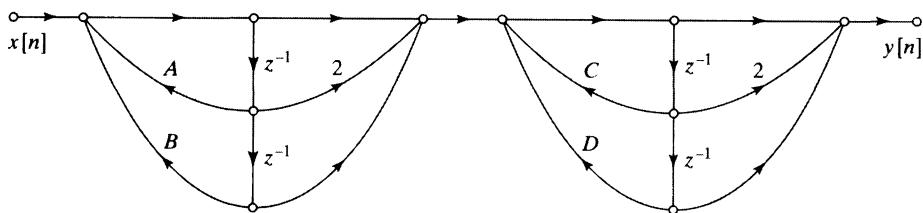


Рис. 7.49.

- 7.29. Частотная характеристика дискретной системы с характеристической функцией $H(Z)$ и импульсной характеристикой $h[n]$ равна

$$H(e^{j\theta}) = \begin{cases} A, & |\theta| < \theta_c, \\ 0, & \theta_c < |\theta| \leq \pi, \end{cases}$$

где $0 < \theta_c < \pi$. Этот фильтр трансформируется в новый с помощью замены $Z = -z^2$, т. е.

$$H_1(z) = H(Z) \Big|_{Z=-z^2} = H(-z^2).$$

- Найдите соотношение, связывающее частотную переменную θ исходного фильтра нижних частот $H(Z)$ с частотной переменной ω нового фильтра $H_1(z)$.
- Начертите график КЧХ $H_1(e^{j\omega})$ нового фильтра.
- Выразите импульсную характеристику $h_1[n]$ через $h[n]$.

г) Предположим, что $H(Z)$ может быть реализована следующим набором разностных уравнений:

$$\begin{aligned} g[n] &= x[n] - a_1g[n-1] - b_1f[n-2], \\ f[n] &= a_2g[n-1] + b_2f[n-1], \\ y[n] &= c_1f[n] - c_2g[n-1], \end{aligned}$$

где $x[n]$ — входной, а $y[n]$ — выходной сигналы системы. Найдите разностные уравнения, реализующие систему с $H_1(z) = H(-z^2)$.

- 7.30. Рассмотрите задачу проектирования дискретного фильтра с характеристической функцией $H(z)$ на основе непрерывного фильтра с рациональной характеристической функцией $H_c(s)$ с помощью преобразования

$$H(z) = H_c(s) \Big|_{s=\beta(1-z^{-\alpha})/(1+z^{-\alpha})},$$

где α — натуральное, а β — вещественное число.

- а) Пусть $\alpha > 0$. При каких значениях β из устойчивого детерминированного непрерывного фильтра с характеристической функцией $H_c(s)$ всегда получается устойчивый детерминированный дискретный фильтр?
- б) Ответьте на предыдущий вопрос в предположении отрицательности α .
- в) Пусть $\alpha = 2$ и $\beta = 1$. Определите, куда перейдет мнимая ось $j\Omega$ s -плоскости при таком преобразовании.
- г) Предположите, что непрерывный фильтр является устойчивым фильтром нижних частот, КЧХ которого удовлетворяет условию:

$$1 - \delta_1 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1 + \delta_1, \quad \text{при } |\Omega| \leq 1,$$

а дискретная система с характеристической функцией $H(z)$ получена из этого фильтра преобразованием, определенным в начале формулировки задачи с параметрами: $\alpha = 2$ и $\beta = 1$. Найдите значения ω из отрезка $[-\pi; \pi]$, при которых

$$1 - \delta_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_1.$$

- 7.31. Дискретный фильтр верхних частот может быть получен из непрерывного фильтра нижних частот с помощью следующего преобразования:

$$H(z) = H_c(s) \Big|_{s=(1+z^{-1})/(1-z^{-1})}.$$

- а) Покажите, что при этом преобразовании мнимая ось s -плоскости переходит в единичную окружность z -плоскости.
- б) Докажите, что если $H_c(s)$ — рациональная функция, все полюса которой расположены в левой полуплоскости, то $H(z)$ — рациональная функция, все полюса которой попадают внутрь единичного круга.
- в) Определите набор спецификаций, которым должен удовлетворять непрерывный фильтр нижних частот, чтобы дискретный фильтр, полученный из него

преобразованием, указанным в начале формулировке задачи, обладал следующими свойствами:

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &\leq 0,01, & |\omega| &\leq \pi/3, \\ 0,95 &\leq |H(e^{j\omega})| \leq 1,05, & \pi/2 &\leq |\omega| \leq \pi. \end{aligned}$$

- 7.32. Пусть $h_d[n]$ — импульсная характеристика идеальной системы с КЧХ $H_d(e^{j\omega})$, а $h[n]$ и $H(e^{j\omega})$ — импульсная характеристика и КЧХ КИХ-аппроксимации этой системы. Предположим, что $h[n] = 0$ при $n < 0$ и $n > M$. Мы хотим выбрать $(M+1)$ отсчет импульсной характеристики так, чтобы минимизировать среднеквадратичную ошибку КЧХ, которая определяется по формуле:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

- а) Используя теорему Парсеваля (с. 78), выразите функцию ошибки в терминах последовательностей $h_d[n]$ и $h[n]$.
- б) Основываясь на результате предыдущего пункта, определите значения отсчетов $h[n]$ при $0 \leq n \leq M$, минимизирующие ε^2 .
- в) КИХ-фильтр, найденный в п. «б» задачи, мог бы быть получен оконным методом, т. е. $h[n]$ можно получить, умножая желаемую бесконечную последовательность $h_d[n]$ на подходящую конечную последовательность $w[n]$. Подберите окно $w[n]$, для которого выполнено равенство $h[n] = w[n]h_d[n]$.
- 7.33. *Идеальным дискретным преобразователем Гильберта* называется система, сдвигающая фазу на -90° ($-\pi/2$ рад) при $0 < \omega < \pi$ и на $+90^\circ$ ($+\pi/2$ рад) при $-\pi < \omega < 0$. АЧХ этой системы постоянна на интервалах $(0; \pi)$ и $(-\pi; 0)$ и равна единице. Такую систему также называют *идеальным девяностоградусным фазовращателем*.
- а) Найдите КЧХ $H_d(e^{j\omega})$ идеального дискретного преобразователя Гильберта, включающую постоянную (но ненулевую) групповую задержку. Начертите график ФЧХ на интервале $(-\pi; \pi)$.
- б) Каким типом (I, II, III или IV) линейно-фазовой КИХ-системы можно аппроксимировать идеальный преобразователь Гильберта?
- в) Предположим, что нам нужно использовать оконный метод для проектирования линейно-фазовой аппроксимации идеального преобразователя Гильберта. Основываясь на формуле для $H_d(e^{j\omega})$, найденной в п. «а» задачи, вычислите идеальную импульсную характеристику $h_d[n]$, если отсчеты импульсной характеристики КИХ-системы равны нулю вне отрезка $[0; M]$.
- г) Чему равна задержка системы при $M = 21$? Начертите график АЧХ КИХ-аппроксимации в этом случае, считая, что при проектировании использовалось прямоугольное окно.
- д) Выполните задание предыдущего пункта для случая $M = 20$.
- 7.34. Все окна, о которых рассказывалось в подразделе 7.3.1, можно выразить через прямоугольное, что удобно использовать для вычисления преобразования Фурье от окна Барлетта и семейства косинусоидальных окон, включающего окна Хеннинга, Хемминга и Блэкмана.

- а) Покажите, что $(M+1)$ -точечное окно Барлетта, определенное формулой (7.57), можно представить в виде свертки двух прямоугольных окон, и докажите, что преобразование Фурье $(M+1)$ -точечного окна Барлетта при четном M имеет вид:

$$W_B(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \frac{2}{M} \left(\frac{\sin(\omega M/4)}{\sin(\omega/2)} \right)^2,$$

а при нечетном —

$$W_B(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \frac{2}{M} \left(\frac{\sin((M+1)\omega/4)}{\sin(\omega/2)} \right) \left(\frac{\sin((M-1)\omega/4)}{\sin(\omega/2)} \right).$$

- б) Легко убедиться, что $(M+1)$ -точечное косинусоидальное окно (7.58)–(7.60) можно записать в виде

$$w[n] = \left(A + B \cos \frac{2\pi n}{M} + C \cos \frac{4\pi n}{M} \right) w_R[n],$$

где $w_R[n]$ — $(M+1)$ -точечное прямоугольное окно. Исходя из этого соотношения, найдите Фурье-образ общего косинусоидального окна.

- в) Подобрав коэффициенты A , B и C , изобразите модуль Фурье-образа окна Хеннинга.

7.35. Рассмотрите идеальную КЧХ многополосного фильтра:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega M/2}, & 0 \leq |\omega| < 0,3\pi, \\ 0, & 0,3\pi < |\omega| < 0,6\pi, \\ 0,5e^{-j\omega M/2}, & 0,6\pi < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

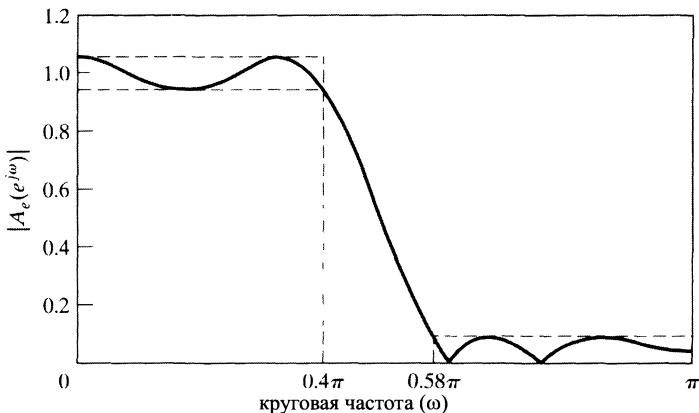
Импульсная характеристика $h_d[n]$ этого фильтра умножается на окно Кайзера с $M = 48$ и $\beta = 3,68$. В результате получается линейно-фазовая КИХ-система с импульсной характеристикой $h[n]$.

- а) Найдите задержку фильтра.
 б) Вычислите идеальную импульсную характеристику.
 в) Определите значения параметров δ_1 , δ_2 , B , C , ω_{p1} , ω_{s1} , ω_{s2} и ω_{p2} в следующих неравенствах:

$$\begin{aligned} B - \delta_1 &\leq |H(e^{j\omega})| \leq B + \delta_1, & 0 \leq \omega \leq \omega_{p1}, \\ |H(e^{j\omega})| &\leq \delta_2, & \omega_{s1} \leq \omega \leq \omega_{s2}, \\ C - \delta_3 &\leq |H(e^{j\omega})| \leq C + \delta_3, & \omega_{p2} \leq \omega \leq \pi. \end{aligned}$$

7.36. Оптимальный равнопульсирующий линейно-фазовый КИХ-фильтр был разработан с помощью алгоритма Пакса–Мак–Келлана. Модель его КЧХ показана на рис. 7.50. Максимальная ошибка аппроксимации в полосе пропускания равна $\delta_1 = 0,0531$, а в полосе непропускания — $\delta_2 = 0,085$. Частоты отсечек полос пропускания и непропускания соответственно равны $\omega_p = 0,4\pi$ и $\omega_s = 0,58\pi$.

Рис. 7.50.



- а) К какому типу линейно-фазовых КИХ систем относится данный фильтр. Объясните свой ответ.
 б) Какая весовая функция $W(\omega)$ использовалась при оптимизации?
 в) Начертите график взвешенной ошибки аппроксимации:

$$E(\omega) = W(\omega)(H_d(e^{j\omega}) - A_e(e^{j\omega})).$$

(Обратите внимание, что на рис. 7.50 показан график $|A_e(e^{j\omega})|$.)

- г) Что можно сказать о длине импульсной характеристики этой системы?
 д) Какова минимально возможная задержка, если система детерминирована?
 е) Отметьте нули характеристической функции $H(z)$ на комплексной z -плоскости с максимально возможной точностью.

- 7.37. Частотная характеристика фильтра, который мы собираемся аппроксимировать, показана на рис. 7.51. Здесь нам хотелось бы спроектировать N -точечный детерминированный линейно-фазовый КИХ-фильтр с импульсной характеристикой $h[n]$, который минимизировал бы среднеквадратичную ошибку

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})|^2 d\omega,$$

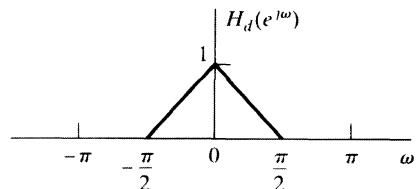


Рис. 7.51.

- где КЧХ фильтра равна $H_d(e^{j\omega})A(e^{j\omega})e^{-j\omega(N-1)/2}$, а N — нечетное.
 а) Вычислите $h_d[n]$.
 б) Что можно сказать о симметрии $h_d[n]$ на отрезке $[0; N-1]$? Коротко поясните свой ответ.
 в) Найдите отсчеты характеристики $h_d[n]$ на отрезке $[0; N-1]$.
 г) Выпишите зависимость минимальной среднеквадратичной ошибки ε от $h_d[n]$ и N .

- 7.38. Рассмотрите линейно-фазовый КИХ-фильтр нижних частот типа I с импульсной характеристикой $h_{LP}[n]$ длины $(M + 1)$ и КЧХ $H_{LP}(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}$. АЧХ этой системы (см. рис. 7.52) является оптимальной (в смысле Пакса–МакКеллана) аппроксимацией единицы на полосе $0 \leq \omega \leq \omega_p$, где $\omega_p = 0,27\pi$, и нуля на полосе $\omega_s \leq \omega \leq \pi$ с $\omega_s = 0,4\pi$.

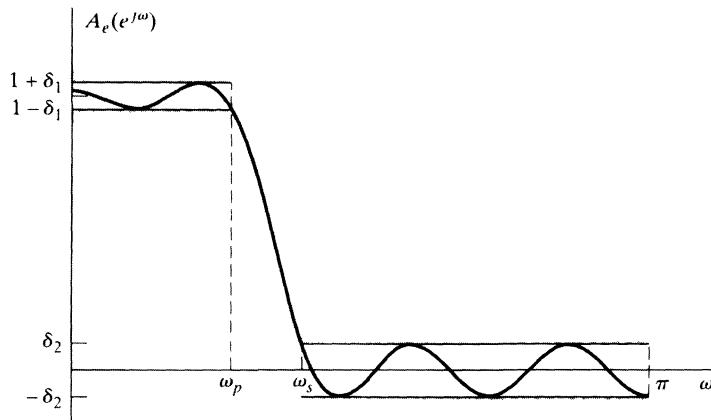


Рис. 7.52.

а) Чему равно значение M ?

Предположим, что фильтр верхних частот получен из фильтра нижних частот с помощью преобразования:

$$h_{HP}[n] = (-1)^{n+1} h_{LP}[n] = -e^{j\pi n} h_{LP}[n].$$

б) Покажите, что КЧХ фильтра верхних частот имеет вид

$$H_{HP}(e^{j\omega}) = B_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}.$$

в) Начертите график функции $B_e(e^{j\omega})$ над отрезком $[0; \pi]$.

г) Утверждается, что при данном значении M (найденном в п. «а») итоговый фильтр верхних частот является оптимальной аппроксимацией функции, равной нулю над отрезком $[0; 0,6\pi]$ и единице над $[0,73\pi; \pi]$. Верно ли это? Объясните свой ответ.

- 7.39. Спроектируйте трехточечный оптимальный (в смысле минимакса) детерминированный фильтр нижних частот с $\omega_s = \pi/2$, $\omega_p = \pi/3$ и $K = 1$. Укажите его импульсную характеристику $h[n]$.

Замечание: $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

- 7.40. Фильтр C — устойчивый непрерывный БИХ-фильтр с характеристической функцией $H_c(s)$ и импульсной характеристикой $h_c(t)$. Фильтр B — устойчивый дискретный фильтр с характеристической функцией $H_b(z)$ и импульсной характеристикой $h_b[n]$. Эти фильтры связаны друг с другом дробно-линейным преобразованием. Докажите следующее утверждение, если оно верно, и приведите контрпример, если ложно:

фильтр B не может быть КИХ-фильтром.

- 7.41. Предположим, что дискретный фильтр получен из непрерывного прототипа с характеристической функцией $H_c(s)$ с помощью дробно-линейного преобразования. Более того, можно считать, что непрерывный фильтр имеет постоянную групповую задержку, т. е. $H_c(j\Omega) = A(\Omega)e^{-j\Omega}$, где $A(j\Omega)$ — вещественноненаправленная функция. Объясните, может ли соответствующий дискретный фильтр тоже обладать постоянной групповой задержкой?

Задачи повышенной сложности

- 7.42. Если непрерывная ЛС-система обладает рациональной характеристической функцией, то ее вход и выход связаны обыкновенным линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Стандартная процедура моделирования такой системы основана на конечно-разностной аппроксимации производных. В частности, поскольку производная первого порядка непрерывной функции $y_c(t)$ определяется по формуле

$$\frac{dy_c(t)}{dt} = \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{y_c(t) - y_c(t - T)}{T} \right),$$

то кажется правдоподобным, что при «достаточно малом» T выражение

$$\frac{y_c(t) - y_c(t - T)}{T}$$

хорошо аппроксимирует производную.

Несмотря на то что такой простой подход хорошо работает в моделировании непрерывных систем, в случае дискретных он может оказать плохую услугу. Для понимания аппроксимации дифференциальных уравнений разностными полезно рассмотреть конкретный пример. Предположим, что характеристическая функция непрерывной системы имеет вид $H_c(s) = \frac{A}{s+c}$, где A и c — константы.

- а) Покажите, что входной $x_c(t)$ и выходной $y_c(t)$ сигналы системы связаны дифференциальным уравнением:

$$\frac{dy_c(t)}{dt} + cy_c(t) = Ax_c(t).$$

- б) Подставьте в это уравнение $t = nT$, заменив производную первой левой разностью:

$$\left. \frac{dy_c(t)}{dt} \right|_{t=nT} \approx \frac{y_c(nT) - y_c(nT - T)}{T}.$$

- в) Введите последовательности $x[n] = x_c(nT)$ и $y[n] = y_c(nT)$. Перепишите разностное уравнение, полученное в предыдущем пункте, в этих обозначениях и определите характеристическую функцию $H(z) = Y(z)/X(z)$ итоговой дискретной системы, описываемой этим разностным уравнением.

- г) Покажите, что в этом примере

$$H(z) = H_c(z) \Big|_{s=(1-z^{-1})/T},$$

т. е. $H(z)$ можно получить из функции $H_c(s)$ в результате преобразования $s = (1-z^{-1})/T$. (Можно доказать, что при аппроксимации производных высших порядков многократным применением первой левой разности результат предыдущего пункта задачи обобщается на системы произвольного порядка.)

- д) Выясните, куда перейдет мнимая ось s -плоскости при преобразовании из п. «г» задачи. Кроме того, найдите область на z -плоскости, соответствующую левой полуплоскости комплексной s -плоскости. Пусть непрерывная система с характеристической функцией $H_c(s)$ устойчива. Будет ли устойчивой дискретная система, полученная из непрерывной в результате разностной аппроксимации? Будет ли КЧХ дискретной системы точным воспроизведением КЧХ непрерывной? Зависит ли устойчивость дискретной системы и ее КЧХ от выбора T ?
- е) Предположим теперь, что производная аппроксимируется первой правой разностью:

$$\frac{dy_c(t)}{dt} \Big|_{t=nT} \approx \frac{y_c(nT + T) - y_c(nT)}{T}.$$

Найдите соответствующее отображение s -плоскости в z -плоскость и ответьте на вопросы п. «д» задачи в этом случае.

- 7.43. Рассмотрите непрерывную ЛС-систему с рациональной характеристической функцией $H_c(s)$. Входной $x_c(t)$ и выходной $y_c(t)$ сигналы этой системы связаны обыкновенным линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Один из способов моделирования таких систем основан на численном интегрировании дифференциальных уравнений. Здесь мы покажем, что вычисление интегралов по формуле трапеций эквивалентно дробно-линейному преобразованию непрерывной характеристической функции $H_c(s)$ в дискретную $H(z)$.

Чтобы подкрепить это утверждение конкретным примером, рассмотрим характеристическую функцию $H_c(s) = A/(s + c)$, где A и c — константы. Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\dot{y}_c(t) + cy_c(t) = Ax_c(t), \quad \text{где } \dot{y}_c(t) = \frac{dy_c(t)}{dt}.$$

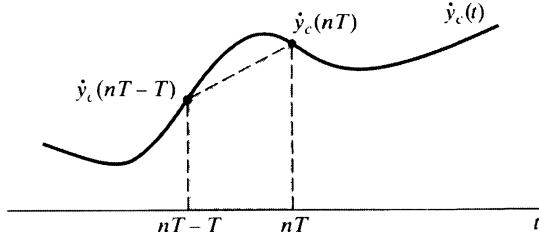
- а) Покажите, что $y_c(nT)$ выражается через $\dot{y}_c(t)$ по формуле:

$$y_c(nT) = y_c(nT - T) + \int_{(nT-T)}^{nT} \dot{y}_c(t) d\tau.$$

Интеграл в этом выражении вычисляет площадь под графиком производной $\dot{y}_c(t)$ над отрезком $[(n-1)T; nT]$. На рис. 7.53 показан график функции $\dot{y}_c(t)$. Серым цветом на нем отмечена область, аппроксимирующая упомянутую площадь криволинейной трапеции. Такая аппроксимация интеграла называется трапециевидной. Ясно, что при стремлении T к нулю аппроксимация становится все более точной. Используя эту аппроксимацию интеграла, выразите $y_c(nT)$ через $y_c(nT - T)$, $\dot{y}_c(nT)$ и $\dot{y}_c(nT - T)$.

- б) Основываясь на дифференциальном уравнении, получите выражение для производной $\dot{y}_c(nT)$ и подставьте его в формулу, найденную в п. «а» задачи.
- в) Введите последовательности $x[n] = x_c(nT)$ и $y[n] = y_c(nT)$. Выпишите разностное уравнение, связывающее эти последовательности, и определите характеристическую функцию $H(z) = Y(z)/X(z)$ дискретной системы, для которой последовательности $x[n]$ и $y[n]$ служат в качестве входного и выходного сигналов соответственно.

Рис. 7.53.



г) Покажите, что в этом примере

$$H(z) = H_c(z) \Big|_{s=\frac{T}{2}(1-z^{-1})/(1+z^{-1})},$$

т. е. докажите, что $H_c(z)$ трансформируется в $H_c(z)$ при дробно-линейном преобразовании. (Многократно применяя формулу трапеций для аппроксимации производных высшего порядка, можно получить аналогичный результат для систем с рациональной характеристической функцией большого порядка.)

- 7.44. В этой задаче рассматривается метод проектирования фильтров, который можно было бы назвать *автокорреляционной инвариантностью*. Пусть дана устойчивая непрерывная система с импульсной характеристикой $h_c(t)$ и характеристической функцией $H_c(s)$. Автокорреляционная функция системы определяется как

$$\varphi_c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_c(\tau)h_c(t+\tau) dt.$$

Если импульсная характеристика — вещественновзначная функция, то можно показать, что преобразование Лапласа от $\varphi_c(\tau)$ равно $\Phi_c(s) = H_c(s)H_c(-s)$. Кроме того, рассмотрим дискретную систему с импульсной характеристикой $h[n]$ и характеристической функцией $H(z)$. Ее автокорреляционная функция определяется формулой:

$$\varphi[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]h[n+m].$$

Причем в случае вещественной импульсной характеристики выполнено равенство $\Phi(z) = H(z)H(z^{-1})$.

Автокорреляционной инвариантностью называется метод проектирования дискретного фильтра, при котором его автокорреляционная функция получается как дискретизация автокорреляционной функции непрерывной системы:

$$\varphi[m] = T_d \varphi_c(mT_d), -\infty < m < \infty.$$

Ниже сформулирован алгоритм проектирования на основе автокорреляционной инвариантности в случае, когда $H_c(s)$ — рациональная функция с N простыми полюсами в точках s_k , $k = 1, 2, \dots, N$ и $M < N$ нулями.

1. Разложить функцию $\Phi_c(s)$ в сумму простейших дробей:

$$\Phi_c(s) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{A_k}{s - s_k} + \frac{B_k}{s + s_k} \right).$$

2. Перейти к z -преобразованию:

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}} + \frac{T_d B_k}{1 - e^{-s_k T_d} z^{-1}} \right).$$

3. Вычислить нули и полюса функции $\Phi(z)$ и, отобрав те из них, которые попадают *внутрь* единичного круга, выписать характеристическую функцию $H(z)$ минимально-фазовой системы.

- a) Проверьте каждый шаг указанной процедуры, т. е. покажите, что автокорреляционная функция итоговой дискретной системы — действительно дискретизованная версия автокорреляционной функции непрерывной. Для понимания процедуры может оказаться полезным «проверить» ее на примере системы первого порядка с импульсной характеристикой $h_c(t) = e^{-\alpha t} u(t)$ и характеристической функцией $H_c(s) = 1/(s + \alpha)$.
- b) Как связаны квадраты АЧХ $|H(e^{j\omega})|^2$ и $|H_c(j\Omega)|^2$? Какого типа функции КЧХ подходят для метода проектирования на основе автокорреляционной инвариантности?
- v) Единственная ли функция получается на третьем шаге алгоритма? Если нет, опишите, как получить дополнительные дискретные системы этим методом.

- 7.45. Пусть $H_{lp}(Z)$ — характеристическая функция дискретного фильтра нижних частот. Реализацию такой системы можно изобразить с помощью сигнально-потокового графа, состоящего из сумматоров, коэффициентов усиления и единичных задержек (см. рис. 7.54, a)). Нам хотелось бы реализовать фильтр нижних частот, частота отсечки которого могла бы меняться при изменении одного параметра. Для этого предлагается все единичные задержки в сигнальном потоковом графе, представляющем $H_{lp}(Z)$, заменить сетью из рис. 7.54, б), где α — вещественно и $|\alpha| < 1$.

- a) Пусть $H(z)$ — характеристическая функция фильтра, который получается заменой единичных задержек в графе, реализующем фильтр $H_{lp}(Z)$, на сеть из рис. 7.54, б). Покажите, что $H(z)$ и $H_{lp}(Z)$ связаны отображением Z -плоскости на z -плоскость.

- b) Пусть $H(e^{j\omega})$ и $H_{lp}(e^{j\theta})$ — соответствующие КЧХ систем. Найдите взаимосвязь между частотными переменными ω и θ . Изобразите график зависимости ω от θ при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pm 0,5$ и покажите, что $H(e^{j\omega})$ — КЧХ фильтра нижних частот. Обозначив через ω_p частоту отсечки этого фильтра, выразите ее через α и частоту отсечки исходного фильтра нижних частот θ_p .

- v) Пусть характеристическая функция оригинального фильтра нижних частот равна

$$H_{lp}(Z) = \frac{1}{1 - 0,9Z^{-1}}.$$

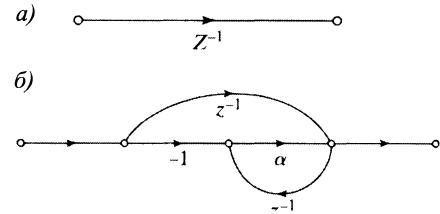


Рис. 7.54.

Начертите потоковые графы реализаций этого фильтра и фильтра, полученного заменой единичных задержек сетью из рис. 7.54, б). Соответствует ли полученная сеть вычислимым разностным уравнениям?

- г) Предположим, что по $H_{lp}(Z)$ построен потоковый граф, реализующий КИХ-систему в прямой форме. Можно ли, внося некоторые изменения в граф, получить вычислимый набор разностных уравнений? Пусть КИХ-система с характеристической функцией $H_{lp}(Z)$ обладает линейной фазой. Можно ли это утверждать и про систему с $H(z)$ в качестве характеристической функции? Какую длину имеет импульсная характеристика трансформированной системы, если длина исходной импульсной характеристики равна $M + 1$?
- д) Чтобы избежать трудностей, возникших в п. «в» задачи, полезно последовательно соединить сеть из рис. 7.54, б) с единичной задержкой, как показано на рис. 7.55. Повторите исследования п. «а» задачи, когда каждая единичная задержка графа реализации исходного фильтра замещается сетью из рис. 7.55. Выпишите уравнение, связывающее в этом случае частотные переменные θ и ω , и покажите, что если $H_{lp}(e^{j\theta})$ — КЧХ фильтра нижних частот, то $H(e^{j\omega})$ к фильтру нижних частот никакого отношения не имеет.

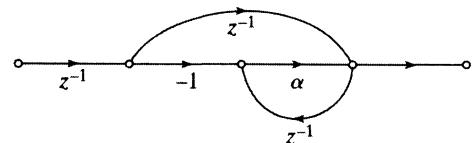
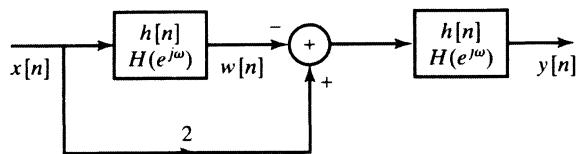


Рис. 7.55.

- 7.46. Если у нас есть основной фильтрующий блок (некое устройство или стандартная компьютерная программа), то иногда, используя его периодическим образом, можно получить фильтр с крутым срезом. Один из методов заключается в каскадном соединении исходного фильтра самим с собой два или более раз, но легко показать, что если ошибка аппроксимации полосы непропускания возрастает в квадрат (и тем самым уменьшается, если была меньше единицы), то ошибка аппроксимации полосы пропускания растет. Альтернативный подход, предложенный Таки (см. [150]), показан на блок-схеме рис. 7.56. Автор называл его «удвоением».

Рис. 7.56.



- а) Предположим, что основная система обладает конечной симметричной импульсной характеристикой:

$$h[n] = \begin{cases} h[-n], & -L \leq n \leq L, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определите, является ли импульсная характеристика всей системы из рис. 7.56 конечной и симметричной.

- б) Допустим, что КЧХ $H(e^{j\omega})$ базисного фильтра удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} 1 - \delta_1 &\leq H(e^{j\omega}) \leq 1 + \delta_1, & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ -\delta_2 &\leq H(e^{j\omega}) \leq \delta_2, & \omega_s \leq \omega \leq \pi. \end{aligned}$$

Можно показать, что в этом случае КЧХ всей системы из рис. 7.56 обладает спецификациями:

$$\begin{aligned} A \leq G(e^{j\omega})B, & \quad 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ C \leq G(e^{j\omega}) \leq D, & \quad \omega_s \leq \omega \leq \pi. \end{aligned}$$

Определите A , B , C и D в терминах δ_1 и δ_2 . Какова минимальная ошибка аппроксимации $G(e^{j\omega})$ над полосами пропускания и непропускания, если $\delta_1 \ll 1$ и $\delta_2 \ll 1$?

- в) Как вы, надеемся, поняли из предыдущего пункта задачи, «удвоение» Таки улучшает ошибку аппроксимации полосы пропускания, но увеличивает ее на полосе непропускания. Кайзер и Хемминг в 1977 г. [76] обобщили метод удвоения так, что он стал улучшать аппроксимацию как полосы пропускания, так и полосы непропускания. Они назвали обобщенный метод «заострение». Простейшая заостряющая система, улучшающая аппроксимацию обоих полос, показана на рис. 7.57. Предположите, что импульсная характеристика базисного фильтра такая, как в п. «а» и повторите исследования п. «а» для системы из рис. 7.57.
- г) В предыдущих пунктах задачи ничего не предполагалось о детерминированности базисной системы. Допустим теперь, что импульсная характеристика базисной системы принадлежит классу детерминированных линейно-фазовых КИХ-систем и обладает следующей симметрией

$$h[n] = \begin{cases} h[M-n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Как следует модифицировать системы из рис. 7.56 и 7.57? Какого типа (I, II, III или IV) детерминированные линейно-фазовые КИХ-системы можно использовать? Чему равна длина импульсной характеристики $g[n]$ систем из рис. 7.56 и 7.57 (в терминах L)?

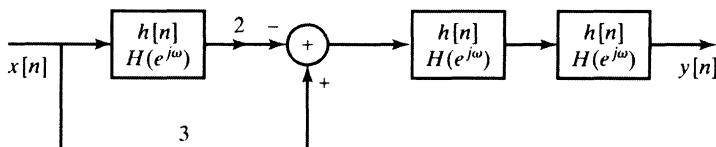


Рис. 7.57.

- 7.47. Рассмотрите проектирование линейно-фазового КИХ-фильтра нижних частот с помощью алгоритма Пакса-Мак-Клеллана. Воспользуйтесь теоремой о чередованиях для доказательства того факта, что аппроксимация должна монотонно уменьшаться в переходной области между полосами пропускания и непропускания.
Указание: Докажите, что все локальные экстремумы тригонометрического многочлена в обеспечение условий теоремы о чередованиях должны попасть внутрь полос пропускания и непропускания.

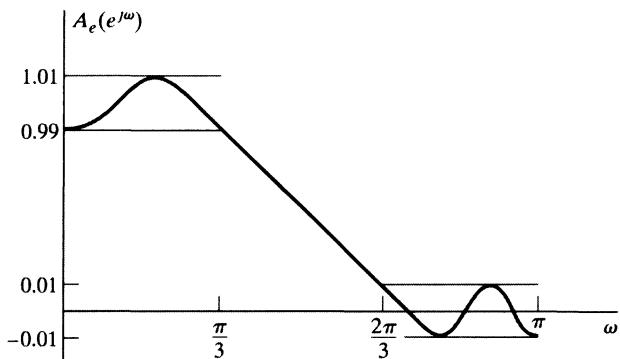
- 7.48. На рис. 7.58 показана КЧХ $A_e(e^{j\omega})$ дискретной КИХ-системы с импульсной характеристикой

$$h_e[n] = \begin{cases} h_e[-n], & -L \leq n \leq L, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- a) Проверьте, что $A_e(e^{j\omega})$ не является оптимальной аппроксимацией КИХ-фильтра, полученной алгоритмом Пакса–Мак–Клеллана, примененным к идеально-му фильтру нижних частот с границами полос пропускания и непропускания $\pi/3$ и $2\pi/3$ соответственно и единичной весовой функцией.

Указание: воспользуйтесь единственностью оптимальной аппроксимации.

Рис. 7.58.



- б) Что можно сказать о величине L , если учитывать рис. 7.58 и тот факт, что $A_e(e^{j\omega})$ не может соответствовать оптимальной аппроксимации?

- 7.49. Рассмотрите рис. 7.59. Сделаем следующие допущения.

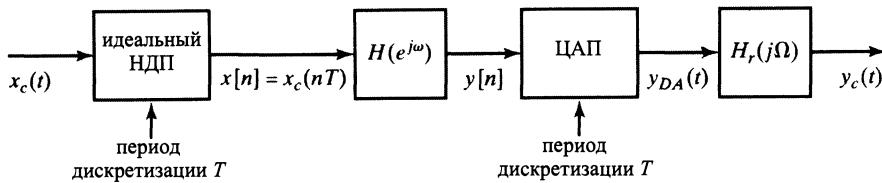


Рис. 7.59.

1. Пусть $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\omega| \geq \pi/T$, а

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| > \pi/T \end{cases}$$

обозначает КЧХ идеального восстановливающего фильтра нижних частот.

2. ЦАП обладает встроенной схемой запоминания нулевого порядка, так что

$$Y_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]h_0(t-nT),$$

где

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(Мы пренебрегаем квантованием в АЦП.)

3. Вторая система из рис. 7.59 является линейно-фазовой дискретной КИХ-системой с КЧХ $H(e^{j\omega})$.

Наша цель — спроектировать КИХ-систему методом Пакса — Мак-Клеллана, компенсирующую воздействие системы запоминания нулевого порядка.

- Выразите $H_{\text{eff}}(j\Omega)$ через $H(e^{j\Omega T})$ и T , если преобразование Фурье выходного сигнала имеет вид: $Y_c(j\Omega) = H_{\text{eff}}(j\Omega)X_c(j\Omega)$.
- Чему равна суммарная задержка (в мс) всей системы из рис. 7.59, если импульсная характеристика линейно-фазовой КИХ-системы равна нулю вне отрезка $[0; 51]$ и $T = 10^{-4}$ с.
- Нам хотелось бы получить равнопульсирующую АЧХ (как в полосе пропускания, так и в полосе непропускания) при условии, что $T = 10^{-4}$ с и

$$\begin{aligned} 0,99 \leq |H_{\text{eff}}(j\Omega)| \leq 1,01, & \quad |\omega| \leq 2\pi(1000), \\ |H_{\text{eff}}(j\Omega)| \leq 0,01, & \quad 2\pi(2000) \leq |\Omega| \leq 2\pi(5000). \end{aligned}$$

Для достижения намеченной цели проектируем оптимальную линейно-фазовую аппроксимацию (используя алгоритм Пакса—Мак-Клеллана), включающую в себя компенсацию системы запоминания нулевого порядка. Выпишите идеальную КЧХ $H_d(e^{j\omega})$, которую нужно аппроксимировать. Подберите подходящую весовую функцию $W(\omega)$ и начертите ее график. Изобразите «типичную» КЧХ итоговой системы.

- Как нужно подправить результат предыдущего пункта, чтобы включить компенсацию АЧХ $|H_r(j\Omega)|$ восстанавливающего фильтра с нулевым коэффициентом усиления при частотах выше $\Omega = 2\pi(5000)$, но наклонной полосой пропускания?

- 7.50. После того как дискретный сигнал пройдет через фильтр нижних частот, его часто подвергают понижающей дискретизации или прореживанию, как показано на рис. 7.60. В таких приложениях часто используют линейно-фазовые КИХ-фильтры. Однако, если фильтр нижних частот из рисунка обладает узкой переходной областью, импульсная характеристика соответствующей КИХ-системы будет слишком длинной, в связи с чем для вычисления каждого отсчета выходного сигнала потребуется большое количество умножений и сложений.

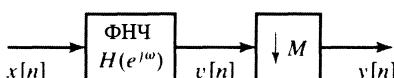
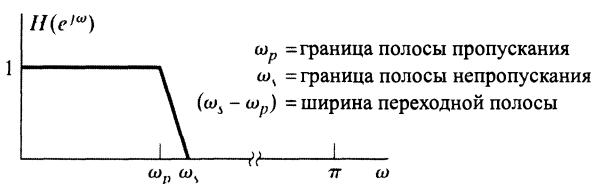


Рис. 7.60.



Эта задача посвящена исследованию преимуществ многоступенчатой реализации системы из рис. 7.60. Такая реализация особенно полезна, когда ω_s достаточно мало, а множитель M прореживателя, наоборот, большой. Общая многоступенчатая реализация изображена на рис. 7.61. Ее идея заключается в том, что-

бы в фильтрах, участвующих на ранних стадиях, использовать более широкую переходную полосу, уменьшая тем самым длину соответствующих импульсных характеристик фильтров. После прореживания число отсчетов сигнала уменьшается, и мы можем пропорционально уменьшить ширину переходной полосы фильтров, обрабатывающих прореженный сигнал. Таким образом, общее количество вычислений, требуемых для реализации прореживателей, может снизиться.

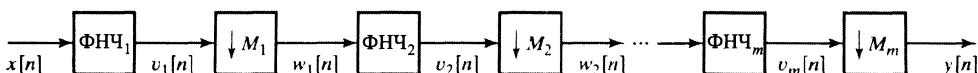


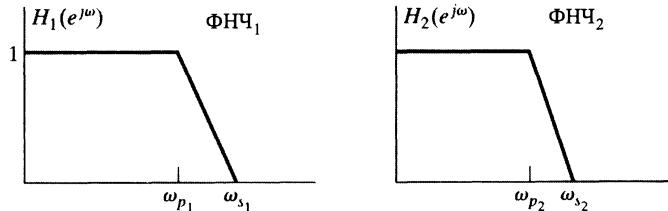
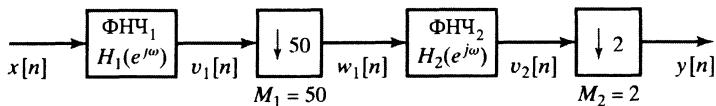
Рис. 7.61.

- Что можно сказать о максимально возможном множителе M прореживателя из рис. 7.60 (в терминах ω_s), при котором не появляются ложные частоты?
- Пусть в системе из рис. 7.60 $M = 100$, $\omega_s = \pi/100$ и $\omega_p = 0,9\pi/100$, а входной сигнал — единичный импульс, т. е. $x[n] = \delta[n]$. Начертите $V(e^{j\omega})$ и $Y(e^{j\omega})$.

Теперь обратимся к двухступенчатой реализации прореживателя с $M = 100$, приведенной на рис. 7.62. Там $M_1 = 50$, $M_2 = 2$, $\omega_{p1} = 0,9\pi/100$, $\omega_{p2} = 0,9\pi/2$ и $\omega_{s1} = \pi/2$. Нам нужно подобрать значение ω_{s1} или, что то же самое, ширину переходной полосы $\Phi\text{НЧ}_1$ $\omega_{s1} - \omega_{p1}$ так, чтобы при двухступенчатой реализации получались те же самые частоты полос пропускания и непропускания, что и при одноступенчатой реализации прореживателя. (Мы не будем заботиться о точной форме КЧХ в переходной области, за исключением ее монотонности.)

- Пусть ω_{s1} произвольно, а $x[n] = \delta[n]$. Начертите графики функций $V_1(e^{j\omega})$, $W_1(e^{j\omega})$, $V_2(e^{j\omega})$ и $Y(e^{j\omega})$ для двухступенчатой системы из рис. 7.62.
- Найдите *наибольшее* значение ω_{s1} , при котором двухступенчатый прореживатель имеет те же самые частоты отсечек полос пропускания и непропускания, что и одноступенчатая система из п. «б».

Рис. 7.62.



Кроме переходной полосы ненулевой ширины реальный фильтр низких частот отличается от идеального ошибками аппроксимации полос пропускания и непропускания δ_p и δ_s соответственно. Предположим, что мы имеем дело с линейно-фазовой равнопульсирующей КИХ-аппроксимацией. Из формулы (7.120) следует,

ет, что для оптимального фильтра нижних частот

$$N \approx \frac{-10 \lg(\delta_p \delta_s) - 13}{2,324 \Delta\omega} + 1, \quad (7.131)$$

где N — длина импульсной характеристики, а $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$ — ширина переходной полосы. Эта формула дает основу для сравнения двух реализаций прореживателя. (Если фильтр проектируется с помощью окна Кайзера, то вместо формулы (7.131) можно воспользоваться формулой (7.76).)

- д) Пусть $\delta_p = 0,01$ и $\delta_s = 0,001$ — ошибки аппроксимации фильтра нижних частот в одношаговой реализации. Вычислите длину N его импульсной характеристики и определите число умножений, необходимых для вычисления каждого отсчета выходного сигнала. Учтите симметрию импульсной характеристики линейно-фазовой КИХ-системы. (Заметим, что в этом прореживающем приложении необходимо вычислять всего лишь каждый M -й отсчет выхода, т. е. компрессор перестановочен с умножением в КИХ-системе.)
 - е) Используя значение ω_{1p} , найденное в п. «г», определите длины N_1 и N_2 импульсных характеристик первого и второго фильтров нижних частот в двухшаговой реализации прореживателя (рис. 7.62). Оцените общее число умножений, требуемых для вычисления каждого отсчета выхода двухшагового прореживателя.
 - ж) Если в обоих фильтрах двухшагового прореживателя ошибки аппроксимации равны $\delta_p = 0,01$ и $\delta_s = 0,001$, то общие колебания в полосе пропускания могут превышать значение 0,01, так как колебания полос пропускания в двух фильтрах часто усиливают друг друга, например когда $(1 + \delta_p)(1 + \delta_p) > (1 + \delta_p)$. Чтобы компенсировать усиление колебаний, фильтры, участвующие в двухшаговом прореживателе, нужно проектировать с половинной ошибкой полосы пропускания. Поэтому будем считать, что $\delta_p = 0,005$ и $\delta_s = 0,001$ для обоих фильтров прореживателя. Найдите длины N_1 и N_2 импульсных характеристик первого и второго фильтров и определите общее число умножений, требуемых для вычисления каждого отсчета выхода двухшагового прореживателя.
 - з) Имеет ли смысл уменьшать допустимую ошибку в полосе непропускания фильтров нижних частот из двухшагового прореживателя?
 - и) *Необязательная.* Комбинация $M_1 = 50$ и $M_2 = 2$ может и не приводить к наименьшему числу умножений, приходящихся на каждый отсчет выходного сигнала. Возможен другой выбор M_i , при котором $M_1 M_2 = 100$. Подберите значения M_i , минимизирующие общее число умножений на отсчет выхода.
- 7.51. Здесь представляется техника проектирования дискретных минимально-фазовых фильтров. Напомним, что все нули и полюса характеристической функции таких фильтров находятся внутри единичного круга или на его границе. Прежде всего рассмотрим задачу о преобразовании линейно-фазового равнопульсирующего КИХ-фильтра нижних частот типа I в минимально-фазовую систему. Если $H(e^{j\omega})$ — КЧХ линейно-фазового фильтра первого типа, то

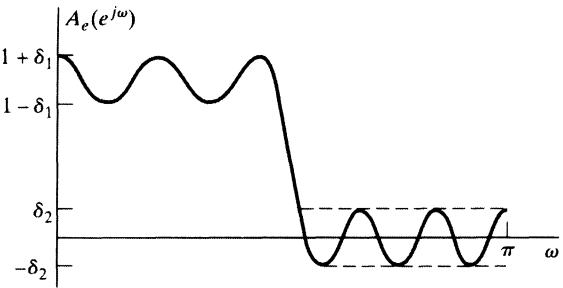
1. Соответствующая импульсная характеристика

$$h[n] = \begin{cases} h[M-n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

вещественнозначна, а M — четное целое число.

2. Из предыдущего замечания следует, что КЧХ $H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$, где $A_e(e^{j\omega})$ — вещественноизначная функция и $n_0 = M/2 \in \mathbb{Z}$.
3. Колебания над полосой пропускания равны δ_1 , т. е. функция $A_e(e^{j\omega})$ осциллирует между $(1 + \delta_1)$ и $(1 - \delta_1)$ (см. рис. 7.63).
4. Колебания над полосой непропускания составляют δ_2 , т. е. над этой полосой имеет место неравенство $-\delta_2 \leq A_e(e^{j\omega}) \leq \delta_2$.

Рис. 7.63.



Для преобразования линейно-фазовой системы в минимально-фазовую с характеристической функцией $H_{\min}(z)$ и импульсной характеристикой $h_{\min}[n]$ Германином и Шлюссером была предложена следующая техника (см. [62]).

Шаг 1. Сформировать последовательность

$$h_1[n] = \begin{cases} h[n], & n \neq n_0, \\ h[n_0] + \delta_2, & n = n_0. \end{cases}$$

Шаг 2. Подобрать функцию $H_2(z)$, все нули и полюса которой попадают внутрь или на границу единичного круга, с вещественноизначной $h_2[n]$, для которой

$$H_1(z) = z^{-n_0} H_2(z) H_2(1/z) = z^{-n_0} H_3(z).$$

Шаг 3. Ввести функцию

$$H_{\min}(z) = \frac{H_2(z)}{a}.$$

Константа $a = (\sqrt{1 - \delta_1 + \delta_2} + \sqrt{1 + \delta_1 + \delta_2}) / 2$ в знаменателе нормализует полосу пропускания таким образом, что итоговая КЧХ $H_{\min}(e^{j\omega})$ осциллирует вокруг единицы.

а) Покажите, что если в качестве $h_1[n]$ выбрана импульсная характеристика из шага 1, то $H_1(e^{j\omega})$ может быть записана как

$$H_1(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} H_3(e^{j\omega}),$$

где $H_3(e^{j\omega})$ — вещественноизначная неотрицательная на всей частотной оси функция.

б) Используя доказанное неравенство $H_3(e^{j\omega}) \geq 0$, покажите, что найдется функция $H_2(z)$, для которой

$$H_3(z) = H_2(z) H_2(1/z).$$

Причем $H_2(z)$ — характеристическая функция минимально-фазовой системы с вещественной импульсной характеристикой $h_2[n]$ (т. е. выполнен шаг 2).

- в) Вычислив δ'_1 и δ'_2 , покажите, что спроектированная система с КЧХ $H_{\min}(e^{j\omega})$ является равнопульсирующим фильтром нижних частот (т. е. ее АЧХ имеет вид, как на рис. 7.64). Что можно сказать о длине новой импульсной характеристики $h_{\min}[n]$?
- г) В предыдущих пунктах задачи мы предполагали, что исходным фильтром проекта служил линейно-фазовый КИХ-фильтр типа I. Будет ли работать описанный алгоритм, если мы снимем требование линейности фазы?

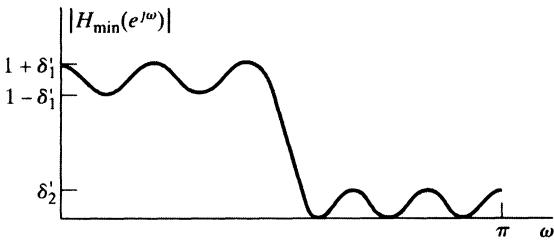


Рис. 7.64.

- 7.52. Предположим, в нашем распоряжении находится программа, вычисляющая коэффициенты $a[n]$, $n = 0, 1, \dots, L$, при которых выражение

$$\max_{\omega \in F} \left\{ \left| W(\omega) \left[H_d(e^{j\omega}) - \sum_{n=0}^L a[n] \cos \omega n \right] \right| \right\}$$

достигает своего минимума при фиксированных L , F , $W(\omega)$ и $H_d(e^{j\omega})$. Было доказано, что решение этой задачи оптимизации дает недетерминированную КИХ-систему с нулевой фазой, импульсная характеристика которой удовлетворяет соотношению $h_e[n] = h_e[-n]$. Задерживая $h_e[n]$ на L отсчетов, мы получим детерминированную линейно-фазовую КИХ-систему первого типа с КЧХ

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \sum_{n=0}^L a[n] \cos \omega n = \sum_{n=0}^{2L} h[n] e^{-j\omega n},$$

где импульсная характеристика связана с коэффициентами $a[n]$ по следующему закону:

$$a[n] = \begin{cases} 2h[M/2 - n], & 1 \leq n \leq L, \\ h[M/2], & n = 0. \end{cases}$$

а $M = 2L$ — степень полиномиальной характеристической функции. (Длина импульсной характеристики — $M + 1$.)

Линейно-фазовые КИХ-фильтры остальных трех типов можно разработать с помощью упомянутой программы, если подходящим образом модифицировать весовую функцию $W(\omega)$ и желаемую КЧХ $H_d(e^{j\omega})$. Чтобы увидеть путь, по которому следует двигаться, необходимо привести КЧХ к стандартному виду, подразумеваемому программой.

- а) Предположим, что нам надо спроектировать детерминированную линейно-фазовую КИХ-систему второго типа с импульсной характеристикой, удовлетворяющей равенству $h[n] = h[M - n]$ при $n = 0, 1, \dots, M$, и нечетным M .

Докажите, что КЧХ проектируемой системы можно записать как

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n] \cos \omega \left(n - \frac{1}{2}\right).$$

Найдите соотношение, связывающее отсчеты $b[n]$ и $h[n]$.

- 6) Покажите, что сумму

$$\sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n] \cos \omega \left(n - \frac{1}{2}\right)$$

можно переписать как

$$\cos \frac{\omega}{2} \sum_{n=0}^{(M-1)/2} \tilde{b}[n] \cos \omega n,$$

выразив коэффициенты $b[n]$ через $\tilde{b}[n]$.

Указание: воспользуйтесь тригонометрическим тождеством:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

- в) Чтобы использовать упомянутую программу для проектирования систем типа II (M нечетное) с фиксированными F , $W(\omega)$ и $H_d(e^{j\omega})$, выразите через них такие \tilde{L} , \tilde{F} , $\tilde{W}(\omega)$ и $\tilde{H}_d(e^{j\omega})$, прогнав с которыми программу можно получить набор коэффициентов для определения импульсной характеристики желаемой системы второго типа.
- г) Пункты «а»–«в» задачи можно повторить для детерминированных линейно-фазовых систем типов III и IV, у которых $h[n] = -h[M-n]$. Для этих случаев необходимо показать, что КЧХ системы типа III (M четно) можно представить как

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \sum_{n=1}^{M/2} c[n] \sin \omega n = e^{-j\omega M/2} \sin \omega \sum_{n=0}^{(M-2)/2} \tilde{c}[n] \cos \omega n,$$

а КЧХ систем типа IV (M нечетно) — в виде:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega M/2} \sum_{n=1}^{(M+1)/2} d[n] \sin \omega \left(n - \frac{1}{2}\right) = \\ &= e^{-j\omega M/2} \sin \frac{\omega}{2} \sum_{n=0}^{(M-1)/2} \tilde{d}[n] \cos \omega n. \end{aligned}$$

Как и в п. «б», необходимо выразить $c[n]$ через $\tilde{c}[n]$, а $d[n]$ через $\tilde{d}[n]$, основываясь на тригонометрическом тождестве: $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$. В [99 и 121] описанный алгоритм разбирается более подробно.

- 7.53. В этой задаче рассматривается метод реализации линейно-фазового фильтра с переменной частотой отсечки. Предположим, что нам дан фильтр с нулевой

фазой, разработанный по методу Пакса–Мак-Клеллана. КЧХ такого фильтра можно записать как

$$A_e(e^{j\theta}) = \sum_{k=0}^L a_k \cos^k \theta.$$

Следовательно, его характеристическая функция имеет вид:

$$A_e(Z) = \sum_{k=0}^L a_k \left(\frac{Z + Z^{-1}}{2} \right)^k,$$

где $Z = e^{j\theta}$. (Мы используем переменную Z для записи функций, ассоциированных с исходным фильтром, и z для функций, связанных с трансформированной системой.)

- Основываясь на выражении для характеристической функции, начертите блок-схему или потоковый граф реализации системы, включающий умножения на коэффициенты a_k , сложения и элементарные системы с характеристической функцией $\frac{Z+Z^{-1}}{2}$.
- Что можно сказать о длине импульсной характеристики системы? Если к системе добавить задержку на L отсчетов, то она станет детерминированной. Расставьте единичные задержки по всему потоковому графу так, чтобы каждая часть системы стала детерминированной.
- Определим новую характеристическую функцию как

$$B_e(z) = A_e(Z) \Big|_{(Z+Z^{-1})/2 = \alpha_0 + \alpha_1[(z+z^{-1})/2]}.$$

Опираясь на потоковый график из п. «а» задачи, начертите потоковый график, реализующий систему с характеристической функцией $B_e(z)$. Чему равна длина импульсной характеристики новой системы? Модифицируйте последний потоковый график так, чтобы все его части (как и полная система) стали детерминированными.

- Пусть $A_e(e^{j\theta})$ и $B_e(e^{j\omega})$ КЧХ исходного и преобразованного фильтров. Найдите зависимость между частотными переменными θ и ω .
 - КЧХ исходного фильтра показана на рис. 7.65. Выясните, как меняется КЧХ $B_e(e^{j\omega})$ в зависимости от α_0 в случае, когда $\alpha_1 = 1 - \alpha_0$ и $0 \leq \alpha_0 < 1$.
Указание: изобразите графики $A_e(e^{j\theta})$ и $B_e(e^{j\omega})$ как функции от переменных $\cos \theta$ и $\cos \omega$. Можно ли утверждать, что преобразованный фильтр оптимален с точки зрения минимума максимальной взвешенной ошибки аппроксимации в преобразованных полосах пропускания и непропускания?
 - Необязательная. Повторите исследования предыдущего пункта в случае $\alpha_1 = 1 + \alpha_0$, $-1 < \alpha_0 \leq 0$.
- 7.54. Здесь исследуется преобразование непрерывного фильтра в дискретный, получающееся в результате замены производных в дифференциальному уравнению, ассоциированном с непрерывным фильтром, на центральные разности. Первая центральная разность последовательности $x[n]$ определяется по правилу:

$$\Delta^{(1)}\{x[n]\} = x[n+1] - x[n-1],$$

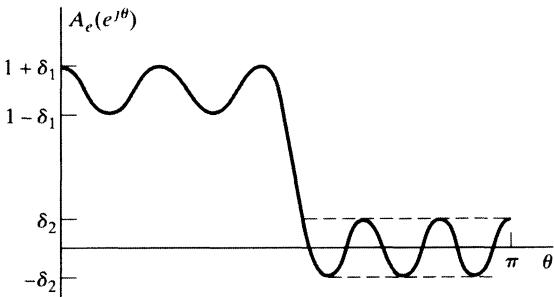
а k -я — по рекуррентной формуле:

$$\Delta^{(k)}\{x[n]\} = \Delta^{(1)}\{\Delta^{(k-1)}\{x[n]\}\}.$$

Удобно определить нулевую центральную разность как

$$\Delta^{(0)}\{x[n]\} = x[n].$$

Рис. 7.65.



- а) Вычислите z -преобразование последовательности $\Delta^{(k)}\{x[n]\}$, если $X(z)$ — z -преобразование от $x[n]$.

Преобразование непрерывного ЛС-фильтра в дискретный можно осуществить следующим образом. Пусть пара сигнал–отклик непрерывного фильтра связана дифференциальным уравнением

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{r=0}^M b_r \frac{d^r x(t)}{dt^r}.$$

Тогда вход и выход дискретного фильтра, полученного в результате преобразования непрерывного, связаны разностным уравнением:

$$\sum_{k=0}^N a_k \Delta^{(k)}\{y[n]\} = \sum_{r=0}^M b_r \Delta^{(r)}\{x[n]\}.$$

- б) Пусть $H_c(s)$ и $H_d(z)$ — характеристические функции непрерывной системы и дискретной, полученной в результате описанного выше преобразования дифференциального уравнения в разностное. Тогда имеет место равенство:

$$H_d(z) = H_c(s) \Big|_{s=m(z)}$$

для некоторого преобразования $m(z)$. Найдите $m(z)$.

- в) Предположим, что $H_c(s)$ аппроксимирует непрерывный фильтр нижних частот с частотой отсечки $\Omega = 1$, т. е.

$$H(j\Omega) \approx \begin{cases} 1, & |\Omega| < 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Этот фильтр преобразуется в дискретный с помощью замены производных на центральные разности, как описано выше. Начертите приблизительную КЧХ получившегося дискретного фильтра, считая, что он устойчив.

- 7.55. Пусть $h[n]$ — импульсная характеристика оптимального равнопульсирующего фильтра нижних частот первого типа, КЧХ которого изображена на рис. 7.66. Он спроектирован на основе весовой функции $W(e^{j\omega})$ и желаемой КЧХ $H_d(e^{j\omega})$. Для простоты будем считать, что фильтр обладает нулевой фазой (т. е. от неодетерминирован). Исходя из $h[n]$ спроектируем пять разных КИХ-фильтров с импульсными характеристиками:

$$h_1[n] = h[-n], \quad h_4[n] = h[n] - K\delta[n], \text{ где } K \text{ — константа,}$$

$$h_2[n] = (-1)^n h[n], \quad h_5[n] = \begin{cases} h[n/2], & n \text{ четно}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$h_3[n] = h[n] * h[n],$$

Выясните в каждом из случаев, является ли соответствующий фильтр оптимальным в смысле минимакса, т. е. верно ли, что

$$h_i[n] = \min_{h_i[n]} \max_{\omega \in F} \{W(e^{j\omega}) |H_d(e^{j\omega}) - H_i(e^{j\omega})|\}$$

для каких-то кусочно-постоянных функций $H_d(e^{j\omega})$ и $W(e^{j\omega})$? Здесь F — объединение непересекающихся отрезков из $[0; \pi]$. В случае если $h_i[n]$ — импульсная характеристика оптимальной аппроксимации, выпишите соответствующие $H_d(e^{j\omega})$ и $W(e^{j\omega})$. Если $h_i[n]$ неоптимальна, то объясните почему.

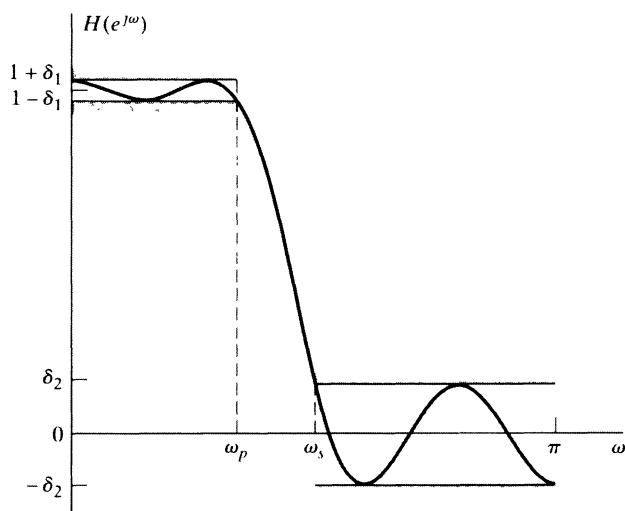
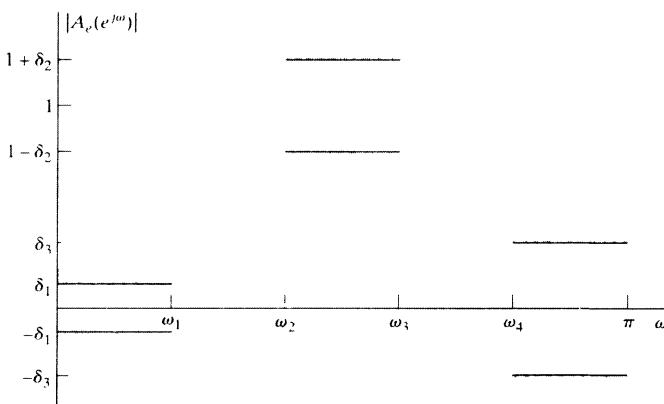


Рис. 7.66.

- 7.56. Предположите, что вы спроектировали детерминированную линейно-фазовую КИХ-систему с помощью алгоритма Пакса-Мак-Клеллана. $H(z)$ — характеристическая функция этой системы. Длина импульсной характеристики равна 25 отсчетам, причем $h[0] = 0$ при $n < 0$ и $n > 24$, а $h[0] \neq 0$. На каждый из следующих вопросов ответьте «истинно», «ложно» или «недостаточно информации». Верно ли, что

- а) $h[n+12] = h[12-n]$ или $h[n+12] = -h[12-n]$ при $-\infty < n < \infty$;
- б) система обладает детерминированной устойчивой обратной системой;
- в) $H(-1) = 0$;
- г) максимальная взвешенная ошибка аппроксимации одинакова во всех аппроксимируемых полосах;
- д) система может быть реализована сигнальным потоковым графом без петель обратной связи;
- е) групповая задержка системы положительна на интервале $(0; \pi)$?
- 7.57. Рассмотрите проектирование полосового линейно-фазового КИХ-фильтра типа I с помощью алгоритма Пакса–Мак-Клеллана. Длина импульсной характеристики фильтра равна $M + 1 = 2L + 1$. Напомним, что КЧХ фильтра первого типа имеет вид $H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}$, а алгоритм Пакса–Мак-Клеллана подбирает функцию $A_e(e^{j\omega})$, минимизирующую максимальное значение ошибки
- $$E(\omega) = W(\omega)(H_d(e^{j\omega}) - A_e(e^{j\omega})), \quad \omega \in F,$$
- где F — замкнутое подмножество отрезка $[0; \pi]$, $W(\omega)$ — весовая функция, а $H_d(e^{j\omega})$ — желаемая КЧХ на аппроксимируемом множестве F . Схема допустимых ошибок этого полосового фильтра показана на рис. 7.67.
- а) Выпишите желаемую КЧХ $H_d(e^{j\omega})$, основываясь на рис. 7.67.
- б) Подберите весовую функцию $W(\omega)$ по рис. 7.67.
- в) Чему равно *минимальное число чередований* функции ошибки для оптимального фильтра?
- г) Чему равно *максимальное число чередований* функции ошибки для оптимального фильтра?

Рис. 7.67.



- д) Начертите график «типичной» функции ошибки $E(\omega)$ оптимальной аппроксимации в случае $M = 14$. Предполагайте, что число чередований максимально.
- е) Теперь зафиксируйте параметры M , ω_1 , ω_2 , ω_3 , весовую функцию и желаемую КЧХ и увеличивайте ω_4 . При этом, очевидно, увеличивается и переходная область $(\omega_4 - \omega_3)$. Обязательно ли фильтр, оптимизирующий новый набор

спецификаций, имеет именьшее значение максимальной ошибки аппроксимации, чем исходная оптимизация? Объясните свой ответ.

- ж) В случае фильтра нижних частот все локальные экстремумы функции $A_e(e^{j\omega})$ должны попасть внутрь множества F . Они не могут появиться в «неконтролируемых полосах». Кроме того, локальные экстремумы в аппроксимируемых полосах должны соответствовать чередованиям ошибки. Покажите, что эти утверждения не верны в случае полосового фильтра. Более точно, опираясь на теорему о чередованиях, покажите, что
- локальные экстремумы функции $A_e(e^{j\omega})$ могут появляться не только в аппроксимируемых полосах;
 - локальные экстремумы не обязательно представляют чередование.

- 7.58. Довольно часто возникает необходимость преобразования исходного дискретного фильтра нижних частот в другой тип дискретного частотно-избирательного фильтра. В частности, при преобразовании непрерывного фильтра верхних частот или полосового фильтра в дискретный аналог импульсная инвариантность не годится. Традиционный выход из такой ситуации состоит в проектировании исходного дискретного фильтра нижних частот на основе импульсной инвариантности или дробно-линейного преобразования, который затем преобразуется в желаемый частотно-избирательный фильтр с помощью алгебраических операций.

Для иллюстрации этого метода предположим, что нам дана характеристическая функция $H_{lp}(Z)$ фильтра нижних частот и мы хотим преобразовать ее в новую характеристическую функцию $H(z)$, превращающуюся при ограничении на единичную окружность в КЧХ фильтра нижних частот, верхних частот, полосового или полосно-задерживающего. (Напомним, что переменная Z относится к исходному, а z — к преобразованному фильтру.) Затем мы задаем такое отображение Z -плоскости на z -плоскость

$$Z^{-1} = G(z^{-1}), \quad (7.132)$$

при котором выполнено соотношение:

$$H(z) = H_{lp}(Z) \Big|_{Z^{-1}=G(z^{-1})}. \quad (7.133)$$

Обратите внимание на то, что вместо зависимости Z от z в формуле (7.132) Z^{-1} выражена как функция переменной z^{-1} . Таким образом, при трансформировании $H_{lp}(Z)$ в $H(z)$ мы просто заменяем Z^{-1} в выражении, представляющем функцию $H_{lp}(Z)$, на $G(z^{-1})$. Это достаточно удобно, поскольку $H_{lp}(Z)$ естественно записывается как рациональная функция переменной Z^{-1} .

Если $H_{lp}(Z)$ — рациональная характеристическая функция детерминированной устойчивой системы, то естественно потребовать, чтобы преобразованная функция $H(z)$ была рациональной функцией переменной z^{-1} , причем соответствующая система являлась детерминированной и устойчивой. Такое требование дает следующие ограничения на преобразование $Z^{-1} = G(z^{-1})$:

- $G(z^{-1})$ — рациональная функция от z^{-1} ;
- преобразование должно переводить внутренность единичного круга Z -плоскости во внутренность единичного круга z -плоскости;
- единичная окружность Z -плоскости должна переходить в единичную окружность z -плоскости.

Далее описывается алгебраическое преобразование, необходимое для трансформации дискретного фильтра нижних частот в другой фильтр нижних частот с иной частотой отсечки или в дискретный фильтр верхних частот.

- а) Пусть θ и ω — частотные переменные (углы) на Z -плоскости и z -плоскости соответственно, т. е. единичные окружности на этих плоскостях описываются уравнениями $Z = e^{j\theta}$ и $z = e^{j\omega}$. Покажите, что свойство 3) выполнено, только если $G(z^{-1})$ — характеристическая функция всепропускающей системы, т. е.

$$|G(e^{-j\omega})| = 1. \quad (7.134)$$

- б) Можно доказать, что наиболее общая функция $G(z^{-1})$, удовлетворяющая перечисленным трем требованиям, имеет вид:

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k z^{-1}}. \quad (7.135)$$

Опираясь на наши исследования всепропускающих систем в главе 5, вы должны понять, что $G(z^{-1})$ из формулы (7.135) удовлетворяет ограничению (7.134), т. е. ее можно считать характеристической функцией какой-то всепропускающей системы, в связи с чем условие 3) выполнено. Из равенства (7.135) легко вытекает и свойство 1). Покажите, что оставшееся свойство выполнено тогда и только тогда, когда $|\alpha_k| < 1$.

- в) Чтобы из фильтра нижних частот с характеристической функцией $H_{lp}(Z)$ и частотой отсечки θ_p получить фильтр нижних частот с характеристической функцией $H(z)$ и частотой отсечки ω_p , можно использовать простое преобразование первого порядка. Покажите, что при некотором подходящем α преобразование

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$$

достигает поставленной цели. Выразите искомое α как функцию от θ_p и ω_p . Этот прием использован в задаче 7.45 для проектирования фильтра нижних частот с регулируемой частотой отсечки.

- г) Пусть частота отсечки исходного фильтра нижних частот равна $\theta_p = \pi/2$. Для каждого из перечисленных значений α найдите частоту отсечки ω_p преобразованного фильтра:

$$(i) \alpha = -0,2679; \quad (ii) \alpha = 0; \quad (iii) \alpha = 0,4142.$$

- д) Можно подобрать «всепропускающую» функцию $G(z^{-1})$, при которой исходный фильтр нижних частот преобразуется в дискретный фильтр верхних частот с частотой отсечки ω_p . Заметим, что такое преобразование должно действовать по правилу:

$$Z^{-1} = e^{j\theta_p} \mapsto z^{-1} = e^{j\omega_p} \quad \text{и} \quad Z^{-1} = 1 \mapsto z^{-1} = -1,$$

т. е. $\theta = 0$ должно переходить в $\omega = \pi$. Найдите подходящую функцию $G(z^{-1})$ и выразите α через θ_p и ω_p .

- е) Исходя из того же прототипа и значения α , найденного в п. «г» задачи, изобразите КЧХ фильтра верхних частот, полученного в результате преобразования п. «д».

Похожее, но более сложное преобразование можно использовать для преобразования фильтра нижних частот в полосовой или полосно-затыкающий фильтр. Подробности следует искать в [28].

ГЛАВА 8

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

8.1. Введение

Во главах 2 и 3 обсуждалось представление последовательностей и ЛС-систем в терминах преобразования Фурье и z -преобразования. Существует альтернативное представление конечных последовательностей, которое называется *дискретным преобразованием Фурье* (ДПФ). В отличие от дискретизированного по времени преобразования Фурье (ДВПФ), ДПФ является последовательностью, члены которой — суть равноотстоящие друг от друга отсчеты Фурье-образа сигнала. ДПФ играет центральную роль в реализации большого числа алгоритмов цифровой обработки сигналов, что обеспечивается эффективными методами его вычисления, которые подробно изучаются в главе 9. О приложениях ДПФ к спектральному анализу рассказывается в главе 10.

Хотя выводить и интерпретировать ДПФ можно различными способами, мы возьмем за основу наше представление о взаимосвязи конечных и периодических последовательностей, начав с представления периодических последовательностей в виде дискретных рядов Фурье (ДРФ). ДРФ важны и сами по себе, но особенно нас будет интересовать приложение их свойств к представлению конечных последовательностей. Возможность такого приложения рядов возникает в связи с тем, что конечную последовательность можно продолжить до периодической, из которой исходная последовательность восстанавливается как один период. По определению ДПФ конечной последовательности совпадает с коэффициентами ДРФ ее периодического продолжения. В связи с этим сначала мы дадим четкое определение ДРФ и изучим его свойства, а затем приложим результаты исследований к ДПФ конечных последовательностей. Такой подход подчеркивает периодичность ДПФ и дает уверенность, что она будет учтена в приложениях.

8.2. Представление периодических последовательностей: дискретные ряды Фурье

Рассмотрим N -периодическую последовательность¹ $\tilde{x}[n]$, т. е. $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + rN]$, для любых целых чисел n и r . Как и непрерывные периодические сигналы, та-

¹Здесь и далее значок (\sim) обозначает периодическую последовательность, когда важно подчеркнуть различие между периодическими и непериодическими последовательностями.

кие последовательности можно представлять рядом Фурье, состоящим из суммы гармонически связанных друг с другом комплексных экспоненциальных последовательностей, т. е. экспонент, частоты которых кратны основной частоте $(2\pi/N)$, ассоциированной с периодической последовательностью $\tilde{x}[n]$. Периодические комплексные экспоненты имеют вид:

$$e_k[n] = e^{j(2\pi/N)kn} = e_k[n + rN], \quad (8.1)$$

где k — целое число. При этом рядом Фурье называют сумму²

$$\tilde{x} = \frac{1}{N} \sum_k \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}. \quad (8.2)$$

Для представления непрерывного периодического сигнала в виде ряда Фурье нужно бесконечно много комплексных экспонент, а в ряде Фурье N -периодического дискретного сигнала участвует лишь N таких последовательностей. Действительно, гармонически связанные друг с другом комплексные экспоненты $e_k[n]$ из равенства (8.1) удовлетворяют тождествам: $e_0[n] = e_N[n]$, $e_1[n] = e_{1+N}[n]$ и т. д., поскольку для любых целых чисел k и ℓ имеют место равенства:

$$e_{k+\ell N}[n] = e^{j(2\pi/N)(k+\ell N)n} = e^{j(2\pi/N)kn} e^{j2\pi\ell n} = e^{j(2\pi/N)kn} = e_k[n]. \quad (8.3)$$

Следовательно, множество из N периодических комплексных экспонент $e_0[n], e_1[n], \dots, e_{N-1}[n]$ содержит все комплексные экспоненты, частоты которых кратны $(2\pi)/N$. Таким образом, ряд Фурье периодической последовательности $\tilde{x}[n]$ состоит из линейной комбинации N экспонент:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}. \quad (8.4)$$

Чтобы найти коэффициенты $\tilde{X}[k]$ ряда Фурье последовательности $\tilde{x}[n]$, нужно воспользоваться попарной ортогональностью комплексных экспонент. Умножив равенство (8.4) на $e^{-j(2\pi/N)rn}$ и просуммировав результат по n от 0 до $N-1$, получим

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)rn} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)(k-r)n}. \quad (8.5)$$

Поменяв порядок суммирования в правой части формулы (8.5), придем к выражению:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)rn} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} \right]. \quad (8.6)$$

Теперь нужно учесть ортогональность комплексных экспонент, которая означает, что

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} = \begin{cases} 1, & k - r = mN, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8.7)$$

(Доказательству этого несложного тождества посвящена задача 8.51.) Значит,

²Мультипликативная константа $1/N$, содержащаяся в формуле (8.2), вставлена для удобства. Ее можно также включить в определение $\tilde{X}[k]$.

формулу (8.6) можно записать более коротко:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)rn} = \tilde{X}[r]. \quad (8.8)$$

Таким образом, коэффициенты $\tilde{X}[k]$ ряда (8.4) получаются из последовательности $\tilde{x}[n]$ по следующей формуле:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn}. \quad (8.9)$$

Заметим, что последовательность $\tilde{X}[k]$ тоже N -периодична, так как для любого целого k

$$\tilde{X}[k+N] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)(k+N)n} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \right) e^{-j2\pi n} = \tilde{X}[k].$$

Коэффициенты ряда Фурье можно рассматривать как конечную последовательность с ненулевыми отсчетами при $k = 0, 1, \dots, (N-1)$, заданными формулой (8.9), или как бесконечную периодическую последовательность, отсчеты которой определяются той же формулой. Ясно, что обе точки зрения допустимы, поскольку для ряда Фурье нужны лишь члены $\tilde{X}[k]$ с номерами $k = 0, 1, \dots, (N-1)$, составляющими один период. Преимущество интерпретирования коэффициентов как бесконечной периодической последовательности состоит в том, что при такой точке зрения возникает некая двойственность во временном и частотном представлении периодических последовательностей. Формулы (8.4) и (8.9) составляют пару анализа–синтеза и называются представлением периодической последовательности в виде ДРФ. Для удобства эти формулы переписываются через комплексную величину

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)} \quad (8.10)$$

следующим образом:

$$\text{уравнение анализа: } \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}, \quad (8.11)$$

$$\text{уравнение синтеза: } \tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}. \quad (8.12)$$

Здесь как $\tilde{X}[k]$, так и $\tilde{x}[n]$ — периодические последовательности. Иногда, чтобы подчеркнуть, что $\tilde{X}[k]$ — коэффициенты ряда Фурье последовательности $\tilde{x}[n]$, мы будем использовать обозначение:

$$\tilde{x}[n] \xrightarrow{\mathcal{DFS}} \tilde{X}[k]. \quad (8.13)$$

Разберем несколько примеров, посвященных ДРФ.

Пример 8.1. ДРФ периодической цепочки импульсов

Рассмотрим периодическую цепочку импульсов

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] = \begin{cases} 1, & n = rN, r \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8.14)$$

Так как на отрезке $[0; N - 1]$ последовательности $\tilde{x}[n]$ и $\delta[n]$ совпадают, то коэффициенты ДРФ последовательности $\tilde{x}[n]$ согласно уравнению (8.11) равны

$$\tilde{X}[k] = \sum_{k=1}^{N-1} \delta[n] W_N^{kn} = W_N^0 = 1. \quad (8.15)$$

В этом случае $\tilde{X}[k]$ имеют одно и то же значение при всех k . Подставляя (8.15) в (8.12), получаем:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)kn}. \quad \square \quad (8.16)$$

Пример 8.1 дает полезное представление периодической цепочки импульсов в виде линейной комбинации комплексных экспонент с одним и тем же модулем и фазой, дающих в сумме единицу при $n = rN$ и нуль при остальных значениях n . Внимательно посмотрев на формулы (8.11) и (8.12), можно заметить, что они отличаются лишь множителем $\frac{1}{N}$ и знаком экспонент. Эта двойственность между периодической последовательностью $\tilde{x}[n]$ и коэффициентами $\tilde{X}[k]$ ее ДРФ иллюстрируется на следующем примере.

Пример 8.2. Двойственность в ДРФ

Теперь рассмотрим ДРФ, коэффициенты которого представляют собой периодическую цепочку импульсов: $\tilde{Y}[k] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} N\delta[k - rN]$. Подставляя $\tilde{Y}[k]$ в (8.12), находим

$\tilde{y}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} N\delta[k] W_N^{-kn} = W_N^{-0} = 1$. Здесь $\tilde{y}[n] = 1$ для всех n . Сравнивая этот результат с соотношением между $\tilde{x}[n]$ и $\tilde{X}[k]$ из предыдущего примера, легко увидеть, что $\tilde{Y}[k] = N\tilde{x}[k]$ и $\tilde{y}[n] = \tilde{X}[n]$. В подразделе 8.3.3 мы покажем, что этот пример — частный случай более общей двойственности. \square

Если последовательность $\tilde{x}[n]$ равна единице только над частью периода, мы тоже можем получить компактную формулу для коэффициентов ее ДРФ.

Пример 8.3. ДРФ периодической цепочки прямоугольных импульсов

Рассмотрим последовательность $\tilde{x}[n]$ с периодом $N = 10$, представленную на рис. 8.1.

По формуле (8.11) получаем³

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^4 W_{10}^{kn} = \sum_{n=0}^4 e^{-j(2\pi/10)kn}. \quad (8.17)$$

³Формально суммировать нужно до $N - 1 = 9$, но отсчеты последовательности с номерами от 5 до 9 равны нулю. Поэтому можно ограничиться суммой первых пяти ее членов. — Примеч. перев.

Перепишем эту сумму в компактном виде:

$$\tilde{X}[k] = \frac{1 - W_{10}^{5k}}{1 - W_{10}^k} = e^{-j(4\pi k/10)} \frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)}. \quad (8.18)$$

Модуль и фаза периодической последовательности $\tilde{X}[k]$ приведены на рис. 8.2. \square

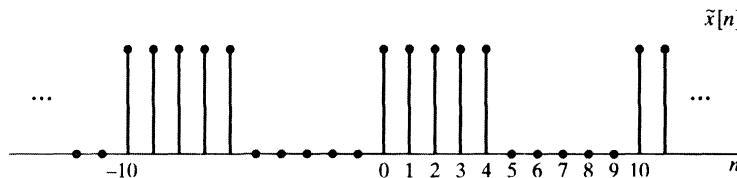


Рис. 8.1. Периодическая последовательность с периодом $N = 10$ из примера 8.3

Мы показали, что любую периодическую последовательность можно представить в виде линейной комбинации комплексных экспоненциальных последовательностей. Как мы увидим в дальнейшем, соотношения (8.11) и (8.12), связывающие последовательность и коэффициенты ее ряда Фурье, служат основой ДПФ, которое имеет дело с конечными последовательностями. Перед тем как непосредственно приступить к изучению ДПФ, нам необходимо разобрать несколько важных свойств ДРФ, после чего мы покажем, как их можно использовать для преобразования Фурье периодических сигналов.

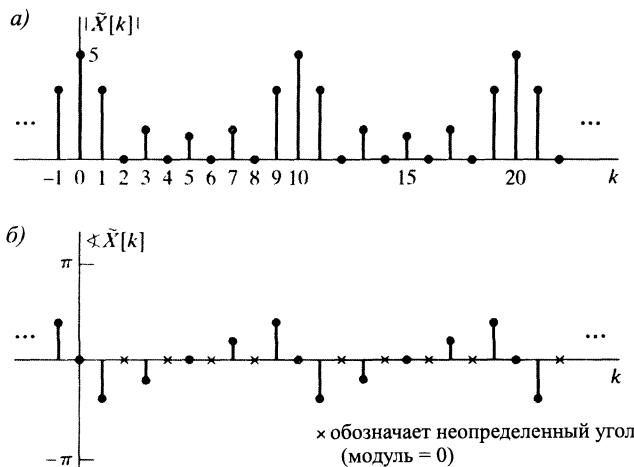


Рис. 8.2. Модуль и фаза коэффициентов ДРФ последовательности из рис. 8.1

8.3. Свойства дискретных рядов Фурье

Как и в случае рядов Фурье, преобразований Фурье и Лапласа непрерывных сигналов и z -преобразования дискретных апериодических последовательностей, определенные свойства ДРФ служат важным базисом приложения ДРФ к задачам обработки сигналов. Данный параграф как раз и посвящен этим замечательным свойствам.

тельным свойствам. Не удивительно, что многие из основных свойств ДРФ аналогичны свойствам преобразования Фурье и z -преобразования. Однако ввиду периодичности последовательностей $\tilde{x}[n]$ и $\tilde{X}[k]$ здесь есть и свои важные отличия. Более того, между временной и частотной областями в ДРФ существует четкая двойственность, в то время как ее нет ни в преобразовании Фурье, ни в z -преобразовании последовательностей.

8.3.1. Линейность

Пусть ДРФ периодических последовательностей $\tilde{x}_1[n]$ и $\tilde{x}_2[n]$ периода N имеют вид:

$$\tilde{x}_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \tilde{X}_1[k], \quad (8.19)$$

$$\tilde{x}_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \tilde{X}_2[k]. \quad (8.20)$$

Тогда

$$a\tilde{x}_1[n] + b\tilde{x}_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} a\tilde{X}_1[k] + b\tilde{X}_2[k]. \quad (8.21)$$

Это свойство, называемое *линейностью*, немедленно следует из формул (8.11) и (8.12).

8.3.2. Сдвиг последовательности

Если $\tilde{X}[k]$ — коэффициенты ДРФ периодической последовательности $\tilde{x}[n]$, то коэффициенты ДРФ сдвинутой последовательности $\tilde{x}[n - m]$ равны

$$\tilde{x}[n - m] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} W_N^{km} \tilde{X}[k]. \quad (8.22)$$

Доказательству этого свойства посвящена задача 8.52. Сдвиг последовательности во временной области, больший, чем на период (т. е. когда $m \geq N$), невозможно отличить от более короткого сдвига на $m_1 = m - m_2N$, где m_1 и m_2 — целые числа, причем $0 \leq m_1 \leq N - 1$. (Иначе это можно отметить, сказав, что $m_1 = m \pmod{N}$, или, что то же самое, что m_1 — остаток от деления m на N .) Легко показать, что при таком соотношении на числа m и m_1 имеет место равенство $W_N^{km} = W_N^{km_1}$, т. е. неопределенность сдвига во временной области сохраняется и в частотной, что и следовало ожидать.

Поскольку последовательность коэффициентов ряда Фурье периодической последовательности периодична, то аналогичный результат справедлив и для сдвига коэффициентов Фурье, а именно

$$W_N^{-n\ell} \tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \tilde{X}[k - \ell], \quad \ell \in \mathbb{Z}. \quad (8.23)$$

Обратите внимание на различие знаков в экспонентах из соотношений (8.22) и (8.23).

8.3.3. Двойственность

Благодаря тому что формула анализа в непрерывном случае практически тождественна формуле синтеза, между временной и частотной областями возникает двойственность. Однако при ДВПФ апериодических сигналов никакой двойственности возникнуть не может, поскольку эти сигналы и их Фурье-образы

имеют разную природу: апериодический сигнал — конечно, апериодическая последовательность, в то время как его Фурье-образ — периодическая функция непрерывной частотной переменной.

Формулы (8.11) и (8.12) свидетельствуют о том, что синтез и анализ ДРФ отличаются друг от друга только множителем $1/N$ и знаком экспоненты W_N . Более того, исходная последовательность и коэффициенты ее ДРФ относятся к одному типу — периодическим последовательностям. Конкретнее, учитывая множитель $1/N$ и знаки экспонент в (8.11) и (8.12), получаем:

$$N\tilde{x}[-n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{kn}, \quad (8.24)$$

или, меняя местами k и n ,

$$N\tilde{x}[-k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] W_N^{nk}. \quad (8.25)$$

Итак, мы видим, что равенство (8.25) очень похожа на формулу (8.11). Другими словами, $N\tilde{x}[-k]$ — коэффициенты ДРФ периодической последовательности $\tilde{X}[n]$, т. е., чтобы найти коэффициенты ДРФ последовательности $\tilde{X}[n]$, нужно обратить порядок исходной последовательности и умножить все ее члены на N .

Подведем итог нашим исследованием короткой формулировкой двойственности. Если

$$\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \tilde{X}[k], \quad (8.26)$$

то

$$\tilde{X}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} N\tilde{x}[-k]. \quad (8.27)$$

8.3.4. Симметричность

В § 2.9 мы убедились, что ДВПФ имеет несколько полезных свойств симметрии. Аналогичными свойствами наделены и ДРФ. Свойства симметрии ДРФ доказываются так же, как и соответствующие свойства преобразования Фурье апериодических последовательностей. Поэтому мы оставим доказательства читателю в качестве легкого упражнения (задача 8.53), сведя их формулировку в табл. 8.1 как свойства 9–17 (с. 557).

8.3.5. Периодическая свертка

Обозначим коэффициенты ДРФ N -периодических последовательностей $\tilde{x}_1[n]$ и $\tilde{x}_2[n]$ через $\tilde{X}_1[k]$ и $\tilde{X}_2[k]$ соответственно и определим новую последовательность

$$\tilde{X}_3[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]. \quad (8.28)$$

Тогда периодическая последовательность $\tilde{x}_3[n]$, коэффициенты ДРФ которой равны $\tilde{X}_3[k]$, вычисляется с помощью формулы:

$$\tilde{x}_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m]. \quad (8.29)$$

Напомним, что в предыдущих наших исследованиях различных преобразований произведения образов соответствовали свертке оригиналов. А поскольку сум-

ма (8.29) очень похожа на свертку, то сформулированное утверждение весьма правдоподобно. Действительно, как и в случае свертки, правая часть формулы (8.29) представляет собой сумму произведений отсчетов $\tilde{x}_1[n]$ на отсчеты последовательности, получающейся из $\tilde{x}_2[n-m]$ обращением во времени и сдвигом. Однако обе последовательности, участвующие в (8.29), N -периодичны а суммируются лишь произведения из одного периода. В связи с этим формула (8.29) называется *периодической сверткой*.

Как и обычная, периодическая свертка коммутативна, т. е.

$$\tilde{x}_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_2[m] \tilde{x}_1[n-m]. \quad (8.30)$$

Для доказательства теоремы о свертке применим формулу анализа ДРФ (8.11) к (8.29) и получим

$$\tilde{X}_3[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m] \right) W_N^{kn}. \quad (8.31)$$

Смена порядка суммирования в этой формуле дает соотношение:

$$\tilde{X}_3[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \left(\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_2[n-m] W_N^{kn} \right). \quad (8.32)$$

Внутренняя сумма по n есть нечто иное, как ДРФ сдвинутой последовательности $\tilde{x}_2[n-m]$. Поэтому, согласно свойству сдвига (подраздел 8.3.2), имеет место тождество:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_2[n-m] W_N^{kn} = W_N^{km} \tilde{X}_2[k],$$

что после подстановки в (8.32) приводит к равенству:

$$\tilde{X}_3[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] W_N^{km} \tilde{X}_2[k] = \left(\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] W_N^{km} \right) \tilde{X}_2[k] = \tilde{X}_1[k] \tilde{X}_2[k]. \quad (8.33)$$

Подводя итог вычислениям, можно записать, что

$$\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m] \xrightarrow{\mathcal{DF}} \tilde{X}_1[k] \tilde{X}_2[k]. \quad (8.34)$$

Таким образом, мы доказали, что периодическая свертка периодических последовательностей соответствует умножению последовательностей коэффициентов их ДРФ.

Так как периодическая свертка несколько отличается от свертки апериодических последовательностей, полезно рассмотреть механику ее вычисления. Прежде всего заметим, что периодическая свертка (8.29) имеет дело с произведениями последовательностей $\tilde{x}_1[m]$ и $\tilde{x}_2[n-m] = \tilde{x}_2[-(m-n)]$, рассматриваемыми как последовательности от m при фиксированном n , т. е. так же как и при свертке апериодических последовательностей, но с двумя особенностями:

- 1) суммирование происходит по конечному отрезку $m \in [0; N-1]$;
- 2) последовательность $\tilde{x}_2[n-m]$ продолжается по периодичности с отрезка $[0; N-1]$ на множество всех целых чисел.

Обратимся к примеру.

Пример 8.4. Периодическая свертка

Рассмотрим рис. 8.3, иллюстрирующий процедуру периодической свертки. На нем показаны последовательности $\tilde{x}_2[m]$, $\tilde{x}_1[m]$, $\tilde{x}_2[-m]$, $\tilde{x}_2[1-m] = \tilde{x}_2[-(m-1)]$ и $\tilde{x}_2[2-m] = \tilde{x}_2[-(m-2)]$. Например, для вычисления отсчета $\tilde{x}_3[2]$ по формуле (8.29) мы суммируем произведения $\tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[2-m]$ по m от 0 до $N-1$, в результате чего и получается $\tilde{x}_3[2]$. При изменении n последовательность $\tilde{x}_2[n-m]$ сдвигается, и процедура вычисления отсчетов периодической свертки повторяется. Заметим, что при сдвиге последовательности $\tilde{x}_2[n-m]$ вправо или влево ее отсчеты, выходящие за отрезок, ограниченный на рисунке штриховыми линиями, ввиду периодичности появляются на другом его конце. Кроме того, из-за периодичности результата свертки ее отсчеты достаточно вычислить для одного периода, например на отрезке $[0; N-1]$. \square

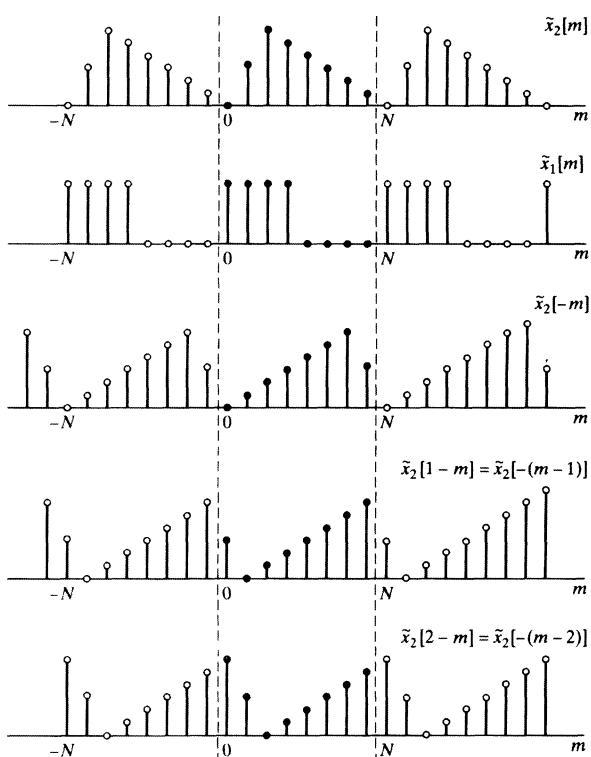


Рис. 8.3. Процедура вычисления периодической свертки

Теорема двойственности (подраздел 8.3.3) говорит о том, что при смене ролей времени и частоты мы получаем практически идентичные результаты. Иными словами, коэффициенты ДРФ произведения N -периодических последовательностей

$$\tilde{x}_3[n] = \tilde{x}_1[n]\tilde{x}_2[n] \quad (8.35)$$

вычисляются с помощью нормализованной периодической свертки:

$$\tilde{X}_3[k] = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell] \tilde{X}_2[k-\ell]. \quad (8.36)$$

Это утверждение можно легко проверить, подставив $\tilde{X}_3[k]$ из (8.36) в формулу (8.12), вычисляющую отсчеты $\tilde{x}_3[n]$ по коэффициентам ее ДРФ.

8.3.6. Обзор свойств представления периодических последовательностей дискретными рядами Фурье

Свойства ДРФ, которые обсуждались в этом параграфе, сведены в табл. 8.1

Таблица 8.1. Свойства ДРФ

<i>N</i> -периодическая последовательность	Коэффициенты ДРФ (период <i>N</i>)
1. $\tilde{x}[n]$	$\tilde{X}[k]$
2. $\tilde{x}_1[n], \tilde{x}_2[n]$	$\tilde{X}_1[k], \tilde{X}_2[k]$
3. $a\tilde{x}_1[n] + b\tilde{x}_2[n]$	$a\tilde{X}_1[k] + b\tilde{X}_2[k]$
4. $\tilde{X}[n]$	$N\tilde{x}[-k]$
5. $\tilde{x}[n - m]$	$W_N^{km}\tilde{X}[k]$
6. $W_N^{-\ell n}\tilde{x}[n]$	$\tilde{X}[k - \ell]$
7. $\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m]$ (периодическая свертка)	$\tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$
8. $\tilde{x}_1[n]\tilde{x}_2[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell]\tilde{X}_2[k-\ell]$
9. $\tilde{x}^*[n]$	$\tilde{X}^*[-k]$
10. $\tilde{x}^*[-n]$	$\tilde{X}^*[k]$
11. $\operatorname{Re}\{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_e[k] = \frac{1}{2}(\tilde{X}[k] + \tilde{X}^*[-k])$
12. $j \operatorname{Im}\{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_o[k] = \frac{1}{2}(\tilde{X}[k] - \tilde{X}^*[-k])$
13. $\tilde{x}_e[k] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] + \tilde{x}^*[-n])$	$\operatorname{Re}\{\tilde{X}[k]\}$
14. $\tilde{x}_o[k] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] - \tilde{x}^*[-n])$	$j \operatorname{Im}\{\tilde{X}[k]\}$
свойства 15–17 справедливы лишь для вещественных $x[n]$	
15. свойства симметрии для вещественной $\tilde{x}[n]$	$\begin{cases} \tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k] \\ \operatorname{Re}\{\tilde{X}[k]\} = \operatorname{Re}\{\tilde{X}[-k]\} \\ \operatorname{Im}\{\tilde{X}[k]\} = -\operatorname{Im}\{\tilde{X}[-k]\} \\ \tilde{X}[k] = \tilde{X}[-k] \\ \triangleleft\tilde{X}[k] = -\triangleleft\tilde{X}[-k] \end{cases}$
16. $\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] + \tilde{x}[-n])$	$\operatorname{Re}\{\tilde{X}[k]\}$
17. $\tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] - \tilde{x}[-n])$	$j \operatorname{Im}\{\tilde{X}[k]\}$

8.4. Преобразование Фурье периодических сигналов

Как отмечалось в § 2.8, для равномерной сходимости ДВПФ необходима абсолютная суммируемость соответствующей последовательности. А сходимость этого преобразования в среднеквадратичном обеспечивается ее суммируемостью

с квадратом. Периодическая последовательность не обладает ни одним из этих свойств, поскольку ее общий член не стремится к нулю (ввиду периодичности). Однако в том же параграфе мы объяснили, что Фурье-образом линейной комбинации комплексных экспонент можно считать цепочку импульсов (см. (2.149) на с. 62). Аналогичное определение работает и в случае любой периодической последовательности. А именно будем называть ДВПФ последовательности $x[n]$ цепочку импульсов в частотной области, значения которых пропорциональны коэффициентам ее ДРФ $\tilde{X}[k]$:

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right). \quad (8.37)$$

Заметим, что $\tilde{X}(e^{j\omega})$ — 2π -периодическая функция, что обеспечивается N -периодичностью последовательности $\tilde{X}[k]$ и расстоянием между соседними импульсами, равным $2\pi/N$ (N — целое). Покажем, что $\tilde{X}(e^{j\omega})$ действительно является ДВПФ последовательности $\tilde{x}[n]$, для чего применим к обеим частям равенства (8.37) обратное преобразование Фурье (2.128):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \tilde{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\omega n} d\omega, \quad (8.38)$$

где ε принадлежит интервалу $(0; 2\pi/N)$. Напомним, что при вычислении обратного преобразования Фурье интегрировать можно по любому отрезку длины 2π , поскольку подынтегральная функция $\tilde{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$ 2π -периодична. Пределы интегрирования в (8.38) равны $0-\varepsilon$ и $2\pi-\varepsilon$, т. е. область интегрирования начинается чуть раньше 0 и столько же не доходит до 2π . Указанные пределы взяты из тех соображений, чтобы в область интегрирования попал импульс в нуле, а импульс в $\omega = 2\pi$ никак не влиял на интеграл. Меняя местами операции интегрирования и суммирования, находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \tilde{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}[k] \int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\omega n} d\omega = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Последнее равенство справедливо ввиду соотношения, вытекающего из определения δ -функции:

$$\int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\omega n} d\omega = \begin{cases} e^{j(2\pi/N)kn}, & k \in [0; N-1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Итак, последняя часть формулы (8.39) в точности совпадает с уравнением синтеза ДРФ (8.12). Следовательно, обратное преобразование Фурье, примененное к цепочке импульсов (8.37), как и ожидалось, дает периодический сигнал $\tilde{x}[n]$.

Несмотря на то что ДВПФ периодической последовательности расходится с традиционной точкой зрения, введение импульсов¹ дает возможность формаль-

¹Обобщенных функций. — Примеч. перев.

ногого включения периодических сигналов в рамки Фурье-анализа. Этот же прием мы применяли для определения преобразования Фурье несуммируемых последовательностей, таких, например, как двусторонняя постоянная последовательность (пример 2.23) или экспоненциальная (пример 2.24). Хотя представление последовательности в виде ДРФ бывает достаточным для многих приложений, ДВПФ (8.37) иногда позволяет упростить выражения и их анализ.

Пример 8.5. Преобразование Фурье периодической цепочки импульсов

Рассмотрим периодическую цепочку импульсов

$$\tilde{p}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN], \quad (8.40)$$

совпадающую с последовательностью $\tilde{x}[n]$ из примера 8.1. Мы уже знаем, что

$$\tilde{P}[k] = 1, \quad \forall k. \quad (8.41)$$

Значит, ДВПФ последовательности $\tilde{p}[n]$ равно

$$\tilde{P}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right). \quad \square \quad (8.42)$$

Теперь, опираясь на этот результат, попытаемся как-то аналитически выразить связь конечной последовательности с ее периодическим продолжением. Рассмотрим свертку конечного сигнала $x[n]$, ненулевые отсчеты которого расположены на отрезке $[0; N - 1]$, с периодической цепочкой импульсов $\tilde{p}[n]$ из примера 8.5:

$$\tilde{x}[n] = x[n] * \tilde{p}[n] = x[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN]. \quad (8.43)$$

Итак, эта свертка дает периодическое продолжение конечного сигнала $x[n]$. На рис. 8.4 приведена графическая иллюстрация формулы (8.43). Если Фурье-образ последовательности $x[n]$ обозначить через $X(e^{j\omega})$, то ДВПФ ее периодического продолжения $\tilde{x}[n]$ вычисляется как произведение

$$\begin{aligned} \tilde{X}(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) \tilde{P}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} X(e^{j(2\pi/N)k}) \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right). \end{aligned} \quad (8.44)$$

Сравнивая формулы (8.44) и (8.37), приходим к выводу:

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j(2\pi/N)k}) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=(2\pi/N)k}. \quad (8.45)$$

Другими словами, периодическую последовательность $\tilde{X}[k]$ коэффициентов ДРФ из уравнения анализа (8.11) можно интерпретировать как равномерную дискретизацию ДВПФ конечной последовательности, совпадающей с одним периодом

последовательности $\tilde{x}[n]$:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8.46)$$

Эта формула согласуется и с рис. 8.4, из которого становится ясным, что последовательность $x[n]$ действительно восстанавливается по $\tilde{x}[n]$ с помощью формулы (8.46).

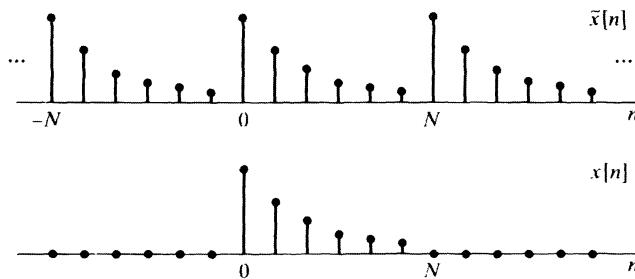


Рис. 8.4. Периодическое продолжение $\tilde{x}[n]$ конечной последовательности $x[n]$

Равенство (8.45) можно проверить и другим способом. Так как $x[n] = \tilde{x}[n]$ при $0 \leq n \leq N-1$, а при других значениях n ее отсчеты нулевые, то

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j\omega n}. \quad (8.47)$$

Сравнивая теперь (8.47) и (8.11), вновь получаем равенство

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi k/N}, \quad (8.48)$$

что соответствует дискретизации Фурье-образа с шагом $2\pi/N$.

Пример 8.6. Связь коэффициентов ДРФ с ДВПФ одного периода

Рассмотрим последовательность $\tilde{x}[n]$ из примера 8.3, отсчеты которой изображены на рис. 8.1. Один ее период представляет собой конечную последовательность

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8.49)$$

Фурье-образ одного периода последовательности $\tilde{x}[n]$ имеет вид

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^4 e^{-jn\omega} = e^{-j2\omega} \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}. \quad (8.50)$$

Согласно равенству (8.48), для вычисления коэффициентов ДРФ нам достаточно в равенство (8.50) подставить $\omega = 2\pi k/10$:

$$\tilde{X}[k] = e^{-j(4\pi k/10)} \frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)},$$

что совпадает с результатом (8.18).

Модуль и фаза функции $X(e^{j\omega})$ изображены на рис. 8.5. Заметим, что фаза терпит разрыв в тех частотах, при которых $X(e^{j\omega})$ обращается в нуль. Тот факт, что последовательности из рис. 8.2, а) и б) состоят из отсчетов функций из рис. 8.5, а) и б), отражен на рис. 8.6, где совмещены рис. 8.2 и 8.5. \square

Рис. 8.5. Модуль и фаза ДВПФ одного периода последовательности из рис. 8.1

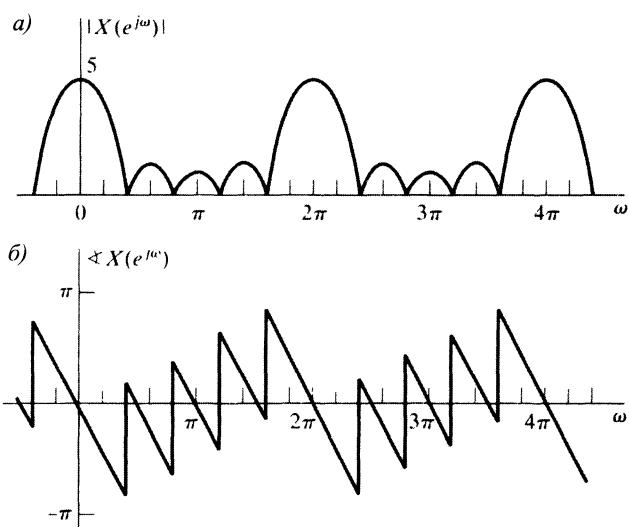
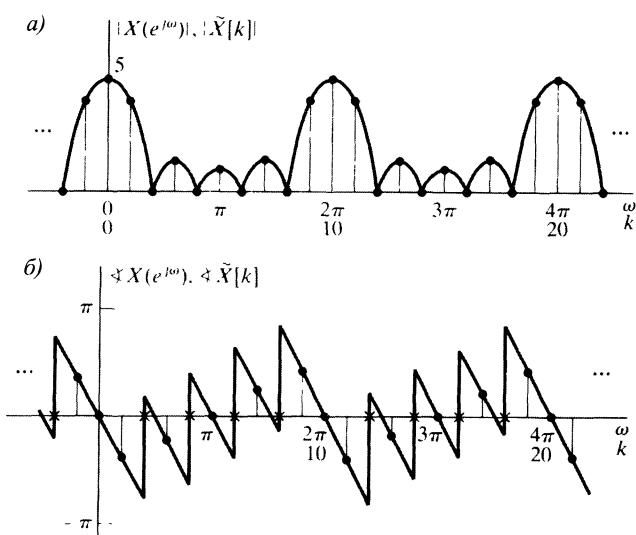


Рис. 8.6. Наложение рис. 8.2 и 8.5, иллюстрирующее коэффициенты ДРФ периодической последовательности как отсчеты ДВПФ одного периода



8.5. Дискретизация Фурье-образа

Обсудим связь между апериодическими последовательностями с Фурье-образом $X(e^{j\omega})$ и периодическими последовательностями, коэффициенты ДРФ которых

получаются в результате равномерной дискретизации функции $X(e^{j\omega})$ по частоте в более общей ситуации. Эта связь особенно важна для исследования дискретного преобразования Фурье и его свойств, в чем мы убедимся в этой главе.

Рассмотрим апериодическую последовательность $x[n]$ с Фурье-образом $X(e^{j\omega})$ и предположим, что последовательность $\tilde{X}[k]$ получается в результате дискретизации $X(e^{j\omega})$ в частотах $\omega_k = 2\pi k/N$, т. е.

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=(2\pi/N)k} = X(e^{j(2\pi/N)k}). \quad (8.51)$$

Так как Фурье-образ — 2π -периодическая функция, то период последовательности $\tilde{X}[k]$ будет равен N . С другой стороны, ДВПФ можно интерпретировать как ограничение z -преобразования последовательности на единичную окружность. Следовательно, $\tilde{X}[k]$ получается как ограничение z -преобразования $X(z)$ на вершины правильного N -угольника, вписанного в единичную окружность:

$$\tilde{X}[k] = X(z) \Big|_{z=e^{j(2\pi/N)k}} = X(e^{j(2\pi/N)k}). \quad (8.52)$$

Точки, где вычисляются отсчеты z -преобразования, отмечены на рис. 8.7, взглянув на который полностью проясняет причину периодичности последовательности $\tilde{X}[k]$. Действительно, точки, в которых производятся вычисления, обойдя полный круг, начнут повторяться, что и создаст эффект периодичности.

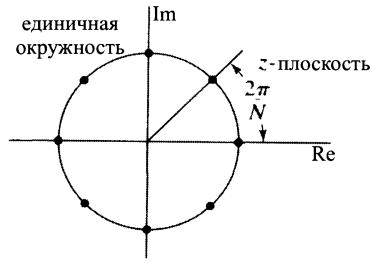


Рис. 8.7. Точки единичной окружности, в которых вычисляются отсчеты функции $X(z)$, формирующие периодическую последовательность $\tilde{X}[k]$ ($N = 8$)

Заметим, что последовательность отсчетов $\tilde{X}[k]$, будучи N -периодичной, может оказаться последовательностью коэффициентов ДРФ некоторой последовательности $\tilde{x}[n]$. Чтобы ее найти, достаточно подставить последовательность $\tilde{X}[k]$, полученную в результате дискретизации $X(z)$, в формулу (8.12):

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}. \quad (8.53)$$

Поскольку мы не делали никаких предположений о последовательности $x[n]$, кроме существования Фурье-образа, то

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m}. \quad (8.54)$$

Подставляя (8.54) в (8.51), а результат подстановки — в (8.53), получаем, что

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j(2\pi/N)km} \right] W_N^{-kn}. \quad (8.55)$$

После смены порядка суммирования эта формула приобретает вид:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(n-m)} \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \tilde{p}[n-m]. \quad (8.56)$$

Член формулы (8.56), заключенный в квадратные скобки, есть не что иное, как ДВПФ периодической цепочки импульсов из примеров 8.1 и 8.2, в чём легко



убедиться, воспользовавшись формулой (8.7) или (8.16). Действительно,

$$\tilde{x}[n-m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(n-m)} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-m-rN]. \quad (8.57)$$

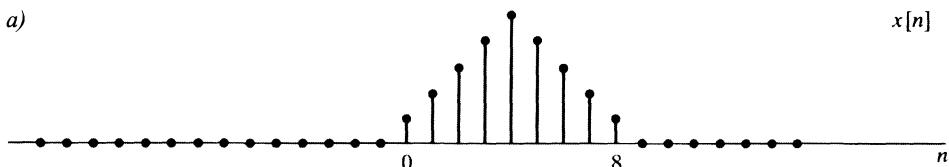
Следовательно,

$$\tilde{x}[n] = x[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-rN] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN], \quad (8.58)$$

где $*$ обозначает операцию свертки. Итак, $\tilde{x}[n]$ — свертка последовательности $x[n]$ с периодической цепочкой единичных импульсов. Таким образом, периодическая последовательность, соответствующая $\tilde{X}[k]$ — дискретизации функции $X(e^{j\omega})$, получается как бесконечная сумма сдвинутых копий $x[n]$. При этом сдвиги осуществляются на все (положительные и отрицательные) кратные числа N — периода последовательности $\tilde{X}[k]$. Эта конструкция иллюстрируется рис. 8.8, где длина последовательности $x[n]$ равна 9, а значение N из (8.58) — 12. В этой ситуации копии последовательности $x[n]$ не накладываются друг на друга, а в периоде последовательности $\tilde{x}[n]$ легко можно узнать исходную конечную последовательность. Это согласуется с началом § 8.4 и примером 8.6, где мы показали, что коэффициенты ДРФ периодической последовательности совпадают с отсчетами Фурье-образа одного ее периода. Основой рис. 8.9 служит та же последовательность $x[n]$, но с $N = 7$. Теперь сдвиги $x[n]$ накладываются, в результате чего период последовательности $\tilde{x}[n]$ уже не совпадает с $x[n]$. В обоих случаях, однако, формула (8.51) остается в силе, т. е. коэффициенты ДРФ последовательности $\tilde{x}[n]$ равны отсчетам Фурье-образа $x[n]$, вычисленным при частотах, отстоящих друг от друга на $2\pi/N$. Все это должно напоминать вам материал главы 4. Разница лишь в том, что здесь дискретизация происходит по частоте, а не по времени. Тем не менее основной принцип математических построений остается тем же самым.

Исходную последовательность $x[n]$ из рис. 8.8 можно восстановить, выделяя один период последовательности $\tilde{x}[n]$, а Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ восстанавливается по своим отсчетам, отстоящим друг от друга на $2\pi/12$. А вот последовательность $x[n]$ из рис. 8.9 восстановить по $\tilde{x}[n]$, как и функцию $X(e^{j\omega})$ по отсчетам, вычисленным через каждые $2\pi/7$, уже не удастся. Действительно, в случае, отображенном на рис. 8.8, ДВПФ последовательности $x[n]$ было дискретизовано с достаточно малым шагом (по частоте), при котором преобразование восстанавливается, в то время как рис. 8.9 показывает ситуацию, где Фурье-образ субдискретизован, т. е. частота выборки там была недостаточна для восстановления исходной функции. Взаимосвязь между исходной последовательностью $x[n]$ и одним периодом $\tilde{x}[n]$ можно представлять себе как некую форму наложения спектров во временной области, по существу идентичную ложным частотам в частотной области (см. главу 4), возникающим при субдискретизации во временной области. Очевидно, что наложения спектров во временной области можно избежать, только если последовательность $x[n]$ конечна, так же как при узкополосном сигнале в частотной области.

a)



б)

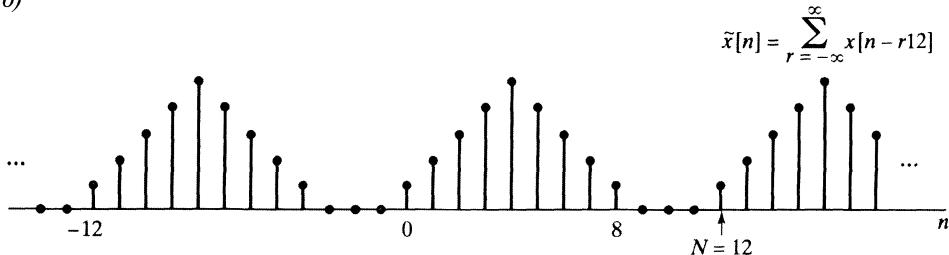


Рис. 8.8. а) конечная последовательность $x[n]$; б) периодическая последовательность $\tilde{x}[n]$, соответствующая дискретизации Фурье-образа $x[n]$ при $N = 12$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-r7]$$

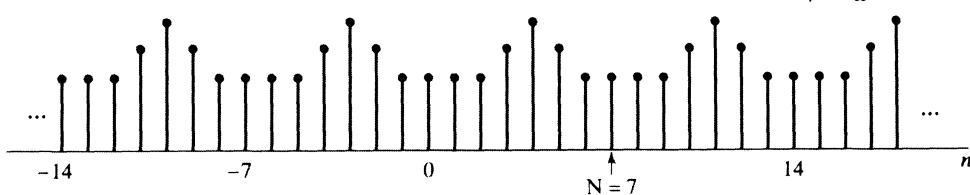


Рис. 8.9. Периодическая последовательность $\tilde{x}[n]$, соответствующая дискретизации Фурье-образа $x[n]$ из рис. 8.8, а) с $N = 7$

Мы затронули несколько важных моментов, которые будут играть центральную роль в оставшейся части главы. Мы увидели, что отсчеты ДВПФ апериодической последовательности $x[n]$ можно интерпретировать как коэффициенты ДРФ периодической последовательности $\tilde{x}[n]$, получающейся из исходной суммированием сдвинутых ее копий. Если $x[n]$ конечна и мы берем достаточно большое число (не меньше, чем длина $x[n]$) равноотстоящих друг от друга отсчетов ее Фурье-образа, то его можно восстановить из последовательности отсчетов, а члены $x[n]$ определяются по соответствующей периодической последовательности $\tilde{x}[n]$ с помощью формулы:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8.59)$$

Существует интерполяционная формула, восстанавливающая функцию $X(e^{j\omega})$ по ее дискретизации $\tilde{X}[k]$ (см. задачу 8.54). Однако основной вывод, вытекающий из наших рассуждений, заключается в том, что для представления или восстановления конечной последовательности $x[n]$ совсем необязательно знать

значения $X(e^{j\omega})$ при всех частотах. Имея конечную последовательность $x[n]$, по формуле (8.58) можно построить периодическую последовательность $\tilde{x}[n]$, которая, в свою очередь, представляется ДРФ. С другой стороны, по последовательности $\tilde{X}[k]$ коэффициентов ДРФ можно найти $\tilde{x}[n]$ и, применив к ней формулу (8.59), получить $x[n]$. Представление конечной последовательности в виде ряда Фурье называется *дискретным преобразованием Фурье* (ДПФ). При исследовании и приложениях ДПФ важно помнить о том, что представление ДВПФ через отсчеты Фурье-образа является аналогом представления конечной последовательности периодической.

8.6. Представление Фурье конечных последовательностей: дискретное преобразование Фурье

Здесь мы формализуем понятие, о котором шла речь в конце предыдущего параграфа. Начнем с рассмотрения конечной последовательности $x[n]$, чьи отсчеты равны нулю, при $n \notin [0; N - 1]$. Во многих случаях нам хотелось бы считать, что длина последовательности равна именно N , даже если в действительности количество ее ненулевых членов M меньше N . Но формально увеличить длину последовательности легко, продолжив ее нулем, что мы и будем делать при необходимости. С каждой N -членной последовательностью можно связать периодическую последовательность

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN], \quad (8.60)$$

из которой исходная восстанавливается по правилу:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8.61)$$

Напомним (см. § 8.5), что коэффициенты ДРФ последовательности $\tilde{x}[n]$ интерпретируются как отсчеты (отстоящие друг от друга на $2\pi/N$) Фурье-образа последовательности $x[n]$. Так как $x[n]$ конечна (число ее членов — N), то ее сдвиги $x[n - rN]$ при разных r не перекрываются. Поэтому формулу (8.60) можно переписать как

$$\tilde{x}[n] = x[n \pmod N]. \quad (8.62)$$

Для сокращения записи вместо $n \pmod N$ мы будем использовать обозначение $((n))_N$, при котором выражение (8.62) приобретает вид:

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N]. \quad (8.63)$$

Заметим, что формулы (8.63) и (8.60) эквиваленты тогда и только тогда, когда длина последовательности $x[n]$ меньше или равна N . Выделяя один период периодического продолжения $\tilde{x}[n]$ конечной последовательности $x[n]$ (см. формулу (8.61)), можно восстановить исходную последовательность.

Один неформальный, но полезный способ восприятия формулы (8.62) состоит в том, чтобы отметить отсчеты конечной последовательности $x[n]$ в верши-

нах правильного многоугольника, вписанного в окружность, а затем, двигаясь вдоль окружности, считывать отсчеты последовательности $\tilde{x}[n]$. Пройдя полный круг, мы получим все отсчеты исходной последовательности, после чего начнется периодическое повторение. При такой интерпретации периодического продолжения для восстановления конечной последовательности по формуле (8.61) достаточно разрезать окружность и расправить ее.

Как было установлено в § 8.2, последовательность $\tilde{X}[k]$ коэффициентов ДРФ последовательности $\tilde{x}[n]$ сама является N -периодической. Для сохранения двойственности между временной и частотной областями, мы выберем лишь конечное число коэффициентов ряда Фурье, ассоциированного с конечной последовательностью, соответствующих одному периоду $\tilde{X}[k]$. Получившуюся при этом конечную последовательность $X[k]$ будем называть ДПФ. Таким образом, ДПФ $X[k]$ связано с коэффициентами ДРФ $\tilde{X}[k]$ по формулам:

$$X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k], & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (8.64)$$

$$\tilde{X}[k] = X[k \pmod N] = X[((k))_N]. \quad (8.65)$$

С другой стороны, согласно § 8.2,

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}, \quad (8.66)$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}. \quad (8.67)$$

Поскольку суммирование в (8.66) и (8.67) происходит по отрезку $[0; N-1]$, то формулы (8.61)–(8.67) влекут соотношения:

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (8.68)$$

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8.69)$$

Итак, формулы анализа и синтеза ДПФ выглядят следующим образом:

$$\text{формула анализа:} \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad (8.70)$$

$$\text{формула синтеза:} \quad x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}. \quad (8.71)$$

Здесь подразумевается, что последовательности $X[k]$ и $x[n]$ равны нулю вне отрезка $[0; N-1]$, но явно не указывается. Тот факт, что последовательности $x[n]$ и $X[k]$ связаны ДПФ (8.70) и (8.71), иногда обозначают как

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X[k]. \quad (8.72)$$

Трансформировав формулы (8.11) и (8.12) в соотношения (8.70) и (8.71) для конечных последовательностей, мы никак не повлияли на периодичность. Как и коэффициенты ДРФ, ДПФ $X[k]$ совпадает с дискретизацией по частоте 2π -периодического Фурье-образа $X(e^{j\omega})$, а если правую часть формулы (8.71) вычислять для чисел n , лежащих вне отрезка $[0; N - 1]$, то результат окажется ненулевым, но совпадет с соответствующими отсчетами периодического продолжения последовательности $x[n]$. Таким образом, периодичность присутствует и в ДПФ. Иногда это свойство создает дополнительные трудности, а иногда оказывается полезным, но игнорировать периодичность нельзя. При определении ДПФ мы просто «объявили», что нас интересуют значения $x[n]$ только над отрезком $[0; N - 1]$ (поскольку ее отсчеты вне этого отрезка в действительности равны нулю) и члены последовательности $X[k]$ при $k \in [0; N - 1]$, поскольку именно они участвуют в формуле (8.71).

Пример 8.7. ДПФ прямоугольного импульса

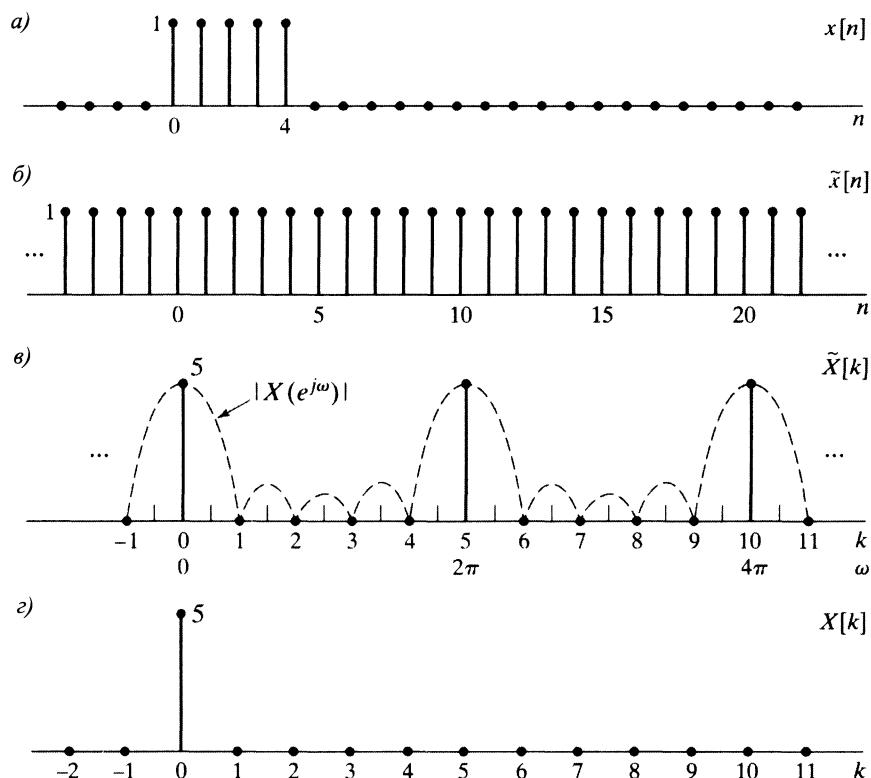


Рис. 8.10. Иллюстрация ДПФ: а) конечная последовательность $x[n]$; б) периодическое продолжение последовательности $x[n]$ с периодом $N = 5$; в) коэффициенты $\tilde{X}[k]$ ДРФ последовательности $\tilde{x}[n]$ и график модуля Фурье-образа $|X(e^{j\omega})|$; г) ДПФ от $x[n]$

Рассмотрим последовательность $x[n]$, изображенную на рис. 8.10, а). При вычислении ДПФ $x[n]$ можно считать конечной последовательностью, длина которой не меньше

$N = 5$. Будем предполагать, что ее длина равна 5. Периодическая последовательность $\tilde{x}[n]$, чьи коэффициенты ДРФ соответствуют ДПФ последовательности $x[n]$, показана на рис. 8.10, б). Поскольку ее отсчеты постоянны над отрезком $[0; 4]$, то

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^4 e^{-j(2\pi k/5)n} = \frac{1 - e^{j2\pi k}}{1 - e^{-j(2\pi k/5)}} = \begin{cases} 5, & k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (8.73)$$

т. е. коэффициенты ДРФ $\tilde{X}[k]$ отличны от нуля только при k , кратных 5 (причем все не-нулевые коэффициенты равны между собой). Члены последовательности $\tilde{X}[k]$ показаны на рис. 8.10, в). Там же присутствует график модуля Фурье-образа $|X(e^{j\omega})|$. Ясно, что $\tilde{X}[k]$ — последовательность отсчетов функции $X(e^{j\omega})$, вычисленных при $\omega_k = 2\pi k/5$. Согласно (8.64), пятиточечное ДПФ последовательности $x[n]$ соответствует пятичленной последовательности, полученной из периодической последовательности $\tilde{X}[k]$ выделением одного периода. График этого ДПФ изображен на рис. 8.10, г).

Если теперь вместо $N = 5$ взять $N = 10$ и продолжить $x[n]$ по периодичности, то получим периодическую последовательность, изображенную на рис. 8.11, б). Она совпадает с последовательностью из примера 8.3. Следовательно, коэффициенты ее ДРФ будут такими, как на рис. 8.2 и 8.6. Десятическое ДПФ $X[k]$ показано на рис. 8.11, в), а один период коэффициентов $\tilde{X}[k]$ представлен на рис. 8.11, г).

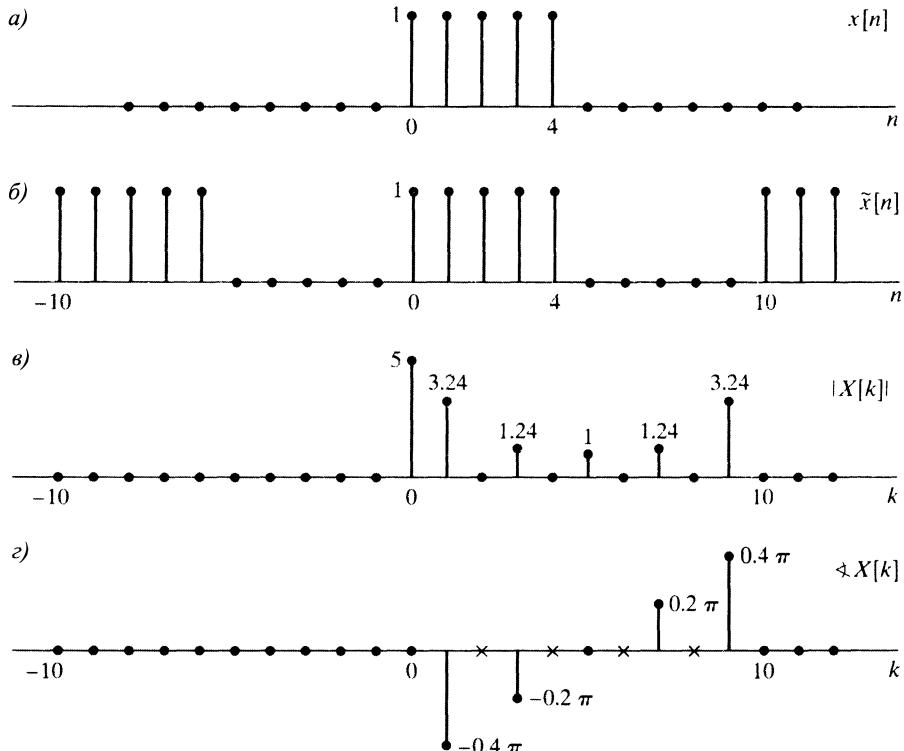


Рис. 8.11. Иллюстрация ДПФ: а) конечная последовательность $x[n]$; б) периодическое продолжение последовательности $x[n]$ с периодом $N = 10$; в) модуль ДПФ; г) фаза ДПФ (крестиками обозначены точки, в которых фаза неопределена)

Может показаться, что между конечной последовательностью $x[n]$ и ее периодическим продолжением $\tilde{x}[n]$, связанными формулами (8.59) и (8.63), практически нет никаких различий, поскольку одна по другой восстанавливается очень легко. Однако разница есть, причем особенно сильно она проявляется в свойствах ДПФ, что станет понятным из следующего параграфа.

8.7. Свойства дискретного преобразования Фурье

В этом параграфе исследуются некоторые свойства ДПФ конечных последовательностей. Порядок изучения, как и приемы исследований, будет полностью параллелен § 8.3, однако здесь особое внимание уделено взаимодействию конечности последовательностей и скрытой периодичности их ДПФ.

8.7.1. Линейность

Если конечная последовательность $x_3[n]$ является линейной комбинацией $x_1[n]$ и $x_2[n]$, т. е.

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n], \quad (8.74)$$

то ее ДПФ равно линейной комбинации соответствующих ДПФ:

$$X_3[n] = aX_1[k] + bX_2[k]. \quad (8.75)$$

Ясно, что если N_1 — количество ненулевых членов последовательности $x_1[n]$, а N_2 — длина последовательности $x_2[n]$, то длина их линейной комбинации равна $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$. Таким образом, формула (8.75) будет корректна, только если оба ДПФ в ее правой части вычисляются с одним и тем же параметром $N \geq N_3$. Когда, например, $N_1 < N_2$, то $X_1[k]$ в формуле (8.75) — ДПФ последовательности $x_1[n]$, продолженной нулем до формальной длины N_2 . Поэтому N_2 члена ДПФ последовательности $x_1[n]$ имеют вид:

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^{N_1-1} x_1[n]W_{N_2}^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N_2 - 1, \quad (8.76)$$

а N_2 члена ДПФ последовательности $x_2[n]$ —

$$X_2[k] = \sum_{n=0}^{N_2-1} x_2[n]W_{N_2}^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N_2 - 1. \quad (8.77)$$

Подводя итог, можно сформулировать свойство линейности в более компактном виде: если

$$x_1[n] \xrightarrow{\mathcal{DFT}} X_1[k], \quad (8.78)$$

$$x_2[n] \xrightarrow{\mathcal{DFT}} X_2[k], \quad (8.79)$$

то

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{\mathcal{DFT}} X_3[n] = aX_1[k] + bX_2[k], \quad (8.80)$$

где длины последовательностей и их ДПФ считаются равными максимальной из длин последовательностей $x_i[n]$. Конечно, ДПФ большей длины можно вычислять, продолжая последовательность нулем до необходимого числа членов.

8.7.2. Циклический сдвиг последовательности

В подразделе 2.10.2 было доказано (см. свойство 2 табл. 2.2), что если $X(e^{j\omega})$ — Фурье-образ сдвинутой последовательности $x[n]$, то ДВПФ последовательности $x[n - m]$ равно $e^{-j\omega m}X(e^{j\omega})$. Иными словами, сдвиг во временной области на m членов (положительное m соответствует задержке во времени, а отрицательное — опережению) в частотной области проявляется как умножение Фурье-образа на линейно-фазовый множитель $e^{-j\omega m}$. В подразделе 8.3.2 обсуждалось аналогичное свойство коэффициентов ДРФ: если $\tilde{X}[k]$ — коэффициенты ДРФ последовательности $\tilde{x}[n]$, то коэффициентами ДРФ последовательности $\tilde{x}[n - m]$ будут $e^{-j(2\pi k/N)m}\tilde{X}[k]$. Теперь нам хотелось бы найти операцию во временной области, соответствующую умножению ДПФ конечной последовательности $x[n]$ на линейно-фазовый множитель $e^{-j(2\pi k/N)m}$.

Итак, пусть

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X[k] \quad (8.81)$$

и

$$x_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X_1[k] = e^{-j(2\pi k/N)m}X[k]. \quad (8.82)$$

Найдем последовательность $x_1[n]$. Так как N -членное ДПФ представляет последовательность формальной длины N , то как $x[n]$, так и $x_1[n]$ должен быть равен нулю вне отрезка $[0; N - 1]$. Поэтому $x_1[n]$ не может получаться из исходной простым сдвигом. Правильный ответ непосредственно следует из результата подраздела 8.3.2 и интерпретации ДПФ как коэффициентов ДРФ периодической последовательности $x[((n))_N]$. В частности, из формул (8.62) и (8.65) вытекает, что

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \tilde{X}[k] = X[((k))_N]. \quad (8.83)$$

Аналогично, мы можем определить $\tilde{x}_1[n]$ так, чтобы

$$\tilde{x}_1[n] = x_1[((n))_N] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \tilde{X}_1[k] = X_1[((k))_N]. \quad (8.84)$$

По условию задачи

$$X_1[k] = e^{-j(2\pi k/N)m}X[k]. \quad (8.85)$$

Следовательно, коэффициенты ДРФ последовательности $\tilde{x}_1[n]$ выглядят как

$$\tilde{X}_1[k] = e^{-j(2\pi((k))_N/N)m}X[((k))_N]. \quad (8.86)$$

Заметим, что

$$e^{-j[2\pi((k))_N/N)m} = e^{-j(2\pi k/N)m}. \quad (8.87)$$

То есть, так как $e^{-j(2\pi k/N)m}$ — N -периодическая последовательность как по k , так и по m , мы можем опустить обозначение $((k))_N$. Значит, соотношение (8.86) дает равенство:

$$\tilde{X}_1[k] = e^{-j(2\pi k/N)m}\tilde{X}[k], \quad (8.88)$$

откуда благодаря свойству сдвига (подраздел 8.3.2) можно сделать вывод:

$$\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n - m] = x[((n - m))_N]. \quad (8.89)$$

Итак, конечная последовательность $x_1[n]$, чье ДПФ приведено в (8.85), имеет

вид:

$$x_1[n] = \begin{cases} \tilde{x}_1[n] = x[((n-m))_N], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8.90)$$

Последнее соотношение подсказывает нам способ построения $x_1[n]$.

Пример 8.8. Циклический сдвиг последовательности

Процедура циклического сдвига иллюстрируется рис. 8.12 для случая $m = -2$. Там показано, как можно построить последовательность $x_1[n] = x[((n+2))_N]$ при $N = 6$. Как мы уже доказали, ее ДПФ равно $X_1[k] = W_6^{-2k} X[k]$. План построения заключается в следующем. Сначала по последовательности $x[n]$ мы строим периодическую последовательность $\tilde{x}[n] = x[((n)_6)]$, как показано на рис. 8.12, б). Затем, руководствуясь формулой (8.89), построенную периодическую последовательность $\tilde{x}[n]$ нужно сдвинуть на два отсчета влево и получить последовательность $\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n+2]$, которая изображена на рис. 8.12, в). Наконец, используя равенство (8.90), мы выделяем первый период последовательности $\tilde{x}_1[n]$ и получаем $x_1[n]$ (см. рис. 8.12, г)).

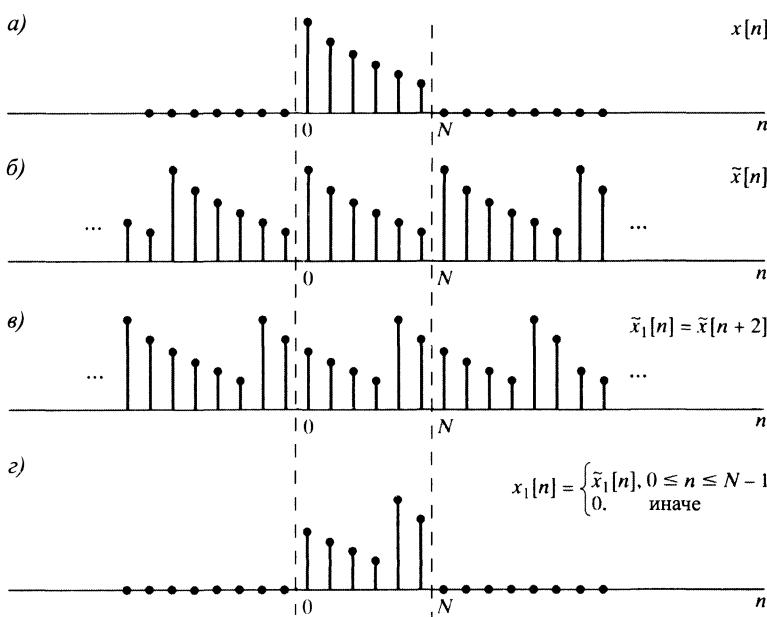


Рис. 8.12. Циклический сдвиг конечной последовательности, т.е. проявление во временной области умножения ДПФ на линейно-фазовый множитель

Сравнивая рис. 8.12, а) и б), легко убедиться в том, что последовательность $x_1[n]$ нельзя получить *линейным сдвигом* последовательности $x[n]$, поскольку обе эти последовательности заданы на отрезке $[0; N-1]$. Сдвиг происходит, но не линейный! Элементы сдвигаемой последовательности $x[n]$, выходя из отрезка через один его конец, переходят в этот же отрезок, но с другого конца. Такое преобразование конечной последовательности называют *циклическим сдвигом*. Другой любопытный факт, который можно обнаружить, рассматривая рис. 8.12, состоит в том, что последовательность $x_2[n] = x[((n-4))_6]$, получающаяся из исходной правым сдвигом на 4 отсчета

по модулю 6, совпадает с последовательностью $x_1[n]$. С точки зрения ДПФ этот удивительный факт объясняется тождеством $W_6^{4k} = W_6^{-2k}$ или, в более общей форме, $W_N^{mk} = W_N^{-(N-m)k}$. Благодаря тождеству можно заключить, что циклический сдвиг N -членной последовательности на m отсчетов совпадает с циклическим сдвигом той же последовательности на $N - m$ отсчетов, но в другом направлении. \square

В параграфе 8.6 (с. 566) было рассказано о наглядном способе построения периодического продолжения $\tilde{x}[n]$ конечной последовательности $x[n]$, заключающемся в том, что отсчеты $x[n]$ изображаются в вершинах правильного N -угольника, а затем считаются в процессе движения по кругу. При такой интерпретации линейный сдвиг последовательности $\tilde{x}[n]$ соответствует повороту многоугольника относительно его центра. Напомним, что в контексте конечных последовательностей и их ДПФ такой сдвиг называют *циклическим сдвигом* последовательности на отрезке $[0; N - 1]$.

Итак, при циклическом сдвиге конечной последовательности ее ДПФ меняется по правилу:

$$x[((n - m))_N], \quad (0 \leq n \leq N - 1) \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} e^{-j(2\pi k/N)m} X[k]. \quad (8.91)$$

8.7.3. Двойственность

Поскольку ДПФ тесно связано с коэффициентами ДРФ, естественно ожидать, что оно наследует свойство двойственности коэффициентов ДРФ, которое мы обсуждали в подразделе 8.3.3. Действительно, сравнение формул анализа (8.70) и синтеза (8.71) говорит о том, что они отличаются друг от друга только множителем $1/N$ и знаком показателя экспоненты W_N .

Двойственность ДПФ можно вывести, опираясь на зависимость между ДПФ и ДРФ, как это было сделано в предыдущем подразделе. Рассмотрим периодические продолжения конечной последовательности $x[n]$ и ее ДПФ $X[k]$:

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N], \quad (8.92)$$

$$\tilde{X}[k] = X[((k))_N]. \quad (8.93)$$

Тогда, по определению ДПФ, имеет место соотношение:

$$\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \tilde{X}[k]. \quad (8.94)$$

Ввиду двойственности ДРФ (см. (8.26), (8.27)) имеем:

$$\tilde{X}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} N\tilde{x}[-k]. \quad (8.95)$$

Определив новую периодическую последовательность равенством $\tilde{x}_1[n] = \tilde{X}[n]$, период которой совпадает с конечной последовательностью $x_1[n] = X[n]$, мы получим, что коэффициенты ее ДРФ равны $N\tilde{x}[-k]$. Следовательно, ДПФ последовательности $x_1[n]$ имеет вид:

$$X_1[k] = \begin{cases} N\tilde{x}[-k], & 0 \leq k \leq N - 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (8.96)$$

или, в эквивалентной записи,

$$X_1[k] = \begin{cases} Nx[((-k))_N], & 0 \leq k \leq N - 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8.97)$$

Значит, двойственность ДПФ можно сформулировать следующим образом: если

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X[k], \quad (8.98)$$

то

$$X[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} Nx[(-k)]_N, \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (8.99)$$

Последовательность $Nx[(-k)]_N$ получается из $Nx[k]$ обращением знаков у индексов по модулю N . Как и циклический сдвиг, это обращение лучше всего представлять себе в терминах подлежащей периодической последовательности.

Пример 8.9. Двойственность ДПФ

Для иллюстрации двойственности рассмотрим последовательность $x[n]$ из примера 8.7, которая изображена на рис. 8.13, а). Вещественная и мнимая части ее 10-точечного ДПФ $X[k]$ показаны на рис. 8.13, б) и в). Обозначив теперь горизонтальную ось на этих рисунках символом n (вместо k), мы получим комплексную последовательность $x_1[n] = X[n]$ (рис. 8.13, г) и д)). Согласно двойственности, формулы (8.98) и (8.99), 10-точечное ДПФ (комплекснозначной) последовательности $X[n]$ совпадает с последовательностью, приведенной на рис. 8.13, е). \square

8.7.4. Симметричность

Так как ДПФ последовательности $x[n]$ совпадает с коэффициентами ДРФ ее периодического продолжения $\tilde{x}[(n)]_N$, свойства симметрии ДПФ можно вывести из аналогичных свойств ДРФ, сведенных в табл. 8.1 на с. 557. Учитывая формулы (8.92) и (8.93) вместе со свойствами 9 и 10 из табл. 8.1, получаем:

$$x^*[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X^*[(-n)]_N, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (8.100)$$

и

$$x^*[(-n)]_N \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X^*[n], \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (8.101)$$

Свойства 11–14 табл. 8.1 называют разложением периодической последовательности в сумму сопряженно-симметричной и сопряженно-антисимметричной последовательностей. Они подсказывают разложение конечной последовательности $x[n]$ на две последовательности длины N , соответствующие периоду сопряженно-симметричной и сопряженно-антисимметричной компонент $\tilde{x}[n]$. Обозначим эти компоненты конечной последовательности через $x_{\text{ep}}[n]$ и $x_{\text{op}}[n]$. Более точно, если сопряженно-симметричная и сопряженно-антисимметричная части последовательности

$$\tilde{x}[n] = x[(n)]_N \quad (8.102)$$

определяются как

$$\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] + \tilde{x}^*[-n]), \quad (8.103)$$

$$\tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] - \tilde{x}^*[-n]), \quad (8.104)$$

то положим

$$x_{\text{ep}}[n] = x_e[n], \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (8.105)$$

$$x_{\text{op}}[n] = \tilde{x}_o[n], \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (8.106)$$

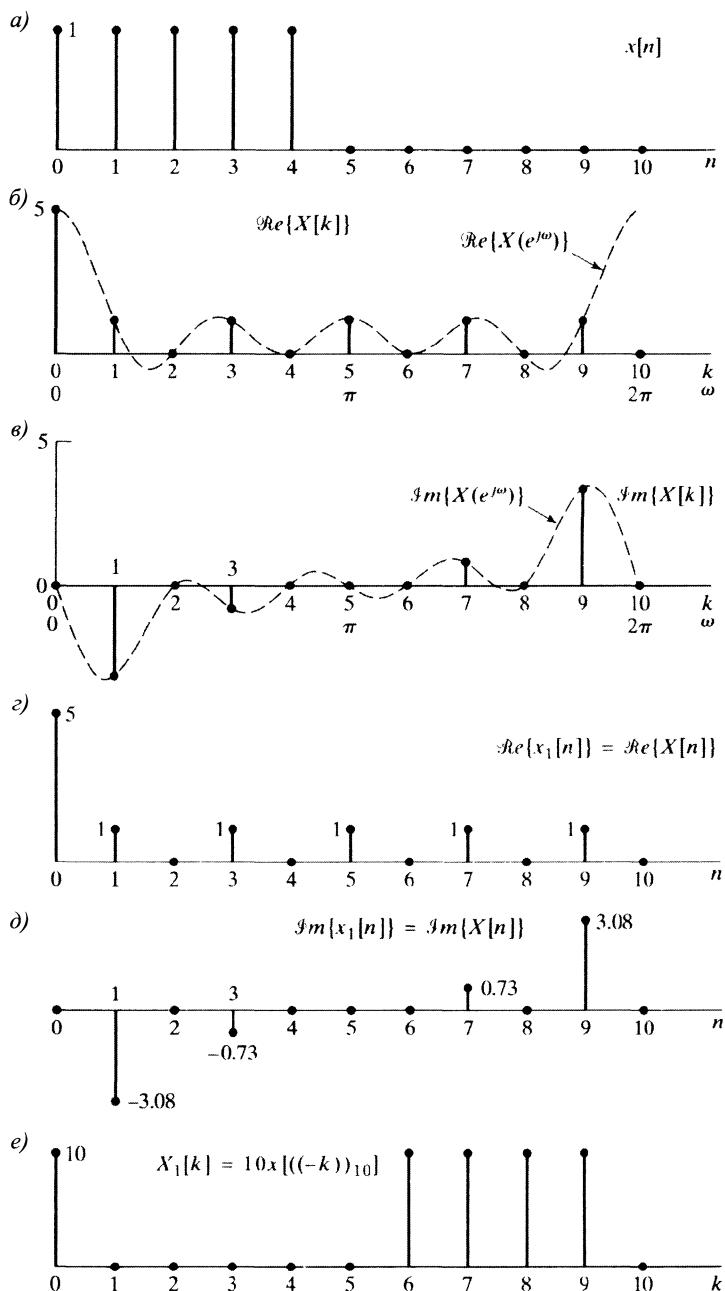


Рис. 8.13. Иллюстрация двойственности: а) вещественная конечная последовательность $x[n]$; б) вещественная часть ее ДПФ; в) мнимая часть ДПФ; г) вещественная часть двойственной последовательности $x_1[n] = X[n]$; д) мнимая часть двойственной последовательности; е) ДПФ последовательности $x_1[n]$

что эквивалентно

$$x_{\text{ep}}[n] = \frac{1}{2}(x[((n))_N] + x^*[((-n))_N]), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (8.107)$$

$$x_{\text{op}}[n] = \frac{1}{2}(x[((n))_N] - x^*[((-n))_N]), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (8.108)$$

где $x_{\text{ep}}[n]$ и $x_{\text{op}}[n]$ — конечные последовательности, т. е. их члены равны нулю вне отрезка $[0; N-1]$. Так как $((-n))_N = (N-n)$ и $((n))_N = n$ при $0 \leq n \leq N-1$, мы можем переписать последние формулы в следующем виде:

$$x_{\text{ep}}[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[N-n]), \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (8.109)$$

$$x_{\text{ep}}[0] = \operatorname{Re}\{x[0]\}, \quad (8.110)$$

$$x_{\text{op}}[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[N-n]), \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (8.111)$$

$$x_{\text{op}}[0] = j \operatorname{Im}\{x[0]\}. \quad (8.112)$$

Последняя форма записи свойств симметрии, конечно, более удобна, поскольку там нет необходимости вычислений по модулю N .

Ясно, что $x_{\text{ep}}[n]$ и $x_{\text{op}}[n]$ отличаются от последовательностей $x_e[n]$ и $x_o[n]$, определенных формулами (2.151) и (2.152). Однако можно показать (см. задачу 8.56), что

$$x_{\text{ep}}[n] = x_e[n] + x_e[n-N], \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (8.113)$$

$$x_{\text{op}}[n] = x_o[n] + x_o[n-N], \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (8.114)$$

Иначе говоря, компоненты $x_{\text{ep}}[n]$ и $x_{\text{op}}[n]$ получаются в результате наложения последовательностей $x_e[n]$ и $x_o[n]$ на отрезке $[0; N-1]$. Последовательности $x_{\text{ep}}[n]$ и $x_{\text{op}}[n]$ называются *периодической сопряженно-симметричной* и *периодической сопряженно-антисимметричной* компонентами $x[n]$. Вещественозначные последовательности $x_e[n]$ и $x_o[n]$ называют *периодической четной* и *периодической нечетной* компонентами соответственно. Заметим, что, несмотря на название, эти компоненты конечные, а не периодические последовательности, совпадающие с периодом компонент $\tilde{x}_e[n]$ и $\tilde{x}_o[n]$.

Формулы (8.107)–(8.108) и (8.109)–(8.112) определяют компоненты $x_{\text{ep}}[n]$ и $x_{\text{op}}[n]$ через последовательность $x[n]$. Обратное соотношение, выражающее $x[n]$ в терминах $x_{\text{ep}}[n]$ и $x_{\text{op}}[n]$, можно получить, исходя из формул (8.103) и (8.104):

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n] + \tilde{x}_o[n]. \quad (8.115)$$

Таким образом,

$$x[n] = \tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n] + \tilde{x}_o[n], \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (8.116)$$

Комбинируя выражения (8.116) с (8.105) и (8.106), получаем

$$x[n] = x_{\text{ep}}[n] + x_{\text{op}}[n]. \quad (8.117)$$

Альтернативное доказательство этой формулы получается при сложении равенств (8.109)–(8.112).

Теперь свойства симметрии ДПФ, аналогичные свойствам 11–14 из табл. 8.1, получаются очень легко.

$$\operatorname{Re} \{x[n]\} \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X_{\text{ep}}[k], \quad (8.118)$$

$$j \operatorname{Im} \{x[n]\} \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X_{\text{op}}[k], \quad (8.119)$$

$$x_{\text{ep}}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} \operatorname{Re} \{X[k]\}, \quad (8.120)$$

$$x_{\text{op}}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} j \operatorname{Im} \{X[k]\}. \quad (8.121)$$

8.7.5. Циклическая свертка

В подразделе 8.3.5 было показано, что умножение коэффициентов ДРФ двух периодических последовательностей соответствует периодической свертке этих последовательностей. Здесь мы рассмотрим *конечные* последовательности $x_1[n]$ и $x_2[n]$ длины N с ДПФ $X_1[k]$ и $X_2[k]$ соответственно и попытаемся подобрать последовательность $x_3[n]$, чье ДПФ выглядит как произведение $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$. Естественный кандидат на эту последовательность — это один период последовательности $\tilde{x}_3[n]$ из (8.29), т. е.

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m], \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (8.122)$$

что можно переписать в виде

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[((m)_N)N] x_2[((n-m)_N)N], \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (8.123)$$

Так как $((m)_N)N = m$ при $0 \leq m \leq N-1$, то (8.123) можно переписать как

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[((n-m)_N)N], \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (8.124)$$

Операции (8.122) и (8.124) существенно отличаются от линейной свертки последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$, определенной формулой (2.45). При вычислении отсчета последовательности $x_3[n]$ в линейной свертке нужно сначала умножить одну последовательность на другую, обращенную во времени и линейно сдвинутую последовательность, а затем сложить все произведения $x_1[m]x_2[n-m]$. Иными словами, при вычислении свертки сворачиваемые последовательности сдвигаются подходящим образом. С другой стороны, при свертке конечных последовательностей (см. (8.124)) вторая из сворачиваемых последовательностей циклически сдвигается относительно первой. По этой причине операция (8.124) называется *циклической сверткой*. Более точно операцию (8.124) следует называть *N -точечной циклической сверткой*, подчеркивая тот факт, что длина обеих последовательностей равна N (или меньше), а сдвиг осуществляется по модулю N . Иногда N -точечную циклическую свертку обозначают символом (\mathbb{N}) , так что формула (8.124) переписывается в виде:

$$x_3[n] = x_1[n](\mathbb{N}) x_2[n]. \quad (8.125)$$

Так как ДПФ последовательности $x_3[n]$ равно $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$, а от перемены мест сомножителей произведение не меняется, т. е. $X_1[k]X_2[k] = X_2[k]X_1[k]$,

то циклическая свертка тоже не зависит от порядка сворачиваемых последовательностей:

$$x_3[n] = x_2[n] \odot x_3[n], \quad (8.126)$$

или, более подробно,

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_2[m] x_1[((n-m))_N]. \quad (8.127)$$

Поскольку циклическая свертка на самом деле является периодической сверткой, то можно сказать, что она иллюстрируется примером 8.4 и рис. 8.3. Однако, если мы хотим использовать понятие циклического сдвига, нам необходимо сначала построить периодическое продолжение конечной последовательности, как показано на рис. 8.3. Этот шаг показан на следующих примерах.

Пример 8.10. Циклическая свертка с задержанным единичным импульсом

Пример циклической свертки легко построить, основываясь на результатах подраздела 8.7.2. Пусть $x_2[n]$ — конечная последовательность длины N и

$$x_1[n] = \delta[n - n_0], \quad (8.128)$$

где $0 < n_0 < N$. Ясно, что $x_1[n]$ можно рассматривать как конечную последовательность

$$x_1[n] = \begin{cases} 0, & 0 \leq n < n_0, \\ 1, & n = n_0, \\ 0, & n_0 < n \leq N-1, \end{cases} \quad (8.129)$$

что отражено на рис. 8.14 для случая $n_0 = 1$.

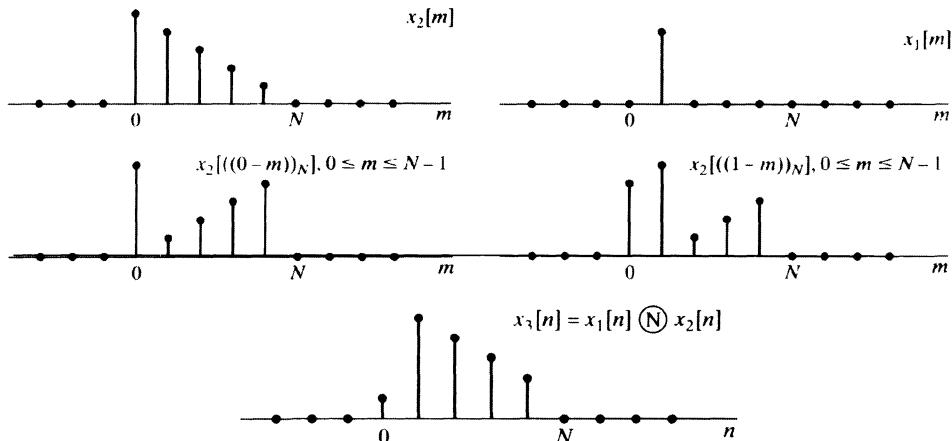


Рис. 8.14. Циклическая свертка конечной последовательности $x_2[n]$ с задержанным единичным импульсом $x_1[n] = \delta[n - 1]$

Ее ДПФ имеет вид

$$X_1[k] = W_N^{kn_0}. \quad (8.130)$$

Из подраздела 8.7.2 следует, что конечная последовательность $x_3[n]$, чье ДПФ равно

$$X_3[k] = W_N^{kn_0} X_2, \quad (8.131)$$

получается из $x_2[n]$ циклическим сдвигом на n_0 отсчетов. Таким образом, циклическая свертка последовательности $x_2[n]$ с задержанным единичным импульсом сводится к циклическому сдвигу $x_2[n]$ на отрезке $[0; N - 1]$. Этот процесс при $n_0 = 1$ и $N = 5$ иллюстрируется рис. 8.14. Там показаны последовательности $x_2[m]$, $x_1[n]$, $x_2[((0-m))_N]$ и $x_2[((1-m))_N]$. Результат свертки представлен последовательностью $x_3[n]$. \square

Пример 8.11. Циклическая свертка прямоугольных импульсов

Пусть

$$x_1[n] = x_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L - 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8.132)$$

Эти последовательности для случая $L = 6$ изображены на рис. 8.15. Пусть N — длина ДПФ. Тогда при $N = L$ N -точечное ДПФ имеет вид

$$X_1[k] = X_2[k] = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \begin{cases} N, & k = 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8.133)$$

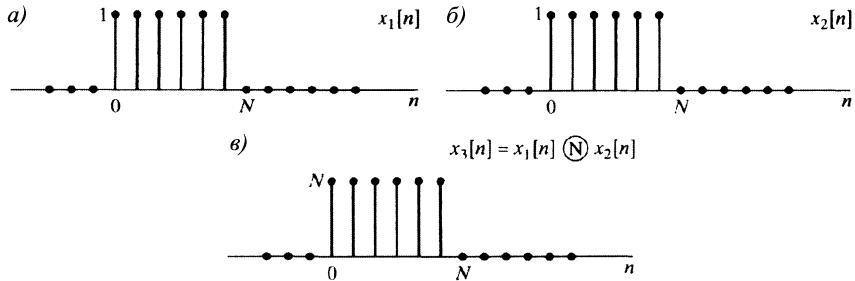


Рис. 8.15. N -точечная циклическая свертка постоянных последовательностей длины N

Перемножив последовательности $X_1[k]$ и $X_2[k]$, получим

$$X_3[k] = X_1[k]X_2[k] = \begin{cases} N^2, & k = 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (8.134)$$

откуда находим, что

$$x_3[n] = N, \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (8.135)$$

Результат свертки представлен на рис. 8.15. Ясно, что если последовательность $x_2[((n-m))_N]$ циклически сдвинута относительно $x_1[m]$, то сумма произведений вида $x_1[m]x_2[((n-m))_N]$ всегда будет давать N .

Последовательности $x_1[n]$ и $x_2[n]$ можно, конечно, считать и $2L$ -членными, дополнив их L нулями. Вычислив тогда $2L$ -точечную свертку, мы получим последовательность, представленную на рис. 8.16, которая совпадает с линейной сверткой конечных последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$. Это важное наблюдение будет более подробно обсуждаться в § 8.8.

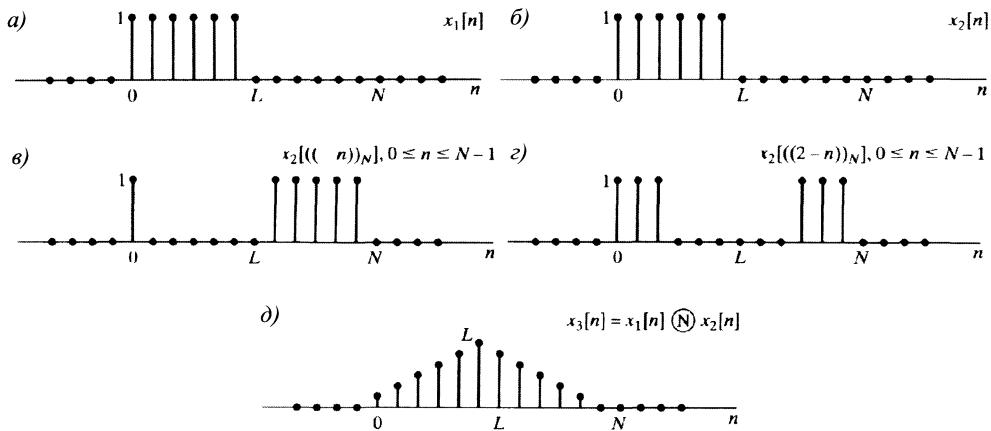


Рис. 8.16. $2L$ -точечная циклическая свертка двух постоянных последовательностей длины L

Обратите внимание, что при $N = 2L$

$$X_1[k] = X_2[k] = \frac{1 - W_N^{Lk}}{1 - W_N^k},$$

так что ДПФ последовательности $x_3[n]$ треугольного вида из рис. 8.16, δ) равно

$$X_3[k] = \left(\frac{1 - W_N^{Lk}}{1 - W_N^k} \right)^2. \quad \square$$

Итак, теорему о циклической свертке можно записать одной формулой:

$$x_1[n] \textcircled{N} x_2[n] \xrightarrow{\mathcal{DFT}} X_1[k]X_2[k]. \quad (8.136)$$

Принимая во внимание соотношение двойственности ДПФ, нет ничего удивительного в том, что ДПФ произведения двух N -точечных последовательностей совпадает с циклической сверткой ДПФ, т. е. если $x_3[n] = x_1[n]x_2[n]$, то

$$X_3[k] = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} X_1[\ell]X_2[((k-\ell))_N] \quad (8.137)$$

или

$$x_1[n]x_2[n] \xrightarrow{\mathcal{DFT}} \frac{1}{N} X_1[k] \textcircled{N} X_2[k]. \quad (8.138)$$

8.7.6. Обзор свойств дискретного преобразования Фурье

Свойства ДПФ, о которых было рассказано в § 8.7, сведены в табл. 8.2. Заметим, что все они сформулированы для конечных последовательностей $x[n]$ и $X[k]$, определенных над отрезком $[0; N - 1]$. Обе последовательности имеют нулевые отсчеты вне этого отрезка.

Таблица 8.2. Свойства ДПФ

<i>N</i> -членная последовательность	<i>N</i> -точечное ДПФ
1. $x[n]$	$X[k]$
2. $x_1[n], x_2[n]$	$X_1[k], X_2[k]$
3. $ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
4. $X[n]$	$Nx[(-k)]$
5. $x[((n-m))_N]$	$W_N^{km}X[k]$
6. $W_N^{-\ell n}x[n]$	$X[((k-\ell))_N]$
7. $\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N]$	$X_1[k]X_2[k]$
8. $x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} X_1[\ell]X_2[((k-\ell))_N]$
9. $x^*[n]$	$X^*[(-k)]$
10. $x^*[((-n))_N]$	$X^*[k]$
11. $\operatorname{Re}\{x[n]\}$	$X_{\text{ep}}[k] = \frac{1}{2}(X[((k))_N] + X^*[((-k))_N])$
12. $j \operatorname{Im}\{x[n]\}$	$X_{\text{op}}[k] = \frac{1}{2}(X[((k))_N] - X^*[((-k))_N])$
13. $x_{\text{ep}}[k] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[((-n))_N])$	$\operatorname{Re}\{X[k]\}$
14. $x_{\text{op}}[k] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[((-n))_N])$	$j \operatorname{Im}\{X[k]\}$
свойства 15–17 справедливы лишь для вещественных $x[n]$	
15. свойства симметрии	$\begin{cases} X[k] = X^*[(-k)] \\ \operatorname{Re}\{X[k]\} = \operatorname{Re}\{X[(-k)]\} \\ \operatorname{Im}\{X[k]\} = -\operatorname{Im}\{X[(-k)]\} \\ X[k] = X[(-k)] \\ \angle X[k] = -\angle X[(-k)] \end{cases}$
16. $x_{\text{ep}}[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[(-n)])$	$\operatorname{Re}\{X[k]\}$
17. $x_{\text{op}}[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[(-n)])$	$j \operatorname{Im}\{X[k]\}$

8.8. Вычисление линейной свертки через ДПФ

В главе 9 будет рассказано об эффективных алгоритмах, вычисляющих ДПФ конечных последовательностей. Их обычно называют алгоритмами *быстрого преобразования Фурье* (БПФ). Поскольку такие алгоритмы существуют, возникает следующий метод вычисления свертки двух последовательностей.

1. Вычислить *N*-точечное ДПФ $X_1[k]$ и $X_2[k]$ двух последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$.
2. Найти произведение $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$ при $0 \leq k \leq N-1$.
3. Восстановить последовательность $x_3[n] = x_1 \odot x_2[n]$ по ее ДПФ $X_3[k]$.

Для эффективной работы многих приложений необходима возможность быстрого вычисления линейной свертки. В принципе реализация любой линейной системы сводится к свертке входного сигнала с импульсной характеристикой.

Но иногда это становится особенно важным, например при дискретизации речевого или радарного сигнала и при вычислении их автокорреляционных функций. Как мы убедились в подразделе 8.7.5, произведению ДПФ соответствует циклическая свертка последовательностей. Чтобы добиться линейной свертки, мы должны быть уверенными, что циклическая свертка ведет себя как линейная. В конце примера 8.11 мы натолкнулись на один факт, который намекает, как это можно было бы сделать. Займемся более тщательным анализом ситуации.

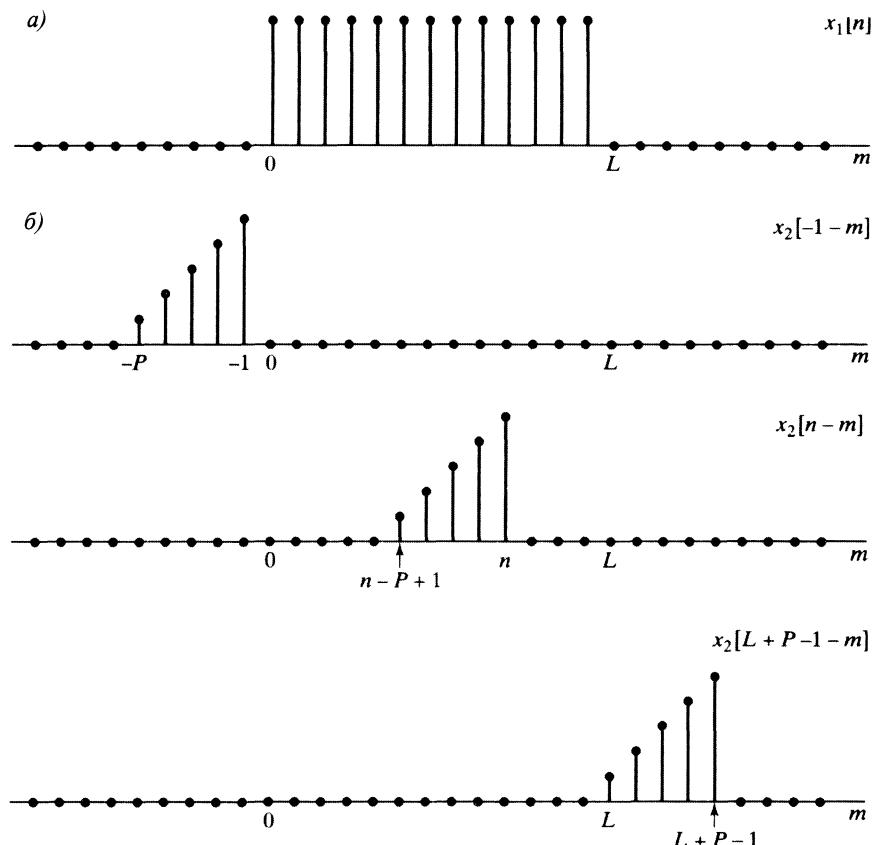


Рис. 8.17. Пример линейной свертки двух конечных последовательностей, показывающий, что результат свертки равен нулю при $n \leq -1$ и $n \geq L + P - 1$: а) последовательность $x_1[n]$; б) последовательность $x_2[n-m]$ для нескольких значений n

8.8.1. Линейная свертка двух конечных последовательностей

Рассмотрим L -членную последовательность $x_1[n]$ и P -членную последовательность $x_2[n]$. Напомним, что их линейная свертка определяется формулой:

$$x_3[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[n-m]. \quad (8.139)$$

На рис. 8.17, а) представлена типичная последовательность $x_1[n]$, а элементы $x_2[n - m]$ для нескольких значений n показаны на рис. 8.17, б). Ясно, что произведение $x_1[n]x_2[n - m]$ будет равно нулю при $n < 0$ и $n > L + P - 2$. Таким образом, члены $x_3[n]$ могут быть отличны от нуля только при $0 \leq n \leq L + P - 2$. Следовательно, $L + P - 1$ — максимально возможная длина результата свертки последовательностей длин L и P .

8.8.2. Циклическая свертка как линейная с наложением во времени

Как показывают примеры 8.10 и 8.11, совпадет ли циклическая свертка, соответствующая произведению N -точечных ДПФ, с линейной сверткой конечных последовательностей, зависит от разницы между N и длинами последовательностей. Взаимосвязь линейной и циклической сверток имеет полезную интерпретацию в терминах наложения во временной области. Ввиду особой важности этой интерпретации для понимания циклической свертки мы расскажем о ней двумя способами.

В § 8.5 было замечено, что если дискретизовать Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ последовательности $x[n]$ в частотах $\omega_k = 2\pi k/N$, то получившаяся последовательность будет состоять из коэффициентов ДРФ периодической последовательности

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN]. \quad (8.140)$$

С другой стороны, конечная последовательность

$$X[k] = \begin{cases} X(e^{j(2\pi k/N)}), & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (8.141)$$

является ДПФ одного периода последовательности $\tilde{x}[n]$, т. е.

$$x_p[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8.142)$$

Ясно, что если длина последовательности $x[n]$ не превосходит N , то наложения во временной области не происходит и $x_p[n] = x[n]$. Однако если количество членов последовательности $x[n]$ больше N , то ввиду суперпозиции различных отсчетов последовательности $x[n]$ последовательность $x_p[n]$ может отличаться от исходной в нескольких (или даже во всех точках). Чтобы отличать исходную последовательность от одного периода последовательности, получающейся в результате применения обратного ДПФ к дискретизованному Фурье-образу последовательности $x[n]$, мы будем использовать индекс p , который будет опускаться, если наложения не происходит и имеет место равенство $x_p[n] = x[n]$.

Фурье-образ последовательности $x_3[n]$ из свертки (8.139) вычисляется как произведение

$$X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}). \quad (8.143)$$

Определив ее ДПФ как

$$X_3[k] = X_3(e^{j(2\pi k/N)}), \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (8.144)$$

получим очевидное равенство:

$$X_3[k] = X_1(e^{j(2\pi k/N)})X_2(e^{j(2\pi k/N)}), \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (8.145)$$

откуда

$$X_3[k] = X_1[k]X_2[k]. \quad (8.146)$$

Значит, результат применения обратного ДПФ к $X_3[k]$ имеет вид:

$$x_{3p}[n] = \begin{cases} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_3[n-rN], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8.147)$$

С другой стороны, по теореме о циклической свертке

$$x_{3p}[n] = x_1[n] \circledast x_2[n]. \quad (8.148)$$

Таким образом, циклическая свертка двух конечных последовательностей совпадает с линейной сверткой, искаженной наложением (см. формулу (8.147)).

Заметим, что если N больше L или P (количества членов последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$), то $X_1[k]$ и $X_2[k]$ представляют последовательности $x_1[n]$ и $x_2[n]$ абсолютно точно, но $x_{3p}[n] = x[n]$ при всех n только тогда, когда N не меньше длины последовательности $x_3[n]$. Как было установлено в предыдущем подразделе, максимально возможное число ненулевых отсчетов последовательности $x_3[n] = x_1[n] * x_2[n]$ равно $(L+P-1)$. Следовательно, циклическая свертка последовательностей с ДПФ, равным $X_1[k]X_2[k]$, совпадает с линейной, Фурьеобраз которой — это произведение $X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$, если число точек ДПФ N удовлетворяет неравенству $N \geq L+P-1$.

Пример 8.12. Циклическая свертка как линейная свертка с наложением

В свете наблюдений, отмеченных выше, результат примера 8.11 легко объясняется. Заметим, что $x_1[n]$ и $x_2[n]$ — постоянные последовательности длины $L=6$, как показано на рис. 8.18, а). Поэтому длина их линейной свертки равна $L+P-1=11$, причем сама свертка имеет треугольную форму (рис. 8.18, б)). На рис. 8.18, в) и г) показаны сдвинутые версии последовательности $x_3[n-rN]$ из (8.147) при $r=\pm 1$ и $N=6$. N -точечная циклическая свертка последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$ может быть вычислена с помощью формулы (8.147). Результат вычислений представлен на рис. 8.18, д) для $N=L=6$, а в случае $N=2L=12$ — на рис. 8.18, е). Заметим, что при $N=L=6$ в циклическую свертку вносит вклад как сама последовательность $x_3[n]$, так и сдвинутая ее версия $x_3[n+N]$, а при $N=2L=12$ — только последовательность $x_3[n]$. Так как длина линейной свертки равна $2L-1$, 12-точечная циклическая свертка совпадет с линейной при всех $n \in [0; N-1]$. Фактически это останется верным и при $N=2L-1=11$. □

Итак, мы выяснили, что если $N \geq L+P-1$, то при N -точечной циклической свертке двух конечных последовательностей наложения не происходит. С другой стороны, при $N=L=P$ циклическая свертка может отличаться от линейной во всех отсчетах без исключения. Однако при $P < L$ некоторые члены L -точечной циклической свертки могут совпадать с соответствующими отсчетами линейной. Лучше всего это можно понять, если вновь привлечь интерпретацию с наложением.

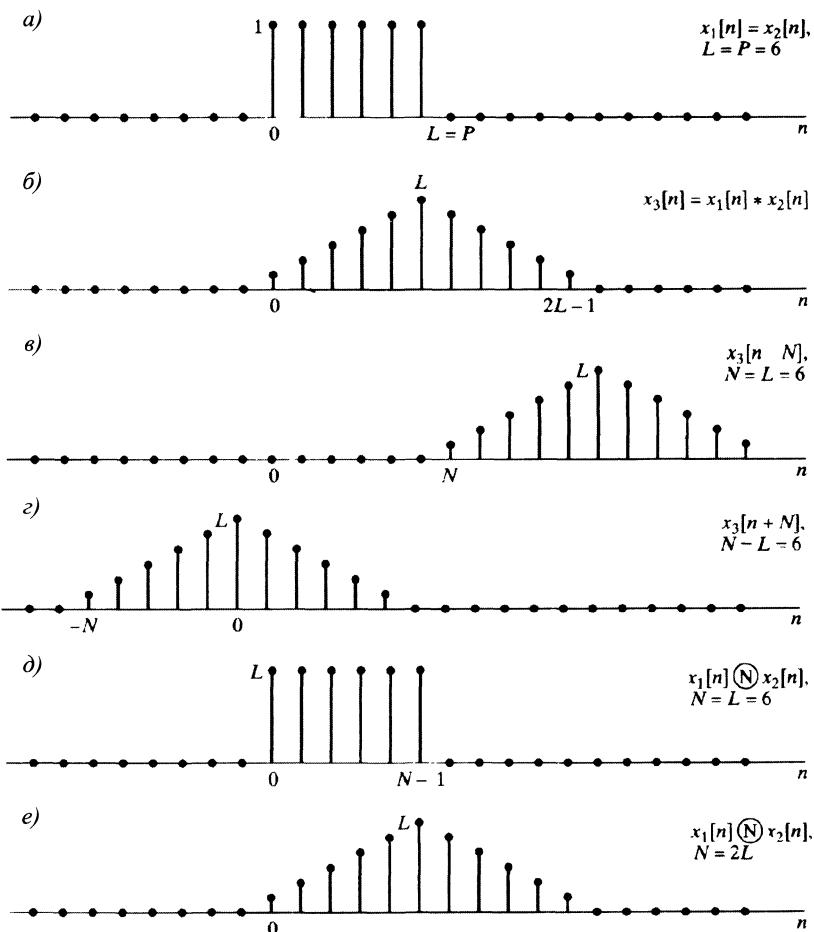
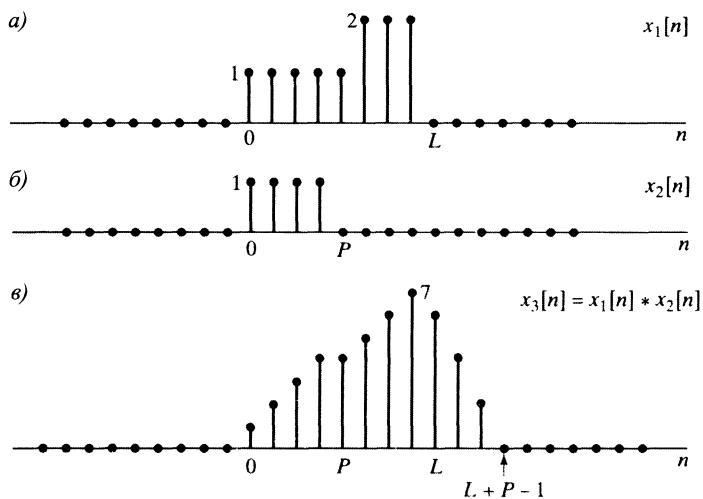


Рис. 8.18. Сравнение циклической свертки и линейной с наложением: а) сворачиваемые последовательности $x_1[n]$ и $x_2[n]$; б) линейная свертка $x_1[n] * x_2[n]$; в) последовательность $x_3[n - N]$ при $N = 6$; г) $x_3[n + N]$ при $N = 6$; д) 6-точечная циклическая свертка, равная сумме последовательностей из б), в) и г) на отрезке $[0; 5]$; е) 12-точечная циклическая свертка

Рассмотрим последовательности $x_1[n]$ и $x_2[n]$, изображенные на рис. 8.19, а) и б) соответственно. Длина L последовательности $x_1[n]$ больше количества членов P последовательности $x_2[n]$. Вычислив сначала L -точечную свертку этих последовательностей, выясним, какие из ее отсчетов совпадают с соответствующими членами линейной свертки, а какие нет. Линейная свертка последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$ представлена на рис. 8.19, в). Ее длина равна $(L + P - 1)$. L -точечная циклическая свертка получается по формулам (8.147) и (8.148):

$$x_{3p}[n] \left\{ \begin{array}{l} x_1 \textcircled{L} x_2[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_3[n - rL], \quad 0 \leq n \leq L-1, \\ 0, \quad \text{иначе.} \end{array} \right. \quad (8.149)$$

Рис. 8.19. Пример линейной свертки двух конечных последовательностей



На рис. 8.20, а) представлена последовательность $x_3[n - rL]$ при $r = 0$, а на рис. 8.20, б) и в) при $r = +1$ и $r = -1$ соответственно. На рисунке видно, что последовательность $x_{3p}[n]$ на отрезке $[0; L-1]$ получается как сумма только двух слагаемых: $x_3[n]$ и $x_3[n + L]$.

И в общей ситуации при $P < L$ в циклическую свертку, определенную на отрезке $[0; L-1]$, вклад вносят только две последовательности: $x_3[n]$ и $x_3[n + L]$. Суммирование происходит следующим образом: последние $(P-1)$ отсчета последовательности $x_3[n + L]$ (от $n = 0$ до $n = P-2$) складываются с первыми $(P-1)$ отсчетами $x_3[n]$, а последние $(P-1)$ члены последовательности $x_3[n]$, расположенные над отрезком $[L; L+P-2]$, отбрасываются. Иными словами, последовательность $x_{3p}[n]$ строится по-разному на разных частях отрезка $[0; L-1]$. Поскольку последние $(P-1)$ члены последовательностей $x_3[n]$ и $x_3[n + L]$ идентичны, возможен альтернативный взгляд на циклическую свертку, согласно которому она получается как линейная свертка с наложением спектров из-за сложения членов последовательности $x_3[n]$ с номерами от $n = L, L+1, \dots, L+P-2$ с первыми отсчетами последовательности $x_3[n]$. Процесс построения циклической свертки показан на рис. 8.21 для случая $P = 4$ и $L = 8$. Линейная свертка $x_3[n]$ представлена на рис. 8.21, а). Ее отсчеты с номерами $n \geq L$ отмечены незаполненными кружочками. Обратите внимание, что только $(P-1)$ ее членов при $n \geq L$ отличны от нуля. На рис. 8.21, б) показан процесс построения $x_{3p}[n]$, который кратко можно охарактеризовать как «наворачивание» последовательности $x_3[n]$ на себя. В результате первые $(P-1)$ ее членов искажаются за счет наложения во времени, а остальные (от $n = P-1$ до $n = L-1$) остаются неизменными, т. е. совпадают с соответствующими членами линейной свертки.

Итак, при достаточной длине циклической свертки относительно сворачиваемых последовательностей наложение не происходит, т. е. циклическая свертка совпадет с линейной. Сформулируем замечание более точно: если длина циклической свертки $N \geq L + P - 1$, то $x_1[n] \textcircled{N} x_2[n] = x_1[n] * x_2[n]$. Рисунки 8.21 в) и г) иллюстрируют эту ситуацию при $P = 4$, $L = 8$ и $N = 11$.

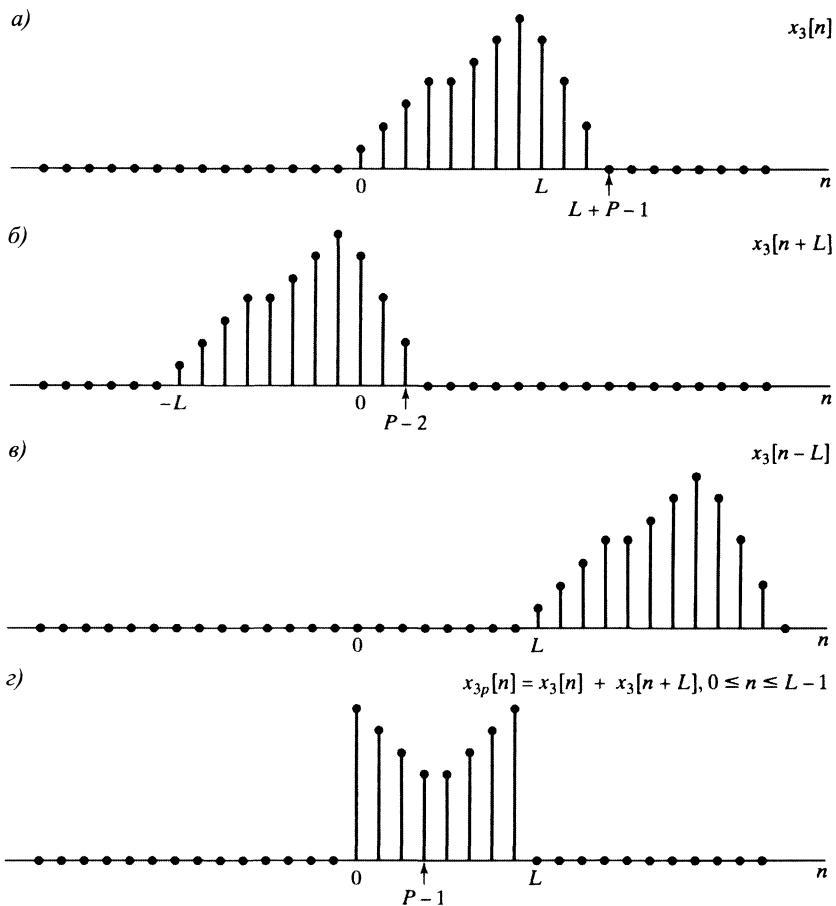


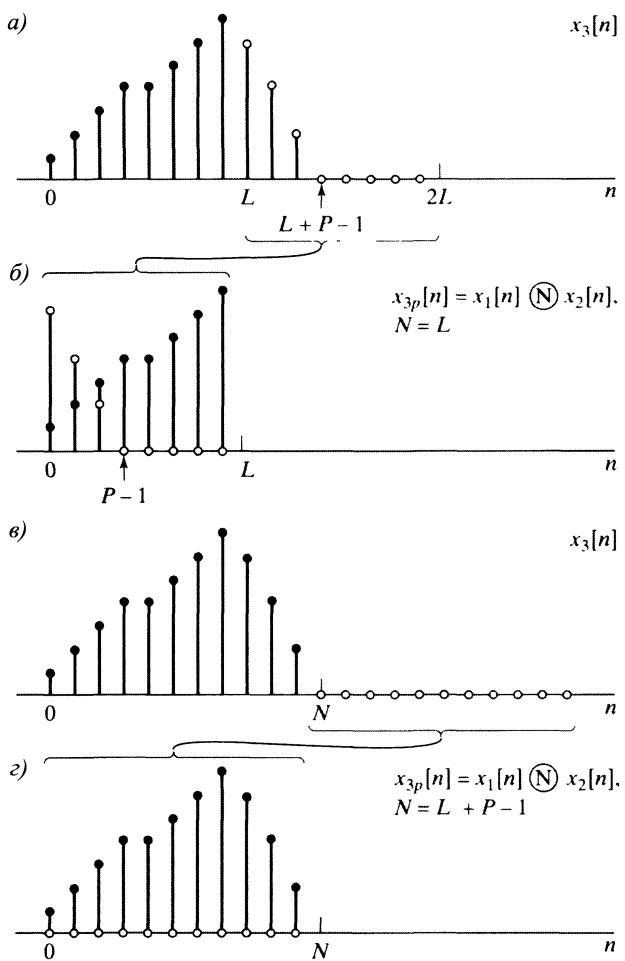
Рис. 8.20. Интерпретация циклической свертки последовательностей из рис. 8.19 через линейную свертку с наложением

8.8.3. Реализация ЛС-систем через дискретное преобразование Фурье

В предыдущем подразделе мы обсуждали метод вычисления линейной свертки через циклическую. Так как ЛС-система реализуется линейной сверткой, то циклическая свертка (о вычислении которой рассказывалось в начале § 8.8) может быть использована для реализации таких систем. Действительно, рассмотрим L -членную входную последовательность $x[n]$ и импульсную характеристику $h[n]$ длины P . Длина их линейной свертки, которую обычно обозначают через $y[n]$, не превосходит числа $(L + P - 1)$. Следовательно, согласно подразделу 8.8.2, N -точечная циклическая свертка входного сигнала с импульсной характеристикой совпадает с реакцией системы, если $N \geq (L + P - 1)$. Напомним, что искомая циклическая свертка вычисляется как обратное ДПФ от произведений ДПФ последовательностей $x[n]$ и $h[n]$. Поскольку это произведение должно представлять

линейную свертку $x[n] * h[n]$, длина которой равна $(L + P - 1)$, количество членов вычисляемых ДПФ тоже должно быть не меньше чем $(L + P - 1)$, т.е. к этим последовательностям нужно добавить отсчеты с нулевой амплитудой так, чтобы длины сворачиваемых последовательностей стали равными искомому числу. Процесс добавления нулевых членов к конечной последовательности обычно называют *продолжением нулем*.

Рис. 8.21. Процесс формирования циклической свертки в результате «наворачивания»: а) и б) $N = L$ и «хвост» последовательности $x_3[n]$ накладывается на ее первые $(P - 1)$ члены; в) и г) $N = L + P - 1$ и наложения нет



Описанная процедура позволяет вычислить линейную свертку конечных последовательностей на основе ДПФ, т.е. реакцию КИХ-системы на конечный входной сигнал можно определить с помощью ДПФ. Во многих приложениях, таких как, например, фильтрование речевого сигнала, длина входного сигнала неопределена. Несмотря на это, с теоретической точки зрения мы могли бы сохранить полную форму сигнала и реализовать процедуру привлечения ДПФ для большого числа отсчетов, но такое ДПФ довольно трудно вычислить. Другая идея реализации фильтрования заключается в том, чтобы вычислять выходной

сигнал только после того, как все отсчеты входного будут собраны вместе. Но, как правило, хотелось бы избежать неизбежной для такого подхода большой задержки. Выход из создавшегося положения дает так называемая *блочная свертка*, при которой фильтруемый сигнал разбивается на куски длины L . Каждый такой участок сигнала сворачивается с конечной импульсной характеристикой, после чего профильтрованные куски склеиваются вместе подходящим образом. При этом обработка каждого блока осуществляется с помощью ДПФ.

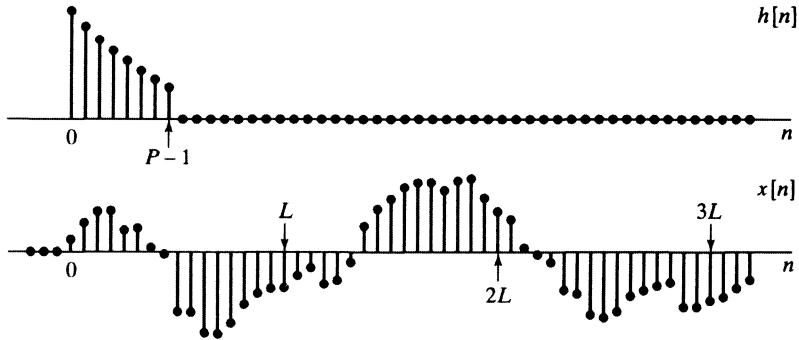


Рис. 8.22. Конечная импульсная характеристика $h[n]$ и входной сигнал $x[n]$ неопределенной длины

Для иллюстрации метода и описания процесса склейки профильтрованных участков рассмотрим импульсную характеристику $h[n]$ длины P и входной сигнал $x[n]$, изображенные на рис. 8.22. Будем предполагать, что $x[n] = 0$ при $n < 0$ и длина входного сигнала много больше P . Последовательность $x[n]$ можно представить как сумму сдвинутых блоков длины L :

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL], \quad (8.150)$$

где

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n + rL], & 0 \leq n \leq L-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8.151)$$

Указанное разбиение последовательности $x[n]$ из рис. 8.22 показано на рис. 8.23, а). Обратите внимание, что первый отсчет каждого участка $x_r[n]$ имеет номер $n = 0$, а его значение совпадает с величиной отсчета входного сигнала под номером rL . Эта особенность отражена на рис. 8.23, а) тем, что график каждого участка сдвинут на свою реальную позицию.

Поскольку свертка является линейной стационарной операцией, то из формулы (8.150) следует, что

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - rL], \quad (8.152)$$

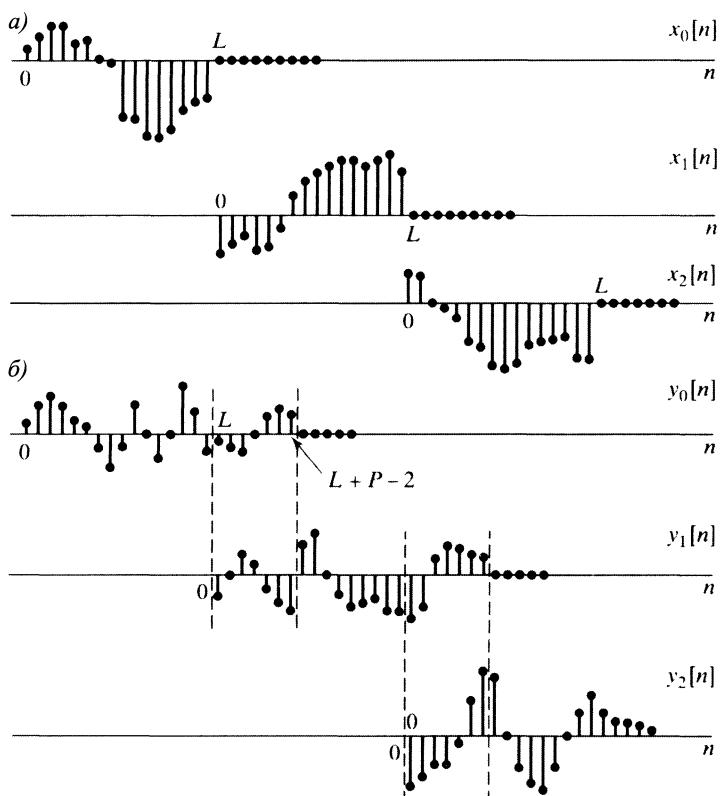
где

$$y_r[n] = x_r[n] * h[n]. \quad (8.153)$$



Поскольку число отсчетов участка $x_r[n]$ равно L , а длина импульсной характеристики — P , количество членов любого участка $y_r[n] = x_r[n] * h[n]$ не превосходит $L + P - 1$. Поэтому линейную свертку $x_r[n] * h[n]$ можно вычислить с помощью ранее описанной процедуры, использующей N -точечное ДПФ с $N \geq L + P - 1$. Так как входной сигнал разбивается на участки длины L , а результат фильтрования участков имеет длину $L + P - 1$, то профильтрованные сегменты перекрываются друг с другом в $P - 1$ точках, причем для получения искомого результата налагающиеся друг на друга отсчеты необходимо просуммировать. Профильтрованные участки $y_r[n] = x_r[n] * h[n]$ показаны на рис. 8.23, б). Так как входной сигнал является суммой задержанных конечных участков из рис. 8.23, а), результат фильтрования $x[n] * h[n]$ получается как сумма задержанных профильтрованных сегментов, изображенных на рис. 8.23, б). Такая процедура вычисления реакции фильтра часто называется *суммированием перекрытий*.

Рис. 8.23. а) разложение последовательности $x[n]$ из рис. 8.22 на непересекающиеся сегменты длины L ; б) свертка каждого сегмента с импульсной характеристикой $h[n]$



Напомним, что перекрытие участков возникает потому, что линейная свертка каждого участка с импульсной характеристикой, как правило, получается длиннее, чем сворачиваемый участок. Метод суммирования перекрытий блочной свертки не привязан к ДПФ и циклической свертке. Основная его идея состоит в вычислении сверток участков входного сигнала, которые затем суммируются подходящим образом.

Другая процедура вычисления блочной свертки называется методом *хранения перекрытий*. Она заключается в реализации L -точечной циклической свертки P -членной импульсной характеристики с L -членным участком $x_r[n]$ и последующим выделении отсчетов циклической свертки, совпадающих со значениями линейной. Полученные таким образом куски склеиваются вместе для формирования выходного сигнала. Мы показали, что при циклической свертке L -членной последовательности с P -членной (при $P < L$) первые $P - 1$ отсчеты результата искажены, в то время как остальные тождественны членам линейной свертки. Мы можем разделить входную последовательность $x[n]$ на L -членные сегменты таким образом, что каждый следующий участок перекрывается с предыдущим по $P - 1$ отсчету:

$$x_r[n] = x[n + r(L - P + 1) - P + 1], \quad 0 \leq n \leq L - 1, \quad (8.154)$$

где, как и раньше, индекс первого отсчета каждого участка равен нулю.

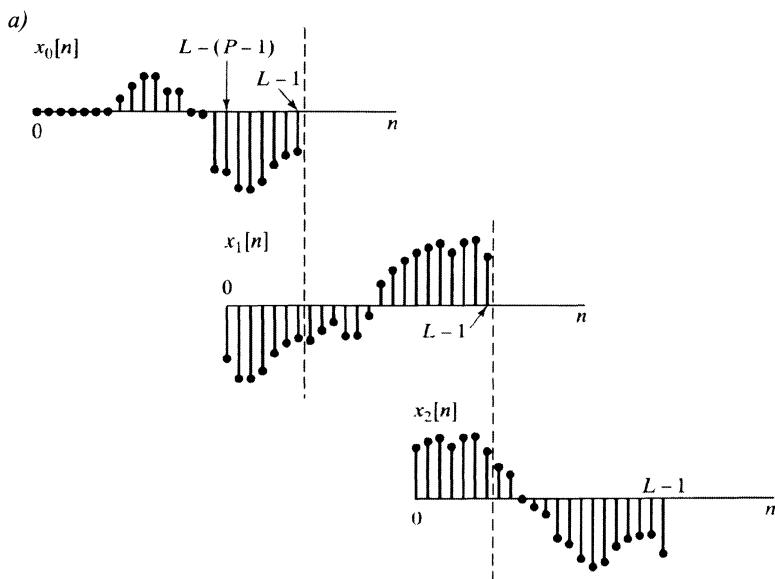


Рис. 8.24. а) разложение последовательности $x[n]$ из рис. 8.22 на перекрывающиеся участки длины L

Такой способ сегментации последовательности показан на рис. 8.24, а). Циклическая свертка каждого участка с $h[n]$ обозначена через $y_{rp}[n]$ (рис. 8.24, б)). Дополнительный индекс r указывает, что эта последовательность получена в результате циклической свертки, в которой может присутствовать наложение по времени. Отсчеты каждого выходного сегмента, индексы которых принадлежат отрезку $[0; P - 2]$, необходимо отбросить. Оставшиеся члены каждого выходного сегмента составляются вместе, в результате чего получается искомый выходной сигнал:

$$y[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - r(L - P + 1) + P - 1], \quad (8.155)$$

где

$$y_r[n] = \begin{cases} y_{rp}[n], & P - 1 \leq n \leq L - 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8.156)$$

Описанная процедура называется методом хранения перекрытий, поскольку сегменты входного сигнала перекрываются так, что каждый следующий участок начинается с $(P - 1)$ отсчета предыдущего и заканчивается $L - P + 1$ новыми.

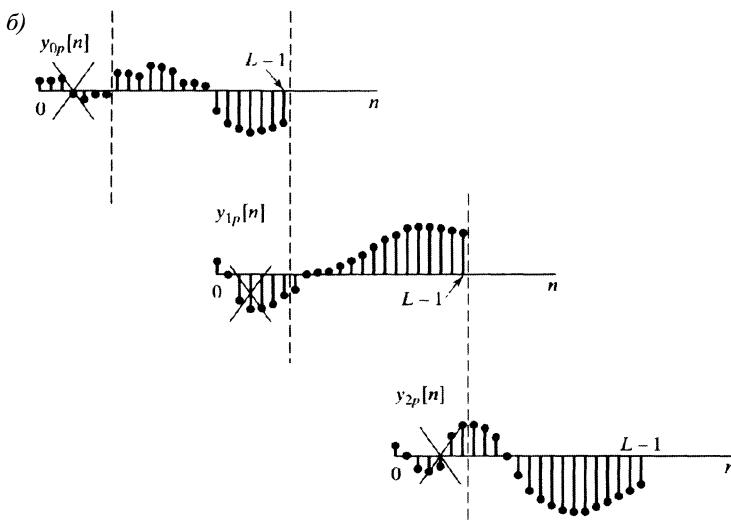


Рис. 8.24 (окончание). б) результат свертки каждого сегмента с импульсной характеристикой $h[n]$. Здесь зачеркнуты участки, которые необходимо отбросить при вычислении линейной свертки

Смысл и преимущества методов суммирования и хранения перекрытий блочной свертки неочевидны. В главе 9 мы рассмотрим высокоэффективные алгоритмы, вычисляющие ДПФ, которые обычно называют *быстрым преобразованием Фурье* (БПФ). Они настолько результативны, что метод блочной свертки с привлечением ДПФ оказывается гораздо более эффективным, чем прямая линейная свертка, даже при реализации КИХ-систем с относительно небольшой (25–30 отсчетов) импульсной характеристики. Длина P импульсной характеристики, при которой метод, основанный на ДПФ, становится оправданным, естественно, зависит как от аппаратного оборудования, так и от программного обеспечения, привлекаемого для реализации вычислений (см. [59 и 147]).

8.9. Дискретное косинус-преобразование

ДПФ, возможно, наиболее типичный пример большого класса преобразований, которые в общем виде можно записать как

$$A[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\varphi_k^*[n], \quad (8.157)$$

$$x[n] = \sum_{n=0}^{N-1} A_k \varphi_k[n]. \quad (8.158)$$

Последовательности $\varphi_k[n]$ удовлетворяют замечательному свойству попарной ортогональности:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_k[n] \varphi_m^*[n] = \begin{cases} 1, & m = k, \\ 0, & \text{иначем } \neq k \end{cases} \quad (8.159)$$

и называются *базисными*.

Базисными последовательностями в ДПФ служат комплексные экспоненты $e^{j2\pi kn/N}$, а последовательность $A[k]$ здесь имеет комплексные отсчеты даже в том случае, когда последовательность $x[n]$ вещественна. Возникает естественный вопрос: существует ли преобразование, сохраняющее вещественность? Ответ положителен. Указанным свойством обладают, например, преобразования Хаара и Адамара (см. [42]) и преобразование Хартли [11–13]. (Определение преобразования Хартли сформулировано в задаче 8.65.) Другим примером ортогонального преобразования вещественных последовательностей служит дискретное косинус-преобразование (ДКП) [1, 131]. Оно тесно связано с ДПФ и становится особенно полезным и важным в ряде приложений по обработке сигналов, особенно при сжатии изображений и звука.

8.9.1. Определение дискретного косинус-преобразования

ДКП называется преобразование вида (8.157) и (8.158), базисными последовательностями $\varphi_k[n]$ которого служат косинусы. Поскольку косинус — периодическая четная последовательность, то продолжение $x[n]$ за отрезок $[0; N - 1]$ по формуле синтеза (8.158) будет периодичным и четным. Иначе говоря, тогда как ДПФ содержит неявную периодичность, в ДКП заложена как периодичность, так и *четность*.

Определение ДПФ началось с периодического продолжения конечной последовательности, которое затем выражалось в виде линейной комбинации комплексных экспонент. Подход к определению ДКП полностью аналогичен. Сначала по конечной последовательности строится периодическая четная последовательность, по которой исходная восстанавливается однозначно. Ввиду большого числа способов продолжения возникает несколько различных определений ДКП. На рис. 8.25 показаны 17 отсчетов четырех примеров продолжения четырехчленной последовательности. Отсчеты исходной конечной последовательности всюду обозначены черными кружочками. Все продолжения периодические (период равен 16 или меньше) и обладают свойством четности. В каждом случае конечная последовательность легко выделяется как первые четыре члена периода. Обозначим все 16-периодические последовательности, построенные по каждому из четырех примеров рис. 8.25, через $\tilde{x}_1[n]$, $\tilde{x}_2[n]$, $\tilde{x}_3[n]$ и $\tilde{x}_4[n]$. Заметим, что реальный период последовательности $\tilde{x}_1[n]$ равен $2N - 2 = 6$, причем она обладает четной симметрией как относительно $n = 0$, так и относительно $n = N - 1 = 3$. Период последовательности $\tilde{x}_2[n]$ равен $2N = 8$, а центры ее четной симметрии

расположены в точках $n = -\frac{1}{2}$ и $\frac{7}{2}$. Период последовательностей $\tilde{x}_3[n]$ и $\tilde{x}_4[n]$ состоит из 16 отсчетов. В обоих случаях период вычисляется как $16 = 4N$. Центры симметрии третьей последовательности находятся в точках $n = 0$ и $n = 8$, а четвертой — в $n = -\frac{1}{2}$ и $n = (2N - \frac{1}{2}) = \frac{15}{2}$.

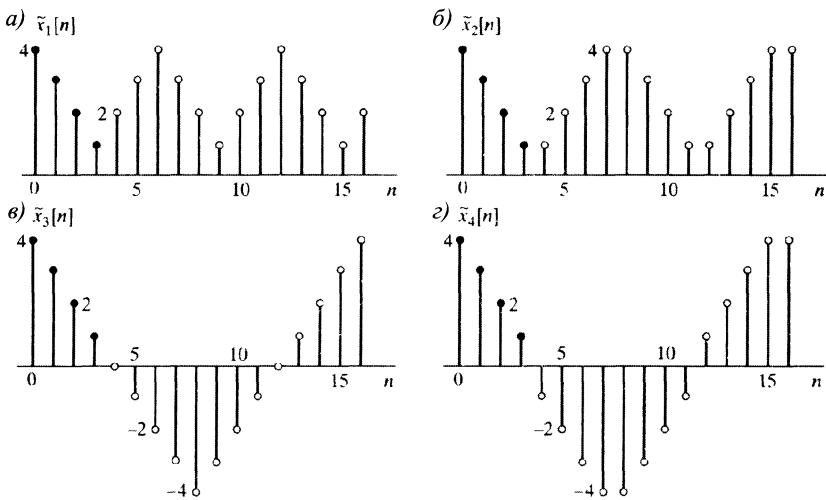


Рис. 8.25. Четыре разных продолжения четырехчленной последовательности до четной периодической (члены исходной последовательности обозначены черными кругочками): а) первый тип продолжения для ДКП-1; б) второй тип продолжения для ДКП-2; в) третий тип продолжения для ДКП-3; г) четвертый тип продолжения для ДКП-4

Четыре случая, изображенные на рис. 8.25, иллюстрируют периодичность, неявно присутствующую в четырех типах ДКП, называемых ДКП-1, ДКП-2, ДКП-3 и ДКП-4.

Можно показать (см. [96]), что существует еще четыре способа четного периодического продолжения последовательности $x[n]$, что влечет четыре дополнительных типа ДКП. Более того, по данной конечной последовательности можно построить восемь нечетных периодических вещественных продолжений, ведущих к восьми типам дискретного синус-преобразования (ДСП), базисными функциями в котором служат ортонормированные последовательности синусов. Названные преобразования образуют семейство из 16 преобразований вещественных последовательностей. К наиболее используемым из них относятся ДКП-1 и ДКП-2, в связи с чем мы их обсудим более подробно.

8.9.2. Определение ДКП-1 и ДКП-2

Все периодические продолжения, ведущие к различным типам ДКП, можно представлять себе как сумму сдвинутых копий последовательностей $\pm x[n]$ и $\pm x[-n]$. Различие между продолжениями для ДКП-1 и ДКП-2 зависит от того, накладываются ли друг на друга конечные отсчеты сдвинутых версий последовательности, и если накладываются, то какие именно. Для ДКП-1 последовательность $x[n]$ сначала модифицируется в конечных точках, а затем продолжается

до $(2N - 2)$ -периодической последовательности. Итоговая периодическая последовательность описывается формулой:

$$\tilde{x}_1[n] = x_\alpha[((n))_{2N-2}] + x_\alpha[((-n))_{2N-2}], \quad (8.160)$$

где $x_\alpha[n]$ — модифицированная последовательность $\alpha[n]x[n]$ с

$$\alpha[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 0 \text{ или } N - 1, \\ 1, & 1 \leq n \leq N - 2. \end{cases} \quad (8.161)$$

Половинные веса крайних отсчетов компенсируется за счет удвоения, возникающего при наложении двух членов в формуле (8.160) в точках $n = k(2N - 2)$ и $n = N - 1 + k(2N - 2)$ с целым k . Таким образом, имеет место равенство: $\tilde{x}_1[n] = x[n]$ при $n = 0, 1, \dots, N - 1$. Периодическая последовательность $\tilde{x}_1[n]$ обладает четной симметрией относительно точек $n = 0, n = N - 1, n = 2N - 2$ и т. д. Будем называть такой тип симметрии *первым типом периодической симметрии*.

ДКП-1 определяется следующей парой формул:

$$X^{c1}[k] = 2 \sum_{n=0}^{N-1} \alpha[n]x[n] \cos\left(\frac{\pi kn}{N-1}\right), \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (8.162)$$

$$x[n] = \frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha[k]X^{c1}[k] \cos\left(\frac{\pi kn}{N-1}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (8.163)$$

где $\alpha[n]$ — последовательность из формулы (8.161).

Для ДКП-2 конечная последовательность $x[n]$ продолжается до $2N$ -периодической по правилу:

$$\tilde{x}_2[n] = x[((n))_{2N}] + x[((-n-1))_{2N}]. \quad (8.164)$$

Поскольку здесь наложения конечных отсчетов не происходит, то равенство $x[n] = \tilde{x}_2[n]$ при $n = 0, 1, \dots, N - 1$ выполнено и для немодифицированной последовательности. В этом случае, который называют *периодической симметрией второго типа*, центры четной симметрии последовательности расположены в «половинных отсчетах»: $-\frac{1}{2}, N - \frac{1}{2}, 2N - \frac{1}{2}$, и т. д. ДКП-2 выглядит так:

$$X^{c2}[k] = 2 \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (8.165)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \beta[k]X^{c2}[k] \cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (8.166)$$

где весовая последовательность $\beta[k]$ равна

$$\beta[k] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0, \\ 1, & 1 \leq k \leq N-1. \end{cases} \quad (8.167)$$

Чтобы получить унитарное преобразование¹, в определение ДКП можно добав-

¹ ДКП называют унитарным, если оно представляет собой разложение последовательности по ортонормированному базису с дополнительным условием: $\sum_{n=0}^{N-1} (x[n])^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (X^{c2}[k])^2$.

вить нормализующий множитель. Например, нормализованное ДКП-2 имеет вид:

$$\tilde{X}^{c2}[k] = \sqrt{\frac{2}{N}} \tilde{\beta}[k] \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (8.168)$$

$$x[n] = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\beta}[k] \tilde{X}^{c2}[k] \cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (8.169)$$

где

$$\tilde{\beta}[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & k = 0, \\ 1, & 1 \leq k \leq N-1. \end{cases} \quad (8.170)$$

Сравнивая последние формулы с (8.165) и (8.166), можно заметить, что множители 2 , $\frac{1}{N}$ и $\beta[k]$ равномерно распределены между прямым и обратным преобразованиями, чем и обеспечивается унитарность. Введя аналогичные нормирующие множители, к унитарному виду можно привести и ДКП-1. Но в этой главе нас интересует не столько унитарность преобразования, сколько связь ДКП с ДПФ. Поэтому мы будем пользоваться определяющими формулами (8.162), (8.163) и (8.165), (8.166), а читателю, заинтересовавшемуся унитарностью, можно порекомендовать книгу [131].

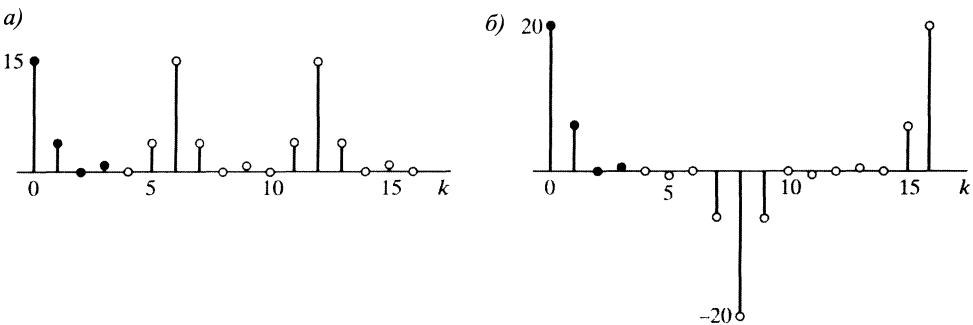


Рис. 8.26. ДКП четырехточечной последовательности из рис. 8.25: а) ДКП-1; б) ДКП-2

Хотя значения ДКП вычисляются обычно только на отрезке $[0; N-1]$, ничто не мешает нам вычислить их и вне этого промежутка, как показано на рис. 8.26, где отсчеты ДКП с номерами из отрезка $[0; N-1]$ отмечены черными кружочками. Мы видим, что ДКП — четные периодические последовательности. Однако свойство симметрии преобразованных последовательностей не всегда совпадает с неявной симметрией исходных. Действительно, $\tilde{x}_1[n]$ и продолжение последовательности $X^{c1}[k]$ обладают симметрией первого типа. Но, сравнивая рис. 8.25, в) и г), мы видим, что последовательность $X^{c2}[k]$ имеет одинаковый тип симметрии с $\tilde{x}_3[n]$, но отличный от типа симметрии $\tilde{x}_2[n]$.

Поскольку ДКП — ортогональное преобразование последовательностей, оно обладает свойствами, похожими на свойства ДПФ. Свойства достаточно подробно разобраны в [1 и 131].

8.9.3. Связь между ДПФ и ДКП-1

Между ДПФ и различными типами ДКП конечных последовательностей существует тесная связь. Для ее исследования заметим, что, поскольку для вычисления ДКП-1 последовательность $\tilde{x}_1[n]$ строится по исходной с помощью формул (8.160) и (8.161), один ее период дает конечную последовательность

$$x_1[n] = x_\alpha[((n))_{2N-2}] + x_\alpha[((-n))_{2N-2}] = \tilde{x}_1[n], \quad n = 0, 1, \dots, 2N-3, \quad (8.171)$$

где $x_\alpha[n] = \alpha[n]x[n]$ — N -членная вещественнонезначающая последовательность, краине отсчеты которой поделены на 2. Из формулы (8.171) следует, что $(2N-2)$ -точечное ДПФ $(2N-2)$ -членной последовательности $x_1[n]$ равно

$$X_1[k] = X_\alpha[k] + X_\alpha^*[k] = 2\operatorname{Re}\{X_\alpha[k]\}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-3, \quad (8.172)$$

где $X_\alpha[k]$ — $(2N-2)$ -точечное ДПФ N -членной последовательности $\alpha[n]x[n]$, продолженной нулем до необходимой длины. Опираясь на определение $(2N-2)$ -точечного ДПФ продолженной нулем последовательности, получаем

$$X_1[k] = 2\operatorname{Re}\{X_\alpha[k]\} = 2 \sum_{n=0}^{N-1} \alpha[n]x[n] \cos\left(\frac{2\pi kn}{2N-2}\right) = X^{c1}[k]. \quad (8.173)$$

Следовательно, ДКП-1 N -членной последовательности идентично, с одной стороны, $(2N-2)$ -точечному ДПФ симметрично продолженной последовательности $x_1[n]$, а с другой — удвоенной вещественной части первых N членов $(2N-2)$ -точечного ДПФ взвешенной последовательности $x_\alpha[n]$.

Привлекая алгоритм БПФ, можно довольно легко находить ДКП-1. Но ввиду того, что определение ДКП-1 включает в себя только вещественные коэффициенты, существует еще один эффективный способ вычисления ДКП-1 вещественнонезначающих последовательностей, исключающий операции над комплексными числами (см., например, [1 и 21]).

Обратное ДКП-1 вычисляется через обратное ДПФ. Для этого, учитывая формулу (8.173), строим последовательность

$$X_1[k] = \begin{cases} X^{c1}[k], & 0 \leq k \leq N-1, \\ X^{c1}[2N-2-k], & N \leq k \leq 2N-3 \end{cases} \quad (8.174)$$

и применяем к ней обратное $(2N-2)$ -точечное ДПФ, в результате чего получается симметричная последовательность

$$x_1[n] = \frac{1}{2N-2} \sum_{k=0}^{2N-3} X_1[k] e^{j2\pi kn/(2N-2)}, \quad 0 \leq n \leq 2N-3. \quad (8.175)$$

Теперь искомая последовательность $x[n]$ восстанавливается как первые N отсчетов своего продолжения $x_1[n]$, т. е. $x[n] = x_1[n]$ при $n = 0, 1, \dots, N-1$. Подставив формулу (8.174) в (8.175), легко показать, что обратное ДКП-1 выражается через $X^{c1}[k]$ и последовательность косинусов, что согласуется с (8.163) (см. задачу 8.68).

8.9.4. Связь между ДПФ и ДКП-2

ДКП-2 конечной последовательности тоже можно выразить через ДПФ. Заметим, что период последовательности $\tilde{x}_2[n]$ задает $2N$ -членную последовательность

$$x_2[n] = x[((n))_{2N}] + x[((n-n-1))_{2N}], \quad 0 \leq n \leq 2N-1, \quad (8.176)$$

где $x[n]$ — исходная N -членная вещественнозначная последовательность. Из формулы (8.176) получаем, что $2N$ -точечное ДПФ последовательности $x_2[n]$ равно

$$X_2[k] = X[k] + X^*[k]e^{j2\pi k/(2N)}, \quad 0 \leq k \leq 2N-1, \quad (8.177)$$

где $X[k]$ — $2N$ -точечное ДПФ N -членной последовательности $x[n]$, продолженной N нулями. Из (8.177) находим

$$\begin{aligned} X_2[k] &= X[k] + X^*[k]e^{j2\pi k/(2N)} = \\ &= e^{j\pi k/(2N)} \left(X[k]e^{-j\pi k/(2N)} + X^*[k]e^{j\pi k/(2N)} \right) = \\ &= e^{j\pi k/(2N)} 2\operatorname{Re} \left\{ X[k]e^{-j\pi k/(2N)} \right\}. \end{aligned} \quad (8.178)$$

Из определения $2N$ -точечного ДПФ дополненной нулем последовательности следует, что

$$\operatorname{Re} \left\{ X[k]e^{-j\pi k/(2N)} \right\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos \left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N} \right). \quad (8.179)$$

Значит, используя формулы (8.165), (8.177) и (8.179), $X^{c2}[k]$ можно выразить через $X[k]$ ($2N$ -точечное ДПФ N -членной последовательности) как

$$X^{c2}[k] = 2\operatorname{Re} \left\{ X[k]e^{-j\pi k/(2N)} \right\}, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (8.180)$$

или через $2N$ -точечное ДПФ $2N$ -членного симметричного продолжения $x_2[n]$, определенного формулой (8.176), как

$$X^{c2}[k] = e^{-j\pi k/(2N)} X_2[k], \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (8.181)$$

Последнее соотношение эквивалентно следующему:

$$X_2[k] = e^{j\pi k/(2N)} X^{c2}[k], \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (8.182)$$

Как и в случае с ДКП-1, ДПФ в формулах (8.180) и (8.181) можно вычислять с помощью алгоритмов БПФ. В книге [92] обсуждаются другие способы применения ДПФ для вычисления ДКП-2 (см. также задачу 8.69). Кроме того, в [131] рассказано о специальных быстрых способах вычисления ДКП-2.

Обратное ДКП-2 вычисляется через обратное ДПФ. Процедура основывается на соотношении (8.182) вместе со свойством симметрии ДКП-2. Прямой подстановкой в (8.165) легко проверить, что

$$X^{c2}[2N-k] = -X^{c2}[k], \quad 0 \leq k \leq 2N-1. \quad (8.183)$$

Отсюда следует, что

$$X_2[k] = \begin{cases} X^{c2}[0], & k = 0, \\ e^{j\pi k/(2N)} X^{c2}[k], & 1 \leq k \leq N-1, \\ 0, & k = N \\ -e^{j\pi k/(2N)} X^{c2}[2N-k], & N+1 \leq k \leq 2N-1. \end{cases} \quad (8.184)$$

Используя определение обратного ДПФ, можно вычислить симметричное продолжение $x_2[n]$:

$$x_2[n] = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} X_2[k] e^{j2\pi kn/(2N)}, \quad 0 \leq n \leq 2N-1, \quad (8.185)$$

откуда найдем $x[n] = x_2[n]$ при $0 \leq n \leq N - 1$. Подставляя (8.184) в (8.185), легко показать, что описанная здесь процедура вычисления обратного ДКП-2 совпадает с формулой (8.166) (см. задачу 8.70).

8.9.5. Уплотнение энергии при ДКП-2

Благодаря свойству, коротко называемому «уплотнение энергии», ДКП-2 отдают предпочтение во многих приложениях по сжатию данных. Действительно, коэффициенты ДКП-2 конечной последовательности сконцентрированы в нижних индексах более плотно, чем в ДПФ. Важность этого свойства подтверждается теоремой Парсеваля, которая для случая ДКП-1 выглядит как

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha[n] |x[n]|^2 = \frac{1}{2N-2} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha[k] |X^{c1}[k]|^2, \quad (8.186)$$

а для ДКП-2 —

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \beta[k] |X^{c2}[k]|^2, \quad (8.187)$$

где $\beta[k]$ определяется формулой (8.167). Принято говорить, что преобразование сконцентрировано в нижних индексах, если обнуление остальных его отсчетов не влечет за собой существенной потери энергии сигнала. Проиллюстрируем свойство уплотнения энергии на примере.

Пример 8.13. Уплотнение энергии в ДКП-2

Рассмотрим тестовый входной сигнал вида

$$x[n] = a^n \cos(\omega_0 n + \varphi), \quad 0 \leq n \leq N - 1, \quad (8.188)$$

который приведен на рис. 8.27 для случая $a = 0,9$, $\omega_0 = 0,1\pi$, $\varphi = 0$ и $N = 32$.

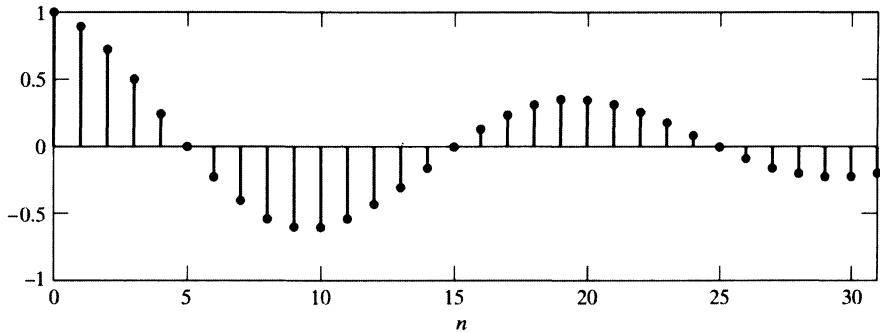


Рис. 8.27. Тестовый сигнал для сравнения ДПФ и ДКП

Вещественная и мнимые части 32-точечного ДПФ 32-членной последовательности из рис. 8.27 показаны на рис. 8.28, а) и б) соответственно, а график ее ДКП-2 изображен на рис. 8.28, в). В случае ДПФ показаны вещественная и мнимая части отсчетов с номерами $k = 0, 1, \dots, 16$. Поскольку отсчеты сигнала вещественные, $X[0]$ и $X[16]$ тоже

вещественные. Остальные члены ДПФ — комплексные сопряженно симметричные числа. Таким образом, 32 вещественных числа, отмеченные на рис. 8.28, а) и б), полностью определяют 32-точечное ДПФ. На рис. 8.18, в) отмечены все 32 вещественных значения ДКП-2. Из рисунка видно, что ненулевые отсчеты ДКП-2 расположены в нижних индексах, в связи с чем теорема Парсеваля утверждает, что энергия последовательности сконцентрирована в представлении ДКП-2 сильнее, чем в ДПФ.

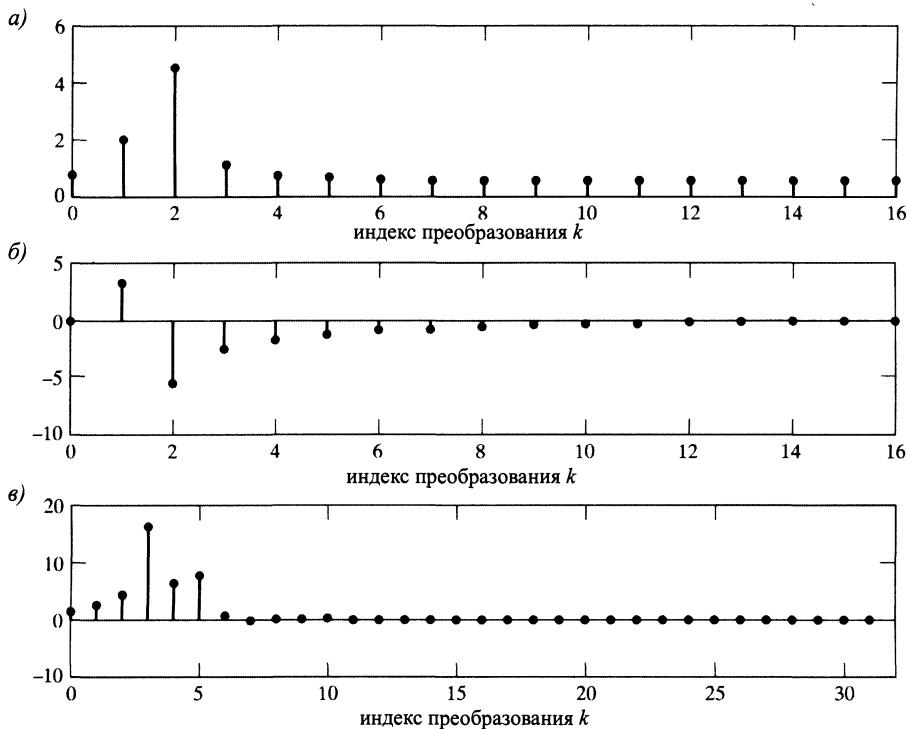


Рис. 8.28. Преобразования тестового сигнала из рис. 8.27: а) вещественная часть N -точечного ДПФ; б) мнимая часть N -точечного ДПФ; в) N -точечное ДКП-2

Свойство уплотнения энергии можно измерить, усекая представления последовательности до одинакового количества вещественных коэффициентов и сравнивая среднеквадратичную ошибку получающейся аппроксимации. С этой целью определим

$$x_m^{\text{ДПФ}}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} T_m[k] X[k] e^{j2\pi k n / N}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (8.189)$$

Здесь $X[k]$ — N -точечное ДПФ последовательности $x[n]$ и

$$T_m[k] = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq (N-1-m)/2, \\ 0, & (N+1-m)/2 \leq k \leq (N-1+m)/2, \\ 1, & (N+1+m)/2 \leq k \leq N-1. \end{cases}$$

Если $m = 1$, то член $X[N/2]$ не участвует в формировании последовательности $x_m^{\text{ДПФ}}[n]$. При $m = 3$ не учитываются члены $X[N/2]$, $X[N/2 - 1]$ и сопряженно-симметричный

последнему члену $X[N/2 + 1]$ и т. д., т. е. $x_m^{\text{ДПФ}}[n]$ при $m = 1, 3, 5, \dots, N - 1$ — это последовательность, полученная из ДПФ симметричным вычеркиванием m коэффициентов². За исключением вещественного $X[N/2]$, при вычеркивании пары сопряженно-симметричных членов ДПФ отбрасывается пара вещественных коэффициентов. Например, при формировании последовательности $x_5^{\text{ДПФ}}[n]$ обнуляются отсчеты $X[14], X[15], X[16], X[17]$, и $X[18]$ 32-точечного ДПФ из рис. 8.28, а) и б).

Аналогично можно усечь ДКП-2 и получить последовательность

$$x_m^{\text{ДКП}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1-m} \beta[k] X^{2c}[k] \cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (8.190)$$

Здесь при формировании последовательности $x_5^{\text{ДКП}}$ обнуляются члены $X^{2c}[27], \dots, X^{2c}[31]$ ДКП-2 из рис. 8.28, в). Так как эти коэффициенты пренебрежительно малы, последовательность $x_5^{\text{ДКП}}$ практически ничем не отличается от $x[n]$.

Чтобы исследовать зависимость ошибки аппроксимации ДПФ и ДКП-2 от m , введем последовательности

$$E^{\text{ДПФ}}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n] - x_m^{\text{ДПФ}}[n]|^2$$

и

$$E^{\text{ДКП}}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n] - x_m^{\text{ДКП}}[n]|^2$$

среднеквадратичной ошибки аппроксимации усеченных ДПФ и ДКП-2 соответственно. Ошибки изображены на рис. 8.29, где незаполненными кружочками отмечена последовательность $E^{\text{ДПФ}}[m]$, а заполненными — $E^{\text{ДКП}}[m]$. В вырожденных случаях: $m = 0$ (усечения нет) и $m = N - 1$ (остается единственный коэффициент) функция, усекающая, ДПФ выглядит как $T_0[k] = 1$ при $0 \leq k \leq N - 1$ и $T_{N-1}[k] = 0$ при $1 \leq k \leq N - 1$, а $T_{N-1}[0] = 1$. В этих ситуациях ошибки совпадают. Когда m пробегает отрезок [1; 30], ошибка аппроксимации ДПФ неуклонно возрастает с ростом m , в то время как ошибка ДКП-2 остается очень малой вплоть до $m = 25$, причем все 32 члена последовательности $x[n]$ могут быть представлены с незначительной ошибкой лишь семью отсчетами ДКП-2. □

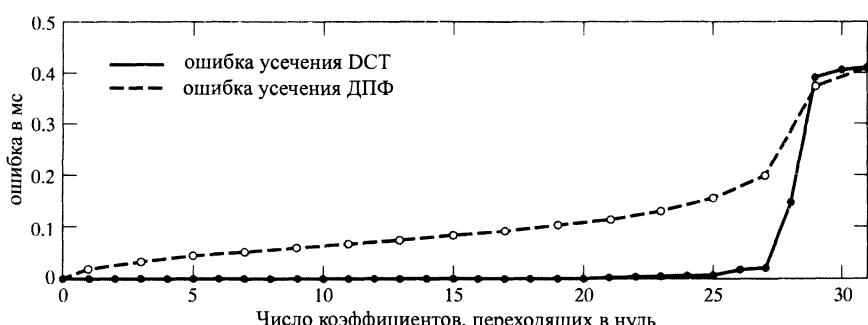


Рис. 8.29. Сравнение ошибок аппроксимации ДПФ и ДКП-2

² Для простоты можно считать N четным числом.



Сигнал в примере 8.13 — низкочастотный, экспоненциально затухающий с нулевой фазой — был выбран специально, чтобы подчеркнуть свойство уплотнения энергии. Далеко не любой сигнал $x[n]$ обеспечивает такой впечатляющий эффект при сравнении ДКП-2 и ДПФ. Высокочастотные сигналы и даже некоторые сигналы вида (8.188), но с другими параметрами не дают столь наглядную картину. Тем не менее во многих ситуациях, представляющих интерес при сжатии данных, у ДКП-2 есть несомненное преимущество перед ДПФ. Можно показать (см. [131]), что ДКП-2 является почти оптимальным преобразованием в смысле минимальности среднеквадратичной ошибки усечения последовательности с экспоненциальной корреляционной функцией.

8.9.6. Приложения ДКП

Уже упомянутое применение ДКП-2 к сжатию данных является его основным приложением, где оно служит основой многих стандартных алгоритмов [72, 132], представляя блоки сигнала. Популярность ДКП в сжатии сигналов объясняется, собственно, уплотнением энергии, о котором шла речь в предыдущем подразделе.

ДКП, будучи ортогональным преобразованием, подобным ДПФ, имеет много общих свойств с преобразованием Фурье, наделяющих его гибкостью при манипулировании сигналом. К одному из наиболее важных свойств ДПФ относится теорема о периодической свертке, которая утверждает, что ДПФ периодической свертки двух конечных последовательностей совпадает с произведением их ДПФ. В § 8.8 мы увидели, что, опираясь на это свойство, можно вычислять линейную свертку последовательностей, ограничиваясь лишь вычислением ДПФ.

Переформулируя теорему о свертке в контексте ДКП, можно было бы утверждать, что ДКП периодической свертки симметрично продолженных последовательностей соответствует произведению их ДКП. Однако в применении этой теоремы возникают дополнительные сложности. Например, периодическая свертка периодических последовательностей второго типа относится уже к первому типу периодических последовательностей. С другой стороны, периодическая свертка последовательностей первого и второго типов с одним и тем же периодом является последовательностью второго типа. Таким образом, чтобы по произведению ДКП восстановить периодическую свертку, требуются разные типы ДКП. Поскольку у нас есть довольно большой запас типов ДКП, существует множество различных способов его обращения. Но любая комбинация разных типов преобразований соответствует периодической свертке пары симметрично продолженных конечных последовательностей. Мартуцци [96] всесторонне разбирает использование ДКП и ДСП в реализации симметрической периодической свертки.

Необходимо отметить, что умножение ДКП соответствует специальному виду периодической свертки, имеющей некоторые особенности, весьма полезные в отдельных приложениях. При изучении теоремы о свертке в контексте ДПФ мы обнаружили, что периодическая свертка характеризуется концевым, или «круговым», эффектом. Действительно, даже линейной свертке двух конечных последовательностей присущ концевой эффект, возникающий в начале и в конце воздействия импульсной характеристики на входной сигнал. Концевой эффект в симметрической периодической свертке отличается от его проявления в обыч-

ной и периодической свертке, соответствующей произведению ДПФ. Симметрическое продолжение обеспечивает симметрию крайних отсчетов, благодаря чему возникает что-то типа «гладкости» границ, по которым склеиваются сдвинутые копии конечной последовательности. Как следствие «гладкости», концевой эффект в симметрической периодической свертке проявляется слабее, чем в линейной свертке двух последовательностей. Особенно полезна симметрическая свертка при фильтровании изображений, где нежелательный концевой эффект воспринимается как блокирующий объект. С учетом концевого эффекта ДКП намного превосходит возможности ДПФ или даже обычной линейной свертки, а результат вычисления периодической симметрической свертки можно интерпретировать как обычную свертку конечных последовательностей, продолженных нулем достаточно далеко в обе стороны (слева от первого отсчета и справа от последнего).

8.10. Краткое содержание главы

В этой главе обсуждалось представление конечных последовательностей с помощью ДПФ. Основное содержание главы посвящено собственно ДПФ, которое основано на ДРФ периодических последовательностей. По определению ДПФ конечной последовательности совпадает с одним периодом коэффициентов ДРФ ее периодического продолжения. В связи с таким подходом к ДПФ мы сначала исследовали ряд важных и полезных свойств ДРФ, а затем интерпретировали их в контексте конечных последовательностей, т. е. сформулировали аналогичные свойства ДПФ. Очень важным является то, что значения ДПФ совпадают с отсчетами z -преобразования, вычисленными в вершинах правильного многоугольника, вписанного в единичную окружность. Это подводит нас к понятию наложения во временной области, позволяя нагляднее интерпретировать свойства ДПФ. Особенно полезной такая интерпретация оказалась при исследовании циклической свертки и ее связи с линейной. Результаты, полученные на этом пути, мы применили для того, чтобы показать, как ДПФ применяется в вычислении линейной свертки конечной импульсной характеристики с бесконечным входным сигналом.

Заканчивается глава коротким введением в ДКП. Была показана тесная связь, в которой находятся ДКП и ДПФ, причем в обоих преобразованиях присутствует неявная периодичность. Свойство уплотнения энергии — основная причина популярности ДКП при сжатии данных — было продемонстрировано на впечатляющем примере.

Задачи

Обязательные задачи с ответами

- 8.1. Пусть ряд Фурье периодического непрерывного сигнала $x_c(t)$ с периодом 1 мс имеет вид:

$$x_c(t) = \sum_{k=-9}^9 a_k e^{j(2\pi kt/10^{-3})}.$$

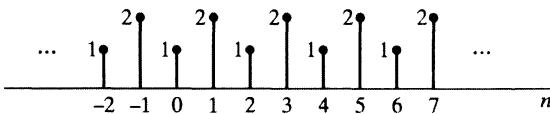
В результате дискретизации сигнала $x_c(t)$ с шагом $T = \frac{1}{6}10^{-3}$ получается последовательность $x[n]$, т. е.

$$x[n] = x_c\left(\frac{n10^{-3}}{6}\right).$$

- a) Является ли последовательность $x[n]$ периодической и каков ее период?
 - b) Как соотносится частота дискретизации, при которой получен сигнал $x[n]$, с частотой Найквиста? Иными словами, достаточно ли мал шаг дискретизации, чтобы гарантировать отсутствие ложных частот?
 - c) Выразите коэффициенты ДРФ последовательности $x[n]$ через a_k .
- 8.2. Пусть $\tilde{x}[n]$ — N -периодическая последовательность. Тогда число $3N$ тоже можно считать ее периодом. Обозначим через $\tilde{X}[k]$ коэффициенты ДРФ N -периодической последовательности $\tilde{x}[n]$, а через $\tilde{X}_3[k]$ — коэффициенты ДРФ $3N$ -периодической последовательности $\tilde{x}[n]$.
- a) Выразите $\tilde{X}_3[k]$ через $\tilde{X}[k]$.
 - b) Вычислив явно обе последовательности коэффициентов для $\tilde{x}[n]$ из рис. 8.30, проверьте выражение, найденное вами в предыдущем пункте.

Рис. 8.30.

$\tilde{x}[n], N = 2$



- 8.3. На рис. 8.31 показаны три периодические последовательности, которые можно записать в виде рядов Фурье как
- $$\tilde{x}_i[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_i[k] e^{j(2\pi/N)kn}.$$
- a) У какой из этих последовательностей после выбора нулевого отсчета все коэффициенты ДРФ станут вещественными?
 - b) У какой из этих последовательностей правильный выбор нулевого отсчета ведет к чисто мнимым коэффициентам $\tilde{X}_i[k]$ (за исключением коэффициентов $\tilde{X}_i[sN]$, где $s \in \mathbb{Z}$)?
 - в) Для какой из последовательностей равенство $\tilde{X}_i[k] = 0$ выполнено при $k = \pm 2, \pm 4, \pm 6$?
- 8.4. Рассмотрите последовательность $x[n] = a^n u[n]$. Напомним, что ее периодическое продолжение $\tilde{x}[n]$ описывается формулой:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rN].$$

- a) Вычислите Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ последовательности $x[n]$.

- б) Найдите коэффициенты $\tilde{X}[k]$ ДРФ последовательности $\tilde{x}[n]$.
 в) Как связаны коэффициенты $\tilde{X}[k]$ с функцией $X(e^{j\omega})$?

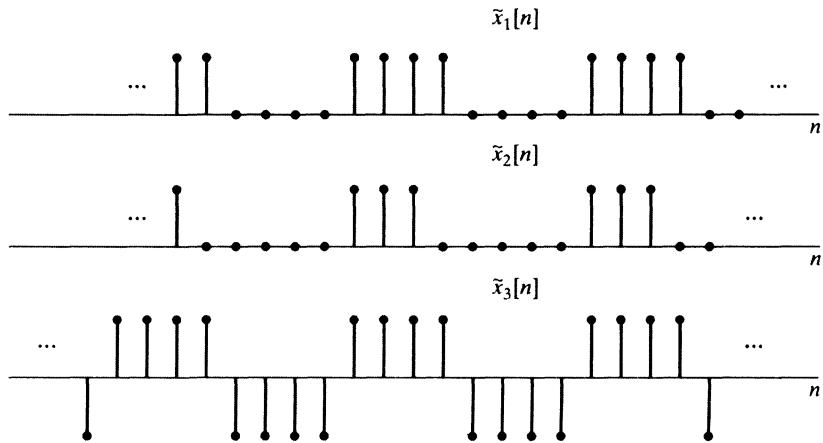


Рис. 8.31.

8.5. Определите ДПФ каждой из перечисленных конечных последовательностей, считая, что все они имеют длину N , где N — четно.

- а) $x[n] = \delta[n];$ б) $x[n] = \delta[n - n_0], 0 \leq n_0 \leq N - 1;$
 в) $x[n] = \begin{cases} 1, & n \text{ — четно}, \\ 0, & n \text{ — нечетно}; \end{cases}$ г) $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N/2 - 1, \\ 0, & N/2 \leq n \leq N - 1; \end{cases}$
 д) $x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$

8.6. Рассмотрите комплекснозначную последовательность

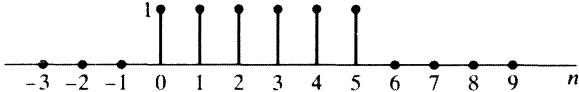
$$x[n] = \begin{cases} e^{j\omega_0 n}, & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

- а) Найдите Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ последовательности $x[n].$
 б) Вычислите N -точечное ДПФ $X[k]$ конечной последовательности $x[n].$
 в) Определите ДПФ от $x[n]$ для случая $\omega_0 = 2\pi k_0/N$, где k_0 — целое число.

8.7. Пусть $X(z)$ — z -преобразование последовательности $x[n]$ из рис. 8.32. Дискретизовав функцию $X(z)$ в точках $z = e^{j(2\pi/4)k}$ с $k = 0, 1, 2, 3$, получим четырехчленную последовательность $X_1[k] = X(z)|_{z=e^{j(2\pi/4)k}}$. Изобразите последовательность $x_1[n]$, полученную в результате обратного ДПФ от $X_1[k]$.

8.8. Обозначим через $X(e^{j\omega})$ Фурье-образ последовательности $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$, а 10-точечное ДПФ 10-членной конечной последовательности $y[n]$ (т. е. $y[n] = 0$ при $n < 0$ и $n \geq 10$) через $Y[k]$. Известно, что $Y[k] = X(e^{j2\pi k/10})$. Найдите $y[n]$.

Рис. 8.32.



- 8.9. Пусть $X(e^{j\omega})$ — Фурье-образ 20-членной последовательности $x[n]$, ненулевые отсчеты которой расположены на отрезке $[0; 19]$.

- Разработайте метод, которым можно найти значение $X(e^{j\omega})$ в точке $\omega = \frac{4\pi}{5}$, вычисляя одно M -точечное ДПФ с минимально возможным M .
- Разработайте метод, которым можно найти значение $X(e^{j\omega})$ в точке $\omega = \frac{10\pi}{27}$, вычисляя одно L -точечное ДПФ с минимально возможным L .

- 8.10. ДПФ 8-членных последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$, изображенных на рис. 8.33, обозначены через $X_1[k]$ и $X_2[k]$. Найдите выражение, связывающее $X_1[k]$ и $X_2[k]$.

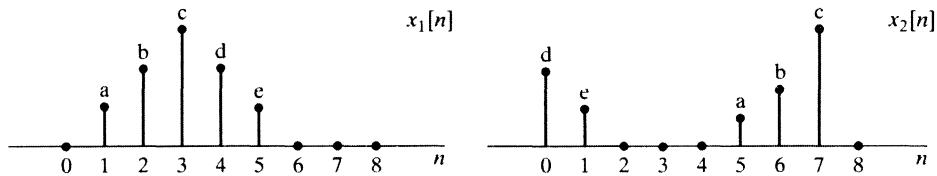


Рис. 8.33.

- 8.11. Изобразите шеститочечную циклическую свертку последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$ из рис. 8.34.

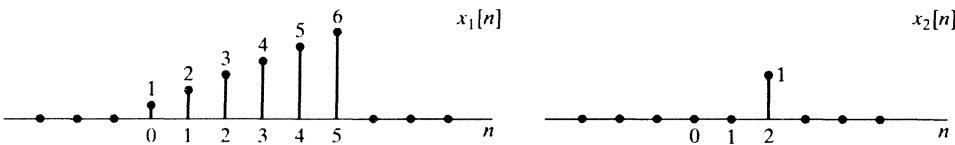


Рис. 8.34.

- 8.12. Даны конечные последовательности:

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right), \quad 0 \leq n \leq 3; \quad h[n] = 2^n, \quad 0 \leq n \leq 3.$$

- Вычислите четырехточечное ДПФ $X[k]$.
- Вычислите четырехточечное ДПФ $H[k]$.
- Вычислите $y[n] = x[n] \otimes h[n]$, исходя из определения циклической свертки.
- Найдите $y[n]$, применяя обратное ДПФ к произведению $X[k]H[k]$.

- 8.13. Обозначим через $X[k]$ пятиточечное ДПФ последовательности $x[n]$ из рис. 8.35. Изобразите последовательность $y[n]$, чье ДПФ имеет вид $Y[k] = W_5^{-2k}X[k]$.

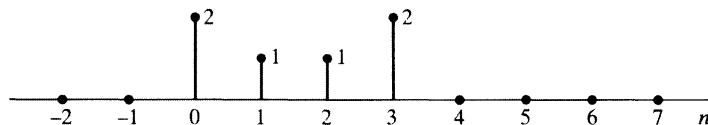


Рис. 8.35.

- 8.14. Известно, что все не попавшие в рис. 8.36 отсчеты последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$ равны нулю. Вычислите $x_3[2]$, если $x_3[n] = x_1[n] \otimes x_2[n]$ — восьмиточечная циклическая свертка.

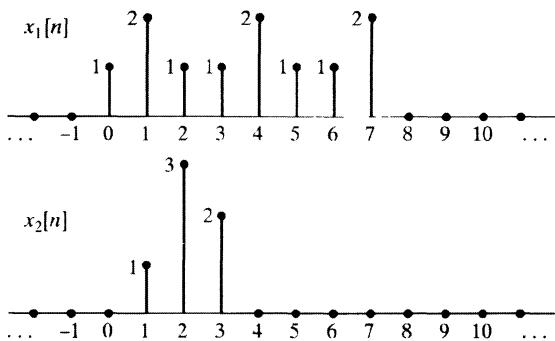


Рис. 8.36.

- 8.15. Рассмотрите последовательности из рис. 8.37. Значение $x_2[3]$ не известно и обозначено переменной a . На рис. 8.38 изображена четырехточечная циклическая свертка $y[n] = x_1[n] \otimes x_2[n]$ этих последовательностей. Можно ли, основываясь на значениях отсчетов $y[n]$, однозначно восстановить a ? Если да, то найдите его, если нет, то подберите два возможных значения.

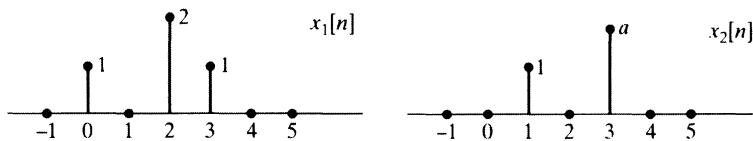


Рис. 8.37.

- 8.16. Известно, что все не показанные на рис. 8.39 отсчеты последовательности $x[n]$ равны нулю. Отсчет $x[4]$ неизвестен и обозначен через b . Пусть $X(e^{j\omega})$ — Фурье-образ последовательности $x[n]$ и $X_1[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi k/2}, 0 \leq k \leq 3$. Четырехчленная последовательность $x_1[n]$, получающаяся в результате применения обратного ДПФ к $X_1[k]$, показана на рис. 8.40. Можно ли однозначно восстановить b по этой информации? Найдите значение b , если ваш ответ положителен.

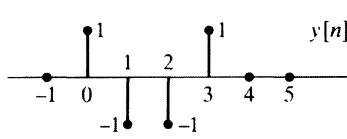


Рис. 8.38.

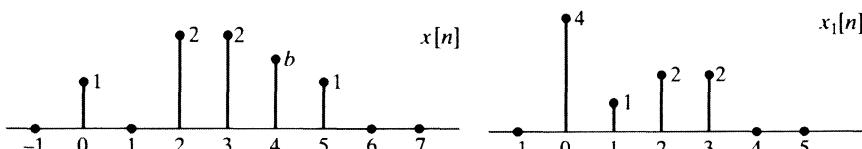


Рис. 8.39.

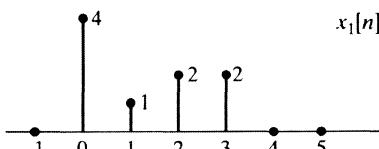


Рис. 8.40.

- 8.17. Рассмотрите последовательности $x_1[n]$ и $x_2[n]$ из рис. 8.41. Найдите наименьшее значение N , при котором справедливо равенство $x_1[n] \otimes x_2[n] = x_1[n] * x_2[n]$.

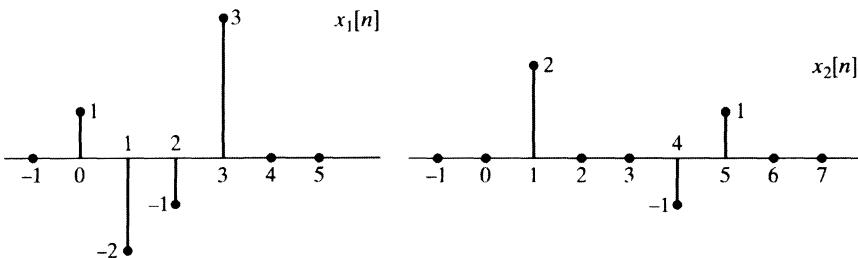


Рис. 8.41.

- 8.18. Точное значение отсчета $x[3]$ последовательности $x[n]$ из рис. 8.42 не известно и обозначено через c . Причем третий отсчет этой последовательности не обязательно изображен на рисунке в истинном масштабе. Пусть $X_1[k] = X[k]e^{j2\pi 3k/5}$, где $X[k]$ — пятиточечное ДПФ последовательности $x[n]$. Результат обратного ДПФ, примененного к $X_1[k]$, показан на рис. 8.43 как последовательность $x_1[n]$. Что можно сказать о значении c ?

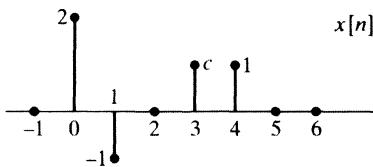


Рис. 8.42.

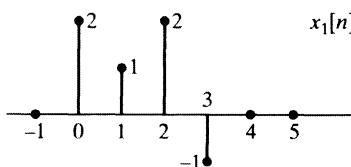


Рис. 8.43.

- 8.19. ДПФ последовательностей $x[n]$ и $x_1[n]$, изображенных на рис. 8.44, удовлетворяют соотношению $X_1[k] = X[k]e^{-j(2\pi km/6)}$, где m — неизвестная константа. Можно ли узнать точное значение m , основываясь на рис. 8.44? Единственное ли такое значение? Положительный ответ обоснуйте, а отрицательный подкрепите примером.

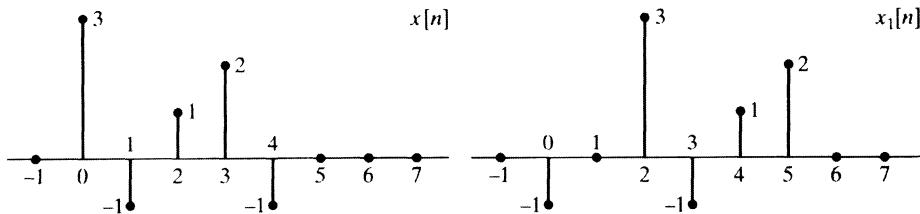


Рис. 8.44.

- 8.20. N -точечные ДПФ последовательностей $x[n]$ и $x_1[n]$, изображенных на рис. 8.45, удовлетворяют соотношению $X_1[k] = X[k]e^{j2\pi k^2/N}$, где N — неизвестная константа. Можно ли узнать точное значение N , основываясь на рис. 8.45? Един-

ственное ли такое значение? Положительный ответ обоснуйте, а отрицательный подкрепите примером.

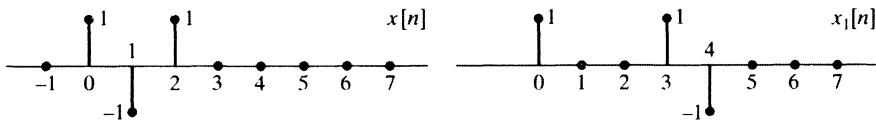


Рис. 8.45.

Обязательные задачи без ответов

- 8.21. а) На рис. 8.46 изображены периодические последовательности $\tilde{x}_1[n]$ и $\tilde{x}_2[n]$ с периодом $N = 7$. Найдите последовательность $\tilde{y}_1[n]$, чьи коэффициенты ДРФ равны произведению коэффициентов ДРФ последовательностей $\tilde{x}_1[n]$ и $\tilde{x}_2[n]$, т. е. $\tilde{Y}_1[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$.

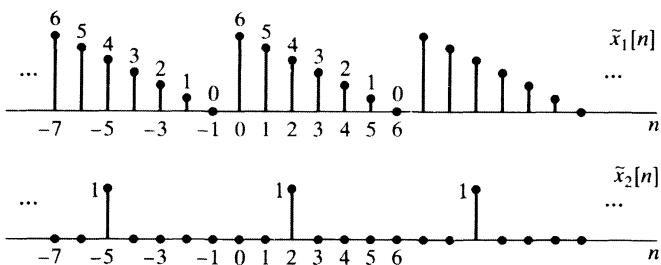


Рис. 8.46.

- б) Найдите последовательность $\tilde{y}_2[n]$, если ее коэффициенты ДРФ равны произведению коэффициентов ДРФ последовательностей $\tilde{x}_1[n]$ и $\tilde{x}_3[n]$ (см. рис. 8.47) ($\tilde{Y}_2[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_3[k]$ (период $\tilde{x}_3[n]$ равен 7).

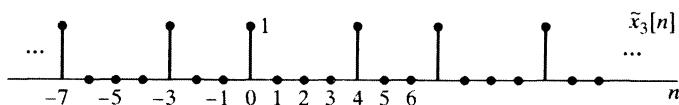
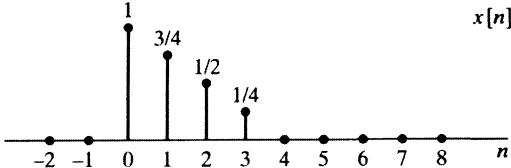


Рис. 8.47.

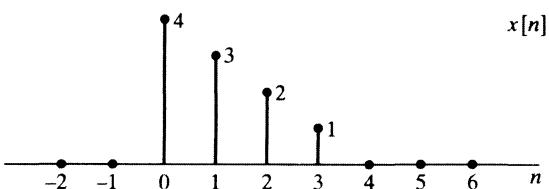
- 8.22. Покажите, что для любой N -членной последовательности $x[n]$ выполнено равенство $x[(-n))_N] = x[((N-n))_N]$.
- 8.23. Рассмотрите конечную последовательность $x[n]$, у которой $x[n] = 0$ при $n < 0$ и $n \geq P$. Нам нужно узнать значения ее Фурье-образа в точках $\omega_k = 2\pi k/N$ при $k = 0, 1, \dots, N-1$. Разработайте и обоснуйте процедуру поиска этих значений через N -точечное ДПФ в следующих случаях:
- $N > P$;
 - $N < P$.
- 8.24. Пусть $X(e^{j\omega})$ — Фурье-образ последовательности $x[n]$, а $X[k]$ — ее ДПФ. Можно ли из предположения о том, что $\text{Im}\{X[k]\} = 0$ при $k = 0, 1, \dots, N-1$, сделать вывод о равенстве $\text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = 0$ на отрезке $[-\pi; \pi]$? Положительный ответ обоснуйте, а отрицательный подкрепите контрпримером.
- 8.25. Пусть $X[k]$ — четырехточечное ДПФ последовательности $x[n]$ из рис. 8.48. Изобразите последовательность $y[n]$, чье ДПФ имеет вид $Y[k] = W_4^{3k} X[k]$.

Рис. 8.48.



8.26. Рассмотрите вещественно-значимую конечную последовательность $x[n]$ из рис. 8.49.

Рис. 8.49.



- Начертите график конечной последовательности $y[n]$ с шеститочечным ДПФ вида $Y[k] = W_6^{4k} X[k]$, где $X[k]$ — шеститочечное ДПФ последовательности $x[n]$.
- Изобразите конечную последовательность $w[n]$ с шеститочечным ДПФ $W[k] = \operatorname{Re}\{X[k]\}$.
- Постройте график конечной последовательности $q[n]$, если ее трехточечное ДПФ равно $Q[k] = X[2k]$, $k = 0, 1, 2$.

8.27. На рис. 8.50 изображены последовательности:

$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 99, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{и} \quad x_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 9, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

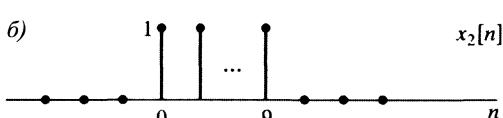
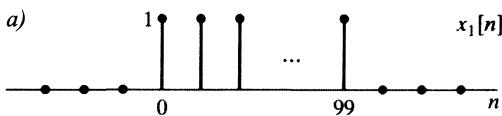


Рис. 8.50.

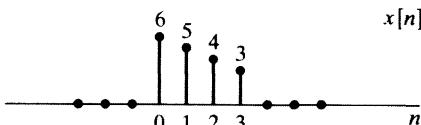


Рис. 8.51.

- Вычислите и изобразите линейную свертку $x_1[n] * x_2[n]$.
- Найдите 100-точечную циклическую свертку $x_1[n] \circledcirc_{100} x_2[n]$ и постройте ее график.
- Начертите отсчеты 110-точечной циклической свертки $x_1[n] \circledcirc_{110} x_2[n]$.

8.28. На рис. 8.51 показана последовательность $x[n]$. Нарисуйте отсчеты последовательностей $x_1[n] = x[((n-2))_4]$ и $x_2[n] = x[((-n))_4]$ с номерами $n = 0, 1, 2, 3$.

- 8.29. Изобразите N -точечную циклическую свертку последовательностей из рис. 8.52 из $N = 6$ и $N = 10$.

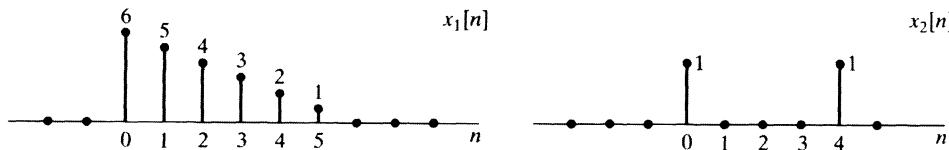


Рис. 8.52.

Дополнительные задачи

- 8.30. Обозначим через $X(e^{j\omega})$ Фурье-образ N -членной последовательности $x[n]$ (т. е. $x[n] = 0$ вне отрезка $[0; N - 1]$), а через $\tilde{X}[k]$ — дискретизацию этого преобразования:

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/64}.$$

Известно, что $\tilde{X}[32] = 1$ — единственное ненулевое значение последовательности $\tilde{X}[k]$ на отрезке $[0; 63]$.

- Подберите последовательность $x[n]$ длины $N = 64$, удовлетворяющую условию, сформулированному выше. Обоснуйте ее единственность или приведите пример еще одной такой последовательности.
 - Подберите последовательность $x[n]$ длины $N = 192 = 3 \cdot 64$, удовлетворяющую тому же условию. Обоснуйте ее единственность или приведите пример еще одной такой последовательности.
- 8.31. Напомним, что ДПФ конечной последовательности совпадает с отсчетами ее z -преобразования, вычисленными в вершинах правильного многоугольника, вписанного в единичную окружность. Например, ДПФ 10-членной последовательности — это значения функции $X(z)$ в десяти равномерно распределенных по окружности точках, отмеченных на рис. 8.53. Нам хотелось бы найти отсчеты $X(z)$, вычисленные в точках, отмеченных на рис. 8.54, т. е. получить последовательность $X(z)|_{z=0,5e^{\frac{j\pi}{10}(2\pi k + \pi)}}$. Покажите, как построить последовательность $x_1[n]$ по исходной, чтобы ее ДПФ давало искомый результат.



Рис. 8.53.

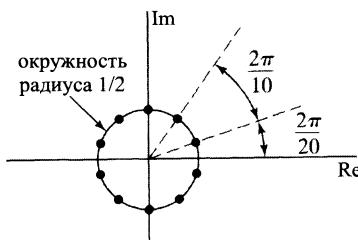


Рис. 8.54.

- 8.32. Восьмиточечное ДПФ $X[k]$ восьмичленной последовательности $x[n]$ показано на рис. 8.55. Определим новую последовательность

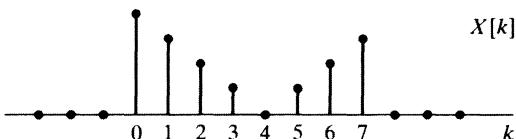


Рис. 8.55.

Найдите 16-точечное ДПФ последовательности $y[n]$ среди последовательностей, изображенных на рис. 8.56.

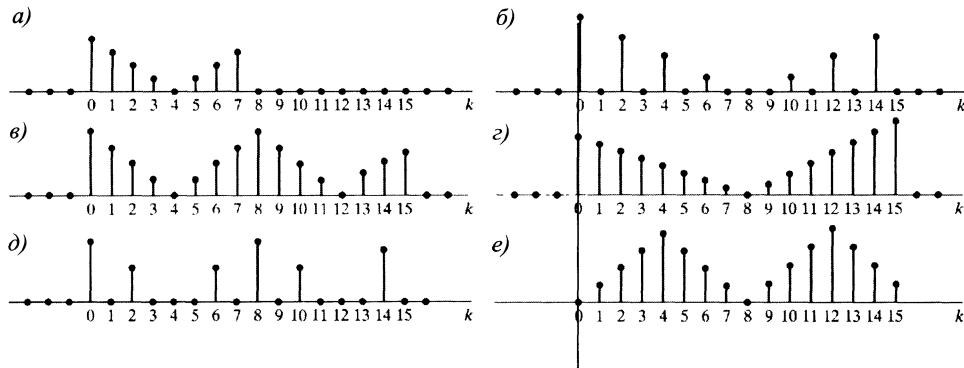


Рис. 8.56.

- 8.33. Рассмотрите N -членную последовательность, приведенную на рис. 8.57 (сплошной линией на рисунке выделена огибающая последовательности на отрезке $[0; N - 1]$). По этой последовательности построены две $2N$ -членные последовательности, огибающие которых даны на рис. 8.58. Их формульная запись выглядит следующим образом:

$$x_1[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad x_2[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ -x[n-N], & N \leq n \leq 2N-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

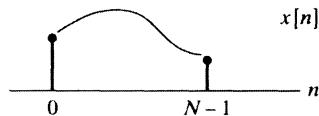


Рис. 8.57.

N -точечное ДПФ последовательности $x[n]$ обозначено символом $X[k]$, а $2N$ -точечные ДПФ последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$ как $X_1[k]$ и $X_2[k]$ соответственно.

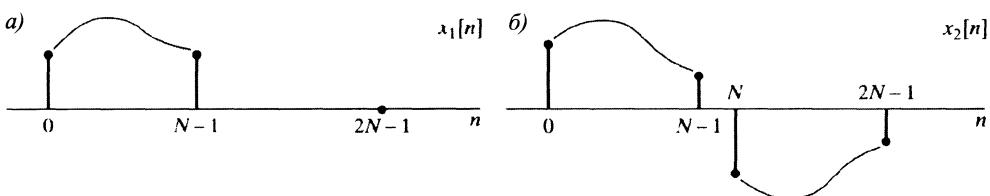


Рис. 8.58.

- а) Объясните, можно ли построить $X_2[k]$ по известному $X[k]$?
- б) Выразите наиболее простым способом $X[k]$ через $X_1[k]$, если таковой существует.
- 8.34. Пусть $x[n]$ — конечная вещественноизначная последовательность с ненулевыми отсчетами над отрезком $[0; N - 1]$. Обозначим через $X[k]$ ее N -точечное ДПФ.
- а) Можно ли утверждать, что $\operatorname{Re}\{X[k]\}$ совпадает с ДПФ последовательности $x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n])$?
- б) Выразите обратное ДПФ от $\operatorname{Re}\{X[k]\}$ через $x[n]$.

- 8.35. Подберите последовательность $x[n]$, удовлетворяющую всем нижеперечисленным условиям.

Условие 1: Фурье-образ последовательности $x[n]$ имеет вид: $X(e^{j\omega}) = 1 + A_1 \cos \omega + A_2 \cos 2\omega$, где A_i — какие-то константы.

Условие 2: второй отсчет свертки $x[n] * \delta[n - 3]$ равен 5.

Условие 3: второй отсчет восемьточечной циклической свертки $x[n - 3]$ с трехчленной последовательностью $w[n]$ из рис. 8.59 равен 11, т. е.

$$\sum_{m=0}^7 w[m]x[((n-3-m))_8] \Big|_{n=2} = 11.$$

- 8.36. Над конечной последовательностью

$$x[n] = 2\delta[n] + \delta[n - 1] + \delta[n - 3]$$

совершаются следующие действия:

- 1) вычисляют пятиточечное ДПФ $X[k]$;
- 2) вычисляют обратное пятиточечное ДПФ от $Y[k] = (X[k])^2$ и получают последовательность $y[n]$.
- а) Найдите отсчеты последовательности $y[n]$ при $n = 0, 1, 2, 3, 4$.
- б) Пусть в описанных выше операциях используется не пяти-, а N -точечное ДПФ. Как нужно выбрать N , чтобы выполнялось равенство $y[n] = x[n] * x[n]$ при $0 \leq n \leq N - 1$?

- 8.37. Ненулевые отсчеты последовательности $x[n]$ расположены над отрезком $[0; N - 1]$, причем N — четно. Обозначим через $X(z)$ ее z -преобразование. В табл. 8.3 перечислены семь последовательностей, полученных из $x[n]$, а в табл. 8.4 — девять последовательностей, построенных по $X(z)$. Каждой из последовательностей в табл. 8.3 сопоставьте ее ДПФ из табл. 8.4. Размер преобразования должен быть не меньше длины последовательности $g_k[n]$. В иллюстративных целях можно считать, что огибающая последовательности $x[n]$ выглядит, как на рис. 8.60.

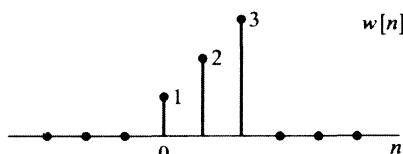


Рис. 8.59.

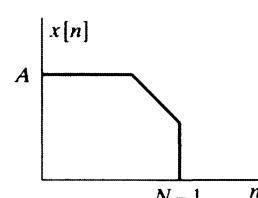


Рис. 8.60.

Таблица 8.3.

$g_1[n] = x[N - 1 - n]$	
$g_2[n] = (-1)^n x[n]$	
$g_3[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ x[n-N], & N \leq n \leq 2N-1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	
$g_4[n] = \begin{cases} x[n] + x[n + \frac{N}{2}], & 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	
$g_5[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & N \leq n \leq 2N-1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	
$g_6[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ — четное,} \\ x[n-N], & n \text{ — нечетное} \end{cases}$	
$g_7[n] = x[2n]$	

Таблица 8.4.

$H_1[k] = X(e^{j2\pi k/N})$
$H_2[k] = X(e^{j2\pi k/2N})$
$H_3[k] = \begin{cases} 2X(e^{j2\pi k/2N}), & k \text{ четно,} \\ 0, & k \text{ нечетно} \end{cases}$
$H_4[k] = X(e^{j2\pi k/(2N-1)})$
$H_5[k] = 0,5(X(e^{j2\pi k/N}) + X(e^{j2\pi(k+N/2)/N}))$
$H_6[k] = X(e^{j4\pi k/N})$
$H_7[k] = e^{j2\pi k/N} X(e^{-j2\pi k/N})$
$H_8[k] = X(e^{j(2\pi/N)(k+N/2)})$
$H_9[k] = X(e^{-j2\pi k/N})$

- 8.38. Подберите десятиточечную последовательность $x[n]$ с ненулевыми отсчетами над отрезком $[0; 9]$, все значения десятиточечного ДПФ которой вещественны, а Фурье-образ имеет вид $X(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{j\alpha\omega}$ при $|\omega| < \pi$, причем $A(\omega)$ — вещественнонезначающая функция, а α — ненулевая вещественная константа.

- 8.39. Пусть $y[n]$ — циклическая свертка двух 100-членных последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$, у которых ненулевые отсчеты лежат только над отрезком $[0; 99]$:

$$y[n] = x_1(100) x_2[n] = \sum_{k=0}^{99} x_1[k] x_2[((n-k))_{100}], \quad 0 \leq n \leq 99.$$

Известно, что ненулевые отсчеты последовательности $x_1[n]$ фактически сосредоточены на отрезке $10 \leq n \leq 39$. Перечислите все значения n , при которых отсчеты $y[n]$ гарантированно совпадают с отсчетами линейной свертки последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$.

- 8.40. Пусть $x[n] = 0$ вне отрезка $0 \leq n \leq 49$ и $h[n] = 0$ при $n \notin [0; 9]$.
- Каково максимальное число ненулевых членов линейной свертки $x[n] * h[n]?$
 - Известно, что 50-точечная циклическая свертка этих последовательностей постоянна: $x[n](50) h[n] = 10$ при $0 \leq n \leq 49$, а пять первых отсчетов линейной свертки равны 5: $x[n] * h[n] = 5$ при $0 \leq n \leq 4$. Найдите все члены линейной свертки, какие сможете.
- 8.41. Предположим, что отсчеты последовательности $x[n]$ равны нулю при $n < 0$, $9 < n < 30$ и $n \geq 40$, а последовательности $y[n]$ при $n < 10$ и $n > 19$, как показано на рис. 8.61. Введем обозначения:

$$w[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n-k],$$

$$g[n] = x[n](40) y[n] = \sum_{k=0}^{39} x[k] y[((n-k))_{40}].$$

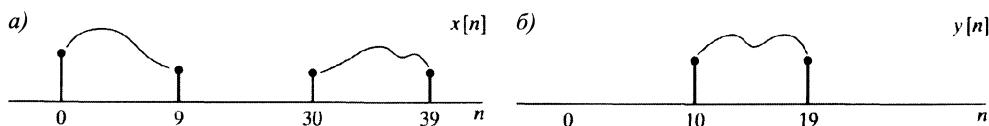


Рис. 8.61.

- При каких значениях n отсчеты последовательности $w[n]$ могут оказаться ненулевыми?
 - При каких значениях n отсчеты последовательности $w[n]$ можно получить из $g[n]?$ Укажите, как именно можно это сделать.
- 8.42. На рис. 8.62 приведены восьмичленные последовательности $h_1[n]$ и $h_2[n]$. Известно, что первая из них получается из второй в результате циклического сдвига $h_1[n] = h_2[((n-m_8))]$.
- Можно ли утверждать, что модули членов восьмиточечного ДПФ этих последовательностей совпадают?

- 6) Мы хотим реализовать КИХ-фильтр нижних частот, используя одну из этих последовательностей в качестве его импульсной характеристики. Какие из следующих утверждений справедливы?

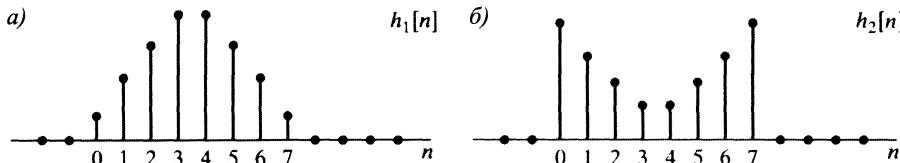


Рис. 8.62.

- (i) Фильтр с $h_1[n]$ в качестве импульсной характеристики окажется лучше, чем с $h_2[n]$.
- (ii) Фильтр с $h_2[n]$ в качестве импульсной характеристики окажется лучше, чем с $h_1[n]$.
- (iii) Эти последовательности одинаково хороши (или плохи) в качестве импульсной характеристики фильтра нижних частот.

- 8.43. Нам нужно реализовать линейную свертку 10 000-членной последовательности со 100-членной импульсной характеристикой. Попытаемся это сделать с помощью 256-точечного прямого и обратного ДПФ.
- Какое наименьшее число 256-точечных прямых и обратных ДПФ необходимо применить для определения всех ненулевых отсчетов свертки, если используется метод суммирования перекрытий?
 - Какое наименьшее число 256-точечных прямых и обратных ДПФ необходимо применить для определения всех ненулевых отсчетов свертки, если используется метод хранения перекрытий?
 - В главе 9 мы увидим, что если N — степень двойки, то для вычисления прямого (или обратного) ДПФ требуется $\frac{N}{2} \log_2 N$ умножений и $N \log_2 N$ сложений комплексных чисел. Сравните число арифметических операций (умножений и сложений), необходимых для реализации фильтра из условия задачи, в случаях суммирования перекрытий, хранения перекрытий и прямого вычисления линейной свертки.

- 8.44. Пусть $x_1[n]$ — расширенная версия последовательности $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$:

$$x_1[n] = \begin{cases} x[n/4], & k = 0, \pm 4, \pm 8, \dots, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найдите и изобразите шестичленную последовательность $q[n]$, чье шеститочечное ДПФ $Q[k]$ удовлетворяет равенствам: $Q[0] = X_1(1)$, $Q[3] = X_1(-1)$, где $X_1(z)$ — z -преобразование последовательности $x_1[n]$.

- 8.45. Обозначим семиточечное ДПФ вещественноненесимметричной пятичленной последовательности $x_2[n]$ через $X_2[k]$. Пусть семиточечное ДПФ последовательности $g[n]$ выглядит как $\operatorname{Re}\{X_2[k]\}$. Покажите, что тогда $g[0] = x_2[0]$, и найдите связь между $g[1]$ и $x_2[1]$. Поясните свой ответ.

- 8.46. Символами $X_i(e^{j\omega})$ обозначены Фурье-образы последовательностей $x_i[n]$ ($i = 1, 2, 3$) из рис. 8.63, а $X_i[k]$ — пятиточечные ДПФ этих последовательностей. Выясните, какие из этих последовательностей удовлетворяют каким-нибудь из перечисленных ниже свойств (и каким именно):
- $X_i[k]$ — вещественное число при любом k ;
 - $X_i(e^{j\omega}) = A_i(\omega)e^{j\alpha_i \omega}$, где $A_i(\omega)$ — вещественнозначная функция, а α_i — константа;
 - $X_i[k] = B_i[k]e^{j\gamma_i k}$, где $B_i[k]$ — вещественнозначная последовательность, а γ_i — константа.

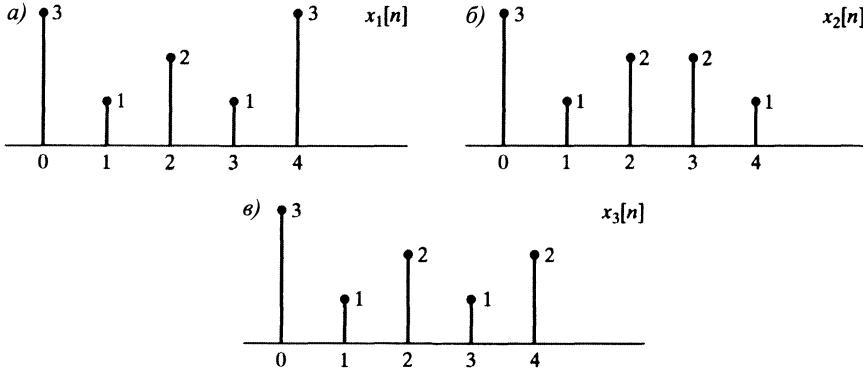


Рис. 8.63.

- 8.47. Пусть $x[n]$ — восьмичленная вещественнозначная последовательность, причем $x[n] = 0$ при $n < 0$ и $n > 7$, а $X[k]$ — ее восьмиточечное ДПФ.

а) Выразите

$$\left(\frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 X[k] e^{j(2\pi/8)kn} \right) \Big|_{n=9}$$

через отсчеты $x[n]$.

- б) Пусть $v[n]$ — восьмичленная последовательность с нулевыми отсчетами при $n < 0$ и $n > 7$, а $V[k]$ — ее восьмиточечное ДПФ. Выразите $v[n]$ через $x[n]$, если $V[k] = X(2e^{j(2\pi k + \pi)/8})$ при $k = 0, 1, \dots, 7$, где $X(z)$ — z -преобразование последовательности $x[n]$.
- в) Пусть $w[n]$ — четырехчленная последовательность с нулевыми отсчетами при $n < 0$ и $n > 3$, а $W[k]$ — ее четырехточечное ДПФ. Выразите $w[n]$ через $x[n]$, если $W[k] = X[k] + X[k+4]$.
- г) Пусть $y[n]$ — восьмичленная последовательность с нулевыми отсчетами при $n < 0$ и $n > 7$, а $Y[k]$ — ее восьмиточечное ДПФ. Выразите $y[n]$ через $x[n]$, если

$$Y[k] = \begin{cases} 2X[k], & k = 0, 2, 4, 6, \\ 0, & k = 1, 3, 5, 7. \end{cases}$$

- 8.48. а) Предположим, что у N -точечной последовательности $x[n]$ с нулевыми членами при $n < 0$ и $n > N$ есть по крайней мере один ненулевой отсчет. Может

ли преобразование Фурье такой последовательности удовлетворять условию:

$$X(e^{j2\pi k/M}) = 0, \quad 0 \leq k \leq M-1,$$

где M — целое число, большее или равное N ? Положительный ответ подкрепите примером, а отрицательный докажите.

б) Ответьте на предыдущий вопрос, предполагая теперь, что $M < N$.

- 8.49. Пусть $x_1[n]$ — бесконечная устойчивая (т. е. абсолютно суммируемая) последовательность, z -преобразование которой описывается формулой:

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - (1/3)z^{-1}}.$$

Пусть, с другой стороны, $x_2[n]$ — конечная последовательность длины N , а ее N -точечное ДПФ равно $X_2[k] = X_1(z)\Big|_{z=e^{j2\pi k/N}}$, $0 \leq k \leq N-1$. Выразите $x_2[n]$ через $x_1[n]$.

- 8.50. Внимательно следите за различиями между подзадачами.

а) Конечный сигнал

$$x[n] = \begin{cases} 1 + \cos \frac{\pi n}{4} - \frac{1}{2} \cos \frac{3\pi n}{4}, & 0 \leq n \leq 7, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

выражается через обратное ДПФ следующим образом:

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 m X_8[k] e^{j(2\pi k/8)n}, & 0 \leq n \leq 7, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $X_8[k]$ — восьмиточечное ДПФ последовательности $x[n]$. Изобразите $X_8[k]$ при $0 \leq k \leq 7$.

б) Вычислите 16-точечное ДПФ $V_{16}[k]$ 16-членной последовательности

$$v[n] = \begin{cases} 1 + \cos \frac{\pi n}{4} - \frac{1}{2} \cos \frac{3\pi n}{4}, & 0 \leq n \leq 15, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

и изобразите его график при $0 \leq k \leq 15$.

в) Рассмотрите модуль $|X_{16}[k]|$ 16-точечного ДПФ $V_{16}[k]$ 8-членной последовательности $x[n]$ из п. а) задачи и изобразите его график при $0 \leq k \leq 15$, не вычисляя явно ДПФ. Вам не удастся найти все значения модуля $|X_{16}[k]|$, используя результаты предыдущих пунктов задачи, но некоторые из них должны определить точно. Отметьте все вычисленные точно отсчеты черными кружочками, а остальные — незаполненными.

Задачи повышенной сложности

- 8.51. При выводе формулы анализа ДРФ (8.11) мы опирались на тождество (8.7). Будем его доказывать отдельно в двух случаях: $k - r = mN$ и $k - r \neq mN$.

а) Пусть $k - r = mN$. Покажите, что тогда $e^{j(2\pi/N)(k-r)n} = 1$, и выведите отсюда равенство:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} = 1, \quad \text{при } k - r = mN.$$

Поскольку k и r в тождестве (8.7) — целые числа, можно сделать замену $\ell = k - r$ и, опираясь на формулу суммы геометрической прогрессии, записать:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)\ell n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{j(2\pi/N)\ell} \right]^n = \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - e^{j(2\pi/N)\ell N}}{1 - e^{j(2\pi/N)\ell}}.$$

- б) При каких значениях ℓ правая часть последней формулы не определена? Иными словами, когда числитель и знаменатель одновременно обращаются в нуль?

в) Опираясь на предыдущий пункт задачи, покажите, что если $k - r \neq mN$, то

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} = 0.$$

- 8.52. В § 8.3 утверждалось, что если $\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n - m]$, то $\tilde{X}_1[k] = W_N^{km} \tilde{X}[k]$, где $\tilde{X}[k]$ и $\tilde{X}_1[k]$ — коэффициенты ДРФ последовательностей $\tilde{x}[n]$ и $\tilde{x}_1[n]$ соответственно. Здесь предлагается план доказательства этого свойства.

а) Делая подходящую замену переменных в формуле (8.11), покажите, что $\tilde{X}_1[k]$ записывается в виде:

$$\tilde{X}_1[k] = W_N^{km} \sum_{r=-m}^{N-1-m} \tilde{x}[r] W_N^{kr}. \quad (8.191)$$

б) Сумма в формуле (8.191) может быть переписана как

$$\sum_{r=-m}^{N-1-m} \tilde{x}[r] W_N^{kr} = \sum_{r=-m}^{-1} \tilde{x}[r] W_N^{kr} + \sum_{r=0}^{N-1+m} \tilde{x}[r] W_N^{kr}. \quad (8.192)$$

Используя тот факт, что $\tilde{x}[r]$ и W_N^{kr} — периодические последовательности, покажите, что

$$\sum_{r=-m}^{-1} \tilde{x}[r] W_N^{kr} = \sum_{r=N-m}^{N-1} \tilde{x}[r] W_N^{kr}. \quad (8.193)$$

в) Опираясь на результаты первых двух пунктов задачи, докажите равенство:

$$\tilde{X}_1[k] = W_N^{km} \sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}[r] W_N^{kr} = W_N^{km} \tilde{X}[k].$$

- 8.53. а) В табл. 8.1 перечислены свойства симметрии ДРФ периодических последовательностей, некоторые из которых вам предлагается доказать. При доказательстве выписанных ниже свойств можно пользоваться как определением ДРФ, так и доказанными ранее свойствами.

<i>Последовательность</i>	<i>ДРФ</i>
1. $\tilde{x}^*[n]$	$\tilde{X}^*[-k]$
2. $\tilde{x}^*[-n]$	$\tilde{X}^*[k]$
3. $\operatorname{Re}\{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_e[k]$
4. $j \operatorname{Im} \tilde{x}[n]$	$\tilde{X}_o[k]$

- б) Опираясь на свойства, доказанные в предыдущем пункте задачи, покажите, что коэффициенты ДРФ вещественноизначной периодической последовательности удовлетворяют следующим соотношениям:

1. $\operatorname{Re}\{\tilde{X}[k]\} = \operatorname{Re}\{\tilde{X}[-k]\}$
2. $\operatorname{Im}\{\tilde{X}[k]\} = -\operatorname{Im}\{\tilde{X}[-k]\}$
3. $|\tilde{X}[k]| = |\tilde{X}[-k]|$
4. $\triangleleft \tilde{X}[k] = -\triangleleft \tilde{X}[-k]$

- 8.54. В § 8.5 утверждалось, что можно вывести соотношение, связывающее коэффициенты $\tilde{X}[k]$ ДРФ периодической последовательности с Фурье-образом $X(e^{j\omega})$ одного ее периода. Поскольку $\tilde{X}[k]$ — последовательность отсчетов функции $X(e^{j\omega})$, это соотношение получается как интерполяционная формула.

Предлагается вывести искомое соотношение, опираясь на материал § 8.5, формулу (8.56) и теорему о периодической свертке из подраздела 2.10.7, по следующему плану

1. Представьте Фурье-образ $\tilde{X}(e^{j\omega})$ последовательности $\tilde{x}[n]$ в виде цепочки импульсов, используя обозначение $\tilde{X}[k]$ коэффициентов ДРФ.
2. Согласно формуле (8.59), последовательность $x[n]$ можно записать как $x[n] = \tilde{x}[n]w[n]$, где $w[n]$ — подходящее окно конечной длины.
3. Так как $x[n] = \tilde{x}[n]w[n]$, то по теореме из подраздела 2.10.7 $X(e^{j\omega})$ — периодическая свертка функций $\tilde{X}(e^{j\omega})$ и $W(e^{j\omega})$.

Проверьте формулу

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_k \tilde{X}[k] \frac{\sin[(\omega N - 2\pi k)/2]}{\sin[(\omega - (2\pi k/N))/2]} e^{-j[(N-1)/2](\omega - 2\pi k/N)}$$

и укажите пределы суммирования.

- 8.55. Пусть $X[k]$ — N -точечное ДПФ N -членной последовательности $x[n]$.
- а) Рассмотрев отдельно случай четного и нечетного N , покажите, что если $x[n] = -x[N-1-n]$, то $X[0] = 0$.
 - б) Докажите, что если N четно и $x[n] = x[N-1-n]$, то $X[N/2] = 0$.

- 8.56. Сопряженно-симметричная и сопряженно-кососимметричная части последовательности $x[n]$ в § 2.9 определялись как

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]), \quad x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]),$$

а в подразделе 8.7.4 периодические сопряженно-симметричная и сопряженно-кососимметричная части N -членной последовательности были введены по формулам:

$$x_{\text{ep}}[n] = \frac{1}{2}(x[((n))_N] + x^*[((-n))_N]), \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

$$x_{\text{op}}[n] = \frac{1}{2}(x[((n))_N] - x^*[((-n))_N]), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

- a) Докажите справедливость следующих равенств:

$$x_{\text{ep}}[n] = (x_e[n] + x_e[n-N]), \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

$$x_{\text{op}}[n] = (x_o[n] + x_o[n-N]), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

- б) Поскольку $x[n]$ — N -членная последовательность, то в общей ситуации последовательность $x_e[n]$ нельзя восстановить по $x_{\text{ep}}[n]$, а $x_o[n]$ по $x_{\text{op}}[n]$. Докажите, что при дополнительном условии $x[n] = 0$ при $n > N/2$ указанные последовательности восстанавливаются по своим периодическим аналогам.

- 8.57. Покажите, что для N -членной последовательности $x[n]$ и ее N -точечного ДПФ $X[k]$ из формул (8.68) и (8.69) следует тождество:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2,$$

называемое *формулой Парсеваля для ДПФ*.

- 8.58. Пусть $x[n]$ — вещественнозначная неотрицательная N -членная последовательность, т. е. все ее отсчеты вещественны и неотрицательны, причем $x[n] = 0$, если $n \notin [0; N-1]$. Обозначим через $X[k]$ ее ДПФ, а через $X(e^{j\omega})$ — Фурье-образ этой последовательности.

Выясните, какие из перечисленных ниже утверждений истинны, а какие ложны. Истинные утверждения докажите, а ложные опровергните контрпримером.

- а) Если $X(e^{j\omega}) = B(\omega)e^{j\alpha\omega}$, где $B(\omega)$ — вещественнозначная функция и α — вещественная константа, то $X[k]$ можно представить в виде $X[k] = A[k]e^{j\gamma k}$, где $A[k]$ — вещественнозначная последовательность, а γ — вещественная константа.

- б) Если $X[k] = A[k]e^{j\gamma k}$, где $A[k]$ — вещественнозначная последовательность, а γ — вещественная константа, то $X(e^{j\omega}) = B(\omega)e^{j\alpha\omega}$, где $B(\omega)$ — вещественнозначная функция и α — вещественная константа.

- 8.59. Пусть $x[n]$ и $y[n]$ — вещественнозначные положительные 256-членные последовательности, т. е. при $0 \leq n \leq 255$ $x[n] > 0$ и $y[n] > 0$, а при остальных значениях переменной n отсчеты $x[n]$ и $y[n]$ нулевые. Обозначим через $r[n]$ линейную свертку последовательностей $x[n]$ и $y[n]$, символ $R(e^{j\omega})$ закрепим за Фурье-образом

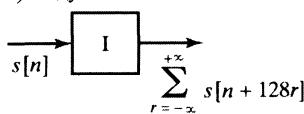
этой свертки, а $R_s[k]$ за дискретизацией функции $R(e^{j\omega})$:

$$R_s[k] = R(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi k/128}, \quad 0 \leq k \leq 127.$$

Перед нами стоит задача о вычислении $R_s[k]$ по данным $x[n]$ и $y[n]$ наиболее эффективным способом. При этом в нашем распоряжении находятся лишь модули, представленные на рис. 8.64. Стоимость же модулей распределена следующим образом:

модули I и II бесплатны;
модуль III стоит 10 единиц;
модуль IV стоит 50 единиц;
модуль V стоит 100 единиц.

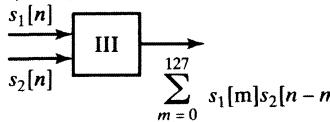
Рис. 8.64. а) модуль I



б) модуль II

$$\text{сигнал } w[n] = \begin{cases} s[n], & 0 \leq n \leq 127 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

в) модуль III



г) модуль IV

$$\text{сигнал } s_2[n] \rightarrow \text{блок } \text{IV} \rightarrow \sum_{m=0}^{255} s_1[m]s_2[n - m]$$

д) модуль V

$$\text{сигнал } s[n] \rightarrow \text{блок } \text{V} \rightarrow S[k] = \sum_{n=0}^{127} s[n]e^{-j(2\pi/128)nk}$$

Используя один или несколько перечисленных модулей, постройте систему, вычисляющую $R_s[k]$ по входным сигналам $x[n]$ и $y[n]$. При этом необходимо убедиться, что система действительно работает, и выяснить, насколько она эффективна относительно затрат на модули.

- 8.60. Пусть $y[n]$ — выходной сигнал устойчивой ЛС-системы с характеристической функцией $H(z) = 1/(z - bz^{-1})$, где b — известная константа. Нам нужно восстановить входной сигнал $x[n]$ по реакции на него системы. Для этого предлагается следующая процедура.

1. Используя N членов последовательности $y[n]$ с номерами $0 \leq n \leq N - 1$, вычислить N -точечное ДПФ выходного сигнала.
2. Сформировать последовательность $V[k] = (W_N^{-k} - bW_N^k)Y[k]$.
3. Применить обратное ДПФ к $V[k]$ и найти $v[n]$.

Для каких значений n из отрезка $[0; N - 1]$ можно гарантировать равенство $x[n] = v[n]$?

- 8.61. Верне ввел модифицированное дискретное преобразование Фурье (МДПФ, см. работу [152]), вычисляющее отсчеты z -преобразования на единичной окружности. В частности, если $X_M[k]$ — МДПФ последовательности $x[n]$, то

$$X_M[k] = X(z) \Big|_{z=e^{j(2\pi k/N + \pi/N)}}, \quad 0 \leq k \leq N - 1.$$

Будем предполагать, что N четно.

- а) N -точечное МДПФ последовательности $x[n]$ соответствует N -точечному ДПФ последовательности $x_M[n]$. Выпишите $x_M[n]$ через $x[n]$.
- б) ДПФ вещественноизначной последовательности $x[n]$ сопряженно-симметрично: $X[k] = X^*[((-k))_N]$ при $0 \leq k \leq N - 1$. Аналогичному соотношению удовлетворяет МДПФ $X_M[k]$ вещественной последовательности $x[n]$. Найдите его.
- в) (i) Пусть $R[k] = X_M[2k]$, т. е. $R[k]$ состоит из отсчетов $X_M[k]$ с четными номерами. Опираясь на результат предыдущего пункта задачи, покажите, что $X_M[k]$ восстанавливается по $R[k]$.
- (ii) Последовательность $R[k]$ может быть получена как $N/2$ -точечное МДПФ $N/2$ -членной последовательности $r[n]$. Выразите $r[n]$ в терминах $x[n]$.

Согласно пунктам «б» и «в» задачи, N -точечное МДПФ последовательности $x[n]$ можно вычислять, формируя последовательность $r[n]$ и находя $N/2$ -точечное МДПФ последовательности $r[n]$. Оставшиеся пункты задачи посвящены использованию МДПФ при вычислении линейной свертки.

- г) Пусть $X_{1M}[k]$, $X_{2M}[k]$ и $X_{3M}[k]$ — МДПФ N -членных последовательностей $x_1[n]$, $x_2[n]$ и $x_3[n]$. Выразите последовательность $x_3[n]$ через $x_1[n]$ и $x_2[n]$, если $X_{3M}[k] = X_{1M}[k]X_{2M}[k]$. Ваше выражение должно состоять из суммы комбинаций отсчетов последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$, аналогичной (но не тождественной) циклической свертке.
- д) Формулу, которую вы получили в предыдущем пункте, удобно называть *модифицированной циклической сверткой*. Покажите, что если отсчеты обеих последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$ равны нулю при $n \geq N/2$, то их модифицированная циклическая свертка совпадает с линейной.

- 8.62. В некоторых приложениях теории кодирования приходится вычислять 63-точечную циклическую свертку 63-членных последовательностей $x[n]$ и $h[n]$. Предположим, что в вашем распоряжении находятся устройства, осуществляющие операции сложения, умножения и N -точечного ДПФ, где N — степень двойки.

- а) Можно ли вычислить 63-точечную циклическую свертку 63-членных последовательностей $x[n]$ и $h[n]$, используя несколько 64-точечных прямых и обратных ДПФ и метод суммирования перекрытий? Сколько ДПФ вам при этом предстоит найти?

Указание: Представьте каждую из этих последовательностей как сумму 32-членной и 31-членной последовательностей.

- б) Разработайте алгоритм, вычисляющий 63-точечную циклическую свертку последовательностей $x[n]$ и $h[n]$, использующий два прямых и одно обратное 128-точечное ДПФ.

- в) 63-точечную циклическую свертку последовательностей $x[n]$ и $h[n]$ можно было бы вычислять через линейную с учетом искажения во временной области. Какой из трех перечисленных методов вычисления циклической свертки наиболее эффективен относительно количества необходимых умножений? Какой наименее эффективен? (Считайте, что на умножение двух комплексных чисел затрачивается четыре умножения вещественных, а последовательности $x[n]$ и $h[n]$ — вещественноизначны.)

- 8.63. Нам нужно профильтровать КИХ-фильтром с 50-членной импульсной характеристикой очень длинную строку данных. Попытаемся реализовать фильтр с

помощью ДПФ и техники хранения перекрытий. Предлагается следующая процедура.

1. Входные участки должны перекрываться на V отсчетов.
2. Из выхода, соответствующего каждому входу, выделяется M отсчетов таким образом, что, выписывая их один за другим, мы получим желаемый выход фильтра.

Предположим, что входной участок насчитывает 100 отсчетов, размер ДПФ — $128 = 2^7$ точек, а выходная последовательность, полученная в результате циклической свертки, нумеруется числами от 0 до 127.

- a) Найдите V .
 - б) Определите M .
 - в) Подберите номера начала и конца выделяемого участка выходного сигнала длины M , т. е. определите, из каких именно отсчетов циклической свертки получается желаемый выходной сигнал фильтра.
- 8.64. Одна из проблем, с которой обычно сталкиваются на практике, состоит в том, что в результате обработки ЛС-системой с характеристической функцией $H(z)$ входной сигнал $x[n]$ искажается и получается сигнал $y[n]$. Нам хотелось бы восстановить исходный сигнал $x[n]$ по его искаженной версии $y[n]$. С теоретической точки зрения это можно сделать, подавая сигнал $y[n]$ на вход обратной системы, характеристическая функция которой $H_i(z)$ равна $1/H(z)$.
- Допустим, что искажения вносятся КИХ-фильтром с импульсной характеристики $h[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n - n_0]$, где n_0 — натуральное число, т. е. искажение $x[n]$ — отголосок задержки на n_0 отсчетов.
- а) Найдите характеристическую функцию $H(z)$ этого КИХ-фильтра и N -точечное ДПФ $H[k]$ импульсной характеристики $h[n]$. Можно предполагать, что $N = 4n_0$.
 - б) Найдите импульсную характеристику $h_i[n]$ обратного фильтра. Конечна она или бесконечна? Если обратный фильтр относится к КИХ-фильтрам, найдите число членов его импульсной характеристики.
 - в) Предположим, что обратный фильтр ищется среди КИХ-фильтров, причем N -точечное ДПФ его импульсной характеристики выглядит как $G[k] = 1/H[k]$, $0 \leq k \leq N - 1$. Чему равна импульсная характеристика $g[n]$ обратного фильтра?
 - г) Может оказаться, что КИХ-фильтр с N -точечным ДПФ импульсной характеристики, равным $G[k] = 1/H[k]$, является обратным к искажающему фильтру. Причем в качестве доказательства взаимной обратности этих систем предлагается следующее рассуждение: соединив последовательно эти два фильтра, мы получим систему, N -точечное ДПФ импульсной характеристики которой равно $G[k]H[k] = 1$, откуда следует, что этот каскад является всепропускающим неискажающим фильтром. Найдите ошибку в этом доказательстве.
 - д) Вычислите свертку последовательностей $g[n]$ и $h[n]$ и на основании результата сделайте вывод о том, насколько хорошо фильтр с N -точечным ДПФ импульсной характеристики $G[k] = 1/H[k]$ реализует обратный фильтр.

- 8.65. Дискретное преобразование Хартли (ДПХ) N -членной последовательности $x[n]$ определяется как

$$z[n] \xleftarrow{\mathcal{DHT}} X_H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] H_N[nk], \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (8.194)$$

где

$$H_N[a] = C_N[a] + S_N[a], \quad C_N[a] = \cos(2\pi a/N), \quad S_N[a] = \sin(2\pi a/N).$$

Разработанное Р. В. Л. Хартли в 1942 г. для непрерывного случая дискретное преобразование обладает свойствами, которые делают его привлекательным и полезным и в дискретной ситуации [11, 12]. Действительно, из определения (8.194) видно, что ДПХ вещественной последовательности вещественнозначно. Кроме того, ДПХ удовлетворяет теореме о свертке и существуют алгоритмы, позволяющие быстро вычислять это преобразование.

В полном соответствии с ДПФ преобразование Хартли наделено неявной периодичностью, которая обычно используется при операциях над ДПХ. Иными словами, по конечной последовательности $x[n]$ ($x[n] = 0$ при $n \notin [0; N-1]$) формируется периодическая последовательность

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rN],$$

один период которой совпадает с исходной. По периодической последовательности вычисляется дискретный ряд Хартли (ДРХ), коэффициенты которого интерпретируются как ДПХ последовательности $x[n]$.

а) Формула анализа ДРХ имеет вид:

$$\tilde{x}[n] \xleftarrow{\mathcal{DRX}} \tilde{X}_H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] H_N[nk]. \quad (8.195)$$

Покажите, что коэффициенты ДРХ N -периодичны, т. е. для любого целого числа k имеет место равенство $\tilde{X}_H[k] = \tilde{X}_H[k+N]$.

б) Можно показать, что базисные последовательности $H_N[nk]$ ортогональны, т. е.

$$\sum_{k=0}^{N-1} H_N[nk] H_N[mk] = \begin{cases} N, & ((n))_N = ((m))_N, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Используя ортогональность, покажите, что из формулы анализа (8.195) вытекает формула синтеза вида

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_H[k] H_N[nk]. \quad (8.196)$$

Заметим, что ДПХ — это просто один период последовательности коэффициентов ДРХ и формула синтеза ДПХ (или обратное ДПХ) совпадает с формулой синтеза ДРХ (8.196), за исключением того, что мы просто выделяем один период последовательности $\tilde{x}[n]$. Иначе говоря, формула обратного ДПХ выглядит как

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_H[k] H_N[nk], \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (8.197)$$

Опираясь на определение прямого (8.194) и обратного (8.197) ДПХ, приступим к выводу ряда полезных свойств этого представления конечных дискретных сигналов.

в) Проверьте, что $H_N[a] = H_N[a + N]$ и

$$\begin{aligned} H_N[a + b] &= H_N[a]C_N[b] + H_N[-a]S_N[b] = \\ &= H_N[b]C_N[a] + H_N[-b]S_N[a]. \end{aligned}$$

г) Рассмотрите циклический сдвиг последовательности:

$$x_1[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n - n_0] = x[((n - n_0))_N], & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (8.198)$$

который получается как один период сдвига периодической последовательности $\tilde{x}[n - n_0]$. Опираясь на тождество из предыдущего пункта задачи, покажите, что коэффициенты ДРХ сдвинутой периодической последовательности вычисляются как

$$\tilde{x}[n - n_0] \xleftarrow{\mathcal{DHS}} \tilde{X}_H[k]C_N[n_0k] + \tilde{X}_H[-k]S_N[n_0k]. \quad (8.199)$$

Отсюда напрашивается вывод, что ДПХ циклического сдвига конечной последовательности $x[((n - n_0))_N]$ равно

$$x[((n - n_0))_N] \xleftarrow{\mathcal{DHT}} X_H[k]C_N[n_0k] + X_H[(-k)_N]S_N[n_0k]. \quad (8.200)$$

д) Пусть $x_3[n]$ — N -точечная циклическая свертка N -членных последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$:

$$x_3[n] = x_1[n] \odot x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n - m))_N], \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (8.201)$$

Применяя ДПХ к обеим частям этого равенства и учитывая (8.200), покажите, что

$$\begin{aligned} X_{H3}[k] &= \frac{1}{2}X_{H1}[k](X_{H2}[k] + X_{H2}[(-k)_N]) + \\ &+ \frac{1}{2}X_{H1}[(-k)_N](X_{H2}[k] - X_{H2}[(-k)_N]) \end{aligned} \quad (8.202)$$

при $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Это и есть теорема о свертке в контексте ДПХ.

Заметим, что линейная свертка может быть вычислена через ДПХ тем же способом, что и через ДПФ. Вычисление $X_{H3}[k]$ по последовательностям $X_{H1}[k]$ и $X_{H2}[k]$ требует того же количества арифметических операций, что и вычисление $X_3[k]$ по $X_1[k]$ и $X_2[k]$, а для поиска ДПХ потребуется лишь половина умножений вещественных чисел, необходимых для вычисления ДПФ.

е) Предположим, что нам нужно вычислить ДПХ N -членной последовательности $x[n]$, причем у нас есть устройство (или программа), реализующая N -точечное ДПФ. Опишите методику вычисления $X_H[k]$ по $X[k]$ при $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

*) Предположим, что нам нужно найти ДПФ N -членной последовательности $x[n]$, причем у нас есть устройство (или программа), реализующая N -точечное ДПХ. Опишите технику вычисления $X[k]$ по $X_H[k]$ при $k = 0, 1, \dots, N-1$.

- 8.66. Пусть $x[n]$ — N -членная последовательность с нулевыми отсчетами при $n < 0$ и $n > N-1$, а $\hat{x}[n]$ — $2N$ -членная последовательность, построенная по правилу:

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ x[n-N], & N \leq n \leq 2N-1, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим реализацию дискретного фильтра, блок-схема которого представлена на рис. 8.65, а). Длина его импульсной характеристики равна $2N$, т. е. $h[n] = 0$ при $h[n] = 0$ при $n < 0$ и $n > 2N-1$.

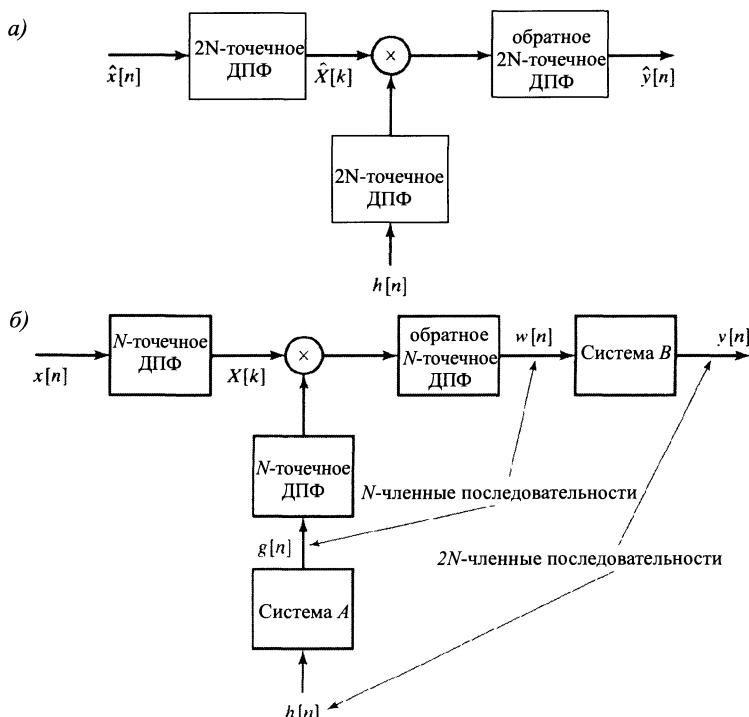


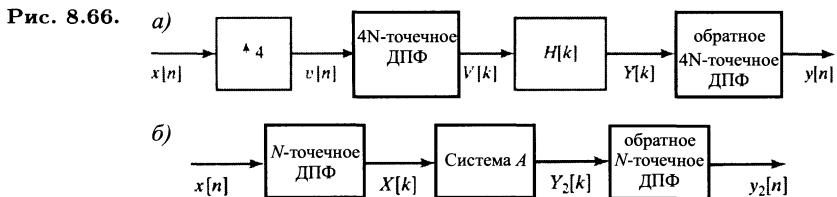
Рис. 8.65.

- а) Выразите $2N$ -точечное ДПФ $\hat{X}[k]$ последовательности $\hat{x}[n]$ из рис. 8.65, а) через N -точечное ДПФ $X[k]$ последовательности $x[n]$.
- б) При подходящих системах A и B систему из рис. 8.65, а) можно реализовать, используя лишь N -точечное ДПФ, как показано на рис. 8.65, б). Разработайте такие системы A и B , чтобы выходной сигнал $y[n]$ из рис. 8.65, б) совпадал с реакцией $\hat{y}[n]$ системы из рис. 8.65, а) при $0 \leq n \leq 2N-1$. Обратите внимание, что $h[n]$ и $y[n]$ из рис. 8.65, б) — $2N$ -членные последовательности, а $w[n]$ и $g[n]$ — N -членные.

- 8.67. В этой задаче исследуется приложение ДПФ к реализации фильтрования, необходимого для дискретного интерполирования, или повышающей дискретизации, сигнала. Предположим, что дискретный сигнал $x[n]$ получен дискретизацией непрерывного сигнала $x_c(t)$ с шагом дискретизации T . Более того, будем считать, что непрерывный сигнал узкополосный, т. е. $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq 2\pi/T$, а его дискретизация имеет N членов, т. е. $x[n] = 0$ при $n < 0$ и $n > N - 1$, где N — четное целое число. К сожалению, сигналы, встречающиеся на практике, не бывают одновременно и узкополосными и конечными, но в ситуации, когда обрабатываемый сигнал обладает очень малой энергией вне полосы $|\Omega| \leq 2\pi/T$, предположение, учитывающее оба эти свойства, является стандартным.

Нам хотелось бы реализовать интерполяцию с коэффициентом 4, т. е. увеличить частоту дискретизации в четыре раза. Как показано на рис. 4.24, это можно сделать с помощью системы, состоящей из расширителя частоты дискретизации, к которому подключен подходящий фильтр нижних частот. А КИХ-фильтр нижних частот, как мы видели в этой главе, реализуется с помощью ДПФ.

Будем предполагать, что длина импульсной характеристики $h[n]$ фильтра равна $N+1$. На рис. 8.66, а) изображена подходящая система, в которой $H[k]$ — $4N$ -точечное ДПФ импульсной характеристики фильтра нижних частот. Заметим, что $v[n]$ и $y[n]$ — $4N$ -членные последовательности.



- Подберите $H[k]$, при котором система из рис. 8.66, а) действительно осуществляет желаемую повышающую дискретизацию. Особое внимание обратите на фазу отсчетов $H[k]$.
- Повышающую дискретизацию сигнала $x[n]$ можно осуществить и с помощью системы из рис. 8.66, б). Подберите систему A из рисунка так, чтобы выходной сигнал $y_2[n]$ всей системы из рис. 8.66, б) совпадал с реакцией $y[n]$ системы из рис. 8.66, а). Заметим, что в системе A может быть задействована не одна, а несколько операций.
- Существует ли ситуация, когда система из рис. 8.66, б) предпочтительнее системы из рис. 8.66, а)?

- 8.68. Выведите формулу (8.163), исходя из (8.174) и (8.175).

- 8.69. Рассмотрите следующую процедуру.

- Сформируем последовательность $v[n] = x_2[2n]$ по последовательности $x_2[n]$ из (8.176). Тогда

$$v[n] = x[2n], \quad n = 0, 1, \dots, N/2 - 1,$$

$$v[N - 1 - n] = x[2n + 1], \quad n = 0, 1, \dots, N/2 - 1.$$

- Вычислим N -точечное ДПФ $V[k]$ последовательности $v[n]$.

Докажите справедливость следующих равенств при $k = 0, 1, \dots, N - 1$:

$$\begin{aligned} X^{c2}[k] &= 2\operatorname{Re}\{e^{-j2\pi k/(4N)}V[k]\} = 2 \sum_{n=0}^{N-1} v[n] \cos\left(\frac{\pi k(4n+1)}{2N}\right) = \\ &= 2 \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right). \end{aligned}$$

Заметим, что этот алгоритм использует N -точечное, а не $2N$ -точечное ДПФ, необходимое в формуле (8.177). Кроме того, поскольку $v[n]$ — вещественноненулевая последовательность, можно использовать четную и нечетную симметрии при вычислении $N/4$ -точечного комплексного ДПФ $V[k]$.

- 8.70. Выведите формулу (8.166), опираясь на (8.184) и (8.185).
- 8.71. а) Выведите соотношение, связывающее $\sum|X^{c1}[k]|^2$ и $\sum|x[n]|^2$, исходя из теоремы Парсеваля для ДПФ.
 б) Учитывая теорему Парсеваля для ДПФ, выведите соотношение, связывающее $\sum|X^{c2}[k]|^2$ и $\sum|x[n]|^2$.

ГЛАВА 9

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

9.1. Введение

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) играет важную роль в анализе, проектировании и реализации алгоритмов обработки дискретных сигналов и систем. Базисные свойства дискретизованного по времени преобразования Фурье (ДВПФ) и ДПФ, с которыми мы познакомились в главах 2 и 8, обеспечивают особенно успешный анализ и разработку систем в частотной области. Не менее важен тот факт, что существуют высокоеффективные алгоритмы явного вычисления ДПФ, в связи с чем ДПФ является основной составной частью многих практических приложений.

В главе 8 мы выяснили, что ДПФ последовательности совпадает с последовательностью отсчетов ее Фурье-образа, вычисленных в равноотстоящих друг от друга частотах. Следовательно, вычисление N -точечного ДПФ соответствует определению N отсчетов преобразования Фурье в частотах $\omega_k = 2\pi k/N$, т. е. в N точках, равномерно распределенных по единичной окружности на комплексной плоскости. В этой главе обсуждаются конкретные методы вычисления значений ДПФ. Особое внимание будет уделено высокоеффективным алгоритмам цифрового вычисления, которые обычно называют *быстрым преобразованием Фурье* (БПФ) (§ 9.4, 9.5). Алгоритмы БПФ наиболее хорошо работают, когда нужно определить все N отсчетов ДПФ. Если же нам достаточно знать только часть значений, то более эффективными могут оказаться другие алгоритмы, хотя они и уступают БПФ при вычислении всех значений ДПФ. Примеры таких алгоритмов, а именно Герцеля и импульсного преобразования, разбираются в § 9.3 и подразделе 9.7.2.

Сложность и эффективность алгоритмов можно измерять различными способами, причем окончательная оценка зависит как от технологий, имеющихся в вашем распоряжении, так и от назначения алгоритма. Мы для этой цели используем количество арифметических действий: умножений и сложений. Такой подход к измерению сложности легко осуществим и напрямую связан со скоростью работы алгоритма при реализации его на универсальном компьютере

или узкоспециализированных микропроцессорах. Однако в некоторых ситуациях сложность алгоритма предпочтительнее оценивать по-другому. Например, в СБИС-реализации при оценке эффективности алгоритмов немалое значение имеет площадь чипа и потребляемая мощность, которые нельзя оценить через количество арифметических операций.

Исходя из количества умножений и сложений, алгоритм БПФ может оказаться на несколько порядков эффективнее конкурентов. Фактически, эффективность БПФ настолько высока, что свертку во многих случаях удобнее находить через вычисление ДПФ сворачиваемых последовательностей и применение обратного ДПФ к их произведению (подробности см. в § 8.8). С другой стороны, разработано несколько алгоритмов (кратко упоминающихся в § 9.7) вычисления ДПФ (или более общего набора отсчетов преобразования Фурье), обязанных своей эффективностью вычислению преобразования Фурье через свертку. Наличие таких алгоритмов может подсказать способ реализации свертки через умножение ДПФ, которые, в свою очередь, вычисляются через подходящую свертку. Иначе говоря, возникает странная мысль об эффективном вычислении свертки через свертку. Несмотря на кажущуюся абсурдность, присущую этой идее, в § 9.7 мы убедимся, что в определенных случаях этот подход к свертке вполне разумен и не приводит к противоречиям.

9.2. Эффективное вычисление дискретного преобразования Фурье

Напомним, что N -точечным ДПФ конечной последовательности называется последовательность

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (9.1)$$

где $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$. Обратное ДПФ получается по формуле:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (9.2)$$

Как отсчеты исходной последовательности $x[n]$, так и члены ее ДПФ могут быть комплексными. Поскольку правые части этих формул отличаются друг от друга только знаком экспонент и скалярным множителем $1/N$, достаточно разработать процедуру вычисления одной из них, например (9.1), и обобщить ее для второй (см. задачу 9.1).

Прежде чем искать какой-то простой способ реализации ДПФ, рассмотрим тот, который непосредственно следует из определения (9.1). Так как $x[n]$ — комплексные числа, то для вычисления одного отсчета ДПФ $X[k]$ потребуется N умножений и $N - 1$ сложение комплексных чисел. Значит, для вычисления всех N значений ДПФ будет необходимо N^2 умножений и $N(N - 1)$ сложений комплексных чисел. Записав (9.1) как последовательность операций над вещественными

числами, получим

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\operatorname{Re}\{x[n]\} \operatorname{Re}\{W_N^{kn}\} - \operatorname{Im}\{x[n]\} \operatorname{Im}\{W_N^{kn}\} \right) + \\ + j \left(\operatorname{Re}\{x[n]\} \operatorname{Im}\{W_N^{kn}\} - \operatorname{Im}\{x[n]\} \operatorname{Re}\{W_N^{kn}\} \right), \quad (9.3)$$

откуда следует, что на каждое умножение комплексных чисел затрачивается четыре умножения и два сложения вещественных чисел, а каждое сложение комплексных чисел получается за счет двух сложений вещественных. Таким образом, при прямом вычислении одного значения ДПФ нужно потратить $4N$ вещественных умножений и $(4N - 2)$ вещественных сложений¹. В связи с тем, что для полного вычисления ДПФ нам необходимо найти N его значений, общее количество умножений вещественных чисел достигнет $4N^2$, а сложений — $N(4N - 2)$. Помимо умножений и сложений, при вычислении ДПФ на универсальном компьютере или специализированном оборудовании необходимо хранить в памяти N комплексных членов входной последовательности $x[n]$ столько же комплексных экспонент W_N^{kn} и постоянно обращаться к ним в процессе вычислений. Поскольку количество операций, а значит, и условное время вычислений примерно пропорционально N^2 , становится очевидным, что число арифметических операций, необходимых для прямого вычисления ДПФ, слишком велико при достаточно больших N . По этой причине интересны вычислительные процедуры, уменьшающие объем необходимых сложений и умножений.

Большинство подходов к повышению эффективности вычисления ДПФ основано на свойствах симметрии и периодичности комплексных экспонент W_N^{kn} :

- 1) $W_N^{k[N-n]} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^*$ (сопряженно-симметричная последовательность);
- 2) $W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$ (периодичность по n и k).

За счет симметричности комплексных экспонент можно, например, сгруппировать n -й и $(N - n)$ -й члены суммы (9.3):

$$\operatorname{Re}\{x[n]\} \operatorname{Re}\{W_N^{kn}\} + \operatorname{Re}\{x[N - n]\} \operatorname{Re}\{W_N^{k[N-n]}\} = \\ = \left(\operatorname{Re}\{x[n]\} + \operatorname{Re}\{x[N - n]\} \right) \operatorname{Re}\{W_N^{kn}\},$$

$$-\operatorname{Im}\{x[n]\} \operatorname{Im}\{W_N^{kn}\} - \operatorname{Im}\{x[N - n]\} \operatorname{Im}\{W_N^{k[N-n]}\} = \\ = - \left(\operatorname{Im}\{x[n]\} - \operatorname{Im}\{x[N - n]\} \right) \operatorname{Im}\{W_N^{kn}\}.$$

Аналогично группируются и остальные члены суммы (9.3), вследствие чего количество производимых умножений сокращается почти в два раза. Стоит, конечно, воспользоваться и тем, что при некоторых значениях произведения kn вещественная или мнимая части комплексной экспоненты, т. е. синус или косинус, обращаются в нуль или единицу, а значит, умножение на такую экспоненту еще

¹Оценивая сложность того или иного алгоритма, мы будем подсчитывать операции приближенно. Например, умножение на W_N^0 фактически делать ненужно, а мы его учитываем. Однако даже приближенная оценка числа операций, которой мы будем пользоваться, дает ясную картину при сравнении различных алгоритмов.

более упрощается. Однако приемы такого рода меняют количество операций несущественно, оставляя общее их количество пропорциональным N^2 . К счастью, свойство периодичности комплексных экспонент позволяет гораздо заметнее сократить число операций.

Вычислительные алгоритмы, учитывавшие как симметрию, так и периодичность комплексных экспонент, возникли задолго до эры высокоскоростных цифровых вычислителей. В то время «ручной» арифметики приветствовалась любая схема, снижающая объем вычислений хотя бы в два раза. Исследования Хейдмана с соавторами [58] позволяют говорить о том, что ДПФ было известно еще Гауссу (1805). Рунге [136], а несколько позже Даниэлсон и Лэнгзос [34] описали алгоритмы, количество операций в которых пропорционально $N \ln N$, а не N^2 , как при прямом способе, хотя при малых значениях N , доступных при «ручном» вычислении, разница и не очень заметна. Возможность существенного повышения скорости алгоритмов не была реализована вплоть до 1965 г., когда Кули и Таки опубликовали алгоритм вычисления ДПФ [30], работающий при составном числе N (т. е. когда N раскладывается в произведение двух меньших целых чисел). Их публикация вызвала активные исследования в области приложения ДПФ к обработке сигналов, что привело к открытию ряда высокоеффективных вычислительных алгоритмов. Как уже отмечалось, все эти алгоритмы относятся к так называемому *быстрому преобразованию Фурье*, или сокращенно БПФ².

Алгоритмы БПФ основываются на фундаментальной идее, заключающейся в разбиении вычисления ДПФ N -членной последовательности на ряд достаточно малых ДПФ. В зависимости от способа, которым проводится разбиение, получается тот или иной конкретный алгоритм, однако все они заметно увеличивают скорость преобразований. В этой главе мы изучим два основных класса алгоритмов БПФ. Первый, *прореживание по времени*, обязан своим названием тому, что при организации вычислений последовательность $x[n]$ (традиционно считавшаяся зависящей от времени) разбивается на меньшие подпоследовательности. В другом классе алгоритмов на части разбивается последовательность коэффициентов ДПФ $X[k]$, в связи с чем их называют *прореживанием по частоте*.

В ближайших параграфах мы исследуем ряд алгоритмов вычисления ДПФ, эффективность которых различна, но число умножений и сложений, необходимых для их работы, существенно меньше, чем при прямом способе по формуле (9.3). Этот ряд открывает алгоритм Герцеля [47], объем вычислений в котором хоть и пропорционален N^2 , но с достаточно малым коэффициентом пропорциональности. Одно из принципиальных преимуществ алгоритма Герцеля состоит не в том, что он ускоряет процесс вычисления ДПФ, а в том, что он фактически годится для поиска любого желаемого множества отсчетов ДВПФ.

В § 9.4 и 9.5 мы подробно излагаем алгоритмы БПФ, количество элементарных операций в которых пропорционально $N \ln N$. Алгоритмы этого класса значительно более эффективны (с точки зрения объема вычислений), нежели алгоритм Герцеля, но они узкоспециализированы и направлены исключительно на вычисление всех членов ДПФ. Мы даже и не пытаемся охватить весь спектр многообразных алгоритмов этого класса. Наша цель — понять общие движущие

²Исторические сведения, касающиеся БПФ, можно найти в [29].

пружины и принципы, на которых они строятся, и проиллюстрировать их на нескольких наиболее употребительных схемах.

В § 9.6 мы рассмотрим некоторые практические проблемы, возникающие при реализации БПФ. В § 9.7 обсуждаются алгоритмы вычисления ДПФ через свертку, а в § 9.8 — эффекты округления результатов арифметических действий.

9.3. Алгоритм Герцеля

Алгоритм Герцеля [47] — пример использования периодичности последовательности для сокращения числа арифметических операций при вычислении ДПФ. Начнем изучение алгоритма с простого, но важного наблюдения:

$$W_N^{-kN} = e^{j(2\pi/N)Nk} = e^{j2\pi k} = 1, \quad (9.4)$$

которое является элементарным следствием периодичности последовательности W_N^{-kn} . Благодаря этому тождеству, правую часть формулы (9.1) можно умножить на W_N^{-kN} , не поменяв ее значения. В итоге,

$$X[k] = W_N^{-kN} \sum_{r=0}^{N-1} x[r] W_N^{kr} = \sum_{r=0}^{N-1} x[r] W_N^{-k(N-r)}. \quad (9.5)$$

Чтобы покомпактнее записать окончательный результат, введем последовательность¹

$$y_k[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r] W_N^{-k(n-r)} u[n-r]. \quad (9.6)$$

Из формул (9.5) и (9.6) и того факта, что отсчеты последовательности $x[n]$ равны нулю при $n \notin [0; N - 1]$, следует, что

$$X[k] = y_k[n] \Big|_{n=N}. \quad (9.7)$$

Формулу (9.6) можно интерпретировать как свертку конечной последовательности $x[n]$ с бесконечной последовательностью $W_N^{-kn} u[n]$. Поэтому $y_k[n]$ естественно считать реакцией БИХ-системы с импульсной характеристикой $W_N^{-kn} u[n]$ на входной сигнал $x[n]$. В частности, $X[k]$ — это N -й отсчет отклика системы.

Система с импульсной характеристикой $W_N^{-kn} u[n]$ изображена на рис. 9.1, в котором предполагается состояние покоя в начальном положении. Поскольку отсчеты общей входной последовательности $x[n]$, как и коэффициенты W_N^{-kn} , — комплексные числа, то вычисление каждого нового значения $y_k[n]$ с помощью системы из рис. 9.1 требует четыре вещественных умножения и четыре вещественных сложения. К сожалению, для вычисления $y_k[N] = X[k]$ необходимо найти все промежуточные члены: $y_k[1], y_k[2], \dots, y_k[N - 1]$, так что в результате для определения одного значения ДПФ $X[k]$ нам нужно $4N$ умножений и $4N$ сложений вещественных чисел, что даже несколько больше, чем требуется при прямом методе. Однако при этом отпадает необходимость вычислять и запоминать коэффициенты W_N^{kn} , поскольку они явно вычисляются рекурсивной процедурой, вытекающей из потокового графа рис. 9.1.

¹Напомним, что символом $u[n]$ обозначается единичный скачок (см. с. 32). — Примеч. перев.

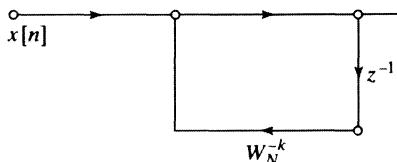


Рис. 9.1. Потоковый график рекурсивного вычисления \$X[k]\$ первого порядка

Существует возможность сократить вдвое количество операций, сохранив при этом рекурсивность вычисления коэффициентов \$W_N^{kn}\$. Чтобы понять, как это можно сделать, заметим, что характеристическая функция системы из рис. 9.1 имеет вид:

$$H_k(z) = \frac{1}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}. \quad (9.8)$$

Умножая ее числитель и знаменатель на \$(1 - W_N^k z^{-1})\$, получим характеристическую функцию

$$H_k(z) = \frac{1 - W_N^k z^{-1}}{(1 - W_N^{-k} z^{-1})(1 - W_N^k z^{-1})} = \frac{1 - W_N^k z^{-1}}{1 - 2 \cos(2\pi k/N) z^{-1} + z^{-2}} \quad (9.9)$$

системы, сигнальный потоковый график которой представлен на рис. 9.2.

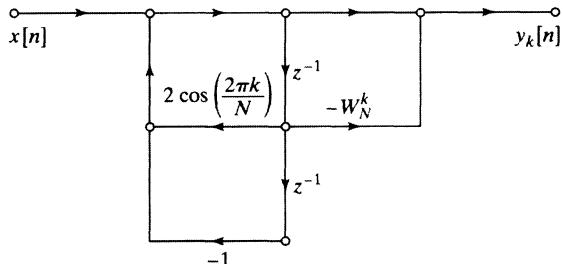


Рис. 9.2. Потоковый график второго порядка рекурсивного вычисления \$X[k]\$ (алгоритм Герцеля)

При комплекснозначном входном сигнале на реализацию полюса этой системы приходится всего лишь два вещественных умножения на один отсчет выхода, поскольку коэффициенты знаменателя характеристической функции вещественны, а умножение на \$-1\$ можно не учитывать. Напомним, что на реализацию полюса в системе первого порядка на один отсчет выхода при комплекснозначном входе нужно четыре вещественных умножения. Поскольку рекуррентная процедура продолжается до момента вычисления \$y_k[N]\$, то умножение на число \$-W_N^k\$, отвечающее за нуль характеристической функции, можно осуществить лишь при последней итерации. Таким образом, общее количество элементарных операций, необходимое для реализации системы из рис. 9.2, состоит из \$2N\$ умножений и \$4N\$ сложений вещественных чисел, приходящихся на полюс, и четыре умножения и четыре сложения, отвечающих за нуль характеристической функции, что составляет примерно половину объема вычислений в прямом способе. В описанном методе сохраняется то преимущество, что вычислять и хранить в памяти нужно только коэффициенты \$\cos \frac{2\pi k}{N}\$ и \$W_N^k\$, так как остальные числа \$W_N^{kn}\$ определяются по рекуррентной формуле, вытекающей из рис. 9.2.

У сети из рис. 9.2 есть еще одно неоспоримое преимущество. Действительно, рассмотрим вычисление отсчетов z -преобразования последовательности $x[n]$ в комплексно сопряженных точках единичной окружности, т. е. коэффициенты $X[k]$ и $X[N - k]$ ее ДПФ. Легко понять, что сеть, аналогичная представленной на рис. 9.2, но предназначенная для вычисления $X[N - k]$, обладает в точности тем же полюсом, что и сеть, вычисляющая $X[k]$, а коэффициенты, отвечающие за нуль характеристических функций, сопряжены друг другу (см. задачу 9.21). Кроме того, нуль характеристической функции обоих графов достаточно учитывать лишь при последней итерации. Поэтому на вычисление этих коэффициентов ДПФ при реализации полюса мы затратим только $2N$ умножений и $4N$ сложений. Следовательно, для определения всех N коэффициентов ДПФ с помощью алгоритма Герцеля потребуется около N^2 умножений и $2N^2$ сложений. Но, несмотря на то что алгоритм Герцеля заметно эффективней прямого метода вычисления ДПФ, порядок его сложности оценивается как N^2 .

Как при прямом методе, так и в алгоритме Герцеля у нас нет необходимости вычислять $X[k]$ для всех N значений k . Действительно, при желании мы можем найти любое число M наперед заданных отсчетов $X[k]$, с помощью рекурсивной процедуры, потоковый график которой изображен на рис. 9.2, меняя каждый раз коэффициенты графа подходящим образом. В этом случае объем необходимых операций будет пропорционален MN , в связи с чем прямой метод и алгоритм Герцеля привлекательны при малых M . Мы уже отмечали, что разработаны алгоритмы вычисления ДПФ, сложность которых при $N = 2^m$ пропорциональна числу $N \log_2 N$. Следовательно, когда $M < \log_2 N$, более эффективным оказывается прямой метод или алгоритм Герцеля. Однако, если нам нужно найти все коэффициенты ДПФ, более быстрым оказывается один из методов прореживания по времени со сложностью $N \log_2 N$, о которых пойдет речь в следующем параграфе.

9.4. Прореживание по времени

Поразительной эффективности при реализации ДПФ можно добиться, если свести задачу к вычислению ряда более коротких ДПФ. На этом пути можно воспользоваться как симметрией, так и периодичностью комплексной экспоненты $W_N^{kn} = e^{-j(2\pi/N)kn}$. Напомним, что алгоритмы БПФ, основанные на разбиении последовательности $x[n]$ на части, называются *прореживанием по времени*.

С принципом такого sorta алгоритмов лучше всего знакомиться, когда N — степень двойки, т. е. $N = 2^v$. Поскольку в этом случае N — четное целое число, мы можем разбить последовательность $x[n]$ на две $\frac{N}{2}$ -членных подпоследовательности, в одну из которых входят отсчеты с четными номерами, а в другую — с нечетными. Так как

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (9.10)$$

то после разбиения входной последовательности на две половины можно записать:

$$X[k] = \sum_{\substack{n \text{ четно} \\ n \text{ четно}}} x[n]W_N^{nk} + \sum_{\substack{n \text{ нечетно} \\ n \text{ нечетно}}} x[n]W_N^{nk} \quad (9.11)$$

или, после подстановки $n = 2r$ (для четных номеров) и $n = 2r+1$ (для нечетных),

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r]W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1]W_N^{(2r+1)k} = \\ &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r](W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1](W_N^2)^{rk}. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Благодаря простому наблюдению

$$W_N^2 = e^{-2j(2\pi/N)} = w^{-j2\pi/(N/2)} = W_{N/2}, \quad (9.13)$$

формулу (9.12) можно упростить:

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r]W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1]W_{N/2}^{rk} = \\ &= G[k] + W_N^k H[k], \quad 0 \leq k \leq N-1. \end{aligned} \quad (9.14)$$

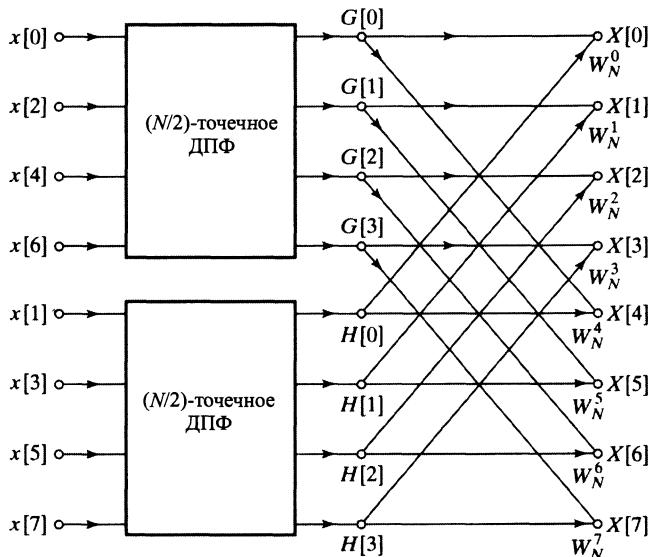


Рис. 9.3. Потоковый граф алгоритма прореживания во времени, при котором происходит разбиение исходной 8-членной последовательности на две 4-членные

Каждую из сумм последней формулы можно рассматривать как $(N/2)$ -точечное ДПФ. Первая из них — ДПФ подпоследовательности с четными номерами, а вторая — с нечетными. Хотя индекс k пробегает все N значений от 0 до $N-1$, каждую из этих сумм достаточно вычислить для $k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$, поскольку $G[k]$ и $H[k]$, будучи $(N/2)$ -точечными ДПФ, $(N/2)$ -периодичны. После определения значений $G[k]$ и $H[k]$ искомое N -точечное ДПФ $X[k]$ получается согласно формуле (9.14). На рис. 9.3 показано это вычисление в случае $N = 8$. На рисунке использованы соглашения о потоковых сигнальных графах, описанные в главе 6. Говоря точнее, для определения переменной узла нужно просуммировать коэффициенты всех ветвей, подходящих к нему. Если коэффициент ветви не обоз



значен, то он считается равным единице. Коэффициенты остальных ветвей — целые степени числа W_N .

Потоковый граф, изображенный на рис. 9.3, вычисляет два 4-точечных ДПФ: $G[k]$ — ДПФ подпоследовательности с четными номерами и $H[k]$ — с нечетными. После завершения вычислений 8-точечное ДПФ исходной последовательности можно найти следующим образом: коэффициент $X[0]$ получается в результате суммы $G[0]$ и $H[0] \cdot W_N^0$; $X[1]$ — сумма $G[1]$ и $H[1] \cdot W_N^1$. Формула (9.14) говорит нам, что $X[4]$ нужно вычислять как сумму $H[4] \cdot W_N^4$ и $G[4]$, но $G[k]$ и $H[k]$ — 4-периодические последовательности, в частности, $H[4] = H[0]$ и $G[4] = G[0]$. Поэтому $X[4]$ проще получить в результате сложения произведения $H[0]W_N^4$ с $G[0]$. Значения $X[5]$, $X[6]$ и $X[7]$ вычисляются аналогично (см. рис. 9.3).

Сравним сложности только что описанного алгоритма и прямого метода вычисления ДПФ. Прежде всего напомним, что при прямом способе, не учитывая симметрии, необходимо N^2 комплексных умножений и сложений¹. С другой стороны, последний алгоритм вычисляет два $(N/2)$ -точечных ДПФ, для которых нужно около $2(N/2)^2$ комплексных умножений и столько же комплексных сложений, если вычислять их прямым методом. Для получения искомого ДПФ из промежуточных результатов нам потребуется еще N комплексных умножений вида $H[k] \cdot W_N^k$ и N комплексных сложений. Следовательно, при вычислении всех значений ДПФ по формуле (9.14) нам потребуется не более чем $N + 2(N/2)^2 = N + N^2/2$ комплексных умножений и сложений. Легко проверить, что при $N > 2$ число $N + N^2/2$ будет меньше N^2 .

Формула (9.14) реализует идею разбиения исходной N -членной последовательности на две $(N/2)$ -членные. Если $N/2$ — тоже четное число, то каждую из $(N/2)$ -членных частей снова можно разбить пополам и вычислять $(N/4)$ -точечные ДПФ, комбинируя которые получим $(N/2)$ -точечные ДПФ. Так, последовательность $G[k]$ из (9.14) можно представить в виде

$$G[k] = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} g[r]W_{N/2}^k = \sum_{\ell=0}^{(N/4)-1} g[2\ell]W_{N/2}^{2\ell k} + \sum_{\ell=0}^{(N/4)-1} g[2\ell+1]W_{N/2}^{(2\ell+1)k} \quad (9.15)$$

или

$$G[k] = \sum_{\ell=0}^{(N/4)-1} g[2\ell]W_{N/4}^{\ell k} + W_{N/2}^k \sum_{\ell=0}^{(N/4)-1} g[2\ell+1]W_{N/4}^{\ell k}. \quad (9.16)$$

Аналогично, $H[k]$ будет выглядеть как

$$H[k] = \sum_{\ell=0}^{(N/4)-1} h[2\ell]W_{N/4}^{\ell k} + W_{N/2}^k \sum_{\ell=0}^{(N/4)-1} h[2\ell+1]W_{N/4}^{\ell k}. \quad (9.17)$$

Таким образом, $(N/2)$ -точечное ДПФ $G[k]$ можно получить вычислением $(N/4)$ -точечных ДПФ последовательностей $g[2\ell]$ и $g[2\ell+1]$. Аналогично, $(N/2)$ -точечное ДПФ $H[k]$ получается в результате комбинации $(N/4)$ -точечных ДПФ последовательностей $h[2\ell]$ и $h[2\ell+1]$. Итак, если 4-точечные ДПФ из рис. 9.3 вычисляются по формулам (9.16) и (9.17), то схема вычислений будет выглядеть, как на рис. 9.4. Вставляя потоковый граф из рис. 9.4 в схему из рис. 9.3, получим новый

¹Мы считаем, что N достаточно велико и $N - 1$ можно считать равным N .

граф, представленный на рис. 9.5, где коэффициенты записаны как степени W_N , а не $W_{N/2}$ на основании тождества $W_{N/2} = W_N^2$.

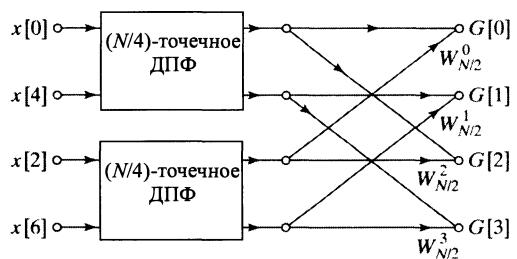
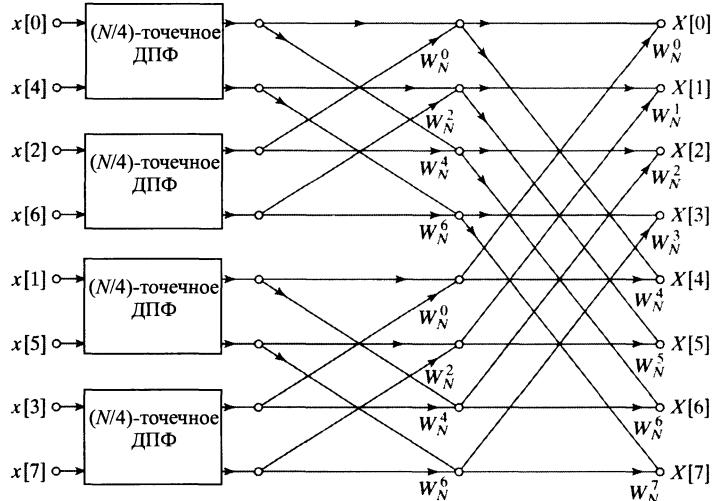


Рис. 9.4. Потоковый график разбиения $(N/2)$ -точечного ДПФ на два $(N/4)$ -точечных по методу прореживания по времени ($N = 8$)

мельчения вычисляемых ДПФ до тех пор, пока не получим двухточечного. При этом получится $\nu = \log_2 N$ стадий вычислений. Мы уже подсчитали, что при вычислении N -точечного ДПФ через два $(N/2)$ -точечных ДПФ тратится $N + 2(N/2)^2$ арифметических операций. Для подсчета количества операций, производимых при вычислении $(N/2)$ -точечного ДПФ через $(N/4)$ -точечные, член $(N/2)^2$ в предыдущей оценке следует заменить на $N/2 + 2(N/4)^2$, в результате чего получится $2N + 4(N/4)^2$ умножений и сложений. Если $N = 2^\nu$ и мы вычисляем N -точечное ДПФ, разбивая исходную последовательность на двучленные отрезки, то указанные замены в оценке сложности алгоритма нужно проделать $\nu = \log_2 N$ раз. Поэтому общее число комплексных сложений и умножений, необходимых для вычисления N -точечного ДПФ, составляет $N\nu = N \log_2 N$.



Вычисление 8-точечного ДПФ, рассмотренное нами в качестве иллюстрации алгоритма, было сведено к вычислению четырех 2-точечных ДПФ, пример которых отображен на рис. 9.6. Включая граф из рис. 9.6, реализующий вычисления 2-точечного ДПФ, в сеть из рис. 9.5, мы придем к полному потоковому графу, реализующему 8-точечное ДПФ (рис. 9.7).

В более общей ситуации, но когда N является степенью двойки, мы можем продолжать процесс из-

Рис. 9.5. Результат подстановки структуры из рис. 9.4 в граф из рис. 9.3

Потоковый граф из рис. 9.7 представляет процесс вычисления ДПФ через разбиение исходной последовательности на двухчленные. Подсчитывая ветви, помеченные коэффициентами W_N^r , легко заметить, что на каждой стадии процесса происходит N комплексных умножений и N комплексных сложений. Поскольку общее количество стадий равно $\log_2 N$, мы еще раз убеждаемся в том, что сложность алгоритма прореживания по времени оценивается как $N \log_2 N$. Иными словами, этот алгоритм существенно экономит время по сравнению с прямым методом или алгоритмом Герцеля. Например, если $N = 2^{10} = 1024$, то $N^2 = 2^{20} = 1\,048\,576$, а $N \log_2 N = 10\,240$, т. е. эффективность алгоритма прореживания выше более чем на два порядка!

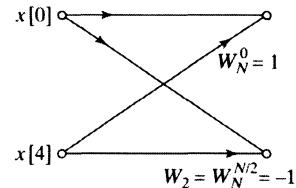


Рис. 9.6. Потоковый граф, реализующий 2-точечное ДПФ

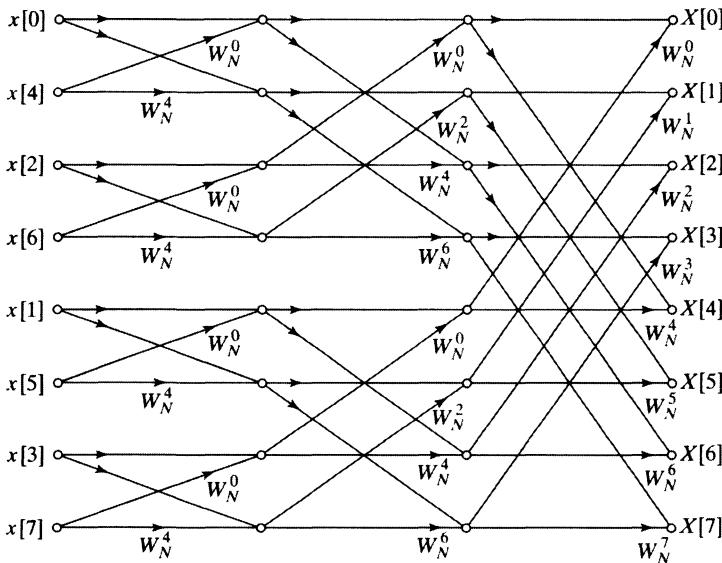


Рис. 9.7. Потоковый граф, вычисляющий 8-точечное ДПФ через двухточечные

Вычисления, представленные потоковым графиком из рис. 9.7, можно упростить еще больше, если учесть симметрию и периодичность коэффициентов W_N^r . Прежде всего заметим, что при переходе от одной стадии графа из рис. 9.7 к другой вычисления осуществляются по схеме, представленной на рис. 9.8, а), в которой участвуют по паре значений из двух соседних стадий, а коэффициентами всегда служат степени W_N , показатели которых отстоят друг от друга на $N/2$. Благодаря форме графа, это элементарное вычисление называют *бабочкой*.

Так как

$$W_N^{N/2} = e^{-j(2\pi/N)N/2} = e^{-j\pi} = -1, \quad (9.18)$$

коэффициент $W_N^{r+N/2}$ можно записать как

$$W_N^{r+N/2} = W_N^{N/2}W_N^r = -W_N^r. \quad (9.19)$$

Учитывая это тождество, вычисления, описываемые «бабочкой», можно упростить и получить граф из рис. 9.8, б), где требуется только одно комплексное умножение вместо двух. Заменив все «бабочки» в рис. 9.7 на схемы из рис. 9.8, б), мы придем к графу из рис. 9.9, где общее количество вычислений вдвое меньше, чем в графике 9.7.

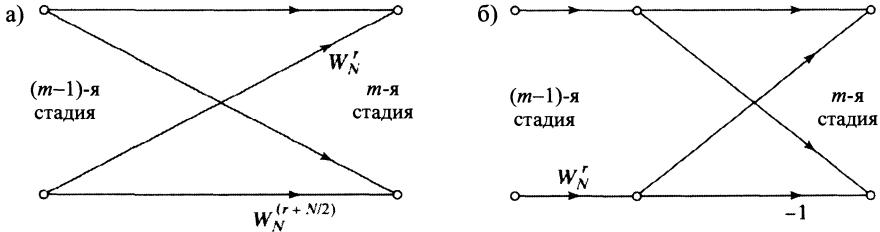


Рис. 9.8. Потоковые графы: а) осуществляющий вычисления «бабочка» из рис. 9.7; б) упрощающий вычисления «бабочка»

9.4.1. Вычисления на месте

Потоковый график из рис. 9.9 описывает метод вычисления ДПФ. Отличительной чертой всех потоковых графов являются ветви, соединяющие узлы, и коэффициенты ветвей. Вне зависимости от порядка, в котором нарисованы узлы графа, он представляет один и тот же набор вычислений, предписанный ветвями и их коэффициентами. Конкретная форма графа из рис. 9.9 продиктована алгоритмом вычислений, при котором исходная последовательность делится на части с четными и нечетными номерами отсчетов, каждая ее подпоследовательность делится дальше и т. д. вплоть до последовательности длины два.

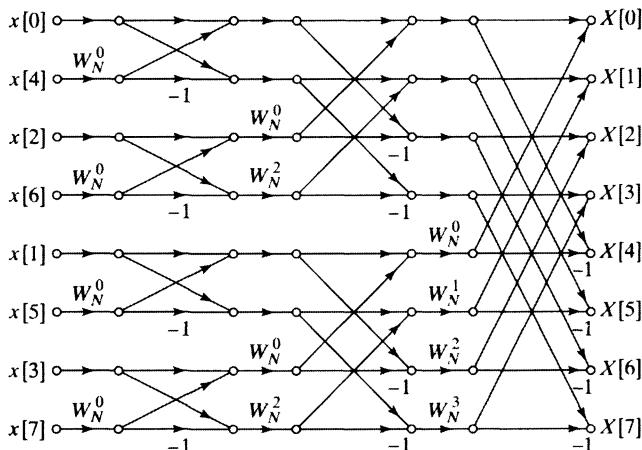


Рис. 9.9. Потоковый график вычисления 8-точечного ДПФ с упрощенной «бабочкой»

Кроме эффективной процедуры вычисления ДПФ, потоковый график из рис. 9.9 подсказывает удачный способ хранения исходных данных и промежуточных результатов. Действительно, согласно графу, на каждой стадии вычислений мно-



жество из N комплексных чисел пересчитывается в другой набор чисел по схеме «бабочка». Этот процесс повторяется $\nu = \log_2 N$ раз, и в итоге получается желаемое ДПФ. На первый взгляд, для успешной работы алгоритма нужно привлечь два массива, первый из которых хранит отсчеты входной последовательности, а второй запоминает результаты промежуточных операций. Но на самом деле можно обойтись и одним массивом.

Заметим, что корректность алгоритма не зависит от порядка, в котором хранятся входные и промежуточные данные. Обозначив переменную узла графа, стоящего в ℓ -й горизонтали ($0 \leq \ell \leq N - 1$) и m -й вертикали ($0 \leq m \leq \nu$), через $X_m[\ell]$, мы получим массив, в котором при $m = 0$ хранятся отсчеты входного сигнала, а при $m = \nu$ — выходной последовательности алгоритма, т. е. искомые значения ДПФ. Так, например, в случае $N = 8$, отраженном на рис. 9.9, имеем:

$$\begin{aligned} X_0[0] &= x[0], & X_0[1] &= x[4], & X_0[2] &= x[2], & X_0[3] &= x[6], \\ X_0[4] &= x[1], & X_0[5] &= x[5], & X_0[6] &= x[3], & X_0[7] &= x[7]. \end{aligned} \quad (9.20)$$

В этих обозначениях разностные уравнения, соответствующие «бабочке», принимают вид:

$$\begin{aligned} X_m[p] &= X_{m-1}[p] + W_N^r X_{m-1}[q], \\ X_m[q] &= X_{m-1}[p] - W_N^r X_{m-1}[q]. \end{aligned} \quad (9.21)$$

(см. рис. 9.10).

Значения индексов p , q и r из уравнений (9.21), зависящие от конкретного места в потоковом графе, легко определяются как по рис. 9.9, так и по формулам (9.11), (9.14), (9.16) и т. д.

Из рис. 9.9 и 9.10 видно, что в вычислениях p -го и q -го элементов m -й последовательности участвуют отсчеты $(m-1)$ -й последовательности только с теми же номерами. Поэтому для реализации алгоритма достаточно одного набора запоминающих регистров, поскольку значения $X_m[p]$ и $X_m[q]$, полученные на m -й стадии, могут заменить собой уже ненужные к этому моменту числа $X_{m-1}[p]$ и $X_{m-1}[q]$.

Такой способ обычно называют *вычислением на месте*. Тот факт, что потоковый граф из рис. 9.9 (или из рис. 9.7) представляет способ вычисления на месте, связан с тем, что узлы графа, расположенные на одной горизонтали, отвечают фиксированной ячейке запоминающего массива, а в вычислениях значений очередной переменной участвуют узловые переменные, стоящие на сопряженных горизонталях, что соответствует схеме «бабочка».

Для организации вычислений на месте необходимо хранить отсчеты входного сигнала (по крайней мере обращаться к ним) в порядке, противоречащем стандартной нумерации членов последовательности. Фактически, порядок, в котором мы обращаемся к отсчетам входной последовательности при вычислениях

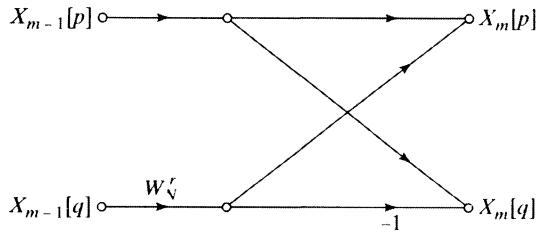


Рис. 9.10. Графическое представление разностных уравнений (9.21)

на месте, называется *порядком с инвертированием разрядов*. Чтобы понять почему, рассмотрим потоковый граф из рис. 9.9. Для нумерации отсчетов 8-членной последовательности в двоичной системе счисления нам достаточно трех битов. Переписав индексы в формуле (9.20) в двоичной форме:

$$\begin{aligned} X_0[000] &= x[000], & X_0[011] &= x[110], & X_0[110] &= x[011], \\ X_0[001] &= x[100], & X_0[100] &= x[001], & X_0[111] &= x[111], \\ X_0[010] &= x[010], & X_0[101] &= x[101], \end{aligned} \quad (9.22)$$

можно заметить, что член последовательности $x[n]$, индекс которого в двоичной записи выглядит как (n_2, n_1, n_0) , хранится в массиве под номером (n_0, n_1, n_2) , т. е. для определения номера ячейки, куда следует записать $x[n_2, n_1, n_0]$, достаточно обратить, или инвертировать, порядок двоичных цифр индекса отсчета.

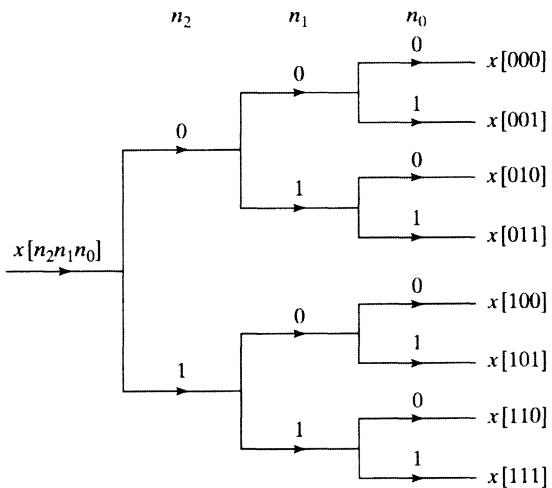


Рис. 9.11. Диаграмма запоминания данных в стандартном порядке

Процесс, распределяющий отсчеты входной последовательности по ячейкам запоминающего массива в стандартном порядке (когда номер отсчета совпадает с номером ячейки), изображен на рис. 9.11 в виде потокового графа. Если наибольший значащий бит номера отсчета равен нулю, отсчет $x[n]$ направляется в верхнюю половину запоминающего массива, а если 1, то в нижнюю. За дальнейшее распределение по ячейкам отвечает второй значащий бит, третий и т. д.

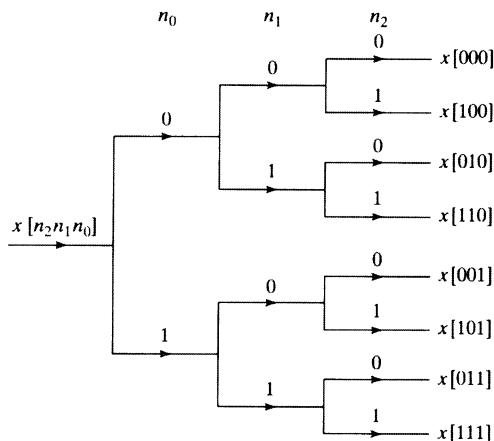
Для описания процедуры записи отсчетов входной последовательности в порядке с инвертированием разрядов напомним алгоритм, отраженный на рис. 9.7

и 9.9. На первой стадии входная последовательность $x[n]$ делится на две равные части. Ее отсчеты с четными номерами попадают в верхнюю половину графа, а с нечетными — в нижнюю. Такое разделение данных можно осуществить, исследуя наименее значащий бит номера отсчета (n_0 в наших обозначениях). Действительно, последний двоичный знак четного числа всегда равен 0, а нечетного — 1, поэтому члены последовательности, чей номер заканчивается на 0, направляются в первую половину массива $X_0[\ell]$, с остальными — во вторую.

Затем каждая из подпоследовательностей с четными ($x[2k]$) и нечетными ($x[2k + 1]$) номерами тоже разбивается на две части (четную и нечетную) в зависимости от четности номера в подпоследовательности (условно назовем его номером второго уровня). За это разбиение уже отвечает второй справа бит исходного номера. Действительно, рассмотрим, например, процесс деления подпоследовательности $x[2k]$. Номер второго уровня получается из исходного номера члена последовательности делением на 2 ($k = 2k/2$), т. е. отбрасыванием

крайнего справа нуля. Поэтому, если второй справа знак исходного номера $2k$ отсчета последовательности — 0, то номер k второго уровня у этого члена четный и он попадает в четную часть подпоследовательности, а если 1, то номер второго уровня нечетный и член попадает в нечетную часть. Аналогичный процесс разбиения выполняется и с подпоследовательностью $x[2k+1]$ с нечетными номерами. Продолжив разбиение получаемых подпоследовательностей до одночленных, мы закончим подготовку данных для вычисления ДПФ. Графическая схема описанного разбиения входной последовательности показана на рис. 9.12.

Рис. 9.12. Диаграмма запоминания данных в порядке с инвертированием разрядов



Графы, изображенные на рис. 9.11 и 9.12, тождественны, за исключением того, что при стандартном упорядочивании мы просматриваем биты двоичного номера слева направо, а при упорядочивании с инвертированием разрядов — справа налево.

9.4.2. Альтернативные формы

Хранить результаты промежуточных вычислений разумно в том порядке, в котором нарисованы узлы потокового графа на рис. 9.9, большой необходимости в этом нет. Действительно, вне зависимости от порядка изображения узлов конечным результатом вычислений будет ДПФ входной последовательности, до тех пор пока коэффициенты ветвей остаются прежними, а меняется лишь порядок записи данных. Потоковый график, узлы которого расположены в соответствии с нумерацией массива, хранящего результаты промежуточных вычислений, представляет метод вычисления на месте, только если входные и выходные узлы «бабочки» расположены на сопряженных горизонталях (как, например, на рис. 9.9). В противном случае для запоминания промежуточных вычислений понадобятся два массива.

Альтернативный потоковый график, обеспечивающий вычисления на месте, изображен на рис. 9.13. В этом случае входная последовательность расположена в соответствии со стандартным порядком, а отсчеты ее ДПФ — в порядке с инвертированием разрядов. Граф 9.13 можно получить из рис. 9.9, упорядочивая

горизонтали по номеру отсчета входной последовательности: все узлы, расположенные на горизонтали $x[1] - X[4]$ на рис. 9.9, помещаются во вторую строку, узлы на горизонтали $x[2] - X[2]$ — в третью и т. д. При этом сохраняются все ветви и их обозначения, соединяющие узлы на разных горизонталях. Получающийся в результате перестановок горизонталей потоковый граф (рис. 9.13) представляет алгоритм прореживания по времени, предложенному впервые Кули и Таки (см. [30]).

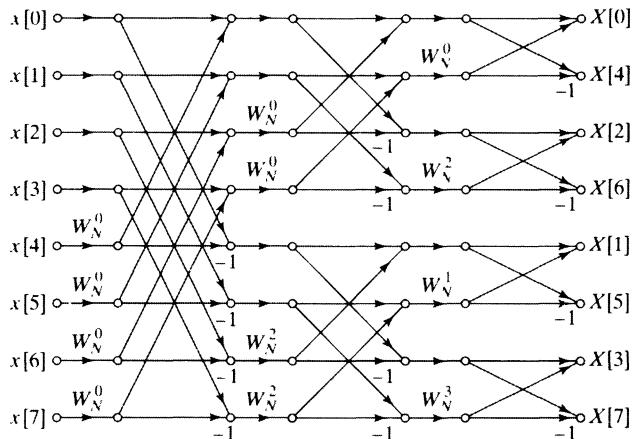


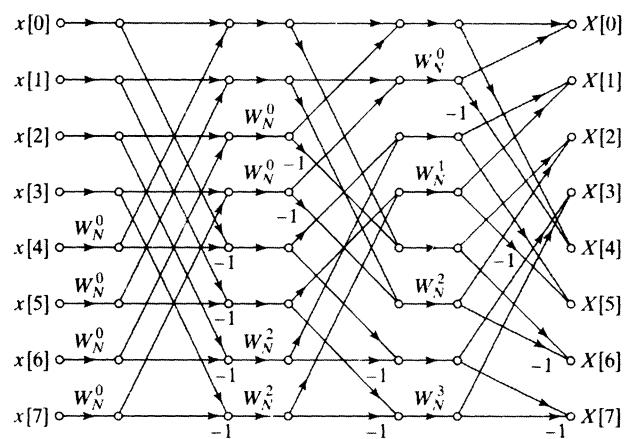
Рис. 9.13. Перестановка входных узлов графа 9.13 в стандартном порядке

Ясно, что графы из рис. 9.9 и 9.13 отличаются друг от друга лишь порядком следования узлов, а коэффициенты, приписанные их ветвям (степени W_N), одинаковы. Очевидно, существует огромное число возможных перестановок узлов, однако с вычислительной точки зрения большинство из них не имеют большого смысла. Рассмотрим, например, граф, в котором как входные, так и выходные узлы расположены в естественном порядке (рис. 9.14). В этом случае метод вычисления на месте не работает, поскольку структура «бабочки» сохраняется лишь на первой стадии, а затем нарушается. В связи с этим для хранения промежуточных вычислений приходится заводить два массива с N ячейками.

При реализации вычислений, графическое представление которых изображено на рис. 9.9, 9.13 и 9.14, мы обращаемся к элементам массивов, хранящих промежуточные результаты, в порядке, отличным от нормального. Поэтому для увеличения скорости вычислений комплексные числа нужно хранить в запоминающем устройстве с произвольной выборкой. Например, при вычислении значений первого массива по входной последовательности в соответствии с графом из рис. 9.9 входные переменные каждой «бабочки» расположены на соседних горизонталях, в связи с чем их значения хранятся в соседних ячейках запоминающего массива. При вычислении второго промежуточного массива по первому между входными данными «бабочки» стоит по одному элементу массива, а на третьей стадии уже по три. Если количество элементов входной последовательности равно $N > 8$, то на четвертой стадии вычислений между входами бабочки будет располагаться уже 7 элементов, на пятой — 15, а на последней — $(N/2 - 1)$.

При вычислениях в соответствии с рис. 9.13 возникает противоположная ситуация. На первой стадии вычислений между входными данными «бабочки» стоят 3 элемента массива, на второй — 1, а на последней входные данные оказываются соседними элементами. Несмотря на то что можно легко придумать алгоритм, изменяющий порядок нумерации регистров памяти в соответствии с рис. 9.9 или 9.13, обращаться к данным приходится в порядке, отличном от естественного. Именно поэтому при таком способе вычислений полезно запоминающее устройство с произвольной выборкой. В потоковом графе 9.14 к данным тоже обращаются непоследовательно, но при этом необходимы два запоминающих массива, да и индексация промежуточных данных выглядит более сложной, чем в предыдущих случаях. Следовательно, структура из рис. 9.14 не имеет никаких явных преимуществ.

Рис. 9.14. Перестановка входов и выходов графа 9.9 в естественном порядке



С другой стороны, некоторые структуры обладают некой привлекательностью даже в том случае, когда вычисления на месте по ним невозможны. Такой структурой, например, будет перестановка узлов графа из рис. 9.9, при которой отпадает необходимость в запоминающем устройстве с произвольной выборкой (рис. 9.15). Граф из рис. 9.15 представляет алгоритм прореживания по времени, предложенный Синглтоном в 1969 г. Заметим, что входы графа расположены в порядке с инвертированием разрядов, а его выходы — в естественном. Важная особенность этого графа заключается в том, что геометрия вычислений от стадии к стадии остается прежней, а меняются коэффициенты, приписанные ветвям, что дает возможность обращаться к данным последовательно (см. [37] для знакомства с запоминающим устройством с последовательной выборкой.). Предположим, например, что у нас есть четыре отдельных дисковых файла, причем первая половина входной последовательности (в порядке с инвертированием разрядов) хранится в одном из них, а вторая — во втором. Тогда к членам последовательностей из первого и второго файла можно обращаться последовательно, а результаты вычислений, последовательно же, записывать в третий и четвертый файлы (первую половину — в третий, а вторую — в четвертый). На второй стадии файлы с номерами 3 и 4 содержат входные данные, а в первые два за-

писываются выходные данные. Такая смена ролей файлов будет повторяться на каждой из ν стадий. Отметим, что такого sorta алгоритм оказывается очень полезным при вычислении ДПФ сверхдлинной последовательности.

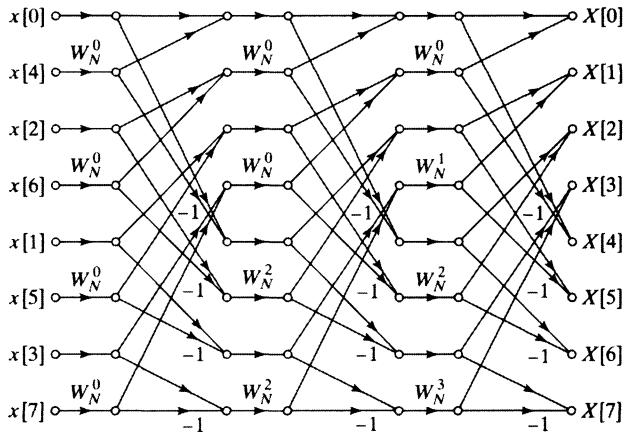


Рис. 9.15. Перестановка узлов графа 9.9, обеспечивающая неизменную геометрию вычислений на каждой стадии и последовательное обращение к данным

9.5. Прореживание по частоте

Алгоритмы прореживания по времени БПФ основываются на измельчении входной последовательности $x[n]$. Альтернативные методы, связанные с аналогичным измельчением выходной последовательности, обычно называют *прореживанием по частоте*.

Чтобы понять основные идеи прореживания по частоте, достаточно рассмотреть случай, когда N — степень двойки, и отдельно исследовать вычисления отсчетов выходной последовательности с четными и нечетными номерами. Поскольку

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (9.23)$$

то отсчеты с четными номерами

$$X[2r] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{2(2r)}, \quad 0 \leq r \leq \frac{N}{2}-1 \quad (9.24)$$

можно представить в виде:

$$X[2r] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n]W_N^{2nr} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n]W_N^{2nr}. \quad (9.25)$$

Переобозначив параметр суммирования во второй сумме, получим

$$X[2r] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n]W_N^{2nr} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n+(N/2)]W_N^{2r(n+\frac{N}{2})}. \quad (9.26)$$

Наконец, благодаря периодичности экспонент

$$W_N^{2r(n+\frac{N}{2})} = W_N^{2rn} W_N^{rN} = W_N^{2rn} \quad (9.27)$$

и тождеству $W_N^2 = W_{N/2}$, соотношение (9.26) переписывается как

$$X[2r] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} (x[n] + x[n + (N/2)]) W_{N/2}^{rn}, \quad 0 \leq r \leq \frac{N}{2} - 1. \quad (9.28)$$

Последняя формула описывает вычисление $(N/2)$ -точечного ДПФ от $(N/2)$ -членной последовательности, полученной в результате сложения первой и второй половин входной последовательности. Суммирование двух половин входной последовательности является наложением во временной области, согласованным с тем фактом, что при вычислении отсчетов ДПФ с четными частотами мы субдискретизуем Фурье-образ $x[n]$.

Теперь обратимся к вычислению значений ДПФ с нечетными номерами

$$X[2r+1] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{n(2r+1)}, \quad 0 \leq r \leq \frac{N}{2} - 1. \quad (9.29)$$

Как и в первом случае, правую часть этой формулы можно разбить на две суммы:

$$X[2r+1] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n] W_N^{n(2r+1)} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n] W_N^{n(2r+1)} \quad (9.30)$$

и переписать вторую часть в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n] W_N^{n(2r+1)} &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n + (N/2)] W_N^{(n+(N/2))(2r+1)} = \\ &= W_N^{(N/2)(2r+1)} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n + (N/2)] W_N^{n(2r+1)} = \\ &= - \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n + (N/2)] W_N^{n(2r+1)}. \end{aligned} \quad (9.31)$$

Здесь мы воспользовались равенствами: $W_N^{(N/2)2r} = 1$ и $W_N^{(N/2)} = -1$. Подставляя (9.31) в (9.30) и объединяя суммы, получим

$$X[2r+1] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} (x[n] - x[n + (N/2)]) W_N^{n(2r+1)}, \quad (9.32)$$

или, учитывая тождество $W_N^2 = W_{N/2}$,

$$X[2r+1] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} (x[n] - x[n + (N/2)]) W_N^n W_{N/2}^{nr}, \quad 0 \leq r \leq \frac{N}{2} - 1. \quad (9.33)$$

Формула (9.33) представляет собой $(N/2)$ -точечное ДПФ последовательности, полученной в результате вычитания второй половины входной последовательности из первой и умножения разности на W_N^n . Таким образом, руководствуясь формулами (9.28) и (9.33), ДПФ входной последовательности можно вычи-

сять по следующей схеме: сначала сформировать последовательности $g[n] = x[n] + x[n + N/2]$ и $h[n] = x[n] - x[n + N/2]$, вычислить произведение $h[n]W_N^n$ и, наконец, найти $(N/2)$ -точечные ДПФ этих последовательностей, представляющих собой ДПФ исходной с четными и нечетными частотами. Описанная процедура при $N = 8$ изображена на рис. 9.16.

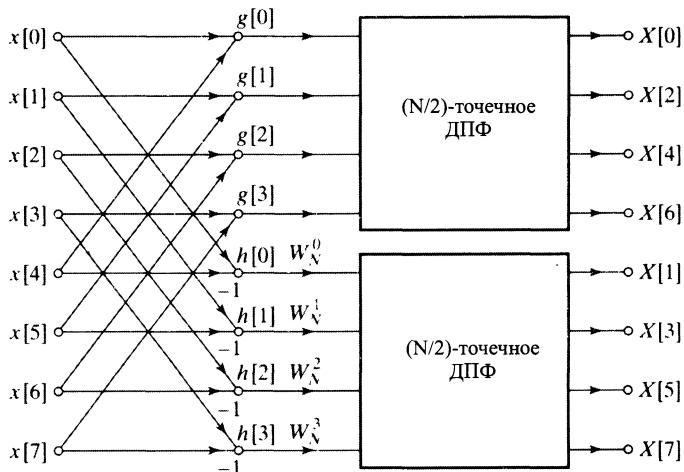


Рис. 9.16. Потоковый график первой стадии вычисления 8-точечного ДПФ по методу прореживания по частоте

Поскольку N — степень двойки, число $N/2$ — четное и отсчеты $(N/2)$ -точечных ДПФ можно вычислять отдельно для четных и нечетных индексов, как это было сделано на первой стадии. При этом задача о вычислении N -точечного ДПФ сводится к вычислению четырех $(N/4)$ -точечных. Потоковый граф, отражающий две стадии алгоритма, изображен на рис. 9.17.

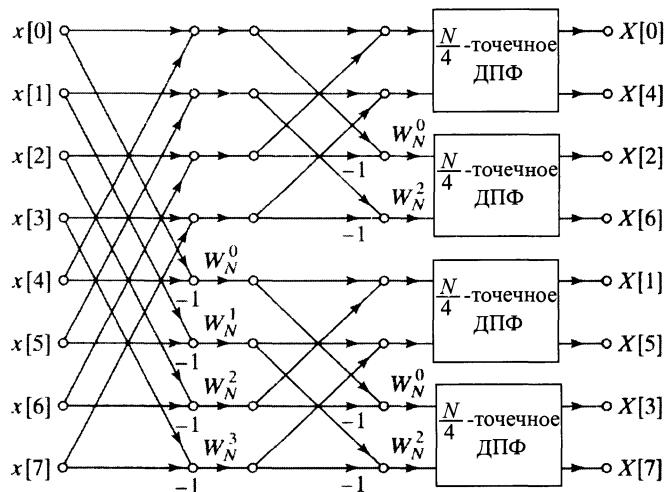


Рис. 9.17. Потоковый график двух стадий вычисления 8-точечного ДПФ по методу прореживания по частоте

Для 8-точечного примера вычисление сводится к определению 2-точечных ДПФ последовательностей, которые получаются как сумма или разность вход-

ных отсчетов по описанной выше схеме. Таким образом, блоки, отвечающие за вычисление 2-точечных ДПФ из рис. 9.17, можно заменить на потоковый граф из рис. 9.18, так что полный алгоритм 8-точечного ДПФ реализуется потоковым графом из рис. 9.19.

Подсчитывая элементарные операции алгоритма прореживания по частоте и обобщая результат на случай $N = 2^v$, мы видим, что в нем задействовано $\frac{N}{2} \log_2 N$ комплексных умножений и $N \log_2 N$ комплексных сложений, т. е. общее число арифметических операций при таком методе вычислений совпадает с числом операций алгоритма прореживания по времени.

Рис. 9.19. Потоковый граф полного разложения 8-точечного ДПФ в соответствии с алгоритмом прореживания по частоте

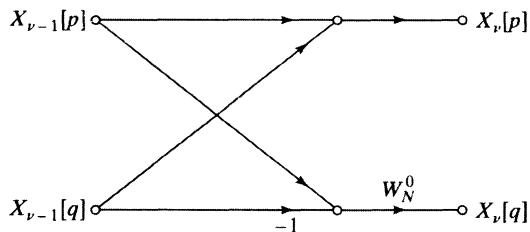
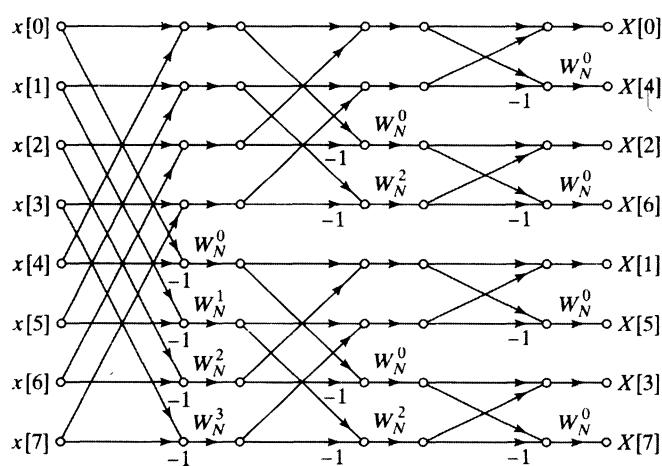


Рис. 9.18. Потоковый граф типичного вычисления 2-точечного ДПФ, необходимого на последней стадии алгоритма прореживания по частоте



9.5.1. Вычисление на месте

Сравнивая графические реализации алгоритмов прореживания по времени и частоте, можно заметить как общие моменты, так различия. Оба графа «вычисляют» ДПФ вне зависимости от перестановок узлов, не меняющих ветвей и их коэффициентов. Иначе говоря, потоковый граф из рис. 9.19 не навязывает какого-либо порядка, в котором должны храниться входные и промежуточные данные. Тем не менее соседние входные узлы графа 9.19 можно интерпретировать как соседние регистры памяти. В этом случае отсчеты входной последовательности на входы графа будут подаваться в естественном порядке, а ДПФ на его выходе получается в порядке с инвертированием разрядов. Основной элемент вычислений здесь тоже имеет форму «бабочки», хотя она и отличается от «бабочки» в алгоритме прореживания по времени. Благодаря наличию «бабочки» потоковый граф 9.19 представляет метод вычислений на месте.

9.5.2. Альтернативные формы

Различные формы алгоритма прореживания по частоте можно получить транспонированием потоковых графов из подраздела 9.4.2, реализующих прореживание по времени. Обозначив набор комплексных чисел, получающихся на m -й стадии вычислений, через $X_m[\ell]$, $\ell = 0, 1, \dots, N - 1$ и $m = 0, 1, \dots, \nu$, вычисления «бабочка» из рис. 9.20 можно записать двумя формулами:

$$\begin{aligned} X_m[p] &= X_{m-1}[p] + X_{m-1}[q], \\ X_m[q] &= (X_{m-1}[p] - X_{m-1}[q])W_N^r. \end{aligned} \quad (9.34)$$

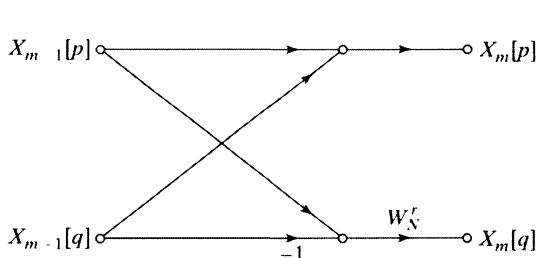


Рис. 9.20. Потоковый график вычислений по схеме «бабочка», необходимых при реализации графа из рис. 9.19

При сравнении рис. 9.10 и 9.20 или формул (9.21) и (9.34) можно заметить, что вычисления «бабочки» в двух классах алгоритмов разные, хотя у них есть и общие черты (как и у графов на рис. 9.9 и 9.19). Действительно, граф 9.19 можно получить из графа 9.9, а «бабочку» из графа 9.20 из «бабочки» 9.10 обращением стрелок в графе, и в частности сменой ролей входов и выходов. Таким образом, согласно терминологии главы 6, граф 9.19

является транспонированной формой графа 9.9, а граф 9.20 — графа 9.10. Теорема о транспонировании в этом случае применяется не совсем прямо, поскольку графы алгоритмов БПФ обладают несколькими входными и выходными узлами. Тем не менее входные-выходные характеристики потоковых графов 9.9 и 9.19 совпадают, поскольку уравнения «бабочки» (9.34) можно решать в обратном направлении, начиная с массива выходных данных. (В задаче 9.23 предлагается план доказательства этого факта.) Можно даже утверждать, что для каждого алгоритма БПФ класса прореживания по времени найдется алгоритм БПФ класса прореживания по частоте, графы которых получаются друг из друга сменой ориентации стрелок и ролей входа и выхода.

Следовательно, каждый потоковый график из § 9.4 обладает «близнецом» в классе алгоритмов прореживания по частоте. Это, естественно, согласуется с тем фактом, что существуют перестановки узлов графа, не влияющие на конечный результат.

Транспонируя график из рис. 9.13, приходим к графу на рис. 9.21, где узлы выхода пронумерованы в естественном порядке, а входа — в порядке с инвертированием разрядов. Транспонированная версия графа 9.14 приведена на рис. 9.22. Там как входные узлы, так и выходные идут в естественном порядке.

Транспонированная форма графа из рис. 9.15 показана на рис. 9.23. Каждая стадия вычислений, представленных этим графиком, обладает неизменной геометрией, что обеспечивает возможность использовать запоминающие устройства с последовательной выборкой при обработке длинных последовательностей.

Рис. 9.21. Потоковый граф алгоритма БПФ класса прореживания по частоте, полученный транспонированием графа из рис. 9.13

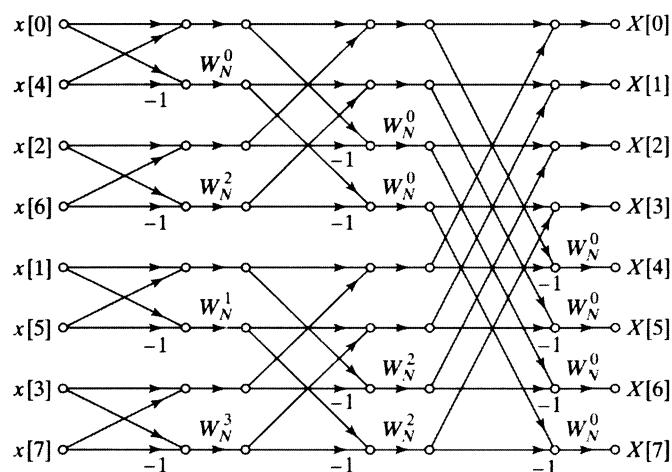


Рис. 9.22. Потоковый граф, транспонированный к графу из рис. 9.14

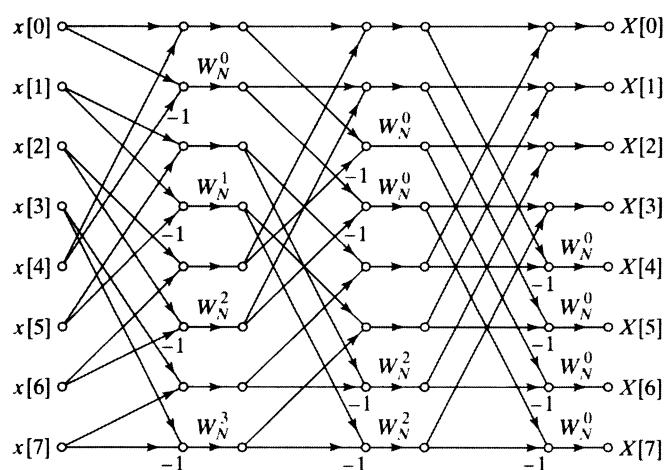
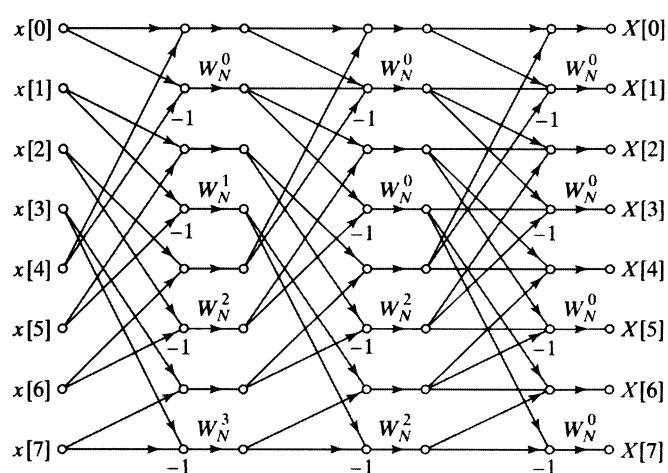


Рис. 9.23. Транспонированная форма потокового графа 9.15, обеспечивающая возможность использования запоминающего устройства с последовательной выборкой



9.6. Подробное исследование алгоритма

В § 9.4 и 9.5 мы обсуждали основные принципы эффективного вычисления N -точечного ДПФ в случае, когда N — степень двойки. При этом вместо явных вычислений, задействованных в алгоритмах, мы пользовались их графическим изображением, а именно потоковыми графиками. По необходимости каждый раз мы рисовали потоковый график для конкретного значения N . Однако, исследуя график с конкретным значением N , легко понять структуру общего алгоритма, применимого к любому значению $N = 2^\nu$.

Несмотря на то что потоковые графы из предыдущих параграфов отражают сущность алгоритмов БПФ, при реализации определенной вычислительной процедуры необходимо исследовать еще массу разнообразных деталей. В этом параграфе мы коротко затронем некоторые из них. В подразделе 9.6.1 обсуждаются проблемы, связанные с хранением результатов промежуточных вычислений и организацией доступа к ним. В подразделе 9.6.2 рассматриваются задачи вычисления коэффициентов, приписанных ветвям потокового графа. Мы будем проводить исследования на примере алгоритмов, в которых N — степень двойки, но практически все достижения можно будет применить и в общем случае. Для наглядности мы изучаем главным образом алгоритм прореживания по времени, представленный графиком из рис. 9.9, а в подразделе 9.6.3 прокомментируем алгоритмы с общим значением N .

9.6.1. Нумерация

Исходная последовательность в алгоритме, представленном на рис. 9.9, подается на вход в порядке с инвертированием разрядов, в результате чего вычисления можно проводить на месте. С другой стороны, выходные данные алгоритма, т. е. ДПФ исходной последовательности, пронумерованы в естественном порядке. Вообще говоря, отсчеты последовательности имеют стандартный порядок, в связи с чем первым шагом реализации алгоритма должно стать переупорядочивание членов входной последовательности в порядке с инвертированием разрядов. Как видно из рисунка и формул (9.20) и (9.22), искомая перенумерация может быть сделана на месте, поскольку при этом члены последовательности переставляются попарно, т. е. отсчет $x[k]$ меняется местами с отсчетом, номер которого получается инвертированием битов двоичной записи числа k . Замену по всей последовательности удобно сделать на месте, привлекая два счетчика: один с нормальным порядком, а другой с порядком с инвертированием разрядов. При такой операции значения ячеек массива, в котором хранится последовательность, указанные счетчиками, меняются местами.

После того как входная последовательность упорядочена в соответствии с порядком с инвертированием разрядов, можно приступить собственно к вычислениям. На первой стадии входные данные «бабочки» расположены в соседних ячейках массива $X_0[.]$. На второй входные данные уже разделены одной ячейкой, а на m -й — $2^{m-1} - 1$ ячейками. Коэффициенты, участвующие в вычислениях по схеме «бабочка» на m -й стадии, — это степени числа $W_N^{(N/2^m)}$, причем требуются они в естественном порядке.

Предыдущие замечания о входных переменных «бабочки» и ее коэффициентах определяют способ обращения к данным на конкретной стадии, зависящий,



безусловно, от потокового графа. Входы бабочки на графе из рис. 9.13, например на m -й стадии, отстоят друг от друга на 2^{v-m} ячеек, а коэффициенты должны быть организованы в порядке с инвертированием разрядов. Кроме того, несмотря на то что входная последовательность упорядочена естественным способом, выходные данные переставлены в соответствии с порядком с инвертированием разрядов. Так что после окончания вычислений выходную последовательность еще предстоит привести в нормальный вид.

В общем, если мы рассмотрим все потоковые графы § 9.4 и 9.5, то обнаружим, что каждый из алгоритмов имеет свои характерные особенности, связанные с нумерацией. Выбор конкретного алгоритма БПФ зависит от нескольких факторов. Алгоритмы, в которых вычисления можно проводить на месте, способствуют эффективному использованию памяти, но, с другой стороны, в них задействована память не с последовательной, а со случайной выборкой. Кроме того, в таких алгоритмах либо входная, либо выходная последовательность пронумерована в порядке с инвертированием разрядов, и, в зависимости от класса алгоритма (прореживание по времени или частоте) и того, какая именно последовательность (входная или выходная) записана в порядке с инвертированием разрядов, к коэффициентам алгоритма обращаются либо в нормальном порядке, либо в порядке с инвертированием разрядов. Как мы видели, в некоторых алгоритмах БПФ можно использовать память с последовательной выборкой, но при этом либо входные, либо выходные данные должны нумероваться в порядке с инвертированием разрядов.

Потоковый граф, реализующий алгоритм БПФ, можно организовать таким образом, что алгоритм к элементам входной последовательности и коэффициентам будет обращаться последовательно в нормальном порядке, да и выходная последовательность при этом имеет нормальную индексацию. Однако структура нумерации в таких алгоритмах очень сложна, да и памяти требуется в два раза больше необходимого минимума, в связи с чем такие алгоритмы кажутся не особо привлекательными.

К наиболее используемым алгоритмам БПФ, в которых вычисления производятся на месте, относятся алгоритмы, представленные потоковыми графиками на рис. 9.9, 9.13, 9.19 и 9.21. Если преобразование входной последовательности вычисляется только один раз, то входную или выходную последовательность необходимо отсортировать в порядке с инвертированием разрядов. Однако в некоторых ситуациях ДПФ последовательности далее как-то обрабатывается, а к результату обработки применяется обратное ДПФ. Такое происходит, в частности, при реализации цифровых КИХ-фильтров с помощью блочной свертки: ДПФ участков входной последовательности умножается на ДПФ импульсной характеристики фильтра, а затем к произведению применяется обратное ДПФ; в итоге получается участок выходной последовательности фильтра. Аналогично, при вычислении автокорреляционной или взаимнокорреляционной функции с помощью преобразования Фурье вычисляется ДПФ входной последовательности, результат умножается на ДПФ другой последовательности, а к произведению применяется обратное ДПФ. В ситуациях, подобных описанной, когда два преобразования выполняются одно за другим, при подходящем выборе алгоритма БПФ существует возможность избежать порядка с инвертированием разрядов.

Возьмем, например, всю ту же реализацию цифрового КИХ-фильтра, основанную на ДПФ. В качестве алгоритма прямого БПФ можно выбрать тот, у которого входная последовательность имеет естественную нумерацию, а выходная — с инвертированием разрядов, например, алгоритм класса прореживания по времени (рис. 9.13) или прореживания по частоте (рис. 9.19). Разница между упомянутыми алгоритмами состоит в том, что в первом из них к коэффициентам обращаются в порядке с инвертированием разрядов, а во втором — в естественном. Выходная последовательность в каждом из этих алгоритмов получается в порядке с инвертированием разрядов, поэтому, записав ДПФ импульсной характеристики фильтра в том же порядке, произведение ДПФ участка входной последовательности и импульсной характеристики можно вычислять поточечно. Теперь для реализации обратного ДПФ следует обратиться к алгоритму, входные данные которого подаются в порядке с инвертированием разрядов, а результат упорядочен нормально. Здесь уместен потоковый граф из рис. 9.9, основанный на прореживании по времени, или из рис. 9.21, прореживающий по частоте. В первом из них обращение к коэффициентам происходит в естественном порядке, а во втором — в порядке с инвертированием разрядов. В связи с этим, если прямое ДПФ вычисляется алгоритмом из класса прореживающих по времени, то обратное имеет смысл вычислять алгоритмом второго типа, в котором к коэффициентам тоже обращаются в порядке с инвертированием разрядов. Аналогично, прямому алгоритму, прореживающему по частоте, нужно сопоставить алгоритм обратного ДПФ, прореживающий по времени, поскольку они обращаются к коэффициентам в естественном порядке.

9.6.2. Коэффициенты

Как вы помните, алгоритм БПФ может обращаться к коэффициентам W_N^r либо в нормальном порядке, либо в порядке с инвертированием разрядов. В любом случае коэффициенты можно хранить в виде массива, из которого алгоритм берет их по мере надобности или вычисляет их значения, необходимые на данный момент. Хранение массива коэффициентов, несомненно, увеличивает скорость работы, но за счет увеличения количества запоминающих регистров. Действительно, при вычислении N -точечного ДПФ используются экспоненты W_N^r с $r = 0, 1, \dots, (N/2) - 1$, т. е. массив коэффициентов содержит ровно $N/2$ комплексных чисел¹. Если алгоритм обращается к значениям W_N^r в порядке с инвертированием разрядов, то массив коэффициентов имеет смысл хранить именно в этом порядке.

Вычисление коэффициентов алгоритмом снижает скорость работы, но экономит память, поэтому в определенных ситуациях этот подход может оказаться оправданным. Поскольку необходимые нам коэффициенты имеют вид степеней числа W_N^q , где q зависит как от самого алгоритма, так и от его конкретной стадии, то при их вычислении имеет смысл пользоваться рекуррентной формулой. При естественном порядке обращения к коэффициентам имеет смысл пользоваться формулой:

$$W_N^{q\ell} = W_N^q \cdot W_N^{q(\ell-1)}, \quad (9.35)$$

¹ Учитывая симметрию экспонент, общий объем регистров можно уменьшить за счет усложнения процедуры обращения к массиву коэффициентов.

хотя, обращаясь к ним в порядке с обращением разрядов, нужно искать другую. (Заметим, что формула (9.35), по существу, представляет собой спаренную форму осциллятора из задачи 6.21.) При цифровой реализации алгоритма, когда арифметика имеет конечную точность, ошибка вычислений по формуле (9.35) будет увеличиваться с каждой итерацией. Но ее можно уменьшить, присваивая коэффициентам в определенные моменты точные значения (например, $W_N^{N/4} = -j$).

9.6.3. Алгоритмы для более общих значений N

Хотя при $N = 2^v$ алгоритмы БПФ имеют довольно простую структуру, это не единственный вид числа N , при котором можно существенно ускорить вычисление ДПФ. На самом деле, приходится вычислять ДПФ и тогда, когда N не является степенью двойки, однако основную идею, на которой строятся алгоритмы при $N = 2^v$, можно привлечь и для составных N , т. е. для тех чисел, которые имеют нетривиальные делители. Если, например, $N = RQ$, то N -точечное ДПФ можно представить либо как сумму $R Q$ -точечных, либо как сумму $Q R$ -точечных, уменьшив тем самым общий объем вычислений. При составных делителях R и Q процесс ветвления можно продолжать до тех пор, пока не дойдем до простых множителей числа N .

Алгоритмы, вычисляющие N -точечное ДПФ с общим составным N , сталкиваются с более сложной проблемой нумерации. В отдельных случаях упомянутые алгоритмы являются прямым обобщением уже знакомых вам по § 9.4 и 9.5 и относятся к типу алгоритмов Кули–Таки. Если делители P и Q числа N взаимно просты, то общее число умножений может быть уменьшено за счет усложнения индексации участвующих в алгоритме последовательностей. Такие алгоритмы называют алгоритмом «простого делителя». Подробности об алгоритмах Кули–Таки и простого делителя можно найти в [15, 14 и 9].

9.7. Реализация дискретного преобразования Фурье с помощью свертки

Благодаря впечатляющей эффективности алгоритмов БПФ, свертку довольно часто реализуют с помощью вычисления обратного ДПФ от произведения ДПФ сворачиваемых последовательностей. При этом, естественно, как прямое, так и обратное ДПФ вычисляется одним из алгоритмов БПФ. С другой стороны, само ДПФ можно эффективно находить, интерпретировав его как свертку с какой-то конкретной последовательностью, что кажется менее удивительным, чем вычисление свертки через ДПФ. Мы уже познакомились с примером такой процедуры при изучении алгоритма Герцеля, но нужно сказать, что существует ряд других, более совершенных алгоритмов, эксплуатирующих этот подход.

9.7.1. Обзор алгоритма Вайноград–Фурье

Одну из процедур вычисления ДПФ через свертку, предложенную С. Вайноградом [162] в 1978 г., часто называют алгоритмом преобразования Вайнограда–Фурье (АПВФ). Схема индексации в АПВФ соответствует разложению ДПФ на совокупность коротких участков со взаимно простыми длинами. Короткие ДПФ

представляются в виде периодической свертки. Схема этого представления при простом числе отсчетов входной последовательности разработана Рэйдером [126] в 1968 г., но была невостребована до тех пор, пока не были найдены эффективные методы вычисления периодической свертки.

Вайноград соединил вместе все вышеупомянутые процедуры с высокоэффективным алгоритмом вычисления циклической свертки и получил новый подход к реализации ДПФ. Идея эффективного выполнения коротких сверток основана на нескольких хорошо известных (но трудно воспринимаемых нематематиками) теоретико-числовых фактах, таких как, например, китайская теорема об остатках в контексте многочленов. Шадя нашего читателя, мы не будем здесь разбирать подробно этот метод, но предложим особо выносливым студентам попытаться понять его самостоятельным по книгам [126, 9 и 14].

Число умножений, выполняемых при вычислении N -точечного ДПФ в АПВФ, пропорционально N , а не $N \log_2 N$, как в изученных нами ранее алгоритмах. Несмотря на то что подход Вайнограда приводит к оптимальному алгоритму с точки зрения количества умножений, число сложений в нем значительно превышает этот параметр в алгоритмах БПФ. В связи с этим АПВФ имеет максимальные преимущества в ситуациях, когда умножение — существенно более трудоемкая операция, чем сложение, с чем мы сталкиваемся, в частности, при цифровой арифметике с фиксированной точкой. Однако в тех процессорах, где умножение и сложение идут рука об руку, алгоритмы Кули–Таки или простого множителя более предпочтительны. К дополнительным трудностям АПВФ следует отнести очень сложную индексацию данных, при которых вычисление на месте осуществить невозможно. Кроме того, структура этого алгоритма существенным образом зависит от конкретного значения N .

Подводя итог краткому обзору АПВФ, следует заметить, что, хотя он чрезвычайно важен в качестве эталона при оценке эффективности алгоритма вычисления ДПФ (через количество умножений), при выборе алгоритма ДПФ основную роль часто играют другие факторы.

9.7.2. Преобразование с линейной частотной модуляцией

Другой алгоритм вычисления ДПФ через свертку называется алгоритмом преобразования с линейной частотной модуляцией (АПЛЧМ). Его трудно отнести к оптимальным, как бы мы ни измеряли сложность алгоритма, но он очень полезен в разнообразных приложениях, в особенности при реализации на оборудовании, нацеленном на вычисление свертки с фиксированной заранее заданной импульсной характеристикой. Кроме того, АПЛЧМ более универсален, чем алгоритмы БПФ, поскольку предназначен для вычисления любого числа равномерно распределенных по единичной окружности отсчетов преобразования Фурье,

Приступим к выводу АПЛЧМ. Пусть $x[n]$ — N -членная последовательность, а $X(e^{j\omega})$ — ее Фурье-образ. Рассмотрим задачу о вычислении значений $X(e^{j\omega})$ в M равноотстоящих друг от друга точках единичной окружности, как показано на рис. 9.24, т. е. в частотах

$$\omega_k = \omega_0 + k\Delta\omega, \quad 0 \leq k \leq M - 1, \quad (9.36)$$

где начальная частота ω_0 и приращение $\Delta\omega$ выбираются произвольно. (Для вычисления N -точечного ДПФ нужно положить $\omega_0 = 0$, $M = N$ и $\Delta\omega = 2\pi/N$.) Значение Фурье-образа последовательности при этих частотах вычисляется по формуле:

$$X(e^{j\omega_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega_k n}, \quad 0 \leq k \leq M-1. \quad (9.37)$$

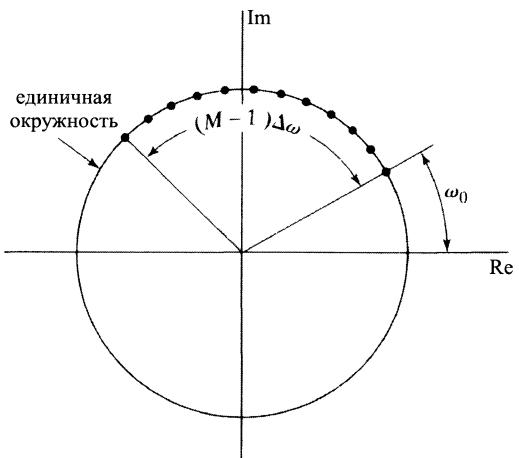
Введя обозначение

$$W = e^{-j\Delta\omega}, \quad (9.38)$$

последнее выражение можно переписать в следующем виде:

$$X(e^{j\omega_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega_0 n} W^{nk}. \quad (9.39)$$

Рис. 9.24. Частоты отсчетов алгоритма преобразования с линейной частотной модуляцией



Для представления $X(e^{j\omega_k})$ в виде свертки нужно использовать простое соотношение:

$$nk = \frac{1}{2}(n^2 + k^2 - (k-n)^2), \quad (9.40)$$

с учетом которого получаем

$$X(e^{j\omega_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega_0 n} W^{k^2/2} W^{n^2/2} W^{-(k-n)^2/2}. \quad (9.41)$$

Введя обозначение

$$g[n] = x[n]e^{-j\omega_0 n} W^{n^2/2}, \quad (9.42)$$

перепишем последнее равенство в виде:

$$X(e^{j\omega_k}) = W^{k^2/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} g[n] W^{-(k-n)^2/2} \right), \quad 0 \leq k \leq M-1. \quad (9.43)$$

Чтобы привести формулу (9.43) к более знакомому виду, поменяем ролями индексы k и n :

$$X(e^{j\omega_n}) = W^{n^2/2} \left(\sum_{k=0}^{N-1} g[k] W^{-(n-k)^2/2} \right), \quad 0 \leq n \leq M-1. \quad (9.44)$$

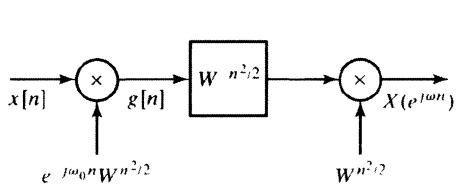


Рис. 9.25. Блок-схема реализации АПЛЧМ

можно представлять себе как комплексную экспоненциальную последовательность с линейно увеличивающейся частотой $n\Delta\omega$. В радарных системах такие сигналы называют сигналами с линейной частотной модуляцией, откуда происходит название преобразования. Системы, аналогичные представленной на рис. 9.25, обычно используют при обработке сигналов в радарах и сонарах для сжатия импульса (см. [144]).

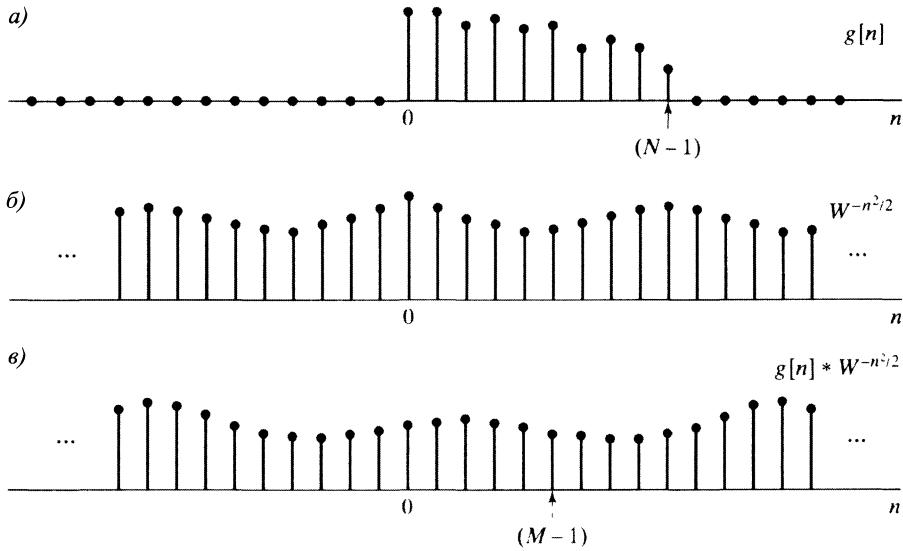


Рис. 9.26. Примеры последовательностей, участвующих в алгоритме АПЛЧМ:
а) $g[n] = x[n]e^{-j\omega_0 n} W^{n^2/2}$; б) $W^{-n^2/2}$; в) $g[n] * W^{-n^2/2}$

При вычислении отсчетов Фурье-образа по формуле (9.44) нам нужно найти выходную последовательность системы из рис. 9.25 только над конечным отрезком. На рис. 9.26 показаны примеры последовательностей $g[n]$, $W^{-n^2/2}$ и их свертка. Так как $g[n]$ имеет конечное число членов, при вычислении отсчетов

свертки над отрезком $[0; M-1]$ используется лишь конечный участок экспоненциальной последовательности $W^{-n^2/2}$, соответствующий значениям n от $-(N-1)$ до $M-1$. Определим новую последовательность

$$h[n] = \begin{cases} W^{-n^2/2}, & -(N-1) \leq n \leq M-1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (9.45)$$

(см. рис. 9.27). Исследуя графическое представление процесса сворачивания последовательностей, легко проверить, что

$$g[n] * W^{-n^2/2} = g[n] * h[n], \quad 0 \leq n \leq M-1. \quad (9.46)$$

Следовательно, бесконечную импульсную характеристику $W^{-n^2/2}$ системы из рис. 9.25 можно заменить конечной из рис. 9.27, после чего система трансформируется в систему из рис. 9.28, импульсная характеристика $h[n]$ которой определена формулой (9.45), а выходная последовательность имеет вид:

$$y[n] = X(e^{j\omega_n}), \quad 0 \leq n \leq M-1. \quad (9.47)$$

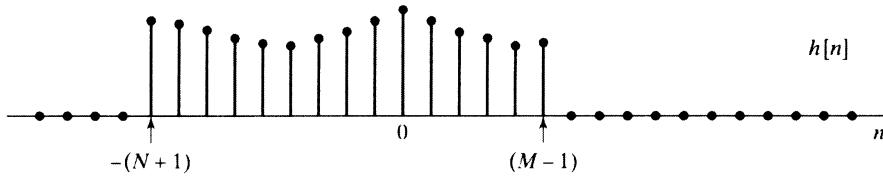


Рис. 9.27. Иллюстрация участка носителя КИХ-фильтра, реализующего АПЛЧМ. Заметим, что значения последовательности $h[n]$, определенной формулой (9.45), комплексные

Процедура (рис. 9.28), вычисляющая отсчеты Фурье-образа, обладает рядом потенциальных преимуществ. В общей ситуации ограничение $N = M$, налагаемое в алгоритмах БПФ, является излишним, причем ни M , ни N не обязаны быть составными числами, а могут при необходимости принимать и значения простых чисел. Кроме того, как уже отмечалось, на параметр ω_0 тоже не на-кладывается никаких ограничений. Большая по сравнению с БПФ гибкость обсуждаемого алгоритма практически не влияет на его эффективность, поскольку свертка из рис. 9.28 может быть реализована с помощью алгоритма БПФ на основе техники, разработанной в § 8.8. Напомним, что для корректности работы алгоритма число точек ДПФ должно быть не меньше чем $M + N - 1$, что обеспечивает совпадение циклической свертки с $g[n] * h[n]$ при $0 \leq n \leq M-1$. Таким образом, в качестве размера ДПФ можно взять одну из степеней двойки. Интересно обратить внимание на то, что алгоритм БПФ, привлекаемый к работе АПЛЧМ, должен относиться к алгоритмам типа Вайнограда, в которых встроена своя процедура вычисления свертки, обеспечивающая их работу.

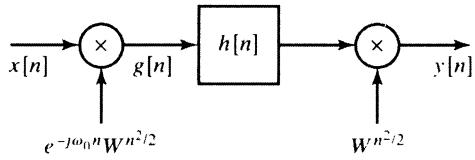


Рис. 9.28. Блок-схема системы АПЛЧМ с конечной импульсной характеристикой

Импульсная характеристика $h[n]$ в системе из рис. 9.28 недетерминирована, и для реализации в режиме реального времени ее необходимо модифицировать в целях получения детерминированной системы. Поскольку $h[n]$ конечна, это достигается задержкой характеристики на $N - 1$ отсчет:

$$h_1[n] = \begin{cases} W^{-(n-N+1)^2/2}, & 0 \leq n \leq M+N-2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (9.48)$$

Так как демодуляционный множитель на выходе, как и выходной сигнал, тоже задерживается на $N - 1$ отсчет, значения Фурье-образа будут выглядеть как

$$X(e^{j\omega_n}) = y_1[n + N - 1], \quad 0 \leq n \leq M - 1. \quad (9.49)$$

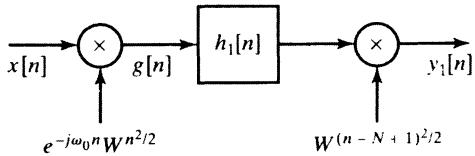


Рис. 9.29. Блок-схема преобразованной системы АПЛЧМ с детерминированной конечной импульсной характеристикой

ализации свертки с фиксированной заранее заданной импульсной характеристикой. Их можно использовать при реализации КИХ-фильтров, чья импульсная характеристика фиксируется при изготовлении геометрической схемы электродов. Аналогичный подход к реализации АПЛЧМ через ПЗС описан в [64].

Дальнейшее упрощение АПЛЧМ можно сделать, когда его выходная последовательность — ДПФ, т. е. когда $\omega_0 = 0$ и $W = e^{-j2\pi/N}$, так что $w_n = 2\pi n/N$. В этом случае систему из рис. 9.29 можно привести к более удобному виду.

Итак, предположив, что $\omega_0 = 0$ и $W = e^{-j2\pi/N} = W_N$, рассмотрим дополнительный задерживающий элемент, примененный к системе из рис. 9.29. При четном N имеет место равенство

$$W_N^{-(n-N)^2/2} = W_N^{-n^2/2} \quad (9.50)$$

(поскольку $W_N^N = 1$).

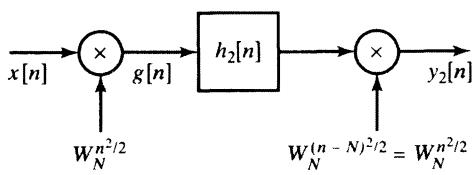


Рис. 9.30. Блок-схема алгоритма АПЛЧМ, вычисляющего отсчеты ДПФ

Модифицированная (детерминированная) система показана на рис. 9.29. Ее преимущества обусловлены тем, что в основе системы лежит свертка входного сигнала (модулированного импульсом) с фиксированной детерминированной импульсной характеристикой. Некоторые технологии, основанные, например, на приборах с зарядовой связью (ПЗС) или поверхностных акустических волнах (ПАВ), особенно полезны при ре-

Пример 9.1. Параметры преобразования с линейной частотной модуляцией

Предположим, что нам нужно вычислить 16 отсчетов Фурье-образа $X(e^{j\omega})$ 26-членной последовательности $x[n]$ при частотах $\omega_k = 2\pi/27 + 2\pi k/1024$, $k = 0, 1, \dots, 15$. Причем известно, что ненулевые члены последовательности расположены на отрезке $[0; 25]$. Мы можем достичь желаемой цели, вычисляя свертку с детерминированной импульсной характеристикой с помощью системы из рис. 9.29, выбрав подходящим образом необходимые параметры. Число искомых отсчетов в нашем примере равно $M = 16$, а длина последовательности — $N = 26$. Начальная частота, т. е. ω_0 , равна $2\pi/27$, а ее приращение $\Delta\omega = 2\pi/1024$. При таких параметрах у нас получается следующее: $W = e^{-j\Delta\omega} = e^{-j2\pi/1024}$ и

$$h_1[n] = \begin{cases} \left(e^{-j2\pi/1024}\right)^{-(n-25)^2/2}, & 0 \leq n \leq 40, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Выходная последовательность $y_1[n]$ теперь оказывается искомой последовательностью отсчетов, начинающейся с $y_1[25]$, т. е.

$$y_1[n+25] = X(e^{j\omega_n}) \Big|_{\omega_n=2\pi/27+2\pi n/1024}, \quad 0 \leq n \leq 15. \quad \square$$

Алгоритм, похожий на АПЛЧМ, изначально был предложен Бластейном [10], который показал, что для полного квадрата $N = K^2$ система из рис. 9.29 может быть реализована рекурсивно (см. задачу 9.41). В статье [125] этот алгоритм обобщается для вычисления отсчетов z -преобразования, равномерно распределенных по спиральному контуру z -плоскости. Эта более общая форма АПЛЧМ была названа алгоритмом z -преобразования с линейной частотной модуляцией.

9.8. Эффекты, связанные с конечной длиной регистров

Поскольку алгоритмы БПФ широко применяются при цифровом фильтровании и спектральном анализе, очень важно понять, как оказывается на вычислениях конечная длина регистров, отвечающих за числа. Естественно, точный анализ этого воздействия очень труден, но, как правило, и не очень нужен. Чтобы выбрать необходимую длину регистров, достаточно упрощенного исследования. По стилю оно напоминает методы, о которых рассказано в § 6.9. Мы будем анализировать ошибки округления с помощью модели линейного шума, получающейся встраиванием источника аддитивного шума в каждую точку алгоритма, где происходит округление. Кроме того, в целях облегчения анализа мы сделаем несколько естественных допущений. Результаты, полученные на этом пути, позволят сделать приближенные, но несомненно полезные выводы о влиянии округления на весь процесс. Мы будем анализировать ошибки округления, но обобщить наш анализ на случай усечения при приближенных вычислениях не составляет труда.

Мы познакомились с несколькими различными алгоритмическими структурами БПФ, но эффекты округления практически не зависят от конкретного типа структуры. Поэтому, рассмотрев только двоичный алгоритм прореживания по времени, мы узнаем об эффектах округления в любом другом.

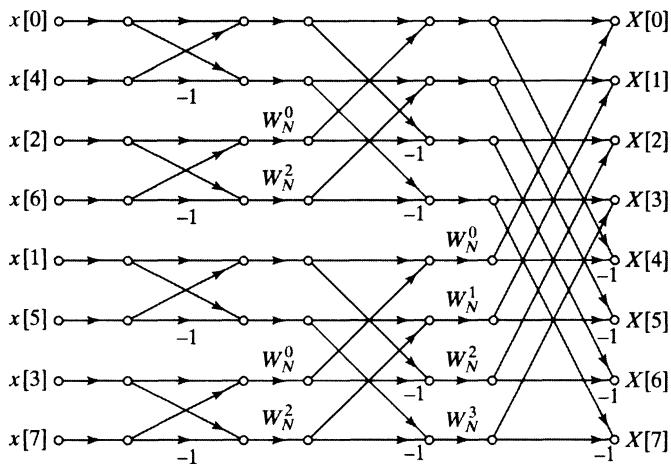


Рис. 9.31. Потоковый график алгоритма БПФ прореживания по времени

Потоковый график, иллюстрирующий алгоритм прореживания по времени для случая $N = 8$, показан на рис. 9.9 и воспроизведен на рис. 9.31. Некоторые его ключевые моменты являются общими для всех стандартных двоичных алгоритмов. Напомним, что вычисление N -точечного ДПФ с помощью этого алгоритма делится на $\nu = \log_2 N$ стадий. На каждой из них формируются новые массивы из N чисел с помощью линейной комбинации элементов предыдущего, по два за один раз. Последний ν -й массив содержит искомое ДПФ. Основное 2-точечное ДПФ в двоичных прореженных по времени алгоритмах вычисляется по формулам:

$$\begin{aligned} X_m[p] &= X_{m-1}[p] + W_N^r X_{m-1}[q], \\ X_m[q] &= X_{m-1}[p] - W_N^r X_{m-1}[q], \end{aligned} \quad (9.53)$$

где m — номер стадии, а p и q обозначают индекс элементов $(m-1)$ -го и m -го массивов. Как обычно, в массиве $X_0[\cdot]$ записаны члены входной последовательности, а в $X_\nu[\cdot]$ — выходной. Потоковый график, иллюстрирующий основное вычисление по схеме «бабочка», показан на рис. 9.32.

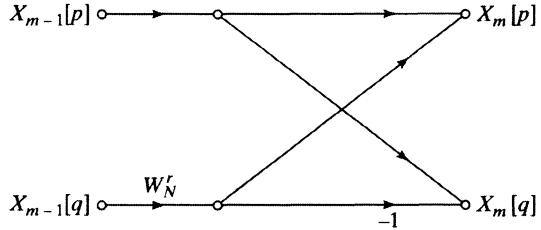
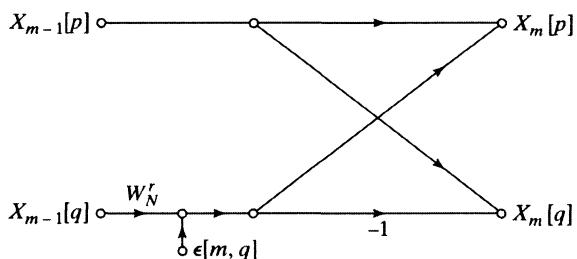


Рис. 9.32. Схема вычислений «бабочка» в алгоритме прореживания по времени

На каждой стадии для создания очередного массива осуществляются $N/2$ отдельных вычислений по схеме «бабочка». Значения целой переменной r варьируются вместе с p , q и m по закону, зависящему от конкретного алгоритма БПФ, однако ошибки приближения можно анализировать, не учитывая этот закон. Кроме того, при анализе ошибок можно не обращать внимание на соотношения между

переменными p , q и m , определяющие тип порядка, в котором хранятся данные в массивах. Детали анализа алгоритмов прореживания по времени и по частоте немного отличаются друг от друга из-за разной формы «бабочки», но основные результаты анализа этих алгоритмов очень похожи. Будем считать, что «бабочка» имеет именно тот вид, который указан в формуле (9.53), т. е. относится к алгоритму прореживания по времени.

Рис. 9.33. Модель линейного шума, возникающего из-за округления умножения чисел с фиксированной точкой в схеме «бабочка» из алгоритма прореживания по времени



Если учитывать шум округления, связав источник аддитивного шума с каждым умножением с фиксированной точкой, то «бабочку» из рис. 9.32 следует заменить на потоковый граф, изображенный на рис. 9.33. Дополнительная входная последовательность $\epsilon[m, q]$ символизирует собой комплекснозначную ошибку, возникающую при вычислении m -го массива по элементам $(m-1)$ -го. Говоря более точно, $\epsilon[m, q]$ — это ошибка квантования произведения q -го элемента $(m-1)$ -го массива на комплексный коэффициент.

Так как входная последовательность алгоритма комплекснозначна, каждое умножение в нем — это умножение комплексных чисел, состоящее из четырех умножений вещественных чисел. Будем предполагать, что ошибки, вносимые вещественными умножениями, обладают следующими свойствами.

1. Ошибка — случайная величина, равномерно распределенная на промежутке $(-\frac{1}{2} \cdot 2^{-B}; \frac{1}{2} \cdot 2^{-B}]$, где B — количество знаков чисел, хранящихся в памяти компьютера. В связи с этим дисперсия каждого источника шума равна $2^{-2B}/12$.
2. Ошибки не коррелируют друг с другом.
3. Любая из ошибок не коррелирует с входным и выходным сигналами.

Итак, все четыре шумовые последовательности — некоррелирующие друг с другом белые шумы с нулевым средним значением и общей дисперсией

$$\mathcal{E}\left\{\left|\epsilon[m, q]\right|^2\right\} = 4 \cdot \frac{2^{-2B}}{12} = \frac{1}{3}2^{-2B} = \sigma_B^2. \quad (9.54)$$

Для определения среднеквадратичного значения шума на данном узле выхода потокового графа нужно учесть вклад каждого источника шума, влияющего на этот узел. Глядя на потоковый граф из рис. 9.31, можно сделать следующие наблюдения:

1. Передаточная функция между любыми смежными узлами графа (т. е. соединенными ветвью) представляет собой умножение на комплексную константу с единичным модулем (поскольку коэффициенты, приписанные ветвям, — степень комплексной экспоненты W_N).

2. Каждый выходной узел связан с семью «бабочками» потокового графа. (В общем случае каждый узел выхода будет соединен с $(N - 1)$ «бабочкой».) Например, рис. 9.34, а) показывает потоковый граф, получающийся после удаления всех «бабочек» из рис. 9.31, не связанных с $X[0]$. А после удаления всех «бабочек», не связанных с $X[2]$, рис. 9.31 превращается в рис. 9.34, б).

Эти наблюдения, естественно, обобщаются на случай $N = 2^v$.

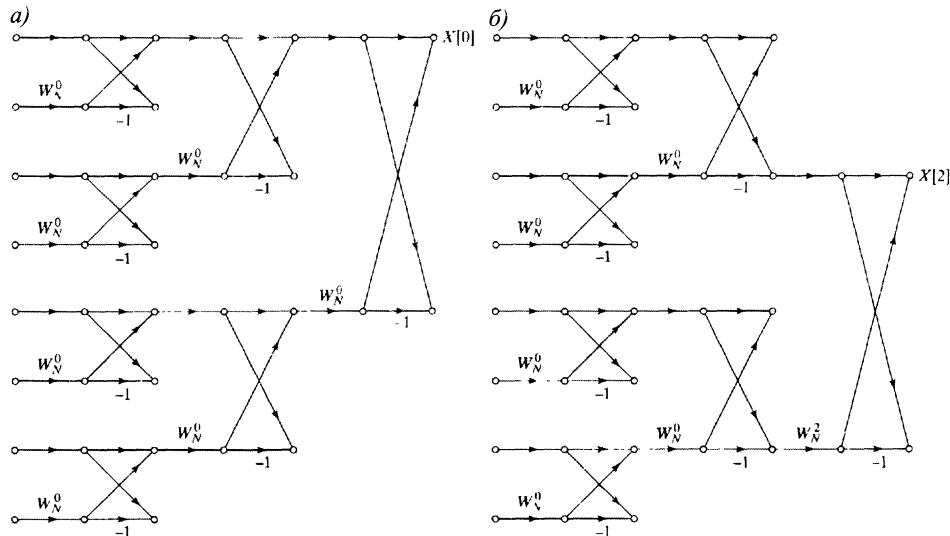


Рис. 9.34. а) «бабочки», связанные с $X[0]$; б) «бабочки», связанные с $X[2]$

В качестве следствия первого наблюдения получаем, что среднеквадратичное значение модуля компонент выходного шума, происходящих из каждого элементарного источника, одинаково и равно σ_B^2 . Общий шум на каждом выходном узле — это сумма доходящих до него шумовых последовательностей. Так как в нашей модели источники шумов некоррелированы друг с другом, среднеквадратичное значение модуля шума на выходом узле получается как произведение σ_B^2 с числом источников, связанных с узлом. В каждой «бабочке» стоит только один источник шума. Поэтому в шум на каждом выходном узле дает вклад не более чем $(N - 1)$ источник (см. наблюдение 2). На самом деле, некоторые «бабочки» вообще не производят шума округления, так как в них (например, всех из первых двух стадий при $N = 8$) осуществляется умножение на 1. Таким образом, предположив для простоты, что шум округления возникает в каждой «бабочке», мы получим верхнюю оценку уровня шума на выходе. В этих предположениях среднеквадратичное значение шума в k -м члене ДПФ (этот шум мы обозначим через $F[k]$) равно

$$\mathcal{E} \left\{ |F[k]|^2 \right\} = (N - 1)\sigma_B^2, \quad (9.55)$$

что для больших N можно аппроксимировать как

$$\mathcal{E} \left\{ |F[k]|^2 \right\} \approx N\sigma_B^2. \quad (9.56)$$

Итак, среднеквадратичное значение шума на выходе пропорционально N , числу точек преобразования. Удвоение N или добавление стадии к алгоритму БПФ приводит к удвоению среднеквадратичного значения выходного шума. В задаче 9.45 мы уточним полученный результат, учтя тот факт, что при умножении на 1 и j никакого шума не возникает. Заметим, что удвоение длины сумматора в алгоритмах БПФ не позволяет снизить уровень шума, поскольку результаты вычислений по схеме «бабочки» на каждой стадии должны храниться в $(B + 1)$ -битовом регистре.

Привлекая арифметику с фиксированной точкой к реализации алгоритма БПФ, мы должны быть уверены, что не происходит переполнений. Из формулы (9.53) следует, что

$$\max(|X_{m-1}[p], X_{m-1}[q]|) \leq \max(|X_m[p], X_m[q]|) \quad \text{и} \quad (9.57)$$

$$\max(|X_m[p], X_m[q]|) \leq 2 \max(|X_{m-1}[p], X_{m-1}[q]|) \quad (9.58)$$

(см. задачу 9.44). Из (9.57) получаем, что от стадии к стадии максимум модуля элементов массива увеличивается несильно. Поэтому, если модуль всех значений выходного ДПФ меньше определенного числа, то модули значений промежуточных вычислений тоже не превосходят единицы и переполнения можно не опасаться¹.

Чтобы переписать ограничение на уровень выходного сигнала в терминах входного, заметим, что условие

$$|x[n]| < \frac{1}{N}, \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (9.59)$$

необходимо и достаточно для выполнения неравенства:

$$|X[k]| < 1, \quad 0 \leq k \leq N - 1. \quad (9.60)$$

Действительно, по определению ДПФ имеем

$$|X[k]| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \right| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|, \quad 0 \leq k \leq N - 1. \quad (9.61)$$

Итак, если имеет место неравенство (9.59), то ни на одной из стадий алгоритма переполнений быть не может.

Чтобы получить явное выражение для отношения С/Ш на выходе алгоритма БПФ, рассмотрим входную последовательность с некоррелирующими соседними элементами, т. е. подадим на вход алгоритма белый шум. Предположим также, что вещественные и мнимые части входной последовательности тоже не коррелируют друг с другом, а их амплитуда равномерно распределена между $-1/(\sqrt{2}N)$ и $+1/(\sqrt{2}N)$. (Заметим, что этот сигнал удовлетворяет условию (5.61).) В этих предположениях

$$\mathcal{E}\{|x[n]|^2\} = \frac{1}{3N^2} = \sigma_x^2. \quad (9.62)$$

¹На самом деле, исследуя переполнения, вещественную и мнимую части комплексных чисел нужно рассматривать отдельно. Однако неравенство $|x| < 1$ влечет: $|\operatorname{Re}\{x\}| < 1$ и $|\operatorname{Im}\{x\}| < 1$, а из последних неравенств следует, что $|x| < \sqrt{2}$, т. е. эти подходы к переполнению практически равносильны.

ДПФ входной последовательности имеет вид:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W^{kn}, \quad (9.63)$$

опираясь на который можно показать, что в сделанных предположениях о входном сигнале имеет место равенство:

$$\mathcal{E}\left\{\left|X[k]\right|^2\right\} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{E}\left\{|x[n]|^2\right\} |W^{kn}|^2 = N\sigma_x^2 = \frac{1}{3N}. \quad (9.64)$$

Комбинируя выражения (9.56) и (9.64), приходим к выводу:

$$\frac{\mathcal{E}\left\{\left|F[k]\right|^2\right\}}{\mathcal{E}\left\{\left|X[k]\right|^2\right\}} = 3N^2\sigma_B^2 = N^22^{-2B}. \quad (9.65)$$

Согласно полученному соотношению, С/Ш растет как N^2 или на 1 бит за стадию. Иначе говоря, увеличивая алгоритм на одну стадию, что соответствует удвоению N , мы должны добавить один бит к длине регистра, чтобы сохранить отношение С/Ш неизменным. Фактически, предположение о том, что входной сигнал является белым шумом, здесь не очень существенно. Отношение С/Ш остается пропорциональным N^2 и при множестве других входных сигналов, меняется лишь коэффициент пропорциональности.

Формула (9.58) предлагает другой способ оценки. Поскольку максимум модуля на каждой стадии увеличивается не более чем в два раза, мы можем предупредить переполнения, потребовав, чтобы $|x[n]| < 1$, и введя половинное затухание сигнала на каждой стадии. В этом случае на выходе будет получаться ДПФ, умноженное на $\frac{1}{N}$. Хотя среднеквадратичный выходной сигнал будет составлять одну N -ю требуемого, амплитуда входного сигнала может быть в N раз больше, а переполнений все равно не будет. В контексте белого шума, поданного на вход, это означает, что вещественная и мнимая части равномерно распределены от $-1/\sqrt{2}$ до $1/\sqrt{2}$, так что $|x[n]| < 1$. Таким образом, при четном ν максимальное ожидаемое значение квадрата модуля ДПФ, которое может появиться, когда на вход подается белый шум, совпадает с тем, что приведено в (9.64). Однако уровень шума на выходе станет намного меньше, чем в (9.56), т. е. шум, вносимый на ранних стадиях алгоритма БПФ, будет ослабляться умножениями на следующих стадиях.

Потоковый граф, отражающий «бабочку», входные данные которой умножаются на $1/2$, приведен на рис. 9.35. Там, в частности, появляются два источника шума. Как и раньше, мы считаем, что вещественная и мнимая части этих шумов не коррелируют ни друг с другом, ни с другими источниками шумов и распределены равномерно между $\pm\frac{1}{2} \cdot 2^{-B}$. Итак, как и прежде,

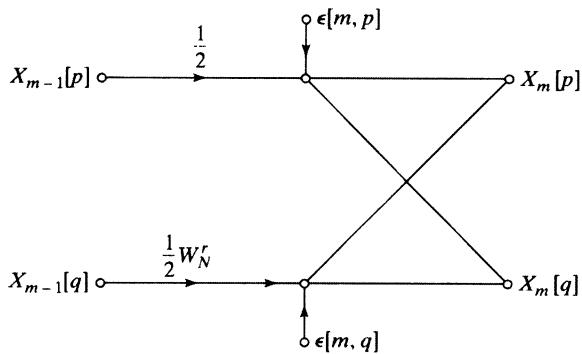
$$\mathcal{E}\left\{|\varepsilon[m, q]|^2\right\} = \sigma_B^2 = \frac{1}{3} \cdot 2^{-2B} = \mathcal{E}\left\{|\varepsilon[m, p]|^2\right\}. \quad (9.66)$$

Так как все шумовые источники не коррелируют друг с другом, среднеквадратичный модуль шума на конкретном узле выхода складывается из среднеквадратичных значений модуля для каждого источника шума в потоковом графе.

Однако, в отличие от предыдущего случая, ослабление, которому подвергается шум, зависит от массива, где этот шум возникает. Шум, возникший на m -й стадии, при подходе к выходному узлу будет умножен на константу с модулем $(1/2)^{\nu-m-1}$. Исследуя граф из рис. 9.31, мы видим, что в случае $N = 8$ каждый узел выхода связан с:

- одной «бабочкой», ассоциированной с $(\nu - 1)$ -м массивом;
- двумя «бабочками», ассоциированными с $(\nu - 2)$ -м массивом;
- четырьмя «бабочками» из $(\nu - 3)$ -й стадии и т. д.

Рис. 9.35. «Бабочка» с учетом масштабирования входных данных и шума, соответствующего округлению в арифметике с фиксированной точкой



В общей ситуации, при $N = 2^\nu$, каждый узел выхода соединен с $2^{\nu-m-1}$ «бабочкой», т. е. с $2^{\nu-m}$ источниками шума, возникающими при формировании m -го массива. Таким образом, среднеквадратичное значение модуля шума равно

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\left\{|F[k]|^2\right\} &= \sigma_B^2 \sum_{m=0}^{\nu-1} 2^{\nu-m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu-2m-2} = \sigma_B^2 \sum_{m=0}^{\nu-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-m-2} = \\ &= \sigma_B^2 \cdot 2 \sum_{k=0}^{\nu-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2\sigma_B^2 \frac{1-0,5^\nu}{1-0,5} = 4\sigma_B^2(1-0,5^\nu). \end{aligned} \quad (9.67)$$

При больших значениях N можно считать, что $\left(\frac{1}{2}\right)^\nu$ (т. е. $1/N$) пренебрежительно мало по сравнению с 1 и

$$\mathcal{E}\left\{|F[k]|^2\right\} \approx 4\sigma_B^2 = \frac{4}{3}2^{-2B}, \quad (9.68)$$

что много меньше, чем дисперсия шума, получающаяся при масштабировании сигнала на входе.

Комбинируя теперь формулы (9.68) и (9.64), мы можем получить отношение С/Ш в случае входного белого шума, когда масштабирование происходит на каждой стадии. Оно имеет вид:

$$\frac{\mathcal{E}\left\{|F[k]|^2\right\}}{\mathcal{E}\left\{|X[k]|^2\right\}} = 12N\sigma_B^2 = 4N \cdot 2^{-2B} \quad (9.69)$$

и пропорционально N , а не N^2 . Итак, отношение С/Ш растет как N , что соответствует половине бита на стадию — факт, впервые установленный Велшем [157].

Стоит еще раз отметить, что предположение о белом шуме, поданном на вход, не существенно для анализа. Основной результат о пропорциональности отношения С/Ш числу N остается справедливым для широкого класса сигналов, меняется лишь коэффициент пропорциональности, зависящий от входного сигнала.

Отметим также, что доминирующим фактором в пропорциональности отношения С/Ш числу N является уменьшение уровня сигнала (требуемое для предупреждения переполнений) при переходе от одной стадии к следующей. Согласно оценке (9.68), в последнем массиве присутствует очень малый шум (в один или два бита). Большая часть шума была удалена из двоичного слова за счет масштабирования.

При выводе отношения С/Ш предполагалось, что все арифметические операции осуществляются над числами с фиксированной точкой, т. е. мы допускали только заранее установленное ослабление сигнала и не разрешали никаких других масштабирований. Ясно, что если аппаратные средства или возможности программы позволяют оперировать числами с фиксированной точкой, то нам следует по возможности включать ослабляющий коэффициент $1/2$ на каждой стадии, а не ставить большое ослабление на входе.

Третий подход к предупреждению переполнений основан на использовании блочно-плавающей точки. В этой процедуре отсчеты входного сигнала нормализуются так, чтобы компьютерное слово, его представляющее, сдвигалось к левому краю, но выполнялось ограничение $|x[n]| < 1$. Вычисления происходят так же, как с фиксированной точкой, за исключением того, что после каждого сложения проводится тест на переполнение. При обнаружении переполнения элементы всего массива делятся на два и вычисления продолжаются, а число всех произведенных делений на два подсчитывается и определяется масштабирующий множитель выходного массива. При этом отношение С/Ш на выходе зависит от количества всех возникающих переполнений и от номеров стадий, на которых они возникают. Эти факторы определяются входным сигналом, в связи с чем для точного вычисления отношения С/Ш нам нужно знать сигнал, ДПФ от которого предстоит вычислить.

Проведенный анализ показал, что масштабирование, предупреждающее переполнения, является доминирующим фактором, влияющим на отношение С/Ш, при реализации алгоритма БПФ в арифметике с фиксированной точкой. Поэтому арифметика с плавающей точкой должна повысить качество работы этого алгоритма. Влияние округлений в арифметике с плавающей точкой было проанализировано и теоретически и экспериментально Гентлеманом и Санде [46], Вайнстейном [155], и Канеко и Лиу [79]. Исследователи обосновали, что поскольку масштабирование становится уже не столь необходимым, то увеличение отношения С/Ш с ростом N уже не так значительно, как в арифметике с фиксированной точкой. Вайнстейн, например, теоретически доказывает, что отношение С/Ш пропорционально ν при $N = 2^\nu$, т. е. $\log_2 N$, а не N , что происходит в арифметике с фиксированной точкой (см. [156]). Значит, увеличение ν в четыре раза повышает отношение С/Ш только на один бит.

9.9. Краткое содержание главы

В этой главе изучалась техника вычисления ДПФ. Мы увидели, как можно использовать периодичность и симметрию комплексной экспоненты $e^{-j(2\pi/N)kn}$ для повышения скорости работы алгоритма, вычисляющего ДПФ.

Был исследован алгоритм Герцеля и прямое вычисление ДПФ ввиду их важности для вычисления отдельных отсчетов преобразования, но основное внимание было уделено алгоритмам БПФ. Мы довольно подробно описали два класса этих алгоритмов: прореживание по времени и по частоте, рассмотрели их реализации в виде потоковых графов и затронули такие аспекты реализаций, как индексирование данных и квантование коэффициентов. Наиболее подробно мы исследовали алгоритмы, специально разработанные для случая, когда N — степень двойки, поскольку они наиболее просты для понимания и программирования и очень часто используются.

Кроме того, мы коротко обсудили свертку как основу вычисления ДПФ, сделав обзор алгоритма преобразования Вайнограда–Фурье, и чуть более подробно осветили алгоритм, называемый преобразованием с линейной частотной модуляцией.

Последний параграф главы отведен под обсуждение проблем, связанных с конечностью длин слов, хранящих коэффициенты и результаты вычислений. С помощью модели линейного шума мы показали, что отношение С/Ш при вычислении ДПФ по-разному зависит от длины входной последовательности в зависимости от способа масштабирования. Кроме того, мы коротко прокомментировали эффект представления чисел в арифметике с плавающей точкой.

Задачи

Обязательные задачи с ответами

- 9.1. Предположим, что в вашем распоряжении имеется программа, вычисляющая ДПФ

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1,$$

т. е. входные данные программы — это последовательность $x[n]$, а выходные — ее ДПФ $X[k]$. Покажите, как можно преобразовать входную и/или выходную последовательность, чтобы программа могла вычислить обратное ДПФ

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j(2\pi/N)kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Иными словами, на вход программы вы должны подать либо $X[k]$, либо последовательность, легко связанную с ней, а на выходе получить последовательность $x[n]$ или что-то близкое ей. Существует несколько возможных способов решения этой задачи.

- 9.2. На рис. 9.36 показано графическое представление алгоритма БПФ «прореживание» по времени, вычисляющего 8-точечное ДПФ. На этом рисунке жирной линией выделен путь от отсчета $x[7]$ до отсчета ДПФ $X[2]$.

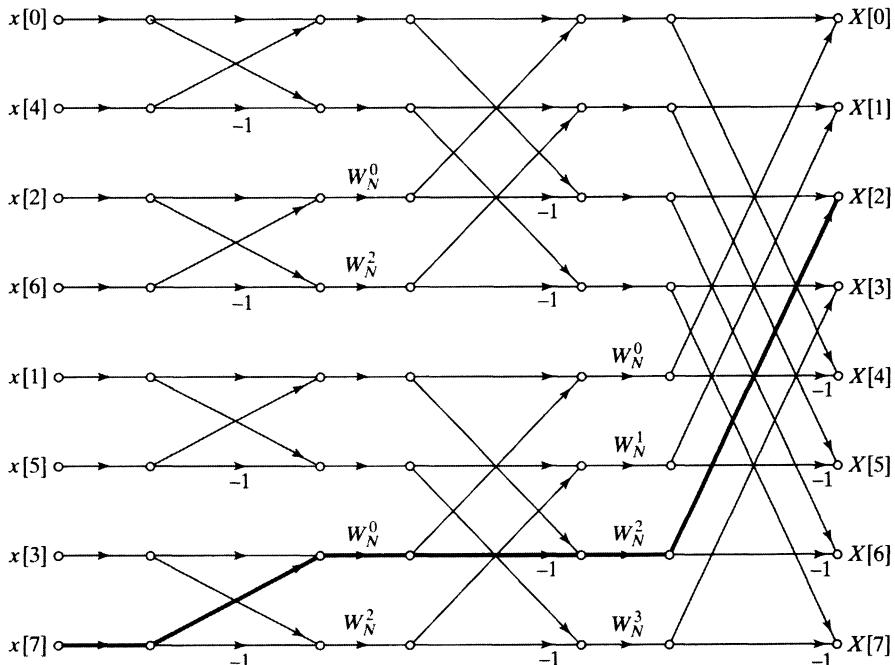


Рис. 9.36.

- а) Чему равен «коэффициент усиления» отмеченного пути?
- б) Сколько всего путей на рисунке берет начало в $x[7]$ и заканчиваются в $X[2]$? Верен ли ваш ответ в общем случае, т. е. сколько путей соединяет произвольно взятый отсчет входа с произвольном же отсчетом выхода?
- в) Рассмотрите отсчет $X[2]$. Следуя по выделенному пути графа, покажите, что каждый отсчет входной последовательности вносит свой вклад в этот член ДПФ, т. е. проверьте формулу:

$$X[2] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)2n}.$$

- 9.3. На рис. 9.37 приведен потоковый график 8-точечного алгоритма БПФ прореживания по времени. Пусть $x[n]$ — последовательность, подаваемая на вход алгоритма, а ее ДПФ обозначено как $X[k]$. Символами $A[\cdot]$, $B[\cdot]$, $C[\cdot]$ и $D[\cdot]$ на рисунке обозначены отдельные массивы, элементы которых пронумерованы последовательно в том же порядке, что и узлы графа.

- а) Покажите, как должны располагаться элементы входной последовательности в массиве $A[\cdot]$ и в каком порядке нужно извлекать члены ДПФ из массива $D[\cdot]$.
- б) Не вычисляя значений промежуточных массивов $B[\cdot]$ и $C[\cdot]$, определите и нарисуйте элементы массива $D[r]$, $r = 0, 1, \dots, 7$, если входная последовательность равна $x[n] = (-W_N)^n$, $n = 0, 1, \dots, 7$.
- в) Определите и изобразите последовательность $C[r]$, $r = 0, 1, \dots, 7$, если выходная последовательность постоянна и равна $X[k] = 1$, $k = 0, 1, \dots, 7$.

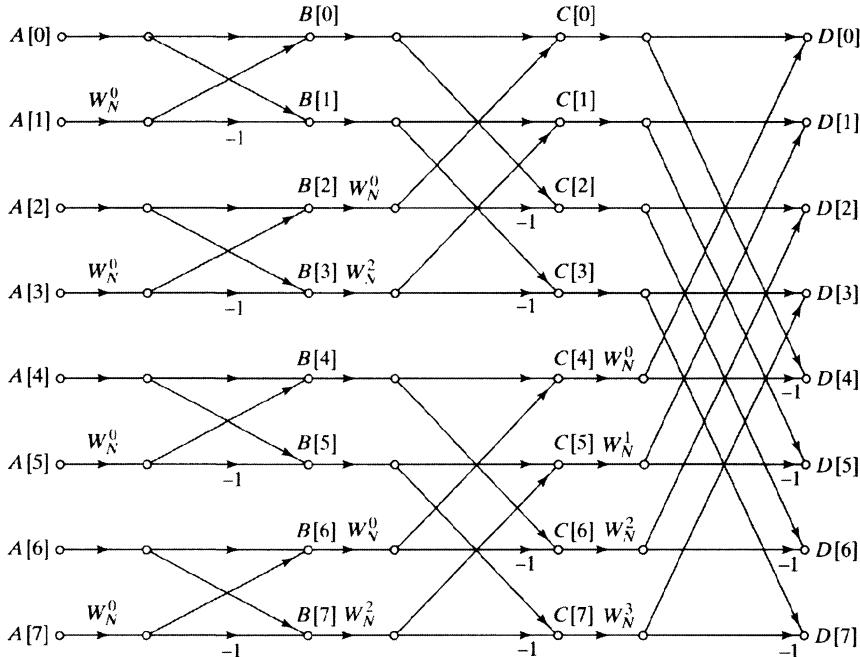


Рис. 9.37.

- 9.4. При реализации алгоритма БПФ степени числа W_N иногда генерируют с помощью рекуррентного соотношения, или осциллятора. Рассмотрим двоичный алгоритм прореживания по времени с $N = 2^\nu$ (на рис. 9.9 изображен потоковый график этого алгоритма при $N = 8$). Для эффективного генерирования коэффициентов частота осциллятора должна меняться в зависимости от стадии.

Пусть массивы данных пронумерованы от 0 до $\nu = \log_2 N$, так что входная последовательность записана в массив с номером 0, а выходная — с номером ν . При всех вычислениях «бабочка» на данной стадии нужны одни и те же коэффициенты W_N^r , которые определяются перед поиском нового набора коэффициентов. Мы предполагаем, что данные в массиве хранятся в последовательно пронумерованных от 0 до $N - 1$ комплексных регистрах. Все перечисленные ниже вопросы относятся к вычислению m -го массива по элементам $(m - 1)$ -го ($1 \leq m \leq \nu$). Ваши ответы должны быть сформулированы в терминах m .

- Сколько вычислений по схеме «бабочка» осуществляется на m -й стадии и сколько различных коэффициентов для этого нужно?
- Выпишите разностное уравнение, соответствующее импульсной характеристике $h[n]$, содержащей коэффициенты W_N^r , необходимые для «бабочки» на m -й стадии.
- Полученное вами в предыдущем пункте уравнение должно иметь форму осциллятора, т. е. $h[n]$ должна быть периодической последовательностью при $n \geq 0$. Каков ее период? Основываясь на периоде импульсной характеристики, найдите зависимость частоты этого осциллятора от m .

- 9.5. При вычислении ДПФ приходится умножать комплексные числа. Рассмотрим произведение $X + jY = (A + jB)(C + jD) = (AC - BD) + j(BC + AD)$. В таком виде умножение комплексных чисел включает в себя четыре умножения и два сложения вещественных чисел. Проверьте, что комплексное умножение можно осуществить, задействовав три вещественных умножения и пять вещественных сложений, если оно проводится по следующей схеме:

$$X = (A - B)D + (C - D)A, \quad Y = (A - B)D + (C + D)B.$$

- 9.6. Рассмотрите «бабочку» из рис. 9.38. Она является основной составной частью сигнального потокового графа, реализующего алгоритм БПФ. Выберите наиболее точные высказывания из следующего списка.

1. «Бабочка» выделена из графа, описывающего алгоритм БПФ прореживания по времени.
 2. «Бабочка» выделена из графа, описывающего алгоритм БПФ прореживания по частоте.
 3. Информации, которую можно извлечь из рисунка, недостаточно для точного определения класса алгоритма.

- 9.7. Система, изображенная на рис. 9.39, преобразует 32-членную входную последовательность $x[n]$ с ненулевыми отсчетами на отрезке $[0; 31]$ в выходную последовательность $y[n]$. Известно, что $y[32]$ равен значению $X(e^{j\omega})$ при некоторой частоте ω_k . Основываясь на потоковом графе, найдите ω_k .

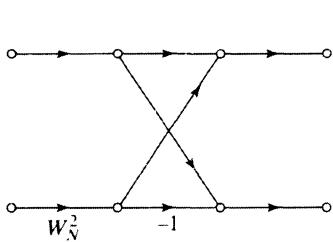


Рис. 9.38.

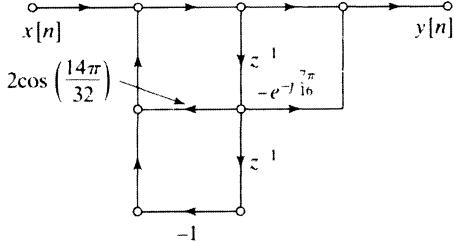


Рис. 9.39.

- 9.8. Конечный сигнал $x[n]$, определенный над отрезком $[0; 19]$, служит входным сигналом системы, изображенной на рис. 9.40, в которой

$$h[n] = \begin{cases} e^{j(2\pi/21)(n-19)^2/2}, & 0 \leq n \leq 28, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad W = e^{-j(2\pi/21)}.$$

Выходной сигнал $y[n]$ при $n = 19, \dots, 28$ может быть выражен через значения Фурье-образа $X(e^{j\omega})$ последовательности $x[n]$ в подходящих частотах. Найдите это выражение.

- 9.9. Потоковый граф «бабочка» из рис. 9.8, б) используется для вычисления на месте ДПФ последовательности длины $N = 2^v$, т. е. с привлечением только одного массива комплекснозначных регистров. Обозначим этот массив через $A[\ell]$, $0 \leq \ell \leq N - 1$. В начале работы алгоритма в массиве хранятся отсчеты входной

последовательности, записанные в порядке с инвертированием разрядов. А затем его значения меняются по мере прохождения алгоритмом ν стадий. На вход каждой «бабочки» подаются два элемента $A[\ell_0]$ и $A[\ell_1]$ массива, а результат ее работы записывается в те же позиции. Номера элементов ℓ_0 и ℓ_1 зависят как от стадии, так и от положения «бабочки» в плавающем графе. Стадии работы алгоритма обозначаются переменной m , принимающей значения $1, \dots, \nu$.

- Найдите зависимость $|\ell_1 - \ell_0|$ от стадии m .
- На некоторых стадиях в вычислениях «бабочка» участвуют одинаковые коэффициенты W_N^r . Определите, насколько удалены друг от друга индексы ℓ_0 для этих «бабочек».

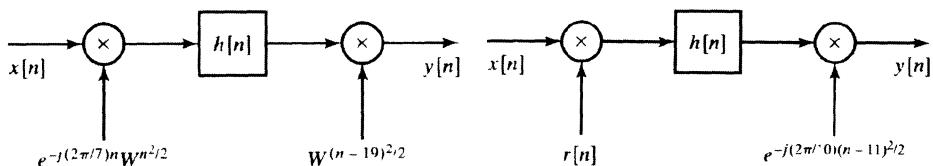


Рис. 9.40.

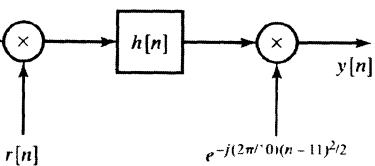


Рис. 9.41.

- 9.10. Рассмотрите систему из рис. 9.41, последовательность $h[n]$ в которой имеет вид:

$$h[n] = \begin{cases} e^{j(2\pi/10)(n-11)^2/2}, & 0 \leq n \leq 15, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Нам хотелось бы, чтобы выход системы удовлетворял соотношению: $y[n+11] = X(e^{j\omega_n})$, где $\omega_n = (2\pi/19) + n(2\pi/10)$ при $n = 0, 1, 2, 3, 4$, а $X(e^{j\omega})$ — Фурьеобраз входной последовательности. Подберите последовательность $r[n]$, при которой желаемая цель будет достигнута.

- Переставьте отсчеты 16-членной последовательности $x[n]$ в соответствии с порядком с инвертированием разрядов.
- Пусть длина последовательности $x[n]$ равна $N = 2^\nu$, а $X[k]$ — ее N -точечное ДПФ. Аргументированно объясните, верно ли следующее утверждение:

Не существует возможности построить потоковый граф, реализующий алгоритм вычисления $X[k]$ по $x[n]$, у которого как $x[n]$, так и $X[k]$ имеет естественный порядок (т. е. ни там ни там не привлекается сортировка с инвертированием разрядов).

- «Бабочка», изображенная на рис. 9.42, взята из алгоритма БПФ прореживания по частоте с $N = 16$, где входная последовательность имеет естественный порядок. Напомним, что этот алгоритм выполняется в четыре стадии, пронумерованные числами $m = 1, 2, 3, 4$. На каких стадиях выполняются вычисления по этой «бабочке»? Объясните свой ответ.
- «Бабочка», изображенная на рис. 9.43, взята из алгоритма БПФ прореживания по времени с $N = 16$. Алгоритм выполняется в четыре стадии, пронумерованные числами $m = 1, 2, 3, 4$. Какими могут быть значения r для каждой из стадий алгоритма?

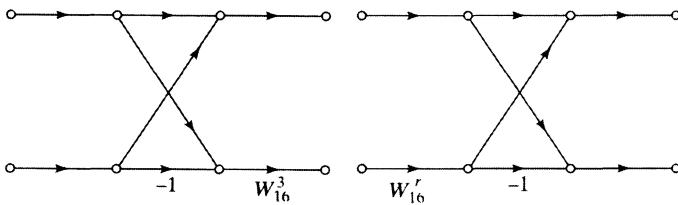


Рис. 9.42.

Рис. 9.43.

- 9.15. Допустим, в вашем распоряжении есть две программы, вычисляющие ДПФ последовательности $x[n]$ с $N = 2^\nu$ ненулевыми отсчетами. Программа *A* за N^2 с вычисляет ДПФ прямым способом, основываясь на определяющей формуле преобразования (8.70). Программа *B* реализует алгоритм БПФ прореживания по времени и выполняется за $10N \log_2 N$ с. Найдите наименьшее значение N , при котором программа *B* работает быстрее программы *A*.
- 9.16. «Бабочка», изображенная на рис. 9.44, взята из алгоритма БПФ прореживания по времени с $N = 16$. Алгоритм выполняется в четыре стадии, пронумерованные числами $m = 1, 2, 3, 4$. Из каких именно стадий могла быть взята эта бабочка?
- 9.17. Предположим, вам известно, что в алгоритме БПФ с $N = 32$ при вычислении «бабочки» на последней, пятой, стадии использовался «вращающий» коэффициент W_{32}^2 . К какому классу (прореживания по времени или частоте) относится этот алгоритм?
- 9.18. Допустим, вам нужно вычислить ДПФ 1021-членной последовательности $x[n]$. Вы выяснили, что ваш компьютер сможет решить поставленную задачу за 100 с. Добавив три нулевых отсчета к исходной последовательности, вы получили 1024-членную последовательность $x_1[n]$. Та же программа вычисляет 1024-точечное ДПФ последовательности $x_1[n]$ за 1 с. Таким образом, вы можете вычислить больше отсчетов Фурье-образа $X(e^{j\omega})$ за более короткое время, добавляя к концу исходной последовательности нули, «делая вид», что она более длинная, чем на самом деле. Как вы объясните этот кажущийся парадокс?
- 9.19. Входная последовательность системы, представленной сигнальным потоковым графом из рис. 9.45, имеет 8 ненулевых отсчетов. Подберите значения коэффициентов a и b , при которых $y[8] = X(e^{j6\pi/8})$.

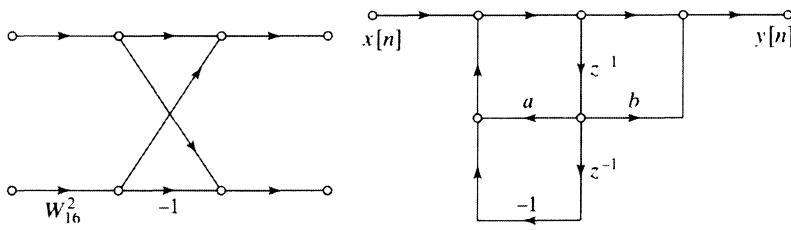


Рис. 9.44.

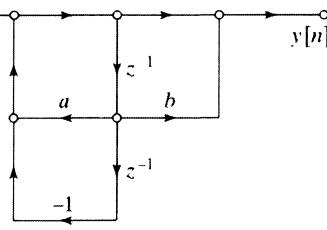


Рис. 9.45.

- 9.20. Пусть $x[n]$ — вещественнозначная 32-членная последовательность. На вход системы, представленной потоковым графом из рис. 9.39, подается последователь-

ность $x_1[n] = x[32-n]$. Выразите 32-й отсчет выходной последовательности $y[32]$ в терминах Фурье-образа $X(e^{j\omega})$ исходной последовательности $x[n]$.

Обязательные задачи без ответов

- 9.21. В § 9.3 при выводе алгоритма, вычисляющего конкретные значения ДПФ $X[k]$ конечной последовательности $x[n]$, $0 \leq n \leq N-1$, мы использовали тождество $W_N^{-kN} = 1$.

- а) Опираясь на равенство $W_N^{kN} = W_N^{nN} = 1$, покажите, что $X[N-k]$ можно вычислить в результате N итераций разностного уравнения, графическая иллюстрация которого приведена на рис. 9.46, а). Говоря точнее, докажите равенство $X[N-k] = y_k[N]$.

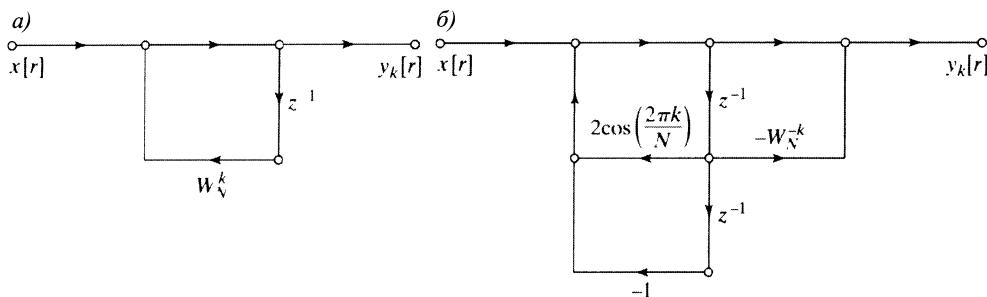


Рис. 9.46.

- б) Покажите также, что $X[n-k]$ можно получить в результате N итераций разностного уравнения, соответствующего графу из рис. 9.46, б). Заметим, что характеристическая функция системы, представленной графом 9.46, б), обладает теми же полюсами, что и характеристическая функция системы из рис. 9.2, а коэффициент, реализующий нуль системы на рис. 9.46, б), комплексно сопряжен соответствующему коэффициенту из рис. 9.2, т. е. $W_N^{-k} = (W_N^k)^*$.

- 9.22. Постройте потоковый граф 16-точечного двоичного алгоритма БПФ прореживания по времени. Все коэффициенты ветвей выразите через W_{16} и отметьте те из них, которые равны -1 . Обозначьте входные и выходные узлы своего графа подходящими отсчетами входной и выходной последовательности. Подсчитайте число вещественных умножений и сложений, выполняемых при реализации этого потокового графа.

Дополнительные задачи

- 9.23. В подразделе 9.5.2 утверждалось, что транспонированный граф к потоковому графу, представляющему алгоритм БПФ, тоже представляет некоторый алгоритм БПФ. В этой задаче мы хотим проверить сделанное утверждение на примере двоичных алгоритмов.

- а) «Бабочка»— основной элемент потокового графа, реализующего двоичный алгоритм БПФ прореживания по времени, изображена на рис. 9.47, а соот-

ветствующие соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} X_m[p] &= X_{m-1}[p] + X_{m-1}[q], \\ X_m[q] &= (X_{m-1}[p] - X_{m-1}[q]) W_N^r. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения, покажите, что $X_{m-1}[p]$ и $X_{m-1}[q]$ можно вычислить через $X_m[p]$ и $X_m[q]$ по схеме «бабочка», изображенной на рис. 9.48.

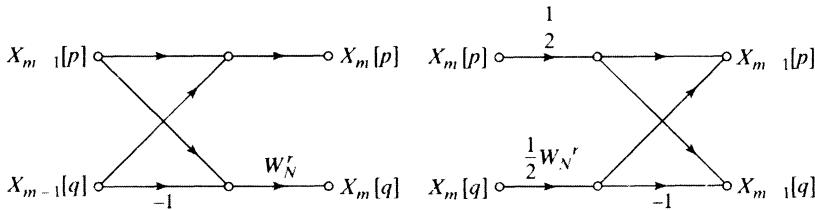


Рис. 9.47.

Рис. 9.48.

- б) В алгоритме прореживания по времени, схематически показанном на рис. 9.19, $X_\nu[r]$ при $r = 0, 1, \dots, N - 1$ — отсчеты ДПФ $X[k]$, пронумерованные в порядке с инвертированием разрядов, а $X_0[r] = x[r]$ ($0 \leq r \leq N - 1$) — отсчеты входной последовательности, записанные в естественном порядке. Если каждую «бабочку» из рис. 9.19 заменить подходящей схемой из рис. 9.48, то в результате получится потоковый граф, вычисляющий отсчеты последовательности $x[n]$ (в естественном порядке) по ее ДПФ $X[k]$ (записанному в порядке с инвертированием разрядов). Начертите соответствующий граф для случая $N = 8$.
- в) Потоковый график, который вы начертите в предыдущем пункте, представляет алгоритм вычисления *обратного* ДПФ, т. е. алгоритм, вычисляющий

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \quad 0 \leq n \leq N - 1.$$

Внесите изменения в этот график так, чтобы он вычислял ДПФ:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N - 1.$$

- г) Обратите внимание, что результат, полученный в п. «в» задачи, является транспонированной формой алгоритма прореживания по частоте из рис. 9.19 и совпадает с алгоритмом прореживания по времени из рис. 9.9. Следует ли отсюда, что каждый алгоритм прореживания по времени (рис. 9.13–9.15) соответствует некоторому алгоритму прореживания по частоте, получающемуся из него транспонированием, и наоборот? Объясните свой ответ.

- 9.24. Мы знаем, что алгоритм БПФ можно представлять себе как совокупность вычислительных схем, носящих название «бабочка». Такая схема, например для двоичного алгоритма прореживания по частоте, изображена на рис. 9.49. Напомним, что «бабочка» вычисляет два комплексных числа по паре комплексных чисел, поданных на ее вход. В ее реализации участвует коэффициент W_n^r , где целое число r зависит от местоположения «бабочки» в алгоритме. Поскольку этот

коэффициент имеет вид $W_N^r = e^{j\theta}$, т. е. умножение на него сводится к повороту комплексной плоскости относительно нуля, то для эффективной реализации умножения на него имеет смысл привлечь алгоритм поворота *CORDIC* (см. задачу 9.39). К сожалению, осуществляя желаемое изменение аргумента комплексного числа, алгоритм *CORDIC* добавляет некоторое фиксированное масштабирование, не зависящее от угла. Таким образом, если для реализации умножения привлекается алгоритм *CORDIC*, то «бабочка» должна быть заменена на схему из рис. 9.50, где G — фиксированное искажение, вносимое алгоритмом *CORDIC*. (Мы предполагаем, что алгоритм осуществляет поворот точно.) Меняя каждую «бабочку» алгоритма БПФ прореживания по частоте на схему из рис. 9.50, мы получим потоковый граф, изображенный на рис. 9.51 (при $N = 8$).

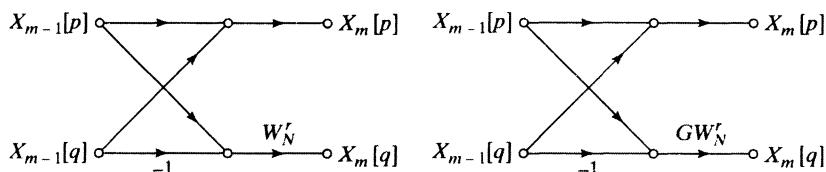


Рис. 9.49.

Рис. 9.50.

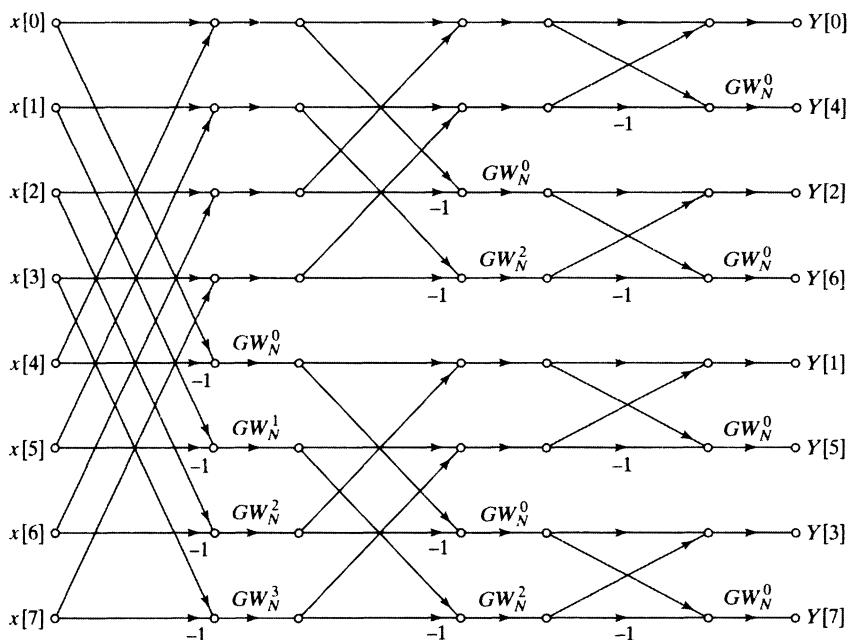


Рис. 9.51.

- Покажите, что выходной последовательностью модифицированного алгоритма будет $Y[k] = X[k]W[k]$, где $X[k]$ — ДПФ последовательности $x[n]$, а $W[k]$ — функция от G , N и k .
- Последовательность $W[k]$ может быть описана по очень простому правилу. Найдите его и укажите зависимость $W[k]$ от G , N и k .

- в) Предположим, что нам нужно предварительно обработать входную последовательность, чтобы учесть воздействие модифицированного алгоритма. Опишите процедуру, строящую последовательность $\hat{x}[n]$ по $x[n]$, подавая которую на вход модифицированного алгоритма на его выходе мы получим неискаженное ДПФ последовательности $x[n]$.
- 9.25. В этой задаче разбирается эффективный метод вычисления отсчетов z -преобразования конечной последовательности. Используя алгоритм преобразования с линейной частотной модуляцией, разработайте процедуру вычисления значений $X(z)$ в 25 точках, равномерно распределенных по дуге окружности радиуса 0,5, нижний конец которой высекается из окружности лучом под углом $-\pi/6$, а верхний — под углом $2\pi/3$. Известно, что $X(z)$ — z -преобразование 100-членной последовательности.
- 9.26. N -точечное ДПФ N -членной последовательности $x[n] = e^{-j(\pi/N)n^2}$ при четном N описывается формулой:
- $$X[k] = \sqrt{N}e^{-j\pi/4}e^{j(\pi/N)k^2}.$$
- Предполагая, что N четно, найдите $2N$ -точечное ДПФ $2N$ -членной последовательности $y[n] = e^{-j(\pi/N)n^2}$.
- 9.27. В вашем распоряжении есть алгоритм, реализующий БПФ любой последовательности длины $N = 2^\nu$. Вам нужно найти отсчеты Фурье-образа 627-членной последовательности $x[n]$ (т. е. $x[n] = 0$ при $n < 0$ и $n > 626$) в частотах $\omega_k = \frac{2\pi}{627} + \frac{2\pi k}{256}$, $k = 0, 1, \dots, 255$. Укажите, как по исходной последовательности построить последовательность $y[n]$, подав которую на вход алгоритма БПФ вы сможете решить поставленную задачу. Значение ν при этом нужно выбрать *наименьшим из возможных*.
- 9.28. Конечный сигнал $x[n]$ длины 500 (т. е. $x[n] = 0$ при $n < 0$ и $n > 499$) получен в результате дискретизации непрерывного сигнала с частотой дискретизации 10 000 отсчетов за секунду. Нам хотелось бы вычислить отсчеты z -преобразования сигнала $x[n]$ в N точках $z_k = (0,8)e^{j2\pi k/N}$ при $0 \leq k \leq N - 1$, отстоящие друг от друга по частоте на 50 Гц или меньше.
- Найдите наименьшее возможное N , при котором решается данная задача, если $N = 2^\nu$.
 - Подберите последовательность $y[n]$ длины N (N из предыдущего пункта задачи), ДПФ которой совпадает с искомыми отсчетами z -преобразования последовательности $x[n]$.
- 9.29. Обозначим N -точечное ДПФ конечной последовательности $x[n]$, обладающей свойством симметрии:

$$x[n] = -x[((n + N/2))_N], \quad 0 \leq n \leq N - 1,$$

через $X[k]$. Известно, что N — четное, а члены последовательности $x[n]$ комплексные.

- Покажите, что $X[k] = 0$ при $k = 0, 2, \dots, N - 2$.

- Расскажите, как вычислить значения $X[k]$ при $k = 1, 3, \dots, N - 1$, используя только $N/2$ -точечное ДПФ и небольшой объем дополнительных вычислений.

- 9.30. Описанный ниже алгоритм вычисляет значения $X[k]$ N -точечного ДПФ с четными индексами последовательности $x[n]$, опираясь только на алгоритм $N/2$ -точечного ДПФ:

- Построить последовательность $y[n]$:

$$y[n] = \begin{cases} x[n] + x[n + N/2], & 0 \leq n \leq N/2 - 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- Вычислить $N/2$ -точечное ДПФ $\hat{Y}[r]$ последовательности $y[n]$ ($0 \leq r \leq (N/2) - 1$).
- Для определения искомых значений воспользоваться равенством $X[k] = \hat{Y}[k/2]$ при $k = 0, 2, \dots, N - 2$.
- Покажите, что описанный алгоритм действительно решает поставленную задачу.
- Предположите теперь, что по последовательности $x[n]$ строится конечная последовательность

$$y[n] = \begin{cases} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n + rM], & 0 \leq n \leq M - 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найдите связь между M -точечным ДПФ $\hat{Y}[k]$ и Фурье-образом $X(e^{j\omega})$ последовательности $x[n]$ и покажите, что результат предыдущего пункта является частным случаем этой связи.

- Разработайте алгоритм, аналогичный приведенному в п. «а» задачи, который вычисляет значения ДПФ $X[k]$ с нечетными индексами $k = 1, 3, \dots, N - 1$, привлекая только $N/2$ -точечное ДПФ (N — четно).

- 9.31. Если у нас есть программа, вычисляющая ДПФ комплекснозначной последовательности, то мы можем воспользоваться ею для вычисления ДПФ вещественнонезначной последовательности, добавив к ней нулевую мнимую часть. Однако симметрия ДПФ вещественнонезначной последовательности позволяет уменьшить количество вычислений.

- Пусть $x[n]$ — вещественнонезначная N -членная последовательность и $X[k]$ — ее ДПФ с вещественной частью $X_R[k]$ и мнимой $X_I[k]$, т. е. $X[k] = X_R[k] + jX_I[k]$. Покажите, что в этом случае $X_R[k] = X_R[N - k]$ и $X_I[k] = -X_I[N - k]$ при $k = 1, \dots, N - 1$.
- Рассмотрите теперь две вещественнонезначные последовательности $x_1[n]$ и $x_2[n]$ с ДПФ $X_1[k]$ и $X_2[k]$ соответственно. Пусть $g[n] = x_1[n] + jx_2[n]$, а ее ДПФ — $G[k] = G_R[k] + jG_I[k]$. Кроме того, обозначим через $G_{OR}[k]$, $G_{ER}[k]$, $G_{OI}[k]$ и $G_{EI}[k]$ четные и нечетные части последовательностей $G_R[k]$ и $G_I[k]$ при $1 \leq k \leq N - 1$:

$$\begin{aligned} G_{OR}[k] &= \frac{1}{2} (G_R[k] - G_R[N - k]), & G_{ER}[k] &= \frac{1}{2} (G_R[k] + G_R[N - k]), \\ G_{OI}[k] &= \frac{1}{2} (G_I[k] - G_I[N - k]), & G_{EI}[k] &= \frac{1}{2} (G_I[k] + G_I[N - k]) \end{aligned}$$

и $G_{OR}[0] = G_{OI}[0] = 0$, $G_{ER}[0] = G_R[0]$, $G_{EI}[0] = G_I[0]$. Выразите $X_1[k]$ и $X_2[k]$ через $G_{OR}[k]$, $G_{ER}[k]$, $G_{OI}[k]$ и $G_{EI}[k]$.

- в) Пусть $N = 2^\nu$ и в вашем распоряжении есть программа двоичного алгоритма, вычисляющего ДПФ. Определите количества вещественных умножений и сложений, требуемых для вычисления как $X_1[k]$, так и $X_2[k]$, если
- два комплекснозначных N -точечных ДПФ $X_1[k]$ и $X_2[k]$ (с нулевой мнимой частью входной последовательности) вычисляются независимо друг от друга;
 - $X_1[k]$ и $X_2[k]$ получаются в результате вычисления одного N -точечного ДПФ.
- г) Предположим, что вам дана только одна вещественнозначная N -членная последовательность $x[n]$, причем $N = 2^\nu$. Определим $N/2$ -членные последовательности как $x_1[n] = x[2n]$, $x_2[n] = x[2n + 1]$, где $n = 0, 1, \dots, (N/2) - 1$. Выразите $X[k]$ через $N/2$ -точечные ДПФ $X_1[k]$ и $X_2[k]$.
- д) Учитывая результаты подзадач «б»–«г», опишите процедуру вычисления ДПФ вещественной N -членной последовательности $x[n]$, использующую только одно $N/2$ -точечное ДПФ. Определите количества вещественных умножений и сложений, выполняющихся в этой процедуре, и сравните его с числом операций, необходимых для вычисления $X[k]$ с помощью N -точечного алгоритма БПФ, мнимая часть входной последовательности которого равна нулю.
- 9.32. Пусть $x[n]$ и $h[n]$ — вещественнозначные последовательности, причем $x[n] = 0$ при $n \notin [0; L - 1]$ и $h[n] = 0$ при $n \notin [0; P - 1]$. Мы хотим вычислить линейную свертку $y[n] = x[n] * h[n]$ этих последовательностей.
- Найдите число ненулевых членов свертки $y[n]$.
 - Сколько вещественных умножений придется сделать при прямом вычислении всех ненулевых отсчетов $y[n]$? При подсчете можете воспользоваться следующим тождеством: $\sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2}$.
 - Найдите процедуру, использующую ДПФ при вычислении всех ненулевых отсчетов $y[n]$. Определите минимальный размер прямого и обратного ДПФ в терминах L и P .
 - Предположите, что $L = P = N/2$, где $N = 2^\nu$ — размер ДПФ. Выведите формулу числа вещественных умножений, необходимых для определения всех ненулевых отсчетов $y[n]$ по методу из п. «в» задачи, если ДПФ вычисляется с помощью двоичного алгоритма БПФ. Опираясь на полученную формулу, найдите минимальное значение N , при котором в методе БПФ тратится меньше вещественных умножений, чем при прямом вычислении свертки.
- 9.33. В подразделе 8.8.3 было показано, что линейное фильтрование можно реализовать через разбиение входного сигнала на конечные участки и вычисление ДПФ, осуществляющее их циклическую свертку. Этот прием можно сделать двумя способами: суммированием или хранением перекрытий. Если при вычислении ДПФ применяется алгоритм БПФ, то на один отсчет выходной последовательности приходится меньше комплексных умножений, чем при прямом вычислении свертки.
- Предположите, что комплекснозначная входная последовательность $x[n]$ бесконечна, а комплекснозначная импульсная характеристика $h[n]$ имеет P ненулевых отсчетов: $h[n] = 0$ при $n < 0$ и $n \geq P$. Кроме того, предположите,

что выход системы вычисляется методом хранения перекрытий, а L -точечное ДПФ ($L = 2^\nu$) ищется с помощью двоичного алгоритма БПФ. Найдите зависимость числа комплексных умножений, приходящихся на один отсчет выхода, при таком способе фильтрования сигнала от ν и P .

- б) Пусть длина импульсной характеристики равна $P = 500$. Используя формулу, полученную в предыдущем пункте, начертите график зависимости числа комплексных умножений, затрачиваемых на один отсчет выхода, от ν на отрезке $[1; 20]$. При каком значении ν число умножений оказывается минимальным? Сравните объем вычислений, приходящихся на один отсчет свертки, в методе хранения перекрытий и прямом методе.
- в) Покажите, что при большом количестве точек ДПФ число комплексных умножений, приходящихся на один отсчет, приблизительно равно ν . Таким образом, когда длина БПФ превышает некий порог, метод хранения перекрытий становится менее эффективным, чем прямой. При каких значениях ν прямой метод будет эффективнее метода хранения перекрытий, если $P = 500$?
- г) Предположим, что число точек ДПФ в два раза больше длины импульсной характеристики (т. е. $L = 2P$) и $L = 2^\nu$. Опираясь на формулу, выведенную в п. «а» задачи, найдите наименьшее значение P , при котором метод хранения перекрытий требует меньшего количества комплексных умножений, чем прямое вычисление свертки.

- 9.34. Пусть $x[n]$ — 1024-членная последовательность, отсчеты которой отличны от нуля только при $0 \leq n \leq 1023$, а $X[k]$ — ее 1024-точечное ДПФ. Мы хотим восстановить отсчеты последовательности $x[n]$ при $0 \leq n \leq 3$ и $1020 \leq n \leq 1023$ по известным значениям $X[k]$ с помощью системы из рис. 9.52. Еще раз отметим, что входная последовательность этой системы — набор значений ДПФ. Подобрав подходящие $m_1[n]$, $m_2[n]$ и $h[n]$, опишите, как система будет восстанавливать искомые отсчеты последовательности $x[n]$. Обратите внимание, что эти отсчеты должны совпасть с отсчетами выходной последовательности $y[n]$ при $0 \leq n \leq 7$.

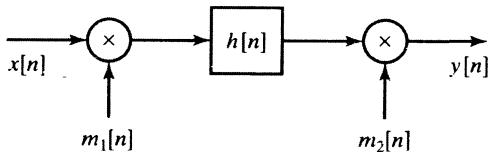


Рис. 9.52.

- 9.35. Рассмотрите класс основанных на ДПФ алгоритмов, реализующих детерминированные КИХ-фильтры с импульсной характеристикой $h[n]$, чьи отсчеты равны нулю при $n \notin [0; 63]$. Входной сигнал $x[n]$ фильтра разбивается на бесконечное число возможно перекрывающихся 128-членных блоков $x_i[n]$, где i — любое целое число, так что

$$x_i[n] \begin{cases} x[n], & iL \leq n \leq iL + 127, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

а L — натуральное число.

Укажите метод вычисления $y_i[n] = x_i[n] * h[n]$ для всех i . В качестве ответа вам следует начертить блок-схему системы, включающую в себя модули, ти-

пых которых перечислены на рис. 9.53 и 9.54. Эти модули могут использоваться несколько раз или вообще не участвовать в системе.

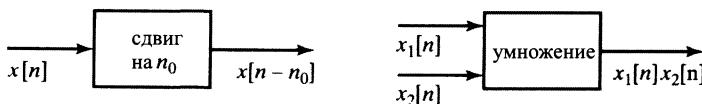


Рис. 9.53.

Модули из рис. 9.54 вычисляют либо N -точечное ДПФ с помощью двоичного алгоритма БПФ, либо обратное N -точечное ДПФ с помощью обратного двоичного алгоритма ДПФ.

Ваша спецификации должны содержать длины привлекаемых алгоритмов прямого и обратного БПФ. Для каждого из модулей «сдвиг на n_0 » вам необходимо указать конкретную величину n_0 , на которую сдвигается входная последовательность.

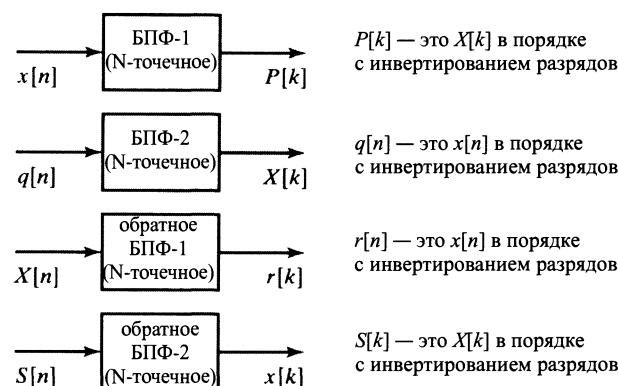


Рис. 9.54.

Задачи повышенной сложности

- 9.36. Во многих приложениях (таких как, например, вычисление КЧХ или интерполяция) возникает необходимость вычисления ДПФ коротких последовательностей, продолженных нулем. Для этого в целях повышения эффективности привлекают специализированный «усеченный» алгоритм БПФ [93]. В данной задаче рассматривается усечение двоичного алгоритма прореживания по частоте, когда длина входной последовательности равна $N \leq 2^\mu$, а число точек ДПФ — $N = 2^\nu$ с $\nu > \mu$.
- Начертите полный потоковый граф двоичного алгоритма БПФ прореживания по частоте при $N = 16$, отметив подходящим образом все ветви.
 - Предположите, что длина входной последовательности равна $M = 2$, т. е. $x[n] \neq 0$ только при $n = 0$ и $n = 1$. Изобразите новый потоковый граф в случае $N = 16$ и отметьте на нем эволюцию ненулевых отсчетов к выходному ДПФ, т. е. сотрите все ветви графа из предыдущего пункта задачи, представляющие операции с нулевыми отсчетами.
 - Все «бабочки» из графа п. «б» задачи, участвующие в первых трех стадиях вычислений, могут быть эффективно замещены «полубабочками» из рис. 9.55, а на последней стадии «бабочки» должны иметь стандартную форму.

Найдите число стадий, в которых можно использовать «полубабочки», для общего случая, когда длина входной последовательности $M \leq 2^\mu$, а число точек ДПФ равно $N = 2^\nu$ ($\mu < \nu$). Кроме того, определите количество комплексных умножений, требуемых для вычисления N -точечного ДПФ M -членной последовательности, с помощью усеченного алгоритма БПФ. Выразите свой ответ через μ и ν .

- 9.37. В § 9.4 мы показали, что если N делится на 2, то N -точечное ДПФ можно представить в виде:

$$X[k] = G[k] + W_N^k H[k], \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (9.70)$$

где $G[k]$ — $N/2$ -точечное ДПФ подпоследовательности с четными индексами:

$$g[n] = x[2n], \quad 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1,$$

а $H[k]$ — $N/2$ -точечное ДПФ подпоследовательности с нечетными индексами:

$$h[n] = x[2n+1], \quad 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1.$$

Продолжая эту процедуру при $N = 2^\nu$, мы приходим к алгоритму БПФ прореживания по времени, который в случае $N = 8$ изображен на рис. 9.9. Как мы уже видели, в таких алгоритмах происходят умножения на «вращающий» множитель W_N^k . Рэйдер и Бреннер в 1976 г. предложили новый алгоритм, коэффициенты в котором — чисто мнимые числа, вследствие чего требуется только два вещественных умножения, а сложений ненужно. В этом алгоритме формула (9.70) заменяется набором формул:

$$X[0] = G[0] + F[0], \quad (9.71)$$

$$X[N/2] = G[0] - F[0], \quad (9.72)$$

$$X[k] = G[k] - \frac{1}{2} j \frac{F[k]}{\sin(2\pi k/N)}, \quad k \neq 0, N/2. \quad (9.73)$$

$F[k]$ здесь — это $N/2$ -точечное ДПФ последовательности

$$f[n] = x[2n+1] - x[2n-1] + Q,$$

где

$$Q = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2n+1]$$

представляет собой величину, вычисляемую только один раз.

- а) Покажите, что $F[0] = H[0]$ и, следовательно, формулы (9.71) и (9.72) дают тот же результат, что и (9.70) при $k = 0$ и $N/2$.
б) Докажите, что при $k = 1, 2, \dots, (N/2) - 1$ выполнено равенство:

$$F[k] = H[k]W_N^k(W_N^{-k} - W_N^k).$$

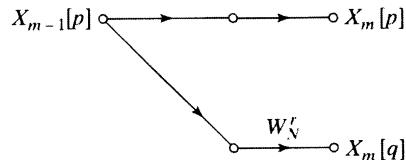


Рис. 9.55.

Учитывая его, проверьте формулу (9.73). Почему $X[0]$ и $X[N/2]$ вычисляются по другим формулам?

- в) Если $N = 2^\nu$, то формулы (9.71)–(9.73) можно применить несколько раз и получить полный алгоритм БПФ прореживания по времени. Подберите формулы, вычисляющие количество вещественных умножений и вещественных сложений в зависимости от N . При подсчете операций учитывайте симметрии и периодичность, но не исключайте тривиальных умножений на $\pm j/2$.
- г) Авторы алгоритма, основанного на формулах (9.71)–(9.73), утверждают, что он обладает свойствами «плохого шума». Объясните причину их утверждения.

- 9.38. Холлман и Дюамель предложили модифицированный алгоритм БПФ, который называется *расщепленно-двоичным* [40, 39]. Потоковый граф этого алгоритма аналогичен двоичному потоковому графу, но в нем требуется меньше вещественных умножений. Здесь иллюстрируются основные принципы расщепленно-двоичного алгоритма, вычисляющего ДПФ $X[k]$ последовательности $x[n]$ длины N .

- а) Покажите, что члены $X[k]$ с четными номерами можно выразить как $N/2$ -точечное ДПФ

$$X[2k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} (x[n] + x[n + N/2]) W_N^{2kn}, \quad 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1.$$

- б) Покажите, что члены $X[k]$ с нечетными номерами можно выразить как $N/4$ -точечные ДПФ

$$X[4k+1] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} \left((x[n] - x[n + \frac{N}{2}]) - j(x[n + \frac{N}{4}] - x[n + \frac{3N}{4}]) \right) W_N^n W_N^{4kn},$$

$$X[4k+3] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} \left((x[n] - x[n + \frac{N}{2}]) + j(x[n + \frac{N}{4}] - x[n + \frac{3N}{4}]) \right) W_N^{3n} W_N^{4kn}$$

$$(0 \leq k \leq \frac{N}{4} - 1).$$

- в) Потоковый граф из рис. 9.56 представляет предыдущее разложение ДПФ для 16-точечного преобразования. Перерисуйте этот граф и отметьте на нем коэффициенты всех ветвей.
- г) Подсчитайте количество вещественных умножений в расщепленно-двоичном алгоритме, реализующем 16-точечное преобразование. Сравните это количество с числом вещественных умножений, необходимых для реализации 16-точечного двоичного алгоритма прореживания по частоте. В обоих случаях не учитывайте умножение на W_N^0 .

- 9.39. При вычислении ДПФ возникает необходимость умножения комплексных чисел на комплексное число с единичным модулем, т. е. приходится выполнять операцию $(X + jY)e^{j\theta}$. Ясно, что при этом меняется лишь аргумент числа, а его модуль остается без изменений. По этой причине умножение на $e^{j\theta}$ часто называют *вращением*, или *поворотом*. При вычислении ДПФ требуется много разных углов θ . Однако хранить в памяти компьютера необходимые значения $\sin \theta$ и

$\cos \theta$ может оказаться слишком невыгодно, поэтому предпочитают вычислять эти функции через степенные ряды, что требует большого числа умножений и сложений. С другой стороны, с помощью алгоритма *CORDIC*, предложенного Волдером [153], произведение $(X + jY)e^{j\theta}$ можно вычислить, комбинируя операции сложения, двоичного сдвига и небольшого табличного поиска.

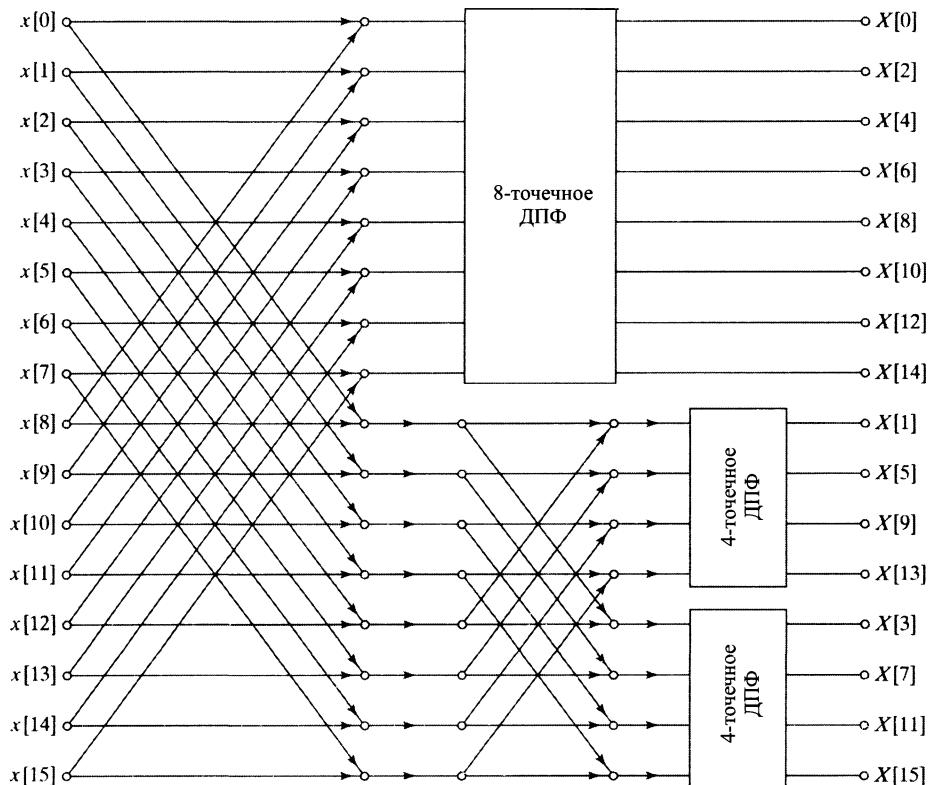


Рис. 9.56.

- а) Пусть $\theta_i = \operatorname{arctg}(2^{-i})$. Покажите, что любой угол $\theta \in (0; \pi/2)$ представляется в виде

$$\theta = \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i \theta_i + \varepsilon = \hat{\theta} + \varepsilon,$$

где $\alpha_i = \pm 1$ и ошибка ε оценивается как $|\varepsilon| \leq \operatorname{arctg}(2^{-M})$.

- б) Углы θ_i вычисляются заранее и хранятся в небольшой таблице длины M . Разработайте алгоритм, вычисляющий последовательность $\{\alpha_i\}$ ($i = 0, 1, \dots, M-1$), отсчеты которой равны ± 1 , и используйте его для представления угла $\theta = 100\pi/512$ при $M = 11$.
- в) Опираясь на результат п. «а» задачи, покажите, что комплексное число

$$(X_M + jY_M) = (X + jY)G_M e^{j\hat{\theta}}$$

можно вычислить по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} X_0 &= X, & Y_0 &= Y, \\ X_i &= X_{i-1} - \alpha_{i-1} Y_{i-1} 2^{-i+1}, & 1 \leq i \leq M, \\ Y_i &= Y_{i-1} + \alpha_{i-1} X_{i-1} 2^{-i+1}, & 1 \leq i \leq M, \end{aligned}$$

где $\hat{\theta} = \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i \theta_i$, а G_M — вещественная положительная константа, не зависящая от $\hat{\theta}$, т. е. исходное комплексное число поворачивается на комплексной плоскости на угол $\hat{\theta}$, а его модуль умножается на G_M .

г) Выразите константу G_M через M .

- 9.40. В § 9.5 мы изучили двоичный алгоритм БПФ прореживания по частоте при $N = 2^v$. Существует аналогичный алгоритм для $N = m^v$, где m — произвольное натуральное число. Его называют алгоритмом по основанию m . В данной задаче исследуется алгоритм БПФ прореживания по частоте по основанию 3 (троичный алгоритм) в случае $N = 9$, т. е. отсчеты входной последовательности $x[n]$ равны нулю при $n < 0$ и $n > 8$.
- Сформулируйте метод вычисления значений ДПФ $X[3k]$ при $k = 0, 1, 2$. Рассмотрите $X_1[k] = X(e^{j\omega_k}) \Big|_{\omega_k=2\pi k/3}$. Как построить последовательность $x_1[n]$ по входной последовательности, чтобы ее 3-точечное ДПФ имело вид $X_1[k] = X[3k]?$
 - Теперь постройте такую последовательность $x_2[k]$ по $x[n]$, чтобы ее 3-точечное ДПФ удовлетворяло равенству $X_2[k] = X[3k + 1]$ при $k = 0, 1, 2$, и последовательность $x_3[n]$, у которой $X_3[k] = X[3k + 2]$ при $k = 0, 1, 2$. Заметим, что в результате вы сведете вычисление 9-точечного ДПФ к поиску трех 3-точечных ДПФ подходящим образом построенных трехчленных последовательностей.
 - Начертите потоковый граф для случая $N = 3$, т. е. схему «бабочки» из троичного алгоритма.
 - Опираясь на результаты предыдущих пунктов задачи, начертите сигнальный потоковый граф системы, которая по входной последовательности строит последовательности $x_1[n]$, $x_2[n]$ и $x_3[n]$, а затем использует блоки 3-точечного ДПФ для вычисления $X[k]$ при $0 \leq k \leq 8$. Обратите внимание, что в целях четкости рисунка вы должны использовать блоки, помеченные как $N = 3$ ДПФ, а не вычерчивать эти «бабочки», общий вид которых уже был вами нарисован в предыдущем пункте.
 - Подходящая факторизация показателей степеней W_9 из системы, граф которой вы нарисовали в п. «г» задачи, позволяет перерисовать эти системы как 3-точечное ДПФ, за которым следует умножение на «вращающий» множитель, как это было сделано в двоичном алгоритме. Перерисуйте граф из п. «г» задачи так, чтобы он состоял только из 3-точечных ДПФ с «вращающими множителями». В результате получится окончательная формулировка троичного алгоритма БПФ в случае $N = 9$.
 - Сколько требуется комплексных умножений при прямом вычислении 9-точечного ДПФ? Сравните это количество с объемом умножений в троичном

алгоритме. Оцените сложность троичного алгоритма в общем случае $N = 3^v$ (в терминах умножений).

- 9.41. Блойстейн показал (см. [10]), что при $N = M^2$ алгоритм преобразования с линейной частотной модуляцией можно реализовать рекурсивно.

- а) Докажите, что ДПФ можно представить в виде свертки:

$$X[k] = h^*[k] \sum_{n=0}^{N-1} (x[n]h^*[n])h[k-n],$$

где $*$ обозначает комплексное сопряжение и $h[n] = e^{j(\pi/N)n^2}$ при $-\infty < n < \infty$.

- б) Проверьте, что формула, выписанная в предыдущем пункте, позволяет получить искомые значения ДПФ ($k = 0, 1, \dots, N-1$), вычисляя свертку при $k = N, N+1, \dots, 2N-1$.
- в) Опираясь на решения предыдущих пунктов задачи, покажите, что ДПФ $X[k]$ получается на выходе системы из рис. 9.57 при $k = N, N+1, \dots, 2N-1$, где

$$\hat{h}[k] = \begin{cases} e^{j(\pi/N)k^2}, & 0 \leq k \leq 2N-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- г) Учитывая равенство $N = M^2$, докажите, что характеристическая функция, соответствующая импульсной характеристике $\hat{h}[k]$, имеет вид:

$$\hat{H}(z) = \sum_{k=0}^{2N-1} e^{j(\pi/N)k^2} z^{-k} = \sum_{r=0}^{M-1} e^{j(\pi/N)r^2} z^{-r} \frac{1 - z^{-2M^2}}{1 + e^{j(2\pi/M)r} z^{-M}}.$$

Указание: представьте k как $k = r + \ell M$.

- д) Изобразите потоковый граф рекурсивной реализации КИХ-системы, которую подсказывает выражение характеристической функции из предыдущего пункта.
- е) Опираясь на чертеж графа рекурсивной реализации системы, подсчитайте общее число комплексных умножений и сложений, требуемых для вычисления всех N значений ДПФ $X[k]$. Сравните полученную сложность алгоритма со сложностью прямого вычисления ДПФ.

- 9.42. ДПФ в алгоритме Герцеля вычисляется как $X[k] = y_k[N]$, где $y_k[N]$ — выход сети, изображенной на рис. 9.58. Рассмотрите реализацию алгоритма Герцеля в арифметике с фиксированной точкой, применяя округление для квантования коэффициентов. Предположите, что длина регистра составляет $B+1$ битов (с учетом знакового бита), а округление произведений происходит перед сложением. Считайте, что источники шумов округления не зависят друг от друга.
- а) Предполагая, что $x[n]$ — вещественнозначная последовательность, начертите потоковый граф модели линейного шума вычисления с конечной точностью вещественной и мнимой части $X[k]$. При умножении на ± 1 шум округления не возникает.

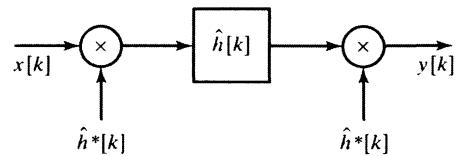


Рис. 9.57.

- б) Вычислите дисперсию шума округления, возникающего при вычислении как вещественной, так и мнимой частей $X[k]$.

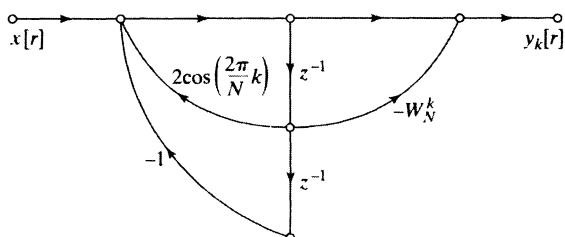


Рис. 9.58.

- 9.43. Рассмотрите прямое вычисление ДПФ в арифметике с конечной точностью и округлением в качестве операции квантования. Предположите, что при этом используется $(B+1)$ -битовое представление чисел, а шумы, возникающие при разных вещественных умножениях, независимы друг от друга. Считая, что $x[n]$ — вещественнозначная последовательность, найдите дисперсию шумов округления при вычислении вещественной и мнимой частей каждого значения ДПФ $X[k]$.
- 9.44. Напомним, что в алгоритме БПФ прореживания по времени вычисления «бабочки» осуществляются по формулам:

$$\begin{aligned} X_m[p] &= X_{m-1}[p] + W_N^r X_{m-1}[q], \\ X_m[q] &= X_{m-1}[p] - W_N^r X_{m-1}[q]. \end{aligned}$$

При реализации вычислений в арифметике с конечной точностью обычно предполагают, что все числа масштабированы так, что их модуль не превышает 1. Таким образом, во избежание переполнений необходимо проследить, чтобы вещественные числа, получающиеся на выходе «бабочки», были не больше 1.

- а) Покажите, что если потребовать выполнения неравенств:

$$|X_{m-1}[p]| < \frac{1}{2}, \quad \text{и} \quad |X_{m-1}[q]| < \frac{1}{2},$$

то прерополнения в «бабочке» произойти не может, т. е.

$$\begin{array}{ll} |\operatorname{Re}\{X_m[p]\}| < 1, & |\operatorname{Im}\{X_m[p]\}| < 1, \\ |\operatorname{Re}\{X_m[q]\}| < 1, & |\operatorname{Im}\{X_m[q\}]| < 1. \end{array}$$

- б) На практике проще и удобнее использовать ограничения:

$$\begin{array}{ll} |\operatorname{Re}\{X_{m-1}[p]\}| < \frac{1}{2}, & |\operatorname{Im}\{X_{m-1}[p]\}| < \frac{1}{2}, \\ |\operatorname{Re}\{X_{m-1}[q]\}| < \frac{1}{2}, & |\operatorname{Im}\{X_{m-1}[q]\}| < \frac{1}{2}. \end{array}$$

Объясните, достаточны ли эти ограничения для предупреждения переполнений.

- 9.45. При выводе отношения С/Ш в реализации двоичного алгоритма БПФ прореживания по времени в арифметике с фиксированной точкой мы предполагали, что любой из выходных узлов связан с $(N-1)$ -й «бабочкой», каждая из которых добавляет шум с дисперсией $\sigma_B^2 = \frac{1}{3} \cdot 2^{-2B}$. Однако умножение на коэффициент $W_N^r = \pm 1$ или $\pm j$ никакого шума не производит вовсе. Поэтому, если учитывать

этот факт, может получиться менее пессимистичный результат относительно отношения С/Ш, чем в § 9.8.

- Для каждой из стадий алгоритма прореживания по времени из § 9.8 определите число «бабочек», в которых происходит умножение на ± 1 или на $\pm j$.
 - Опираясь на ответ в предыдущем пункте задачи, уточните дисперсию шума на выходе, формулу (9.55), отношение С/Ш и формулу (9.65) при нечетных значениях k . Выясните, как эти улучшения изменяются при четных значениях k .
 - Выполните задания п. «а» и «б» задачи в случае, когда выходные данные каждой стадии умножаются на $1/2$, т. е. выведите модифицированные выражения, соответствующие формуле (9.68), описывающей дисперсию выходного шума, и (9.69), описывающей отношение С/Ш.
- 9.46. В § 9.8 мы проанализировали шум, возникающий при цифровой реализации алгоритма БПФ прореживания по времени, потоковый граф которого изображен на рис. 9.9. Проведите такой же анализ для алгоритма БПФ прореживания по частоте из рис. 9.19. Подсчитайте дисперсию шума на выходе и отношение С/Ш в двух случаях: когда масштабируется только входной сигнал и когда масштабирование происходит на каждой стадии вычислений.
- 9.47. В этой задаче предлагается алгоритм вычисления ДПФ четырех вещественно-значных симметричных (или антисимметричных) N -членных последовательностей с помощью единственной процедуры вычисления N -точечного ДПФ. Поскольку мы имеем дело лишь с конечными симметричными или антисимметричными последовательностями, то неявно подразумеваем периодическую симметрию или антисимметрию, определенную в подразделе 8.7.4. Пусть $x_1[n]$, $x_2[n]$, $x_3[n]$ и $x_4[n]$ — N -членные вещественно-значные последовательности, а $X_1[n]$, $X_2[n]$, $X_3[n]$ и $X_4[n]$ — их ДПФ. Предположим, что $x_1[n]$ и $x_2[n]$ — симметричные, а $x_3[n]$ и $x_4[n]$ — антисимметричные, т. е.

$$\begin{aligned}x_1[n] &= x_1[N-n], & x_2[n] &= x_2[N-n], \\x_3[n] &= -x_3[N-n], & x_4[n] &= -x_4[N-n]\end{aligned}$$

при $1 \leq n \leq N-1$ и $x_3[0] = x_4[0] = 0$.

- Обозначим $y_1[n] = x_1[n] + x_3[n]$ и пусть $Y_1[k]$ — ДПФ последовательности $y_1[n]$. Выясните, как восстановить последовательности $X_1[k]$ и $X_2[k]$ по $Y_1[k]$.
- Пусть $y_1[n]$ — последовательность, определенная в предыдущем пункте с симметричной частью $x_1[n]$ и антисимметричной $x_3[n]$. Введем в рассмотрение еще две последовательности: $y_2[n] = x_2[n] + x_4[n]$ и $y_3[n] = y_1[n] + jy_2[n]$. Выясните, как $Y_1[k]$ и $Y_2[k]$ можно выразить через $Y_3[k]$, а затем, учитывая п. «а» задачи, покажите, как получить $X_1[k]$, $X_2[k]$, $X_3[n]$ и $X_4[n]$, зная отсчеты $Y_3[k]$.

Результат п. «б» показывает, что мы можем вычислять ДПФ четырех вещественно-значных последовательностей одновременно, один раз прогоняя алгоритм вычисления N -точечного ДПФ, если две из них симметричны, а остальные антисимметричны. Теперь разберем случай, когда все четыре последовательности симметричны, т. е. $x_i[n] = x_i[N-n]$, $i = 1, 2, 3, 4$; $n = 0, 1, \dots, N-1$.

- Рассмотрите вещественно-значную симметричную последовательность $x_3[n]$ и покажите, что последовательность $u_3[n] = x_3[((n+1))_N] - x_3[((n-1))_N]$ антисимметрична.

- г) Обозначим через $U_3[k]$ N -точечное ДПФ последовательности $u_3[n]$. Выразите $U_3[k]$ в терминах $X_3[k]$.
- д) Учитывая результат п. «в», мы можем построить вещественноненулевую последовательность $y_1[n] = x_1[n] + u_3[n]$, где $x_1[n]$ — симметричная, а $u_3[n]$ — антисимметричная части $y_1[n]$. Выясните, как $X_1[k]$ и $X_3[k]$ можно восстановить по отсчетам $Y_1[k]$.
- е) Пусть теперь $y_3[n] = y_1[n] + jy_2[n]$, где

$$y_1[n] = x_1[n] + u_3[n], \quad y_2[n] = x_2[n] + u_4[n]$$

и

$$u_3[n] = x_3[((n+1))_N] - x_3[((n-1))_N], \quad u_4[n] = x_4[((n+1))_N] - x_4[((n-1))_N]$$

при $0 \leq n \leq N-1$. Опишите способ восстановления $X_1[k]$, $X_2[k]$, $X_3[k]$ и $X_4[k]$ по последовательности $Y_3[k]$. (Заметим, что значения $X_3[0]$ и $X_4[0]$ невозможно определить, исходя из $Y_3[k]$, а при четном N с такой же проблемой сталкиваемся при определении $X_3[N/2]$ и $X_4[N/2]$ по $Y_3[k]$.)

- 9.48. Пара сигнал–отклик ЛС-системы удовлетворяет разностному уравнению:

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k].$$

Опишите процедуру вычисления значений характеристической функции этой системы $H(e^{j(2\pi/512)k})$ при $0 \leq k \leq 511$, считая, что в вашем распоряжении находится программа, вычисляющая ДПФ любой конечной последовательности длины $N = 2^\nu$.

- 9.49. Предположим, что у нас возникла необходимость перемножить два очень больших числа (например, тысячекратных) на 16-разрядном компьютере. В задаче предлагается способ достижения цели с помощью алгоритма БПФ.

- а) Пусть $p(x)$ и $q(x)$ — пара многочленов

$$p(x) = \sum_{i=0}^{L-1} a_i x^i, \quad q(x) = \sum_{i=0}^{M-1} b_i x^i.$$

Покажите, что коэффициенты многочлена $r(x) = p(x)q(x)$ можно вычислить с помощью циклической свертки.

- б) Объясните, как коэффициенты многочлена $r(x)$ можно отыскать с помощью двоичного алгоритма БПФ. При каких значениях ($L+M$) эта процедура становится более эффективной, чем прямое вычисление коэффициентов произведения? Считайте, что $L+M = 2^\nu$ для некоторого натурального ν .
- в) Покажите, что произведение очень больших положительных двоичных чисел u и v можно найти через произведение многочленов, и опишите способ умножения полиномов, основанный на алгоритме БПФ. Оцените количество вещественных умножений и сложений в этом способе, если u насчитывает 8000 знаков, а v — 1000.
- г) Сделайте качественный анализ реализации алгоритма из предыдущего пункта в арифметике с конечной точностью.

- 9.50. Напомним, что дискретное преобразование Хартли (**ДПХ**) N -членной последовательности $x[n]$ определяется как

$$X_H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]H_N[nk], \quad 0 \leq k \leq N-1,$$

где

$$H_N[a] = C_N[a] + S_N[a], \quad C_N[a] = \cos(2\pi a/N), \quad S_N[a] = \sin(2\pi a/N).$$

Свойства этого преобразования, в частности циклическая свертка, подробно исследуются в задаче 8.65.

- a) Проверьте, что $H_N[a] = H_N[a + N]$ и

$$H_N[a + b] = H_N[a]C_N[b] + H_N[-a]S_N[b] = H_N[b]C_N[a] + H_N[-b]S_N[a].$$

- б) Разбивая последовательность $x[n]$ на подпоследовательности с четными и нечетными номерами и учитывая тождество из предыдущего пункта, разработайте алгоритм быстрого ДПХ, основанный на принципе прореживания по времени.

- 9.51. Здесь мы представим алгоритм БПФ как последовательность операций над матрицами. Рассмотрим 8-точечный алгоритм БПФ прореживания по времени, потоковый график которого изображен на рис. 9.59. Входные и выходные данные алгоритма обозначим как векторы **a** и **f**. Предположим, что входная последовательность пронумерована в порядке с инвертированием разрядов, а выходная — в естественном (сравните с рис. 9.9). Пусть **b**, **c**, **d** и **e** — векторы результатов промежуточных вычислений, компоненты которых отмечены на графике.

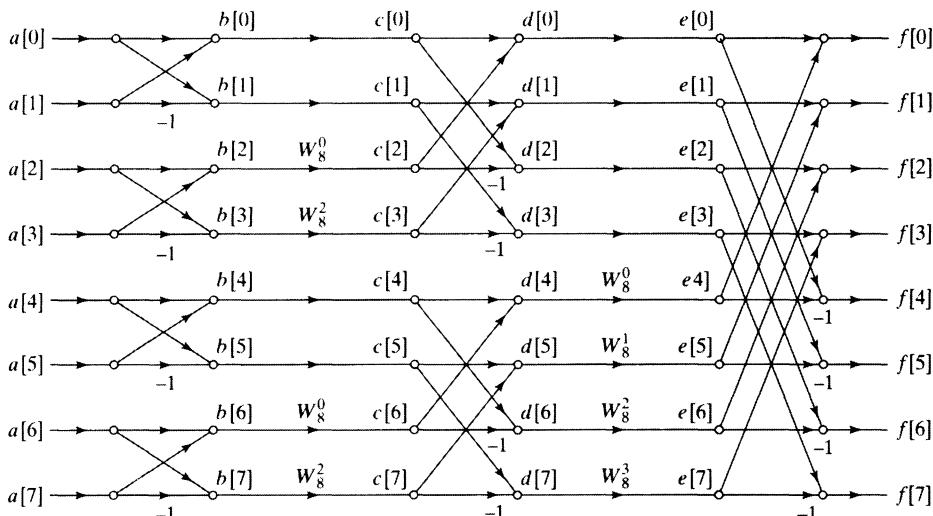


Рис. 9.59.

а) Вычислите матрицы \mathbf{F}_1 , \mathbf{T}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{T}_2 и \mathbf{F}_3 , для которых

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= \mathbf{F}_1 \mathbf{a}, & \mathbf{c} &= \mathbf{T}_1 \mathbf{b}, & \mathbf{d} &= \mathbf{F}_2 \mathbf{c}, \\ \mathbf{e} &= \mathbf{T}_2 \mathbf{d}, & \mathbf{f} &= \mathbf{F}_3 \mathbf{e}.\end{aligned}$$

б) Проверьте, что матричная форма записи алгоритма БПФ, вычисляющего выходной вектор \mathbf{f} по входному вектору \mathbf{a} , имеет вид $\mathbf{f} = \mathbf{Q}\mathbf{a}$, где $\mathbf{Q} = \mathbf{F}_3 \mathbf{T}_2 \mathbf{F}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{F}_1$. Эрмитово сопряженную матрицу¹ к матрице \mathbf{Q} обозначим символом \mathbf{Q}^H . Начертите потоковый граф, последовательность операций в котором можно задать матрицей \mathbf{Q}^H . Что вычисляет получившаяся структура?

в) Вычислите $\frac{1}{N} \mathbf{Q}^H \mathbf{Q}$.

9.52. В некоторых приложениях возникает необходимость вычислять свертку последовательностей $x[n]$ и $h[n]$ с целочисленными отсчетами. Ясно, что отсчеты свертки $x[n]*h[n]$ тоже целые числа. Основное преимущество вычисления свертки целочисленных последовательностей с помощью алгоритма БПФ состоит в том, что микропроцессоры, числа в которых имеют представление с плавающей запятой, стоят дороже, чем те, в которых реализуется целочисленная арифметика. Кроме того, шумы, появляющиеся при округлении операций над числами с плавающей запятой, могут очень сильно исказить результат. Данная задача посвящена алгоритмам, называемым *теоретико-числовыми преобразованиями* (ТЧП), в которых преодолевается это препятствие.

а) Обозначим ДПФ последовательностей $x[n]$ и $h[n]$ через $X[k]$ и $H[k]$ соответственно. Выведите свойство свертки, а именно покажите, что ДПФ последовательности $y[n] = x[n]*h[n]$ вычисляется как произведение $Y[k] = X[k]H[k]$. Проверьте, что справедливо аналогичное свойство циклической свертки, если коэффициенты W_N^k ДПФ удовлетворяют соотношению:

$$\sum_{n=0}^{N-1} = \begin{cases} N, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \quad (9.74)$$

Ключевая идея определения ТЧП состоит в том, чтобы подобрать целое число W_N , удовлетворяющее свойству (9.74), означающему ортогональность базисных последовательностей, необходимую для корректного определения преобразования. К сожалению, в стандартной арифметике целых чисел такого W_n не существует.

Чтобы преодолеть эту проблему, ТЧП основывается на арифметике по модулю некоторого целого числа P . Закрепим символ P в данной задаче за числом 17. Иными словами, все арифметические операции здесь рассматриваются по модулю 17. Например, $((23+18))_{17} = 7$, $((10+7))_{17} = 0$, $((23 \cdot 18))_{17} = 6$ и $((10 \cdot 7))_{17} = 2$. (Чтобы найти результат операции по модулю 17, нужно выполнить ее в целых числах, а потом вычислить остаток от деления ее итога на 17.)

б) Пусть $P = 17$, $N = 4$ и $W_N = 4$. Проверьте, что

$$\left(\left(\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} \right) \right)_P = \begin{cases} N, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

¹Операция эрмитова сопряжения матрицы состоит из транспонирования и комплексного сопряжения элементов. — Примеч. перев.

- в) Рассмотрите последовательности $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n - 1] + 3\delta[n - 2]$ и $h[n] = 3\delta[n] + \delta[n - 1]$ и вычислите 4-точечное ТЧП последовательности $x[n]$ как

$$X[k] = \left(\left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \right) \right)_P.$$

Найдите $H[k]$ по аналогичной формуле и вычислите произведение $Y[k] = H[k]X[k]$. Все вычисления проводите для значений P , N и W_N , указанных в п. «б» задачи. Убедитесь, что арифметика по модулю 17 используется при каждой элементарной операции ваших вычислений, а не только на последнем этапе!

- г) Обратное ТЧП последовательности $Y[k]$ определяется как

$$y[n] = \left(\left(N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} Y[k] W_N^{-kn} \right) \right)_P. \quad (9.75)$$

Для осуществления этого преобразования вам понадобится деление по модулю 17. В частности, необходимо найти такие целые числа, условно обозначаемые как N^{-1} и W_N^{-1} , что

$$((N^{-1}N))_P = 1, \quad ((W_N^{-1}W_N))_P = 1.$$

Подберите эти целые числа для значений P , N и W_N , указанных в п. «б» задачи.

- д) Вычислите обратное ТЧП (9.75), основываясь на числах N^{-1} и W_N^{-1} , найденных в предыдущем пункте. Проверьте свой результат прямым вычислением свертки $y[n] = x[n] * h[n]$.

- 9.53. В § 9.4 и 9.5 мы занимались БПФ последовательностей, количество членов в которых — степень двойки. Однако существуют эффективные алгоритмы вычисления ДПФ, когда длина последовательности N не представляется в виде $N = m^\nu$ для некоторого целого m . Здесь будет исследоваться алгоритм преобразования 6-членных последовательностей, который легко обобщается на более общий случай. В книге [15] алгоритм обсуждается достаточно подробно.

- а) Ключом к разложению БПФ при $N = 6$ служит *отображение индексов*, предложенное Кули и Таки в их работе по БПФ [30], которое представляет индексы n и k при $N = 6$ в следующем виде:

$$n = 3n_1 + n_2, \quad \text{при } n_1 = 0, 1; n_2 = 0, 1, 2; \quad (9.76)$$

$$k = k_1 + 2k_2, \quad \text{при } k_1 = 0, 1; k_2 = 0, 1, 2. \quad (9.77)$$

Покажите, что каждое из значений $n = 0, 1, \dots, 5$ получается при каком-то одном наборе числе n_1 и n_2 , указанных в (9.76). Проверьте аналогичное свойство для индекса k .

- б) Подставьте формулы (9.76) и (9.77) в определение ДПФ и получите его выражение в терминах n_1 , n_2 , k_1 и k_2 . В окончательном результате сумма по n замещается двойным суммированием по n_1 и n_2 .
- в) Внимательно исследуйте степени коэффициента W_6 и перепишите некоторые из них через W_2 и W_3 .

- г) Основываясь на результате предыдущего пункта, сгруппируйте члены ДПФ, чтобы суммирование по n_2 оказалось снаружи, а по n_1 внутри. Нужно написать это выражение так, чтобы его можно было интерпретировать как три двухточечных ДПФ с умножением на степени W_6 , после которых осуществляется два трехточечных ДПФ.
- д) Начертите потоковый граф, реализующий ваше выражение из п. «г» задачи. Сколько происходит комплексных умножений в процессе работы алгоритма? Сравните это количество с объемом комплексных умножений при прямом вычислении 6-точечного ДПФ.
- е) Найдите альтернативный подход к вычислению 6-точечного ДПФ, при котором сначала выполняется два трехточечных ДПФ, а затем три двухточечных.

ГЛАВА 10

ПРИЛОЖЕНИЕ ДПФ К ФУРЬЕ-АНАЛИЗУ

10.1. Введение

В главе 8 изучалось дискретное преобразование Фурье (ДПФ) конечных сигналов. Поскольку открыты высокоеффективные алгоритмы его вычисления (см. гл. 9), ДПФ играет центральную роль в широком спектре приложений, включая фильтрование и Фурье-анализ.

В приложениях и алгоритмах, основанных на явном вычислении преобразования Фурье, в идеале требуется дискретизованное по времени преобразование Фурье (ДВПФ). Однако в целях повышения эффективности процедуры находят ДПФ, которое в случае дискретных сигналов представляет собой отсчеты ДВПФ, вычисленные в определенных частотах. Замена ДВПФ дискретным преобразованием Фурье вносит свои специфические сложности. Например, как было показано в § 8.8, основной операцией фильтрования является линейная свертка, которую можно вычислять через произведение ДПФ входного сигнала и импульсной характеристики. Но такой метод позволяет находить только циклическую свертку, совпадающую с линейной лишь при определенных условиях. Кроме того, естественная длительность сигналов в большинстве приложений спектрального анализа бесконечна, а ДПФ определено лишь для конечных последовательностей. К счастью, это кажущееся противоречие легко устраняется с помощью таких концепций, как *окно, блочная свертка и зависящее от времени преобразование Фурье* (ЗВПФ).

10.2. ДПФ и Фурье-анализ сигналов

Одно из основных приложений ДПФ лежит в области анализа частотного спектра непрерывного сигнала. Например, как мы убедимся в подразделе 10.6.1, в рамках обработки речевого сигнала частотный анализ особенно полезен при идентификации и моделировании резонанса в голосовом резонаторе. Другой пример, описанный в подразделе 10.6.2, касается допплеровских радарных систем, где скорость объекта, за которым ведется наблюдение, представляется сдвигом частот посланного и отраженного сигналов.

Основные этапы применения ДПФ к непрерывным сигналам обозначены на рис. 10.1. Фильтр защиты от наложения спектров минимизирует или вовсе устраивает ложные частоты, возникающие при дискретизации сигнала. Необходимость

умножения дискретной версии сигнала $x[n]$ на последовательность $w[n]$, т.е. окно, диктуется конечной длиной последовательности, к которой применяется ДПФ. Во многих случаях, представляющих практический интерес, длительность сигнала $s_c(t)$, а значит и $x[n]$ очень велика или даже бесконечна (как, например, длительность речевого или музыкального сигнала). Именно поэтому перед вычислением ДПФ последовательность $x[n]$ умножается на конечное окно $w[n]$. Рисунок 10.2 иллюстрирует преобразование Фурье сигналов, участвующих в системе из рис. 10.2. На рис. 10.2, *a*) показан непрерывный спектр, уменьшающийся при верхних частотах, но все же неузкополосный. На нем видна относительная узкополосность энергии сигнала, представленная неширокими всплесками. КЧХ фильтра защиты от наложения спектров показана на рис. 10.2, *в*). Как следует из рис. 10.2, *в*), непрерывный Фурье-образ $X_c(j\Omega)$ несет в себе мало полезной информации о поведении $S_c(j\Omega)$ при частотах, превышающих частоту отсечки фильтра. Так как КЧХ фильтра $H_{aa}(j\Omega)$ не может быть идеальной, она искажает Фурье-компоненты входного сигнала над полосой пропускания и переходной полосой.

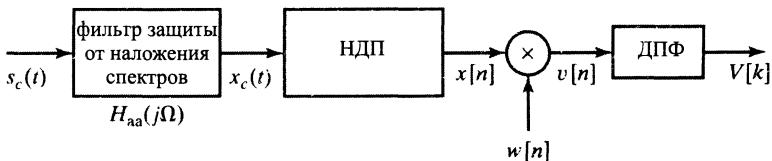


Рис. 10.1. Этапы обработки непрерывного сигнала при дискретизованном по времени Фурье-анализе

Преобразование непрерывного сигнала $x_c(t)$ в последовательность отсчетов $x[n]$ представляется в частотной области периодическим тиражированием и нормализацией частоты:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \frac{\omega}{T} + j \frac{2\pi r}{T} \right), \quad (10.1)$$

что отражено на рис. 10.2, *г*). Поскольку при практической реализации фильтр защиты от наложения спектров не может иметь бесконечного коэффициента ослабления в полосе непропускания, следует ожидать некоторого перекрытия членов суммы (10.1), т.е. ложные частоты все же появятся. Однако этот источник ошибок можно сделать пренебрежимо малым либо с помощью высококачественного непрерывного фильтра, либо через предварительную передискретизацию, более эффективный фильтр низких частот и прореживание, что обсуждалось в подразделе 4.9.1.

Если $x[n]$ — цифровой сигнал, то в качестве второй подсистемы на рис. 10.1 должен стоять АЦП, который неизбежно вносит ошибки квантования. Мы уже знаем (см. подраздел 4.9.2), что ошибки квантования моделируются как последовательность шумов, добавляющаяся к $x[n]$. Шумом квантования тоже можно пренебречь, если использовать малый шаг в квантователе.

Как уже отмечалось, из-за конечности входного сигнала алгоритма ДПФ последовательность $x[n]$ обычно, умножается на окно конечной длины $w[n]$.

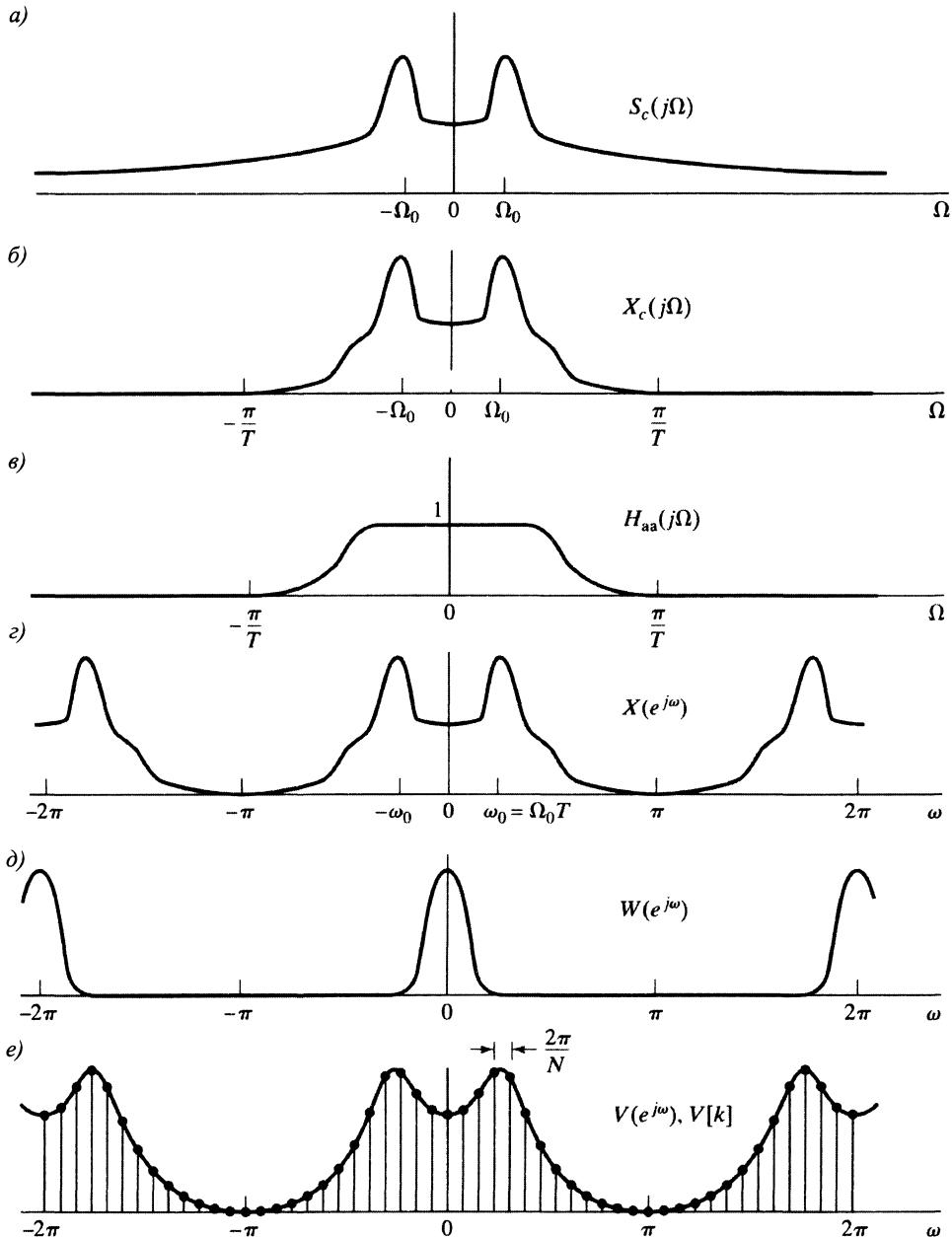


Рис. 10.2. Преобразование Фурье сигналов из системы 10.1: а) Фурье-образ непрерывного входного сигнала; б) КЧХ фильтра защиты от наложения спектров; в) Фурье-образ выходного сигнала фильтра защиты от наложения спектров; г) Фурье-образ дискретизованного сигнала; д) Фурье-образ окна; е) Фурье-образ сигнала, обработанного оконным методом, и частотные отсчеты, полученные с помощью ДПФ

В результате получается конечная последовательность $v[n] = x[n]w[n]$, соответствующая в частотной области периодической свертке:

$$V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta. \quad (10.2)$$

На рис. 10.2, δ) показан типичный Фурье-образ последовательности $v[n]$. Заметим, что главный лепесток по предположению расположен в окрестности частоты $\omega = 0$. Напомним, что окно $w[n]$, все ненулевые отсчеты которого одинаковы, называется *прямоугольным*. Но, как мы увидим далее, есть веские причины, по которым отсчеты окна на его концах следует уменьшать. Свойства таких окон, как окна Барлетта, Хемминга, Хеннинга, Блэкмана и Кайзера, исследовались в главе 7 и будут еще обсуждаться в § 10.3. На данный момент достаточно заметить, что свертка $X(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$ имеет тенденцию сглаживать всплески и разрывы $X(e^{j\omega})$, о чем свидетельствует непрерывная кривая на рис. 10.2, e).

Заключительной операцией в системе из рис. 10.1 служит вычисление ДПФ, которое для участка сигнала $x[n]$, вырезанного окном $w[n]$, выглядит как

$$V[k] = \sum_{n=0}^{N-1} v[n]e^{-j(2\pi/N)kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (10.3)$$

Здесь мы предполагаем, что длина L окна меньше или равна числу N точек ДПФ. Дискретное преобразование Фурье $V[k]$ последовательности $v[n]$ совпадает с отсчетами ее Фурье-образа, вычисленными в равномерно отстоящих друг от друга частотах:

$$V[k] = V(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi k/N}, \quad (10.4)$$

факт, который хорошо виден на рис. 10.2, e). Поскольку расстояние между частотами равно $2\pi/N$, соотношение между непрерывной и нормализованной дискретной частотными переменными имеет вид $\omega = \Omega T$, а частоты ДПФ соответствуют непрерывным частотам

$$\Omega_k = \frac{2\pi k}{NT}. \quad (10.5)$$

Многие коммерческие спектральные анализаторы, работающие в режиме реального времени, основываются на принципах, отраженных на рис. 10.1 и 10.2. Однако из предыдущего обсуждения должно быть ясно, что на интерпретацию непрерывного преобразования Фурье входного сигнала в терминах ДПФ вырезанного окном участка дискретизованного сигнала оказывают влияние многочисленные факторы. Для учета этих факторов нужно внимательно отнести к фильтрованию и дискретизации входного сигнала. Более того, чтобы корректно истолковать полученные результаты, эффекты, возникающие при обработке сигнала окном и дискретизации в частотной области, неотъемлемой от ДПФ, должны стать абсолютно понятными.

В оставшейся части будем предполагать, что проблемы, связанные с фильтром защиты от наложения спектров и дискретизацией, были надлежащим образом преодолены и ими можно пренебречь. В следующем параграфе мы конкретно займемся эффектами, связанными с оконным методом и дискретизацией в

частотной области, присущей ДПФ. Исследования будем проводить на примере синусоидальных сигналов, хотя большинство затронутых проблем касаются практических всех сигналов.

Пример 10.1. Фурье-анализ через ДПФ

Рассмотрим узкополосный непрерывный сигнал $x_c(t)$, у которого $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq 2\pi(2500)$. Для исследования непрерывного спектра $X_c(j\Omega)$ воспользуемся системой из рис. 10.1. Предположим, что фильтр защиты от наложения спектров идеален, а частота дискретизации в НДП равна $1/T = 5000$ отсч./с. Какой минимальный размер N ДПФ нам необходимо выбрать, чтобы его значения $V[k]$ соответствовали отсчетам $X_c(j\Omega)$, вычисленным в частотах, отстоящих друг от друга не более чем на $2\pi(10)$ рад/с, или 10 Гц?

Из соотношения (10.5) следует, что соседние отсчеты ДПФ отвечают непрерывным частотам, отстоящим друг от друга на $2\pi/(NT)$. Следовательно, нужно потребовать, чтобы

$$\frac{2\pi}{NT} \leq 20\pi,$$

откуда $N \geq 500$.

Если для вычисления ДПФ мы привлекаем двоичный алгоритм БПФ, следует остановиться на значении $N = 512$. При этом расстояние между частотами отсчетов составит $\Delta\Omega = 2\pi(5000/512) = 2\pi(9,77)$ рад/с. \square

Пример 10.2. Соотношение между значениями ДПФ

Рассмотрим ситуацию из предыдущего примера, где $1/T = 5000$, $N = 512$ и $x_c(t)$ — вещественнонезначительный достаточно узкополосный сигнал, при дискретизации которого не возникают ложные частоты. Допустим, нам известно, что $V[11] = 2000(1 + j)$. Что можно сказать тогда о других значениях $V[k]$ или о функции $X_c(j\Omega)$?

Согласно свойству симметрии ДПФ из табл. 8.2, при $k = 0, 1, \dots, N - 1$ имеет место равенство $V[k] = V^*((-k))_N$, т. е. $V[N - k] = V^*[k]$, что в нашем случае дает

$$V[512 - 11] = V[501] = V^*[11] = 2000(1 - j).$$

Кроме того, мы знаем, что 11-е значение ДПФ соответствует непрерывной частоте $\Omega_{11} = 2\pi(11)(5000)/512 = 2\pi(107,4)$, а 501-е — $\Omega_{501} = -2\pi(11)(5000)/512 = -2\pi(107,4)$. Хотя оконный метод сглаживает спектр, мы можем сказать, что

$$X_c(j\Omega_{11}) = X_c(j2\pi(107,4)) \approx T \cdot V[11] = 0,4(1 + j).$$

Заметим, что множитель T здесь компенсирует дробь $1/T$, появляющуюся при дискретизации. Учитывая симметрию еще раз, получаем:

$$X_c(-j\Omega_{11}) = X_c(-j2\pi(107,4)) \approx T \cdot V^*[11] = 0,4(1 - j). \quad \square$$

10.3. ДПФ-анализ синусоидальных сигналов

ДВПФ синусоидального сигнала $A \cos(\omega_0 n + \varphi)$ представляет собой пару импульсов в частотах $\pm\omega_0$ (периодически повторяющихся через $2\pi k$). При анализировании синусоидального сигнала, основанном на ДПФ, важное значение имеют

обработка последовательности окном и спектральная дискретизация. Как мы увидим в подразделе 10.3.1, в результате обработки импульсы размазываются и становятся шире по сравнению с теоретическим представлением Фурье, что затрудняет их точное определение. Кроме того, эта операция ограничивает возможность различать синусоидальные сигналы с близкими частотами. Спектральная дискретизация, присущая ДПФ, влияет на спектр синусоидального сигнала и может давать ложное представление о нем, что обсуждается в подразделе 10.3.2.

10.3.1. Эффект обработки методом окна

Рассмотрим сумму двух синусоидальных компонент:

$$s_c(t) = A_0 \cos(\Omega_0 t + \theta_0) + A_1 \cos(\Omega_1 t + \theta_1), \quad -\infty < t < \infty. \quad (10.6)$$

Предполагая идеальную дискретизацию без наложения спектров и ошибок квантования, получаем дискретный сигнал

$$x[n] = A_0 \cos(\omega_0 n + \theta_0) + A_1 \cos(\omega_1 n + \theta_1), \quad -\infty < n < \infty, \quad (10.7)$$

где $\omega_0 = \Omega_0 T$ и $\omega_1 = \Omega_1 T$. Последовательность $v[n]$, вырезаемая из этого сигнала окном, записывается как

$$v[n] = A_0 w[n] \cos(\omega_0 n + \theta_0) + A_1 w[n] \cos(\omega_1 n + \theta_1). \quad (10.8)$$

Чтобы получить ДВПФ последовательности $v[n]$, мы можем переписать (10.8) через комплексные экспоненты и учесть свойство частотного сдвига (2.166) из подраздела 2.10.2:

$$\begin{aligned} v[n] = & \frac{A_0}{2} w[n] e^{j\theta_0} e^{j\omega_0 n} + \frac{A_0}{2} w[n] e^{-j\theta_0} e^{-j\omega_0 n} + \\ & + \frac{A_1}{2} w[n] e^{j\theta_1} e^{j\omega_1 n} + \frac{A_1}{2} w[n] e^{-j\theta_1} e^{-j\omega_1 n}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Отсюда и формулы (2.166) следует, что Фурье-образ последовательности $v[n]$ имеет вид:

$$\begin{aligned} V(e^{j\omega}) = & \frac{A_0}{2} e^{j\theta_0} W(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{A_0}{2} e^{-j\theta_0} W(e^{j(\omega+\omega_0)}) + \\ & + \frac{A_1}{2} e^{j\theta_1} W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + \frac{A_1}{2} e^{-j\theta_1} W(e^{j(\omega+\omega_1)}). \end{aligned} \quad (10.10)$$

Согласно равенству (10.10) Фурье-образ обработанного окном сигнала состоит из Фурье-образа окна, сдвинутого на частоты $\pm\omega_0$ и $\pm\omega_1$, умноженного на комплексные экспоненты, соответствующие сигналу.

Пример 10.3. Оконный метод в Фурье-анализе синусоидального сигнала

Рассмотрим систему из рис. 10.1, и в частности $W(e^{j\omega})$ и $V(e^{j\omega})$, в конкретном случае частоты дискретизации $1/T = 10$ кГц и прямоугольного окна $w[n]$ длины 64. В качестве амплитудных и фазовых параметров сигнала возьмем $A_0 = 1$, $A_1 = 0,75$, $\theta_0 = \theta_1 = 0$. Чтобы подчеркнуть существенные моменты, исследуем лишь модуль Фурье-образов.

На рис. 10.3, а) показан график модуля $|W(e^{j\omega})|$, а в остальной части этого рисунка приводятся графики $|V(e^{j\omega})|$ для нескольких значений Ω_0 и Ω_1 из формулы (10.6), или,

что равносильно, ω_0 и ω_1 из (10.7). На рис. 10.3, б) отражена ситуация с $\Omega_0 = \frac{2\pi}{6} \cdot 10^4$ и $\Omega_1 = \frac{2\pi}{3} \cdot 10^4$, что соответствует значениям $\omega_0 = 2\pi/6$ и $\omega_1 = 2\pi/3$. На рис. 10.3, в)-д) частоты постепенно становятся ближе друг к другу. Частотные и амплитудные параметры отдельных гармоник сигнала, т. е. его синусоидальных составляющих, хорошо заметны на рис. 10.3, б). Действительно, формула (10.10) говорит, что при отсутствии наложений копий графика $W(e^{j\omega})$ в окрестностях частот ω_0 и ω_1 на графике Фурье-образа должны появиться всплески высоты $32A_0$ в точке ω_0 и $32A_1$ в ω_1 , поскольку максимум $W(e^{j\omega})$ равен 64. На рис. 10.3, б) эти пики расположены в точках $\omega_0 = 2\pi/6$ и $\omega_1 = 2\pi/3$ и имеют относительно верное значение.

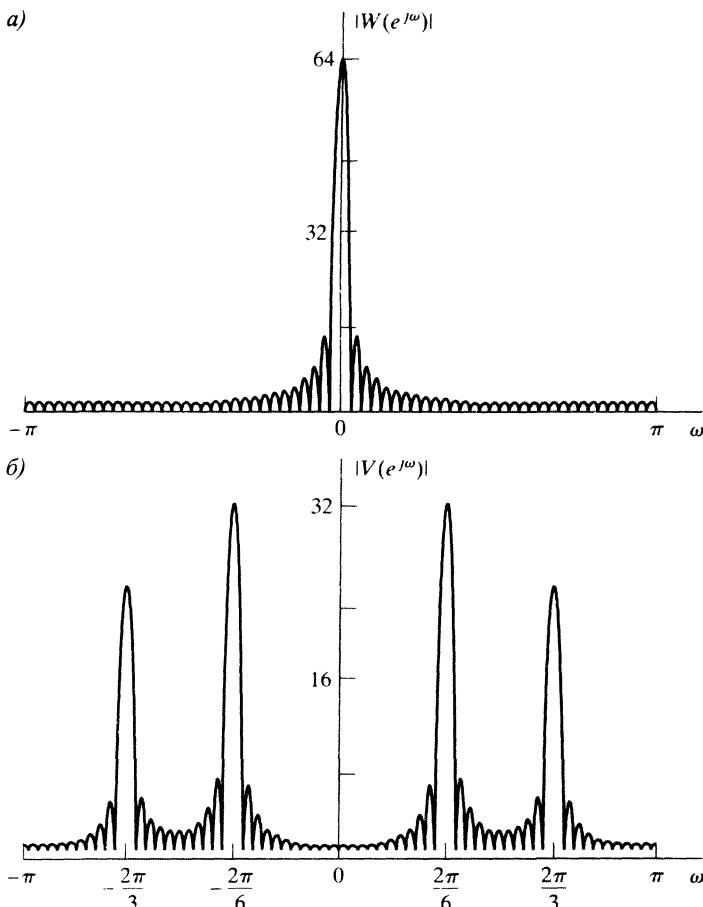
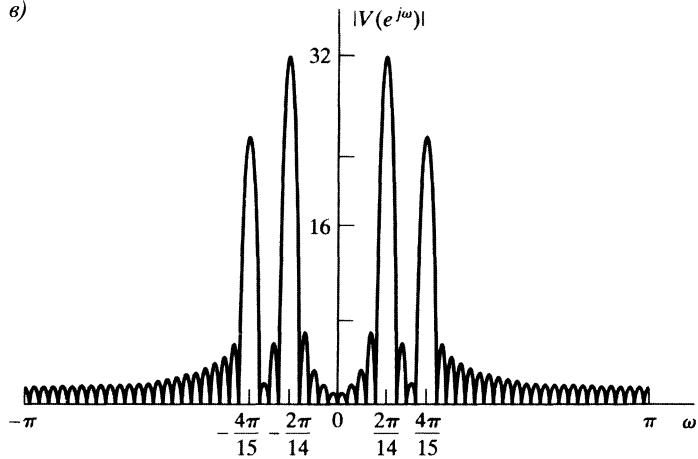


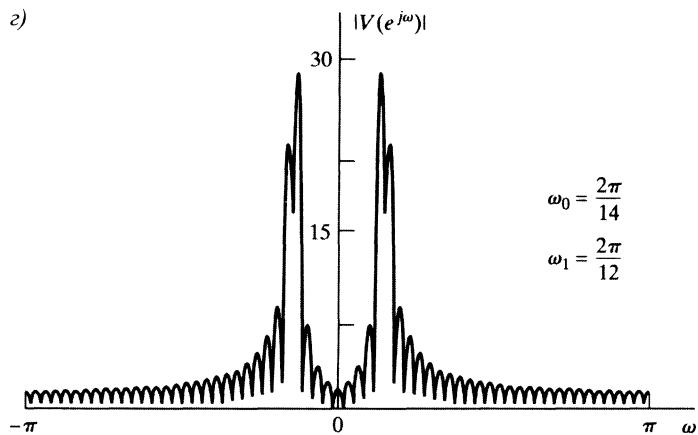
Рис. 10.3. Иллюстрация Фурье-анализа вырезания прямоугольным окном косинусов:
а) Фурье-образ окна; б)-д) преобразование Фурье участка синусоидального сигнала, вырезанного окном при уменьшающейся величине $\Omega_1 - \Omega_0$; б) $\Omega_0 = \frac{2\pi}{6} \cdot 10^4$, $\Omega_1 = \frac{2\pi}{3} \cdot 10^4$

На рис. 10.3, в) отражена ситуация, когда копии окон уже накладываются друг на друга, и, хотя на графике еще отчетливо видны два всплеска модуля Фурье-образа, амплитуда гармоники с частотой ω_0 влияет на амплитуду гармоники с частотой ω_1 и наоборот. Взаимодействие гармоник, при котором одна из них затрагивает область

б)



в)



д)

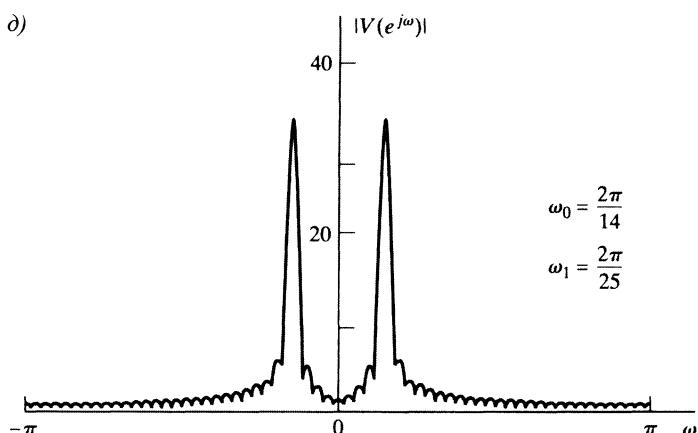


Рис. 10.3 (окончание). б) $\Omega_0 = \frac{2\pi}{14} \cdot 10^4$, $\Omega_1 = \frac{4\pi}{15} \cdot 10^4$; в) $\Omega_0 = \frac{2\pi}{14} \cdot 10^4$, $\Omega_1 = \frac{2\pi}{12} \cdot 10^4$;
 д) $\Omega_0 = \frac{2\pi}{14} \cdot 10^4$, $\Omega_1 = \frac{4\pi}{25} \cdot 10^4$

другой при спектральном анализе из-за размазывания спектра, вносимого окном, называют *рассеянием*. На рис. 10.3, *г*) рассеяние гораздо заметнее. Обратите внимание на то, как боковые лепестки могут уменьшать высоту пиков. На рис. 10.3, *д*) наложение спектров уже столь существенно, что два всплеска, заметные на предыдущих рисунках, сливаются в один. Таким образом, в этой ситуации мы уже не можем определить гармонические составляющие сигнала. Иными словами, падает разрешающая способность спектрального анализа. □

Уменьшение разрешения и рассеяние — основные проблемы, с которыми мы сталкиваемся в спектральном анализе, реализуемом оконным методом. На разрешающую способность прежде всего оказывает влияние главный лепесток функции $W(e^{j\omega})$, а степень рассеяния зависит от относительной амплитуды основного и боковых лепестков $W(e^{j\omega})$. В главе 7 в контексте проектирования фильтров мы показали, что ширина главного лепестка и относительная амплитуда боковых зависят в основном от длины L окна и от его формы (скорости сужения к концам). Прямоугольное окно, Фурье-образ которого равен

$$W_r(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\omega n} = e^{-j\omega(L-1)/2} \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}, \quad (10.11)$$

имеет самый узкий главный лепесток среди обычно используемых окон данной длины. Но зато боковые лепестки у него самые большие.

Напомним, что окно Кайзера определяется формулой:

$$w_K[n] = \begin{cases} \frac{I_0[\beta(1 - [(n - \alpha)/\alpha]^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq L - 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (10.12)$$

где $\alpha = \frac{L-1}{2}$, а $I_0(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя первого типа нулевого порядка. (Заметим, что обозначения в формуле (10.12) несколько отличаются от принятых в формуле (7.72). В этом параграфе через L мы обозначили длину окна, а в (5.83) эта длина обозначалась через $M + 1$.) Мы уже видели при изучении задачи проектирования фильтров, что окно Кайзера зависит от двух параметров: β и L , варьируя которые можно искать компромисс между шириной главного лепестка и относительной амплитудой боковых. (Помните, что прямоугольное окно — частный случай окна Кайзера, соответствующий $\beta = 0$.) Ширина главного лепестка Δ_{ml} определяется как расстояние между ближайшими к началу координат пересечениями графика $W(e^{j\omega})$ с горизонтальной осью, а относительная амплитуда боковых лепестков A_{sl} — это отношение в децибелах амплитуды главного лепестка к амплитуде наибольшего бокового. На рис. 10.4, дублирующем рис. 7.23, показан графики Фурье-образов окон Кайзера разной длины с различными значениями параметра β . При выборе окна Кайзера для спектрального анализа нам нужно по желаемому значению A_{sl} найти соответствующий параметр β . Рисунок 10.4 *в*) свидетельствует, что относительная амплитуда боковых лепестков фактически не зависит от длины окна, а полностью определяется параметром β . Это наблюдение было доказано Кайзером и Шафером в их работе [77], где они получили следующую аппроксимацию зависимости β от A_{sl} :

$$\beta = \begin{cases} 0, & A_{sl} < 13, 26, \\ 0,76609(A_{sl} - 13, 26)^{0,4} + 0,09834(A_{sl} - 13, 26), & 13, 26 < A_{sl} < 60, \\ 0,12438(A_{sl} + 6, 3), & 60 < A_{sl} < 120. \end{cases} \quad (10.13)$$

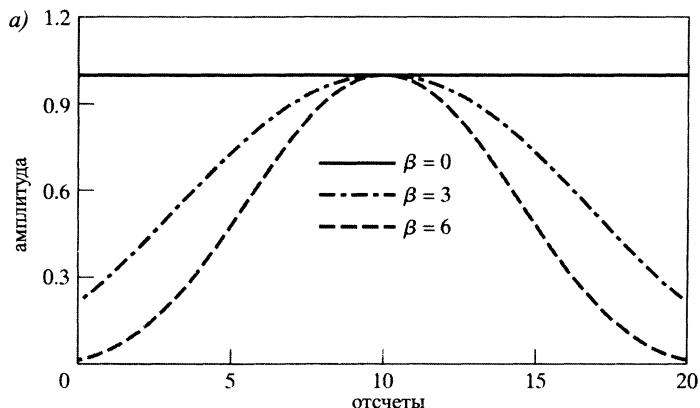
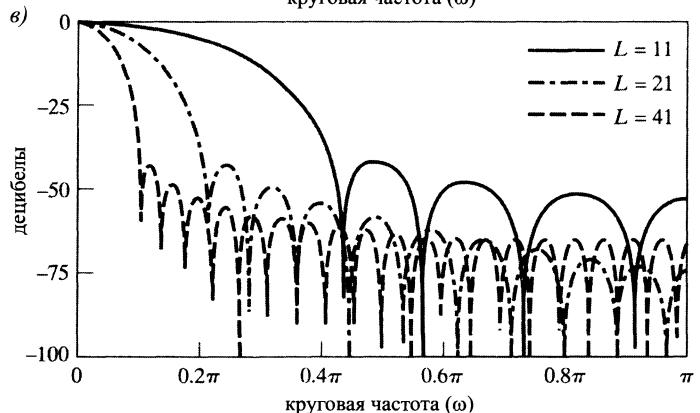
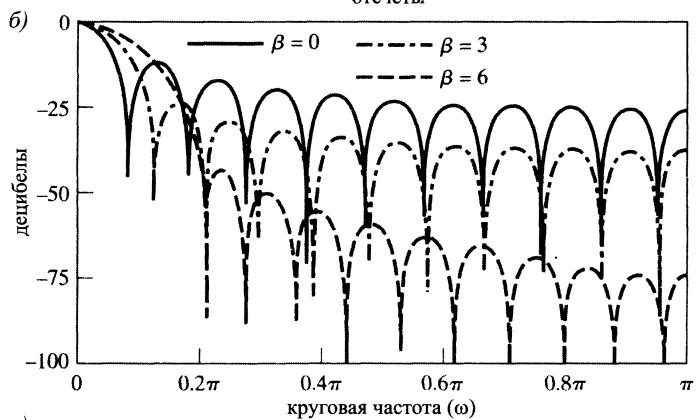


Рис. 10.4. а) окно Кайзера при $\beta = 0, 3$ и 6 и $L = 21$; б) Фурье-образ окон из п. а); в) Фурье-образ окон Кайзера при $\beta = 6$ и $L = 11, 21$ и 41



При выборе параметра β по этой формуле фактическое значение A_{sl} получаемого окна отличается от желаемого не более чем на 0,36%, если $A_{sl} \in (13, 26; 120)$. (Заметим, что число 13, 26 — это относительная амплитуда боковых лепестков в случае прямоугольного окна, к которому сводится окно Кайзера при $\beta = 0$.)

На рис. 10.4, в) видно, что ширина главного лепестка обратно пропорциональна длине окна. Тесная взаимосвязь между шириной главного лепестка, относительной амплитудой боковых и длиной окна описывается следующим приближенным соотношением:

$$L \approx \frac{24\pi(A_{sl} + 12)}{155\Delta_{ml}} + 1, \quad (10.14)$$

также найденным Кайзером и Шафером (см. [77]).

Формулы (10.12)–(10.14) необходимы для определения параметров окна Кайзера с желаемой шириной главного лепестка и относительной амплитудой боковых. Все что нужно сделать, это вычислить β по формуле (10.13), L по формуле (10.14) и подставить найденные параметры в (10.12). Во многих примерах мы будем работать с окном Кайзера. Другие окна, используемые в спектральном анализе, исследуются в [54].

10.3.2. Спектральная дискретизация

Мы уже отмечали, что ДПФ участка сигнала, вырезанного окном, т. е. последовательности $v[n]$, дает отсчеты ее Фурье-образа $V(e^{j\omega})$ в N равномерно распределенных частотах $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Соответствующие непрерывные частоты при $k = 0, 1, \dots, N/2$ равны $\Omega_k = (2\pi k)/(NT)$ (в предположении о четности N), а при $k = N/2 + 1, \dots, N - 1$ — $\Omega_k = -2\pi(N - k)/(NT)$. Спектральная дискретизация, связанная ДПФ, иногда приводит к вводящим в заблуждение результатам. Лучше всего это высказывание проиллюстрировать примером.

Пример 10.4. Иллюстрация эффектов, связанных со спектральной дискретизацией

Рассмотрим сигнал из примера 10.3 с $A_0 = 1$, $A_1 = 0,75$, $\omega_0 = 2\pi/14$, $\omega_1 = 4\pi/15$ и $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Обозначим через $w[n]$ прямоугольное окно длины 64. В результате умножения на него сигнала получается последовательность

$$v[n] = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{14}n\right) + 0,75 \cos\left(\frac{4\pi}{15}n\right), & 0 \leq n \leq 63, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (10.15)$$

график которой показан на рис. 10.5, а). На рис. 10.5, б)–д) представлены вещественная часть, мнимая часть, модуль и фаза 64-точечного ДПФ последовательности $v[n]$ соответственно. На рис. 10.5, е) изображена часть графика $|V(e^{j\omega})|$ над отрезком частот $[0; 2\pi]$ для сравнения с ДПФ из рис. 10.5, г).

Единицей измерения горизонтальной (частотной) оси из рисунков 10.5 б)–д) служит номер k отсчета ДПФ. При этом значение $k = 32$ соответствует дискретной частоте $\omega = \pi$ и непрерывной $\Omega = \pi/T$. Как обычно отсчеты ДПФ изображаются над одним периодом, т. е. при $k = 0, 1, \dots, N - 1$, что отвечает значениям Фурье-образа над промежутком $[0; 2\pi]$. Ввиду периодичности, присущей преобразованию Фурье, первая половина значений ДПФ соответствует положительным непрерывным частотам, т. е. Ω ,

лежащим между 0 и π/T , а вторая — отрицательным, т. е. Ω из $[-\pi/T; 0]$). Исследуя графики, обратите внимание на четную периодическую симметрию вещественной части и модуля и нечетную периодическую симметрию мнимой части и фазы.

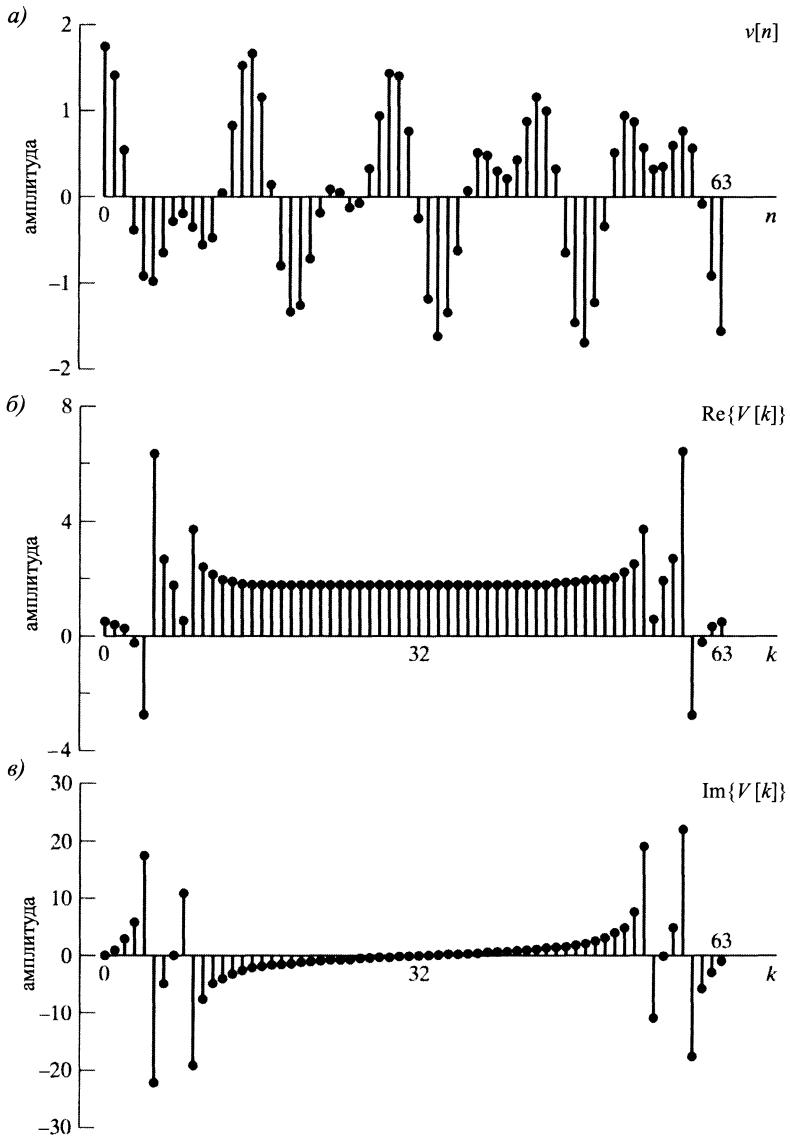


Рис. 10.5. Синусоидальная последовательность и ДПФ с прямоугольным окном: а) участок сигнала, попавший в окно; б) вещественная часть ДПФ; в) мнимая часть ДПФ

Модуль значений ДПФ, изображенный на рис. 10.5, г), совпадает с отсчетами модуля спектра, представленного на рис. 10.5, е), и показывает ожидаемую концентрацию отсчетов в окрестности $\omega = 2\pi/7, 5$ и $\omega = 2\pi/14$ — частотах гармонических составляющих входного сигнала. Более точно, частота $\omega_1 = 4\pi/15 = 2\pi(8,533\dots)/64$ лежит

между восьмым и девятым отсчетами ДПФ, а $\omega_0 = 2\pi/14 = 2\pi(4,5714\dots)/64$ попадает между четвертым и пятым отсчетами. Заметим, что частоты, в которых график из рис. 10.5, *е*) достигает экстремальных значений, лежат между спектральными отсчетами, полученными из ДПФ.

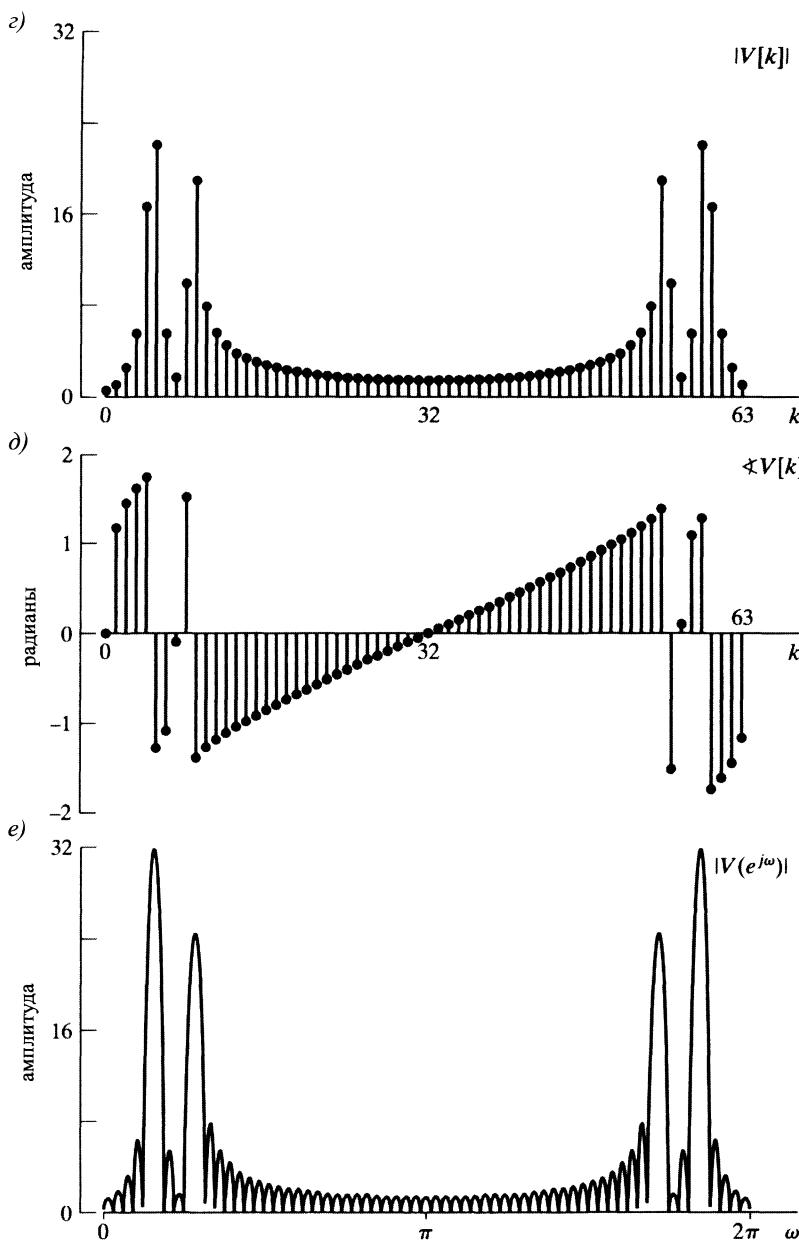


Рис. 10.5 (окончание). *г*) модуль ДПФ; *д*) фаза ДПФ; *е*) модуль ДВПФ

В общей ситуации точки экстремальных значений ДПФ не всегда совпадают с аналогичными точками Фурье-образа, поскольку последние могут попасть между частотами, в которых вычисляются отсчеты ДПФ. И действительно, при сравнении рис. 10.5, е) и г) можно заметить, что относительные амплитуды пиков ДПФ не отражают относительных амплитуд истинных спектральных пиков. \square

Пример 10.5. Спектральная дискретизация в частотах, соответствующих частотам ДПФ

Рассмотрим последовательность

$$v[n] = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{16}n\right) + 0,75 \cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right), & 0 \leq n \leq 63, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (10.16)$$

изображенную на рис. 10.6, а). Здесь для спектрального анализа тоже используется прямоугольное окно с $N = L = 64$. Данная ситуация очень похожа на предыдущий пример, за исключением того, что теперь частоты косинусов совпадают с двумя частотами ДПФ, а именно $\omega_1 = 2\pi/8 = 2\pi/64$ в точности равна частоте восьмого отсчета ДПФ, а $\omega_0 = 2\pi/16 = 2\pi/4/64$ — частоте четвертого.

График модуля 64-точечного ДПФ последовательности $v[n]$ для этого примера построен на рис. 10.6, б). Он соответствует отсчетам функции $|V(e^{j\omega})|$ (приведенной на рис. 10.6, в)) в частотах, отделенных друг от друга промежутком в $2\pi/64$. Хотя параметры сигналов здесь и в примере 10.4 очень близки, внешний вид ДПФ на удивление разный. В частности, в этом примере ДПФ имеет пару определенных спектральных линий в частотах двух компонент сигнала, а остальные частоты в ДПФ ничем не выделены. Фактически, чистый вид ДПФ на рис. 10.6, б) в значительной степени является иллюзией, происходящей из дискретизации спектра. Сравнивая рис. 10.6, б) и в), мы можем видеть, что причина чистоты заключается в том, что при таком выборе параметров Фурье-образ равен нулю в тех частотах, в которых вычисляются значения ДПФ, за исключением соответствующих отсчетам с номерами $k = 4, 8, 65$ и 60 . Несмотря на то что сигнал, представленный на рис. 10.6, а), имеет заметные значения практически при всех частотах, на графике ДПФ ввиду дискретизации спектра этого не видно.

Кроме того, можно заметить, что, поскольку обе частоты компонент кратны $2\pi/64$, период сигнала равен 64. Поэтому прямоугольное окно длины 64 вырезает из него ровно один период, достаточный для вычисления ДПФ периодического сигнала. (Фактически, на рис. 10.6, а) видно, что $v[n]$ — тоже периодическая последовательность с периодом 8.) Итак, естественные предположения о периодичности дают корректный ответ к различным задачам. Ранее нас интересовал случай конечных сигналов, и результат был далек от истины.

Чтобы еще лучше осветить этот момент, можно продолжить $v[n]$ из (10.16) нулем до 128-членной последовательности. Соответствующее 128-точечное ДПФ показано на рис. 10.7. При более тонкой дискретизации спектра появляются и другие частоты. В этой ситуации последовательность $v[n]$ не совпадает с периодом 128-периодической последовательности. \square

При спектральном анализе, отображенном на рис. 10.5–10.7, были использованы прямоугольные окна. В следующем примере исследуется эффект выбора других форм окна.

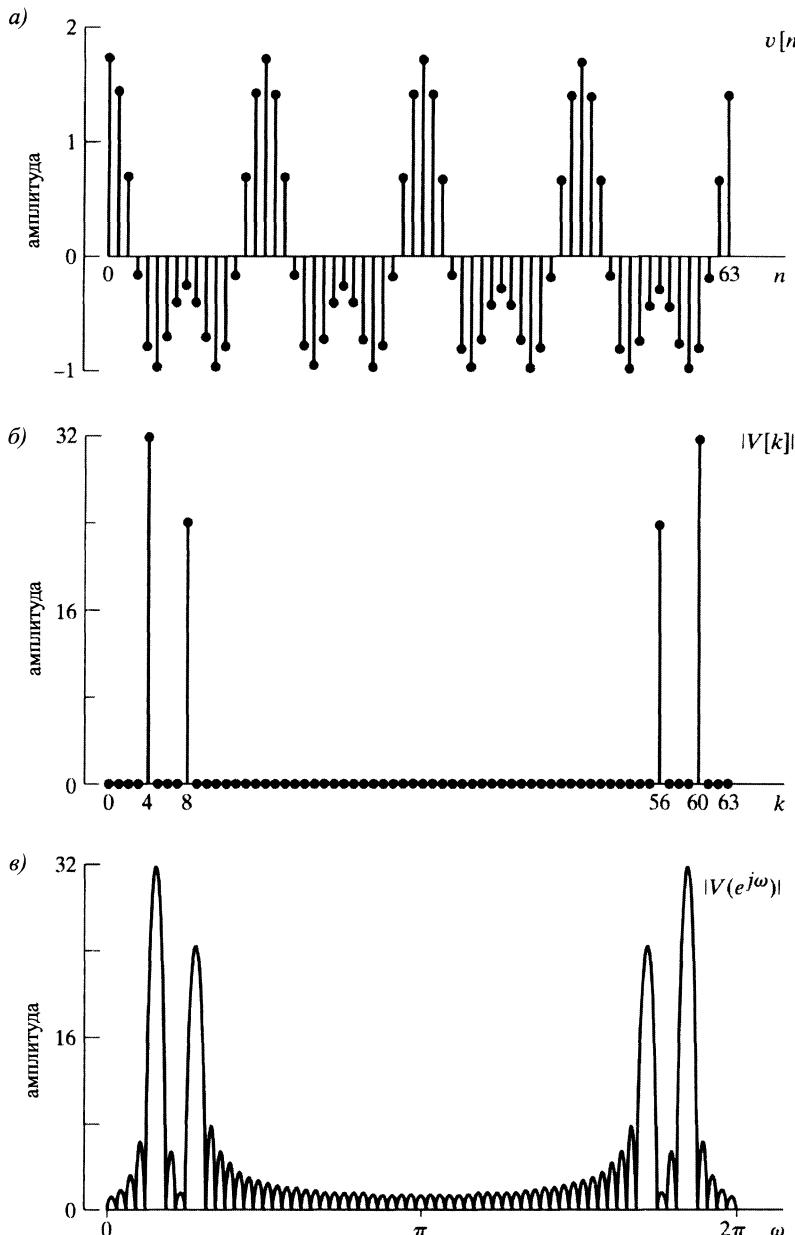


Рис. 10.6. Дискретный Фурье-анализ суммы двух синусоид в ситуации, когда Фурье-образ равен нулю при всех частотах ДПФ, за исключением несущих частот сигнальных компонент: а) участок сигнала, вырезанный окном; б) модуль Фурье-образа $|V(e^{j\omega})|$

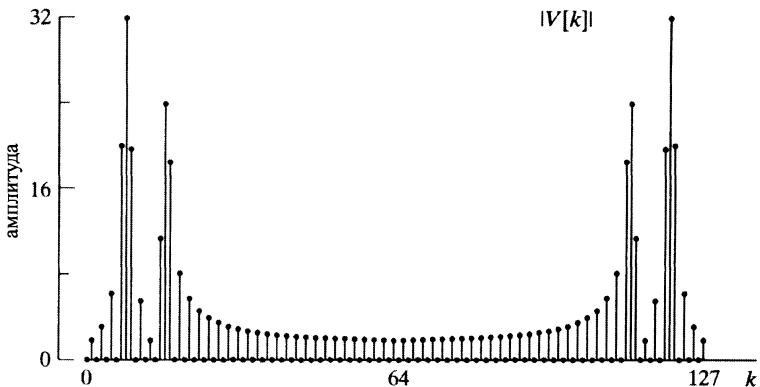


Рис. 10.7. ДПФ сигнала из рис. 10.6, а), но с удвоенным числом частотных отсчетов по сравнению с рис. 10.6, б)

Пример 10.6. ДПФ-анализ синусоидального сигнала с помощью окна Кайзера

Вернемся к частотным, амплитудным и фазовым параметрам примера 10.3, но в качестве окна выберем окно Кайзера, так что

$$v[n] = w_K[n] \cos\left(\frac{2\pi}{14}n\right) + 0,75w_K[n] \cos\left(\frac{4\pi}{15}n\right), \quad (10.17)$$

где $w_K[n]$ — окно Кайзера, описываемое формулой (10.12). Положим параметр β в окне равным 5,48, что, согласно (10.13), дает относительную амплитуду боковых лепестков $A_{sl} = -40$ дБ. На рис. 10.8, а) показана последовательность $v[n]$, получающаяся в результате умножения сигнала на окно длины $L = 64$, а на рис. 10.8, б) — модуль соответствующего ДПФ. Из формулы (10.15) следует, что разность между двумя частотами составляет $\omega_1 - \omega_0 = 2\pi/7,5 - 2\pi/14 = 0,389$. Поэтому, согласно формуле (10.14), ширина главного лепестка Фурье-образа окна Кайзера с $L = 64$ и $\beta = 5,48$ равна $\Delta_{ml} = 0,401$. Итак, главные лепестки двух копий функции $W_K(e^{j\omega})$, середины которых попадают в частоты ω_0 и ω_1 , будут лишь незначительно перекрываться в частотном интервале $(\omega_0; \omega_1)$. В связи с этим на рис. 10.8, б) отчетливо видны две частотные компоненты.

На рис. 10.8, в) изображен тот же сигнал, умноженный на окно Кайзера с $L = 32$ и $\beta = 5,48$. Так как здесь длина окна в два раза меньше, мы ожидаем, что ширина главного лепестка Фурье-образа окна удвоится, и рис. 10.8, е) подтверждает наши ожидания. Кроме того, по формулам (10.13) и (10.14) при $L = 32$ и $\beta = 5,48$ получается, что $\Delta_{ml} = 0,815$. Теперь главные лепестки двух копий Фурье-образа окна налагаются друг на друга, и пики сливаются в один. \square

Во всех предыдущих примерах (за исключением рис. 10.7) количество точек ДПФ N совпадало с длиной окна L . На рис. 10.7 перед применением ДПФ участок входного сигнала, вырезанный окном, был продолжен нулем. Это сделано для того, чтобы вычислить значения Фурье-образа в более точно делящемся наборе частот. Однако необходимо понять, что такое продолжение не улучшает разрешение, зависящее от длины и формы окна, что иллюстрируется следующим примером.

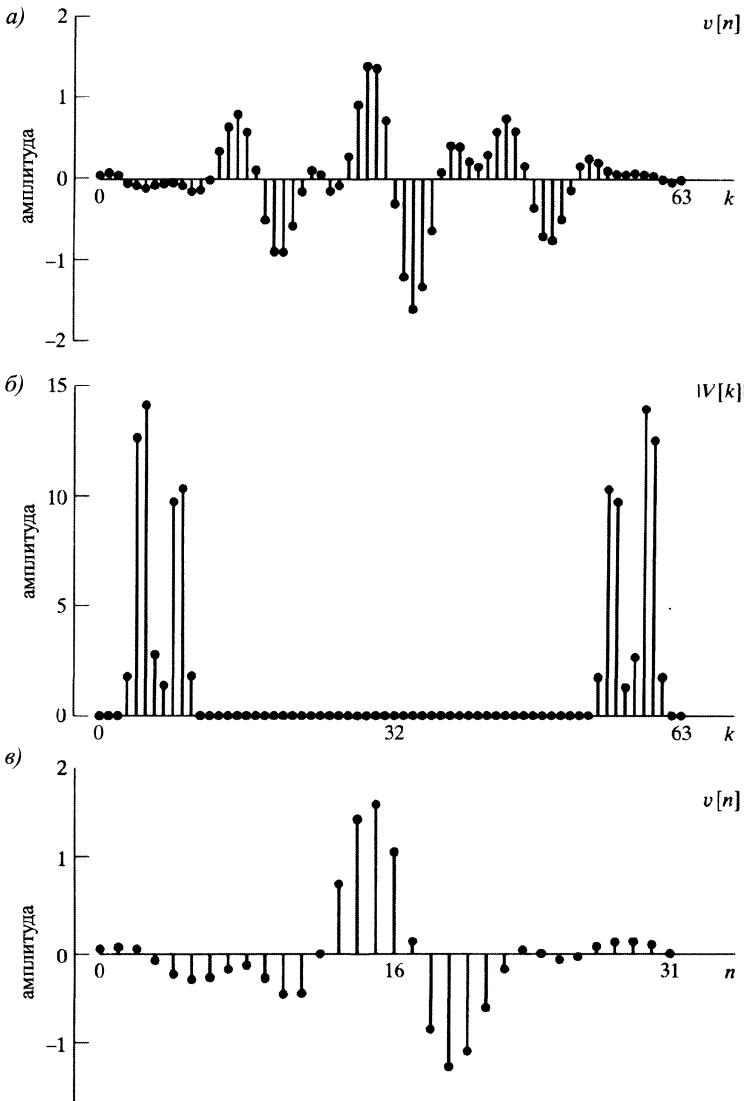


Рис. 10.8. Дискретный Фурье-анализ с окном Кайзера: а) обработанный окном с $L = 64$ участок входного сигнала; б) модуль ДПФ с $L = 64$; в) участок входного сигнала, обработанный окном с $L = 32$

Пример 10.7. ДПФ-анализ с 32-точечным окном Кайзера и продолжением нулем

Здесь мы исследуем ситуацию примера 10.6, зафиксировав длину окна Кайзера $L = 32$, его параметр $\beta = 5,48$, но варьируя число точек ДПФ. Рисунок 10.9 а) показывает модуль ДПФ в случае $N = L = 32$, как на рис. 10.8, в). А рис. 10.9, б)-г) — модуль ДПФ при $N = 64, 128$ и 1024 соответственно. Как и в примере 10.5, это продолжение нулем

32-членной последовательности ведет к более хорошей спектральной дискретизации Фурье-образа. Огибающая отсчетов модуля ДПФ во всех случаях рис. 10.9 остается одной и той же. Следовательно, увеличение числа точек ДПФ за счет продолжения нулем входной последовательности не влияет на возможность выделения частот двух синусоидальных компонент, но меняет расстояние между частотами отсчетов. □

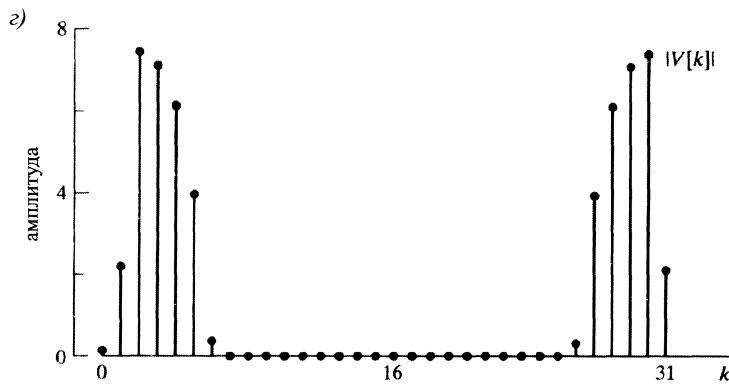


Рис. 10.8 (окончание). г) модуль ДПФ с $L = 32$

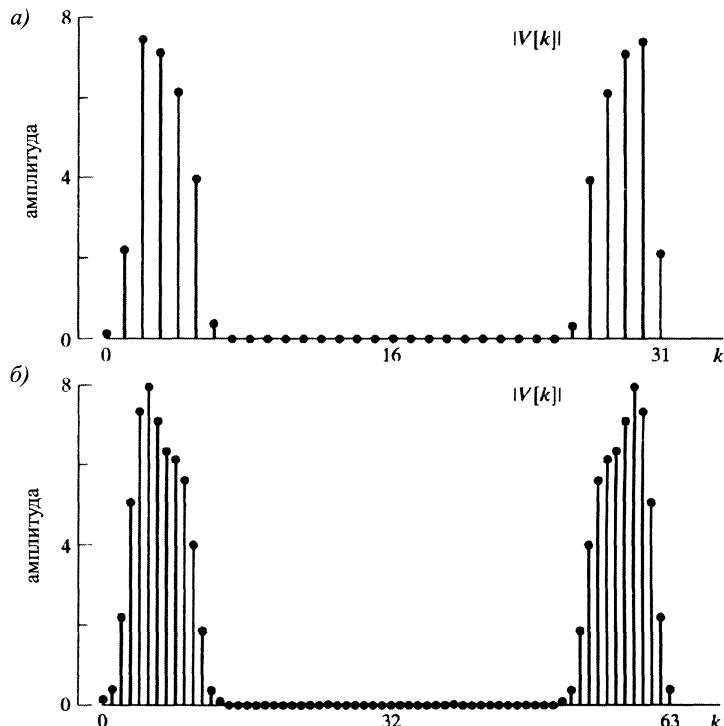


Рис. 10.9. Иллюстрация изменения количества точек ДПФ при фиксированной длине окна Кайзера $L = 32$: а) модуль ДПФ при $N = 32$; б) модуль ДПФ при $N = 64$

Для полного представления L -членной последовательности достаточно L -точечного ДПФ, так как исходная последовательность из него точно восстанавливается. Однако, как мы отмечали в предыдущих примерах, простое исследование L -точечного ДПФ может привести к неверным выводам. По этим причинам последовательность обычно продолжают нулем, чтобы спектр стал передискретизован и важные особенности стали лучше заметны. При значительном продолжении нулем во временной области или передискретизации в частотной простая интерполяция (например, линейная) значений ДПФ дает достаточно точную картину спектра Фурье, которую затем можно использовать, например, для исследования положений и амплитуд спектральных экстремумов, что иллюстрируется в следующем примере.

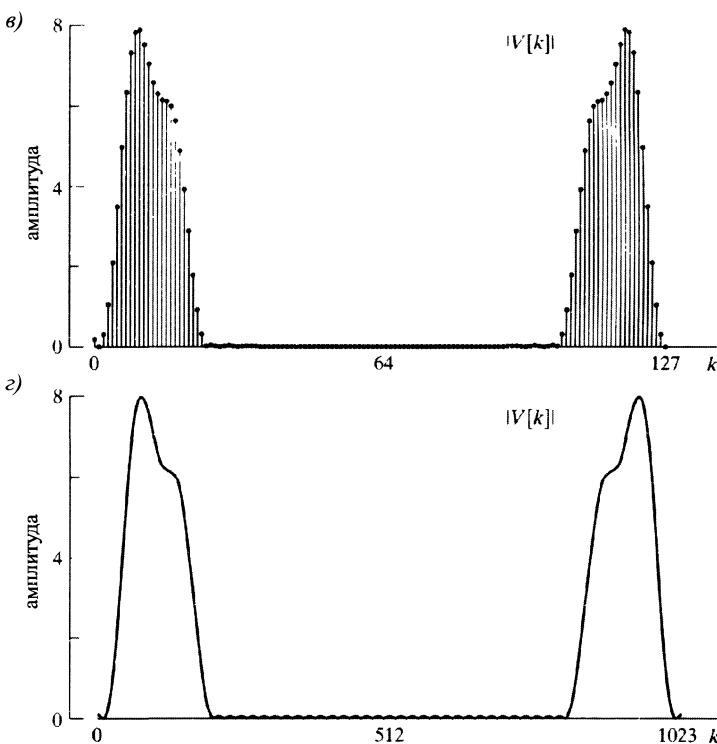


Рис. 10.9 (окончание). а) модуль ДПФ при $N = 128$; б) модуль ДПФ при $N = 1024$. (Не-прерывная кривая получается через линейную интерполяцию значений ДПФ.)

Пример 10.8. Передискретизация и линейная интерполяция при исследовании частот

На рис. 10.10 показано, как можно использовать 1024-точечное ДПФ для получения близко расположенных друг к другу отсчетов Фурье-образа участка сигнала, вырезанного окном, и как увеличение ширины окна улучшает разрешающую способность спектрального анализа. Сигнал из примера 10.6 обрабатывается окном Кайзера длины $L = 32, 42, 54$ и 64 с параметром $\beta = 5, 48$. Прежде всего заметим, что во всех случаях

линейная аппроксимация 1024-точечного ДПФ дает гладкую кривую. На рис. 10.10, а), где $L = 32$, две синусоидальные составляющие сигнала неразличимы и, естественно, увеличение длины ДПФ сказывается лишь на гладкости кривой. При удлинении окна наблюдается постоянное увеличение разрешения спектрального анализа, что позволяет выделить две частоты и приближенные амплитуды каждой синусоидальной компоненты. Заметим, что 1024-точечное ДПФ из рис. 10.10, г) оказывается намного более эффективным с точки зрения точной локализации пиков Фурье-образа, чем ДПФ из рис. 10.8, б), расстояние между отсчетами которого довольно велико, хотя оно тоже вычислено при длине окна Кайзера 64. Заметим также, что отношение амплитуд пиков из рис. 10.10 очень близко к истинному, т. е. к 0,75 : 1. \square

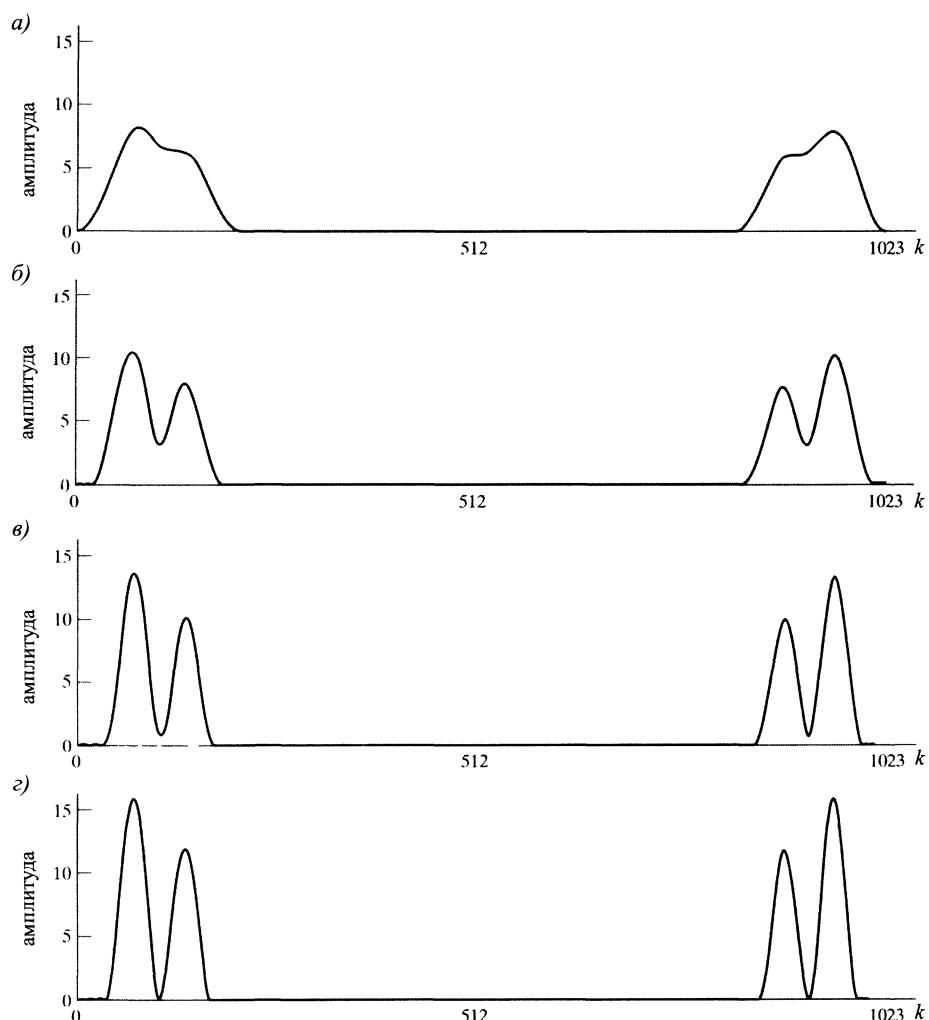


Рис. 10.10. Иллюстрация вычисления ДПФ при $N \gg L$ и линейной интерполяции для получения гладкой кривой: а) $N = 1024$, $L = 32$; б) $N = 1024$, $L = 42$; в) $N = 1024$, $L = 54$; г) $N = 1024$, $L = 64$

10.4. Преобразование Фурье, зависящее от времени

В предыдущем параграфе мы изучали приложение ДПФ к частотному представлению сигналов, составленных из синусоидальных компонент. При этом мы предполагали, что частоты составляющих не зависят от времени, так что вне зависимости от длины окна свойства сигнала остаются постоянными как в начале окна, так и на его конце. В практических приложениях моделей синусоидального сигнала часто бывает так, что параметры сигнала (амплитуда, частота и фаза) меняются в зависимости от времени. Например, нестационарная модель сигнала такого типа применяется при описании радарных, сонарных, речевых и коммуникационных сигналов. Вычисление единственного ДПФ не достаточно для описания таких сигналов и поэтому мы подходим к концепции *зависящего от времени преобразования Фурье*¹ (ЗВПФ).

ЗВПФ сигнала $x[n]$ определяется по следующему правилу:

$$X[n, \lambda] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\lambda m}, \quad (10.18)$$

где $w[n]$ — оконная последовательность. При этом преобразование одномерная последовательность $x[n]$, зависящая от одной дискретной переменной, переходит в двумерную функцию от дискретной временной переменной n и непрерывной частотной² λ . Заметим, что ЗВПФ периодично по λ с периодом 2π , в связи с чем нам достаточно рассматривать его значения на полуинтервале $\lambda \in [0; 2\pi)$ или любом другом промежутке длины 2π .

Формулу (10.18) можно представлять себе как преобразование Фурье сдвинутого сигнала $x[n+m]$, на который смотрят через окно $w[m]$. Начало и длина окна постоянны, так что при изменении n сигнал проходит мимо окна как пленка, и в разные моменты времени «видны» различные его участки.

Пример 10.9. ЗВПФ линейного импульса

Взаимосвязь окна и сдвинутого сигнала на примере последовательности

$$x[n] = \cos(\omega_0 n^2), \quad \omega_0 = 2\pi \cdot 7,5 \cdot 10^{-6}, \quad (10.19)$$

соответствующего линейной частотной модуляции (когда «мгновенная частота» равна $2\omega_0 n$), иллюстрируется на рис. 10.11. Сигнал такого типа часто называют *линейным импульсом*. Длина окна $w[m]$ из (10.18) конечна, так что $X[n, \lambda]$ отражает частотные характеристики сигнала в окрестности момента времени n . Например, на рис. 10.12 мы показываем внешний вид модуля ЗВПФ сигнала из (10.19) (изображенного на рис. 10.11), в вычислении которого участвует окно Хемминга $w[m]$ длины 400. На этой картинке, которую называют *спектрограммой*, переменная вертикальной оси $\lambda/2\pi$ пропорциональна частоте, а горизонтальная (n) пропорциональна времени. Модуль ЗВПФ представляется черной линией. На рис. 10.12 ясно видна линейность зависимости частоты от времени. □

¹ Преобразование Фурье, зависящее от времени, обсуждается в большом числе источников, включая [2], [123], [32] и [103].

² Частотная переменная ЗВПФ обозначена буквой λ , чтобы подчеркнуть ее отличие от частотной переменной ДВПФ, которую обычно обозначают буквой ω . Скобки разной формы при обозначении $X[n, \lambda]$ употребляются как напоминание о разной природе переменных n (дискретная) и λ (непрерывная).

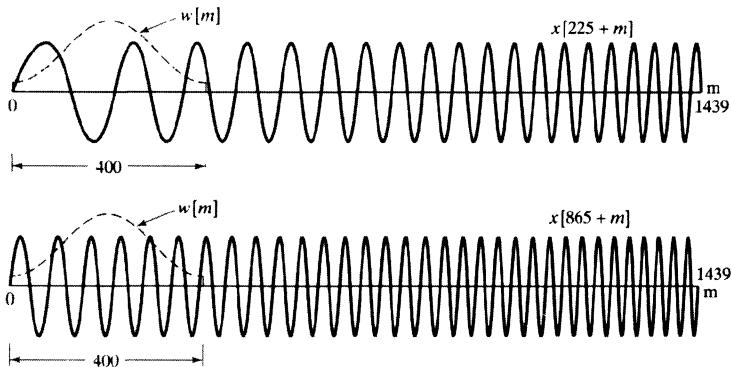


Рис. 10.11. Два отрезка линейного импульса $x[n] = \cos(\omega_0 n^2)$, вырезанного окном. $X[225, \lambda]$ — Фурье-образ верхнего участка, умноженного на окно. $X[865, \lambda]$ — Фурье-образ нижнего участка, умноженного на окно

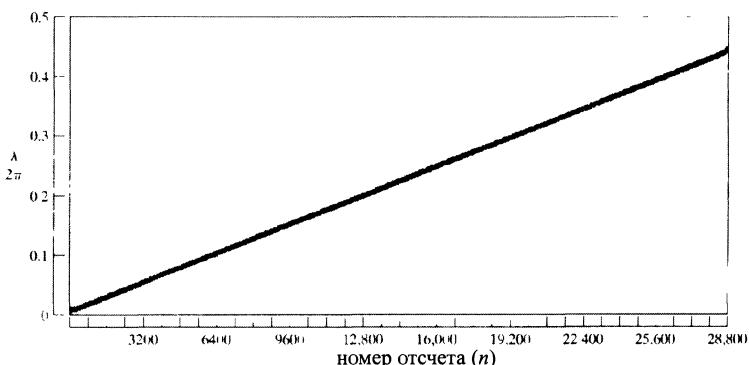


Рис. 10.12. Модуль ЗВПФ последовательности $x[n] = \cos(\omega_0 n^2)$, вычисленного с помощью окна длины 400

Так как $X[n, \lambda]$ — Фурье-образ последовательности $x[n + m]w[m]$, ЗВПФ будет обратимым, если окно имеет хотя бы один ненулевой отсчет. Действительно, из уравнения синтеза ДВПФ (2.128) (см. с. 67) следует, что

$$x[n + m]w[m] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X[n, \lambda] e^{j\lambda m} d\lambda, \quad -\infty < m < \infty, \quad (10.20)$$

а значит,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi w[0]} \int_0^{2\pi} X[n, \lambda] d\lambda, \quad (10.21)$$

как только³ $w[0] \neq 0$. Ясно, что не только один отсчет сигнала $x[n]$, но все,

³ Поскольку $X[n, \lambda]$ — 2π -периодична по λ , интегралы (10.20) и (10.21) можно вычислять по любому отрезку длины 2π .

которые умножаются на ненулевые отсчеты окна⁴, можно восстановить по аналогичной формуле, подставляя нужные численные значения в (10.20).

Перестановка слагаемых суммы (10.18) позволяет дать другую полезную интерпретацию ЗВПФ. Сделав в этой формуле подстановку $m' = n + m$, мы получим

$$X[n, \lambda] = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} x[m']w[-(n - m')]e^{j\lambda(n-m')}. \quad (10.22)$$

Последняя сумма вычисляет свертку

$$X[n, \lambda] = x[n] * h_{\lambda}[n], \quad (10.23)$$

$$\text{где } h_{\lambda}[n] = w[-n]e^{j\lambda n}. \quad (10.24)$$

Таким образом, при фиксированном λ ЗВПФ $X[n, \lambda]$ является откликом ЛС-системы с импульсной характеристикой $h_{\lambda}[n]$ на сигнал $x[n]$. КЧХ этой системы равна

$$H_{\lambda}(e^{j\omega}) = W(e^{j(\lambda-\omega)}). \quad (10.25)$$

В общей ситуации окно с ненулевыми отсчетами при положительных индексах называется *недетерминированным*, поскольку вычисление $X[n, \lambda]$ по формуле (10.18) использует отсчеты сигнала, следующие за n . Аналогично, ЛС-система с импульсной характеристикой $h_{\lambda}[n] = w[-n]e^{j\lambda n}$, дающая это преобразование, тоже недетерминирована.

В определении ЗВПФ (10.18) нулевой момент времени окна фиксирован, а сигнал сдвигается вдоль интервала, ограниченного окном, в результате чего нулевой момент времени в Фурье-анализе переходит в n -й отсчет сигнала. Другой способ заключается в сдвиге окна при изменении n и неподвижном нулевом моменте времени Фурье-анализа, совпадающем с отсчетом сигнала под номером 0. Такая интерпретация приводит к следующему определению:

$$\check{X}[n, \lambda] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]w[m-n]e^{-j\lambda m}. \quad (10.26)$$

Легко показать, что левые части формул (10.18) и (10.26) связаны соотношением:

$$\check{X}[n, \lambda] = e^{-j\lambda n}X[n, \lambda]. \quad (10.27)$$

Определение (10.18) особенно удобно при вычислении отсчетов ЗВПФ по λ через ДПФ. Действительно, ввиду конечности числа отсчетов окна $w[n]$ последовательность $x[n+m]w[m]$ тоже будет конечной. С другой стороны, формула (10.26) имеет преимущества перед (10.18) в том случае, когда Фурье-анализ интерпретируется в терминах блоков фильтров. Однако наш интерес лежит в области приложений ДПФ, поэтому мы будем пользоваться определением (10.18).

10.4.1. Эффект обработки окном

Основная цель, с которой в определение ЗВПФ введено окно, состоит в ограничении последовательности, преобразование которой нужно найти. Участок сигна-

⁴Если найдется m_0 , при котором $w[m_0] \neq 0$, то отсчеты сигнала восстанавливаются по формуле: $x[n + m_0] = \frac{1}{2\pi w[m_0]} \int_0^{2\pi} X[n, \lambda]e^{j\lambda m_0} d\lambda$. — Примеч. перев.

ла, вырезаемый окном, должен быть настолько мал, чтобы его спектральные характеристики можно было считать постоянными. Чем быстрее меняются характеристики сигнала, тем короче должно быть окно. Однако при уменьшении длины окна падает частотное разрешение спектрального анализа (см. § 10.3). То же самое, конечно, справедливо в случае ЗВПФ. С другой стороны, при уменьшении длины окна разрешающая способность меняется с ростом времени. Следовательно, при выборе длины окна нужно соблюдать компромисс между частотным и временным разрешением.

Влияние окна на свойства ЗВПФ можно увидеть, предположив, что сигнал $x[n]$ обладает обычным Фурье-образом $X(e^{j\omega})$. Допустим сначала, что все отсчеты окна равны 1, т. е. окна, по сути дела, вообще нет. Тогда по формуле (10.18) получаем

$$X[n, \lambda] = X(e^{j\lambda})e^{j\lambda n}. \quad (10.28)$$

Разумеется, типичное окно, применяемое в спектральном анализе, вырезает лишь конечный участок анализируемого сигнала. По материалу, представленному в § 10.3, мы знаем, что длина и форма окна выбираются так, чтобы его Фурье-образ (см. рис. 10.13, а)) занимал узкую полосу частот в сравнении с частотами ДВПФ сигнала.

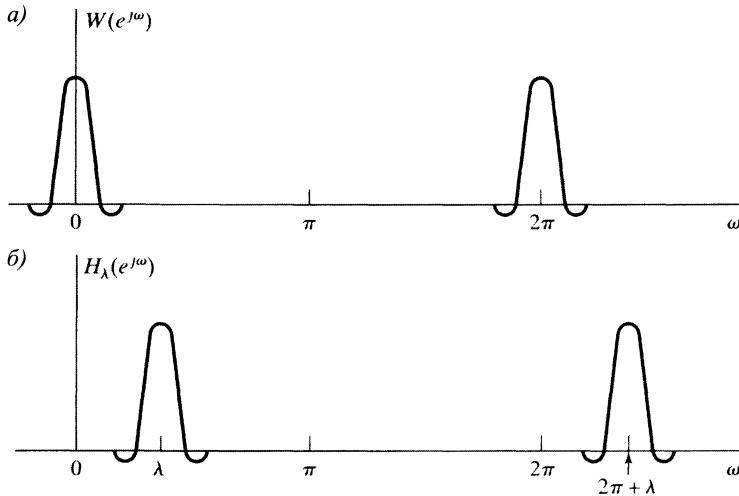


Рис. 10.13. а) Фурье-образ окна из зависящего от времени Фурье-анализа; б) эквивалентный полосно-пропускающий фильтр для зависящего от времени Фурье-анализа

Из свойств преобразования Фурье следует, что ЗВПФ при конкретном индексе n удовлетворяет равенству:

$$X[n, \lambda] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\theta n} X(e^{j\theta}) W(e^{j(\lambda-\theta)}) d\theta, \quad (10.29)$$

т. е. оно равно свертке Фурье-образа сдвинутого сигнала с Фурье-образом окна. Эта формула похожа на (10.2), за исключением того, что там сигнал не сдвинут.

гается относительно окна. Здесь же мы вычисляем Фурье-образ для каждого значения n . В § 10.3 мы видели, что возможность различать узкополосные компоненты сигнала зависит от ширины главного лепестка Фурье-образа окна, в то время как рассеяние — от относительной амплитуды боковых. Если окна нет вообще, т. е. $w[n] = 1$ при всех n , то $W(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$ при $-\pi \leq \omega \leq \pi$, что обеспечивает точную идентификацию частот, но дает очень скверное временнéе разрешение.

При интерпретации формул (10.23)–(10.25) в терминах линейного фильтрования $W(e^{j\omega})$ обычно имеет нижнечастотные характеристики, изображенные на рис. 10.13, *a*), и, соответственно, фильтр с КЧХ $H_\lambda(e^{j\omega})$ является полосно-пропускающим фильтром, центр полосы пропускания которого попадает в $\omega = \lambda$ (см. рис. 10.13, *b*)). Ясно, что ширина его полосы пропускания равна ширине главного лепестка Фурье-образа окна. Степень же отклонения соседних частотных компонент зависит от относительной амплитуды боковых лепестков.

Итак, если мы используем ЗВПФ для исследования частотного спектра сигнала, желательно укорачивать окно, с тем чтобы понизить боковые лепестки и применять окно до тех пор, пока это возможно для увеличения частотного разрешения анализа. Некоторые примеры спектрального анализа мы разберем в § 10.6. Однако перед этим стоит обсудить использование ДПФ при явном вычислении ЗВПФ.

10.4.2. Дискретизация по времени и по частоте

Явное вычисление $X[n, \lambda]$ можно осуществить лишь для конечного числа значений λ , соответствующих дискретизации ЗВПФ по частотной переменной. Точно так же как конечный сигнал в явном виде представляется через отсчеты своего Фурье-образа, сигналы неопределенной длины можно представлять с помощью отсчетов ЗВПФ, если длина окна из (10.18) конечна. В качестве примера предположим, что его длина равна L , а начало окна попадает в $m = 0$, т. е.

$$w[m] = 0 \quad \text{при } m \notin [0; L - 1]. \quad (10.30)$$

Если отсчеты $X[n, \lambda]$ вычисляются в N равноотстоящих друг от друга частотах $\lambda_k = 2\pi k/N$ при $N \geq L$, то остается возможность восстановления исходного сигнала. Действительно, рассмотрим последовательность

$$X[n, k] = X[n, 2\pi k/N] = \sum_{m=0}^{L-1} x[n+m]w[m]e^{-j(2\pi/N)km}, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (10.31)$$

которая является ДПФ последовательности $x[n+m]w[m]$. Через обратное ДПФ получаем

$$x[n+m]w[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[n, k]e^{j(2\pi/N)km}, \quad 0 \leq m \leq L-1. \quad (10.32)$$

Так как по предположению отсчеты $w[n]$ отличны от нуля при $0 \leq m \leq L-1$, члены последовательности с номерами от n до $(n+L-1)$ восстанавливаются по формуле:

$$x[n+m] = \frac{1}{Nw[m]} \sum_{k=0}^{N-1} X[n, k]e^{j(2\pi/N)km}, \quad 0 \leq m \leq L-1. \quad (10.33)$$

Важный момент заключается в том, что длина окна конечна, и мы берем по крайней мере столько же отсчетов по переменной λ , сколько ненулевых членов в окне, т. е. $N \geq L$. Напомним, что формула (10.30) соответствует недетерминированному окну. Мы можем использовать и детерминированное окно, у которого $w[m] \neq 0$ при $-(L-1) \leq m \leq 0$, или симметричное окно, удовлетворяющее условию $w[m] = w[-m]$ при $|m| \leq (L-1)/2$, где L — нечетное число. Однако недетерминированное окно, участвующее в сумме (10.31), более удобно для нашего анализа, поскольку позволяет довольно естественно интерпретировать дискретизацию ЗВПФ как ДПФ участка последовательности, вырезанного окном, который начинается с номера n .

Так как формула (10.31) соответствует дискретизации (10.18) в точке λ , она также имеет непосредственное отношение к дискретизации формул (10.22)–(10.24) в этой точке. Действительно, формулу (10.31) можно переписать в виде:

$$X[n, k] = x[n] * h_k[n], \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (10.34)$$

где

$$h_k[n] = w[-n]e^{j(2\pi/N)kn}. \quad (10.35)$$

Формулы (10.34) и (10.35) полезно представлять себе как блок N фильтров, что отражено на рис. 10.14. КЧХ k -го фильтра в блоке равна

$$H_k(e^{j\omega}) = W(e^{j[(2\pi k/N)-\omega]}). \quad (10.36)$$

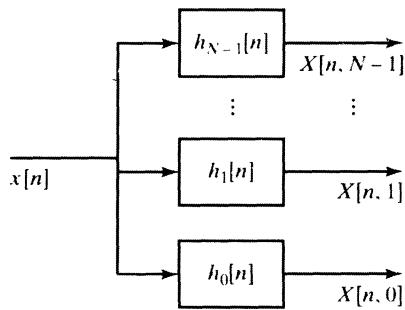


Рис. 10.14. Блок фильтров, представляющий ЗВПФ

Сигнал $x[n]$ можно также восстановить, если $X[n, \lambda]$ или $X[n, k]$ дискретизируется по временной переменной. Действительно, опираясь на (10.33), по отсчетам $X[n_0, k]$ можно реконструировать сигнал на промежутке $n_0 \leq n \leq n_0 + L - 1$, по значениям $X[n_0 + L, k]$ — на промежутке $n_0 + L \leq n \leq n_0 + 2L - 1$ и т. д. Таким образом, исходный сигнал восстанавливается по ЗВПФ, дискретизованному как по частотной, так и по временной переменной. В общей ситуации дискретизация ЗВПФ на носителе окна (т. е. на $[0; L-1]$) определяется по правилу:

$$X[rR, k] = X[rR, 2\pi k/N] = \sum_{m=0}^{L-1} x[rR + m]w[m]e^{-j(2\pi/N)km}, \quad (10.37)$$

где r и k — целые числа, удовлетворяющие условиям $-\infty < r < \infty$ и $0 \leq k \leq N-1$. Для упрощения обозначений введем последовательность

$$X_r[k] = X[rR, k] = X[rR, \lambda_k], \quad -\infty < r < \infty, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (10.38)$$

где $\lambda_k = 2\pi k/N$. Это обозначение подчеркивает тот факт, что дискретизованное ЗВПФ является N -точечным ДПФ участка сигнала, вырезанного окном:

$$x_r[m] = x[rR + m]w[m], \quad -\infty < r < \infty, \quad 0 \leq m \leq L-1, \quad (10.39)$$

начало которого за один раз сдвигается на R отсчетов. На рис. 10.15 отмечены линии $[n, \lambda]$ -плоскости, соответствующие носителю функции $X[n, \lambda]$, и сетка

точек дискретизации для случая $N = 10$ и $R = 3$. Как мы показали, сигнал по такому двумерному представлению восстанавливается однозначно.

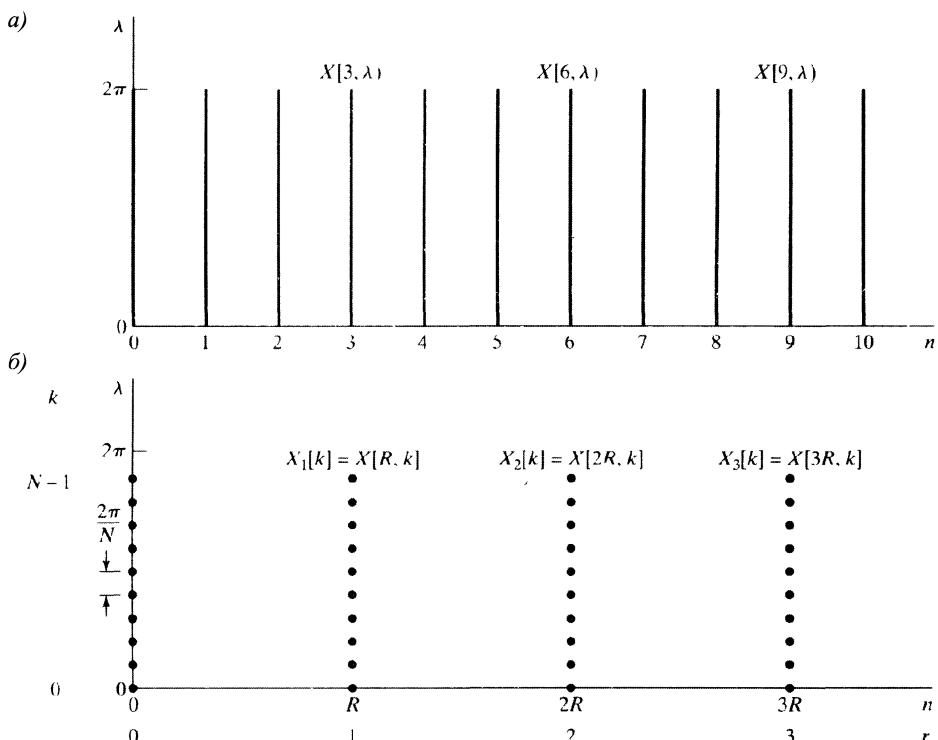


Рис. 10.15. а) носитель $X[n, \lambda]$; б) сетка точек дискретизации на $[n, \lambda]$ -плоскости ЗВПФ при $N = 10$ и $R = 3$

В формулу (10.37) входят следующие целочисленные параметры: ширина окна L ; число отсчетов по частотной переменной, или количество N точек ДПФ, и длина R интервала дискретизации по временной переменной. Однако не любой набор параметров допускает восстановление исходного сигнала. Неравенство $L \leq N$ гарантирует возможность восстановить участок $x_r[m]$ сигнала, вырезанный окном, по блоку преобразований $X_r[k]$. Если $R < L$, то участки перекрываются, а при $R > L$ некоторые отсчеты сигнала не учитываются и поэтому не могут быть реконструированы по значениям $X_r[k]$. Таким образом, в общей ситуации параметры дискретизации должны удовлетворять условию $N \leq L \leq R$. Обратите внимание, что каждый блок из R отсчетов сигнала представляется N комплексными числами в дискретизованном представлении Фурье, зависящем от времени. Если же отсчеты сигнала вещественны, то для его представления ввиду симметричности ДПФ требуется N вещественных чисел. Как мы уже говорили, в специальном случае $N = L = R$ исходный сигнал точно восстанавливается по отсчетам ЗВПФ. В этой ситуации N отсчетов вещественнозначного сигнала представляются N вещественными числами, т. е. минимально возможным объемом информации.

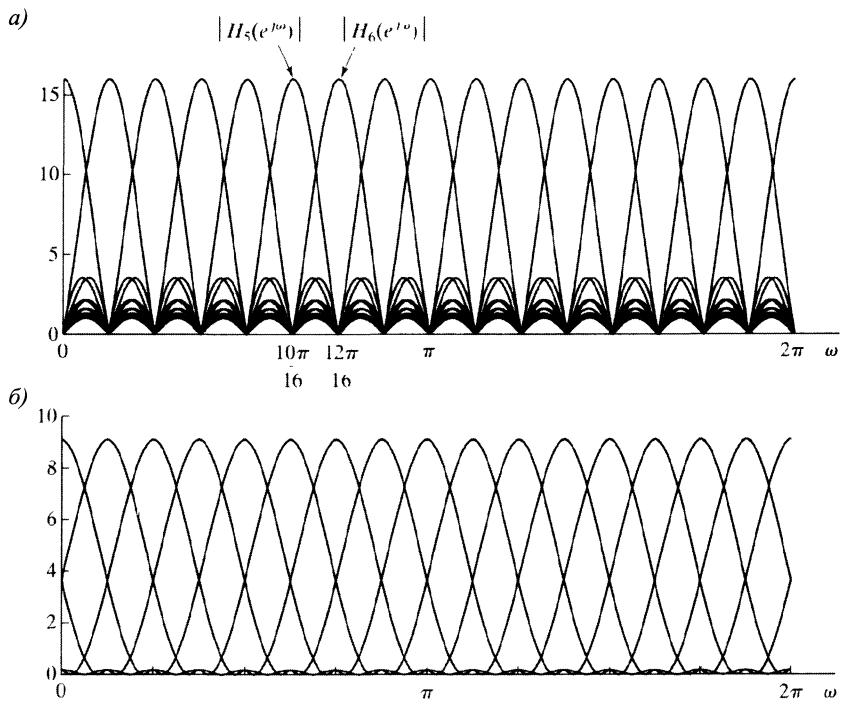


Рис. 10.16. КЧХ блока фильтров: а) прямоугольное окно; б) окно Кайзера

Существует и другой способ убедиться в том, что ЗВПФ можно дискретизовать по временной переменной. Напомним, что при фиксированном λ (или k , что то же самое) ЗВПФ представляет собой выходную одномерную последовательность полосно-пропускающего фильтра с КЧХ вида (10.25). Поэтому естественно ожидать, что частота дискретизации при каждом фиксированном λ может быть уменьшена в $2\pi/\Delta_{ml}$, где Δ_{ml} — ширина главного лепестка Фурье-образа окна. На рис. 10.16, а) показаны АЧХ блока полосно-пропускающих фильтров, соответствующих прямоугольному окну с $L = N = 16$. Заметим, что полосы пропускания фильтров существенно перекрываются, а их частотная избирательность неидеальна с любой точки зрения. Фактически, боковые лепестки любого из этих фильтров полностью перекрываются полосами пропускания с каждой стороны. Это свидетельствует о наложении спектров, с которым мы будем сталкиваться во временной области, поскольку Фурье-образ любого конечного окна не дает идеальной характеристики фильтра. Рисунок 10.16 б) показывает случай окна Кайзера той же длины $L = N = 16$. Боковые лепестки здесь стали заметно меньше, но зато увеличился главный лепесток, и перекрытие характеристик фильтров все равно значительное. Хотя это и не следует непосредственно из рис. 10.16, только что приведенные аргументы, основанные на идеях блочной обработки, в итоге показывают, что мы все-таки можем точно восстановить исходный сигнал по ЗВПФ, дискретизованного по времени или частоте. Более детальный анализ интерпретации ЗВПФ через линейное фильтрование показы-

вает, что искажение за счет наложения спектров, возникающего из-за неидеальности КЧХ, может быть устранено при восстановлении сигнала. Этот момент разбирается в задаче 10.40 и обсуждается в [123 и 32].

10.5. Блочная свертка с использованием ЗВПФ

ЗВПФ можно использовать как основу обработки дискретных сигналов, осуществляющую некоторые их преобразования в частотной области. Для этого вычисляют ЗВПФ, вносят изменения в представление и затем восстанавливают дискретный сигнал. Такой подход широко применяется при цифровом кодировании речи, когда вместо квантования отсчетов речевого сигнала квантуется его дискретизованное ЗВПФ, а результат квантования кодируется и либо передается по сети, либо записывается на носитель информации. Обсуждение приложений такого типа слишком далеко уведет нас от темы книги, хотя с такой техникой блочной обработки дискретных сигналов мы уже познакомились в главе 8, когда изучали применение ДПФ к реализации свертки конечной импульсной характеристики и входного сигнала неопределенной длины. Упомянутый метод реализации ЛС-системы имеет полезную интерпретацию в терминах определений и концепций § 10.4.

Предположим, что мы вычисляем ЗВПФ сигнала, у которого $x[n] = 0$ при $n < 0$, причем $R = L$, а окно прямоугольно. Другими словами, дискретизованное ЗВПФ $X_r[k]$ состоит из набора N -точечных ДПФ участков входной последовательности:

$$x_r[m] = x[rL + m], \quad 0 \leq m \leq L - 1. \quad (10.40)$$

Поскольку все отсчеты сигнала учтены, а блоки не перекрываются, то

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL]. \quad (10.41)$$

Предположим теперь, что мы определяем новое ЗВПФ как произведение

$$Y_r[k] = H[k]X_r[k], \quad 0 \leq k \leq N - 1, \quad (10.42)$$

где $H[k]$ — N -точечное ДПФ последовательности $h[n]$, у которой $h[n] = 0$ при $n < 0$ и $n > P - 1$. Вычисляя обратное ДПФ от $Y_r[k]$, получаем

$$y_r[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_r[k] e^{j(2\pi/N)km} = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_r[\ell] h[((m - \ell))_N]. \quad (10.43)$$

Таким образом, $y_r[m]$ — это N -точечная циклическая свертка последовательностей $h[m]$ и $x_r[m]$. Поскольку последовательность $h[m]$ насчитывает P ненулевых отсчетов, а $x_r[m]$ — L , то согласно § 8.8 при $N \geq L + P - 1$ последовательность $y_r[m]$ на отрезке $[0; L + P - 2]$ будет совпадать с линейной сверткой $h[m] * x_r[m]$, а остальные ее отсчеты окажутся нулевыми. Иными словами, сигнал

$$y[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - rL] \quad (10.44)$$

оказывается реакцией ЛС-системы с импульсной характеристикой $h[n]$.

Описанная выше процедура в точности совпадает с методом *суммирования перекрытий* вычисления блочной свертки. Метод хранения перекрытий, о котором шла речь в § 8.8, тоже можно применять в рамках ЗВПФ.

10.6. Фурье-анализ нестационарных сигналов

В предыдущем параграфе мы рассмотрели простой пример применения ЗВПФ к реализации линейного фильтрования. В таких приложениях нас интересует не столько спектральное разрешение, сколько возможность восстановления модифицированного сигнала по измененному ЗВПФ. С другой стороны, концепция ЗВПФ более широко используется как основа многообразных методик приближенного исследования нестационарных дискретных сигналов, где наиболее существенными оказываются спектральное разрешение, изменение во времени и другие подобные вопросы.

Напомним, что *нестационарным* называют сигнал, чьи свойства меняются с течением времени, например сумма синусоидальных сигналов с зависящими от времени амплитудами, частотами и/или фазами. Как мы увидим в подразделе 10.6.1 на примере речевых сигналов, а в подразделе 10.6.2 на примере допплеровских радарных сигналов, ЗВПФ часто дает полезное описание эволюции свойств сигнала с течением времени.

Если мы применяем ЗВПФ к дискретизованному сигналу, то все результаты из § 10.2 оказываются справедливыми для каждого вычисляемого ДПФ. Другими словами, дискретизованное ЗВПФ $X_r[k]$ для каждого участка $x_r[n]$ сигнала связано с Фурье-образом исходного непрерывного сигнала по правилу, описанному в § 10.2. Более того, все сказанное в § 10.3 остается в силе для ДПФ, возникающих при применении ЗВПФ к синусоидальным сигналам с постоянными (не меняющимися во времени) параметрами.

Если частоты сигнала не меняются со временем, то на первый взгляд ЗВПФ, фактически, должно зависеть только от частотной переменной, как это описано в § 10.3. Но это справедливо лишь в очень специальных случаях. Например, ЗВПФ постоянно по временной переменной, если сигнал периодичен с периодом N_p , а параметры ЗВПФ имеют вид $L = \ell_0 N_p$ и $R = r_0 N_p$, где ℓ_0 и r_0 — целые числа, т. е. окно вырезает целое число ℓ_0 периодов сигнала, и сдвигается между вычислениями ДПФ ровно на r_0 периодов. В общей ситуации (даже для периодического сигнала) изменение фазового соотношения, возникающее из-за различия форм вырезаемых участков сигнала, индуцирует нетривиальную зависимость ЗВПФ от временной переменной. Однако для стационарных сигналов, если используется окно, сужающееся к концам до нуля, модуль $|X_r[k]|$ от участка к участку будет меняться очень незначительно, а основная вариация ЗВПФ будет приходиться на фазу.

10.6.1. Зависящий от времени Фурье-анализ речевых сигналов

Речь возникает благодаря возбуждению акустической трубы, или *речевого тракта*, который с одной стороны ограничен губами, а с другой — голосовой щелью.

Речевые звуки можно разбить на три основных класса:

- 1) *вокализованный звук*, получающийся из-за возбуждения речевого тракта квазипериодическими потоками воздуха, образующимися в результате открытия и закрытия речевой щели;
- 2) *фрикативный звук* возникает в результате сжатия участка вокального тракта и форсированного продвижения через него воздуха, при котором получается турбулентность, производящая шумоподобное возбуждение;
- 3) *взрывной звук* производится вследствие полного перекрытия речевого тракта, создания большого давления перед этим барьером и последующего резкого снятия препятствия.

Подробное изложение моделей речевого сигнала и приложений ЗВПФ можно найти, например, в [44, 123, 110, 116 и 36].

При постоянной форме речевого тракта речь можно моделировать как отклик ЛС-системы (речевого тракта) на квазипериодическую цепочку импульсов в случае вокализованного звука или на широкополосный шум в случае невокализованного. Речевой тракт — это акустическая передающая система, характеризующаяся своими собственными частотами, называемыми *формантами*, которые соответствуют резонансам КЧХ. При нормальной речи форма речевого тракта меняется во времени под воздействием языка и губ относительно медленно. Поэтому его можно моделировать как медленно меняющийся со временем фильтр, действующий на спектр возбуждения своей КЧХ.

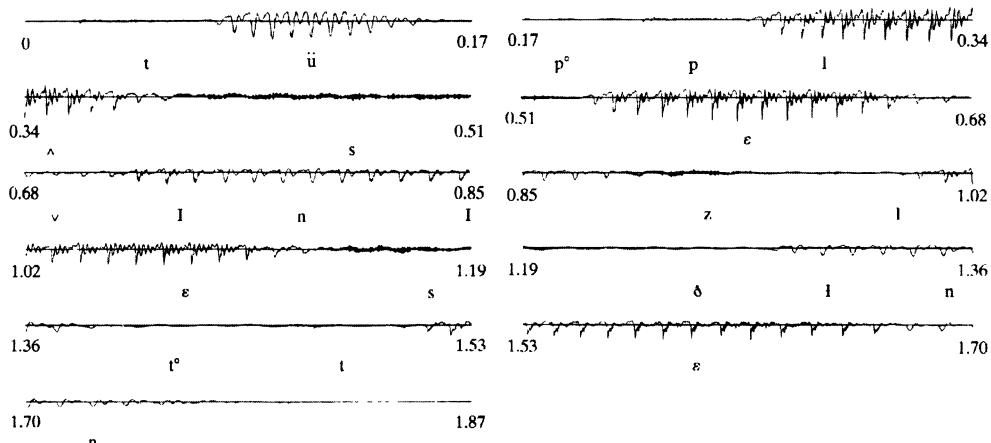


Рис. 10.17. Форма волны высказывания «two plus seven is less than ten». Каждый отрезок волны представляет 0,17 с звучания. Под отрезками указана фонетическая расшифровка сигнала

Из нашего краткого описания процесса речи и рис. 10.17, на котором представлен типичный речевой сигнал, становится ясным, что речевой сигнал нестационарен. Однако, как видно из рисунка, можно считать, что характеристики сигнала, по существу, остаются постоянными на протяжении временного отрезка от 30 до 40 мс. Частоты речевого сигнала могут достигать 15 кГц и

выше, но речь остается понятной и тогда, когда частоты сигнала не превосходят 3 кГц. В коммерческих телефонных сетях, например, верхние передаваемые частоты ограничены примерно 3 кГц. Стандартная частота дискретизации в цифровых телефонных системах равна 8000 отсч./с. При этом на временной интервал в 40 мс приходится 320 отсчетов.

На рис. 10.17 показано, что речевой сигнал состоит из последовательности квазипериодических *вокализованных* участков, перемежающихся шумоподобными *невокализованными* отрезками. Рисунок подтверждает тот факт, что при достаточно малой длине окна свойства сигнала меняются на его протяжении не очень заметно. Таким образом, ДПФ вырезанного окном участка речевого сигнала отражает его частотные свойства в момент времени, соответствующий данному положению окна. Если, например, длина окна достаточно велика и гармонические составляющие сигнала различимы, ДПФ участка вокализованного речевого сигнала должно показать набор пиков в целых кратных собственной частоты сигнала на этом интервале. Отсюда возникает естественное требование о том, чтобы окно охватывало несколько периодов волны.

Если окно слишком коротко, то отдельных гармоник различить не удастся, но основная спектральная форма будет видна. Обычно при анализе нестационарных сигналов стремятся достичь определенного компромисса между частотным и времененным разрешением.

При слишком большом окне свойства сигнала могут сильно меняться на его протяжении, а при коротким приходится жертвовать различимостью узкополосных компонент. Указанные проблемы иллюстрируются на следующем примере.

Пример 10.10. Вид спектограммы ЗВПФ речевого сигнала

На рис. 10.18, а) показана спектrogramма ЗВПФ высказывания из рис. 10.17, а под ней в том же масштабе приведена зависимость сигнала от времени. Более точно рис. 10.18, а) следует называть *широкополосной спектrogramмой*. Представление сигнала в таком виде является следствием относительно короткого (по времени) окна и характеризуется невысоким частотным и хорошим времененным разрешением. Частотная ось рисунка размечена в терминах непрерывной частоты. Так как частота дискретизации сигнала составляла 16 000 отсч./с, то частота $\lambda = \pi$ соответствует 8 кГц. Спектrogramма из рис. 10.18, а) была получена с помощью окна Хемминга длительностью в 6,7 мс, что соответствует равенству $L = 108$. Параметр $R = 16$ отвечает временному сдвигу в 1 мс. Широкие темные участки, движущиеся горизонтально вдоль спектrogramмы, отвечают резонансным частотам речевого тракта, которые, как видно из рисунка, зависят от времени. Вертикальные полоски появляются на спектrogramме из-за квазипериодического характера вокализованных порций волны, что становится очевидным при сравнении изменения формы волны со спектrogramмой.

Так как длина используемого окна сравнима с периодом волны, то с течением времени оно поочередно вырезает участки сигнала с высокой энергией, а между ними попадают сегменты с низкой энергией. В связи с этим и появляются вертикальные полоски, отражающие участки вокализованного звука.

При *узкополосном* зависящем от времени Фурье-анализе для достижения высокой частотной разрешимости применяются более длинные окна, но при этом, естественно, падает временное разрешение. Узкополосный анализ речи иллюстрируется на рис. 10.18, б), где привлекалось окно Хемминга длительностью в 45 мс, что соответствует $L = 720$, а параметр R был снова выбран равным 16. □

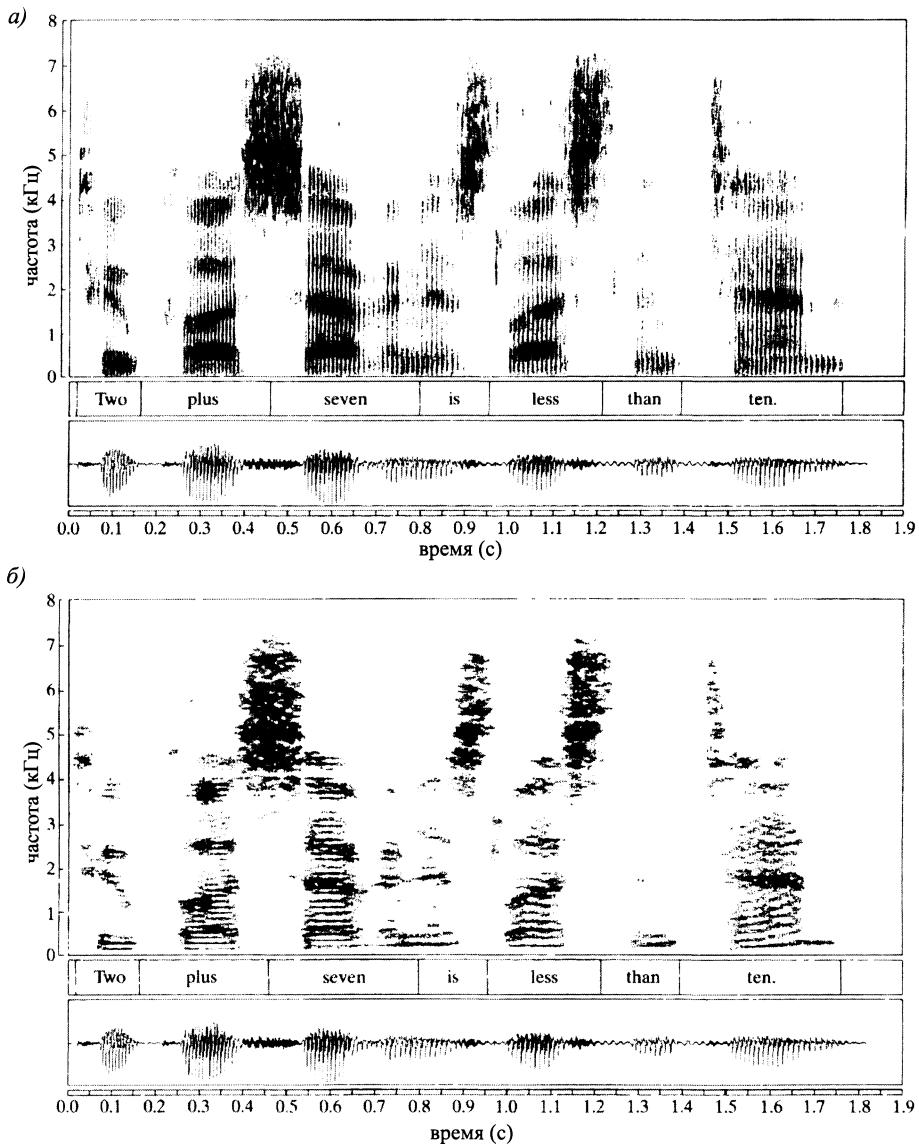


Рис. 10.18. Спектрограммы сигнала из рис. 10.17: а) широкополосная; б) узкополосная

Разобранный пример лишь указывает на множество причин, по которым ЗВПФ столь важно при анализе и обработке речи. Действительно, эта концепция непосредственно или опосредованно используется в качестве основы акустико-фонетического анализа и многих фундаментальных приложений обработки речи, таких как цифровое кодирование, удаление шумов и реверберации, распознавание речи, верификация и идентификация говорящего. А наше обсуждение служит лишь простейшей иллюстрацией возможностей ЗВПФ.

10.6.2. Зависящий от времени Фурье-анализ радарных сигналов

Другая прикладная область, где ЗВПФ играет ведущую роль, — это анализ радарных сигналов. Перечислим элементы типичных радарных систем:

- передающая и принимающая антенна (обычно та же самая);
- передатчик, генерирующий сигнал на микроволновых частотах. Мы будем предполагать, что сигнал состоит из синусоидальных компонент, что широко используется в радарах, хотя иногда генерируются и другие сигналы, в зависимости от конкретных целей и проектов;
- приемник, обнаруживающий и усиливающий эхо переданных импульсов, отраженных объектами, на которые нацелена антенна.

Переданный синусоидальный сигнал в радарных системах распространяется с той же скоростью, отражается от объекта и возвращается к антеннам со скоростью света, создавая тем самым небольшую временну́ю задержку. Предположив, что передающийся сигнал является синусоидальным импульсом $\cos(\Omega_0 t)$, а расстояние между антенной и объектом равно $\rho(t)$, мы получим, что принятый отраженный сигнал будет иметь вид:

$$s(t) = \cos(\Omega_0(t - 2\rho(t)/c)), \quad (10.45)$$

где c — скорость света. Если объект неподвижен относительно антенны, то $\rho(t) = \rho_0$, где ρ_0 — дистанция до объекта. Поскольку временнáя задержка между передачей и приемом сигнала в этом случае равна $2\rho/c$, то ее точное значение можно использовать для вычисления дистанции. Если же $\rho(t)$ не постоянно, то возвращенный сигнал будет иметь модулированную фазу, которая несет в себе информацию как о дистанции, так и о движении объекта относительно антенны. Разложим зависящую от времени дистанцию в ряд Тейлора:

$$\rho(t) = \rho_0 + \dot{\rho}_0 t + \frac{1}{2!} \ddot{\rho}_0 t^2 + \dots, \quad (10.46)$$

где ρ_0 — начальная дистанция; $\dot{\rho}_0$ — скорость; $\ddot{\rho}_0$ — ускорение объекта. Предполагая, что объект движется с постоянной скоростью (т. е. $\ddot{\rho}_0 = 0$), и подставляя разложение (10.46) в (10.45), мы получим

$$s(t) = \cos((\Omega_0 - 2\Omega_0 \dot{\rho}_0/c)t - 2\Omega_0 \rho_0/c). \quad (10.47)$$

В этом случае частоты посланного и отраженного сигнала отличаются на *частоту Допплера*

$$\Omega_d = -2\Omega_0 \dot{\rho}_0/c. \quad (10.48)$$

Таким образом, если удастся определить частоту Допплера, то через временную задержку можно определить не только расстояние до объекта, но и скорость, с которой он движется относительно антенны.

В практических приложениях отраженный сигнал оказывается очень слабым, так что к формуле (10.47) необходимо добавить шумовой член. Но в простом анализе, который будет сделан в этом подразделе, мы им пренебрежем. Кроме того, в большинстве радарных систем в процессе обнаружения объекта частота сигнала (10.47) сдвигается к более низкой номинальной частоте. Однако

допплеровский сдвиг будет удовлетворять соотношению (10.48), даже если $s(t)$ демодулируется к меньшей средней частоте.

Для зависящего от времени Фурье-анализа нам нужно сначала ограничить сигнал полосой частот, включающей ожидаемый допплеровский сдвиг, и затем дискретизовать полученный узкополосный сигнал с подходящим шагом дискретизации T , в результате чего получим:

$$x[n] = \cos((\omega_0 - 2\omega_0\dot{\rho}_0/c)n - 2\omega_0\rho_0/c), \quad (10.49)$$

где $\omega_0 = \Omega_0 T$. Во многих случаях движение объекта будет более сложным, нежели мы предполагаем в этой простейшей модели. Поэтому необходимо учитывать члены ряда (10.46) более высокого порядка, что усложняет модуляцию фазы отраженного сигнала.

Другой способ представления сложной вариации частоты отраженного сигнала состоит в применении ЗВПФ с достаточно коротким окном, для которого предположение о постоянстве допплеровского сдвига частоты справедливо на всем его протяжении, но не настолько коротким, чтобы утратить разрешающую способность, позволяющей различать два или более движущихся объекта

Пример 10.11. Анализ допплеровских сигналов

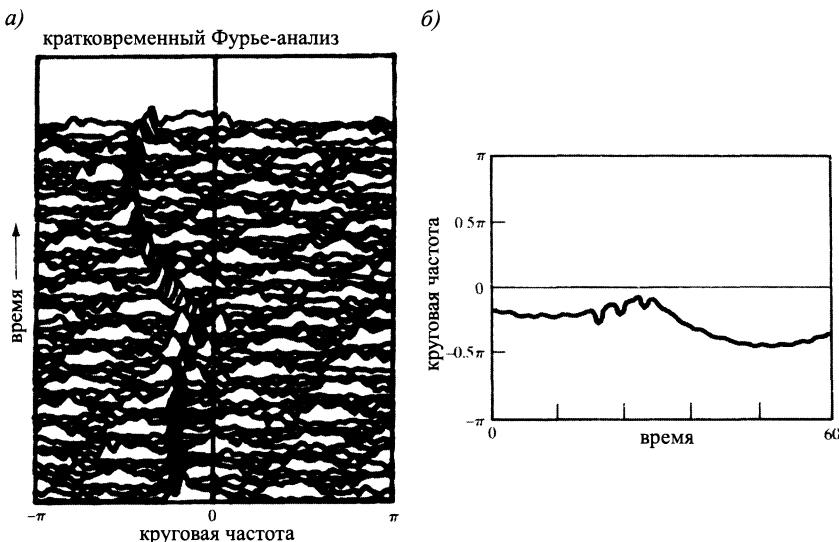


Рис. 10.19. Иллюстрация зависящего от времени Фурье-анализа сигнала допплеровского радара: а) последовательность Фурье-образов допплеровского сигнала; б) допплеровская частота, полученная с помощью выделения максимальных экстремумов ЗВПФ

Пример зависящего от времени Фурье-анализа сигналов допплеровского радара показан на рис. 10.19 (см. [138]). Данные радара были подвергнуты предварительной обработке, чтобы удалить из них низкоскоростные допплеровские сдвиги, оставив изменения, присутствующие на рисунке. В качестве окна для ЗВПФ было выбрано окно Кайзера с $N = L = 64$ и $\beta = 4$. График функции $|X_r[k]|$ изображен на рисунке так,

что вертикальная ось координат представляет время, а горизонтальная — частоту¹. В этом случае соседние ДПФ изображены близко друг от друга. Для формирования двумерного изображения ЗВПФ привлекался алгоритм «невидимой линии». Слева от срединной линии заметен сильный пик, движущийся по гладкому пути на частотно-временной плоскости, что соответствует движению объекта, чья скорость меняется регулярным образом. Другие многообразные пики в ЗВПФ возникают из-за шума и ложных откликов, называемых *помехами*. Пример движения, которое могло бы индуцировать такое изменение допплеровской частоты, дает ракета, движущаяся с постоянной скоростью, но вращающаяся относительно своей продольной оси. Перемещение всплеска ЗВПФ может соответствовать отражениям от хвостового оперения ракеты, отдельные пластины которого становятся то ближе, то дальше от антенн за счет вращения ракеты. На рис. 10.19, б) показана оценка допплеровской частоты как функция времени, которая была получена локализацией максимального пика при каждом ДПФ. □

10.7. Фурье-анализ стационарных случайных сигналов: периодограмма

В предыдущих параграфах мы обсуждали Фурье-анализ синусоидальных сигналов как со стационарными (не зависящими от времени) параметрами, так и с нестационарными, к которым относятся речевые и радарные сигналы. В тех случаях, когда сигнал можно представить как комбинацию синусоидальных или как реакцию линейной системы, возбужденной периодической цепочкой импульсов, Фурье-образы конечных участков сигнала имеют удобную и естественную интерпретацию в терминах преобразования Фурье, окон и теории линейных систем. Однако сигналы, которые больше похожи на шум, например невокализованная речь, лучше моделировать как случайные процессы.

Как было рассказано в § 2.11 и в приложении А, случайные процессы часто используют при моделировании сигналов, когда механизм, генерирующий сигнал, слишком сложен для разумной детерминированной модели. Обычно, когда входной сигнал ЛС-системы моделируется как стационарный случайный процесс, многие из существенных характеристик входа и выхода адекватно представляются средними величинами, такими как математическое ожидание (уровень постоянного тока), дисперсия (средняя мощность), автокорреляционная функция или спектральная плотность мощности. Следовательно, оценка этих средних для данного сигнала представляет практический интерес. Как показано в приложении А, математическое ожидание стационарного процесса, представляющего собой конечный отрезок данных, оценивается как *выборочное среднее*:

$$\hat{m}_x = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x[n]. \quad (10.50)$$

¹Отрицательные частоты на рисунке расположены слева от срединной вертикальной черты, а положительные — справа. Это объясняется вычислением ДПФ последовательности $(-1)^n x_r[n]$ и тем фактом, что оно сдвигает начало ДПФ в индекс $k = N/2$. С другой стороны, можно вычислить ДПФ сигнала $x_r[n]$, а затем провести переиндексацию.

Аналогично, дисперсия ищется как *выборочная дисперсия*:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} (x[n] - \hat{m}_x)^2. \quad (10.51)$$

Выборочное среднее и выборочная дисперсия, будучи тоже случайными переменными, представляют собой *несмешенную и асимптотически несмешенную* оценку соответственно, т. е. выборочное среднее \hat{m}_x совпадает с истинным математическим ожиданием m_x , а значение $\hat{\sigma}_x^2$ приближается к истинной дисперсии σ_x^2 при стремлении L к бесконечности. Более того, выборочные среднее и дисперсию можно назвать *состоятельными оценками*, так как они улучшаются с ростом L , поскольку их дисперсии стремятся к нулю при $L \rightarrow \infty$.

Конец этой главы посвящен изучению оценок спектра мощности¹ случайного сигнала с помощью ДПФ. Как мы увидим, существует два основных подхода к этой задаче. Один из них, которым мы будем заниматься в этом параграфе, называется *анализом периодограмм* и основывается на прямом преобразовании Фурье конечных участков сигнала. При другом подходе, освещенном в § 10.8, прежде всего оценивают автокорреляционную последовательность, а затем вычисляют ее Фурье-образ. В любом случае мы обычно интересуемся состоятельными оценками. К сожалению, анализ таких оценок весьма труден и в общей ситуации можно сделать лишь аппроксимационный анализ. Но даже это выходит за рамки нашего учебника, и мы расскажем о его результатах только на качественном уровне. Подробное изложение анализа можно найти в [8, 53, 73, 84, 82, 95 и 81].

10.7.1. Периодограмма

Рассмотрим задачу об оценке спектральной плотности мощности $P_{ss}(\Omega)$ непрерывного сигнала $s_c(t)$. Наивный подход к ее решению следует из рис. 10.1 и ассоциируется с обсуждением в § 10.2. Беря его на вооружение, предположим, что входной сигнал $s_c(t)$ — это стационарный случайный процесс. Фильтр нижних частот, защищающий от наложения спектров, создает новый стационарный случайный сигнал с узкополосной спектральной плотностью мощности, так что сигнал можно дискретизовать, не опасаясь появления ложных частот. Таким образом, $x[n]$ — стационарный дискретный случайный процесс, спектральная плотность мощности которого над полосой пропускания фильтра защиты пропорциональна $P_{ss}(\Omega)$, т. е.

$$P_{xx}(\omega) = \frac{1}{T} P_{ss} \left(\frac{\omega}{T} \right), \quad |\omega| < \pi, \quad (10.52)$$

где мы предполагаем, что частота отсечки фильтра защиты от наложения спектров равна π/T , а T — шаг дискретизации. (В задаче 10.33 дискретизация случайных сигналов рассматривается более подробно.) Следовательно, приемлемая оценка $P_{xx}(\omega)$ будет давать допустимую оценку $P_{ss}(\Omega)$. Окно $w[n]$ из рис. 10.1 вырезает конечный участок (L отсчетов) последовательности $x[n]$, который мы

¹ Термин *спектр мощности* обычно используется наряду с более точным — *спектральная плотность мощности*

обозначаем через $v[n]$. Его Фурье-образ вычисляется по формуле:

$$V(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} w[n]x[n]e^{-j\omega n}. \quad (10.53)$$

В качестве оценки спектра мощности возьмем величину

$$I(\omega) = \frac{1}{LU} |V(e^{j\omega})|^2, \quad (10.54)$$

где константа U введена в целях нормализации, чтобы удалить смещение в спектральной оценке. Когда окно $w[n]$ имеет прямоугольную форму, эта оценка называется *периодограммой*, в других случаях — *модифицированной периодограммой*. Ясно, что периодограмма обладает основными свойствами спектра мощности. Она неотрицательна и для вещественнонезначимых сигналов является вещественной четной функцией. Более того, можно показать (см. задачу 10.26), что имеет место равенство

$$I(\omega) = \frac{1}{LU} \sum_{m=-(L-1)}^{L-1} c_{vv}[m] e^{-j\omega m}, \quad (10.55)$$

где

$$c_{vv}[m] = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]w[n]x[n+m]w[n+m]. \quad (10.56)$$

Заметим, что последовательность $c_{vv}[m]$ — апериодическая корреляционная последовательность конечного сигнала $v[n] = w[n]x[n]$. Следовательно, периодограмма, фактически, является ДВПФ аperiодической корреляции вырезанного окном участка последовательности данных.

Явное вычисление периодограммы можно сделать только в дискретном наборе частот. Из формул (10.53) и (10.54) вытекает, что при замене ДВПФ последовательности $w[n]x[n]$ на ее ДПФ мы получим отсчеты в частотах $\omega_k = 2\pi k/N$ при $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Точная формула отсчетов периодограммы имеет вид:

$$I(\omega_k) = \frac{1}{LU} |V[k]|^2, \quad (10.57)$$

где $V[k]$ — N -точечное ДПФ последовательности $w[n]x[n]$. Если мы выбираем значение N , превышающее длину окна L , то последовательность $w[n]x[n]$ необходимо продолжить нулем до достаточного количества членов.

Если математическое ожидание случайного сигнала отлично от нуля, то его спектр мощности обладает импульсом в нулевой частоте. При относительно высоком математическом ожидании этот импульс будет доминировать в спектральной оценке, являясь причиной низких амплитуд компонент с нижними частотами, попадающими в его тень. По этой причине математическое ожидание часто оценивают по формуле (10.50), а получившуюся оценку вычитают из случайного сигнала перед вычислением оценки спектра мощности. Несмотря на то что выборочное среднее является только приближенной оценкой компоненты с нулевой частотой, вычитание ее из сигнала часто ведет к лучшей оценке частот в окрестности нуля.

10.7.2. Свойства периодограмм

Природа периодограммной оценки спектра мощности определяется тем, что при каждой частоте ω величина $I(\omega)$ случайна. Вычисляя среднее значение и дисперсию $I(\omega)$, можно установить, является ли она смещенной и/или состоятельной.

Из формулы (10.55) следует, что ожидаемое значение $I(\omega)$ равно

$$\mathcal{E}\{I(\omega)\} = \frac{1}{LU} \sum_{m=-(L-1)}^{L-1} \mathcal{E}\{c_{vv}[m]\} e^{-j\omega m}. \quad (10.58)$$

С другой стороны, ожидаемое значение $c_{vv}[m]$ выражается как

$$\mathcal{E}\{c_{vv}[m]\} = \sum_{n=0}^{L-1} \mathcal{E}\{x[n]w[n]x[n+m]w[n+m]\} = \sum_{n=0}^{L-1} w[n]w[n+m]\mathcal{E}\{x[n]x[n+m]\}. \quad (10.59)$$

Из предположения о стационарности процесса $x[n]$ получаем

$$\mathcal{E}\{x[n]x[n+m]\} = \varphi_{xx}[m]. \quad (10.60)$$

Поэтому формула (10.59) переписывается в виде:

$$\mathcal{E}\{c_{vv}[m]\} = c_{ww}[m]\varphi_{xx}[m], \quad (10.61)$$

где $c_{ww}[m]$ — аperiодическая автокорреляция окна:

$$c_{ww}[m] = \sum_{n=0}^{L-1} w[n]w[n+m]. \quad (10.62)$$

Из формул (10.58), (10.61) и теоремы о периодической свертке (с. 80) вытекает, что

$$\mathcal{E}\{I(\omega)\} = \frac{1}{2\pi LU} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\theta) C_{ww}(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta, \quad (10.63)$$

где $C_{ww}(e^{j\omega})$ — Фурье-образ аperiодической автокорреляции окна, т. е.

$$C_{ww}(e^{j\omega}) = |W(e^{j\omega})|^2. \quad (10.64)$$

Согласно формуле (10.63) (модифицированная) периодограмма является смещенной оценкой спектра мощности, так как $\mathcal{E}\{I(\omega)\}$ не совпадает с $P_{xx}(\omega)$. Действительно, мы видим, что смещение возникает в результате свертки истинного спектра мощности с Фурье-образом аperiодической автокорреляции окна данных. Увеличивая длину окна, мы ожидаем, что функция $W(e^{j\omega})$ будет концентрироваться в окрестности нулевой частоты, в связи с чем Фурье-образ $C_{ww}(e^{j\omega})$ станет все больше напоминать периодическую цепочку импульсов. Если нормирующий множитель $1/(LU)$ выбран правильно, то $\mathcal{E}\{I(\omega)\}$ приближается к P_{xx} при стремлении $W(e^{j\omega})$ к периодической цепочке импульсов. Подходящий нормирующий множитель U можно выбрать так, чтобы

$$\frac{1}{2\pi LU} \int_{-\pi}^{\pi} |W(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{LU} \sum_{n=0}^{L-1} (w[n])^2 = 1 \quad (10.65)$$

или

$$U = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} (w[n])^2. \quad (10.66)$$

Таким образом, в случае прямоугольного окна параметр U нужно брать равным 1. Если же оконная последовательность $w[n]$ обладает тем свойством, что ее максимальный отсчет равен 1, то константа U попадет в интервал $(0; 1)$. С другой стороны, нормализация может быть сделана за счет масштабирования отсчетов окна $w[n]$. Следовательно, при подходящем выборе множителя U (модифицированная) периодограмма будет асимптотически несмещенной, т. е. ее смещение стремится к нулю при возрастании длины окна.

Чтобы установить, относится ли периодограмма к состоятельным оценкам или становится таковой при стремлении длины окна к бесконечности, необходимо исследовать поведение ее дисперсии. Формулу, описывающую дисперсию периодограммы, очень трудно вывести даже в самом простом случае, но Джентинсу и Уоттсу [73] удалось показать, что в довольно общих предположениях при возрастании длины окна выполняется следующее приближенное равенство:

$$D[I(\omega)] \approx P_{xx}^2(\omega). \quad (10.67)$$

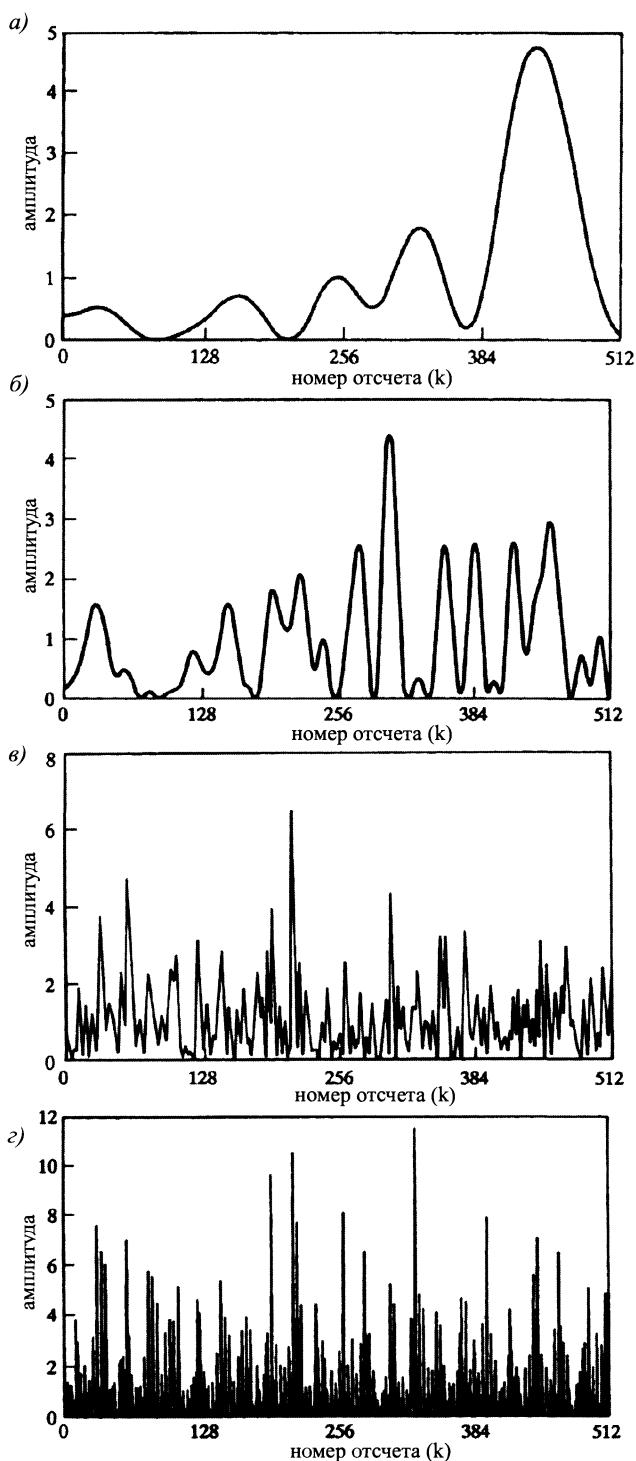
Таким образом, дисперсия периодограммы приблизительно равна квадрату спектра мощности, который мы, собственно, и пытаемся оценить с помощью периодограммы. Следовательно, поскольку дисперсия периодограммы не стремится к нулю с возрастанием длины окна, периодограмма не является состоятельной оценкой.

Свойства периодограммной оценки спектра мощности, о которых только что шла речь, иллюстрируются рис. 10.20, где показаны периодограммы белого шума, использующие прямоугольное окно длин $L = 16, 64, 256$ и 1024 . Последовательность $x[n]$ была получена с помощью генератора случайных чисел, чья выходная последовательность отнормирована так, что $|x[n]| \leq \sqrt{3}$. Хороший генератор выдает случайные числа с равномерно распределенной амплитудой, а корреляция между соседними отсчетами генерируемой последовательности очень мала. Поэтому спектр мощности выхода генератора случайных чисел можно в этом случае считать равным $P_{xx}(\omega) = \sigma_x^2 = 1$ при любых значениях ω . Для всех четырех прямоугольных окон при вычислении периодограмм нормализующую константу U брали равной 1, а число N при определении частот $\omega_k = 2\pi k/n$ всюду было равно 1024, так что

$$I[k] = I(\omega_k) = \frac{1}{L} |V[k]|^2 = \frac{1}{L} \left| \sum_{n=0}^{L-1} w[n] x[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \right|^2. \quad (10.68)$$

Значения ДПФ на рис. 10.20 для наглядности соединены непрерывной кривой. Напомним, что $I(\omega)$ является вещественнонезначной четной функцией от ω , поэтому достаточно изобразить ее отсчеты при $0 \leq k \leq N/2$, что соответствует промежутку частот $[0; \pi]$. Заметим, что при возрастании длины окна колебания спектральной оценки становятся более резкими. Такое поведение графиков объясняется тем, что в основе метода периодограмм лежит оценка корреляции (10.56), т. е., фактически, преобразование Фурье.

Рис. 10.20. Периодограммы псевдослучайной последовательности белого шума (число точек ДПФ $N = 1024$): а) длина окна $L = 16$; б) $L = 64$; в) $L = 256$; г) $L = 1024$



На рис. 10.21 представлен участок последовательности, вырезанный окном, $x[n]w[n]$, и его сдвинутая версия $x[n+m]w[n+m]$, участвующие в формуле (10.56). Из рисунка видно, что в вычисление частичной корреляции $c_{vv}[m]$ вовлечены $L - m - 1$ значения сигнала. Следовательно, при m , близких к L , последовательность $c_{vv}[m]$ зависит лишь от нескольких отсчетов сигнала $x[n]$. В связи с этим оценка корреляции получается очень грубой, с резким колебанием соседних отсчетов.

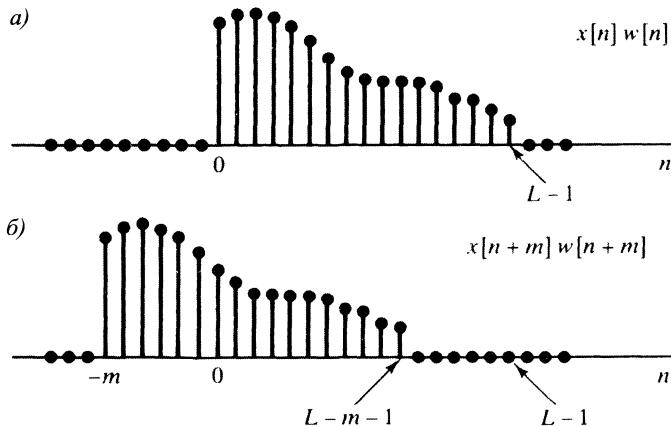


Рис. 10.21. Отсчеты последовательностей, участвующих в вычислении корреляции по формуле (10.56): а) конечная последовательность; б) сдвиг последовательности при $m > 0$

С другой стороны, при малых m на оценку корреляции влияет гораздо больше отсчетов сигнала, и поэтому колебания последовательности $c_{vv}[m]$ не столь значительны. Высокая частота колебаний при больших значениях проявляется в преобразовании Фурье как осциллирование во всех частотах. Значит, при больших L периодограмма тоже имеет тенденцию к быстрым колебаниям. Действительно, можно показать (см. [73]), что при $N = L$ периодограммные оценки в частотах ДПФ $2\pi k/N$ становятся некоррелированными. Так как при возрастании N частоты ДПФ оказываются близкими друг к другу, такое поведение периодограммы противоречит нашей цели получения хорошей оценки спектра мощности. Мы предложили бы гладкую спектральную оценку, в которой отсутствуют случайные колебания, возникающие из-за метода оценивания. Этого можно достичь, усредняя многочисленные независимые периодограммы.

10.7.3. Усреднение периодограмм

Усреднение периодограммных оценок спектра впервые исследовалось Барлеттом [5]. Позже, после открытия алгоритмов БПФ, Велш [158] использовал их для усреднения модифицированных периодограмм. При таком методе последовательность данных $x[n]$ ($0 \leq n \leq Q - 1$) разбивается на L -членные участки при помощи окна той же длины:

$$x_r[n] = x[rR + n]w[n], \quad 0 \leq n \leq L - 1. \quad (10.69)$$

Если $R < L$, участки перекрываются, а при $R = L$ вырезаются соседние отрезки последовательности. Заметим, что Q здесь обозначает длину исходной последовательности данных. Общее количество участков зависит как от значений R , L и Q , так и от соотношения между ними. Фактически, мы получаем K полных L -членных отрезка, где K — максимальное целое число, удовлетворяющее условию: $(K-1)R+(L-1) \leq Q-1$. Периодограмма r -го сегмента последовательности имеет вид:

$$I_r(\omega) = \frac{1}{LU} |X_r(e^{j\omega})|^2, \quad (10.70)$$

где $X_r(e^{j\omega})$ — ДВПФ отрезка $x_r[n]$ последовательности. Каждая из функций $I_r(\omega)$ обладает свойствами периодограммы, описанными ранее. Усреднение периодограмм заключается в вычислении среднего арифметического K периодограммных оценок:

$$\bar{I}(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{K-1} I_r(\omega). \quad (10.71)$$

Для исследования смещения и дисперсии усредненной периодограммы $\bar{I}(\omega)$ положим $U = R$, так, чтобы участки не перекрывались, и предположим, что значения автокорреляции $\varphi_{xx}[m]$ малы при $m > L$, т. е. отсчеты сигнала, отстоящие друг от друга более чем на L членов, почти не коррелируют. Тогда периодограммы $I_r(\omega)$ разумно считать независимыми случайными переменными с одним и тем же распределением. В этих предположениях ожидаемое значение $\bar{I}(\omega)$ равно

$$\mathcal{E}\{\bar{I}(\omega)\} = \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{K-1} \mathcal{E}\{I_r(\omega)\}, \quad (10.72)$$

или ввиду независимости и одинакового распределения периодограмм для каждого r имеет место тождество:

$$\mathcal{E}\{\bar{I}(\omega)\} = \mathcal{E}\{I_r(\omega)\}. \quad (10.73)$$

Из формулы (10.63) следует, что

$$\mathcal{E}\{\bar{I}(\omega)\} = \mathcal{E}\{I_r(\omega)\} = \frac{1}{2\pi LU} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\theta) C_{ww}(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta, \quad (10.74)$$

где L , напомним, — длина окна. Когда в качестве окна $w[n]$ выбирается прямоугольная последовательность, метод усреднения периодограмм называется *процедурой Барлетта*. В этом случае можно показать, что

$$c_{ww}[m] = \begin{cases} L - |m|, & |m| \leq L - 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (10.75)$$

откуда

$$C_{ww}(e^{j\omega}) = \left(\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \right)^2. \quad (10.76)$$

Иначе говоря, ожидаемое значение усредненной периодограммной оценки спектра совпадает со сверткой истинного спектра мощности с Фурье-образом треугольной последовательности $c_{ww}[n]$ — автокорреляции прямоугольного окна.

Для вычисления дисперсии используется тот факт, что дисперсия среднего арифметического K независимых одинаково распределенных случайных величин равна произведению дисперсии любой из них (они равны между собой) на множитель $1/K$ (см. [112]). Следовательно,

$$D[\bar{I}(\omega)] = \frac{1}{K} D[I_r(\omega)], \quad (10.77)$$

или, учитывая (10.67),

$$D[\bar{I}(\omega)] \approx \frac{1}{K} P_{xx}^2(\omega). \quad (10.78)$$

Таким образом, дисперсия усреднения $\bar{I}(\omega)$ обратно пропорциональна числу усредняемых периодограмм и стремится к нулю с его ростом.

Из (10.76) вытекает, что при возрастании числа членов L вырезаемого участка $x_r[n]$ ширина главного лепестка $C_{ww}(e^{j\omega})$ уменьшается, в связи с чем величина $\mathcal{E}\{\bar{I}(\omega)\}$ будет лучше аппроксимировать $P_{xx}(\omega)$ (см. (10.74)). Однако при фиксированном общем числе членов Q исходной последовательности суммарное число участков (в предположении равенства $L = R$) равно Q/L . Значит, при росте L количество участков K убывает, что, согласно приближенному равенству (10.78), ведет к увеличению дисперсии $\bar{I}(\omega)$. Иными словами, при фиксированном объеме исходных данных изменение смещения индуцирует вариацию дисперсии, что является типичным в статистических методах оценки. С другой стороны, увеличение объема Q ведет к увеличению и L , и K . Поэтому при стремлении Q к бесконечности как смещение, так и дисперсия оценки $\bar{I}(\omega)$ стремится к нулю. Отсюда можно сделать вывод о том, что усредненная периодограмма является асимптотически несмещенной оценкой спектра мощности $P_{xx}(\omega)$.

Выше мы предполагали, что при вычислении зависящих от времени периодограмм использовались неперекрывающиеся прямоугольные окна. Велш [158] показал, что, если привлекать окна разной формы, поведение дисперсии усредненной периодограммы все равно подчиняется формуле (10.78). Исследуя случай перекрывающихся окон, он доказал, что если величина перекрытия составляет половину длины окна, то дисперсия уменьшается почти в два раза за счет удвоенного количества получающихся участков. Но дальнейшее увеличение перекрытий не дает уменьшения дисперсии, поскольку соседние участки становятся все более зависимыми.

10.7.4. Вычисление усредненных периодограмм через ДПФ

Значения усредненной периодограммы поддаются явному вычислению лишь в конечном наборе частот, как и в случае простых периодограмм. Действительно, заменив в формуле (10.70) Фурье-образ участка $x_r[n]$ его ДПФ, мы получим отсчеты усредненной периодограммы $\bar{I}(\omega)$ в точках $\omega_k = 2\pi k/N$ при $k = 0, 1, \dots, N-1$. Более точно, если $X_r[k]$ — ДПФ последовательности $x_r[n]$, то

$$I_r[k] = I_r(\omega_k) = \frac{1}{LU} |X_r[k]|^2, \quad (10.79)$$

$$\bar{I}_r[k] = \bar{I}_r(\omega_k) = \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{K-1} I_r[k]. \quad (10.80)$$

Формулы (10.79) и (10.80) выражают значения усредненной периодограммной оценки спектра мощности в N равномерно распределенных частотах через усреднение ДПФ участков сигнала, вырезанных окном, с нормализующим множителем LU . Такой метод оценки спектра мощности обеспечивает разумный компромисс между разрешающей способностью и дисперсией спектральной оценки. Он достаточно прост и эффективен при реализации с помощью алгоритмов БПФ, описанных в главе 9. К одному из важных преимуществ метода перед остальными (которые будут обсуждаться в § 10.8) относится неотрицательность получающейся спектральной оценки.

10.7.5. Пример периодограммного анализа

Анализ спектра мощности — очень полезный инструмент моделирования сигналов. Кроме того, его используют для обнаружения сигналов, в особенности когда необходимо выявить скрытую периодичность в дискретизованном сигнале. В качестве примера приложения метода усредненной периодограммы рассмотрим последовательность

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \theta) + e[n], \quad (10.81)$$

где θ — случайная переменная, равномерно распределенная между 0 и 2π , а $e[n]$ — последовательность белого шума с нулевым математическим ожиданием и постоянным спектром мощности, т. е. $P_{ee}(\omega) = \sigma_e^2$ при всех ω . В моделях такого типа гармоническая компонента сигнала желательна (собственно ее и нужно выделить из сигнала), а шумовая — нежелательна и ее предстоит отфильтровать. Обычно при практическом обнаружении сигнала нас интересует ситуация, когда мощность гармонической составляющей мала по сравнению с мощностью шума. Можно показать (см. задачу 10.34), что спектр мощности сигнала над одним периодом имеет вид:

$$P_{xx}(\omega) = \frac{A^2 \pi}{2} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) + \sigma_e^2, \quad |\omega| \leq \pi. \quad (10.82)$$

Из формул (10.74) и (10.82) следует, что ожидаемое значение усредненной периодограммы равно

$$\mathcal{E}\{\bar{I}(\omega)\} = \frac{A^2}{4LU} \left(C_{ww}(e^{j(\omega-\omega_0)}) + C_{ww}(e^{j(\omega+\omega_0)}) \right) + \sigma_e^2. \quad (10.83)$$

Рисунки 10.22 и 10.23 иллюстрируют метод усреднения на примере сигнала вида (10.81) с $A = 0,5$, $\omega_0 = 2\pi/21$ и случайной фазой из полуинтервала $0 \leq \theta < 2\pi$. Амплитуда шума $e[n]$ равномерно распределена на промежутке $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Следовательно, можно показать, что $\sigma_e^2 = 1$. По предположению математическое ожидание шумовой компоненты равно нулю. На рис. 10.22 представлен 101 отсчет последовательности $x[n]$. Так как максимум амплитуды шумовой компоненты равен $\sqrt{3}$, то гармоническая компонента сигнала на рисунке не видна.

На рис. 10.23 изображена усредненная периодограммная оценка спектра мощности, вычисленная с помощью прямоугольного окна амплитуды 1, так что $U = 1$, длины $L = 1024, 256, 64$ и 16 , причем количество отсчетов сигнала во всех случаях равно $Q = 1024$. За исключением рис. 10.23, a), перекрытие участков сигнала, вырезанных окном, составляет половину длины окна. При вычислении периода-

грамм из рис. 10.23, а) исходная последовательность не делилась на участки, поскольку длина окна там совпадает с количеством членов входной последовательности, а рис. 10.23, б)-г) показывают периодограммы $K = 7, 31$ и 127 участков последовательности соответственно. В каждом из случаев периодограмма вычислялась с помощью 1024-точечного ДПФ в частотах $\omega = 2\pi k/1024$. (Когда длина окна $L < 1024$, участок сигнала, вырезанный окном, перед вычислением ДПФ продолжался нулем.) Следовательно, частота гармонической компоненты сигнала $\omega_0 = 2\pi/21$ попадает между ДПФ-частотами $\omega_{48} = 2\pi 48/1024$ и $\omega_{49} = 2\pi 49/1024$.

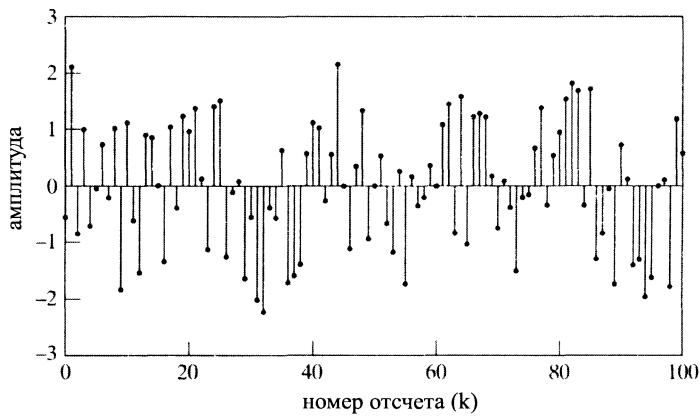


Рис. 10.22. Синусоидальная последовательность с компонентой белого шума из формулы (10.81)

При таких оценках спектра мощности для обнаружения гармонической компоненты и/или вычисления ее частоты мы можем искать максимальные экстремумы спектральной оценки и сравнивать их размер с близлежащими значениями спектра. Основываясь на (10.76) и (10.83), мы ожидаем, что значение усредненной периодограммы при частоте ω_0 будет равно

$$\mathcal{E}\{\bar{I}(\omega_0)\} = \frac{A^2 L}{4} + \sigma_e^2. \quad (10.84)$$

Таким образом, чтобы выделить всплеск периодограммы, обязанный своим присутствием синусоидальной компоненте, в этом специальном случае мы должны выбрать L так, чтобы $A^2 L / 4 \gg \sigma_e^2$. Такой выбор иллюстрируется рис. 10.23, а), где L настолько велико, что совпадает с длиной записи сигнала Q . Мы видим, что $L = 1024$ дает очень узкий главный лепесток Фурье-образа автокорреляции прямоугольного окна, так что у нас возникает возможность обнаружить тесно расположенные частоты синусоидальных сигналов. Заметим, что в этом примере ($A = 0,5$, $\sigma_e^2 = 1$ и $L = 1024$) всплеск амплитуды периодограммы при частоте $2\pi/21$ близок, но не совпадает с ожидаемым значением 65. На рисунке также видны дополнительные пики периодограммы, амплитуда которых превышает 10. Ясно, что если амплитуда гармонической компоненты A была бы меньше всего лишь в два раза, то, скорее всего, пик периодограммы, соответствующий этой компоненте, не удалось бы выделить.

Мы убедились, что существует единственный гарантированный способ уменьшения дисперсии спектральной оценки — увеличение длины записи сигнала. Это

не всегда осуществимо, и даже если возможно, большая длина требует большей обработки. Можно уменьшить колебания оценки при фиксированной длине записи, если брать более короткие окна и усреднять большее число участков.

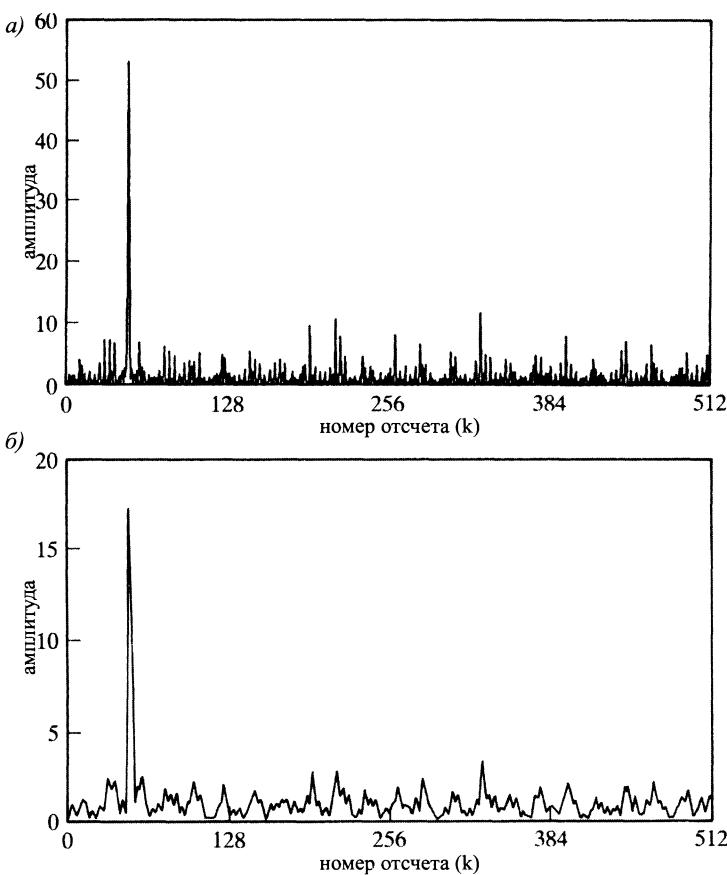


Рис. 10.23. Примеры усредненной периодограммы сигнала длины $Q = 1024$: а) длина окна $L = Q = 1024$ (только один участок сигнала); б) $K = 7$ и $L = 256$ (перекрытие участков составляет $L/2$)

Стоимость этого подхода видна на рис. 10.23, б)-г). Заметим, что большое количество усредняемых участков сигнала, конечно, ведет к уменьшению дисперсии, но при этом, согласно (10.84), уменьшается амплитуда пика оценки, отвечающего гармонической составляющей, т. е. мы вновь сталкиваемся с проблемой компромисса. Тот факт, что уменьшение длины окна ведет к снижению колебаний спектральной оценки, хорошо заметен при сравнении верхнечастотных областей, далеко отстоящих от пика, на рис. 10.23, а)-в). Напомним, что идеализированный спектр мощности модели псевдослучайного генератора шума постоянен ($\sigma_e^2 = 1$) на всех частотах. На рис. 10.23, а) присутствуют пики, амплитуда которых равна примерно 10, в то время как у истинного спектра она 1. На рис. 10.23, б) амплитуда колебаний графика отличается от 1 не более чем на 3, а

на рис. 10.23, *в*) — не более чем на 0,5. Однако укорачивание окон ведет к уменьшению амплитуды любой узкополосной составляющей, и возможность различать близкие гармоники тоже уменьшается. Изменение амплитуды синусоидальной компоненты также хорошо прослеживается на рис. 10.23. Если бы амплитуда синусоиды A была бы в два раза меньше, высота пика на рис. 10.23, *б*) равнялась бы примерно 4, что почти не отличается от многих других всплесков спектральной оценки при больших частотах. В случае рис. 10.23, *в*) уменьшение A в два раза редуцирует амплитуду важного всплеска до 1,25, делая его неотличимым от остальных колебаний оценки. В ситуации, отраженной на рис. 10.23, *г*), окно очень коротко, в связи с чем колебания спектральной оценки сильно сглажены, но пик, относящийся к синусоидальной составляющей, очень широк и едва превышает уровень шума даже при $A = 0,5$. При любой меньшей длине окна спектральное рассеяние, вызываемое компонентами с отрицательными частотами, создает непреодолимые препятствия к различению пиков в области низких частот.

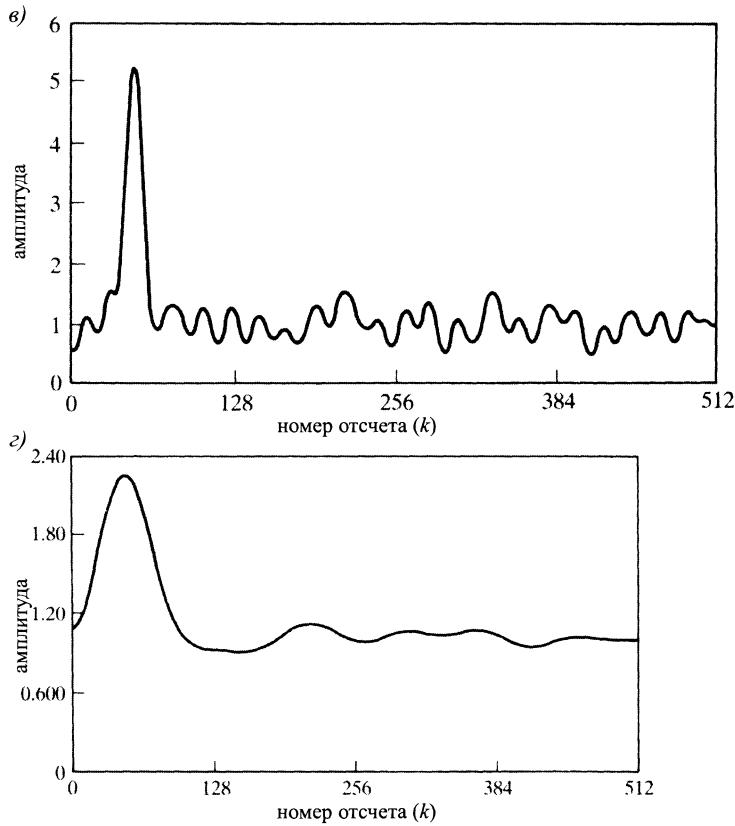


Рис. 10.23 (окончание). *в*) $K = 31$ и $L = 64$; *г*) $K = 127$ и $L = 16$

Разобранный пример подтверждает, что усредненная периодограмма дает прямой метод поиска компромисса между спектральным разрешением и умень-

шением дисперсии спектральной оценки. Несмотря на то что целью примера было выделение синусоидальной составляющей из шума, усредненная периодограмма может быть также использована при моделировании сигналов. Спектральные оценки, представленные на рис. 10.23, ясно говорят о модели сигнала вида (10.81), а большинство параметров модели можно оценивать, исходя из усредненной периодограммы спектра мощности.

10.8. Спектральный анализ случайных сигналов с помощью оценки автокорреляционной функции

В предыдущем параграфе мы познакомились с периодограммой, т. е. прямой оценкой спектра мощности случайного сигнала. Периодограмма, или усредненная периодограмма, является прямой оценкой в том смысле, что получается непосредственно через преобразование Фурье отсчетов случайного сигнала. Другой подход к оценке спектра основывается на том факте, что спектральная плотность мощности — это преобразование Фурье автокорреляционной функции $\varphi_{xx}[m]$. Поэтому сначала оценивают автокорреляцию сигнала, а затем находят преобразование Фурье полученной оценки. В этом параграфе мы изучаем некоторые из важных моментов такого подхода и показываем, как можно применить ДПФ при его реализации.

Итак, предположим, как и раньше, что нам дана конечная запись случайного сигнала $x[n]$. Обозначим ее через

$$v[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq Q-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (10.85)$$

Рассмотрим оценку автокорреляционной последовательности:

$$\hat{\varphi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q} c_{vv}[m], \quad (10.86)$$

где ввиду тождества $c_{vv}[-m] = c_{vv}[m]$ последовательность

$$c_{vv}[m] = \sum_{n=0}^{Q-1} v[n]v[n+m] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{Q-|m|-1} x[n]x[n+|m|], & |m| \leq Q-1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (10.87)$$

соответствует аperiодической автокорреляции участка сигнала $x[n]$, вырезанного прямоугольным окном.

Чтобы определить свойства этой оценки автокорреляционной последовательности, найдем математическое ожидание и дисперсию случайной переменной $\hat{\varphi}_{xx}[m]$. Из формул (10.86) и (10.87) следует, что

$$\mathcal{E}\{\hat{\varphi}_{xx}[m]\} = \frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{Q-|m|-1} \mathcal{E}\{x[n]x[n+|m|]\} = \frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{Q-|m|-1} \varphi_{xx}[m], \quad (10.88)$$

а поскольку $\varphi_{xx}[m]$ не зависит от n при стационарном случайном процессе, то

$$\mathcal{E}\{\hat{\varphi}_{xx}[m]\} = \begin{cases} \frac{Q-|m|}{Q} \varphi_{xx}[m], & |m| \leq Q-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (10.89)$$

Из формулы (10.89) видно, что $\hat{\varphi}_{xx}[m]$ является смещенной оценкой последовательности $\varphi_{xx}[m]$, поскольку $\mathcal{E}\{\hat{\varphi}_{xx}[m]\}$ не совпадает с $\varphi_{xx}[m]$, но при $|m| \ll Q$ смещение мало. Кроме того, несмещенная оценочная функция автокорреляционной последовательности при $|m| \leq Q - 1$ имеет вид:

$$\check{\varphi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q - |m|} c_{vv}[m], \quad (10.90)$$

т. е. оценка не смещается, если в качестве делителя брать не общее число отсчетов записи, а число ненулевых членов суммы задержанных произведений.

Точную дисперсию оценки автокорреляционной функции вычислить трудно даже при упрощающих предположениях. Но приближенные формулы дисперсии, как $\hat{\varphi}_{xx}[m]$, так и $\check{\varphi}_{xx}[m]$, можно найти в [73]. Нам же для наших целей достаточно заметить, что при стремлении $|m|$ к Q участвует все меньшее количество отсчетов сигнала $x[n]$, и поэтому можно ожидать увеличения дисперсии автокорреляционной оценке с ростом $|m|$. В случае периодограмм это увеличение дисперсии оказывается на спектральной оценки при всех частотах, так как все задержанные значения автокорреляции вовлечены в вычисление периодограммы. Однако при явном вычислении оценки автокорреляции мы свободны выбирать задержанные значения автокорреляционной последовательности, которые дают вклад в оценку спектра мощности. В связи с этим определим оценку спектра мощности как

$$S(\omega) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \hat{\varphi}_{xx}[m] w_c[m] e^{-j\omega m}, \quad (10.91)$$

где $w_c[m]$ — симметричное окно длины $(2M - 1)$, применяемое для оценки автокорреляционной функции. Потребуем четности произведения автокорреляционной последовательности и окна при вещественноненулевом сигнале $x[n]$, с тем чтобы оценка спектра мощности была бы вещественной четной функцией переменной ω . Тогда окно должно быть четной последовательностью. Ограничиваая длину окна условием $M \ll Q$, мы будем учитывать оценку автокорреляции с малой дисперсией.

Механизм, благодаря которому обработка окном автокорреляционной последовательности уменьшает дисперсию оценки спектра мощности, лучше всего понять в частотной области. Из формул (10.55), (10.56) и (10.87) следует, что если $w[n] = 1$ при $0 \leq n \leq Q - 1$, т. е. окно имеет прямоугольную форму, то периодограмма является Фурье-образом автокорреляционной оценки $\hat{\varphi}_{xx}[m]$:

$$\hat{\varphi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q} c_{vv}[m] \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{Q} |V(e^{j\omega})|^2 = I(\omega). \quad (10.92)$$

Следовательно, ввиду (10.91) спектральная оценка, полученная через умножение на окно последовательности $\hat{\varphi}_{xx}[m]$, является сверткой:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(\theta) W_c(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta. \quad (10.93)$$

Отсюда видно, что эффект применения окна $w_c[m]$ к автокорреляционной оценке состоит в сворачивании периодограммы с Фурье-образом окна. Это сглаживает

колебания периодограммной оценки спектра мощности. Чем короче окно, тем более гладким будет спектральная оценка, и наоборот.

Напомним, что спектр мощности $P_{xx}(\omega)$ — неотрицательная функция частоты, а периодограмма, как и усредненная периодограмма, обладает этим свойством автоматически согласно определению. С другой стороны, из (10.93) становится очевидным, что неотрицательность значений $S(\omega)$ не гарантирована, если не ввести дополнительных ограничений:

$$W_c(e^{j\omega}) \geq 0, \quad \text{при } -\pi < \omega \leq \pi. \quad (10.94)$$

Этому условию удовлетворяют Фурье-образ треугольного окна (Барлетта), а Фурье-образы прямоугольного окна, как и окон Хеннинга, Хемминга и Кайзера, не удовлетворяют. Поэтому, несмотря на то что эти последние окна обладают меньшими боковыми лепестками, чем треугольное, рассеяние при их применении может привести к отрицательным значениям спектральной оценки в низких частотах.

Ожидаемое значение сглаженной периодограммы выглядит как

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{S(\omega)\} &= \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \mathcal{E}\{\hat{\varphi}_{xx}[m]\} w_c[m] e^{-j\omega m} = \\ &= \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \varphi_{xx}[m] \frac{Q - |m|}{Q} w_c[m] e^{-j\omega m}. \end{aligned} \quad (10.95)$$

Если $Q \gg M$, то членом $(Q - |m|)/Q$ в формуле (10.95) можно пренебречь¹ и получить

$$\mathcal{E}\{S(\omega)\} \approx \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \varphi_{xx}[m] w_c[m] e^{-j\omega m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\theta) W_c(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta. \quad (10.96)$$

Таким образом, автокорреляционная оценка, найденная с помощью окна, дает смещенную оценку спектра мощности. Как и в случае усредненных периодограмм, при фиксированной длине записанных данных возможно увеличение разрешения спектральной оценки за счет увеличения дисперсии, и наоборот. Если у нас есть возможность наблюдать сигнал достаточно долго (т. е. увеличить параметр Q), то можно улучшить как разрешение, так и дисперсию. Спектральная оценка $S(\omega)$ становится асимптотически несмещенной, если окно нормализовано так, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_c(e^{j\omega}) d\omega = 1 = w_c[0]. \quad (10.97)$$

В этом случае при одновременном росте длин записи сигнала и окна Фурье-образ $W(e^{j\omega})$ приближается к периодической цепочке импульсов, и свертка (10.96) практически совпадает со спектром мощности $P_{xx}(\omega)$.

¹Точнее говоря, можно определить эффективное окно как $w_e[m] = w_c[m](Q - |m|)/Q$.

Можно показать (см. [73]), что дисперсия оценки $S(\omega)$ имеет вид:

$$D[S(\omega)] \approx \left(\frac{1}{Q} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} w_c^2[m] \right) P_{xx}(\omega). \quad (10.98)$$

Сравнивая аппроксимацию (10.98) с аналогичным результатом (10.67), полученным для периодограмм, заключаем, что для уменьшения дисперсии спектральной оценки нам следует выбирать длину окна M и его форму, руководствуясь неравенством (10.94), чтобы максимально уменьшить множитель

$$\left(\frac{1}{Q} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} w_c^2[m] \right). \quad (10.99)$$

В задаче 10.29 вычисляется это редуцирование дисперсии для нескольких стандартных окон.

Оценка спектра мощности, основанная на Фурье-образе оценки автокорреляционной функции, служит альтернативой метода периодограмм. Нельзя сказать, какой из методов лучше: они просто имеют разные возможности и реализации. В некоторых ситуациях возникает необходимость вычисления оценок как автокорреляционной функции, так и спектра мощности. Ясно, что при этом логичнее использовать подход, освещенный в данном параграфе. В задаче 10.37 исследуется вопрос о вычислении автокорреляционной оценки по усредненной периодограмме.

10.8.1. Вычисление корреляции и оценка спектра мощности с помощью ДПФ

Напомним, что оценка автокорреляции

$$\hat{\varphi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{Q-|m|-1} x[n]x[n+m] \quad (10.100)$$

при $|m| \leq M - 1$ участвует в только что разобранном методе оценки спектра мощности. Ввиду четности последовательности: $\hat{\varphi}_{xx}[-m] = \hat{\varphi}_{xx}[m]$, сумму (10.100) достаточно вычислить только для неотрицательных значений m , т. е. для $0 \leq m \leq M - 1$. ДПФ и связанные с ним алгоритмы БПФ можно использовать для эффективного вычисления $\hat{\varphi}_{xx}[m]$, если заметить, что эта последовательность является аperiодической дискретной сверткой конечных последовательностей $x[n]$ и $x[-n]$. Найдя N -точечное ДПФ $X[k]$ последовательности $x[n]$ и умножив его на $X^*[k]$, мы получим $|X[k]|^2$, что соответствует циклической свертке конечной последовательности $x[n]$ с $x[((-n))_N]$, т. е. циклической автокорреляции. Как мы отмечали в § 8.8 и как доказывается в задаче 10.27, последовательность $x[n]$ можно продолжить нулем и вычислять циклическую автокорреляцию на промежутке $0 \leq m \leq M - 1$ как аperiодическую.

Чтобы подобрать количество точек N ДПФ, обратим внимание на рис. 10.24. На рис. 10.24, a) изображены две последовательности $x[n]$ и $x[n+m]$ при некоторых положительных значениях m . Последовательности $x[n]$ и $x[((n+m))_N]$, участвующие в вычислении циклической автокорреляции, соответствующей квад-

рату $|X[k]|^2$, приведены на рис. 10.24, б). Ясно, что циклическая автокорреляция будет совпадать с $Q\hat{\phi}_{xx}[m]$ при $0 \leq m \leq M - 1$, если $x[((n+m))_N]$ не закручивается и не перекрываетяется с $x[n]$ при $0 \leq m \leq M - 1$. Из рис. 10.24, б) следует, что это условие будет соблюдено при $N - (M - 1) \geq Q$, или $N \geq Q + M - 1$.

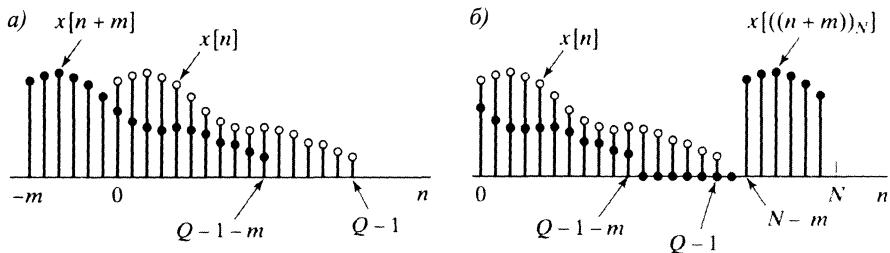


Рис. 10.24. Вычисление циклической автокорреляции: а) отсчеты $x[n]$ и $x[n+m]$ для конечной последовательности длины Q ; б) отсчеты $x[n]$ и $x[((n+m))_N]$, участвующие в определении циклической автокорреляции

Таким образом, значения $\hat{\phi}_{xx}[m]$ при $0 \leq m \leq M - 1$ можно вычислять по следующей схеме

1. Увеличиваем длину последовательности $x[n]$, продолжая ее $(M - 1)$ нулевыми отсчетами.
2. Вычисляем N -точечное ДПФ

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}, \quad 0 \leq k \leq N - 1.$$

3. Находим

$$|X[k]|^2 = X[k]X^*[k], \quad 0 \leq k \leq N - 1.$$

4. Применяя обратное ДПФ к $|X[k]|^2$, получаем

$$\tilde{c}_{vv}[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 e^{j(2\pi/N)km}, \quad 0 \leq m \leq M - 1.$$

5. Делим вычисленную последовательность на Q и приходим к автокорреляционной оценке

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q} \tilde{c}_{vv}[m], \quad 0 \leq m \leq M - 1.$$

На отрицательные значения m эта оценка распространяется по симметрии.

При малом M более эффективным может оказаться прямое вычисление формулы (10.100). В этом случае количество арифметических операций пропорционально произведению QM . С другой стороны, если ДПФ в этом алгоритме вычислять с помощью одного из алгоритмов БПФ, описанных в главе 9, с $N \geq Q + M - 1$, где N — степень двойки, то сложность всей процедуры будет пропорциональна $N \log_2 N$. Следовательно, при достаточно больших значениях M привлечение алгоритмов БПФ оказывается более выгодным, нежели прямое

вычисление (10.100). Точное пограничное значение M будет зависеть от конкретной реализации вычисления ДПФ, однако, как показал Стокхэм [147], это значение, скорее всего, будет меньше сотни.

Необходимо помнить, что для уменьшения дисперсии оценки автокорреляционной последовательности или оценки спектра мощности мы должны использовать большие значения длины записи Q . В этих случаях эффективное вычисление ($N = Q + M - 1$)-точечного ДПФ может оказаться неудобным или даже невозможным. Но обычно M много меньше Q . Поэтому имеет смысл разбивать последовательность $x[n]$ на участки, как описано в подразделе 8.8.3, где обсуждалась свертка конечной импульсной характеристики с входной последовательностью неопределенной длины. Рэйдер [127] предлагает особенно эффективную и гибкую процедуру, в которой многочисленные свойства ДПФ вещественноизначной последовательности позволяют уменьшить общий объем вычислений. Эта технология разбирается в задаче 10.38.

Как только автокорреляционная оценка будет найдена, можно вычислить отсчеты спектральной оценки $S(\omega)$ в частотах $\omega_k = 2\pi k/N$ и сформировать последовательность

$$s[m] = \begin{cases} \hat{\varphi}_{xx}[m]w_c[m], & 0 \leq m \leq M-1, \\ 0, & M \leq m \leq N-M, \\ \hat{\varphi}_{xx}[N-m]w_c[N-m], & N-M+1 \leq m \leq N-1, \end{cases} \quad (10.101)$$

где $w_c[m]$ — симметричное окно. ДПФ последовательности $s[m]$ получается как

$$S[k] = S(\omega) \Big|_{\omega=2\pi k/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (10.102)$$

где $S(\omega)$ — Фурье-образ автокорреляционной последовательности, обработанной окном, из формулы (10.91). Заметим, что N можно выбирать настолько большим, насколько это удобно и выгодно, обеспечивая необходимое расстояние между частотами отсчетов $S[k]$. Тем не менее частотная разрешимость всегда определяется длиной и формой окна $w_c[m]$.

10.8.2. Пример оценки спектра мощности, основанной на оценке автокорреляционной последовательности

В главе 4 мы предполагали, что ошибки квантования представляют собой случайный процесс белого шума. Методику, описанную в этом параграфе, можно использовать для иллюстрации обоснованности такого предположения, оценивая автокорреляционную последовательность и спектр мощности шума квантования.

Рассмотрим эксперимент, изображенный на рис. 10.25. После дискретизации с частотой 10 кГц пропущенного через фильтр нижних частот речевого сигнала $x_c(t)$ получается последовательность $x[n]$. (Несмотря на то что отсчеты $x[n]$ были проквантованы АЦП до 12 битов, в целях эксперимента будем предполагать, что эти отсчеты неквантованы.) Все отсчеты последовательности $x[n]$ отмасштабированы так, что $|x[n]| \leq 16000$. После квантования отсчетов последовательности $x[n]$ 8-битовым линейным квантователем вычисляется ошибка квантования $e[n] = Q[x[n]] - x[n]$, как показано на рис. 10.25. Четыреста последовательных

отсчета речевого сигнала представлены на рис. 10.26, а), а ошибка квантования изображена на рис. 10.26, б). (Для лучшего восприятия все отсчеты на рисунке соединены гладкой огибающей.) Сравнение рисунков подтверждает правдоподобность наших предположений, однако выяснить, насколько спектр шума квантования является плоским, можно лишь вычислив оценку спектра мощности шума $e[n]$.

Рис. 10.25. Процедура генерирования последовательности шума квантования

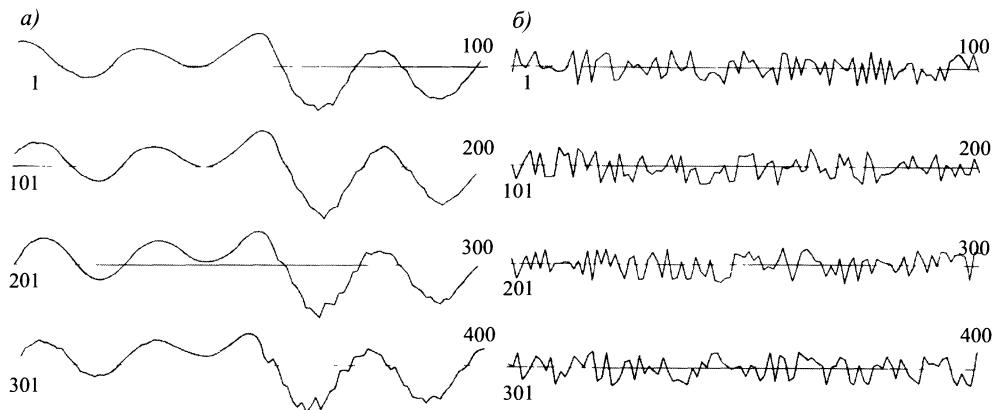
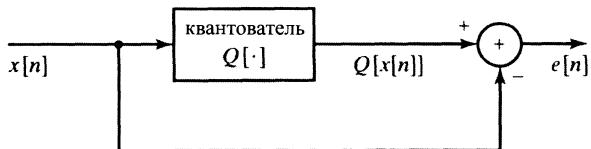


Рис. 10.26. а) речевой сигнал; б) ошибки 8-битового квантования речевого сигнала (увеличенные в 66 раз по сравнению с масштабом п. а)). Каждый участок рисунка соответствует 100 последовательным отсчетам, соединенных для наглядности непрерывной кривой

Оценки нормализованной автокорреляции и спектра мощности шума квантования длины $Q = 2000$ отсчетов приведены на рис. 10.27. Перед вычислением оценки автокорреляции с $M = 512$ из последовательности $e[n]$ вычли оценку ее математического ожидания. Полученную автокорреляционную оценку разделили на $\hat{\varphi}_{ee}[0]$, чтобы найти нормализованную оценку $\hat{\rho}_{ee}[m] = \hat{\varphi}_{ee}[m]/\hat{\varphi}_{ee}[0]$, изображенную на рис. 10.27, а) и б). Заметим, что значение нормализованной автокорреляции при $m = 0$ равно 1,0, а в остальных точках много меньше. Действительно, $-0,0548 \leq \hat{\rho}_{xx}[m] \leq 0,0579$ при $1 \leq m \leq 512$. Этот факт тоже подтверждает наше предположение о некоррелированности разных отсчетов последовательности ошибок.

Спектр мощности шума оценивался с привлечением окна Барлетта длины $M = 512$, как об этом рассказывалось в подразделе 10.8.1. Итоговая оценка в децибелах, изложенная на рис. 10.27, представляет собой довольно хаотичные колебания в окрестности 0 дБ (значения нормализованного спектра мощности белого шума).

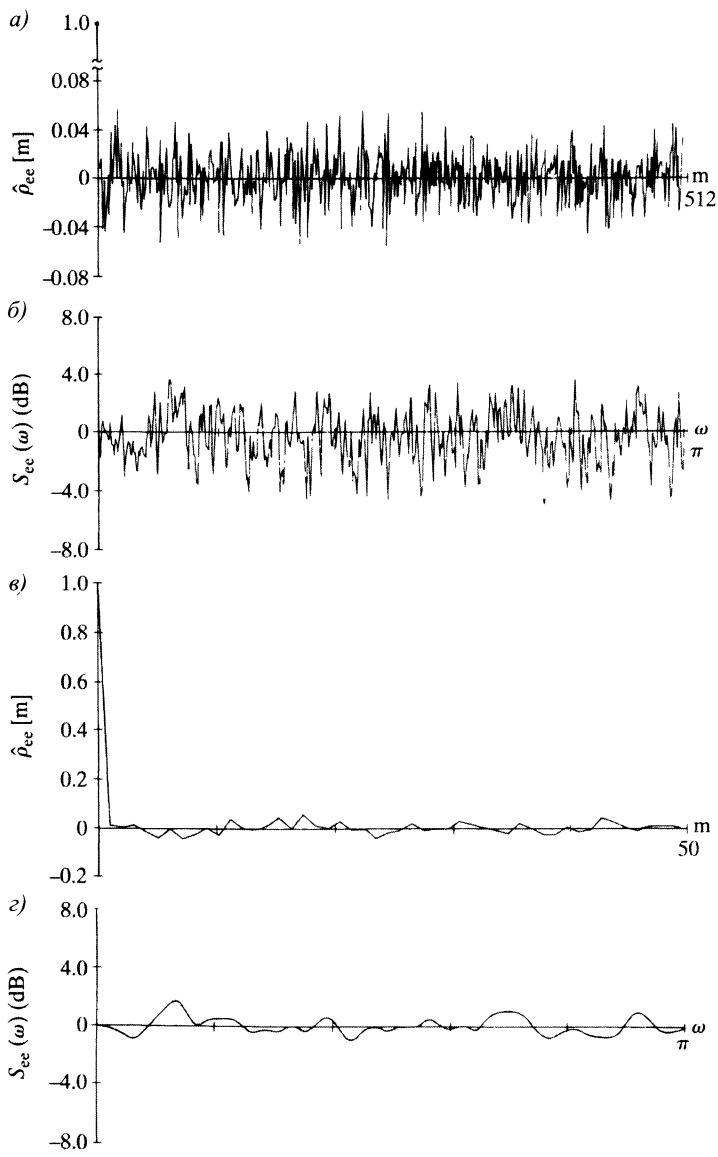


Рис. 10.27. Шум 8-битового квантования (длина записи $Q = 2000$): а) Нормализованная автокорреляционная оценка; б) оценка спектра мощности, полученная с помощью окна Барлетта длины $M = 512$; в) нормализованная оценка автокорреляции на отрезке $0 \leq m \leq 50$; г) оценка спектра мощности, полученная с помощью окна Барлетта длины $M = 50$

Более гладкая оценка показана на рис. 10.27, г). В этом случае длина используемого окна Барлетта была равна 50. Такая гладкость оценки, соответствующая ухудшению разрешения, отчетливо видна при сравнении рис. 10.27, б) и г). Все значения спектральной оценки на рис. 10.27, г) находятся между $-1,097$

и $+1,631$ дБ, что опять подтверждает наши предположения, принятые в модели шума квантования.

Несмотря на то что мы нашли количественную оценку автокорреляции и спектра мощности, интерпретация полученных результатов может быть только качественной. Возникает естественный вопрос: насколько малой окажется автокорреляция, если $e[n]$ действительно является белым шумом? Для обоснованного ответа на этот вопрос можно было бы вычислить доверительные интервалы наших оценок и применить статистические методы. (В [73] приведены некоторые конкретные тесты для белого шума.) Во многих случаях, однако, привлечение статистики излишне. На практике нам удобнее просто установить, что все значения нормализованной автокорреляции, кроме нулевого, достаточно малы, причем этой информации вполне достаточно.

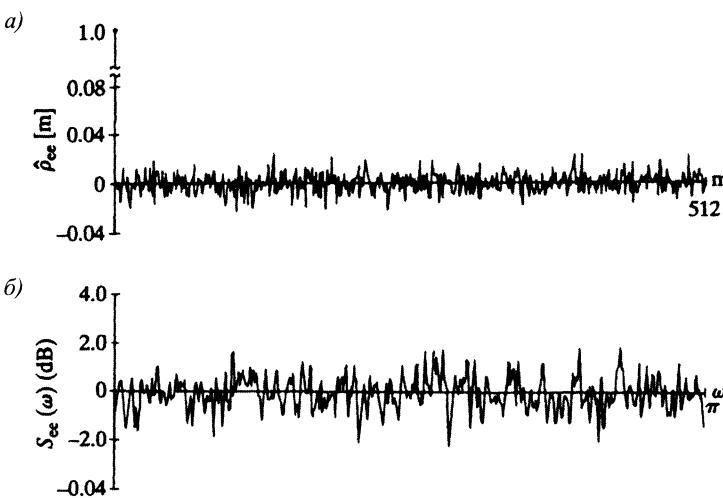


Рис. 10.28. Шум 8-битового квантования (длина записи $Q = 14\,000$): а) нормализованная оценка автокорреляции 8-битового шума квантования (длина записи $Q = 14\,000$); б) оценка спектра мощности, полученная с окном Барлетта длины $M = 512$

К одному из важных моментов, установленных в этой главе, относится тот факт, что оценки автокорреляции и спектра мощности стационарного случайного процесса можно уточнить, увеличив длину его записи. Это высказывание иллюстрируется на рис. 10.28, который соответствует рис. 10.27, за исключением того, что длина записи в нем увеличена до $Q = 14\,000$ отсчетов. Напомним, что дисперсия оценки автокорреляции обратно пропорциональна длине записи. Значит, увеличение Q с 2000 до 14 000 должно привести к семикратному уменьшению дисперсии. Сравнивая рис. 10.27, а) и 10.28, а), можно убедиться в истинности замечания. При $Q = 2000$ оценка колеблется между $-0,0548$ и $+0,0579$, в то время как при $Q = 14\,000$ пределы ее изменения — $-0,0254$ и $+0,0231$, т. е. дисперсия действительно уменьшилась в 7 раз². Заметим, что ввиду формулы (10.99) сле-

²Напомним, что уменьшение дисперсии в 7 раз соответствует уменьшению амплитуды в $\sqrt{7} \approx 2,65$ раза.

дует ожидать и снижение дисперсии спектральной оценки, в чем легко убедиться при сравнении рисунков 10.27 б) и г) и 10.28 б) и г). (Имейте в виду, что масштаб рисунков из п. б) и г) разный.)

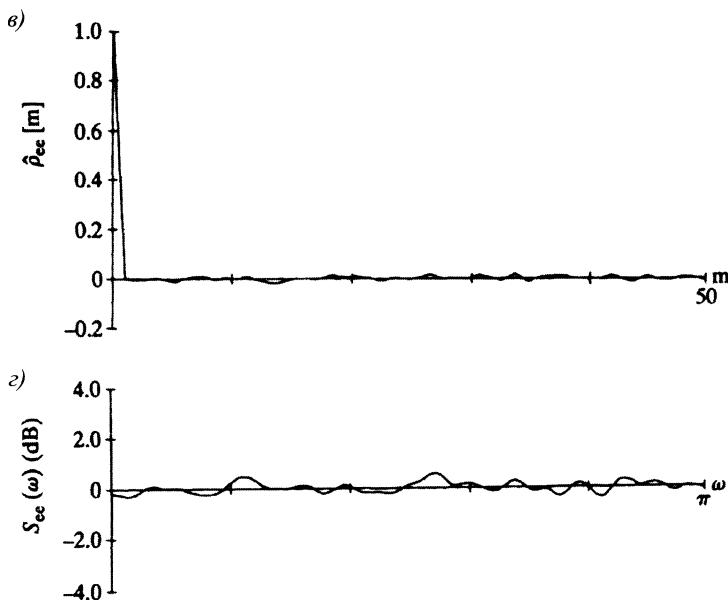


Рис. 10.28 (окончание). б) нормализованная оценка автокорреляции на промежутке $0 \leq m \leq 50$; г) оценка спектра мощности, полученная с окном Барлетта длины $M = 50$

В главе 4 мы отмечали, что модель белого шума достаточно реалистична до тех пор, пока размер шага квантования мал. Если же количество значков в цифровом представлении чисел невелико, то это условие не выполняется. Чтобы исследовать спектр шума квантования с большим шагом, повторим предыдущий эксперимент, считая, что у нас только 8 уровней квантования, или трехбитовые числа. Ошибка, возникающая при таком квантовании речевого сигнала из рис. 10.26, а), показана на рис. 10.29. Обратите внимание на то, что отдельные участки графика ошибки напоминают исходный речевой сигнал. Можно ожидать отражения этой особенности и в оценке спектра мощности.

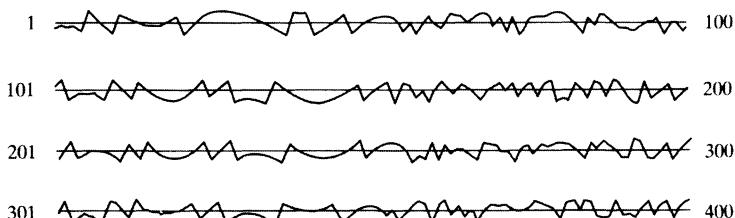


Рис. 10.29. Ошибка квантования 3-битовым квантователем. (Используется тот же масштаб, в котором на рис. 10.26, а) показан исходный сигнал.)

На рис. 10.30 приведены оценки автокорреляции и спектра мощности последовательности ошибок при 3-битовом квантовании, состоящей из 14 000 отсчетов. В этом случае автокорреляция (рис. 10.30, а) и в)) гораздо меньше напоминает идеальную автокорреляцию белого шума.

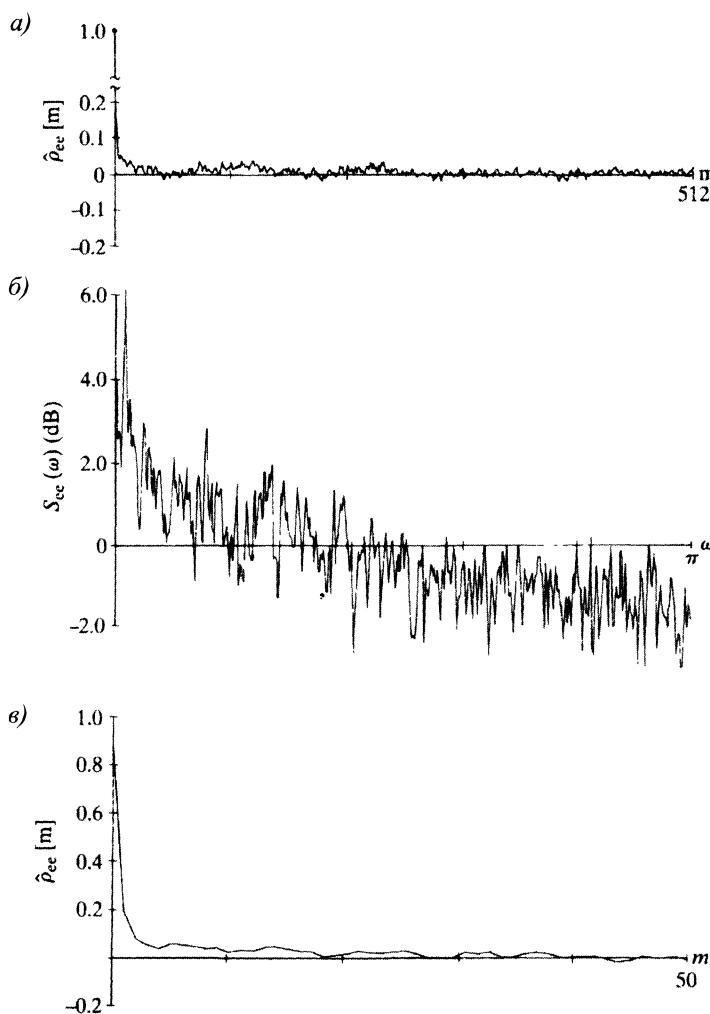


Рис. 10.30. а) нормализованная оценка автокорреляции 3-битового шума квантования (длина записи $Q = 14\,000$); б) оценка спектра мощности, полученная с окном Барлэтта длины $M = 512$; в) нормализованная оценка автокорреляции на промежутке $0 \leq m \leq 50$

Оценки спектра, полученные с окнами Барлэтта длины $M = 512$ и $M = 50$, показаны на рис. 10.30, б) и в) соответственно. Ясно, что спектр здесь далек от плоского. (Фактически, он скорее похож на спектр исходного речевого сигнала.) Таким образом, здесь модель белого шума квантования оказывается довольно грубой.

Разобранные примеры иллюстрируют, как оценки автокорреляции и спектра мощности используются для мотивации теоретических моделей. Мы продемонстрировали обоснованность некоторых из основных предположений главы 4 и показали, при каких условиях эти предположения теряют силу. Конечно, это только один, хотя и очень полезный, пример применения техники данной главы к практическим задачам.

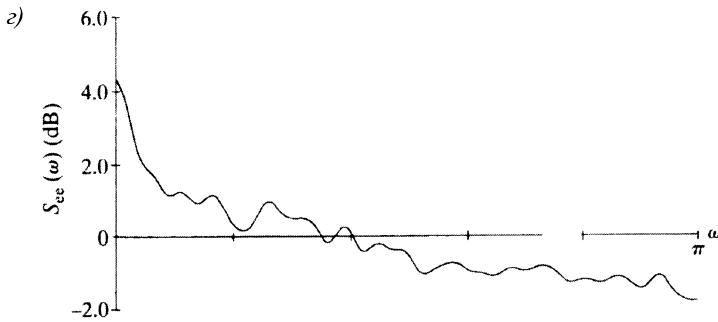


Рис. 10.30 (окончание). г) оценка спектра мощности, полученная с окном Барлетта длины $M = 50$

10.9. Краткое содержание главы

Спектральный анализ — одна из важных областей приложения обработки сигналов. Ввиду наличия высокоеффективных алгоритмов БПФ многие методы спектрального анализа непрерывных и дискретных сигналов прямо или косвенно используют ДПФ. Некоторые из них мы изучили и проиллюстрировали примерами.

Большинство аспектов спектрального анализа удобнее всего изучать на примере синусоидального сигнала. Поскольку ДПФ вычисляется только от конечных последовательностей, исходный сигнал предварительно обрабатывается окном. Ширина спектрального пика, который можно наблюдать при анализе синусоидального сигнала, зависит от длины окна, причем увеличение длины окна ведет к увеличению резкости пика. Следовательно, при уменьшении длины окна падает способность анализа различать близко расположенные гармоники.

Вторая особенность спектрального анализа, основанного на ДПФ, — это спектральная дискретизация. Действительно, вычислять спектр можно только в дискретно расположенных частотах, так что результат спектрального анализа при неаккуратной его интерпретации может вводить в заблуждение. Например, исследуя его дискретизацию, важные характерные черты спектра можно просто пропустить. Во избежание недоразумений расстояние между частотами, в которых производится дискретизация, необходимо уменьшать при увеличении числа точек ДПФ. Сделать это можно двумя способами. Первый из них сводится к неизменной длине окна при увеличении отсчетов ДПФ (при этом участки сигнала, вырезанные окном, необходимо продолжать нулем). К сожалению, этот прием не увеличивает разрешения. Второй говорит о том, что нужно увеличивать и

количество точек ДПФ, и размер окна. Тогда расстояния между спектральными отсчетами уменьшаются и разрешающая способность анализа увеличивается.

В то время как увеличение длины окна и разрешающей способности в спектральном анализе стационарных данных оказывается полезным, при анализировании данных, меняющихся в зависимости от времени, предпочтительнее выбирать настолько короткие, чтобы на его протяжении характеристики сигнала можно было считать стационарными. Такое соображение подводит нас к ЗВПФ, которое, по существу, представляет собой последовательность преобразований Фурье участков сигнала, вырезанных окном. Обычной и полезной интерпретацией ЗВПФ служит блок фильтров, КЧХ каждого из которых совпадает с Фурье-образом окна, сдвинутым по частоте на величины, кратные частотам ДПФ. ЗВПФ находит применение как в промежуточных операциях при фильтровании сигналов, так и при анализировании и интерпретации сигналов, зависящих от времени, таких как, например, речевые или радарные. В спектральном анализе нестационарных сигналов необходимо учитывать тесную взаимозависимость временного и частотного разрешения. Действительно, наша способность отслеживать спектральные характеристики во времени возрастает с уменьшением длины окна. Но с другой стороны, это приводит к снижению частотной разрешающей способности.

ДПФ играет важную роль и при анализе стационарных случайных сигналов. Интуитивный метод оценки спектра мощности случайного сигнала основывается на вычислении квадрата модуля ДПФ его участков. Получающаяся оценка, называемая периодограммой, оказывается асимптотически несмещенной. Однако дисперсия периодограммы с ростом длины участка сигнала к нулю не стремится, так что периодограмму трудно отнести к удовлетворительным оценкам. С другой стороны, разбивая сигнал на более короткие участки и вычисляя среднее арифметическое соответствующих периодограмм, мы получим более приемлемую оценку. Альтернативный подход основывается на первоочередной оценке автокорреляционной функции, что можно сделать либо непосредственно, либо через вычисление ДПФ. Если после этого к автокорреляционной оценке применить окно и вычислить ДПФ, то получится так называемая слаженная периодограмма, которую уже можно отнести к хорошим спектральным оценкам.

Задачи

Обязательные задачи с ответами

- 10.1. Частоты вещественного непрерывного сигнала $x_c(t)$ ограничены сверху 5 кГц, т.е. $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq 2\pi(5000)$. В результате его дискретизации с частотой 10 000 отсчетов за секунду (10 кГц) получается последовательность $x[n] = x_c(nT)$, где $T = 10^{-4}$. Обозначим через $X[k]$ 1000-точечное ДПФ последовательности $x[n]$.
- Какой непрерывной частоте соответствует индекс $k = 150$ в последовательности $X[k]$?
 - Какой непрерывной частоте соответствует индекс $k = 800$ в последовательности $X[k]$?

- 10.2. Частоты вещественного непрерывного сигнала $x_c(t)$ ограничены сверху 5 кГц, т. е. $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq 2\pi(5000)$. В результате дискретизации этого сигнала с шагом T получается последовательность $x[n] = x_c(nT)$. Для исследования спектральных свойств сигнала мы вычисляем N -точечное ДПФ N -членного участка сигнала $x[n]$, привлекая для этого компьютерную программу с $N = 2^\nu$, где ν — натуральное число. Определите *минимальное значение N* и допустимые пределы частоты дискретизации

$$F_{\min} < \frac{1}{T} < F_{\max},$$

при которых анализ возможен, а эффективное расстояние между отсчетами ДПФ будет меньше 5 кГц, т. е. эквивалентные непрерывные частоты, в которых вычисляется ДПФ, отстоят друг от друга не больше чем на 5 кГц.

- 10.3. Речевой сигнал подвергается дискретизации с частотой 16 000 отсч./с (16 кГц). При зависящем от времени Фурье-анализе этого сигнала используется окно продолжительностью в 20 мс, как это описано в § 10.4. При этом между вычислениями ДПФ окно сдвигается на 40 отсчетов. Предположим, что число точек каждого ДПФ равно $N = 2^\nu$.

- Сколько отсчетов речевого сигнала вырезается окном за один раз?
- Что можно сказать о «частоте смене кадров» в зависящем от времени Фурье-анализе, т. е. какое количество ДПФ входного сигнала вычисляется за 1 секунду?
- При каком наименьшем размере N ДПФ входной сигнал можно восстановить его ЗВПФ?
- Какое расстояние (в кГц) получается между отсчетами ДПФ при минимальном N , найденном в предыдущем пункте задачи?

- 10.4. Отрезок вещественнозначного непрерывного сигнала $x_c(t)$ подвергается дискретизации с частотой 20 000 отсч./с и получается 1000-членная последовательность $x[n]$ с нулевыми отсчетами при $n \notin [0; 999]$. Известно, что $x_c(t)$ — узкополосный сигнал, у которого $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq 2\pi(10\,000)$, поэтому ложные частоты при дискретизации не возникают. Обозначим через $X[k]$ 1000-точечное ДПФ последовательности $x[n]$. Известно, что $X[800] = 1 + j$.

- Можете ли Вы, основываясь на данной информации, восстановить значения $X[k]$ для других индексов k ? Перечислите все значения k , при которых это можно сделать, и выпишите соответствующие отсчеты $X[k]$. Если же этого сделать нельзя, объясните почему.
- Найдите все частоты Ω , при которых можно определить $X_c(j\Omega)$, и выпишите соответствующие значения Фурье-образа входного сигнала.

- 10.5. Непрерывный сигнал $x_c(t) = \cos \Omega_0 t$ подвергается дискретизации с шагом T , и получается последовательность $x[n] = x_c(nT)$. Из последовательности $x[n]$ с помощью прямоугольного окна вырезается N -членный участок с $n = 0, 1, \dots, N-1$, к которому применяется N -точечное ДПФ, а его результат обозначается через $X[k]$.

- Пусть Ω_0 , N и k_0 фиксированы. Подберите такое значение шага T , при котором $X[k_0] \neq 0$, $X[N - k_0] \neq 0$, а остальные значения $X[k]$ равны нулю.

6) Единственno ли значение шага T , найденное вами в предыдущем пункте? Если нет, найдите еще одно подходящее его значение.

10.6. Пусть $x_c(t)$ — вещественнонезначный узкополосный непрерывный сигнал с Фурье-образом $X_c(j\Omega)$, причем $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq 2\pi(5000)$. Последовательность $x[n]$ получается в результате дискретизации $x_c(t)$ с частотой 10 кГц. Предположите, что $x[n] = 0$ при $n < 0$ и $n > 999$. Пусть известны два значения 1000-точечного ДПФ $X[k]$ последовательности $x[n]$: $X[900] = 1$ и $X[420] = 5$. Найдите все значения $X_c(j\Omega)$, которые только можно.

10.7. Рассмотрите спектральную оценку дискретного сигнала $x[n]$, полученную с помощью ДПФ и окна Хемминга $w[n]$. При практическом спектральном анализе пользуются правилом, согласно которому частотное разрешение равно ширине главного лепестка $W(e^{j\omega})$. При какой наименьшей длине $L = 2^v$ окна вам удастся идентифицировать синусоидальные сигналы, разность частот которых составляет $\pi/100$?

10.8. Предположим, что вам нужно вычислить спектральную оценку дискретного сигнала $x[n]$ с помощью ДПФ и окна. При этом вам необходимо добиться разрешения не менее чем $\pi/25$, а длина вашего окна фиксирована и равна $N = 256$. Считая, что разрешающая способность совпадает с шириной главного лепестка Фурье-образа используемого окна, определите, какое из окон, перечисленных в табл. 7.1 на с. 473, будет удовлетворять поставленным условиям.

10.9. Даны три сигнала, представленные в виде линейной комбинации двух синусоид:

$$\begin{aligned}x_1[n] &= \cos(\pi n/4) + \cos(17\pi n/64), \\x_2[n] &= \cos(\pi n/4) + 0,8 \cos(21\pi n/64), \\x_3[n] &= \cos(\pi n/4) + 0,001 \cos(21\pi n/64).\end{aligned}$$

Нам нужно вычислить спектральную оценку каждого из этих сигналов с помощью 64-точечного ДПФ и 64-точечного прямоугольного окна $w[n]$. Укажите те сигналы, в спектральной оценки которых можно будет наблюдать два пика.

10.10. Дискретный сигнал $x[n]$ получен в результате дискретизации непрерывного $x_c(t)$ с шагом дискретизации T , т. е. $x[n] = x_c(nT)$. Предположите, что частоты непрерывного сигнала ограничены 100 кГц, т. е. $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq 2\pi(100)$. Нужно оценить спектр непрерывного сигнала $X_c(j\Omega)$, вычисляя 1024-точечное ДПФ $X[k]$ последовательности $x[n]$. При каком наименьшем шаге T расстояние между непрерывными частотами, соответствующими отсчетам ДПФ, не превышает 1 кГц?

10.11. 5000-членная последовательность $x[n]$ — результат дискретизации непрерывного сигнала $x_c(t)$ с шагом дискретизации $T = 50$ мкс. Обозначим через $X[k]$ 8192-точечное ДПФ последовательности $x[n]$. Какое получилось расстояние между непрерывными частотами, соответствующими отсчетам ДПФ?

10.12. Предположите, что 1000-членная последовательность $x[n]$ — это дискретизованная версия непрерывного сигнала $x_c(t)$, полученная с частотой дискретизации 8 кГц без ложных частот. При каком наименьшем N , числе точек ДПФ, соседние отсчеты $X[k]$ соответствуют расстоянию в 5 кГц или меньше между соответствующими непрерывными частотами?

- 10.13. Пусть $X_r[k]$ — ЗВПФ сигнала $x[n]$, определенное формулой (10.38). Будем считать, что число точек ДПФ, участвующих в вычислении ЗВПФ, равно $N = 36$, интервал дискретизации равен $R = 36$, а окно $w[n]$ имеет прямоугольную форму. Вычислите ЗВПФ $X_r[k]$ при $-\infty < r < \infty$ и $0 \leq k \leq N - 1$ сигнала

$$x[n] = \begin{cases} \cos(\pi n/6), & 0 \leq n \leq 35, \\ \cos(\pi n/2), & 36 \leq n \leq 71, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

- 10.14. На рис. 10.31 показан модуль $|V[k]|$ 128-точечного ДПФ сигнала $v[n]$, который был получен в результате умножения сигнала $x[n]$ на 128-точечное прямоугольное окно $w[n]$, т. е. $v[n] = x[n]w[n]$. Заметим, что рисунок представляет $|V[k]|$ только на промежутке $0 \leq k \leq 64$. Какой из нижеперечисленных сигналов согласуется с данной информацией:

$$\begin{array}{ll} x_1[n] = \cos \frac{\pi n}{4} + \cos(0, 26\pi n), & x_4[n] = \cos \frac{\pi n}{8} + \frac{1}{3} \cos \frac{\pi n}{16}, \\ x_2[n] = \cos \frac{\pi n}{4} + \frac{1}{3} \sin \frac{\pi n}{8}, & x_5[n] = \frac{1}{3} \cos \frac{\pi n}{4} + \cos \frac{\pi n}{8}, \\ x_3[n] = \cos \frac{\pi n}{4} + \frac{1}{3} \cos \frac{\pi n}{8}, & x_6[n] = \cos \frac{\pi n}{4} + \frac{1}{3} \cos \left(\frac{\pi n}{8} + \frac{\pi}{3} \right)? \end{array}$$

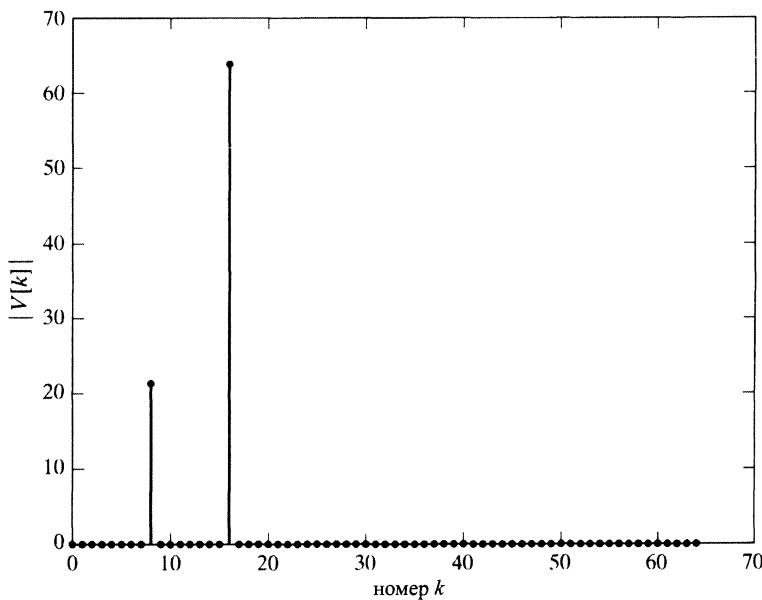


Рис. 10.31.

- 10.15. На рис. 10.32 приведена спектрограмма сигнала $x[n] = \sin(\omega_0 n + 0,5\lambda n^2)$. Заметим, что спектрограмма — это график модуля $X[n, k]$, определенного формул

лой (10.31), а темная область на рисунке указывает большие значения $|X[n, k]|$. Основываясь на этой информации, оцените значения ω_0 и λ .

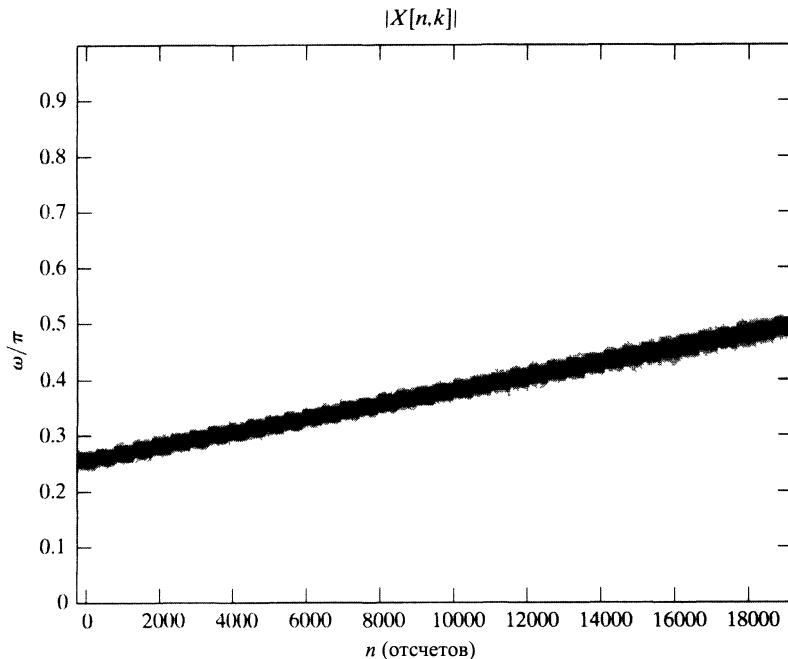


Рис. 10.32.

- 10.16. Непрерывный сигнал дискретизован с частотой 10 кГц, а к результату дискретизации применили 1024-точечное ДПФ. Определите расстояние между непрерывными частотами, соответствующими отсчетам ДПФ. Обоснуйте свой ответ.
- 10.17. Сигнал $x[n]$ подвергается спектральному анализу через вычисление ЗВПФ $X_r[k]$, определенное в (10.38). Сначала анализ проводится с помощью $N = 128$ -точечного ДПФ и окна Хемминга $w[n]$ длины $L = 128$. Соседние обрабатывающиеся блоки отстоят друг от друга во времени на $R = 128$. Частотное разрешение, достигаемое в этом анализе, недостаточно, и нам нужно его улучшить. Это можно сделать несколькими способами. Какой именно из перечисленных ниже методов увеличивает частотное разрешение ЗВПФ $X_r[k]$?
- Не меняя значений L и R , увеличить N до 256.
 - Не меняя значения R , увеличить N и L до 256.
 - Уменьшить R до 64, сохранив исходные значения N и L .
 - Уменьшить L до 64, сохранив исходные значения N и R .
 - Оставить исходные значения N , R и L , а в качестве окна $w[n]$ взять прямоугольное.
- 10.18. Пусть в сигнале $x[n]$ присутствует единственная синусоидальная компонента. В результате обработки этого сигнала L -точечным окном Хемминга $w[n]$ полу-

чается последовательность $v_1[n]$, а затем находят ее Фурье-образ $V_1(e^{j\omega})$. Кроме того, исходный сигнал обрабатывается L -точечным прямоугольным окном, а от результата обработки $v_2[n]$ вычисляется Фурье-образ $V_2(e^{j\omega})$. Будут ли функции $V_1(e^{j\omega})$ и $V_2(e^{j\omega})$ одинаковы по высоте? Если да, то докажите свой ответ. Если нет, то определите, какой из пиков будет выше и почему.

- 10.19. Допустим, вам нужно оценить спектр сигнала $x[n]$ с помощью ДВПФ участков сигнала, вырезанных окном Кайзера. Вам необходимо, чтобы боковые лепестки Фурье-образа окна были на 30 дБ ниже основного, а частотное разрешение достигало значения $\pi/40$. (Частотное разрешение можно считать равным ширине главного лепестка.) При какой наименьшей длине окна L будет достигнута поставленная цель?
- 10.20. Вам предстоит оценить спектр $x[n]$ с помощью 512-точечного окна Кайзера.
 - а) Условия на частотную разрешающую способность анализа ограничивают максимальную ширину главного лепестка Фурье-образа окна Кайзера значением $\pi/100$. Какое наилучшее ослабление боковых лепестков можно при этом ожидать?
 - б) Предположим, что сигнал $x[n]$ включает в себя две синусоидальные компоненты, частоты которых отстоят друг от друга не менее чем на $\pi/50$, а амплитуда более сильной компоненты равна 1. Основываясь на своем ответе в предыдущем пункте задачи, найдите границы значений более слабой компоненты, которые можно извлечь из исследования боковых лепестков более сильной синусоиды.

Обязательные задачи без ответов

- 10.21. Пусть $x[n] = \cos(2\pi n/5)$, а $v[n]$ — участок этого сигнала, вырезанный 32-точечным прямоугольным окном. $V(e^{j\omega})$ — Фурье-образ этого участка. Изобразите график модуля $|V(e^{j\omega})|$ на отрезке $-\pi \leq \omega \leq \pi$ и отметьте на чертеже частоты всех пиков и ближайших к ним несущественных всплесков, или боковых лепестков. Кроме того, обозначьте амплитуды всех пиков и наибольших боковых лепестков.

- 10.22. Начертите спектрограмму сигнала

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{4} + 1000 \sin\left(\frac{\pi n}{8000}\right)\right),$$

полученную с помощью 256-точечного прямоугольного окна и 256-точечного ДПФ без наложений ($R = 256$), на промежутке $0 \leq n \leq 16\,000$.

Дополнительные задачи

- 10.23. Рассмотрите вещественнозначный непрерывный конечный сигнал $x_c(t)$ длительностью 100 мс. Предположите, что Фурье-образ этого сигнала узкополосный: $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq 2\pi(10\,000)$ рад/с, т. е. наложением спектров можно пренебречь. Вам нужно вычислить отсчеты $X(j\Omega)$, в частотах, разделенных 5 Гц, на промежутке $0 \leq \Omega \leq 2\pi(10\,000)$. Это можно сделать с помощью 4000-точечного ДПФ. Вам следует вычислить такое 4000-точечное ДПФ последовательности $x[n]$, что

$$X[k] = \alpha X_c(j2\pi \cdot 5 \cdot k), \quad 0 \leq k \leq 1999,$$

где α — известный скалярный множитель. Ниже перечислены три способа получения желаемого ДПФ.

Метод 1. Сигнал $x_c(t)$ подвергается дискретизации с шагом 25 мкс, т. е. вычисляется $X_1[k]$ как ДПФ последовательности

$$x_1[n] = \begin{cases} x_c(nT), & 0 \leq n \leq 3999, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Так как протяженность сигнала $x_c(t)$ составляет 100 мс, $x_1[n]$ будет конечной последовательностью, состоящей из 4000 отсчетов (100 мс/25 мкс).

Метод 2. Сигнал $x_c(t)$ подвергается дискретизации с шагом 50 мкс. Так как протяженность сигнала $x_c(t)$ — 100 мс, итоговая последовательность $x_2[n]$ будет иметь только 2000 отсчетов (100 мс/50 мкс):

$$x_2[n] = \begin{cases} x_c(nT), & 0 \leq n \leq 1999, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Иначе говоря, эта последовательность продолжается нулем до нужной длины в 4000 отсчетов, а затем вычисляется ее 4000-точечное ДПФ $X_2[k]$.

Метод 3. Сигнал $x_c(t)$ подвергается дискретизации с шагом 50 мкс, как и в предыдущем методе. По полученной дискретной версии сигнала строится последовательность

$$x_3[n] = \begin{cases} x_c(nT), & 0 \leq n \leq 1999, \\ x_c((n - 2000)T), & 2000 \leq n \leq 3999, \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

а затем вычисляется ее 4000-точечное ДПФ $X_3[k]$.

Выясните, как каждое из ДПФ $X_i[k]$ соотносится с $X_c(j\Omega)$. Отметьте эту взаимосвязь на графике $X_c(j\Omega)$ и укажите, какой из методов решает поставленную задачу.

- 10.24. Непрерывный конечный сигнал $x_c(t)$ подвергается дискретизации с частотой 20 000 отсч./с и получается 1000-членная последовательность $x[n]$, все ненулевые отсчеты которой расположены в промежутке $[0; 999]$. Будем предполагать, что $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq 2\pi(10000)$, т. е. сигнал узкополосный и наложением спектров при дискретизации можно пренебречь. Считайте, что у вас есть возможность вычислять 1000-точечное прямое и обратное ДПФ.

- a) Как 1000-точечное ДПФ $X[k]$ последовательности $x[n]$ соотносится с $X_c(j\Omega)$? Каким частотным промежутком отделены друг от друга отсчеты ДПФ?

Для получения расширенного визуального изображения Фурье-образа $X_c(j\Omega)$, исходя из 1000-точечного ДПФ $X[k]$, предлагается следующая процедура

- 1) Определить новое 1000-точечное ДПФ

$$W[k] = \begin{cases} X[k], & 0 \leq k \leq 250, \\ 0, & 251 \leq k \leq 749, \\ X[k], & 750 \leq k \leq 999. \end{cases}$$

- 2) Вычисляя обратное 1000-точечное ДПФ от $W[k]$, получить $w[n]$ при $n = 0, 1, \dots, 999$.
- 3) Проредить последовательность $w[n]$ в два раза и продолжить результат нулем:

$$y[n] = \begin{cases} w[2n], & 0 \leq n \leq 499, \\ 0, & 500 \leq n \leq 999. \end{cases}$$

- 4) Вычислить 1000-точечное ДПФ последовательности $y[n]$ и получить $Y[k]$.
- б) Для обоснования процедуры необходимо проверить, что

$$Y[k] = \alpha X_c(j2\pi \cdot 10 \cdot k), \quad 0 \leq k \leq 500,$$

где α — некий коэффициент пропорциональности. Верно ли это равенство? Если вы считаете, что нет, объясните почему.

- 10.25. Пусть $y[n]$ — отклик линейного стационарного КИХ-фильтра на сигнал $x[n]$, то есть

$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k].$$

- а) Найдите соотношение, связывающее ЗВПФ выходного сигнала $Y[n, \lambda]$ и ЗВПФ $X[n, \lambda]$ входного.
- б) Покажите, что при достаточной длине окна по сравнению с M имеет место приближенное равенство:

$$Y[n, \lambda] = H(e^{j\lambda})X[n, \lambda],$$

где $H(e^{j\omega})$ — КЧХ фильтра.

- 10.26. Периодограмма $I(\omega)$ дискретного случайного сигнала, согласно формуле (10.54), определяется как

$$I(\omega) = \frac{1}{LU} |V(e^{j\omega})|^2,$$

где $V(e^{j\omega})$ — ДВПФ конечной последовательности $v[n] = w[n]x[n]$; $w[n]$ — конечное окно длины L ; U — нормирующий множитель.

Покажите, что периодограмму можно вычислять как Фурье-образ апериодической автокорреляционной последовательности, умноженный на $1/LU$:

$$I(\omega) = \frac{1}{LU} \sum_{m=-(L-1)}^{L-1} c_{vv}[m] e^{-j\omega m},$$

где

$$c_{vv}[m] = \sum_{n=0}^{L-1} v[n]v[n+m].$$

- 10.27. Рассмотрите конечную последовательность $x[n]$, у которой $x[n] = 0$ при $n < 0$ и $n \geq L$. Пусть $X[k]$ — ее N -точечное ДПФ, причем $N > L$. Обозначим через $c_{xx}[m]$ апериодическую автокорреляционную функцию последовательности $x[n]$:

$$c_{xx}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n]x[n+m]$$

и введем последовательность

$$\tilde{c}_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |X[k]|^2 e^{j(2\pi/N)km}, \quad 0 \leq m \leq N-1.$$

Считая, что $M < L$, найдите минимально возможное количество N точек ДПФ, при котором

a) $c_{xx}[m] = \tilde{c}_{xx}[m]$, $0 \leq m \leq L-1$; b) $c_{xx}[m] = \tilde{c}_{xx}[m]$, $0 \leq m \leq M-1$.

- 10.28. Симметричное окно Барлетта, неоднократно встречающееся в контексте оценки спектра мощности, определяется как

$$w_B[m] = \begin{cases} 1 - |m|/M, & |m| \leq M-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (10.103)$$

Окно Барлетта особенно привлекательно для оценки спектра мощности через обработку окном оценки автокорреляции, как это было описано в § 10.8. Причина — неотрицательность его Фурье-образа, что гарантирует неотрицательность всех значений сглаженной спектральной оценки.

- a) Покажите, что окно Барлетта из системы (10.103) с точностью до множителя $1/M$ совпадает с апериодической автокорреляцией последовательности

$$u[n] - u[n-M].$$

- б) Опираясь на результат предыдущего пункта, покажите, что Фурье-образ окна Барлетта имеет вид:

$$W_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \left(\frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)} \right)^2, \quad (10.104)$$

т. е., очевидно, неотрицательно.

- в) Опишите процедуру генерирования других конечных окон с неотрицательным Фурье-образом.

- 10.29. В § 10.8 было показано, что сглаженная оценка спектра мощности может быть получена с помощью применения окна к оценке автокорреляционной последовательности. При этом утверждалось (см. (10.98) на с. 746), что дисперсия сглаженной спектральной оценки равна $D[S(\omega)] \approx FP_{xx}^2(\omega)$, где F (дисперсионное отношение) определяется формулой:

$$F = \frac{1}{Q} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} (w_c[m])^2 = \frac{1}{2\pi Q} \int_{-\pi}^{\pi} |W_c(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

Параметр Q здесь обозначает количество членов последовательности $x[n]$, а $(2M-1)$ — длину симметричного окна $w_c[m]$, которое применяется к автокорреляционной оценке. Значит, при фиксированном Q дисперсию сглаженной спектральной оценки можно регулировать, меняя форму и длину окна $w_c[m]$.

Мы хотим показать, что F возрастает при увеличении длины окна. Но из обсуждения окон в главе 7 мы знаем, что ширина главного лепестка $W_c(e^{j\omega})$ увеличивается с уменьшением длины окна, так что возможность различать близко расположенные частотные компоненты при этом падает. Таким образом, возникает

тесная взаимосвязь между изменением дисперсии и разрешающей способности.
Изучим эту связь для следующих стандартных окон

Прямоугольное:

$$w_R[m] = \begin{cases} 1, & |m| \leq M - 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Барлетта (треугольное):

$$w_B[m] = \begin{cases} 1 - |m|/M, & |m| \leq M - 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Хеннинга/Хемминга:

$$w_H[m] = \begin{cases} \alpha + \beta \cos(\pi m / (M - 1)), & |m| \leq M - 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

($\alpha = \beta = 0,5$ для окна Хеннинга и $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,46$ для окна Хемминга.)

- a) Вычислите Фурье-образ каждого из этих окон, то есть найдите функции $W_R(e^{j\omega})$, $W_B(e^{j\omega})$ и $W_H(e^{j\omega})$. Изобразите графики этих функций.
- б) Проверьте, что при $M \gg 1$ табл. 10.1 отражает истинную информацию.

Таблица 10.1.

Название окна	Приближенная ширина главного лепестка	Приближенное значение F
Прямоугольное	$2\pi/M$	$2M/Q$
Барлетта	$4\pi/M$	$2M/(3Q)$
Хеннинга/Хемминга	$3\pi/M$	$2M(\alpha^2 + \beta^2/2)/Q$

10.30. ЗВПФ сигнала

$$x[n] = \left(\sin^2 \frac{\pi n}{2} \right) u[n]$$

вычисляется с помощью окна

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 13, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $X[n, k] = X[n, 2\pi k/7]$ при $0 \leq k \leq 6$, где $X[n, \lambda]$ определялось в § 10.4.

- a) Найдите $X[0, k]$ при $0 \leq k \leq 6$.

- б) Вычислите $\sum_{k=0}^6 X[n, k]$ при $0 \leq n < \infty$.

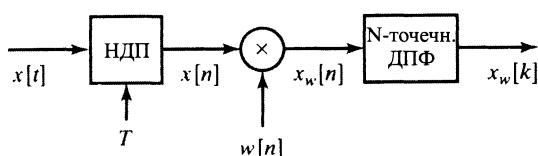


Рис. 10.33.

- 10.31. а) Рассмотрите систему из рис. 10.33 с входным сигналом $x(t) = e^{j(3\pi/8)10^4 t}$, шагом дискретизации $T = 10^{-4}$ и

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При каком наименьшем положительном N все значения N -точечного ДПФ $X_w[k]$ вырезанного окном участка сигнала равны нулю, за исключением одного?

- б) Пусть $N = 32$, входной сигнал равен $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$, а шаг дискретизации T выбран так, что наложение спектров не происходит. На рис. 10.34 и 10.35 показан модуль последовательности $X_w[k]$ для следующих окон:

$$w_1[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 31, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad w_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 7, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Укажите и обоснуйте соответствие между рисунками и окнами.

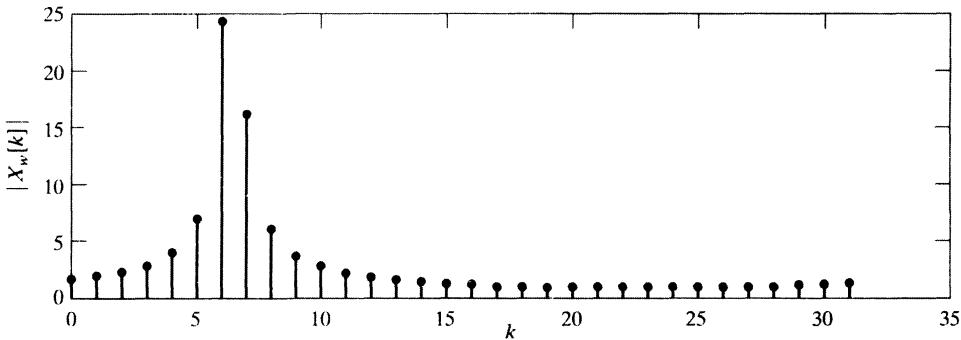


Рис. 10.34.

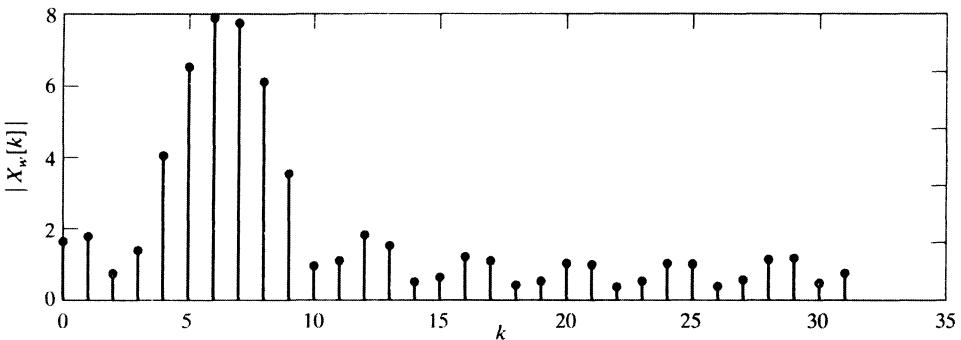


Рис. 10.35.

- в) Нам хотелось бы оценить значение Ω_0 из рис. 10.34 при входном сигнале и параметрах системы из предыдущего пункта задачи, если шаг дискретиза-

ции равен $T = 10^{-4}$ и ложные частоты не появляются. Оцените значение Ω_0 , считая, что окно в этом случае имеет вид:

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 31, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Выясните погрешность вашей оценки.

- г) Предположим, что у вас есть точные значения 32-точечного ДПФ $X_w[k]$ в случае обоих окон $w_i[n]$. Опишите кратко процедуру точного вычисления частоты Ω_0 .

Задачи повышенной сложности

- 10.32. Покажите, что ЗВПФ, определенное формулой (10.18) на с. 715, обладает следующими свойствами:

- а) *Линейность:*

$$x[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \Rightarrow X[n, \lambda] = aX_1[n, \lambda] + bX_2[n, \lambda].$$

- б) *Свойство сдвига:* если $y[n] = x[n - n_0]$, то $Y[n, \lambda] = X[n - n_0, \lambda]$.

- в) *Свойство модуляции:* если $y[n] = e^{j\omega_0 n} x[n]$, то $Y[n, \lambda] = e^{j\omega_0 n} X[n, \lambda - \omega_0]$.

- г) *Сопряженная симметрия:* если сигнал $x[n]$ вещественноизначный, то $X[n, \lambda] = X^*[n, -\lambda]$.

- 10.33. Пусть $x_c(t)$ — непрерывный стационарный случайный сигнал с автокорреляционной функцией

$$\varphi_c(\tau) = \mathcal{E}\{x_c(t)x_c(t + \tau)\}$$

и спектральной плотностью мощности

$$P_c(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_c(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau.$$

Допустим, что дискретный стационарный случайный сигнал $x[n]$ получен дискретизацией $x_c(t)$ с шагом дискретизации T , т. е. $x[n] = x_c(nT)$.

- а) Покажите, что автокорреляционную последовательность для $x[n]$ можно вычислить как $\varphi[m] = \varphi_c(mT)$.
- б) Найдите соотношение, связывающее спектральные плотности мощности непрерывного сигнала ($P_c(\Omega)$) и дискретного ($P(\omega)$).
- в) При каком условии будет выполнено равенство:

$$P(\omega) = \frac{1}{T} P_c\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi?$$

- 10.34. В подразделе 10.7.5 рассматривалась оценка спектра мощности суммы синусоидального сигнала и белого шума. В этой задаче мы определим истинный спектр такого сигнала. Предположим, что

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \theta) + e[n],$$

где θ — случайная переменная, равномерно распределенная на промежутке $[0; 2\pi]$, а $e[n]$ — последовательность случайных переменных с нулевым математическим ожиданием, некоррелируемых между собой и со случайной переменной θ . Иными словами, гармоническая компонента имеет случайную фазу, а $e[n]$ представляет белый шум.

- а) Покажите, что в сделанных предположениях автокорреляционная функция для $x[n]$ имеет вид:

$$\varphi_{xx}[m] = \mathcal{E}\{x[n]x[m+n]\} = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 m) + \sigma_e^2 \delta[m],$$

где $\sigma_e^2 = \mathcal{E}\{(e[n])^2\}$.

- б) Опираясь на результат предыдущего пункта, проверьте, что над одним периодом частоты спектр мощности сигнала $x[n]$ описывается формулой:

$$P_{xx}(\omega) = \frac{A^2 \pi}{2} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) + \sigma_e^2, \quad |\omega| \leq \pi.$$

- 10.35. Дискретный N -членный сигнал $x[n]$ был получен в результате дискретизации непрерывного стационарного белого шума. В связи с этим

$$\mathcal{E}\{x[n]x[m]\} = \sigma_x^2 \delta[n - m], \quad \mathcal{E}\{x[n]\} = 0.$$

Результат вычисления ДПФ конечной последовательности $x[n]$ обозначим через $X[k]$ ($0 \leq k \leq N - 1$).

- а) Найдите приближенную дисперсию последовательности $|X[k]|^2$, опираясь на формулы (10.67) и (10.68).
 б) Определите взаимную корреляцию значений ДПФ, т. е. выразите $\mathcal{E}\{X[k]X^*[r]\}$ как функцию переменных k и r .

- 10.36. Узкополосный непрерывный сигнал обладает узкополосным спектром мощности, равным нулю при $|\Omega| \geq 2\pi(10^4)$ рад/с. На интервале протяженностью в 10 с сигнал подвергается дискретизации с частотой 20 000 отсч./с, после чего спектр мощности сигнала оценивают методом усредненных периодограмм, описанным в подразделе 10.7.3.

- а) Чему равна длина записи сигнала?
 б) Предположим, что при вычислении периодограмм используется двоичный алгоритм БПФ. При каком наименьшем N расстояния между частотами, в которых вычисляется спектральная оценка, не превосходит 10 Гц?
 в) Пусть длина L участков сигнала совпадает с длиной N ДПФ из предыдущего пункта. Какое число сегментов K будет иметь сигнал, если отдельные его участки не перекрываются?
 г) Нам хотелось бы уменьшить дисперсию оценки в 10 раз, сохранив расстояния между частотами из п. «б» задачи. Сформулируйте два метода достижения поставленной цели. Один ли результат дают эти методы? Если нет, то в чем именно отличаются результаты?

10.37. Оценка $\bar{I}(\omega)$ спектра мощности сигнала была получена методом усредненных периодограмм:

$$\bar{I}(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{K-1} I_r(\omega),$$

где K периодограмм $I_r(\omega)$ вычисляются по L -членным участкам сигнала с помощью формул (10.69) и (10.70). Определим оценку автокорреляционной функции как обратное преобразование Фурье усредненной периодограммы:

$$\bar{\varphi}[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{I}(\omega) e^{j\omega m} d\omega.$$

а) Покажите, что

$$\mathcal{E}\{\bar{\varphi}[m]\} = \frac{1}{LU} c_{ww}[m] \varphi_{xx}[m],$$

где L — длина участков; U — нормирующий множитель из формулы (10.66); $c_{ww}[m]$ — апериодическая автокорреляционная функция окна, применяемого к отдельным участкам сигнала (см. (10.62) на с. 734).

б) В приложениях усредненных периодограмм для вычисления $\bar{I}(\omega)$ в равномерно распределенных частотах обычно используется алгоритм БПФ, т. е.

$$\bar{I}[k] = \bar{I}(2\pi k/N), \quad 0 \leq k \leq N-1,$$

где $N \geq L$. Предположим, что мы находим оценку автокорреляционной функции через обратное ДПФ от $\bar{I}[k]$:

$$\bar{\varphi}_P[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{I}[k] e^{j(2\pi k/N)km}, \quad 0 \leq m \leq N-1.$$

Найдите выражение для $\mathcal{E}\{\bar{\varphi}_P[m]\}$.

в) При каком N получается равенство:

$$\mathcal{E}\{\bar{\varphi}_P[m]\} = \mathcal{E}\{\bar{\varphi}[m]\}, \quad 0 \leq m \leq L-1?$$

10.38. Рассмотрите вычисление автокорреляционной оценки по формуле:

$$\hat{\varphi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{Q-|m|-1} x[n] x[n+|m|], \quad (10.105)$$

где $x[n]$ — вещественноизначная последовательность. Поскольку $\hat{\varphi}_{xx}[-m] = \hat{\varphi}_{xx}[m]$, оценку достаточно вычислить только при $0 \leq m \leq M-1$ и распространить ее значения на отрезок $[1-M; M-1]$ по симметрии.

а) Если $Q \gg M$, то вычисление $\hat{\varphi}_{xx}[m]$ с помощью единственного алгоритма БПФ может оказаться нереальным. В таких случаях имеет смысл представить $\hat{\varphi}_{xx}[m]$ в виде суммы корреляционных оценок коротких участков сигнала. Покажите, что если $Q = KM$, то

$$\hat{\varphi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q} \sum_{i=0}^{K-1} c_i[m],$$

где

$$c_i[m] = \sum_{n=0}^{M-1} x[n + iM]x[n + iM + m], \quad 0 \leq m \leq M - 1.$$

- 6) Покажите, что корреляции $c_i[m]$ можно находить через N -точечную циклическую корреляцию:

$$\tilde{c}_i[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x_i[n]y_i[((n+m))_N],$$

где

$$\begin{aligned} x_i[n] &= \begin{cases} x[n + iM], & 0 \leq n \leq M - 1, \\ 0, & M \leq n \leq N - 1; \end{cases} \\ y_i[n] &= x[n + iM], \quad 0 \leq n \leq N - 1. \end{aligned} \quad (10.106)$$

При каком минимальном N (в терминах M) имеет место равенство: $c_i[m] = \tilde{c}_i[m]$ при $0 \leq m \leq M - 1$?

- в) Сформулируйте процедуру вычисления $\hat{\varphi}_{xx}[m]$ для $0 \leq m \leq M - 1$, включающую в себя $2K$ N -точечных ДПФ вещественноизначной последовательности и одно обратное N -точечное ДПФ. Сколько комплексных умножений потребуется для вычисления $\hat{\varphi}_{xx}[m]$ при $0 \leq m \leq M - 1$, если используется двоичный алгоритм БПФ?
- г) Какие изменения в процедуре из предыдущего пункта необходимо внести, чтобы она вычисляла оценку взаимной корреляции:

$$\hat{\varphi}_{xy}[m] = \frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{Q-|m|-1} x[n]y[n+m], \quad -(M-1) \leq m \leq M-1,$$

где $x[n]$ и $y[n]$ — вещественноизначные последовательности с известными отсчетами на отрезке $[0; Q-1]$?

- д) Рэйдер показал [127], что при вычислении автокорреляционной оценки $\hat{\varphi}_{xx}[m]$ на отрезке $[0; M-1]$ будет достигнута существенная экономия вычислений, если положить $N = 2M$. Докажите, что N -точечное ДПФ сегмента $y_i[n]$ из (10.106) может быть выражено как

$$Y_i[k] = X_i[k] + (-1)^k X_{i+1}[k], \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

Опишите процедуру вычисления $\hat{\varphi}_{xx}[m]$ при $0 \leq m \leq M-1$, состоящую из K N -точечных ДПФ и одного обратного N -точечного ДПФ. Определите общее число комплексных умножений в этом случае, считая, что для реализации ДПФ привлекается двоичный алгоритм БПФ.

- 10.39. В § 10.4 было определено ЗВПФ сигнала $x[m]$, которое при фиксированном n совпадает с Фурье-образом последовательности $x[n+m]w[n]$, где $w[n]$ — окно. Не лишено смысла определить зависящую от времени автокорреляционную функцию последовательности $x[n]$ так, чтобы при фиксированном n ее Фурье-

образ был равен квадрату модуля ЗВПФ. Более точно зависящая от времени автокорреляционная функция определяется как

$$c[n, m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X[n, \lambda]|^2 e^{j\lambda m} d\lambda,$$

где функция $X[n, \lambda]$ — вычисляется по формуле (10.18).

- а) Покажите, что для вещественнозначной последовательности $x[n]$ имеет место тождество:

$$c[n, m] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+r]w[r]x[m+n+r]w[m+r],$$

т. е. при фиксированном значении n функция $c[n, m]$ представляет собой автокорреляцию последовательности $x[n+r]w[r]$, $-\infty < r < \infty$.

- б) Докажите, что зависящая от времени автокорреляция является четной последовательностью относительно m (если n фиксировано), и, опираясь на четность, проверьте соотношение:

$$c[n, m] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]x[r-m]h_m[n-r],$$

где

$$h_m[r] = w[-r]w[-(m+r)]. \quad (10.107)$$

- в) При каком условии на окно $w[r]$ формулу (10.107) можно использовать для вычисления последовательности $c[n, m]$ при фиксированном m и $-\infty < n < \infty$ через детерминированные операции?

- г) Пусть

$$w[-r] = \begin{cases} a^r, & r \geq 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases} \quad (10.108)$$

Найдите импульсную характеристику $h_m[r]$ из соотношения (10.107) и соответствующую характеристическую функцию $H_m(z)$. Начертите блок-схему детерминированной системы, вычисляющей m -е запаздывающее значение автокорреляции $c[n, m]$ при $-\infty < n < \infty$ и окне из (10.108).

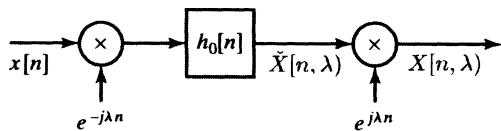
- д) Выполните задание предыдущего пункта для окна вида:

$$w[-r] = \begin{cases} ra^r, & r \geq 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases}$$

- 10.40. Зависящий от времени Фурье-анализ иногда реализуется как блок фильтров. Интерпретация Фурье-анализа через блок фильтров может прояснить ситуацию даже при использовании алгоритмов БПФ. В данной задаче мы исследуем упомянутую интерпретацию, основой которой служит тот факт, что при фиксированном λ ЗВПФ, определенное формулой (10.18), является последовательностью, которую можно считать результатом комбинации фильтрования и модулирования.

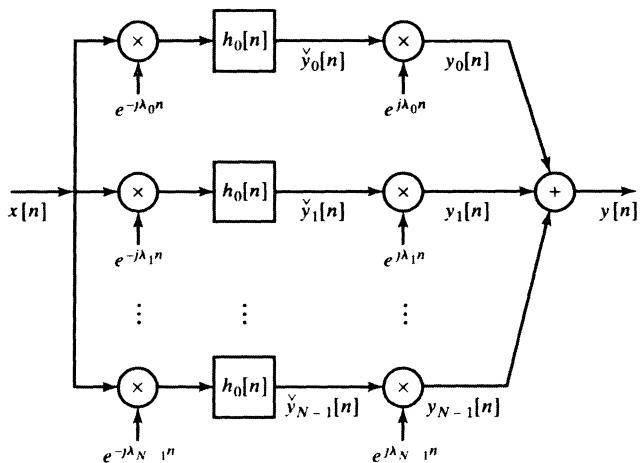
- а) Покажите, что $X[n, \lambda]$ является выходной последовательностью системы из рис. 10.36, если импульсная характеристика ЛС-системы равна $h_0[n] = w[-n]$. Покажите также, что если λ фиксировано, то вся система из рис. 10.36 ведет себя как ЛС-система, и определите ее импульсную характеристику и КЧХ.

Рис. 10.36.



- б) Предполагая, что λ в системе из рис. 10.36 фиксирована, докажите, что для типичного окна последовательность $s[n] = \check{X}[n, \lambda]$ обладает нижнечастотным Фурье-образом. Докажите также, что для типичного окна КЧХ всей системы из рис. 10.36 совпадает с КЧХ фильтра нижних частот (ФНЧ) с центром в $\omega = \lambda$.
- в) На рис. 10.37 показан блок N каналов полосовых фильтров, где каждый канал устроен, как на рис. 10.36. Средняя частота каналов равна $\lambda_k = 2\pi k/N$ и $h_0[n] = w[-n]$ — импульсная характеристика ФНЧ. Покажите, что отдельные выходные сигналы $y_k[n]$ представляют собой отсчеты (в λ -размерности) ЗВПФ. Проверьте, что выходной сигнал всей системы равен $y[n] = w[0]x[n]$, т. е. система из рис. 10.37 восстанавливает входную последовательность с точностью до скалярного множителя.

Рис. 10.37.



Система из рис. 10.37 преобразует входной сигнал $x[n]$ в N последовательностей, повышая тем самым общее число отсчетов за секунду в N раз. Как объясняется в части «б» задачи, в случае типичного окна сигнал $\check{y}_k[n]$ обладает нижнечастотным Фурье-образом. Таким образом, появляется возможность уменьшить частоту дискретизации этих сигналов, как показано на рис. 10.38. В частности, если частота дискретизации уменьшается в $R = N$ раз, общее число отсчетов, приходящихся на одну секунду, остается тем же, что и для сигнала $x[n]$. В этом

случае блок фильтров называют *критически дискретизованным* (см. [32]). Восстановление исходного сигнала по прореженным канальными сигналам использует интерполяцию. Интересно, насколько хорошо исходный сигнал $x[n]$ восстанавливается системой?

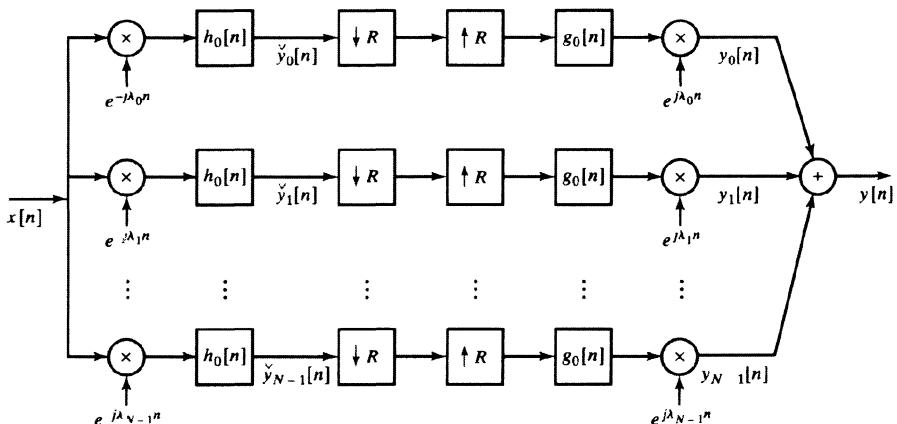


Рис. 10.38.

- г) Покажите, что регулярное ДВПФ, осуществляемое в системе из рис. 10.38, определяется соотношением:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{R} \sum_{\ell=0}^{R-1} \sum_{k=0}^{N-1} G_0(e^{j(\omega_0 - \lambda_k)}) H_0(e^{j(\omega - \lambda_k - 2\pi\ell/R)}) X(e^{j(\omega - 2\pi\ell/R)}),$$

где $\lambda_k = 2\pi k/N$. Выражение ясно указывает на наложение спектров, получающееся из-за прореживания сигналов $\hat{y}[n]$. Опираясь на явный вид функции $Y(e^{j\omega})$, найдите условие (или систему условий) на $H_0(e^{j\omega})$ и $G_0(e^{j\omega})$, при которых нейтрализуется наложение спектров и выполняется равенство $y[n] = x[n]$.

- д) Предположите, что $R = N$, а фильтр нижних частот идеален и обладает КЧХ вида

$$H_0(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/N, \\ 0, & \pi/N < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Можно ли в этих предположениях подобрать такую КЧХ $G_0(e^{j\omega})$ интерполяционного фильтра, что $H_0(e^{j\omega})$ и $G_0(e^{j\omega})$ будут удовлетворять условиям, найденным в предыдущем пункте задачи? Если да, выпишите ее явный вид.

- е) *Необязательная*. Исследуйте возможность точного восстановления входного сигнала при условии, что КЧХ $H_0(e^{j\omega})$ ФНЧ (т. е. Фурье-образ окна $w[-n]$) неидеальна и отлична от нуля на множестве $|\omega| < 2\pi/N$.

- ж) Докажите, что выходной сигнал системы из рис. 10.38 имеет вид:

$$y[n] = N \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN] \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_0[n - \ell R] h_0[\ell R + rN - n],$$

и выведите из него условия на $h_0[n]$ и $g_0[n]$, при которых $y[n] = x[n]$.

3) Пусть $R = N$, а импульсная характеристика фильтра нижних частот равна

$$h_0[n] = \begin{cases} 1, & -(N-1) \leq n \leq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Возможно ли в этом случае подобрать импульсную характеристику $g_0[n]$ интерполяционного фильтра, удовлетворяющую условиям, найденным вами в предыдущем пункте задачи? Если да, выпишите эту характеристику.

- и) *Необязательная.* Исследуйте возможность точного восстановления входного сигнала при условии, что импульсная характеристика фильтра нижних частот $h_0[n] = w[-n]$ — клинообразное окно, длина которого больше чем N .

- 10.41. Рассмотрите устойчивую ЛС-систему с вещественнозначным входным сигналом $x[n]$, вещественной импульсной характеристикой $h[n]$ и выходным сигналом $y[n]$. Допустим, что $x[n]$ — белый шум с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_x^2 , а характеристическая функция имеет вид:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}},$$

где a_k и b_k — вещественные числа. При этом пара сигнал–отклик системы удовлетворяет линейному разностному уравнению:

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k].$$

При нулевых коэффициентах a_k выходной сигнал называется скользящим средним линейного случайного процесса (СС-процессом). Если же все коэффициенты $b_k = 0$, то $y[n]$ носит название автогрессивного линейного случайного процесса (АР-процесса). Наконец, при $M \neq 0$ и $N \neq 0$ выходной сигнал называют автогрессивным скользящим средним линейного случайного процесса (ССАР-процессом).

- Выразите автокорреляцию $y[n]$ через импульсную характеристику $h[n]$ линейной системы.
- Опираясь на предыдущее выражение, запишите плотность спектра мощности сигнала $y[n]$ через КЧХ системы.
- Покажите, что автокорреляционная последовательность $\varphi_{yy}[m]$ СС-процесса отлична от нуля только на промежутке $|m| \leq M$.
- Найдите выражение для автокорреляционной последовательности АР-процесса.
- Проверьте, что, если $b_0 = 1$, автокорреляционная функция АР-процесса удовлетворяет разностному уравнению:

$$\varphi_{yy}[0] = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_{yy}[k] + \sigma_x^2, \quad \varphi_{yy}[m] = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_{yy}[m-k], \quad m \geq 1.$$

- е) Опираясь на результат предыдущего пункта и симметрию последовательности $\varphi_{yy}[m]$, покажите, что

$$\sum_{k=1}^N a_k \varphi_{yy}[|m-k|] = \varphi_{yy}[m], \quad 1 \leq m \leq N.$$

Можно доказать, что в рамках модели случайного процесса при данных коэффициентах a_k и σ_x^2 отсчеты $\varphi_{yy}[m]$ ($m = 0, 1, \dots, N$) однозначно восстанавливаются по разностному уравнению, что можно использовать в формуле из п. «б» задачи для вычисления спектральной плотности мощности сигнала $y[n]$. Этот подход служит основой ряда параметрических спектральных оценок. (Подробное обсуждение упомянутых методов можно найти в [45, 81 и 95].)

- 10.42. Эта задача иллюстрирует движущую пружину основанных на БПФ процедур интерполирования отсчетов (полученных с частотой, удовлетворяющей условиям теоремы Найквиста) периодического непрерывного сигнала. Предположим, что периодический сигнал

$$x_c(t) = \frac{1}{16} \sum_{k=-4}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{jk\pi}$$

обрабатывается системой из рис. 10.39.

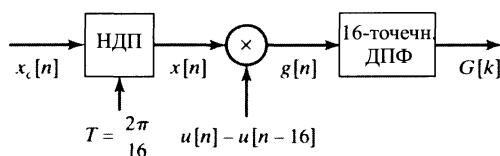


Рис. 10.39.

- а) Изобразите 16-членную последовательность $G[k]$.

- б) Покажите, как по последовательности $G[k]$ можно построить 32-членную последовательность $Q[k]$, обратное 32-точечное ДПФ от которой равно

$$q[n] = \alpha x_c \left(\frac{2\pi n}{32} \right), \quad 0 \leq n \leq 31$$

при некоторой ненулевой константе α , точное значение которой указывать необязательно.

- 10.43. В большинстве практических приложений естественные условия не позволяют обрабатывать длинные последовательности. Однако довольно много полезной информации можно извлечь и из отдельных участков последовательности. В этой задаче вы увидите вычисление преобразования Фурье бесконечного сигнала $x[n]$, представленного своим участком в 256 отсчетов на промежутке $0 \leq n \leq 255$. Вы определяете сигнал

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq 255, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

и вычисляете 256-точечное ДПФ от него.

- а) Предположим, что $x[n]$ — дискретизованная версия непрерывного сигнала $x_c(t)$, полученная с частотой дискретизации $f_s = 20 \text{ кГц}$:

$$x[n] = x_c(nT_s), \quad 1/T_s = 20 \text{ кГц}.$$

Допустим, частоты сигнала $x_c(t)$ ограничены сверху значением 10 кГц . Обозначим ДПФ сигнала $\hat{x}[n]$ через $\hat{X}[k]$, $k = 0, 1, \dots, 255$. Каким непрерывным частотам соответствуют отсчеты $\hat{X}[32]$ и $\hat{X}[231]$? Запишите свой ответ в герцах.

- б) Выразите Фурье-образ последовательности $\hat{x}[n]$ через Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ исходного сигнала $x[n]$ и Фурье-образ $W_R(e^{j\omega})$ 256-членного прямоугольного окна $w_R[n]$.
- в) Предположим, что вы пытаетесь применить технику усреднения для оценки значения преобразования при $k = 32$:

$$X_{avg}[32] = \alpha \hat{X}[31] + \hat{X}[32] + \alpha \hat{X}[33].$$

Такой подход эквивалентен умножению сигнала $\hat{x}[n]$ на новое окно $w_{avg}[n]$ перед вычислением ДПФ. Покажите, что Фурье-образ окна $W_{avg}(e^{j\omega})$ должен иметь вид:

$$W_{avg}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega = 0, \\ \alpha, & \omega = \pm 2\pi/L, \\ 0, & \omega = 2\pi k/L, \quad k = 2, 3, \dots, L-2, \end{cases}$$

где $L = 256$.

- г) Покажите, что ДВПФ этого нового окна может быть записано в терминах Фурье-образа $W_R(e^{j\omega})$ и его сдвигов.
- д) Найдите простую формулу, описывающую окно $w_{avg}[n]$, и начертите график окна при $\alpha = -0,5$ на промежутке $0 \leq n \leq 255$.

- 10.44. Довольно часто полезно увеличить масштаб отдельного участка ДПФ сигнала для более подробного его исследования. В этой задаче вы познакомитесь с двумя методами получения дополнительных отсчетов Фурье-образа $X(e^{j\omega})$ на интересующей нас полосе частот.

Предположим, что $X_N[k]$ — N -точечное ДПФ конечного сигнала $x[n]$. Напомним, что $X_N[k]$ состоит из отсчетов функции $X(e^{j\omega})$ в частотах $2\pi k/N$. Имея $X_N[k]$, нам хотелось бы вычислить N дополнительных отсчетов функции $X(e^{j\omega})$ между $\omega = \omega_c - \Delta\omega$ и $\omega = \omega_c + \Delta\omega$, расстояния между которыми равно $2\Delta\omega/N$, где

$$\omega_c = \frac{2\pi k_c}{N} \quad \text{и} \quad \Delta\omega = \frac{2\pi k_\Delta}{N}.$$

Этот процесс эквивалентен увеличению Фурье-образа $X(e^{j\omega})$ на участке частот $\omega_c - \Delta\omega < \omega < \omega_c + \Delta\omega$. Одна из систем увеличения приведена на рис. 10.40. Предположим, что $x_z[n]$ — продолженная нулем до необходимой длины последовательность, а $h[n]$ — импульсная характеристика фильтра нижних частот с частотой отсечки $\Delta\omega$.

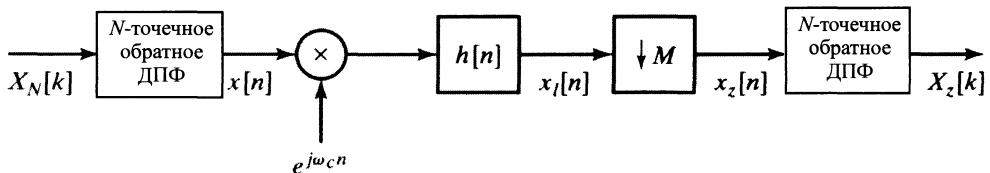


Рис. 10.40.

- Выразите через k_Δ и N максимальное значение (не обязательно целое) M , которое можно использовать, если в понижающем дискретизаторе наложение частот не возникает.
- Рассмотрите сигнал $x[n]$, чей Фурье-образ изображен на рис. 10.41. Учитывая максимальное значение M , найденное в предыдущем пункте, начертите график Фурье-образа промежуточных сигналов $x_\ell[n]$ и $x_z[n]$ для случая $\omega_c = \pi/2$ и $\Delta\omega = \pi/6$. Проверьте, что система действительно обеспечивает искомые отсчеты.

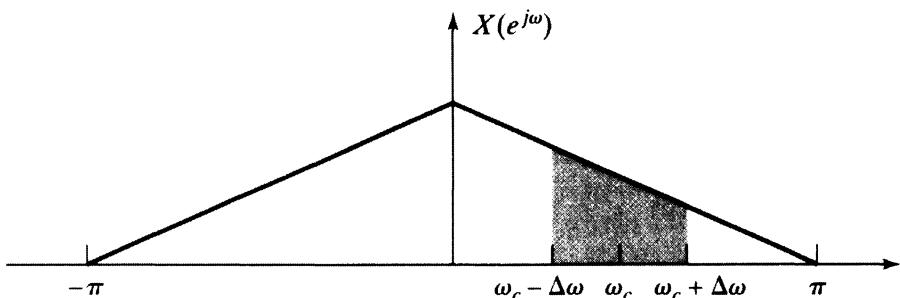


Рис. 10.41.

Другая процедура получения дополнительных отсчетов основывается на интерпретации конечной последовательности $X_N[k]$ как входной последовательности системы из рис. 10.42. Импульсная характеристика первой подсистемы равна

$$p[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n + rN],$$

а КЧХ фильтра с импульсной характеристикой $h[n]$ имеет вид:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/M, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Увеличенный выходной сигнал системы определяется как

$$X_z[n] = \tilde{X}_{NM}[k_c - k_\Delta + n], \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

при подходящих значениях k_c и k_Δ . Далее будем предполагать, что выбор k_Δ обеспечивает целочисленность M .

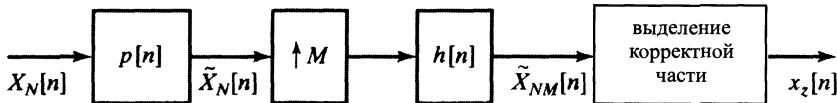


Рис. 10.42.

- в) Пусть идеальный фильтр нижних частот с импульсной характеристикой $h[n]$ аппроксимируется детерминированным линейно-фазовым фильтром типа I длины 513 (с ненулевыми отсчетами импульсной характеристики при $0 \leq n \leq 512$). Укажите, какие члены последовательности $\tilde{X}_{NM}[n]$ дают искомые частотные отсчеты?
- г) Опираясь на типичные спектры $X_N[k]$ и $X(e^{j\omega})$, обоснуйте, что система из рис. 10.42 решает поставленную задачу.

ГЛАВА 11

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА

11.1. Введение

Для полного описания Фурье-образа общей последовательности необходимо указать как вещественную, так и мнимую часть его значений на полуинтервале $-\pi < \omega \leq \pi$ или их модуль и фазу. Однако в некоторых ситуациях значения Фурье-образа связаны некоторым соотношением. В § 2.9, например, было доказано, что Фурье-образ вещественнозначной последовательности $x[n]$ сопряженно-симметричен, т. е. $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$. Следовательно, значения Фурье-образа вещественнозначной последовательности на отрезке частот $[0; \pi]$ полностью определяют его значения на промежутке $[-\pi; 0]$. Кроме того, в предположениях о минимальности фазы (см. § 5.5) модуль и фаза Фурье-образа зависят друг от друга: фаза в этом случае определяет модуль Фурье-образа с точностью до скалярного множителя, и наоборот. Наконец, в § 8.6 было доказано, что отсчеты Фурье-образа $X(e^{j\omega})$ N -членной последовательности, вычисленные в N равномерно распределенных частотах, определяют эту функцию на всем периоде.

Здесь мы убедимся, что условие детерминированности последовательности влечет однозначное соотношение между вещественной и мнимой частями ее Фурье-образа. Связь между вещественной и мнимой частями комплекснозначной функции такого типа появляется не только в контексте обработки сигналов, в связи с чем оно имеет общее название: *соотношение преобразования Гильберта*. Кроме того, мы исследуем близкие соотношения для ДПФ и последовательностей с односторонним преобразованием Фурье. В § 11.4 мы покажем, как соотношение между модулем и фазой минимально-фазовой последовательности можно интерпретировать в терминах преобразования Гильберта.

Основываясь на интуиции, мы не будем давать строгих доказательств большинства результатов. Важно иметь в виду, что соотношение преобразования Гильберта можно аккуратно вывести из свойств аналитических функций (см. задачу 11.21).

Практически все функции комплексного переменного, возникающие в рамках математического представления дискретных сигналов и систем, относятся к очень хорошему и обширному классу функций. За небольшим исключением,

z -преобразования, с которыми мы уже сталкивались, имеют корректно определенные области, в которых представляющий их степенной ряд абсолютно сходится. По определению, аналитической функцией называется такая функция, которая совпадает со своим равномерно сходящимся рядом Тейлора внутри его ОС. Таким образом, z -преобразование является аналитической функцией внутри своей ОС. В качестве одного из простейших свойств аналитических функций получаем, что z -преобразование бесконечно дифференцируемо внутри своей ОС.

Свойства аналитических функций накладывают некоторые довольно сильные ограничения на поведение z -преобразования внутри ОС. С другой стороны, поскольку преобразование Фурье можно рассматривать как ограничение z -преобразования на единичную окружность, то аналитичность z -преобразования диктует определенные условия и на Фурье-образ. Одно из этих ограничений состоит в условиях Коши–Римана, которые связывают частные производные вещественной и мнимой частей аналитической функции (см., например, [25]). Другое ограничение возникает ввиду интегральной теоремы Коши, согласно которой значения комплексной аналитической функции внутри замкнутого контура, целиком лежащего внутри ОС, полностью определяются значениями этой функции на границе контура. Основываясь на этих свойствах аналитических функций, после некоторых дополнительных предположений можно вывести явное интегральное соотношение между вещественной и мнимой частями z -преобразования, ограниченного на замкнутый контур (например, единичную окружность), лежащий внутри ОС. В математической литературе упомянутое соотношение часто называют *формулой Пуассона*, а в контексте теории систем его называют *соотношением преобразования Гильберта*.

Оставив строгий математический подход специалистам, мы выведем соотношение преобразования Гильберта, основываясь на том простом факте, что вещественная и мнимая части ограничения z -преобразования детерминированной последовательности на единичную окружность совпадают с преобразованиями четной и нечетной частей последовательности соответственно (свойства 5 и 6 табл. 2.1). Мы покажем, что детерминированная последовательность полностью определяется своей четной частью, откуда будет следовать, что ограничение z -преобразования последовательности на единичную окружность полностью определяется своей вещественной частью. Кроме того, используя это свойство z -преобразования детерминированной последовательности, мы покажем, что в некоторых дополнительных предположениях z -преобразование последовательности определяется своим модулем на единичной окружности.

Понятие аналитического сигнала является одной из важнейших концепций обработки непрерывных сигналов. Аналитическим сигналом называют (аналитическую) функцию комплексного времени, чей Фурье-образ обращается в нуль при отрицательных частотах. Комплексную последовательность ни в каком смысле нельзя рассматривать как аналитическую, поскольку она зависит от целочисленной переменной. Однако возможно связать вещественную и мнимую части комплексной последовательности, имеющей нулевой спектр на единичной окружности при $-\pi < \omega < 0$. Аналогичный подход берут на вооружение при выводе соотношения между вещественной и мнимой частями ДПФ периодической или конечной последовательности. В этом случае условие «детерминированности» означает

чает, что периодическая последовательность должна иметь нулевые отсчеты на второй половине каждого периода.

Итак, в этой главе понятие детерминированности используется для соотнесения четной и нечетной компонент функции или, что то же самое, вещественной и мнимой частей ее преобразования. Мы будем эксплуатировать эту идею в четырех ситуациях. Во-первых, мы найдем соотношение между вещественной и мнимой частями Фурье-образа $X(e^{j\omega})$ последовательности $x[n]$, имеющей нулевые отсчеты при $n < 0$. Во-вторых, мы выведем аналогичное соотношение для вещественной и мнимой частей ДПФ периодической последовательности, которую можно считать конечной последовательностью длины N , с условием: последние ее $(N/2) - 1$ отсчета равны нулю. В-третьих, мы получим соотношение между вещественной и мнимой частями логарифма преобразования Фурье в предположении о том, что обратное преобразование от логарифма обращается в нуль при $n < 0$. Формула, связывающая вещественную и мнимую части логарифма преобразования Фурье, соответствует соотношению между логарифмом модуля и фазой функции $X(e^{j\omega})$. Наконец, мы выпишем формулу, связывающую вещественную и мнимую части комплексной последовательности, чей Фурье-образ, рассматриваемый как периодическая функция, обращается в нуль на второй половине своего периода.

11.2. Вещественная и мнимая части Фурье-образа детерминированной последовательности

Любая последовательность $x[n]$ представляется в виде суммы своей четной $x_e[n]$ и нечетной $x_o[n]$ частей¹:

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n], \quad \text{где} \quad (11.1)$$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]), \quad (11.2)$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]). \quad (11.3)$$

Эти формулы справедливы для любой последовательности, вне зависимости от ее детерминированности и вещественности. Однако если $x[n]$ — детерминирована, т. е. $x[n] = 0$ при $n < 0$, то все ее отсчеты можно восстановить по $x_e[n]$ или все, кроме $x[0]$ по $x_o[n]$. Рассмотрим, например, детерминированную последовательность $x[n]$ и ее четную и нечетную части из рис. 11.1. Так как $x[n]$ детерминирована, то $x[n] = 0$ при $n < 0$, а $x[-n] = 0$ при $n > 0$. Следовательно, ненулевые участки последовательностей $x[n]$ и $x[-n]$ не перекрываются, за исключением $n = 0$. По этим причинам формулы (11.2) и (11.3) влекут соотношения:

$$x[n] = 2x_e[n]u[n] - x_e[0]\delta[n], \quad (11.4)$$

$$x[n] = 2x_o[n]u[n] + x_e[0]\delta[n]. \quad (11.5)$$

¹ В главе 2 таким образом мы обозначали сопряженно-симметричную и сопряженно-антисимметричную части последовательности, но здесь нам удобнее закрепить это обозначение за четной и нечетной частями.

Справедливость этих тождеств легко проверить на примере рис. 11.1. Заметим, что $x[n]$ полностью определяется своей четной частью $x_e[n]$. С другой стороны, $x_o[0] = 0$, так что мы можем восстановить все отсчеты $x[n]$ по последовательности $x_o[n]$, за исключением нулевого.

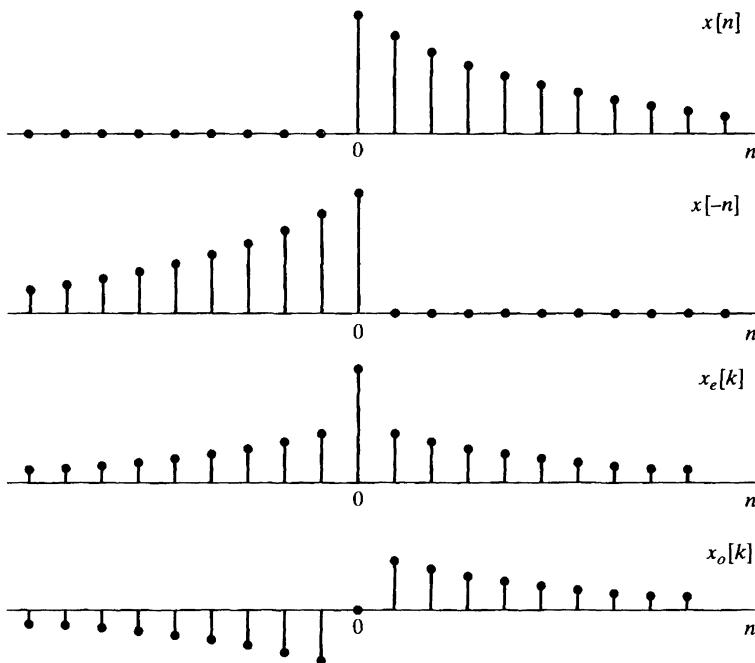


Рис. 11.1. Четная и нечетная части вещественнонезначной детерминированной последовательности

Предположим теперь, что $x[n]$ устойчива, т. е. абсолютно суммируема. Тогда существует ее Фурье-образ

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}), \quad (11.6)$$

где $X_R(e^{j\omega})$ — вещественная, а $X_I(e^{j\omega})$ — мнимая части. Напомним, что в случае вещественнонезначной последовательности $x[n]$ $X_R(e^{j\omega})$ — Фурье-образ $x_e[n]$, а $jX_I(e^{j\omega})$ — Фурье-образ $x_o[n]$. Следовательно, вещественная часть Фурье-образа $X_R(e^{j\omega})$ вещественнонезначной детерминированной устойчивой последовательности полностью определяет $X(e^{j\omega})$, поскольку мы можем вычислить эту функцию по следующей схеме:

- 1) найти $x_e[n]$, применив обратное преобразование Фурье к функции $X_R(e^{j\omega})$;
- 2) восстановить $x[n]$ по формуле (11.4);
- 3) вычислить $X(e^{j\omega})$ как преобразование Фурье последовательности $x[n]$.

Отсюда, конечно, следует, что мнимая часть Фурье-образа такой последовательности восстанавливается по его вещественной части. В примере 11.1 иллюстрируется процедура вычисления функций $X(e^{j\omega})$ и $X_I(e^{j\omega})$ по $X_R(e^{j\omega})$.

Пример 11.1. Конечная последовательность

Рассмотрим вещественноизначную детерминированную последовательность $x[n]$ с вещественной частью ее ДВПР вида:

$$X_R(e^{j\omega}) = 1 + \cos 2\omega. \quad (11.7)$$

Наша цель — определить исходную последовательность $x[n]$, ее Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ и мнимую часть $X_I(e^{j\omega})$. Прежде всего, воспользовавшись формулами Эйлера, представим косинус из формулы (11.7) в виде линейной комбинации экспонент:

$$X_R(e^{j\omega}) = 1 + \frac{1}{2}e^{-j2\omega} + \frac{1}{2}e^{j2\omega}. \quad (11.8)$$

Нам известно, что $X_R(e^{j\omega})$ — Фурье-образ $x_e[n]$, четной части последовательности $x[n]$, определенной формулой (11.2). Сравнивая равенство (11.8) с определением преобразования Фурье (2.129) (см. с. 68), можно получить:

$$x_e[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-2] + \frac{1}{2}\delta[n+2].$$

Имея четную часть последовательности, мы ее восстанавливаем согласно формуле (11.4):

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-2]. \quad (11.9)$$

Отсюда

$$X(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j2\omega} = 1 + \cos 2\omega - j \sin 2\omega. \quad (11.10)$$

Наконец, из последнего равенства извлекается мнимая часть Фурье-образа, равная

$$X_I(e^{j\omega}) = -\sin 2\omega. \quad (11.11)$$

В качестве альтернативного метода вычисления мнимой части можно сначала получить $x_o[n]$ из (11.3), а затем, подставив выражение (11.9) в (11.3), найти

$$x_0 = \frac{1}{2}\delta[n-2] - \frac{1}{2}\delta[n+2].$$

Вычисляя преобразование Фурье последовательности $x_o[n]$, приходим к выводу:

$$jX(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}e^{-j2\omega} - \frac{1}{2}e^{j2\omega} = -j \sin 2\omega,$$

$$\text{т. е. } X_I(e^{j\omega}) = -\sin 2\omega,$$

что согласуется с полученным ранее результатом. \square

Пример 11.2. Экспоненциальная последовательность

Пусть

$$X_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - \alpha \cos \omega}{1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2}, \quad |\alpha| < 1, \quad (11.12)$$

или, что то же самое,

$$X_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - (\alpha/2)(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}{1 - \alpha(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + \alpha^2}, \quad |\alpha| < 1, \quad (11.13)$$

где α — вещественное число. Определив $x_e[n]$ по формуле (11.4), мы сможем восстановить $x[n]$.

Чтобы получить $x_e[n]$, т. е. обратное преобразование Фурье от $X_R(e^{j\omega})$, полезно сначала вычислить $X_R(z)$ — z -преобразование последовательности $x_e[n]$, которое получается непосредственно из (11.13), поскольку

$$X_R(e^{j\omega}) = X_R(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}.$$

Итак, подставляя в формулу (11.13) z вместо $e^{j\omega}$, имеем

$$X_R(z) = \frac{1 - (\alpha/2)(z + z^{-1})}{1 - \alpha(z + z^{-1}) + \alpha^2} = \frac{1 - \frac{\alpha}{2}(z + z^{-1})}{(1 - \alpha z^{-1})(1 - \alpha z)}. \quad (11.14)$$

Так как мы получили $X_R(z)$ продолжением $X_R(e^{j\omega})$ на z -плоскость, ОС функции $X_R(z)$, очевидно, содержит единичную окружность и ограничена окружностями с центром в нуле, проходящими через полюсы $z = \alpha$ и $z = \alpha^{-1}$.

Теперь найдем $x_e[n]$ как обратное z -преобразование от функции $X_R(z)$, для чего разложим дробь (11.14) в сумму простейших:

$$X_R(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} + \frac{1}{1 - \alpha z} \right). \quad (11.15)$$

ОС здесь конкретизируется тем, что она должна содержать единичную окружность. Применяя обратное z -преобразование к каждой из простейших дробей, найдем

$$x_e[n] = \frac{1}{2} \alpha^n u[n] + \frac{1}{2} \alpha^{-n} u[-n]. \quad (11.16)$$

Следовательно, по формуле (11.4)

$$x[n] = \alpha^n u[n] + \alpha^{-n} u[-n] u[n] - \delta[n] = \alpha^n u[n],$$

откуда

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \quad (11.17)$$

и

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad |z| > |\alpha|. \quad \square \quad (11.18)$$

Процедуру, которую мы продемонстрировали на примерах, можно обобщить, и аналитически выразить мнимую часть $X_I(e^{j\omega})$ через вещественную $X_R(e^{j\omega})$. Из формулы (11.4), теоремы о свертке и того факта, что $x_e[0] = x[0]$, вытекает соотношение:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) U(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta - x[0], \quad (11.19)$$

где $U(e^{j\omega})$ — Фурье-образ последовательности единичного скачка $u[n]$. Как утверждалось в § 2.8, единичный скачок не относится ни к абсолютно суммируемым, ни к суммируемым с квадратом последовательностям, но преобразование Фурье от него можно вычислить. Оно равно

$$U(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \quad (11.20)$$

или, так как

$$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{1}{2} - \frac{j}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (11.21)$$

то

$$U(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k) + \frac{1}{2} - \frac{j}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (11.22)$$

Учитывая (11.22), формулу (11.19) можно переписать как

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) = \\ &= X_R(e^{j\omega}) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) d\theta - \frac{j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta - x[0]. \end{aligned} \quad (11.23)$$

Выделяя мнимую часть из (11.23) и используя тот факт, что

$$x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) d\theta, \quad (11.24)$$

приходим к соотношению:

$$X_I(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta. \quad (11.25)$$

Аналогично, опираясь на (11.5), можно получить $x[n]$ и $X(e^{j\omega})$ из $X_I(e^{j\omega})$ и $x[0]$. В итоге имеет место следующее соотношение:

$$X_R(e^{j\omega}) = x[0] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_I(e^{j\theta}) \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta. \quad (11.26)$$

Формулы (11.25) и (11.26), называемые *соотношениями дискретного преобразования Гильберта*, имеют силу для вещественной и мнимой частей Фурье-образа детерминированной устойчивой вещественноненулевой последовательности. Интегралы, которые присутствуют в этих формулах, являются несобственными интегралами, поскольку подынтегральная функция имеет особенность в точке $\omega - \theta = 0$. Для их вычисления необходимо предпринять некоторые дополнительные усилия. С другой стороны, эти интегралы можно вычислять в смысле главного значения²:

$$X_I(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi} v. p. \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta, \quad (11.27)$$

$$X_R(e^{j\omega}) = x[0] + \frac{1}{2\pi} v. p. \int_{-\pi}^{\pi} X_I(e^{j\theta}) \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta, \quad (11.28)$$

²Главное значение интеграла было введено французским математиком О. Коши, а обозначение *v. p.* — это сокращение французского словосочетания *valuer principale*. — Примеч. перев.

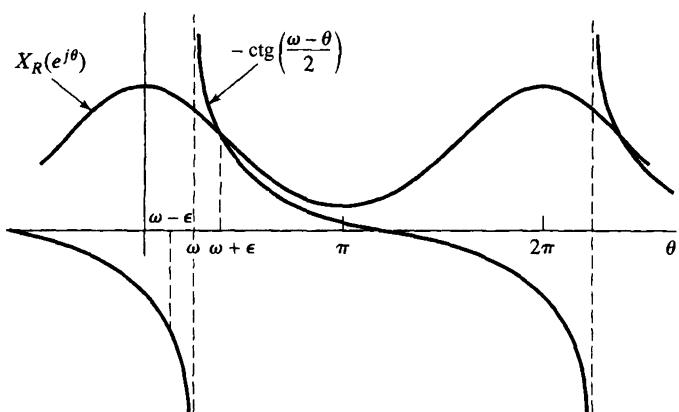
которое, как и несобственный интеграл, определяется через предел определенных интегралов, но с небольшим изменением. Согласно этому определению, например,

$$X_I(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\omega+\epsilon}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta + \int_{-\pi}^{\omega-\epsilon} X_R(e^{j\theta}) \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta \right]. \quad (11.29)$$

Формула (11.29) говорит о том, что $X_I(e^{j\omega})$ — это периодическая свертка функций $-\operatorname{ctg}(\omega/2)$ и $X_R(e^{j\theta})$, но с особенностью в точке $\theta = \omega$. Аналогично, $X_R(e^{j\omega})$ — это периодическая свертка $\operatorname{ctg}(\omega/2)$ и $X_I(e^{j\omega})$ с точностью до аддитивной константы.

Графики сворачиваемых функций из формулы (11.27) показаны на рис. 11.2. Существование предела в формуле (11.29) объясняется нечетностью функции $\operatorname{ctg}((\omega-\theta)/2)$ относительно особой точки $\theta = \omega$ и тем, что предел берется при симметричном стремлении параметра ϵ к особой точке.

Рис. 11.2. Преобразование Гильберта как периодическая свертка



11.3. Теоремы достаточности для конечных последовательностей

В предыдущем параграфе мы поняли, что детерминированность, или односторонность, последовательности влечет некоторые довольно сильные ограничения на вид ее Фурье-образа. Очевидно, результаты полученные там, применимы и к конечным детерминированным последовательностям, но, поскольку конечность последовательности более строгое ограничение, естественно ожидать более сильных свойств от их Фурье-образов.

Одна из возможностей воспользоваться конечностью последовательности состоит в том, чтобы представить ее в виде ДПФ. Так как в вычислении ДПФ

участвует сумма, а не интеграл, здесь мы избавлены от проблем с несобственными интегралами. Кроме того, ДПФ, фактически, представляет периодическую последовательность. Так что все результаты, которые мы можем получить при исследовании ДПФ конечных последовательностей, должны быть применимы и к периодическим. С другой стороны, очень важно помнить о естественной периодичности ДПФ при выводе соотношений преобразования Гильберта для конечных последовательностей. В связи с этим мы сначала разберем случай периодических последовательностей, а затем обсудим приложения наших исследований к конечным.

Рассмотрим N -периодическую последовательность $\tilde{x}[n]$, связанную с N -членной конечной последовательностью $x[n]$ соотношением:

$$\tilde{x}[n] = x[((n)_N)]. \quad (11.30)$$

Ее можно представить в виде суммы четной и нечетной периодических последовательностей:

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n] + \tilde{x}_o[n], \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (11.31)$$

где

$$\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] + \tilde{x}[-n]), \quad (11.32)$$

$$\tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] - \tilde{x}[-n]). \quad (11.33)$$

Конечно, периодическая последовательность не является детерминированной в смысле определения из § 11.2. Но можно ввести понятие «периодическая детерминированность». Скажем, что N -периодическая последовательность $\tilde{x}[n]$ является *периодически детерминированной*, если $\tilde{x}[n] = 0$ при $N/2 < n < N$, т. е. ее отсчеты равны нулю на второй половине периода. Здесь и далее будем считать, что N — четное число (случай нечетного периода разбирается в задаче 11.23). Заметим, что ввиду периодичности последовательности $\tilde{x}[n]$ имеет место и такое равенство: $\tilde{x}[n] = 0$ при $-N/2 < n < 0$. В контексте конечных последовательностей условие периодической детерминированности означает, что последние $(N/2) - 1$ отсчеты N -членной последовательности должны быть равны нулю.

На рис. 11.3 приведен пример периодически детерминированной последовательности вместе с четной и нечетной частями при $N = 8$.

Так как последовательность $\tilde{x}[n]$ равна нулю на второй половине периода, последовательность $\tilde{x}[-n]$ обращается в нуль на его первой половине. В связи с этим ненулевые участки последовательностей $\tilde{x}[n]$ и $\tilde{x}[-n]$ пересекаются лишь по нулевому отсчету. Следовательно, если $\tilde{x}[n]$ — периодически детерминированная последовательность, то

$$\tilde{x}[n] = \begin{cases} 2\tilde{x}_e[n], & 1 \leq n \leq (N/2) - 1, \\ \tilde{x}_e[n], & n = 0, N/2, \\ 0, & (N/2) + 1 \leq n \leq N - 1, \end{cases} \quad (11.34)$$

и

$$\tilde{x}[n] = \begin{cases} 2\tilde{x}_o[n], & 1 \leq n \leq (N/2) - 1, \\ 0, & (N/2) + 1 \leq n \leq N - 1. \end{cases} \quad (11.35)$$

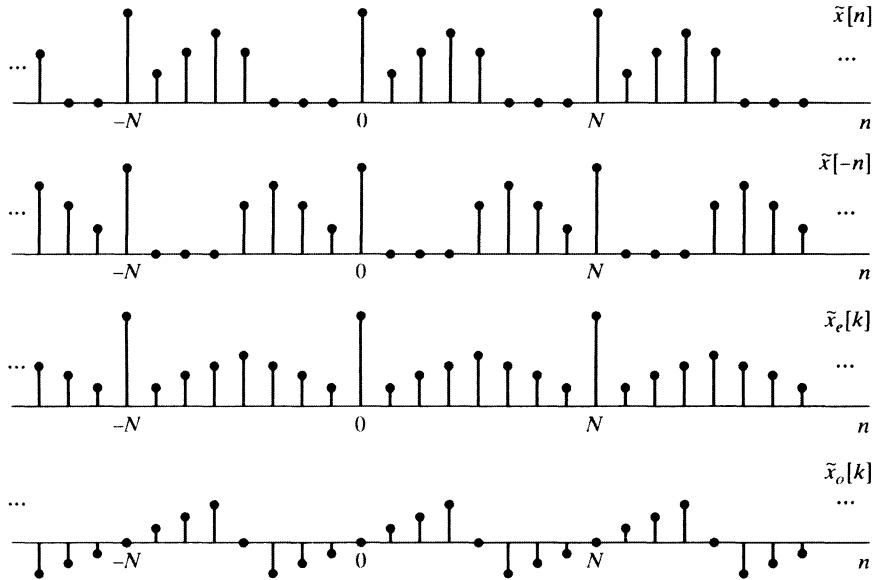


Рис. 11.3. Четная и нечетная части периодически детерминированной вещественноненулевой 8-периодической последовательности

Определив при четном N периодическую последовательность

$$\tilde{u}_N[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, N/2, \\ 2, & 1 \leq n \leq (N/2) - 1, \\ 0, & (N/2) + 1 \leq n \leq N - 1, \end{cases} \quad (11.36)$$

мы сможем записать $\tilde{x}[n]$ как

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n]\tilde{u}_N[n] + x[0]\delta[n] + x[N/2]\delta[n - (N/2)], \quad (11.37)$$

и

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}_o[n]\tilde{u}_N[n] + x[0]\tilde{\delta}[n] + x[N/2]\tilde{\delta}[n - (N/2)], \quad (11.38)$$

где $\tilde{\delta}[n]$ — периодически продолженный единичный импульс с периодом N . Таким образом, последовательность $\tilde{x}[n]$ может быть полностью восстановлена по отсчетам $\tilde{x}_e[n]$. С другой стороны, члены последовательности $\tilde{x}_o[n]$ с номерами 0 и $N/2$ всегда должны быть равны нулю, в связи с чем все отсчеты $\tilde{x}[n]$, кроме нулевого и $(N/2)$ -го, восстанавливаются по $\tilde{x}_o[n]$.

Если $\tilde{X}[k]$ — коэффициенты ДРФ вещественноненулевой периодической последовательности $\tilde{x}[n]$, то $\tilde{X}_R[k]$ — вещественная часть $\tilde{X}[k]$ является последовательностью коэффициентов ДРФ для $\tilde{x}_e[n]$, а $j\tilde{X}_I[k]$ — последовательностью коэффициентов ДРФ для $\tilde{x}_o[n]$. Следовательно, из формул (11.37) и (11.38) вытекает, что все коэффициенты ДРФ $\tilde{X}[k]$ периодически детерминированной N -периодической последовательности могут быть восстановлены по своим вещественным частям или почти все по мнимым. То есть $\tilde{X}_I[k]$ определяется последовательностью $\tilde{X}_R[k]$ и почти все коэффициенты $\tilde{X}_R[k]$ восстанавливаются по $\tilde{X}_I[k]$.

Алгоритм восстановления $\tilde{X}[k]$ и $\tilde{X}_I[k]$ по известной последовательности $\tilde{X}_R[k]$ выглядит следующим образом.

1. Вычислить $\tilde{x}_e[n]$ по формуле синтеза ДРФ:

$$\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_R[k] e^{j(2\pi/N)kn}. \quad (11.39)$$

2. Восстановить последовательность $\tilde{x}[n]$ по формуле (11.37).
3. Найти $\tilde{X}[k]$, используя формулу анализа ДРФ:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn} = \tilde{X}_R[k] + j\tilde{X}_I[k]. \quad (11.40)$$

В отличие от общей процедуры, обсуждаемой в § 11.2, этот алгоритм можно реализовать на компьютере, поскольку (11.39) и (11.40) могут быть вычислены точно и эффективно с помощью алгоритма БПФ.

Чтобы вывести явное соотношение, связывающее $\tilde{X}_R[k]$ и $\tilde{X}_I[k]$, нам нужно провести всю процедуру восстановления в общем виде. Из (11.37) и (8.36) следует, что

$$\tilde{X}[k] = \tilde{X}_R[k] + j\tilde{X}_I[k] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}_R[m] \tilde{U}_N[k-m], \quad (11.41)$$

т. е. $\tilde{X}[k]$ — периодическая свертка коэффициентов ДРФ $\tilde{X}_R[k]$ последовательности $\tilde{x}_e[n]$, с коэффициентами ДРФ $\tilde{U}_N[k]$ последовательности $\tilde{u}_N[n]$. Можно показать (см. задачу 11.22), что

$$\tilde{U}_N[k] = \begin{cases} N, & k = 0, \\ -j2 \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{N}, & k \text{ нечетно,} \\ 0, & k \text{ четно.} \end{cases} \quad (11.42)$$

В терминах последовательности

$$\tilde{V}[k] = \begin{cases} -j2 \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{N}, & k \text{ нечетно,} \\ 0, & k \text{ четно} \end{cases} \quad (11.43)$$

формулу (11.41) можно переписать в следующем виде:

$$\tilde{X}[k] = \tilde{X}_R[k] + \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}_R[M] \tilde{V}_N[k-m], \quad (11.44)$$

откуда

$$j\tilde{X}_I[k] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}_R[M] \tilde{V}_N[k-m], \quad (11.45)$$

что является искомым соотношением между вещественной и мнимой частями коэффициентов ДРФ периодически детерминированной последовательности. Аналогично, опираясь на (11.38), можно показать, что

$$\tilde{X}_R[k] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} j\tilde{X}_I[M] \tilde{V}_N[k-m] + \tilde{x}[0] + (-1)^k \tilde{x}[N/2]. \quad (11.46)$$

Формулы (11.45) и (11.46) выражают соотношение между вещественной и мнимой частями коэффициентов ДРФ периодической последовательности $\tilde{x}[n]$. Если $\tilde{x}[n]$ рассматривать как периодическое продолжение конечной последовательности $x[n]$, то

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (11.47)$$

Если $x[n]$ обладает «периодической детерминированностью» относительно периода N (т. е. $x[n] = 0$ при $n < 0$ и $n > N/2$), то все предыдущее рассуждение можно повторить в рамках ДРФ последовательности $x[n]$. Условно говоря, мы можем стереть знак «тильда» из формул (11.45) и (11.46), получив тем самым соотношения на ДПФ:

$$jX_I[k] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_R[m]V_N[k-m], & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (11.48)$$

$$X_R[k] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} jX_I[m]V_N[k-m] + x[0] + (-1)^k x[\frac{N}{2}], & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (11.49)$$

Заметим, что последовательность $V_N[k-m]$ из (11.43) N -периодична, так что нам не нужно заботиться о вычислении $((k-m))_N$ в формулах (11.48) и (11.49), представляющих собой желаемое соотношение между вещественной и мнимой частями N -точечного ДПФ вещественнозначной последовательности, реальное количество членов в которой не превосходит $\frac{N}{2} + 1$ (N — четно). Эти формулы являются циклическими свертками и (11.48), например, можно вычислить следующей процедурой

1. Применив ДПФ к последовательности $X_R[k]$, получить последовательность

$$x_{\text{ep}}[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[((-n))_N]), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (11.50)$$

2. Вычислить периодическую нечетную часть $x[n]$ по формуле:

$$x_{\text{op}}[n] = \begin{cases} x_{\text{ep}}[n], & 0 < n < N/2, \\ -x_{\text{ep}}[n], & N/2 < n \leq N-1, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (11.51)$$

3. Находя ДПФ последовательности $x_{\text{op}}[n]$, найти $jX_I[k]$.

Заметим, что если на втором шаге процедуры вместо нечетной части $x[n]$ вычислить последовательность

$$\bar{x}[n] = \begin{cases} x_{\text{ep}}[0], & n = 0, \\ 2x_{\text{ep}}[n], & 0 < n < N/2, \\ x_{\text{ep}}[N/2], & n = N/2, \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (11.52)$$

то ее ДПФ $X[k]$ совпадет с полным ДПФ $x[n]$.

Пример 11.3. Периодическая последовательность

Рассмотрим периодически детерминированную последовательность периода 4, у которой

$$X_R[k] = \begin{cases} 2, & k = 0, \\ 3, & k = 1, \\ 4, & k = 2, \\ 3, & k = 3. \end{cases}$$

Вещественную часть ее ДПФ можно найти двумя способами. Первый из них основан на формуле (11.48). При $N = 4$

$$V_4[k] = \begin{cases} 2j, & k = -1 + 4m, m \in \mathbb{Z}, \\ -2j, & k = 1 + 4m, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Теперь, согласно (11.48), получаем

$$jX_I[k] = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 X_R[k] V_4[k-m] = \begin{cases} j, & k = 1, \\ -j, & k = 3, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Второй способ — следовать процедуре, включающей в себя соотношения (11.50) и (11.51). Вычисление обратного ДПФ дает

$$x_e[n] = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X_R[k] W_4^{-kn} = \frac{1}{4} (2 + 3 \cdot j^n + 4 \cdot (-1)^n + 3 \cdot (-j)^n) = \begin{cases} 3, & n = 0, \\ -\frac{1}{2}, & n = 1, 3, \\ 0, & n = 2. \end{cases}$$

Обратите внимание на то, что, хотя сама последовательность не обладает четной симметрией, периодическое продолжение $x_e[n]$ четное. Таким образом, значения ДПФ $X_R[k]$ последовательности $x_e[n]$ чисто вещественны. Формула (11.51) позволяет найти периодически нечетную часть $x_{op}[n]$:

$$x_{op}[n] = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & n = 1, \\ \frac{1}{2}, & n = 3. \end{cases}$$

Теперь значения $jX_I[k]$ можно найти как ДПФ от $x_{op}[n]$:

$$jX_I[k] = \sum_{n=0}^3 x_{op}[n] W_4^{nk} = -\frac{1}{2} W_4 k + \frac{1}{2} W_4^{3k} = \begin{cases} j, & k = 1, \\ -j, & k = 3, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Мы видим, что оба метода, естественно, дают один и тот же результат. \square

11.4. Взаимосвязь абсолютного значения и фазы

До сих пор нас интересовало соотношение между вещественной и мнимой частями Фурье-образа последовательности. Другой интересный вопрос: как связаны между собой его модуль и фаза? В этом параграфе мы рассмотрим условия, при которых упомянутые характеристики преобразования однозначно восстанавливаются друг из друга.

На первый взгляд, может показаться, что из тесной связи между вещественной и мнимой частями функции легко следует искомое соотношение между ее модулем и фазой, однако это не так — пример 5.11 на с. 283 подтверждает это утверждение. Характеристические функции $H_1(z)$ и $H_2(z)$ в примере соответствовали детерминированной устойчивой системе. Следовательно, вещественная и мнимая части функции $H_1(e^{j\omega})$ связаны между собой соотношением преобразования Гильберта (11.27) и (11.28), так же как и аналогичные части функции $H_2(e^{j\omega})$. Однако фазу $\angle H_1(e^{j\omega})$ нельзя восстановить по модулю $|H_1(e^{j\omega})|$, поскольку функции $H_1(e^{j\omega})$ и $H_2(e^{j\omega})$ обладают одинаковым модулем, но разными фазами.

Соотношение преобразования Гильберта между вещественной и мнимой частями Фурье-образа последовательности $x[n]$ выводилось для детерминированности последовательности. Аналогичное соотношение между модулем и фазой Фурье-образа получается в предположении о детерминированности последовательности $\hat{x}[n]$, непосредственно строящейся по $x[n]$, Фурье-образ $\hat{X}(e^{j\omega})$ которой равен логарифму от Фурье-образа последовательности $x[n]$. Определим такую последовательность $\hat{x}[n]$, что

$$x[n] \xleftarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j \arg[X(e^{j\omega})]}, \quad (11.53)$$

$$\hat{x}[n] \xleftarrow{\mathcal{F}} \hat{X}(e^{j\omega}), \quad (11.54)$$

где

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \ln X(e^{j\omega}) = \ln |X(e^{j\omega})| + j \arg[X(e^{j\omega})]. \quad (11.55)$$

Наполним, что согласно определению из § 5.2 $\arg[X(e^{j\omega})]$ обозначает непрерывную фазу функции $X(e^{j\omega})$. Введенная выше последовательность $\hat{x}[n]$ обычно называется *комплексным спектром* последовательности $x[n]$ (см. [106 и 108]).

Если последовательность $\hat{x}[n]$ детерминирована, то вещественная и мнимая части функции $\hat{X}(e^{j\omega})$, т. е. $\ln |X(e^{j\omega})|$ и $\arg[X(e^{j\omega})]$, будут связаны формулами (11.27) и (11.28):

$$\arg[X(e^{j\omega})] = -\frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\pi}^{\pi} \ln |X(e^{j\omega})| \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta, \quad (11.56)$$

$$\ln |X(e^{j\omega})| = \hat{x}[0] + \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\pi}^{\pi} \arg[X(e^{j\omega})] \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta, \quad (11.57)$$

где

$$\hat{x}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |X(e^{j\omega})| d\omega. \quad (11.58)$$

В задаче 11.32 доказывается, что условие минимальности фазы, сформулированное в § 5.7, а именно принадлежность всех нулей и полюсов функции $X(z)$ единичному кругу, гарантирует детерминированность комплексного спектра. Таким образом, условие минимальности фазы и детерминированность комплексного спектра, по существу, являются тождественными ограничениями, полученными с разными целями. Заметим, что если $\hat{x}[n]$ — детерминированная последовательность, то $\arg[X(e^{j\omega})]$ полностью определяется функцией $\ln|X(e^{j\omega})|$. С другой стороны, чтобы полностью восстановить функцию $\ln|X(e^{j\omega})|$ по фазе, нам еще необходимо значение $\hat{x}[0]$. Если оно неизвестно, то $\ln|X(e^{j\omega})|$ восстанавливается с точностью до аддитивной константы или, что эквивалентно, модуль $|X(e^{j\omega})|$ определяется своей фазой с точностью до скалярного множителя.

Минимальность фазы и детерминированность комплексного спектра не единственные условия, обеспечивающие соотношение между модулем и фазой Фурье-образа. Хайес с соавторами показал (см. [56]), что если z -преобразование конечной последовательности не имеет инверсных друг другу пар нулей, то сама последовательность (а значит, и ее модуль Фурье-образа) восстанавливается по фазе Фурье-образа с точностью до мультипликативной константы.

11.5. Соотношения преобразования Гильберта для комплекснозначных последовательностей

Мы рассмотрели соотношения преобразования Гильберта для Фурье-образов детерминированных последовательностей и для ДПФ периодически детерминированных последовательностей, т. е. имеющих нулевые отсчеты на второй половине своего периода. Теперь мы исследуем комплекснозначные последовательности, вещественная и мнимые части которых связаны друг с другом через дискретную свертку, напоминающую соотношения, изучавшиеся в предыдущих параграфах. Формулы, которые мы получим, особенно полезны при представлении полосовых сигналов в виде комплексных сигналов, подобных аналитическим функциям из теории непрерывных сигналов.

Как уже отмечалось, вывод соотношений преобразования Гильберта можно основывать на понятии детерминированности, или односторонности, последовательности. Поскольку нас интересует связь между вещественной и мнимой частями комплексной последовательности, односторонность будет применяться к последовательности. Конечно, ввиду периодичности Фурье-образа мы не можем требовать, чтобы его значения были нулевыми при всех отрицательных частотах. Вместо этого мы рассмотрим последовательности, значения Фурье-образа которых равны нулю на второй половине периода, т. е. их z -преобразование тождественно обращается в нуль на нижней дуге единичной окружности ($-\pi \leq \omega < 0$). Итак, если $x[n]$ — наша последовательность, а $X(e^{j\omega})$ — ее Фурье-образ, то мы потребуем, чтобы

$$X(e^{j\omega}) = 0 \quad \text{при} \quad -\pi \leq \omega < 0. \quad (11.59)$$

(Можно также предполагать, что $X(e^{j\omega}) = 0$ при $0 < \omega \leq \pi$.) Ясно, что последовательность $x[n]$, о которой идет речь, должна быть комплексной, поскольку Фурье-образ вещественнозначной последовательности сопряженно-симметричен

$(X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}))$ и условие (11.59) в этом случае дает полностью нулевую функцию. Выделяя вещественную и мнимую части последовательности $x[n]$, можно записать:

$$x[n] = x_r[n] + jx_i[n], \quad (11.60)$$

где отсчеты $x_r[n]$ и $x_i[n]$ — вещественные числа. Аналогичный сигнал из непрерывной теории записывается аналитической функцией и носит название *аналитического сигнала*. Хотя с формальной точки зрения последовательность не может быть аналитической, мы будем применять терминологию из этой теории к последовательностям с односторонним Фурье-образом.

Пусть $X_R(e^{j\omega})$ и $X_I(e^{j\omega})$ — Фурье-образы вещественнозначных последовательностей $x_r[n]$ и $x_i[n]$ соответственно. Тогда

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}), \quad (11.61)$$

откуда

$$X_R(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})), \quad (11.62)$$

$$jX_I(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})). \quad (11.63)$$

Заметим, что (11.63) представляет собой выражение для $jX_I(e^{j\omega})$ — Фурье-образа чисто мнимого сигнала $jx_i[n]$.

Комплекснозначные функции $X_R(e^{j\omega})$ и $jX_I(e^{j\omega})$ здесь играют ту же роль, что четная и нечетная части детерминированной последовательности в предыдущем параграфе. Однако $X_R(e^{j\omega})$ — сопряженно-симметрична (т. е. $X_R(e^{j\omega}) = X_R^*(e^{-j\omega})$), а $jX_I(e^{j\omega})$ — сопряженно-антисимметрична ($jX_I(e^{j\omega}) = -jX_I^*(e^{-j\omega})$).

Рисунок 11.4 посвящен примеру комплекснозначного одностороннего Фурье-образа последовательности $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$ и соответствующим преобразованиям вещественнозначных последовательностей $x_r[n]$ и $x_i[n]$. На нем хорошо видно сокращение значений слагаемых из формул (11.62) и (11.63).

Если $X(e^{j\omega}) = 0$ при $-\pi \leq \omega < 0$, то участки с ненулевыми значениями функций $X(e^{j\omega})$ и $X^*(e^{-j\omega})$ не пересекаются, в связи с чем $X(e^{j\omega})$ можно восстановить по любой из функций: $X_R(e^{j\omega})$ или $X_I(e^{j\omega})$. Напомним, что в ситуации из § 11.3 детерминированная последовательность восстанавливалась по своей нечетной части всюду, кроме конечных точек. А здесь, поскольку мы предполагаем, что значения $X(e^{j\omega})$ в точках $\omega = \pm\pi$ равны нулю, эта функция полностью определяется своей мнимой частью $jX_I(e^{j\omega})$. В частности,

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2X_R(e^{j\omega}), & 0 \leq \omega < \pi, \\ 0, & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad (11.64)$$

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2jX_I(e^{j\omega}), & 0 \leq \omega < \pi, \\ 0, & -\pi \leq \omega < 0. \end{cases} \quad (11.65)$$

Отсюда легко выписать соотношение на функции $X_R(e^{j\omega})$ и $X_I(e^{j\omega})$:

$$X_I(e^{j\omega}) = \begin{cases} -jX_R(e^{j\omega}), & 0 < \omega < \pi, \\ jX_R(e^{j\omega}), & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases} \quad (11.66)$$

или

$$X_I(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X_R(e^{j\omega}), \quad (11.67)$$

где

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi, \\ j, & -\pi < \omega < 0. \end{cases} \quad (11.68)$$

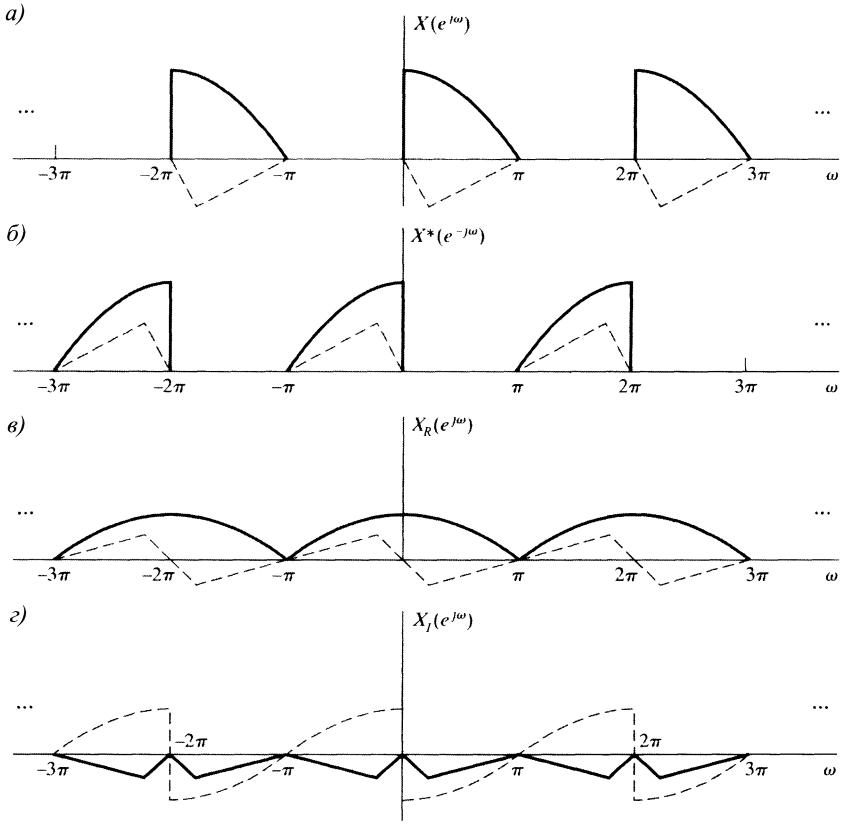


Рис. 11.4. Разложение одностороннего Фурье-образа (сплошной линией изображен график вещественной части, а пунктиром — мнимой)

Соотношения (11.67) и (11.68) иллюстрируются рис. 11.4 *в*) и *г*). В нашей ситуации $X_I(e^{j\omega})$ — Фурье-образ последовательности $x_i[n]$, мнимой части $x[n]$, а $X_R(e^{j\omega})$ — Фурье-образ вещественной части $x_r[n]$ этой последовательности. Таким образом, согласно (11.67) и (11.68), отсчеты $x_i[n]$ можно восстановить, обрабатывая сигнал $x_r[n]$ дискретной ЛС-системой с характеристической функцией $H(e^{j\omega})$ из (11.68). Поскольку модуль характеристической функции постоянен и равен единице, а ее аргумент принимает значение $-\pi/2$ над промежутком $(0; \pi)$ и $+\pi/2$ над $(-\pi; 0)$, то такую систему называют *идеальным девяностоградусным фазовращателем*. Эту же систему в контексте обработки последовательностей именуют *преобразователем Гильберта*. Из формул (11.67) и (11.68) вытекает,

что

$$X_R(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})} X_I(e^{j\omega}) = -H(e^{j\omega}) X_I(e^{j\omega}). \quad (11.69)$$

Значит, последовательность $-x_r[n]$ тоже однозначно восстанавливается по $x_i[n]$ с помощью девяностоградусного фазовращателя.

Импульсную характеристику девяностоградусного фазовращателя с характеристической функцией из (11.68) можно записать как

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 j e^{j\omega n} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi j e^{j\omega n} d\omega$$

или

$$h[n] = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin^2(\pi n/2)}{n}, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0. \end{cases} \quad (11.70)$$

Ее график изображен на рис. 11.5.

Опираясь на (11.67)–(11.69), получаем искомые соотношения преобразования Гильберта между вещественной и мнимой частями дискретного аналитического сигнала:

$$x_i[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m] x_r[m], \quad (11.71)$$

$$x_r[n] = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m] x_i[m]. \quad (11.72)$$

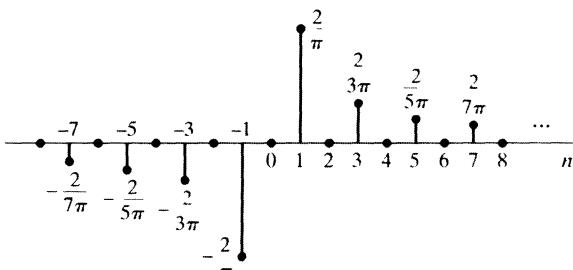
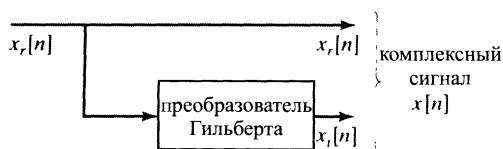


Рис. 11.5. Импульсная характеристика идеального преобразователя Гильберта или девяностоградусного фазовращателя

На рис. 11.6 приведена блок-схема системы, использующей преобразователь Гильберта для формирования комплексного аналитического сигнала, который представляет собой пару вещественнонзначеных последовательностей.

Рис. 11.6. Блок-схема системы, генерирующей комплекснозначную последовательность с односторонним Фурье-образом



11.5.1. Проектирование преобразователя Гильберта

Импульсная характеристика преобразователя Гильберта (см. (11.70)) не относится к классу абсолютно суммируемых последовательностей. Поэтому ряд

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-jn\omega}, \quad (11.73)$$

определяющий характеристическую функцию, сходится только в среднеквадратичном. Таким образом, идеальный преобразователь Гильберта, или девяностоградусный фазовращатель, стоит рядом с идеальным фильтром нижних частот и идеальным узкополосным дифференциатором как очень полезное теоретическое понятие, соответствующее недетерминированной системе, характеристическая функция которой существует лишь в ограниченном смысле.

Естественно, можно получить аппроксимацию идеального преобразователя Гильберта. КИХ-аппроксимация с постоянной групповой задержкой может быть спроектирована либо с помощью оконного метода, либо методом равнопульсирующей аппроксимации. В таких аппроксимациях девяностоградусный сдвиг фазы реализуется точно, но с дополнительной линейной фазовой компонентой, присущей детерминированным КИХ-системам. Свойства упомянутых аппроксимаций иллюстрируются следующим примером, в котором преобразователь Гильберта проектируется с помощью окон Кайзера.

Пример 11.4. Оконное проектирование преобразователя Гильберта

Импульсная характеристика КИХ-аппроксимации дискретного преобразователя Гильберта порядка M (длина $M + 1$), которая ищется с помощью окна Кайзера, должна иметь следующий вид:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{I_0(\beta(1 - [(n - n_d)/n_d]^2)^{1/2})}{I_0(\beta)} \left[\frac{2 \sin^2[\pi(n - n_d)/2]}{\pi(n - n_d)} \right], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (11.74)$$

где $n_d = M/2$. Если M — четно, то получается КИХ-система с обобщенной линейной фазой типа III (см. подразд. 5.8.3).

На рис. 11.7, а) приведена импульсная характеристика, а на рис. 11.7, б) — АЧХ КИХ-аппроксимации преобразователя Гильберта в случае $M = 18$ и $\beta = 2,629$. Поскольку импульсная характеристика антисимметрична: $h[n] = -h[M - n]$ при $0 \leq n \leq M$, то фаза аппроксимации равна 90° плюс линейная компонента, соответствующая задержке на $n_d = 18/2 = 9$ отсчетов, т. е.

$$\Delta H(e^{j\omega}) = -\frac{\pi}{2} - 9\omega, \quad 0 < \omega < \pi. \quad (11.75)$$

На рис. 11.7, б) видно, что характеристическая функция аппроксимации обращается в нуль в точках $z = \pm 1$ ($\omega = 0$ и $\omega = \pi$), что и должно быть в случае КИХ-систем типа III. Поэтому АЧХ аппроксимации может быть равна единице лишь на некоторой средней полосе частот: $\omega_L < |\omega| < \omega_H$.

Если M — нечетно, аппроксимация принадлежит системам типа IV (см. рис. 11.8 для случая $M = 17$ и $\beta = 2,44$). Характеристическая функция систем типа IV вынужденно обращается в нуль только в точке $z = 1$ ($\omega = 0$). Следовательно, наилучшая аппроксимация постоянной АЧХ здесь получается в окрестности частоты $\omega = \pi$. ФЧХ этой реализации фазовращателя равна 90° плюс линейная компонента, соответствующая задержке в $n_d = 17/2 = 8,5$ отсчета:

$$\Delta H(e^{j\omega}) = -\frac{\pi}{2} - 8,5\omega. \quad (11.76)$$

Из рис. 11.7 а) и 11.8 а) следует, что КИХ-аппроксимация преобразователя Гильберта типа III имеет существенные вычислительные преимущества по сравнению с системой

типа IV, если нет необходимости в точной аппроксимации постоянной АЧХ в окрестности частоты $\omega = \pi$. Причина кроется в том, что отсчеты импульсной характеристики с четными номерами системы типа III равны нулю. В связи с чем, учитывая антисимметрию импульсных характеристик в обоих случаях, система с $M = 17$ потребует восемь умножений на вычисление каждого отсчета выходного сигнала, а система с $M = 18$ — только пять. \square

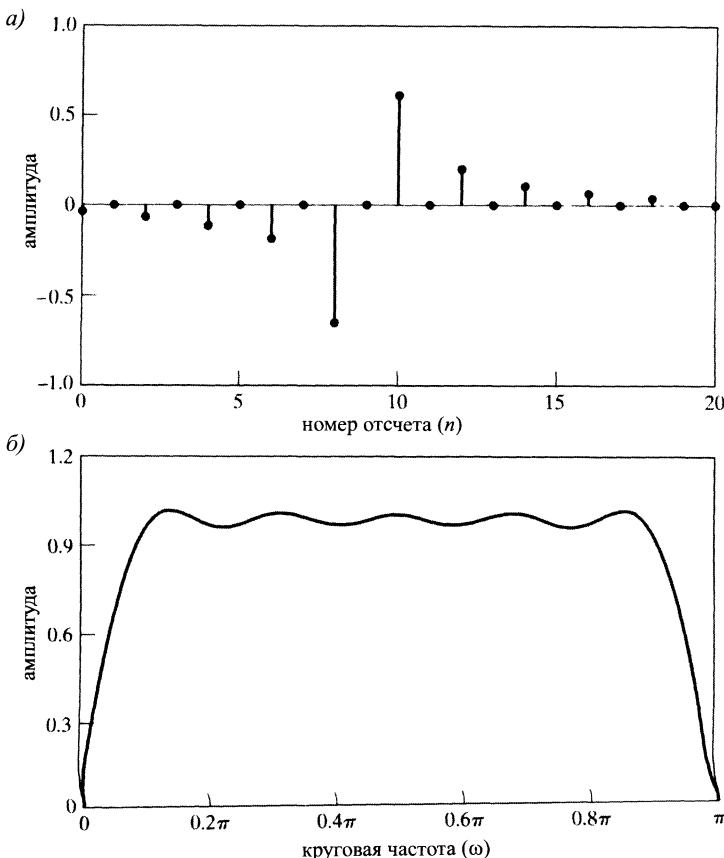


Рис. 11.7. КИХ-аппроксимация преобразователя Гильберта, полученная с помощью окна Кайзера ($M = 18$, $\beta = 2,629$): а) импульсная характеристика; б) АЧХ

КИХ-аппроксимации преобразователя Гильберта (фаза которых равна в точности 90°) типов III и IV можно разработать с помощью алгоритма Пакса–МакКлеллана (см. § 7.5 и 7.6). Имея тот же порядок, что и аппроксимации, полученные оконным методом, они будут лучше аппроксимировать АЧХ преобразователя (см. [122]).

Точность фазы КИХ-систем типов III и IV — основная причина их использования для аппроксимации преобразователя Гильберта. Точная реализация фазы БИХ-системой невозможна, и, аппроксимируя преобразователь Гильберта такой системой, мы получим ФЧХ и АЧХ с некоторой ошибкой. Наиболее удачный спо-

соб проектирования БИХ-аппроксимации девяностоградусного фазовращателя заключается в разработке так называемого «расщепителя фаз», состоящего из двух всепропускающих систем, ФЧХ которых над некоторой полосой частот отличаются друг от друга на 90° . Это систему можно спроектировать, используя дробно-линейное преобразование непрерывного расщепителя фаз. (Пример такой системы можно найти в [48].)

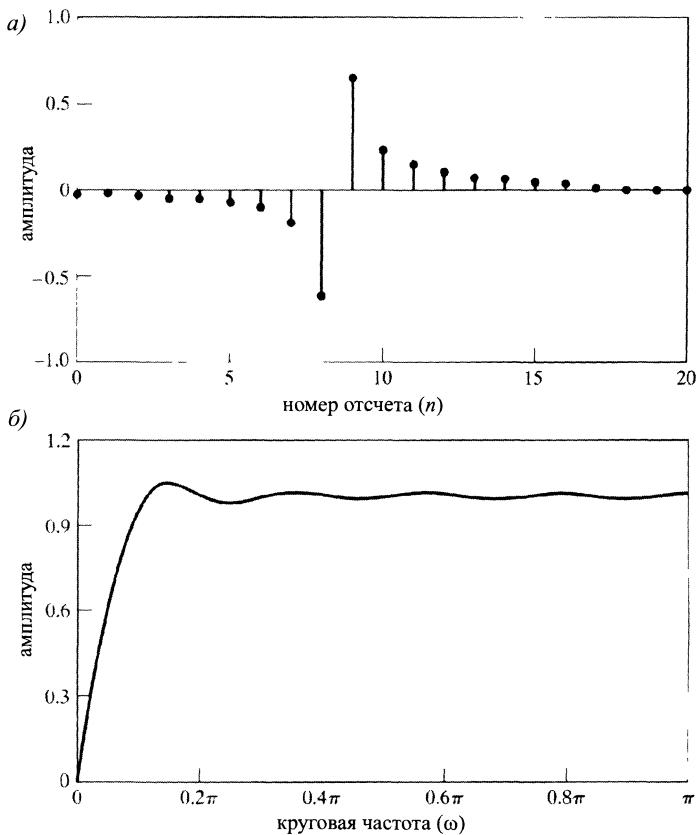


Рис. 11.8. КИХ-аппроксимация преобразователя Гильберта, полученная с помощью окна Кайзера ($M = 17$, $\beta = 2,44$): а) импульсная характеристика; б) АЧХ

На рис. 11.9 показана блок-схема девяностоградусного расщепителя фаз. Если $x_r[n]$ — вещественноненулевой входной сигнал и $x_i[n]$ — его преобразование Гильберта, то Фурье-образ комплекснозначной последовательности $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$ будет иметь нулевые значения при $-\pi \leq \omega < 0$, т. е. функция $X(z)$ тождественно обращается в нуль на нижней половине единичной окружности.

В системе из рис. 11.6 преобразователь Гильберта использовался для восстановления сигнала $x_i[n]$ по $x_r[n]$, а в системе из рис. 11.9 сигнал $x_r[n]$ обрабатывается двумя подсистемами с характеристическими функциями $H_1(e^{j\omega})$ и $H_2(e^{j\omega})$. Теперь, если эти подсистемы всепропускающие, а их ФЧХ сдвинуты друг относительно друга на 90° , то Фурье-образ комплекснозначного сигнала

$y[n] = y_r[n] + jy_i[n]$ тоже будет обращаться в нуль при $\omega \in [-\pi; 0]$. Более того, эта система не искажает уровень сигнала, т. е. $|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})|$, поскольку обе ее подсистемы всепропускающие. Фазы же функций $Y(e^{j\omega})$ и $X(e^{j\omega})$ будут отличаться друг от друга на общие для $H_1(e^{j\omega})$ и $H_2(e^{j\omega})$ компоненты.

11.5.2. Представление полосовых сигналов

Многие приложения аналитических сигналов связаны с узкополосной связью. В таких приложениях полосовой сигнал часто бывает удобно представлять в терминах нижнечастотного. Чтобы понять, как это можно сделать, рассмотрим комплекснозначный нижнечастотный сигнал

$$x[n] = x_r[n] + jx_i[n],$$

где $x_i[n]$ — преобразование Гильберта от $x_r[n]$ и $X(e^{j\omega}) = 0$ при $-\pi \leq \omega < 0$. Соответствующие Фурье-образы $X_R(e^{j\omega})$ и $X_I(e^{j\omega})$ приведены на рис. 11.10, а) и б), а график функции $X(e^{j\omega}) = X_R(e) + jX_I(e)$ показан на рис. 11.10, в) (сплошной кривой изображен график вещественной части, а пунктирной — мнимой). Рассмотрим теперь последовательность

$$s[n] = x[n]e^{j\omega_c n} = s_r[n] + js_i[n], \quad (11.77)$$

где $s_r[n]$ и $s_i[n]$ — вещественнозначные последовательности. Ее Фурье-образ

$$S(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega - \omega_c)}) \quad (11.78)$$

дан на рис. 11.10, г). По формулам (11.61) и (11.62) получаем соотношения:

$$S_R(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(S(e^{j\omega}) + S^*(e^{-j\omega})), \quad (11.79)$$

$$js_I(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(S(e^{j\omega}) - S^*(e^{-j\omega})). \quad (11.80)$$

Графикам функций $S_R(e^{j\omega})$ и $js_I(e^{j\omega})$ отведено место на рис. 11.10, д). Легко показать, что если $X_R(e^{j\omega}) = 0$ при $\Delta\omega < |\omega| \leq \pi$, а $\omega_c + \Delta\omega < \pi$, то $S(e^{j\omega})$ будет односторонним полосовым сигналом, все значения которого равны нулю, за исключением значений на промежутке $\omega_c < \omega < \omega_c + \Delta\omega$. Рисунок 11.10 свидетельствует о том, что $S_I(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})S_R(e)$, т. е. $s_i[n]$ и $s_r[n]$ связаны преобразованием Гильберта. Этот факт можно доказать, опираясь на формулы (11.60)–(11.63).

Комплексный сигнал представляется также через модуль и фазу:

$$x[n] = A[n]e^{j\varphi[n]}, \quad (11.81)$$

где

$$A[n] = (x_r^2[n] + x_i^2[n])^{1/2}, \quad (11.82)$$

$$\varphi[n] = \arctg \left(\frac{x_i[n]}{x_r[n]} \right). \quad (11.83)$$

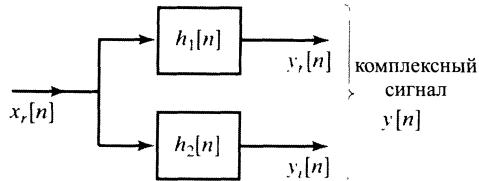


Рис. 11.9. Блок-схема системы с всепропускающим расщепителем фаз, генерирующей комплексную последовательность с односторонним Фурье-образом

На рисунке 11.10, в) изображена сплошная кривая, соответствующая вещественной части $S_R(e^{j\omega})$, и пунктирная линия, соответствующая мнимой части $js_I(e^{j\omega})$. На рисунке 11.10, д) изображены сплошная кривая $S_R(e^{j\omega})$ и пунктирная линия $js_I(e^{j\omega})$.

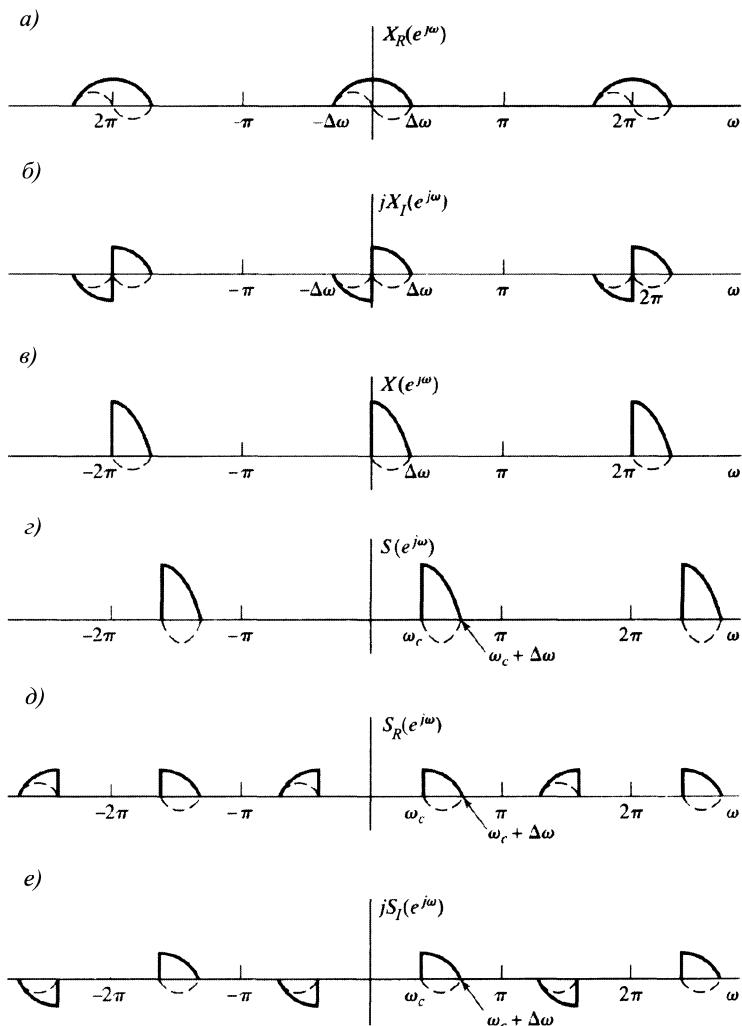


Рис. 11.10. Фурье-образы, представляющие полосовой сигнал. (Сплошной линией отмечены вещественные части, а пунктирной — мнимые.)

Следовательно, учитывая (11.77) и (11.81)–(11.83), приходим к равенствам:

$$s[n] = (x_r[n] + jx_i[n])e^{j\omega_c n} = \quad (11.84)$$

$$= A[n]e^{j(\omega_c n + \varphi[n])}, \quad (11.85)$$

откуда получаются выражения:

$$s_r[n] = x_r[n] \cos \omega_c n - x_i[n] \sin \omega_c n = \quad (11.86)$$

$$= A[n] \cos(\omega_c n + \varphi[n]), \quad (11.87)$$

$$s_i[n] = x_r[n] \sin \omega_c n + x_i[n] \cos \omega_c n = \quad (11.88)$$

$$= A[n] \sin(\omega_c n + \varphi[n]). \quad (11.89)$$

Формулы (11.86) и (11.88) реализованы блок-схемами на рис. 11.11. Диаграммы иллюстрируют, как комплексный полосовой сигнал (с одной боковой полосой) может быть получен из вещественного нижнечастотного сигнала.

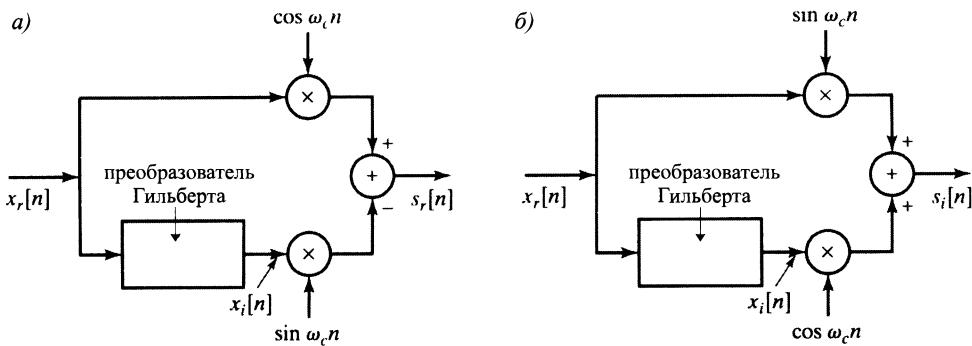


Рис. 11.11. Блок-схемное представление формул (11.86) и (11.88)

Взятые вместе, формулы (11.86)–(11.89) дают желаемое представление во временной области общего комплекснозначного полосового сигнала $s[n]$ в терминах вещественной и мнимой частей комплексного нижнечастотного сигнала $x[n]$ и являются удобным механизмом представления вещественных полосовых сигналов. Соотношение (11.86), например, выражает вещественноизначный полосовой сигнал через «синфазную составляющую» $x_r[n]$ и «квадратурную составляющую» $x_i[n]$. Действительно, как показано на рис. 11.10, д), формула (11.86) допускает представление вещественноизначных полосовых сигналов (или импульсных характеристик фильтров), Фурье-образ которых не является сопряженносимметричным относительно центра полосы пропускания (как, например, для сигналов вида $x_r[n] \cos \omega_c n$).

Из формул (11.86)–(11.89) и рис. 11.11 становится понятным, что общий полосовой сигнал имеет форму синусоиды с модулированными амплитудой и фазой. Напомним, что последовательность $A[n]$ называется огибающей, а $\varphi[n]$ — фазой. Это узкополосное представление сигнала можно использовать для многообразных систем, модулирующих амплитуду и фазу. Пример, приведенный на рис. 11.10, иллюстрирует модуляцию с одной боковой полосой. Блок-схемная реализация системы, осуществляющей эту модуляцию, с нижнечастотным вещественным входным сигналом $x_r[n]$ и выходным $s_r[n]$ показана на рис. 11.11, а). Системы модуляции с одной боковой полосой весьма полезны при разделении частот в мультиплексной передаче, поскольку они могут представлять вещественноизначные полосовые сигналы с минимальной полосой частот.

11.5.3. Полосовая дискретизация

Другое важное приложение аналитических сигналов лежит в области дискретизации полосовых сигналов. В главе 4 мы видели, что в общей ситуации непрерывный сигнал с узкополосным Фурье-образом ($S_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq \Omega_N$) точно представляется своими отсчетами, если частота дискретизации удовле-

творяет условию $2\pi/T \geq 2\Omega_N$. Ключом к доказательству этого результата служит предупреждение перекрытий копий функции $S_c(j\Omega)$, формирующих Фурье-образ последовательности отсчетов. Фурье-образ полосового непрерывного сигнала обладает свойством $S_c(j\Omega) = 0$ при $0 \leq |\Omega| \leq \Omega_c$ и $|\Omega| \geq \Omega_c + \Delta\Omega$. Таким образом, ширина его полосы частот, или носителя, действительно составляет только $2\Delta\Omega$, а не $2(\Omega_c + \Delta\Omega)$, и при подходящей стратегии дискретизации промежуток $-\Omega_c \leq \Omega < \Omega_c$ может быть заполнен образами ненулевой части функции $S_c(j\Omega)$ без перекрытий. Это обычно облегчается использованием комплексного представления полосовых сигналов.

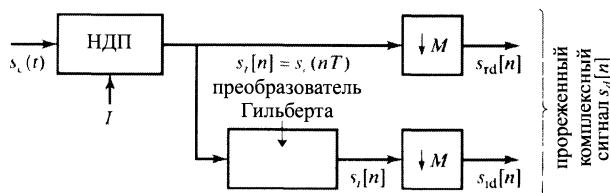


Рис. 11.12. Система, понижающая частоту дискретизации вещественнонозначного полосового сигнала прореживанием эквивалентного комплекснозначного полосового сигнала

В качестве иллюстрации рассмотрим систему из рис. 11.12 и сигнал, изображенный на рис. 11.13, а). Максимальная частота входного сигнала равна $\Omega_c + \Delta\Omega$. Если этот сигнал дискретизуется с частотой Найквиста $2\pi/T = 2(\Omega_c + \Delta\Omega)$, то Фурье-образ $S_R(e^{j\omega})$ получающейся последовательности отсчетов $s_r[n] = s_c(nT)$ будет иметь вид, как на рис. 11.13, б). Привлекая дискретный преобразователь Гильберта, мы можем сформировать комплексную последовательность $s[n] = s_r[n] + js_i[n]$. Ее Фурье-образ $S(e^{j\omega})$ приведен на рис. 11.13, в). Ширина полосы, над которой значения $S(e^{j\omega})$ отличны от нуля, равна $\Delta\omega = \Delta\Omega \cdot T$. Определяя M как наибольшее целое число, не превосходящее $2\pi/\Delta\omega$, мы видим, что M копий графика функции $S(e^{j\omega})$ заполнят интервал $-\pi < \omega < \pi$. (На рис. 11.13, в) $2\pi/\Delta\omega = 5$.) Таким образом, частота дискретизации последовательности $s[n]$ может быть уменьшена прореживанием, как показано на рис. 11.12. В результате получится последовательность $s_d[n] = s_{rd}[n] + js_{id}[n] = s[Mn]$, Фурье-образ которой равен

$$S_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} S(e^{j(\omega - 2\pi k)/M}). \quad (11.90)$$

На рис. 11.13, г) изображен график $S_d(e^{j\omega})$ с параметром M из (11.90), равным 5. График $S(e^{j\omega})$ и две его копии представлены на рис. 11.13, в). Из рисунков следует, что наложения спектров не происходит, а вся информация, необходимая для восстановления исходного дискретизованного вещественнонозначного полосового сигнала, теперь содержится в промежутке $(-\pi; \pi]$ дискретной частоты ω . Далее сигнал можно обрабатывать различными фильтрами или закодировать его для передачи или записи. Эти процессы происходят при низкой частоте дискретизации, что мотивирует ее уменьшение.

Первоначальный вещественнонозначный сигнал $s_r[n]$ можно восстановить следующим образом.

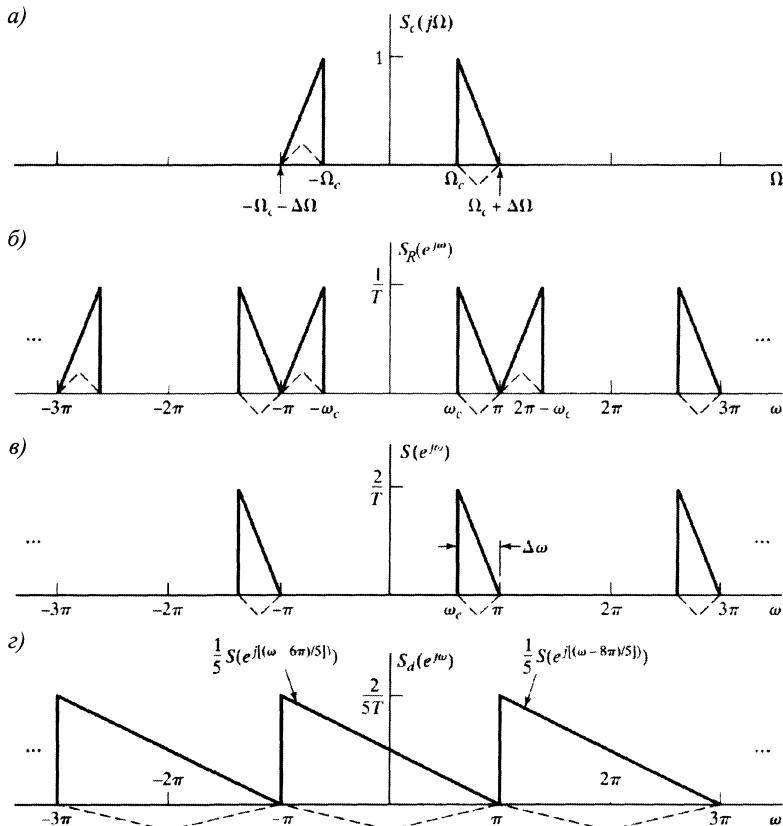


Рис. 11.13. Пример уменьшения частоты дискретизации полосового сигнала с помощью системы из рис. 11.12: а) Фурье-образ непрерывного полосового сигнала; б) Фурье-образ дискретизованного сигнала; в) Фурье-образ комплекснозначного полосового дискретного сигнала, построенный по сигналу из п. а) рисунка; г) Фурье-образ прореженного сигнала из п. в) рисунка. (Сплошная кривая обозначает вещественную часть, а пунктирная — мнимую.)

1. Сформировать последовательность

$$s_e[n] = \begin{cases} s_{rd}[n/M] + j s_{id}[n/M], & n = 0, \pm M, \pm 2M, \dots, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (11.91)$$

2. Профильтровать сигнал $s_e[n]$ идеальным комплексным полосовым фильтром с импульсной характеристикой $h_i[n]$ и характеристической функцией

$$H_i(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & -\pi < \omega < \omega_c, \\ M, & \omega_c < \omega < \omega_c + \Delta\omega, \\ 0, & \omega_c + \Delta\omega < \omega < \pi. \end{cases} \quad (11.92)$$

(В нашем примере $\omega_c + \Delta\omega = \pi$)

3. Получить $s_r[n] = \operatorname{Re}\{s_e[n] * h_i[n]\}$.

Весьма поучительно начертить график $S_e(e^{j\omega})$ в случае примера из рис. 11.13 и проверить, что фильтр с характеристической функцией (11.92) действительно восстанавливает сигнал $s[n]$.

Другое полезное упражнение заключается в рассмотрении комплексного непрерывного сигнала с односторонним Фурье-образом, равным $S_c(j\Omega)$ при $\Omega \geq 0$. Можно показать, что этот сигнал в результате дискретизации с частотой $2\pi/T = \Delta\Omega$ непосредственно дает комплекснозначную последовательность $s_d[n]$.

11.6. Краткое содержание главы

В этой главе мы обсуждали различные соотношения между вещественной и мнимой частями последовательностей и их Фурье-образов. Общее название полученных формул — *соотношения преобразования Гильберта*. Принцип вывода этих соотношений заключается в использовании детерминированности, позволяющей как функцию, так и последовательность восстановить по ее четной части. Мы показали, что вещественная и мнимая части Фурье-образа детерминированной последовательности связаны между собой интегралом, напоминающим свертку. Кроме того, в специальном случае, когда комплексный спектр последовательности детерминирован или, что равносильно, все нули и полюса z -преобразования этой последовательности попадают внутрь единичного круга (условие минимальности фазы), логарифмы модуля и фазы Фурье-образа тоже связаны преобразованием Гильберта.

Соотношения преобразования Гильберта были выведены и для периодической последовательности, удовлетворяющей условиям периодической детерминированности, а также для комплексных последовательностей, Фурье-образ которых обращается в нуль на нижней половине единичной окружности. В конце главы мы обсудили приложения комплексных аналитических сигналов к представлению и эффективной дискретизации полосовых сигналов.

Задачи

Обязательные задачи с ответами

- 11.1. Известно, что вещественная часть Фурье-образа детерминированной вещественновнозначной последовательности $x[n]$ имеет вид $\operatorname{Re}\{X(e^{j\omega})\} = 2 - 2a \cos \omega$. Восстановите его мнимую часть $\operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\}$.
- 11.2. Вещественная часть Фурье-образа детерминированной вещественновнозначной последовательности $x[n]$ равна $\operatorname{Re}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{5}{4} - \cos \omega$. Восстановите $x[n]$.
- 11.3. О вещественновнозначной последовательности $x[n]$ с Фурье-образом $X(e^{j\omega})$ известны следующие факты:

$$x[0] = 0, \quad x[1] > 0, \quad |X(e^{j\omega})|^2 = \frac{5}{4} - \cos \omega.$$

Подберите две разные последовательности $x_1[n]$ и $x_2[n]$, согласующиеся с этой информацией.

- 11.4. Рассмотрите последовательность $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$, где $x_r[n]$ — вещественная, а $x_i[n]$ — мнимая ее части. Известно, что z -преобразование $X(z)$ этой последовательности тождественно равно нулю на нижней половине единичной окружности, т. е. $X(e^{j\omega}) = 0$ при $\pi \leq \omega \leq 2\pi$. Восстановите Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ последовательности, если

$$x_r[n] = \begin{cases} 1/2, & n = 0, \\ -1/4, & n = \pm 2, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

- 11.5. Вычислите преобразование Гильберта $x_i[n] = \mathcal{H}\{x_r[n]\}$ от следующих последовательностей:

а) $x_r[n] = \cos \omega_0 n$; б) $x_r[n] = \sin \omega_0 n$; в) $x_r[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$.

- 11.6. Известно, что мнимая часть Фурье-образа вещественной детерминированной последовательности $x[n]$ имеет вид $X_I(e^{j\omega}) = 2 \sin \omega - 3 \sin 4\omega$. Кроме того, $X(e^{j\omega})|_{\omega=0} = 6$. Восстановите $x[n]$.

- 11.7. а) Данна вещественнозначная детерминированная последовательность $x[n]$ с мнимой частью Фурье-образа $\operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\} = \sin \omega + 2 \sin 2\omega$. Подберите подходящую последовательность $x[n]$.
б) Единственная ли последовательность удовлетворяет условиям предыдущего пункта задачи? Если да, объясните почему. Если нет, предъявите вторую последовательность.

- 11.8. Пусть Фурье-образ вещественнозначной детерминированной последовательности $x[n]$ равен $X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$. Известно, что $X_I(e^{j\omega}) = 3 \sin 2\omega$. Какая из нижеперечисленных функций может служить вещественной частью Фурье-образа этой последовательности?

$$\begin{aligned} X_{R1}(e^{j\omega}) &= \frac{3}{2} \cos 2\omega, & X_{R4}(e^{j\omega}) &= 2 \cos 3\omega, \\ X_{R2}(e^{j\omega}) &= -3 \cos 2\omega - 1, & X_{R5}(e^{j\omega}) &= \frac{3}{2} \cos 2\omega + 1. \\ X_{R3}(e^{j\omega}) &= -3 \cos 2\omega, \end{aligned}$$

- 11.9. Пусть $X(e^{j\omega})$ — Фурье-образ вещественнозначной детерминированной последовательности $x[n]$. Известно, что

$$\operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\} = 3 \sin \omega + \sin 3\omega, \quad X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = 3.$$

Восстановите последовательность $x[n]$ и выясните, единственная ли она.

- 11.10. Последовательность $h[n]$ — вещественнозначная импульсная характеристика устойчивой детерминированной ЛС-системы с КЧХ $H(e^{j\omega})$. Известно, что

- (i) система обладает устойчивой детерминированной обратной;
(ii) $|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{5/4 - \cos \omega}{5 + 4 \cos \omega}$.

Определите $h[n]$.

- 11.11. Пусть $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$ — комплекснозначная последовательность, Фурье-образ которой обладает свойством $X(e^{j\omega}) = 0$ при $-\pi \leq \omega < 0$. Ее мнимая часть равна:

$$x_i[n] = \begin{cases} 4, & n = 3, \\ -4, & n = -3. \end{cases}$$

Восстановите вещественную и мнимые части функции $X(e^{j\omega})$.

- 11.12. Известно, что последовательность $h[n]$ — детерминирована и вещественнозначна, отсчет $h[0] > 0$. Квадрат модуля ее Фурье-образа описывается формулой:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{10}{9} - \frac{2}{3} \cos \omega.$$

а) Подберите подходящую последовательность $h[n]$.

б) Единственный ли ответ возможен в предыдущем пункте задачи? Если да, объясните почему. В противном случае найдите еще один вариант этой последовательности.

- 11.13. Пусть $x[n]$ — детерминированная комплекснозначная последовательность с Фурье-образом $X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$. Вычислите $X_I(e^{j\omega})$, если $X_R(e^{j\omega}) = 1 + \cos \omega + \sin \omega - \sin 2\omega$.

- 11.14. Рассмотрите вещественнозначную детерминированную последовательность $x[n]$. Вещественная часть ее Фурье-образа $X(e^{j\omega})$ выражается через ряд:

$$X_R(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos k\omega}{2^k}.$$

Вычислите мнимую часть функции $X(e^{j\omega})$. (Напомним, что последовательность называется антидетерминированной, если $x[n] = 0$ при $n > 0$.)

- 11.15. Мнимая часть Фурье-образа вещественнозначной детерминированной последовательности $x[n]$ равна $\operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\} = \sin \omega$, причем $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 3$. Восстановите последовательность.

- 11.16. Вещественная часть Фурье-образа вещественнозначной детерминированной последовательности $x[n]$ равна $\operatorname{Re}\{X(e^{j\omega})\} = 2 - 4 \cos 3\omega$, причем $X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi} = 7$. Согласованы ли между собой эти факты? Иными словами, существует ли последовательность $x[n]$, Фурье-образ которой удовлетворяет обоим равенствам? В случае положительного ответа представьте $x[n]$, а отрицательный подкрепите доказательством.

- 11.17. Рассмотрите вещественнозначную детерминированную двучленную последовательность $x[n]$, двухточечное ДПФ которой равно $X[k] = X_R[k] + jX_I[k]$ ($k = 0, 1$). Возможно ли однозначно восстановить $x[n]$, если $X_R[k] = 2\delta[k] - 4\delta[k-1]$? Если да, выпишите отсчеты последовательности, если нет, приведите несколько вариантов.

- 11.18. Пусть $x[n]$ — вещественнозначная детерминированная трехчленная последовательность. Подберите две такие последовательности, если вещественная часть

их ДПФ имеет вид, как на рис. 11.14. Заметим, что только одна из предъявленных последовательностей может быть периодически детерминированной, т. е. удовлетворять условию $x[n] = 0$ при $N/2 < n \leq N - 1$ (здесь $N = 3$).

- 11.19. Пусть $x[n]$ — вещественноизначная детерминированная и периодически детерминированная последовательность длины $N = 4$. Вещественная часть ее четырехточечного ДПФ $X_R[k]$ приведена на рис. 11.15. Найдите мнимую часть последовательности $X[k]$.

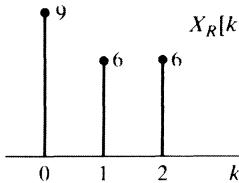


Рис. 11.14.

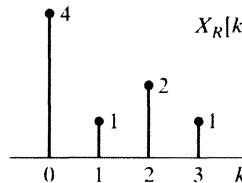


Рис. 11.15.

- 11.20. Рассмотрите вещественноизначную детерминированную шестичленную последовательность $x[n]$. Мнимая часть ее шеститочечного ДПФ имеет вид:

$$jX_I[k] = \begin{cases} -j2/\sqrt{3}, & k = 2, \\ j2/\sqrt{3}, & k = 4, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Дополнительно известно, что $\sum_{k=0}^5 X[k] = 6$. Какая из приведенных на рис. 11.16 последовательностей согласуется с этой информацией?

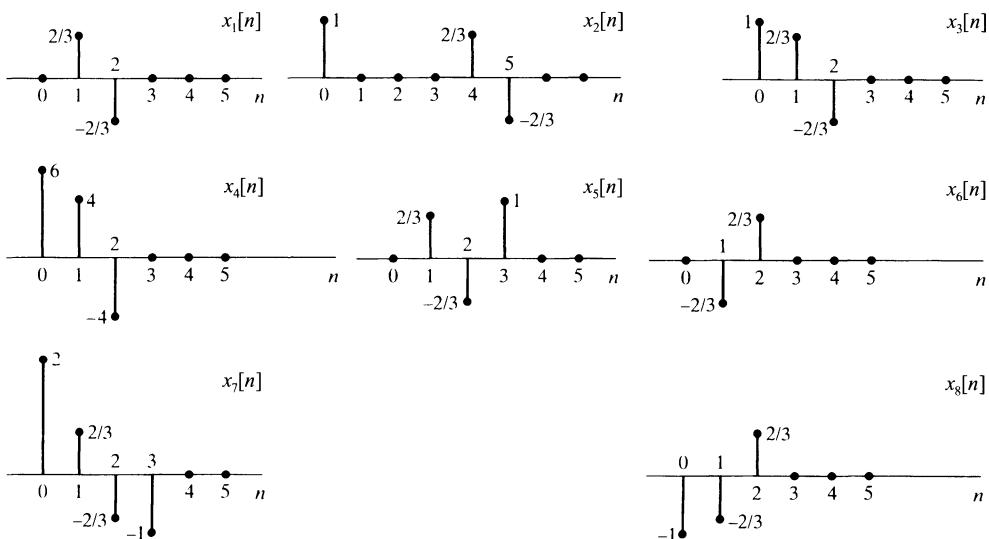


Рис. 11.16.

Обязательные задачи без ответов

- 11.21. Пусть $x[n]$ — вещественнозначная детерминированная последовательность, z -преобразование которой

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

представляет собой ряд Тейлора от переменной z^{-1} и поэтому сходится к аналитической функции всюду вне некоторого круга с центром в $z = 0$. (ОС включает бесконечно удаленную точку и, фактически, $X(\infty) = x[0]$.) Предположение об аналитичности дает сильные ограничения на функцию (см. [25]). В частности, мнимая и вещественная части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа и связаны между собой уравнениями Коши–Римана. Воспользуемся этими свойствами для восстановления всей функции $X(z)$ по ее вещественной части, предполагая, что соответствующая последовательность $x[n]$ вещественнозначная, конечная и детерминированная.

Пусть z -преобразования такой последовательности записано как $X(z) = X_R(z) + jX_I(z)$, где $X_R(z)$ и $X_I(z)$ — вещественнозначные функции. Предположим, что

$$X_R(\rho e^{j\omega}) = \frac{\rho + \alpha \cos \omega}{\rho}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

при $z = \rho e^{j\omega}$. Найдем явное выражение для $X(z)$, считая, что $X(z)$ — аналитическая функция всюду, за исключением $z = 0$. Это можно сделать двумя способами.

Способ I. Частотная область. Данный метод основан на условиях Коши–Римана, которым удовлетворяют вещественная и мнимая части аналитической функции $X(x + jy) = U(x, y) + jV(x, y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}.$$

В полярных координатах условия аналитичности функции $X(\rho e^{j\omega}) = U(\rho, \omega) + jV(\rho, \omega)$ переписываются как

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \omega}.$$

Так как нам известна вещественная часть $U = X_R$, мы можем проинтегрировать соотношения и найти $V = X_I$, восстановив тем самым функцию полностью (нужно лишь внимательно следить за константой, возникающей при интегрировании).

Способ II. Временная область. Вещественная последовательность $x[n]$ представляется в виде суммы своих четной и нечетной частей $x[n] = x_e[n] + x_o[n]$. При этом Фурье-образ четной части $x_e[n]$ равен $X_R(e^{j\omega})$, а нечетной — $jX_I(e^{j\omega})$. Вычисляя обратное преобразование Фурье, можно найти $x_e[n]$. Затем, используя детерминированность, восстановим $x_o[n]$, а значит, и последовательность $x[n]$ и ее z -преобразование $X(z)$.

- 11.22. Покажите, что последовательность коэффициентов ДРФ последовательности

$$\tilde{u}_N[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, N/2, \\ 2, & n = 1, 2, \dots, N/2 - 1, \\ 0, & n = N/2 + 1, \dots, N - 1 \end{cases}$$

имеет вид:

$$\tilde{U}_N[k] = \begin{cases} N, & k = 0, \\ -j2 \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{N}, & k \text{ — нечетно,} \\ 0, & k \text{ — четно, } k \neq 0. \end{cases}$$

Указание: Вычислите z -преобразование последовательности

$$u_N[n] = 2u[n] - 2u[n - N/2] - \delta[n] + \delta[n - N/2]$$

и подвергните его дискретизации для определения значений $\tilde{U}[k]$.

Дополнительные задачи

- 11.23. Рассмотрите вещественноизначную конечную последовательность $x[n]$ длины M . Пусть $x[n] = 0$ при $n < 0$ и $n \geq M$. Обозначим через $X[k]$ N -точечное ДПФ последовательности $x[n]$ с нечетным $N \geq M$, а через $X_R[k]$ — вещественную часть последовательности $X[k]$.

- a) Найдите минимальное значение N (в терминах M), при котором $X[k]$ однозначно восстанавливается по $X_R[k]$.
b) Пусть N — число, найденное вами в предыдущем пункте задачи. Тогда $X[k]$ можно представить в виде циклической свертки $X_R[k]$ и некой последовательности $U_N[k]$. Найдите $U_N[k]$.

- 11.24. Разложим комплекснозначную последовательность $h[n]$ в сумму вещественной и мнимой частей $h[n] = h_r[n] + jh_i[n]$, и обозначим через

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

ее Фурье-образ. (Здесь, как обычно, $H_R(e^{j\omega})$ — вещественная, а $H_I(e^{j\omega})$ — мнимая части функции $H(e^{j\omega})$.) Пусть $H_{ER}(e^{j\omega})$ и $H_{OR}(e^{j\omega})$ обозначают четную и нечетную части $H_R(e^{j\omega})$, а $H_{EI}(e^{j\omega})$ и $H_{OI}(e^{j\omega})$ — аналогичные части $H_O(e^{j\omega})$. Более того, введем $H_A(e^{j\omega})$ и $H_B(e^{j\omega})$ — вещественную и мнимую части Фурье-образа последовательности $h_r[n]$ и $H_C(e^{j\omega})$ и $H_D(e^{j\omega})$ — вещественную и мнимую части последовательности $h_i[n]$. Выразите $H_A(e^{j\omega})$, $H_B(e^{j\omega})$, $H_C(e^{j\omega})$ и $H_D(e^{j\omega})$ через $H_{ER}(e^{j\omega})$, $H_{OR}(e^{j\omega})$, $H_{EI}(e^{j\omega})$ и $H_{OI}(e^{j\omega})$.

- 11.25. КЧХ идеального преобразователя Гильберта (над одним периодом) имеет вид:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & \omega > 0, \\ j, & \omega < 0. \end{cases}$$

Ее график приведен на рис. 11.17, а на рис. 11.18 показана КЧХ $H_{lp}(e^{j\omega})$ идеального фильтра нижних частот с частотой отсечки $\omega_c = \pi/2$. Графики этих функций очень похожи: их точки разрыва отстоят друг от друга на π .

- a) Выразите $H(e^{j\omega})$ через $H_{lp}(e^{j\omega})$ и $H_{lp}(e^{-j\omega})$ через $H(e^{j\omega})$.
б) Опираясь на выражения из предыдущего пункта задачи, запишите $h[n]$ в терминах $h_{lp}[n]$, и наоборот, $h_{lp}[n]$ — в терминах $h[n]$.

Полученные соотношения основаны на определении идеальной системы с нулевой фазой. Аналогичные формулы справедливы и в случае неидеальных систем с обобщенной линейной фазой.

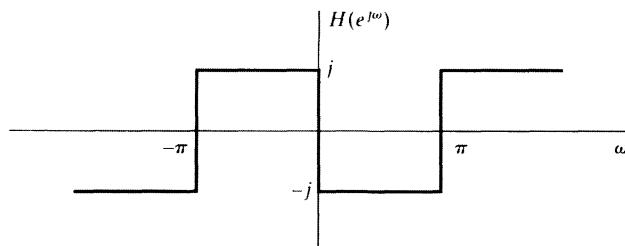


Рис. 11.17.

в) Опираясь на результат п. «б» задачи, найдите соотношение между импульсной характеристикой детерминированной КИХ-аппроксимации преобразователя Гильберта и импульсной характеристикой детерминированной КИХ-аппроксимации фильтра нижних частот, если обе аппроксимации получены:

- (i) введением подходящей линейной фазы;
- (ii) определением соответствующей идеальной импульсной характеристики;
- (iii) умножением на одно и то же окно длины $(M + 1)$;

т. е. аппроксимации разработаны оконным методом из главы 7. (В случае необходимости рассмотрите случай четного и нечетного M отдельно.)

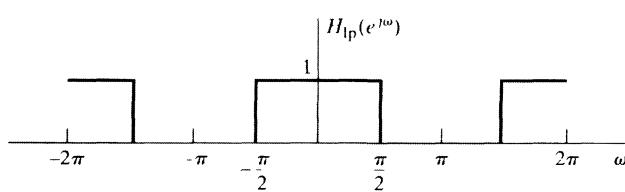


Рис. 11.18.

г) Начертите график АЧХ фильтра нижних частот, соответствующего аппроксимации преобразователя Гильберта из примера 11.4.

11.26. В подразделе 11.5.3 обсуждалась эффективная схема дискретизации непрерывного полосового сигнала с Фурье-образом вида

$$S_c(j\Omega) = 0 \quad \text{при } |\Omega| \leq \Omega_c \quad \text{и } |\omega| \geq \Omega_c + \Delta\Omega$$

(ее графическая иллюстрация приведена на рис. 11.12). При этом мы предполагали, что исходный сигнал сначала был дискретизован с частотой дискретизации $2\pi/T = 2(\Omega_c + \Delta\Omega)$, т. е. с наименьшей возможной частотой, при которой не появляются ложные частоты. По входному сигналу строился комплексный полосовой дискретный сигнал $s[n]$ с односторонним Фурье-образом $S(e^{j\omega})$, который затем подвергался прореживанию с множителем M , где M — наибольшее целое число, не превосходящее $2\pi/(\Delta\Omega t)$.

- а) Учитывая пример, изображенный на рис. 11.13, покажите, что если число $2\pi/(\Delta\Omega T)$, зависящее от исходной частоты дискретизации, нецелое, то Фурье-образ $S_d(e^{j\omega})$ прореженного сигнала $s_d[n]$ тождественно равен нулю на некоторых промежутках положительной ширины.
- б) Как следует выбирать частоту дискретизации $2\pi/T$, при которой существует такой множитель прореживания M , что в Фурье-образе $S_d(e^{j\omega})$ прореженного сигнала будут отсутствовать ложные частоты, и, кроме того, $S_d(e^{j\omega})$ не обращается тождественно в нуль ни на каких интервалах?

11.27. Рассмотрите ЛС-систему с КЧХ

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \pi, \\ 0, & -\pi < \omega < 0. \end{cases}$$

Входной сигнал $x[n]$ этой системы имеет вещественные отсчеты, причем последовательность $x[n]$ — абсолютно суммируема (в частности, она обладает Фурье-образом). Выясните, всегда ли существует возможность однозначно восстановить входной сигнал по реакции на него системы? Если да, объясните как. В противном случае докажите, что нет.

Задачи повышенной сложности

11.28. Выведите интегральное выражение для $H(z)$ в терминах $\operatorname{Re}\{H(e^{j\omega})\}$, справедливое *внутри* единичного круга, если $h[n]$ — вещественноненулевая устойчивая последовательность и $h[n] = 0$ при $n > 0$.

11.29. Пусть $\mathcal{H}\{\cdot\}$ обозначает (идеальное) преобразование Гильберта, т. е.

$$\mathcal{H}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k],$$

где

$$h[n] = \begin{cases} \frac{2 \sin^2(\pi n/2)}{\pi n}, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0. \end{cases}$$

Докажите следующие свойства этой операции:

- a) $\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{x[n]\}\} = -x[n];$
- б) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\mathcal{H}\{x[n]\} = 0$ (*указание:* используйте теорему Парсеваля);
- в) $\mathcal{H}\{x[n] * y[n]\} = \mathcal{H}\{x[n]\} * y[n] = x[n] * \mathcal{H}\{y[n]\}$, где $x[n]$ и $y[n]$ — любые последовательности.

11.30. На вход идеального преобразователя Гильберта с импульсной характеристикой

$$h[n] = \begin{cases} \frac{2 \sin^2(\pi n/2)}{\pi n}, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

подается дискретный случайный сигнал $x_r[n]$, а на выходе получается последовательность $x_i[n] = x_r[n] * h[n]$.

- а) Выразите автокорреляционную последовательность $\varphi_{x,x_i}[m]$ через последовательности $h[n]$ и $\varphi_{x_r x_r}[m]$.
- б) Найдите выражение для взаимной корреляционной последовательности $\varphi_{x_r x_i}[m]$ и покажите, что $\varphi_{x_r x_i}[m]$ — нечетная функция относительно m .
- в) Подберите выражение для автокорреляционной функции комплексного аналитического сигнала $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$.
- г) Вычислите спектр мощности $P_{xx}(\omega)$ сигнала из предыдущего пункта задачи.

- 11.31. В подразделе 11.5.3 обсуждалась эффективная схема дискретизации непрерывного полосового сигнала с Фурье-образом вида

$$S_c(j\Omega) = 0 \quad \text{при } |\Omega| \leq \Omega_c \quad \text{и } |\omega| \geq \Omega_c + \Delta\Omega$$

(ее графическая иллюстрация приведена на рис. 11.12). В конце подраздела была приведена процедура восстановления дискретизованного сигнала $s_r[n]$. Исходный непрерывный сигнал $s_c(t)$ из рис. 11.12 можно, конечно, реконструировать по $s_r[n]$ с помощью идеальной узкополосной интерполяции (идеальным НДП). На рис. 11.19 показана блок-схема системы, восстанавливающей вещественно-значный непрерывный полосовой сигнал из прореженного комплексного сигнала. КЧХ $H_t(e^{j\omega})$ комплексного полосового фильтра системы определяется формулой (11.92).



Рис. 11.19.

- Используя пример, изображенный на рис. 11.13, покажите, что система из рис. 11.19 восстанавливает исходный вещественно-значный полосовой сигнал (т. е. $y_c(t) = s_c(t)$), если входными сигналами этой системы служат последовательности $y_{rd} = s_{rd}[n]$ и $y_{id} = s_{id}[n]$.
- Выпишите импульсную характеристику $h_t[n] = h_{r1}[n] + jh_{i1}[n]$ комплексного полосового фильтра из рис. 11.19.
- Начертите как можно подробнее блок-схему системы из рис. 11.19, в которой будут задействованы лишь вещественные операции. Уберите все части диаграммы, не существенные для вычисления ее реакции.
- Поместите теперь между системами рис. 11.12 и 11.19 комплексную ЛС-систему, изображенную на рис. 11.20, с КЧХ $H(e^{j\omega})$. Подберите $H(e^{j\omega})$ так, чтобы выполнялось соотношение:

$$Y_c(j\Omega) = H_{\text{eff}}(j\Omega)S_c(j\Omega),$$

где

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & \Omega_c < |\Omega| < \Omega_c + \Delta\Omega/2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

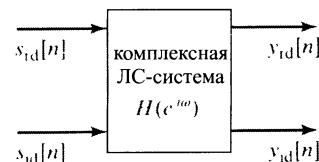


Рис. 11.20.

- 11.32. В § 11.4 мы отмечали, что детерминированность комплексного спектра $\hat{x}[n]$ эквивалентна условию минимальности фазы из § 5.5. Напомним, что $\hat{x}[n]$ получается в результате обратного преобразования Фурье, примененного к $\hat{X}(e^{j\omega})$ из (11.55). Обратите внимание на то, что, поскольку функции $\hat{X}(e^{j\omega})$ и $X(e^{j\omega})$ определены, ОС з-преобразований $X(z)$ и $\hat{X}(z)$ содержат единичную окружность.

- Докажите, что в нулях и полюсах функции $X(z)$ возникают полюса функции $\hat{X}(z)$. Опираясь на этот факт, покажите, что из детерминированности последовательности $\hat{x}[n]$ вытекает минимальность фазы последовательности $x[n]$.

- б) Покажите, что если $x[n]$ — минимально-фазовая последовательность, то условие на ОС влечет детерминированность последовательности $\hat{x}[n]$.

Можно исследовать это свойство на примере последовательности $x[n]$, представленной в виде линейной комбинации комплексных экспонент. Рассмотрим последовательность $x[n]$, чье z -преобразование имеет вид:

$$X(z) = A \frac{\prod_{k=1}^{M_i} (1 - a_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_o} (1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_i} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_o} (1 - d_k z^{-1})},$$

где $A > 0$ и модуль всех коэффициентов a_k , b_k , c_k и d_k меньше 1.

- в) Найдите выражение для $\hat{X}(z) = \ln X(z)$.

- г) Вычислите $\hat{x}[n]$, применяя обратное z -преобразование к вашему ответу из предыдущего пункта.

- д) Основываясь на результате п. «г» задачи и выражении для $X(z)$, покажите, что для последовательности $x[n]$ такого вида детерминированность комплексного спектра эквивалентна минимальности фазы.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

СЛУЧАЙНЫЕ СИГНАЛЫ

В этом приложении сформулировано несколько результатов и введены понятия, касающиеся представления стохастических сигналов. Мы не делаем здесь попыток привести полные доказательства и обсудить все трудные искусственные математические построения теории случайных процессов. Хотя наш подход не вполне строг, мы суммируем важные результаты и математические предположения, ясные по своему выводу.

A. I. Дискретные случайные процессы

Отправной точкой математического представления стохастических сигналов служит *случайный процесс*. Обсуждая случайные процессы как модель дискретных сигналов, мы предполагаем, что читатель знаком с основными понятиями теории вероятностей, такими как случайная величина, распределение вероятности и средние.

При использовании модели случайных процессов в практических приложениях обработки сигналов конкретная последовательность рассматривается как выборочный представитель ансамбля последовательностей. Структура данного дискретного сигнала (т. е. вероятностный закон соответствующего случайного процесса), как правило, неизвестна и должна быть так или иначе выведена. В одних случаях есть основания для разумных предположений относительно структуры процесса, а в других — существует возможность оценить свойства случайного процесса по конечному числу членов типичной выборочной последовательности.

Формально случайным процессом называется пронумерованное семейство случайных величин $\{x_n\}$, характеризующееся множеством распределений вероятности, которое в общем случае является функцией индекса n . При описании дискретных сигналов на языке случайных процессов индекс n ассоциируется со временем. Другими словами, предполагается, что значение каждого отсчета $x[n]$ случайного сигнала — результат некоторого процесса, управляющегося вероятностным законом. Каждая случайная величина x_n описывается *распределением вероятности*.

$$P_{x_n}(x_n, n) = \text{вероятность}[x_n \leq x_n], \quad (\text{A.1})$$

где x_n — конкретное значение случайной величины¹ x_n . Если x_n принимает значения в непрерывном множестве, то задание распределения вероятности эквива-

¹ В этом приложении полужирный шрифт используется для обозначения случайных величин, а обычный шрифт — для обозначения фиктивных переменных вероятностных функций.

лентно заданию *плотности (распределения) вероятности*

$$p_{\mathbf{x}_n}(x_n, n) = \frac{\partial P_{\mathbf{x}_n}(x_n, n)}{\partial x_n} \quad (\text{A.2})$$

или

$$P_{\mathbf{x}_n}(x_n, n) = \int_{-\infty}^{x_n} p_{\mathbf{x}_n}(x, n) dx. \quad (\text{A.3})$$

Зависимость друг от друга двух случайных величин \mathbf{x}_n и \mathbf{x}_m случайного процесса описывается совместным распределением вероятности

$$P_{\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m}(x_n, n, x_m, m) = \text{вероятность}[\mathbf{x}_n \leq x_n \text{ и } \mathbf{x}_m \leq x_m] \quad (\text{A.4})$$

и совместной плотностью вероятности

$$p_{\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m}(x_n, n, x_m, m) = \frac{\partial^2 P_{\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m}(x_n, n, x_m, m)}{\partial x_n \partial x_m}. \quad (\text{A.5})$$

Говорят, что две случайные величины *статистически независимы*, если значение значения одной из них никак не оказывается на плотности распределения вероятности другой. Если все случайные величины семейства $\{\mathbf{x}_n\}$ статистически независимы, то

$$P_{\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m}(x_n, n, x_m, m) = P_{\mathbf{x}_n}(x_n, n) \cdot P_{\mathbf{x}_m}(x_m, m) \quad \text{при } m \neq n. \quad (\text{A.6})$$

Для полной характеристики случайного процесса необходимо указать все возможные совместные распределения вероятности. Как мы отметили, распределения вероятности можно рассматривать как функции от временных переменных t и n . В том случае, когда все распределения вероятности не зависят от временного сдвига, случайный процесс называется *стационарным*. Например, распределение второго порядка стационарного процесса удовлетворяет условию

$$\forall k \quad P_{\mathbf{x}_{n+k}, \mathbf{x}_{m+k}}(x_{n+k}, n+k, x_{m+k}, m+k) = P_{\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m}(x_n, n, x_m, m). \quad (\text{A.7})$$

Во многих приложениях теории к обработке дискретных сигналов случайные процессы служат математической моделью сигналов в том смысле, что каждый конкретный сигнал рассматривается как *реализация* случайного процесса. Хотя точно предсказать поведение такого сигнала невозможно, удается определить подходящие средние свойства ансамбля сигналов, опираясь на закон вероятности случайного процесса. Такие усредненные свойства часто служат полезными, хотя и неполными характеристиками случайных сигналов.

A.2. Средние

Для характеристики случайных величин часто бывает удобно использовать усредненные значения, такие как математическое ожидание и дисперсия. Поскольку случайный процесс — это ансамбль пронумерованных случайных величин, то и его можно характеризовать статистическими средними входящих в ансамбль случайных переменных. Эти средние носят название *средних по ансамблю*. Начнем с основных определений

A.2.1. Определения

Математическое ожидание случайного процесса определяется по формуле

$$m_{\mathbf{x}_n} = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\mathbf{x}_n}(x, n) dx, \quad (\text{A.8})$$

где \mathcal{E} — оператор математического ожидания. В общем случае математическое ожидание зависит от n . Кроме того, если g — функция одной переменной, то $g(\mathbf{x}_n)$ — новая случайная величина, а совокупность $\{g(\mathbf{x}_n)\}$ дает новый случайный процесс. Для вычисления математического ожидания нового случайного процесса можно воспользоваться формулой

$$\mathcal{E}\{g(\mathbf{x}_n)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_{\mathbf{x}_n}(x, n) dx. \quad (\text{A.9})$$

Если случайная величина дискретна, т. е. принимает дискретные значения, то интеграл в предыдущей формуле заменяется на суммирование по множеству значений случайной величины:

$$\mathcal{E}\{g(\mathbf{x}_n)\} = \sum_x g(x) p_{\mathbf{x}_n}(x, n). \quad (\text{A.10})$$

Если нас интересует соотношение между двумя (или более) случайными процессами, нужно изучать уже два набора случайных величин $\{\mathbf{x}_n\}$ и $\{\mathbf{y}_m\}$. Например, математическое ожидание функции двух случайных величин определяется как

$$\mathcal{E}\{g(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) p_{\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m}(x_n, n, y_m, m) dx_n dy_m, \quad (\text{A.11})$$

где $p_{\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m}(x_n, n, y_m, m)$ — совместная плотность распределения случайных величин \mathbf{x}_n и \mathbf{y}_m .

Оператор математического ожидания линеен, т. е. можно показать, что

$$\mathcal{E}\{\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_m\} = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_n\} + \mathcal{E}\{\mathbf{y}_m\}$$

(математическое ожидание суммы равно сумме мат. ожиданий) и

$$\mathcal{E}\{a\mathbf{x}_n\} = a\mathcal{E}\{\mathbf{x}_n\}$$

(математическое ожидание произведения константы на \mathbf{x}_n равно произведению константы на мат. ожидание \mathbf{x}_n).

Как правило, математическое ожидание произведения случайных величин не равно произведению их математических ожиданий. Если же это так, то говорят, что соответствующие случайные величины *линейно независимы* или *некоррелированы*. Итак, \mathbf{x}_n и \mathbf{y}_m линейно независимы (некоррелированы), если

$$\mathcal{E}\{\mathbf{x}_n \mathbf{y}_m\} = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_n\} \mathcal{E}\{\mathbf{y}_m\}. \quad (\text{A.12})$$

Из формул (A.11) и (A.12) следует, что линейную независимость случайных величин обеспечивает следующее равенство:

$$p_{\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m}(x_n, n, y_m, m) = p_{\mathbf{x}_n}(x_n, n) \cdot p_{\mathbf{y}_m}(y_m, m). \quad (\text{A.13})$$

Однако можно показать, что равенство (A.13) более сильное, чем (A.12). Случайные величины, удовлетворяющие (A.13), называют *статистически независимыми*. При выполнении (A.13) для всех значений n и m случайные процессы $\{x_n\}$ и $\{y_m\}$ тоже называются статистически независимыми. Естественно, статистически независимые случайные процессы оказываются и линейно независимыми. А вот обратное неверно, линейная независимость еще не означает статистической независимости.

Как мы уже отмечали, математическое ожидание случайных величин, участвующих в случайном процессе, зависит от индекса n . Для стационарных же процессов эта зависимость фиктивна. Иными словами, математическое ожидание случайных величин из стационарного процесса — константа, которую мы обозначим просто через m_x .

Кроме математического ожидания при обработке сигналов важны и некоторые другие средние. К их определению мы сейчас и перейдем. Для определенности будем предполагать, что законы распределения случайных величин непрерывны. Соответствующие определения для дискретных случайных процессов легко получаются заменой интеграла на сумму, как это сделано в (A.10).

Среднеквадратическим значением случайной величины x_n называется среднее значение ее квадрата модуля $|x_n|^2$, т. е.

$$\mathcal{E}\{|x_n|^2\} = \text{среднеквадратическое значение} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 p_{x_n}(x, n) dx. \quad (\text{A.14})$$

Среднеквадратическое значение иногда называют *средней мощностью*.

Дисперсией случайной величины x_n называется среднеквадратическое значение случайной величины $(x_n - m_{x_n})$, т. е.

$$D_{x_n} = \mathcal{E}\{|x_n - m_{x_n}|^2\} - m_{x_n}^2. \quad (\text{A.15})$$

Опираясь на определение математического ожидания и его линейность, можно доказать, что

$$D_{x_n} = \mathcal{E}\{|x_n|^2\} - m_{x_n}^2. \quad (\text{A.16})$$

Для общих случайных величин среднеквадратическое значение и дисперсия — функции времени, однако для стационарных случайных процессов они постоянны.

Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое значение — простейшие усредненные величины, дающие мало информации о случайном процессе. Более информативной является *автокорреляционная последовательность*, определяемая по правилу

$$\varphi_{xx}[n, m] = \mathcal{E}\{x_n x_m^*\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_n x_m^* p_{x_n, x_m}(x_n, n, x_m, m) dx_n dx_m, \quad (\text{A.17})$$

где $*$, как обычно, обозначает комплексное сопряжение. *Автоковариационная последовательность* случайного процесса определяется формулой:

$$\gamma_{xx}[n, m] = \mathcal{E}\{(x_n - m_{x_n})(x_m - m_{x_m})^*\}, \quad (\text{A.18})$$

которую можно переписать в виде

$$\gamma_{xx}[n, m] = \varphi_{xx}[n, m] - m_{x_n} m_{x_m}^*. \quad (\text{A.19})$$

Отметим, что в общем случае как автокорреляционная, так и авт covариационная последовательность зависит от двух переменных.

Автокорреляционная последовательность говорит о том, насколько значения случайного процесса в различные моменты времени зависят друг от друга. И в этом смысле, в частности, она описывает изменение во времени случайного сигнала. Информацию о зависимости между двумя случайными сигналами несет *взаимная корреляционная последовательность*. Если $\{\mathbf{x}_n\}$ и $\{\mathbf{y}_m\}$ — случайные процессы, то их взаимная корреляционная последовательность равна

$$\varphi_{x,y}[n, m] = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_n \mathbf{y}_m^*\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy^* p_{\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m}(x_n, n, y_m, m) dx_n dy_m, \quad (\text{A.20})$$

где $p_{\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m}(x_n, n, y_m, m)$ — совместная плотность вероятности величин \mathbf{x}_n и \mathbf{y}_m . Взаимная ковариационная последовательность выглядит как

$$\gamma_{xy} = \mathcal{E}\{(\mathbf{x}_n - m_{x_n})(\mathbf{y}_m - m_{y_m})^*\} = \varphi_{xy}[n, m] - m_{x_n} m_{y_m}^*. \quad (\text{A.21})$$

Как мы уже неоднократно отмечали, статистические характеристики случайных процессов меняются в зависимости от времени. Однако стационарный случайный процесс характеризуется условием, в котором статистические характеристики инвариантны относительно сдвига во времени. Аналогично, все совместные функции вероятности зависят лишь от разности временных моментов $(m - n)$. Усредненные значения первого порядка, такие как математическое ожидание или дисперсия, вообще не зависят от времени, а средние второго порядка, например автокорреляционная функция, зависят от разности моментов времени $(m - n)$. Таким образом, для стационарных процессов справедливы формулы:

$$m_x = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_n\}, \quad (\text{A.22})$$

$$\sigma_x^2 = \mathcal{E}\{|\mathbf{x}_n - m_x|^2\}. \quad (\text{A.23})$$

Если разность моментов времени обозначить через m , то

$$\varphi_{xx}[n + m, m] = \varphi_{xx}[m] = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_{n+m} \mathbf{x}_m^*\}. \quad (\text{A.24})$$

Таким образом, автокорреляционная функция стационарного процесса — функция одной переменной, равной разности моментов времени.

Встречаются случайные процессы, которые нельзя называть стационарными в строгом смысле этого слова, т. е. их распределение вероятности не инвариантно относительно временного сдвига, однако для них выполнены формулы (A.22)–(A.24). Такие процессы называют *стационарными в широком смысле*.

A.2.2. Временные средние

В контексте обработки сигналов понятие ансамбля сигналов — удобная математическая концепция, позволяющая апеллировать к теории вероятностей. Однако в практической ситуации у нас есть доступ лишь к конечному числу конечных последовательностей, а не к неисчерпаемому ансамблю. Например, нам хотелось бы выяснить вероятностный закон или подходящие средние значения случайного процесса, наблюдая его конкретную реализацию. Если распределение вероятности не зависит от времени, то, казалось бы, амплитуда распределения (гистограмма) большого отрезка конкретной последовательности отсчетов должна

быть приблизительно равна отдельной плотности вероятности, описывающей каждую случайную переменную модели случайного процесса. Аналогично, среднее арифметическое большого числа отсчетов отдельной последовательности должно быть очень близко к математическому ожиданию процесса. Для формализации этих интуитивных замечаний определим временное среднее случайного процесса как

$$\langle \mathbf{x}_n \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{n=-L}^L \mathbf{x}_n. \quad (\text{A.25})$$

Аналогично, временная автокорреляционная последовательность вычисляется как

$$\langle \mathbf{x}_{n+m} \mathbf{x}_n^* \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{n=-L}^L \mathbf{x}_{n+m} \mathbf{x}_n^*. \quad (\text{A.26})$$

Можно показать, что для стационарных процессов с конечным математическим ожиданием выписанные пределы существуют. Как следует из формул (A.25) и (A.26), временные средние — функции бесконечного числа случайных величин, и поэтому сами являются случайными величинами. Однако при дополнительном условии, известном как *эргоидичность*, временные средние из (A.25) и (A.26) постоянны в том смысле, что для почти всех возможных последовательностей равны одной и той же константе. Более того, они совпадают с соответствующими средними по ансамблю¹. Иными словами, для любой реализации $\{x[n]\}$ случайного процесса

$$\langle x[n] \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{n=-L}^L x[n] = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_n\} = m_x \quad (\text{A.27})$$

и

$$\langle x[n+m] x^*[n] \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{n=-L}^L x[n+m] x^*[n] = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_{n+m} \mathbf{x}_n^*\} = \varphi_{xx}[m]. \quad (\text{A.28})$$

Оператор усреднения по времени $\langle \cdot \rangle$ обладает теми же свойствами, что и оператор усреднения по ансамблю $\mathcal{E}\{\cdot\}$. Таким образом, в общей ситуации мы не будем различать случайную переменную \mathbf{x}_n и ее значение $x[n]$ в последовательности отсчетов. Например, выражение $\mathcal{E}\{x[n]\}$ следует понимать как $\langle x[n] \rangle$. Случайные процессы, для которых временные средние совпадают со средними по ансамблю, называются *эргоидическими процессами*.

На практике обычно предполагают, что данная последовательность является последовательностью отсчетов эргодического случайного процесса, и средние значения всего процесса можно вычислять по отдельной последовательности. Конечно, в общей ситуации нам не удастся вычислить пределы (A.27) и (A.28), но вместо них можно использовать величины

$$\hat{m}_x = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x[n], \quad (\text{A.29})$$

¹Более точное утверждение заключается в том, что случайные величины $\langle \mathbf{x}_n \rangle$ и $\langle \mathbf{x}_{n+m} \mathbf{x}_n^* \rangle$ имеют математическое ожидание m_x и $\varphi_{xx}[m]$ соответственно и нулевую дисперсию.

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} |x[n] - \hat{m}_x|^2, \quad (\text{A.30})$$

$$\langle x[n+m]x^*[n] \rangle_L = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x[n+m]x^*[n] \quad (\text{A.31})$$

и аналогичные им как *оценки* математического ожидания, дисперсии и автокорреляции. Величины \hat{m}_x и $\hat{\sigma}_x^2$ называют *выборочным математическим ожиданием* и *выборочной дисперсией*. Оценки средних значений случайного процесса с помощью конечного числа данных — задача статистики, с которой мы кратко ознакомились в главе 10.

A.3. Свойства корреляционной и ковариационной последовательностей

Некоторые полезные свойства корреляционной и ковариационной последовательностей, легко вытекающие из определения, — тема данного параграфа.

Рассмотрим два вещественных стационарных случайных процесса $\{\mathbf{x}_n\}$ и $\{\mathbf{y}_m\}$ с автокорреляционной, автоковариационной, взаимной корреляционной и взаимной ковариационной последовательностями

$$\varphi_{xx}[m] = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_{n+m}\mathbf{x}_n^*\}, \quad (\text{A.32})$$

$$\gamma_{xx}[m] = \mathcal{E}\{(\mathbf{x}_{n+m} - m_x)(\mathbf{x}_n - m_x)^*\}, \quad (\text{A.33})$$

$$\varphi_{xy}[m] = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_{n+m}\mathbf{y}_n^*\}, \quad (\text{A.34})$$

$$\gamma_{xy}[m] = \mathcal{E}\{(\mathbf{x}_{n+m} - m_x)(\mathbf{y}_n - m_y)^*\}, \quad (\text{A.35})$$

где m_x и m_y — математические ожидания процессов. Следующие свойства легко получаются в результате преобразований определяющих формул.

Свойство 1

$$\gamma_{xx}[m] = \varphi_{xx}[m] - |m_x|^2, \quad (\text{A.36})$$

$$\gamma_{xy}[m] = \varphi_{xy}[m] - m_x m_y^*. \quad (\text{A.37})$$

Эти формулы непосредственно следуют из (A.19) и (A.21). Они показывают, что корреляционная и ковариационная последовательности совпадают для процессов с нулевым математическим ожиданием.

Свойство 2

$$\varphi_{xx}[0] = \mathcal{E}[|\mathbf{x}_n|^2] = \text{среднеквадратическое значение}, \quad (\text{A.38})$$

$$\gamma_{xx}[0] = \sigma_x^2 = \text{дисперсия}. \quad (\text{A.39})$$

Свойство 3

$$\varphi_{xx}[-m] = \varphi_{xx}^*[m], \quad (\text{A.40})$$

$$\gamma_{xx}[-m] = \gamma_{xx}^*[m] \quad (\text{A.41})$$

$$\varphi_{xy}[-m] = \varphi_{yx}^*[m], \quad (\text{A.42})$$

$$\gamma_{xy}[-m] = \gamma_{yx}^*[m]. \quad (\text{A.43})$$

Свойство 4

$$|\varphi_{xy}[m]|^2 \leq \varphi_{xx}[0]\varphi_{yy}[0], \quad (\text{A.44})$$

$$|\gamma_{xy}[m]|^2 \leq \gamma_{xx}[0]\gamma_{yy}[0]. \quad (\text{A.45})$$

В частности,

$$|\varphi_{xx}[m]| \leq \varphi_{xx}[0], \quad (\text{A.46})$$

$$|\gamma_{xx}[m]| \leq \gamma_{xx}[0]. \quad (\text{A.47})$$

Свойство 5. Если $\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_{n-n_0}$, то

$$\varphi_{yy}[m] = \varphi_{xx}[m], \quad (\text{A.48})$$

$$\gamma_{yy}[m] = \gamma_{xx}[m]. \quad (\text{A.49})$$

Свойство 6. Для многих случайных процессов случайные переменные, далеко отстоящие друг от друга во времени, не коррелируют. Если это так, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_{xx}[m] = 0, \quad (\text{A.50})$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_{xx}[m] = |m_x|^2, \quad (\text{A.51})$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_{xy}[m] = 0, \quad (\text{A.52})$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_{xy}[m] = m_x m_y^*. \quad (\text{A.53})$$

Смысл этих формул сводится к тому, что корреляция и ковариация последовательностей с конечной энергией сходят на нет при больших значениях m . Поэтому возникает возможность представлять такие последовательности в терминах преобразования Фурье или z -преобразования.

A.4. Преобразование Фурье случайных сигналов

Хотя преобразование Фурье случайных сигналов и не определено, можно вычислить его для автокорреляционных и автоковариационных последовательностей. Спектральное представление корреляционной функции играет важную роль в описании соотношений между стохастическим сигналом и откликом на него ЛС-систем. Следовательно, полезно изучить свойства корреляционной и ковариационной последовательностей и их преобразований Фурье.

Пусть $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$, $\Gamma_{xx}(e^{j\omega})$, $\Phi_{xy}(e^{j\omega})$ и $\Gamma_{xy}(e^{j\omega})$ — преобразования Фурье от $\varphi_{xx}[m]$, $\gamma_{xx}[m]$, $\varphi_{xy}[m]$ и $\gamma_{xy}[m]$ соответственно. Поскольку эти функции — преобразование Фурье последовательностей, они должны быть 2π -периодичны. Из формул (A.36) и (A.37) следует, что внутри одного периода $|\omega| \leq \pi$ выполнены равенства

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \Gamma_{xx}(e^{j\omega}) + 2\pi|m_x|^2\delta(\omega), \quad |\omega| < \pi, \quad (\text{A.54})$$

$$\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = \Gamma_{xy}(e^{j\omega}) + 2\pi m_x m_y^*\delta(\omega), \quad |\omega| < \pi. \quad (\text{A.55})$$

В случае процесса с нулевым математическим ожиданием ($m_x = m_y = 0$) корреляционные и ковариационные функции тождественны: $\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \Gamma_{xx}(e^{j\omega})$ и $\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = \Gamma_{xy}(e^{j\omega})$.

Обратное преобразование Фурье влечет:

$$\gamma_{xx}[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_{xx}(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega, \quad (\text{A.56})$$

$$\varphi_{xx}[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega, \quad (\text{A.57})$$

и, следовательно,

$$\mathcal{E}\{|x[n]|^2\} = \varphi_{xx}[0] = \sigma_x^2 + |m_x|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega, \quad (\text{A.58})$$

$$\sigma_x^2 = \gamma_{xx}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_{xx}(e^{j\omega}) d\omega. \quad (\text{A.59})$$

Иногда более удобно использовать следующее обозначение:

$$P_{xx}(\omega) = \Phi_{xx}(e^{j\omega}). \quad (\text{A.60})$$

Тогда формулы (A.58) и (A.59) примут вид

$$\mathcal{E}\{|x[n]|^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\omega) d\omega, \quad (\text{A.61})$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\omega) d\omega - |m_x|^2. \quad (\text{A.62})$$

Таким образом, площадь под графиком $P_{xx}(\omega)$ над отрезком $-\pi \leq \omega \leq \pi$ пропорциональна средней мощности сигнала. Фактически, как мы обсуждали в § 2.11, интеграл от $P_{xx}(\omega)$ по полосе частот пропорционален мощности сигнала в этой полосе. По этой причине функцию $P_{xx}(\omega)$ называют *спектральной плотностью мощности*, или просто *спектром мощности*. Если $P_{xx}(\omega)$ — константа, не зависящая от ω , случайный процесс называют *белым шумом*. Если же $P_{xx}(\omega)$ — постоянна над некоторой полосой частот и равна нулю всюду вне этой полосы, сигнал называют *узкополосным белым шумом*.

Из формулы (A.41) видно, что $P_{xx}(\omega)$ всегда вещественна, и для вещественных случайных процессов имеет место соотношение $\varphi_{xx}[m] = \varphi_{xx}[-m]$. Значит, в этом случае $P_{xx}(\omega)$ — четная функция:

$$P_{xx}(\omega) = P_{xx}(-\omega). \quad (\text{A.63})$$

К дополнительным важным свойствам спектральной плотности мощности относится ее неотрицательность. Этот момент подробно обсуждался в § 2.11.

Взаимная спектральная плотность мощности определяется как

$$P_{xy}(\omega) = \Phi_{xy}(e^{j\omega}). \quad (\text{A.64})$$

Как правило, это комплекснозначная функция, и формула (A.42) влечет, что

$$P_{xy}(\omega) = P_{yx}^*(\omega). \quad (\text{A.65})$$

Наконец, как было показано в § 2.11, если $x[n]$ — случайный сигнал, поданный на вход ЛС-системы с частотной характеристикой $H(e^{j\omega})$, а $y[n]$ — соответствующая реакция системы, то

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \Phi_{xx}(e^{j\omega}), \quad (\text{A.66})$$

$$\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \Phi_{xx}(e^{j\omega}). \quad (\text{A.67})$$

Пример A.1. Напряжение шумов на выходе идеального фильтра нижних частот

Предположим, что $x[n]$ — белый шум с нулевым математическим ожиданием и $\varphi_{xx}[m] = \sigma_x^2 \delta[m]$, а его спектр мощности равен $\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2$ при $|\omega| \leq \pi$. Допустим, что $x[n]$ подается на вход идеального фильтра нижних частот с граничной частотой ω_c . Тогда из (A.66) следует, что реакция $y[n]$ системы — узкополосный белый шум со спектром мощности

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = \begin{cases} \sigma_x^2, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases} \quad (\text{A.68})$$

Используя обратное преобразование Фурье, получаем автокорреляционную последовательность:

$$\varphi_{yy}[m] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} \sigma_x^2. \quad (\text{A.69})$$

Теперь с помощью (A.58) находим среднюю мощность реакции системы

$$\mathcal{E}\{y^2[n]\} = \varphi_{yy}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \sigma_x^2 d\omega = \sigma_x^2 \frac{\omega_c}{\pi}. \quad (\text{A.70})$$

A.5. Использование z -преобразования при вычислении средней мощности

Для вычисления средней мощности по формуле (A.58) мы должны взять интеграл от спектра мощности, как это сделано в примере A.1. В то время как интеграл из примера довольно просто берется, найти его в общей ситуации стандартными методами очень трудно. Однако результат, основанный на z -преобразовании, облегчает вычисление средней мощности выходящего сигнала для важного класса систем, описывающихся рациональными функциями.

В общей ситуации z -преобразование используется для представления ковариационной функции, а не корреляционной. Это происходит потому, что корреляционная функция сигнала с ненулевым математическим ожиданием имеет аддитивную константу, от которой z -преобразование не определено. Однако если математическое ожидание сигнала нулевое, то ковариационная функция совпадает с корреляционной, и, когда z -преобразование от $\gamma_{xx}[m]$ существует, то

$$\Gamma_{xx}(z) = \Gamma_{xx}^*(1/z^*), \quad (\text{A.71})$$

поскольку $\gamma_{xx}[-m] = \gamma_{xx}^*[m]$. Более того, так как $\gamma_{xx}[m]$ — двусторонняя сопряженно-симметричная последовательность, то ОС $\Gamma_{xx}(z)$ описывается нера-

венством:

$$r_a < |z| < \frac{1}{r_a},$$

где $0 < r_a < 1$. В важном случае, когда $\Gamma_{xx}(z)$ — рациональная функция от z , формула (A.71) влечет, что полюсы и нули функции $\Gamma_{xx}(z)$ должны разбиваться на комплексно-сопряженные пары.

Главное преимущество z -преобразования состоит в том, что при рациональной $\Gamma_{xx}(z)$ средняя мощность случайного сигнала легко вычисляется с помощью формулы

$$\mathcal{E}\{x^2[n]\} = \sigma_x^2 = \gamma_{xx}[0] = \begin{cases} \text{обратное } z\text{-преобразование} \\ \text{от } \Gamma_{xx}(z), \\ \text{вычисленное при } m = 0 \end{cases}. \quad (\text{A.72})$$

Правую часть этой формулы можно вычислить, используя метод, основанный на наблюдении: если $\Gamma_{xx}(z)$ — рациональная функция от z , то $\gamma_{xx}[m]$ находится с помощью разложения рациональной дроби в сумму простейших. Таким образом, для вычисления средней мощности нам достаточно найти значение $\gamma_{xx}[m]$ при $m = 0$.

Z -преобразование также полезно при определении автоковариации и средней мощности реакции ЛС-системы на случайный входящий сигнал. Формула (A.66) позволяет записать

$$\Gamma_{yy}(z) = H(z)H^*(1/z^*)\Gamma_{xx}(z), \quad (\text{A.73})$$

и свойства z -преобразования вместе с (A.73) дают представление автоковариации отклика системы в виде свертки

$$\gamma_{yy}[m] = h[m] * h^*[-m] * \gamma_{xx}[m]. \quad (\text{A.74})$$

Этот результат особенно полезен при анализе шума квантования, когда нам необходимо вычислять среднюю мощность реакции системы на белый шум с нулевым математическим ожиданием и средней мощностью σ_x^2 . Поскольку автоковариация такого сигнала равна $\gamma_{xx}[m] = \sigma_x^2 \delta[m]$, то автоковариация реакции системы выглядит как $\gamma_{yy}[m] = \sigma_x^2 (h[m] * h^*[-m])$, т. е. ковариация реакции пропорциональна детерминированной автокорреляции импульсной характеристики ЛС-системы. Этот результат влечет следствие:

$$\mathcal{E}\{y^2[n]\} = \gamma_{yy}[0] = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2. \quad (\text{A.75})$$

Альтернативой вычислению суммы квадратов отсчетов импульсной характеристики, которое может оказаться довольно сложным для БИХ-систем, служит метод, основанный на разложении $\Gamma_{yy}(z)$ в сумму элементарных дробей. Напомним, что z -преобразование белого шума с $\gamma_{xx}[m] = \sigma_x^2 \delta[m]$, поданного на вход системы, равно $\Gamma_{xx}(z) = \sigma_x^2$, так что $\Gamma_{yy}(z) = \sigma_x^2 H^*(1/z^*)$. Следовательно, формула (A.72), примененная к отклику системы, дает

$$\mathcal{E}\{y^2[n]\} = \gamma_{yy}[0] = \begin{cases} \text{обратное } z\text{-преобразование} \\ \text{от } \Gamma_{yy}(z) = H(z)H^*(1/z^*)\sigma_x^2, \\ \text{вычисленное при } m = 0 \end{cases}. \quad (\text{A.76})$$

Теперь рассмотрим специальный случай устойчивой детерминированной системы с рациональной системной функцией вида

$$H(z) = A \cdot \frac{\prod_{m=1}^M (1 - c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}, \quad |z| > \max_k \{|d_k|\}, \quad (\text{A.77})$$

где $\max_k \{|d_k|\} < 1$ и $M < N$. Такая системная функция может описывать соотношение между внутренним округлением источника помех и реакцией системы, выраженной на языке арифметики с фиксированной десятичной запятой. Представляя (A.77) для $H(z)$ в (A.73), получаем

$$\Gamma_{yy}(z) = \sigma_x^2 H(z) H^*(1/z^*) = \sigma_x^2 |A|^2 \cdot \frac{\prod_{m=1}^M (1 - c_m z^{-1})(1 - c_m^* z)}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z)}. \quad (\text{A.78})$$

По предположению $|d_k| < 1$ для всех k . Значит, все полюсы исходной функции расположены внутри единичного круга, а остальные полюсы (в точках $(d_k^*)^{-1}$) находятся вне этого круга. Можно показать, что ввиду неравенства $M < N$ разложение этой дроби в сумму простейших имеет вид:

$$\Gamma_{yy}(z) = \sigma_x^2 \left(\sum_{k=1}^N \left(\frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} - \frac{A_k^*}{1 - (d_k^*)^{-1} z^{-1}} \right) \right), \quad (\text{A.79})$$

где коэффициенты вычисляются по формуле

$$A_k = H(z) H^*(1/z^*)(1 - d_k z^{-1})|_{z=d_k}. \quad (\text{A.80})$$

Поскольку полюсы $z = d_k$ расположены внутри внутренней границы ОС, каждому из них соответствует правосторонняя последовательность, в то время как каждому полюсу $z = (d_k^*)^{-1}$ — левосторонняя. Итак, автоковариационная функция, соответствующая формуле (A.79), равна

$$\gamma_{yy}[n] = \sigma_x^2 \sum_{k=1}^N (A_k (d_k)^n u[n] + A_k^* (d_k^*)^{-n} u[-n-1]),$$

откуда следует, что средняя мощность получается из соотношения

$$\sigma_y^2 = \gamma_{yy}[0] = \sigma_x^2 \left(\sum_{k=1}^N A_k \right), \quad (\text{A.81})$$

где числа A_k определены формулой (A.80).

Таким образом, вычисление общей средней мощности реакции системы с рациональной системной функцией на белый шум сводится к задаче вычисления коэффициентов разложения z -преобразования автокорреляционной функции реакции в сумму элементарных дробей. Этот прием иллюстрируется следующим примером.

Пример А.2. Напряжение шумов на выходе БИХ-фильтра второго порядка

Рассмотрим систему с импульсной характеристики

$$h[n] = \frac{r^n \sin \theta(n+1)}{\sin \theta} u[n] \quad (\text{A.82})$$

и системной функцией

$$H(z) = \frac{1}{(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})}. \quad (\text{A.83})$$

Если входящий сигнал — белый шум с общей средней мощностью σ_x^2 , z -преобразование автоковариационной функции реакции системы равно

$$G_{yy} = \sigma_x^2 \left(\frac{1}{(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})} \right) \left(\frac{1}{(1 - re^{-j\theta}z)(1 - re^{j\theta}z)} \right), \quad (\text{A.84})$$

откуда с помощью (A.80) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{y^2[n]\} &= \sigma_x^2 \left[\left(\frac{1}{1 - re^{-j\theta}z^{-1}} \right) \left(\frac{1}{(1 - re^{-j\theta}z)(1 - re^{j\theta}z)} \right) \Big|_{z=re^{j\theta}} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{1 - re^{j\theta}z^{-1}} \right) \left(\frac{1}{(1 - re^{-j\theta}z)(1 - re^{j\theta}z)} \right) \Big|_{z=re^{-j\theta}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

Осуществляя указанную подстановку и приводя дроби к общему знаменателю, находим

$$\mathcal{E}\{y^2[n]\} = \sigma_x^2 \left(\frac{1+r^2}{1-r^2} \right) \left(\frac{1}{1-2r^2 \cos(2\theta) + r^4} \right). \quad (\text{A.86})$$

Опираясь на этот результат, можно вычислить

$$\mathcal{E}\{y^2[n]\} = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{r^n \sin \theta(n+1)}{\sin \theta} \right|^2,$$

что довольно трудно сделать, производя непосредственное суммирование. Кроме того,

$$\mathcal{E}\{y^2[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_x^2 |H(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\omega}{|(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})(1 - re^{-j\theta}e^{-j\omega})|^2},$$

что нелегко вычислить простым интегрированием. \square

Замечательно простой результат примера А.2 — иллюстрация силы применения метода разложения дроби в сумму простейших для вычисления средней мощности. В главе 6 мы использовали эту технику при анализе эффектов квантования при разработке цифровых фильтров.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Методы проектирования БИХ-фильтров, о которых рассказывалось в § 7.2 и 7.3, исходят из подходящих непрерывных фильтров. Здесь мы приведем характеристики нескольких классов аппроксимаций фильтров нижних частот, на которые ссылались в главе 7. Более подробное изложение представленного здесь материала можно найти в [52, 154 и 113]. Обширные проектные таблицы и формулы приведены в [163]. Кроме того, существует множество пакетов программ, помогающих в компьютерном проектировании цифровых БИХ-фильтров, основанных на аналоговых аппроксимациях (см., например, [50, 37, 101 и 98]).

Б.1. Фильтры Баттервортса нижних частот

Фильтр Баттервортса нижних частот определяется тем, что его АЧХ над полосой пропускания максимально плоская. В контексте фильтра порядка N это означает, что первые $(2N - 1)$ производные квадрата АЧХ обращаются в нуль в точке $\Omega = 0$. Второе свойство таких фильтров состоит в монотонности АЧХ над полосой как пропускания, так и непропускания. Квадрат АЧХ непрерывного фильтра Баттервортса нижних частот имеет вид:

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\Omega/j\Omega_c)^{2N}}. \quad (\text{Б.1})$$

Его график изображен на рис. Б.1.

При возрастании параметра N из (Б.1) АЧХ фильтра над переходной полосой становится все круче, т. е. она приближается к единице на все большей полосе пропускания и резче спадает к нулю в полосе задерживания, хотя значение квадрата АЧХ в точке Ω_c ввиду формулы (Б.1) остается равным 1/2. Зависимость характеристик фильтра Баттервортса от параметра N показана на рис. Б.2.

Подставляя в (Б.1) значение $j\Omega = s$, получаем, что

$$H_c(s)H_c(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\Omega_c)^{2N}}. \quad (\text{Б.2})$$

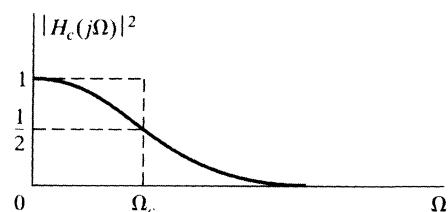


Рис. Б.1. Квадрат АЧХ непрерывного фильтра Баттервортса

Корни знаменателя этой дроби (т. е. полюса квадрата АЧХ) определяются уравнением $1 + (s/j\Omega_c)^{2N} = 0$ и равны

$$s_k = (-1)^{1/2N} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{(j\pi/2N)(2k+N-1)}, \quad 0 \leq k \leq 2N-1. \quad (\text{Б.3})$$

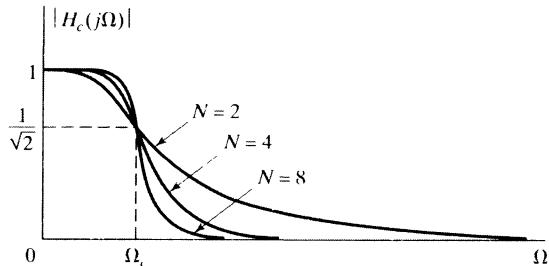


Рис. Б.2. Зависимость характеристик фильтра Баттерворта от порядка N

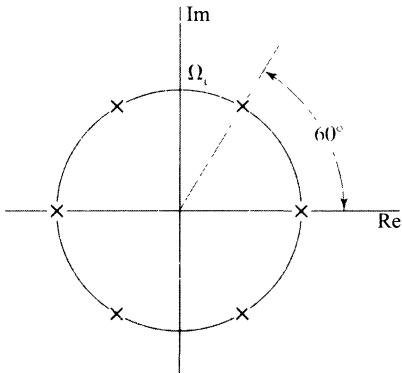


Рис. Б.3. Расположение нулей на s -плоскости для фильтра Баттерворта третьего порядка

Таким образом, существует $2N$ полюсов, равномерно распределенных вдоль окружности радиуса Ω_c с центром в нуле. Полюса симметрично расположены относительно мнимой оси, причем ни один из них не попадает на мнимую ось, и, если N нечетно, найдется вещественный полюс, а при четном N вещественных полюсов нет. Величина угла между соседними полюсами равна π/N радиан. Например, при $N = 3$ она составляет $\pi/3$ рад, или 60° , что отражено на рис. Б.3. Для определения характеристической функции аналогового фильтра, ассоциированного с квадратом АЧХ Баттерворта, нам нужно использовать функцию $H_c(s)H_c(-s)$. Полюса квадрата АЧХ всегда разбиваются на пары: полюс в точке $s = s_k$ соответствует полюсу в точке $s = -s_k$. Следовательно, чтобы построить

$H_c(s)$ по квадрату АЧХ, нам следует выбрать по одному полюсу из каждой такой пары. Для устойчивого детерминированного фильтра полюса следует выбирать на левой половине s -плоскости.

Б.2. Фильтры Чебышева

АЧХ фильтра Баттерворта монотонна как над полосой пропускания, так и над полосой задерживания. Следовательно, если спецификации фильтра выражены в терминах максимальной ошибки аппроксимации полос пропускания и задерживания, спецификации превышаются на нижнечастотном конце полосы пропускания и выше частоты отсечки полосы задерживания. Наиболее эффективный подход, приводящий обычно к фильтру наименьшего порядка, состоит в том, чтобы распределить точность аппроксимации равномерно по полосе пропускания или

задерживания (или по обеим полосам). Это достигается выбором равномерно пульсирующей, а не монотонной аппроксимации. К такому классу аппроксимаций относятся фильтры Чебышева. Их АЧХ равномерно пульсирует над полосой пропускания и монотонна над полосой задерживания (первый тип фильтров Чебышева) или монотонна над полосой пропускания, а над полосой задерживания равномерно пульсирует (второй тип фильтров Чебышева). КЧХ-фильтра Чебышева первого типа показана на рис. Б.4, а квадрат АЧХ такого фильтра имеет вид:

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_N^2(\Omega/\Omega_c)}, \quad (\text{Б.4})$$

где $V_N(x)$ — многочлен Чебышева N -го порядка:

$$V_N(x) = \cos(N \arccos x). \quad (\text{Б.5})$$

Например, $V_0(x) = 1$, $V_1(x) = \cos(\arccos x) = x$, $V_2(x) = \cos(2 \arccos x) = 2x^2 - 1$ и т. д.

Опираясь на формулу (Б.5), легко получить рекуррентное соотношение, связывающее многочлены Чебышева:

$$V_{N+1}(x) = 2xV_N(x) - V_{N-1}(x). \quad (\text{Б.6})$$

Из (Б.5) следует, что значения функции $V_N^2(x)$ лежат между нулем и единицей при $0 < x < 1$. При $x > 1$ значения $\arccos x$ чисто мнимые и поведение многочлена $V_N(x)$ напоминает гиперболический косинус. В частности, $V_N(x)$ монотонно возрастает при $x > 1$. Как следует из (Б.4), функция $|H_c(j\Omega)|^2$ колеблется между 1 и $1/(1+\varepsilon^2)$ при $0 \leq \Omega/\Omega_c \leq 1$ и монотонно убывает при $\Omega/\Omega_c > 1$. Для задания конкретного фильтра необходимо указать значения трех параметров: ε , Ω_c и N . В типовом проекте ε определяется допустимой пульсацией полосы пропускания, а Ω_c зависит от желаемой частоты отсечки полосы пропускания. Зафиксировав значения ε и Ω_c , параметр N подбирают так, чтобы добиться желаемой полосы задерживания.

Полюса характеристической функции фильтра Чебышева лежат на эллипсе (см. рис. Б.5). Эллипс определяется двумя окружностями, чьи радиусы совпадают с его большой и малой полуосами. Величина малой полуоси эллипса равна $2a\Omega_c$, где

$$a = \frac{1}{2}(\alpha^{1/N} - \alpha^{-1/N}) \quad (\text{Б.7})$$

и

$$\alpha = \varepsilon^{-1} + \sqrt{1 + \varepsilon^{-2}}. \quad (\text{Б.8})$$

Длина большой полуоси эллипса составляет $2b\Omega_c$, где

$$b = \frac{1}{2}(\alpha^{1/N} + \alpha^{-1/N}). \quad (\text{Б.9})$$

Чтобы найти положения нулей характеристической функции фильтра Чебышева, на большой и малой окружностях, определяющих эллипс, отмечаются точки, раз-

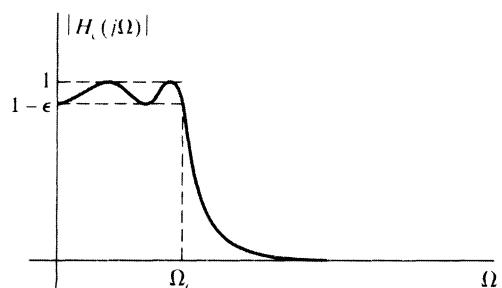


Рис. Б.4. АЧХ аппроксимации Чебышева первого типа фильтра нижних частот

При заданных ε и Ω_c значение N определяется из условия

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_N^2(\Omega_c)}.$$

Следовательно, для заданной полосы пропускания и заданной полосы задерживания определяется значение N .

деленные дугами в π/N радиан, исключая точки пересечения этих окружностей с мнимой осью. Расположение отмеченных точек получается симметричным относительно мнимой оси, причем среди отмеченных точек найдутся вещественные

тогда и только тогда, когда N — нечетно. Разбиение большой и малой окружностей в точности соответствует полюсам фильтра Баттервортса из (Б.3). Координаты полюсов характеристической функции фильтра Чебышева определяются отмеченными точками большой и малой окружностей. Их ордината совпадает с ординатой точек на большой окружности, а абсцисса — с абсциссой точек на малой. На рис. Б.5 показаны нули характеристической функции фильтра Чебышева третьего порядка.

Фильтр Чебышева нижних частот второго типа связан с фильтром первого типа некоторым преобразованием. Более конкретно, если в (Б.4) член $\varepsilon^2 V_N^2(\Omega/\Omega_c)$ заменить на обратный к нему и аргумент многочлена V_N^2 тоже заменить на обратный, то получим:

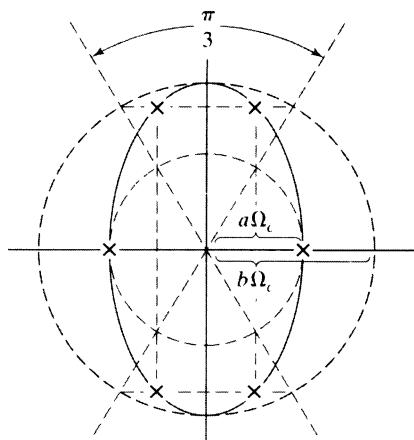
$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + [\varepsilon^2 V_N^2(\Omega_c/\Omega)]^{-1}}, \quad (\text{Б.10})$$

Рис. Б.5. Положения нулей характеристической функции фильтра Чебышева нижних частот первого типа третьего порядка

квадрат АЧХ фильтра Чебышева нижних частот второго типа. Один из способов проектирования этого фильтра сводится к разработке фильтра первого типа и описанному преобразованию.

Б.3. Эллиптические фильтры

Как уже отмечалось, распределив ошибку аппроксимации равномерно по полосе пропускания или полосе задерживания, как в случае фильтров Чебышева, мы получим проект фильтра, обеспечивающий желаемые спецификации при меньшем порядке системы, чем аналогичный проект с монотонной ошибкой, как в случае фильтров Баттервортса. Мы заметили, что в фильтре Чебышева первого типа и в фильтре Баттервортса ошибка аппроксимации над полосой непропускания монотонно убывает с ростом частоты. Надеясь на дальнейшее улучшение аппроксимации, распределим ошибку равномерно и над полосой задерживания, что даст нам фильтр, АЧХ которого изображена на рис. Б.6. Действительно, можно показать (см. [111]), что этот тип аппроксимации (т. е. с равномерно распределенной ошибкой над полосами пропускания и непропускания) является наилучшим среди всех проектов с данным порядком N , в том смысле, что при фиксированных Ω_p , δ_1 и δ_2 ширина переходной полосы $(\Omega_s - \Omega_p)$ оказывается самой маленькой.

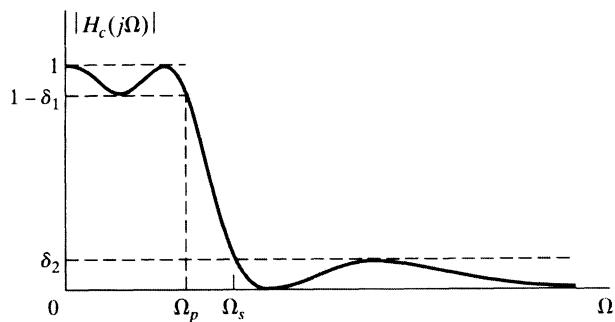


Описанный класс аппроксимаций называют *эллиптическими фильтрами*. Квадрат их АЧХ имеет вид:

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 U_N^2(\Omega)}, \quad (\text{Б.11})$$

где $U_N(\Omega)$ — эллиптическая функция. Чтобы достичь равнопульсирующей ошибки в полосах пропускания и непропускания, характеристическая функция фильтра должна иметь как полюса, так и нули. Как следует из рис. Б.6, нули характеристической функции такого фильтра попадают на ось $j\Omega$ s -плоскости. Обсуждение проектирования эллиптических фильтров, даже на начальном уровне, выходит за рамки данного приложения. Любознательному читателю можно порекомендовать работы [52, 148, 49 и 113].

Рис. Б.6. Аппроксимация, равно-
пульсирующая в полосах пропус-
кания и непропускания



ПРИЛОЖЕНИЕ В

ОТВЕТЫ

К ИЗБРАННЫМ ЗАДАЧАМ

Здесь приведены ответы к двадцати первым задачам каждой главы.

Ответы к задачам главы 2

2.1. (а) При любой $g[n]$ система обладает свойствами (2), (3) и (5), а если $g[n]$ ограничена, то свойством (1). (б) (3); (в) всегда (1), (3), (4), а если $n_0 = 0$, то (2) и (5); (г) всегда (1), (3), (4), а если $n_0 \leq 0$, то (2), при $n_0 = 0$ имеет место (5); (д) (1), (2), (4), (5); (е) всегда (1), (2), (4), (5), а при $b = 0$ — (3); (ж) (1), (3); (з) (1), (5). **2.2.** (а) $N_4 = N_0 + N_2$, $N_5 = N_1 + N_2$; (б) не больше $N + M - 1$ ненулевых точек. **2.3.** $y[n] = \begin{cases} \frac{a^{-n}}{1-a}, & n < 0, \\ \frac{1}{1-a}, & n \geq 0. \end{cases}$ **2.4.** $y[n] = 8((1/2)^n - (1/4)^n)u[n]$. **2.5.** (а) $y_h[n] = A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot 3^n$; (б) $h[n] = 2(3^n - 2^n)u[n]$; (в) $s[n] = (-8 \cdot 2^{n-1} + 9 \cdot 3^{n-1} + 1)u[n]$. **2.6.** (а) $H(e^{j\omega}) = \frac{1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$; (б) $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{3}{4}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1] + x[n-3]$.

2.7. (а) Периодична с периодом $N = 6$; (б) периодична с периодом $N = 8$; (в) непериодична; (г) непериодична. **2.8.** $y[n] = 3(-1/2)^n u[n] + 2(1/3)^n u[n]$. **2.9.** (а) $h[n] = 2 \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) u[n]$, $H(e^{j\omega}) = \frac{(1/3)e^{-j\omega}}{1 - (5/6)e^{-j\omega} + (1/6)e^{-j2\omega}}$, $s[n] = \left(\frac{1}{3^n} - 2 \frac{1}{2^n} + 1 \right) u[n]$; (б) $y_h[n] = A_1(1/2)^n + A_2(1/3)^n$; (в) $y[n] = 4(1/2)^n - 3(1/3)^n - (2(1/2)^n - 2(1/3)^n)u[-n-1]$.

2.10. (а) $y[n] = \begin{cases} a^{-1}/(1 - a^{-1}), & n \geq -1, \\ a^n/(1 - a^{-1}), & n \leq -2; \end{cases}$ (б) $y[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 3, \\ 2^{n-3}, & n \leq 2; \end{cases}$ (в) $y[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 2^n, & n \leq -1; \end{cases}$ (г) $y[n] = \begin{cases} 0, & n \geq 9, \\ 1 - 2^{n-9}, & 8 \geq n \geq -1, \\ 2^{n+1} - 2^{n-9}, & -2 \geq n. \end{cases}$ **2.11.** $y[n] = 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi(n-1)}{4}$.

2.12. (а) $y[n] = n!u[n]$; (б) система линейна; (в) система нестационарна. **2.13.** Функции (а), (б) и (д) являются собственными устойчивой ЛС-системы. **2.14.** (а) (iv); (б) (i); (в) (iii), $h[n] = (1/2)^n u[n]$. **2.15.** (а) Система не относится к ЛС-системам, поскольку $\delta[n]$ и $\delta[n-1]$ нарушают стационарность; (б) недетерминированная, контрпример: $x[n] = \delta[n-1]$; (в) устойчивая. **2.16.** (а) $y_h[n] = A_1(1/2)^n + A_2(-1/4)^n$;

(б) детерминированная: $h_d[n] = 2(1/2)^n u[n] + (-1/4)^n u[n]$; антидетерминированная: $h_{ad}[n] = -2(1/2)^n u[-n-1] - (-1/4)^n u[-n-1]$; (в) $h_d[n]$ абсолютно суммируема, а $h_{ad}[n]$ нет; (г) $y_p[n] = (1/3)(-1/4)^n u[n] + (2/3)(1/2)^n u[n] + 4(n+1)(1/2)^{n+1} u[n+1]$.

2.17. (а) $R(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \frac{\sin(\omega(M+1)/2)}{\sin(\omega/2)}$; (б) $W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}R(e^{j\omega}) + \frac{1}{4}R(e^{j(\omega-2\pi/M)}) + \frac{1}{4}R(e^{j(\omega+2\pi/M)})$. **2.18.** Системы (а) и (б) детерминированы. **2.19.** Системы (б), (в), (д) и (е) устойчивы. **2.20.** (а) $h[n] = (1/a)^{n-1} u[n-1]$; (б) система устойчива при $|a| > 1$.

Ответы к задачам главы 3

- 3.1.** (а) $\frac{1}{1-(1/2)z^{-1}}$, $|z| > 1/2$; (б) $\frac{1}{1-(1/2)z^{-1}}$, $|z| < 1/2$; (в) $\frac{-(1/2)z^{-1}}{1-(1/2)z^{-1}}$, $|z| < 1/2$; (г) 1, все z ; (д) z^{-1} , $z \neq 0$; (е) z , $|z| < \infty$; (ж) $\frac{1-(1/2)^{10}z^{-10}}{1-(1/2)z^{-1}}$, $z \neq 0$. **3.2.** $X(z) = \frac{z^{-1}(1-z^{-N})}{(1-z^{-1})^2}$. **3.3.** (а) $X_a(z) = \frac{z^{-1}(\alpha - \alpha^{-1})}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha^{-1}z^{-1})}$, ОС: $|\alpha| < |z| < |\alpha^{-1}|$; (б) $X_b(z) = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$, ОС: $z \neq 0$; (в) $X_c(z) = \frac{(1-z^{-N})^2}{(1-z^{-1})^2}$, ОС: $z \neq 0$. **3.4.** (а) $(1/3) < |z| < 2$, двусторонняя; (б) две: у первой ОС — $1/3 < |z| < 2$, а у второй — $2 < |z| < 3$; (в) нет, ОС детерминированной последовательности, $|z| > 3$, не содержит единичную окружность. **3.5.** $x[n] = 2\delta[n+1] + 5\delta[n] - 4\delta[n-1] - 3\delta[n-2]$. **3.6.** (а) $x[n] = (-1/2)^n u[n]$, Фурье-образ существует; (б) $x[n] = -(-1/2)^n u[-n-1]$, Фурье-образ не существует; (в) $x[n] = 4(-1/2)^n u[n] - 3(-1/4)^n u[n]$, Фурье-образ существует; (г) $x[n] = (-1/2)^n u[n]$, Фурье-образ существует; (д) $x[n] = -a^{-(n+1)} u[n] + a^{-(n-1)} u[n-1]$, Фурье-образ существует при $|a| > 1$. **3.7.** (а) $H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, $|z| > 1$; (б) ОС $Y(z)$ описывается неравенством $|z| > 1$; (в) $y[n] = -(1/3)(1/2)^n u[n] + (1/3)(-1)^n u[n]$. **3.8.** (а) $h[n] = (-3/4)^n u[n] - (-3/4)^{n-1} u[n-1]$; (б) $y[n] = \frac{8}{13} \left(\frac{(-3)^n}{4^n} - \frac{1}{3^n} \right) u[n]$; (в) система неустойчива. **3.9.** (а) $|z| > 1/2$; (б) ОС содержит единичную окружность; (в) $X(z) = \frac{1-(1/2)z^{-1}}{1-2z^{-1}}$; (г) $h[n] = 2(1/2)^n u[n] - (-1/4)^n u[n]$. **3.10.** (а) $|z| > 3/4$; (б) $0 < |z| < \infty$; (в) $|z| < 2$; (г) $|z| > 1$; (д) $|z| < \infty$; (е) $1/2 < |z| < \sqrt{13}$. **3.11.** (а) Детерминирована; (б) недетерминирована; (в) детерминирована; (г) недетерминирована. **3.12.** (а) См. рис. В.1; (б) См. рис. В.2; (в) См. рис. В.3. **3.13.** $g[11] = -\frac{1}{11!} + \frac{3}{9!} - \frac{2}{7!}$. **3.14.** $A_1 = 1/2$, $A_2 = 1/2$, $\alpha_1 = -1/2$, $\alpha_2 = 1/2$. **3.15.** $h[n] = (1/2)^n (u[n] - u[n-10])$, система детерминирована. **3.16.** (а) $H(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-(2/3)z^{-1}}$, $|z| > 2/3$; (б) $h[n] = (2/3)^n u[n] - 2(2/3)^{n-1} u[n-1]$; (в) $y[n] - (2/3)y[n-1] = x[n] - 2x[n-1]$; (г) система устойчива и детерминирована. **3.17.** Отсчет $h[0]$ может быть равен 0, 1/3 или 1. Условно говоря, $h[0]$ может принимать значение 2/3, если $h[n] = (2/3)2^n u[n] - (1/3)(1/2)^n u[-n-1]$. Эта последовательность удовлетворяет разностному уравнению, но обладает пустой ОС. Недетерминированную систему без ОС можно реализовать как параллельную комбинацию детерминированной и антидетерминированной подсистем. **3.18.** (а) $h[n] = -2\delta[n] + (1/3)(-1/2)^n u[n] + (8/3)u[n]$;

- (б) $y[n] = \frac{2e^{j\pi n/2}}{(3/2) + (j/2)}$. 3.19. (а) $|z| > 1/2$; (б) $1/3 < |z| < 2$; (в) $|z| > 1/3$.
 3.20. (а) $|z| > 2/3$; (б) $|z| > 1/6$.

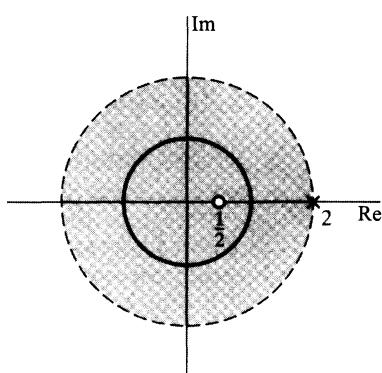


Рис. В.1.

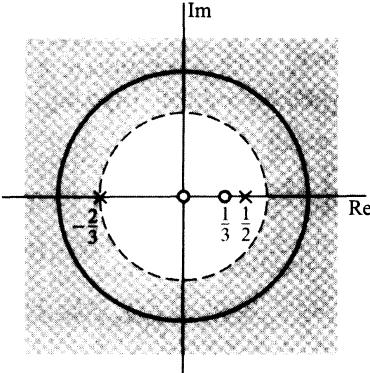


Рис. В.2.

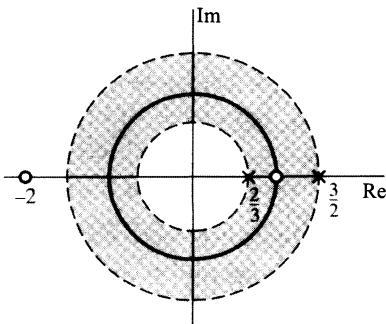


Рис. В.3.

Ответы к задачам главы 4

- 4.1. $x[n] = \sin(\pi n/2)$; 4.2. $\Omega_0 = 250\pi, 1750\pi$. 4.3. (а) $T = 1/12\ 000$; (б) еще одно: $T = 5/12\ 000$. 4.4. (а) $T = 1/100$; (б) единственное. 4.5. (а) $T \leq 1/10\ 000$; (б) $625\Gamma_{\Pi}$; (в) $1250\Gamma_{\Pi}$. 4.6. (а) $H_c(j\Omega) = 1/(a + j\Omega)$; (б) $H_d(e^{j\omega}) = \frac{T}{1 - e^{-aT}e^{-j\omega}}$.
 4.7. (а) $X_c(j\Omega) = S_c(j\Omega)(1 + \alpha e^{-j\Omega\tau_d})$, $X(e^{j\omega}) = \frac{1 + \alpha e^{-j\omega\tau_d/T}}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$; (б) $H(e^{j\omega}) = 1 + \alpha e^{-j\omega\tau_d/T}$; (в) (и) $h[n] = \delta[n] + \alpha\delta[n-1]$; (ii) $h[n] = \delta[n] + \alpha \frac{\sin(\pi(n-1/2))}{\pi(n-1/2)}$. 4.8. (а) $T \leq 1/20\ 000$; (б) $h[n] = Tu[n]$; (в) $X(e^{j\omega})|_{\omega=0}$; (г) $T \leq 1/10\ 000$. 4.9. (а) $X(e^{j(\omega+\pi)}) = X(e^{j(\omega+\pi-\pi)}) = X(e^{j\omega})$; (б) $x[3] = 0$; (в) $x[n] = \begin{cases} y[n/2], & n \text{ четно}, \\ 0, & n \text{ нечетно}. \end{cases}$ 4.10. (а) $x[n] = \cos(2\pi n/3)$; (б) $x[n] = -\sin(2\pi n/3)$; (в) $x[n] = \sin(2\pi n/5)/(n\pi/5000)$. 4.11. (а) $T = 1/40, T = 9/40$; (б) $T = 1/20$, единственное. 4.12. (а) (i) $y_c(t) = -6\pi \sin(6\pi t)$; (ii) $y_c(t) = -6\pi \sin(6\pi t)$; (б) (i) да; (ii) нет. 4.13. (а) $y[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$; (б) та же реакция; (в) $h_c(t)$ не зависит от T .

- 4.14.** (а) Нет; (б) да; (в) нет; (г) да; (д) да (информация не теряется, но сигнал нельзя восстановить системой из рис. 4.20). **4.15.** (а) Да; (б) нет; (в) да. **4.16.** (а) $M/L = 5/2$, однозначен; (б) $M/L = 2/3$ и $M/L = 7/3$. **4.17.** (а) $\hat{x}_d[n] = \frac{4}{3\pi n} \sin \frac{\pi n}{2}$; (б) $\hat{x}_d[n] = 0$. **4.18.** (а) $\omega_0 = 2\pi/3$; (б) $\omega_0 = 3\pi/5$; (в) $\omega_0 = \pi$. **4.19.** $T \leq \pi/\Omega_0$. **4.20.** (а) $F_s \geq 2000$ Гц; (б) $F_s \geq 4000$ Гц.

Ответы к задачам главы 5

- 5.1.** $x[n] = y[n]$, $\omega_c = \pi$. **5.2.** (а) Полюса: $z = 3$, $z = 1/3$, нули: $z = 0$, $z = \infty$; (б) $h[n] = -(3/8)(1/3)^n u[n] - (3/8)3^n u[-n-1]$. **5.3.** Импульсные характеристики из (а) и (г). **5.4.** (а) $H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - (3/4)z^{-1}}$, $|z| > 3/4$; (б) $h[n] = (3/4)^n u[n] - 2(3/4)^n u[n-1]$; (в) $y[n] = -(3/4)y[n-1] = x[n] - 2x[n-1]$; (г) устойчива и детерминирована. **5.5.** (а) $y[n] = -(7/12)y[n-1] + (1/12)y[n-2] = 3x[n] - (19/6)x[n-1] + (2/3)x[n-2]$; (б) $h[n] = 3\delta[n] - (2/3)(1/3)^{n-1}u[n-1] - (3/4)(1/4)^{n-1}u[n-1]$; (в) устойчива. **5.6.** (а) $X(z) = \frac{1}{(1 - (1/2)z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$, $1/2 < |z| < 2$; (б) $1/2 < |z| < 2$; (в) $h[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$. **5.7.** (а) $H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{(1 - (1/2)z^{-1})(1 + (3/4)z^{-1})}$, $|z| > 3/4$; (б) $h[n] = -(2/5)(1/2)^n u[n] + (7/5)(-3/4)^n u[n]$; (в) $y[n] + (1/4)y[n-1] - (3/8)y[n-2] = x[n] - x[n-1]$. **5.8.** (а) $H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - (3/2)z^{-1} - z^{-2}}$, $|z| > 2$; (б) $h[n] = -(2/5)(-1/2)^n u[n] + (2/5)2^n u[n]$; (в) $h[n] = -(2/5)(-1/2)^n u[n] - (2/5)2^n u[-n-1]$. **5.9.** $h[n] = (-(4/3)2^{n-1} + (1/3)2^{1-n})u[-n]$, $|z| < 1/2$; $h[n] = -(4/3)2^{n-1}u[-n] - (1/3)2^{1-n}u[n-1]$, $1/2 < |z| < 2$; $h[n] = (4/3)2^{n-1} \times u[n-1] - (1/3)2^{1-n}u[n-1]$, $|z| > 2$. **5.10.** Система с $H_i(z)$ не может быть детерминированной и устойчивой. Нулю функции $H(z)$ в точке $z = \infty$ является полюсом функции $H_i(z)$, что влечет недетерминированность системы. **5.11.** (а) Не существует определенного ответа; (б) не существует определенного ответа; (в) верно; (г) ложно. **5.12.** (а) Устойчива; (б) $H_1(z) = -9 \frac{(1+0,2z^{-1})(1-(1/3)z^{-1})}{(1-j0,9z^{-1})} \times \frac{(1+(1/3)z^{-1})}{(1+j0,9z^{-1})}$; $H_{ap}(z) = \frac{(z^{-1}-(1/3))(z^{-1}+(1/3))}{(1-(1/3)z^{-1})(1+(1/3)z^{-1})}$. **5.13.** $H_1(z)$, $H_3(z)$ и $H_4(z)$ — всепропускающие системы. **5.14.** (а) 5; (б) 1/2. **5.15.** (а) $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $A(e^{j\omega}) = 1 + 4 \cos \omega n$. Система является обобщенно-линейно-фазовой, но не линейно-фазовой, поскольку $A(e^{j\omega})$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. (б) Не относится ни к линейно-фазовым, ни к обобщенно-линейно-фазовым. (в) $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $A(e^{j\omega}) = 3 + \cos \omega n$. Система является линейно-фазовой, т. к. $|H(e^{j\omega})| = A(e^{j\omega}) \geq 0$ для всех ω . (г) $\alpha = 1/2$, $\beta = 0$, $A(e^{j\omega}) = 2 \cos(\omega n/2)$. Обобщенно-линейно-фазовая, т. к. $A(e^{j\omega})$ принимает значения разных значков. (д) $\alpha = 1$, $\beta = \pi/2$, $A(e^{j\omega}) = 2 \sin \omega n$. Обобщено-линейно-фазовая, т. к. $\beta \neq 0$. **5.16.** $h[n]$ не обязательно детерминированная. Как $h[n] = \delta[n-\alpha]$, так и $h[n] = \delta[n+1]+\delta[n-(2\alpha+1)]$ имеют эту фазу. **5.17.** Системы с $H_2(z)$ и $H_3(z)$ — минимально-фазовые. **5.18.** (а) $H_{min}(z) = \frac{2(1-(1/2)z^{-1})}{1+(1/3)z^{-1}}$; (б) $H_{min}(z) = 3(1-(1/2)z^{-1})$; (в) $H_{min}(z) = \frac{9(1-(1/3)z^{-1})(1-(1/4)z^{-1})}{4(1-(3/4)z^{-1})^2}$. **5.19.** $h_1[n] : 2$, $h_2[n] : 3/2$, $h_3[n] : 2$, $h_4[n] : 3$, $h_5[n] : 3$, $h_6[n] : 7/2$. **5.20.** Системы с характеристиче-

скими функциями $H_1(z)$ и $H_3(z)$ обладают линейной фазой и могут быть реализованы вещественными разностными уравнениями.

Ответы к задачам главы 6

- 6.1.** Сеть 1: $H(z) = \frac{1}{1 - 2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$, сеть 2: $H(z) = \frac{r \sin \theta z^{-1}}{1 - 2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$. Системы обладают одинаковыми полюсами. **6.2.** $y[n] - 3y[n-1] - y[n-2] - y[n-3] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$. **6.3.** Система из п. (г) совпадает с системой из п. (а). **6.4.** (а) $H(z) = \frac{2 + (1/4)z^{-1}}{1 + (1/4)z^{-1} - (3/8)z^{-2}}$; (б) $y[n] + (1/4)y[n-1] - (3/8)y[n-2] = 2x[n] + (1/4)x[n-1]$. **6.5.** (а) $y[n] - 4y[n-1] + 7y[n-3] + 2y[n-4] = x[n]$; (б) $H(z) = \frac{1}{1 - 4z^{-1} + 7z^{-3} + 2z^{-4}}$; (в) два умножения и четыре сложения; (г) Нет. Для реализации системы 4-го порядка нужно не меньше четырех задержек. **6.6.** См. рис. В.4.

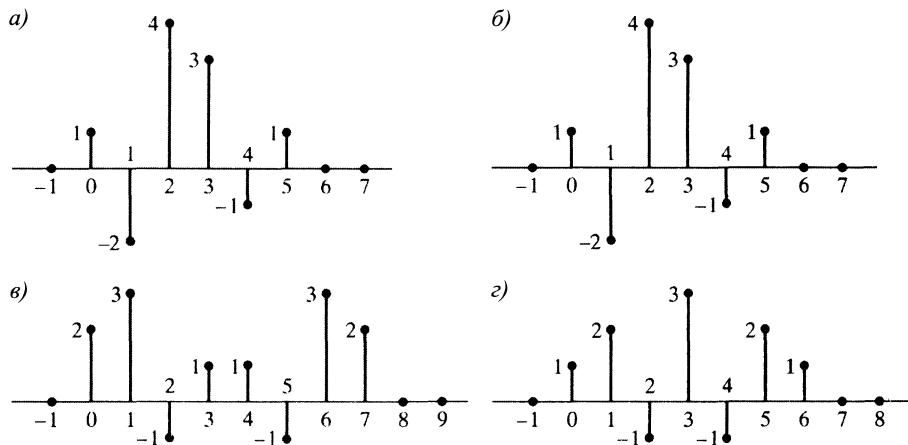


Рис. В.4.

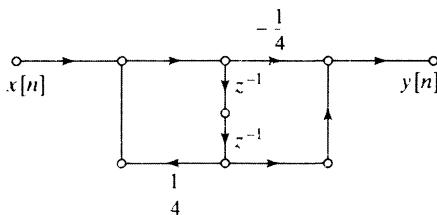


Рис. В.5.

- 6.7.** См. рис. В.5. **6.8.** $y[n] - 2y[n-2] = 3x[n-1] + x[n-2]$. **6.9.** (а) $h[1] = 2$; (б) $y[n] + y[n-1] - 8y[n-2] = x[n] + 3x[n-1]$. **6.10.** (а) $y[n] = x[n] + v[n-1]$, $v[n] = 2x[n] + (1/2)y[n] + w[n-1]$, $w[n] = x[n] + (1/2)y[n]$; (б) См. рис. В.6; (в) Полюса: $z = -1/2$, $z = 1$. Поскольку второй полюс попадает на единичную окружность, система неустойчива. **6.11.** (а) См. рис. В.7; (б) См. рис. В.8. **6.12.** $y[n] - 8y[n-1] = -2x[n] + 6x[n-1] + 2x[n-2]$. **6.13.** См. рис. В.9. **6.14.** См. рис. В.10. **6.15.** См. рис. В.11; **6.16.** (а) См. рис. В.12; (б) Характеристические функции обеих систем — $H(z) = \frac{(1 - (1/2)z^{-1})(1 - 2z^{-1} + 3z^{-2})}{1 - (1/4)z^{-2}}$. **6.17.** (а) См. рис. В.13; (б) См. рис. В.14;

- 6.18.** Если $a = 2/3$, то характеристическая функция всей системы равна $H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1+(1/4)z^{-1}-(3/8)z^{-2}}$; при $a=-2$ она выглядит как $H(z) = \frac{1-(2/3)z^{-1}}{1+(1/4)z^{-1}-(3/8)z^{-2}}$.
- 6.19.** См. рис. В.15. **6.20.** См. рис. В.16.

Рис. В.6.

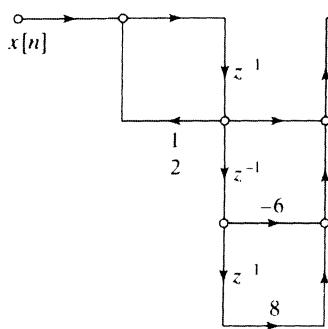
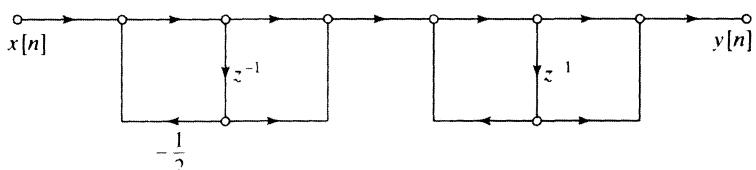


Рис. В.7.

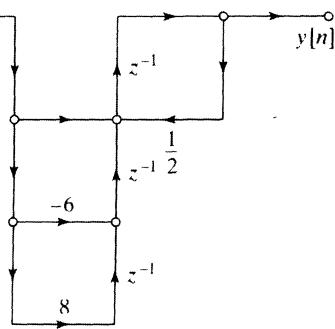


Рис. В.8.

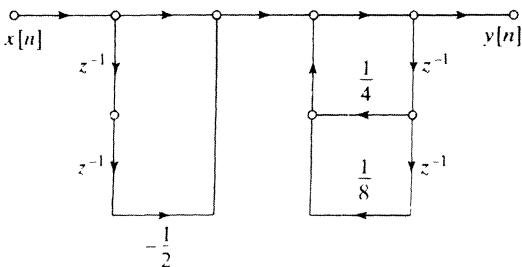


Рис. В.9.

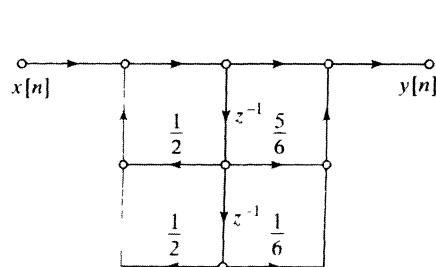
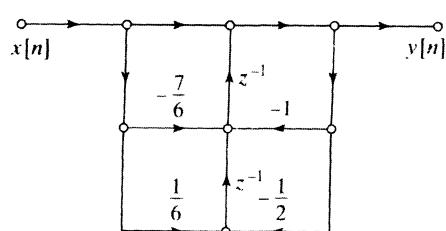


Рис. В.10.

Рис. В.11.



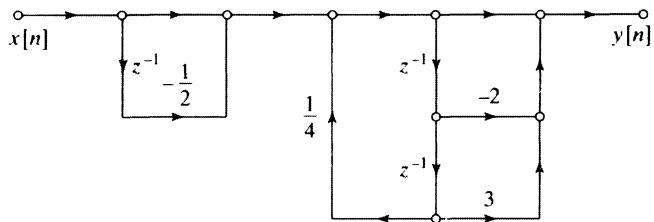


Рис. В.12.

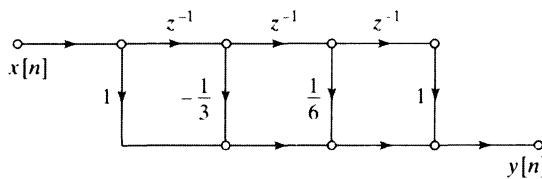


Рис. В.13.

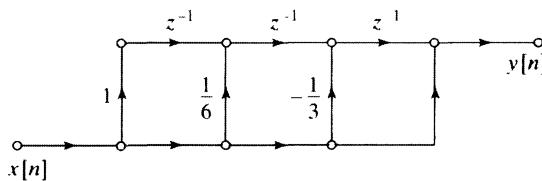


Рис. В.14.

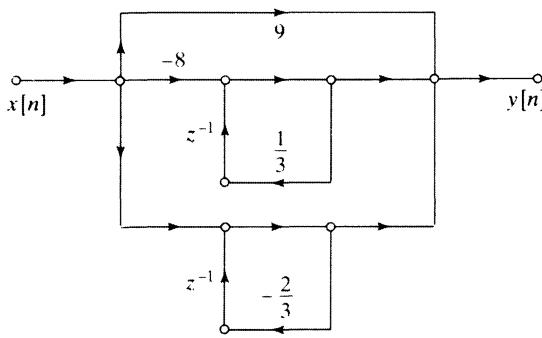


Рис. В.15.

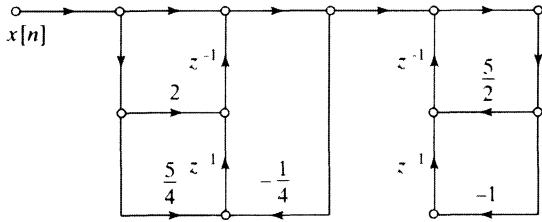


Рис. В.16.

Ответы к задачам главы 7

- 7.1. (а) $H_1(z) = \frac{1 - e^{-aT} \cos(bT) z^{-1}}{1 - 2e^{-aT} \cos(bT) z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2}}$; (б) $H_2(z) = (1 - z^{-1})S_2(z)$, где $S_2(z) = \frac{a}{a^2 + b^2} \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{2(a + jb)} \frac{1}{1 - e^{-(a+jb)T} z^{-1}} - \frac{1}{2(a - jb)} \frac{1}{1 - e^{-(a-jb)T} z^{-1}}$; (в) па-

венства не выполнены. **7.2.** (а) См. рис. В.17; (б) $N = 6$, $\Omega_c T_d = 0,7032$; (в) Полюса на s -плоскости попадают на окружность радиуса $R = 0,7032/T_d$. Они переходят в полюса z -плоскости в точках $z = e^{s_k T_d}$. Множители T_d сокращаются, в результате чего полюса

функции $H(z)$ не зависят от T_d . **7.3.** (а) $\hat{\delta}_2 = \delta_2/(1 + \delta_1)$; (б) $\delta_2 = 0,18806$, $H(z) = \frac{0,3036 - 0,4723z^{-1}}{1 - 1,2971z^{-1} + 0,6949z^{-2}} + \frac{-2,2660 + 1,2114z^{-1}}{1 - 1,0691z^{-1} + 0,3699z^{-2}} + \frac{1,9624 - 0,6665z^{-1}}{1 - 0,9972z^{-1} + 0,2570z^{-2}}$;

(в) $\delta_2 = 0,18806$, $H(z) = \frac{0,000780(1 + z^{-1})^6}{(1 - 1,2686z^{-1} + 0,7051z^{-2})(1 - 1,0106z^{-1} + 0,3583z^{-2})} \times$

$$\times \frac{1}{(1 - 0,9044z^{-1} + 0,2155z^{-2})}.$$

7.4. (а) Ответ не единственный: $H_c(s) = \frac{1}{s + 0,1} - \frac{0,5}{s + 0,2}$ и $H_c(s) = \frac{1}{s + 0,1 + j2\pi} - \frac{0,5}{s + 0,2 + j2\pi}$; (б) $H_c(s) = \frac{2(1 + s)}{0,1813 + 1,8187s} - \frac{1 + s}{0,3297 + 1,6703s}$, ответ однозначен. **7.5.** (а) $M + 1 = 91$; (б) $M/2 = 45$; (в) $h_d[n] = \frac{\sin(0,625\pi(n - 45))}{\pi(n - 45)} - \frac{\sin(0,3\pi(n - 45))}{\pi(n - 45)}$. **7.6.** (а) $\delta = 0,05$, $\beta = 1,5098$;

(б) $\Delta\omega = 0,05\pi$, $M = 63$. **7.7.** $0,99 \leq$

$\leq |H(e^{j\omega})| \leq 1,01$ при $|\omega| \leq 0,2\pi$ и $|H(e^{j\omega})| \leq$

$\leq 0,01$ при $0,22\pi \leq |\omega| \leq \pi$. **7.8.** (а) Теореме удовлетворяет шесть чередований, поскольку $L = 4$; (б) Теореме удовлетворяет семь чередований. **7.9.** $\omega_c = 0,4\pi$. **7.10.** $\omega_c = 2,3842$ рад. **7.11.** $\Omega_c = 2\pi(1250)$ рад/с. **7.12.** $\Omega_c = 2000$ рад/с. **7.13.** $T = 50$ мкс, T единственный. **7.14.** $T = 1,46$ мс, T единственный. **7.15.** Можно использовать окна Хемминга, Хеннигса и Блэкмана. **7.16.** $\beta = 2,6524$, $M = 181$. **7.17.** $|H_c(j\Omega)| < 0,02$ при $|\Omega| \leq 2\pi(20)$ рад/с, $0,95 < |H_c(j\Omega)| < 1,05$ при $2\pi(30) \leq |\Omega| \leq 2\pi(70)$ рад/с, $|H_c(j\Omega)| < 0,001$ при $|\Omega| \geq 2\pi(75)$ рад/с. **7.18.** $|H_c(j\Omega)| < 0,04$ при $|\Omega| \leq 726,5$ рад/с, $0,995 < |H_c(j\Omega)| < 1,005$ при $|\Omega| \geq 1376,4$ рад/с. **7.19.** $T = 0,41667$ мс, T единственный. **7.20.** Верно.

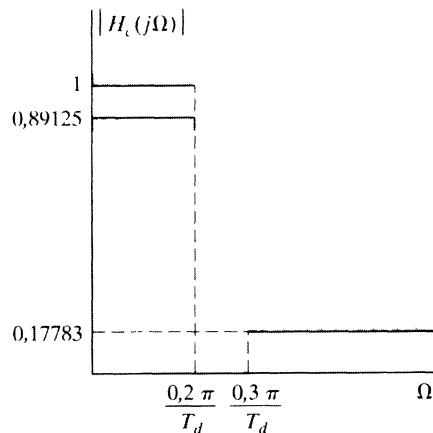


Рис. В.17.

Ответы к задачам главы 8

8.1. (а) $x[n]$ периодична с периодом $N = 6$; (б) T не предупреждает наложение спектров;

$$(в) \tilde{X}[k] = 2\pi \left\{ \begin{array}{ll} a_0 + a_6 + a_{-6}, & k = 0, \\ a_1 + a_7 + a_{-5}, & k = 1, \\ a_2 + a_8 + a_{-4}, & k = 2, \\ a_3 + a_9 + a_{-3} + a_{-9}, & k = 3, \\ a_4 + a_{-2} + a_{-8}, & k = 4, \\ a_5 + a_{-1} + a_{-7}, & k = 5. \end{array} \right.$$

$$8.2. (а) \tilde{X}_3[k] = \left\{ \begin{array}{ll} 3X[k/3], & k = 3\ell, \\ 0, & \text{иначе;} \end{array} \right.$$

$$(6) \tilde{X}[k] = \begin{cases} 3, & k=0, \\ -1, & k=1, \end{cases} \quad \tilde{X}_3[k] = \begin{cases} 9, & k=0, \\ 0, & k=1, 2, 4, 5, \\ -3, & k=3. \end{cases}$$

одной из последовательностей; (в) $\tilde{x}_1[n]$ и $\tilde{x}_3[n]$. 8.4. (а) $X(e^{j\omega}) = 1/(1 - ae^{-j\omega})$;

(б) $\tilde{X}[k] = 1/(1 - ae^{-j(2\pi/N)k})$; (в) $\tilde{X}[k] = X(e^{j2\pi k/N})$. 8.5. (а) $X[k] = 1$; (б) $X[k] = W_N^{kn_0}$; (в) $X[k] = \begin{cases} N/2, & k=0, N/2, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$

$$(\Gamma) X[k] = \begin{cases} N/2, & k=0, \\ (e^{-j(\pi k/N)(N/2-1)}(-1)^{(k-1)/2})/\sin(k\pi/N), & k \text{ нечетное,} \\ 0, & \text{в других случаях;} \end{cases}$$

(д) $X[k] = (1-a)/(1-aW_N^k)$. 8.6. (а) $X(e^{j\omega}) = \frac{1-e^{j(\omega_0-\omega)N}}{1-e^{j(\omega_0-\omega)}}$; (б) $X[k] = \frac{1-e^{j\omega_0 N}}{1-e^{j\omega_0} W_N^k}$;

$$(\text{в}) X[k] = \begin{cases} N, & k=k_0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad 8.7. \text{ См. рис. В.18. } 8.8. y[n] = \begin{cases} \frac{1024}{1023} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & 0 \leq n \leq 9, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

8.9. (а) 1) Положить $x_1[n] = \sum_m x[n+5m]$, 2) определить $X_1[k]$ как 5-точечное ДПФ от $x_1[n]$, $M = 5$, 3) $X_1[2]$ — значение $X(e^{j\omega})$ при $\omega = 4\pi/5$; (б) 1) продолжив $x[n]$ семью нулями, получить $x_2[n]$, 2) вычислить 27-точечное ДПФ $X_2[k]$ от последовательности $x_2[n]$, $L = 27$, 3) найти $X_2[5]$ как значение $X(e^{j\omega})$ при $\omega = 10\pi/27$. 8.10. $X_2[k] = (-1)^k X_1[k]$.

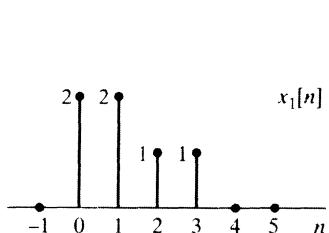


Рис. В.18.

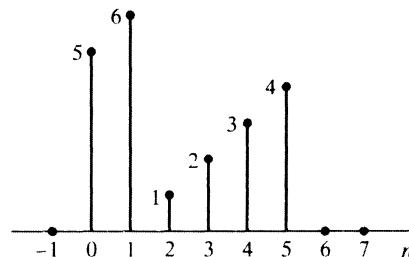


Рис. В.19.

8.11. См. рис. В.19. 8.12. (а) $X[k] = \begin{cases} 2, & k=1, 3, \\ 0, & k=2, 4; \end{cases}$ (б) $H[k] = \begin{cases} 15, & k=0, \\ -3+6j, & k=1, \\ -5, & k=2, \\ -3-6j, & k=3; \end{cases}$

(в) $y[n] = -3\delta[n] - 6\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 6\delta[n-3]$;

(г) $y[n] = -3\delta[n] - 6\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 6\delta[n-3]$. 8.13. См. рис. В.20. 8.14. $x_3[2] = 9$. 8.15. Ответ однозначен: $a = -1$. 8.16. Ответ однозначен: $b = 3$. 8.17. $N = 9$. 8.18. $c = 2$. 8.19. $m = -2$, но ответ не единственный: годится любое m вида $m = -2 + 6\ell$, где $\ell \in \mathbb{Z}$. 8.20. Ответ однозначен: $N = 5$.

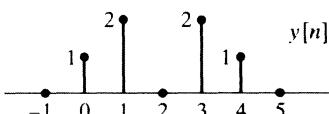


Рис. В.20.

Ответы к задачам главы 9

- 9.1.** Если на вход программы подается последовательность $\frac{1}{N}X[(-n)]_N$, то на ее выходе получается $x[n]$, обратное ДПФ от $X[k]$. **9.2.** (а) $-W_N^2$; (б) в общей ситуации есть только один путь, связывающий произвольный узел входа с любым узлом выхода, и данный случай не исключение; (в) прослеживая путь, получаем: $X[2] = x[0] + x[1]W_8^2 - x[2] - x[3]W_8^2 + x[4] + x[5]W_8^2 - x[6] - x[7]W_8^2$. **9.3.** (а) $x[n]$ в массиве $A[\cdot]$ хранятся в порядке с инвертированием разрядов, а $X[k]$ в $D[\cdot]$ в естественном; (б) $D[r] = \begin{cases} 1, & r = 3, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$ (в) $C[r] = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq 3, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

разными коэффициентами; (б) $y[n] = W_N^{2^{\nu-m}}y[n-1] + x[n]$; (в) период 2^m , частота $2\pi 2^{-m}$. **9.5.** $X = AD - BD + CA - DA = AC - BD$, $Y = AD - BD + BC + BD = BC + AD$.

9.6. Утверждение 1. **9.7.** $\omega_k = 7\pi/16$. **9.8.** $y[n] = X(e^{j\omega})|_{\omega=(2\pi/7)+(2\pi/21)(n-1)}$.

9.9. (а) 2^{m-1} ; (б) 2^m . **9.10.** $r[n] = e^{-j(2\pi/19)}W^{n^2/2}$, где $W = e^{-j(2\pi/10)}$. **9.11.** $x[0], x[8], x[4], x[12], x[2], x[10], x[6], x[14], x[1], x[9], x[5], x[13], x[3], x[11], x[7], x[15]$. **9.12.** Ложно.

- 9.13.** $m = 1$. **9.14.** $r = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ 0, 4, & m = 1, \\ 0, 2, 4, 6, & m = 2, \\ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, & m = 3. \end{cases}$ **9.15.** $N = 64$. **9.16.** $m = 3$

или 4. **9.17.** Прореживание по времени. **9.18.** Число 1021 простое, так что программа не может воспользоваться ни одним из алгоритмов БПФ. Время вычисления оценивается как N^2 . С другой стороны, $1024 = 2^{10}$, и для вычисления 1024-точечного ДПФ понадобится всего $N \ln N$ вычислительного времени, если использовать алгоритм БПФ.

9.19. $a = -\sqrt{2}$, $b = e^{-j(6\pi/8)}$. **9.20.** $y[n] = e^{j(2\pi/32)7}X^*(e^{j(7\pi/16)})$.

Ответы к задачам главы 10

- 10.1.** (а) $f = 1500$ Гц; (б) $f = -2000$ Гц. **10.2.** $N = 2048$ и $10\ 000$ Гц $< f < 10\ 240$ Гц. **10.3.** (а) 320 отсчетов; (б) 400 ДПФ в с; (в) $N = 64$; (г) 250 Гц; **10.4.** (а) $X[200] = 1-j$; (б) $X(\pm j2\pi(4000)) = 5 \cdot 10^{-5}(1 \mp j)$. **10.5.** (а) $T = 2\pi k_0/(N\Omega_0)$; (б) $T = (2\pi/\Omega_0)(1 - k_0/N)$. **10.6.** $X_c(j2\pi(4200)) = 5 \cdot 10^{-4}$, $X_c(-j2\pi(4200)) = 5 \cdot 10^{-4}$, $X_c(j2\pi(1000)) = 10^{-4}$, $X_c(-j2\pi(1000)) = 10^{-4}$. **10.7.** $L = 1024$. **10.8.** Прямоугольное окно и окна Хеннинга, Хемминга и Барлетта. **10.9.** $x_2[n]$. **10.10.** $T > 1/1024$ с

- 10.11.** $\Delta\Omega = 2\pi(2, 44)$ рад/с. **10.12.** $N \geq 1600$. **10.13.** $X_0[k] = \begin{cases} 18, & k = 3, 33, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$

$X_1[k] = \begin{cases} 18, & k = 9, 27, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$ **10.14.** $x_2[n], x_3[n], x_6[n]$. **10.15.** $\omega_0 = 0, 25\pi$ рад/отсч.,

$\lambda = \pi/80\ 000$ рад/отсч². **10.16.** $\Delta f = 9, 77$ Гц. **10.17.** Разрешение улучшают методы (ii) и (v). **10.18.** Высота пиков разная. Высота пика $V_2(e^{j\omega})$ будет больше.

10.19. $L = M + 1 = 124$. **10.20.** (а) $A = 44, 68$ дБ; (б) слабая компонента будет различима, если ее амплитуда превосходит 0, 0058.

Ответы к задачам главы 11

- 11.1.** $\text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = 2a \sin \omega$. **11.2.** $x[n] = (5/4)\delta[n] - \delta[n-1]$. **11.3.** $x_1[n] = \delta[n] - -(1/2)\delta[n-1]$, $x_2[n] = \delta[n] - (1/2)\delta[n+1]$. **11.4.** $\text{Re}\{X(e^{j\omega})\} = 1 - \cos 2\omega$, $\text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = 0$. **11.5.** (а) $x_i[n] = \sin \omega_0 n$; (б) $x_i[n] = -\cos \omega_0 n$; (в) $x_i[n] = \frac{1 - \cos \omega_0 n}{\pi n}$.
- 11.6.** $x[n] = 5\delta[n] - 2\delta[n-1] + 3\delta[n-4]$. **11.7.** (а) $x[n] = -\delta[n-1] - 2\delta[n-2]$. (б) еще подходит последовательность $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1] - 2\delta[n-2]$. **11.8.** $X_{R2}(e^{j\omega})$ и $X_{R3}(e^{j\omega})$.
- 11.9.** $x[n] = -\delta[n] - 3\delta[n-1] - \delta[n-3]$ — единственная возможная последовательность.
- 11.10.** $h[n] = \pm(1/2)((-1/2)^n u[n] - (1/2)(-1/2)^{n-1} u[n-1])$. **11.11.** $\text{Re}\{X(e^{j\omega})\} =$
 $= \begin{cases} 16 \sin 3\omega, & 0 \leq \omega \leq \pi, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = 0$. **11.12.** (а) $h[n] = \delta[n] - (1/3)\delta[n-1]$;
(б) $h[n] = (1/3)\delta[n] - \delta[n-1]$. **11.13.** $X_I(e^{j\omega}) = \cos \omega - \sin \omega - \cos 2\omega$. **11.14.** $X_I(e^{j\omega}) =$
 $= \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k \sin k\omega$. **11.15.** $x[n] = 4\delta[n] - \delta[n-1]$. **11.16.** Факты не согласованы.
- 11.17.** $x[n] = -\delta[n] + 3\delta[n-1]$ — единственная последовательность. **11.18.** $x[n] = 7\delta[n] + 2\delta[n-1]$ или $x[n] = 7\delta[n] + 2\delta[n-2]$. **11.19.** $jX_I[k] = -j\delta[k-1] + j\delta[k-3]$. **11.20.** $x_2[n]$ и $x_3[n]$.

Литература

- [1] Ahmed, N., Natarajan, T., and Rao, K. R., «Discrete Cosine Transform», *IEEE Transactions on Computers*, Vol. C-23, pp. 90–93, Jan. 1974.
- [2] Allen, J. B., and Rabiner, L. R., «A Unified Approach to Short-Time Fourier Analysis and Synthesis», *Proc. IEEE*, Vol. 65, pp. 1558–1564, Nov. 1977.
- [3] Andrews, H. C., and Hunt, B. R., *Digital Image Restoration*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1977.
- [4] Barnes, C. W., and Fam, A. T., «Minimum Norm Recursive Digital Filters that are Free of Overflow Limit Cycles», *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-24, pp. 569–574, Oct. 1977.
- [5] Bartlett, M. S., *An Introduction to Stochastic Processes with Special Reference to Methods and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1953.
- [6] Bennett, W. R., «Spectra of Quantized Signals», *Bell System Technicalj*, Vol. 27, pp. 446–472, 1948.
- [7] Blackman, R. B., *Linear Data-Smoothing and Prediction in Theory and Practice*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1965.
- [8] Blackman, R. B., and Tukey, J. W., *The Measurement of Power Spectra*, Dover Publications, New York, NY, 1958.
- [9] Blahut, R. E., *Fast Algorithms for Digital Signal Processing*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1985.
- [10] Bluestein, L. I., «A Linear Filtering Approach to the Computation of Discrete Fourier Transform», *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-18, pp. 451–455, Dec. 1970.
- [11] Bracewell, R. N., «The Discrete Hartley Transform», *J. Optical Society of America*, Vol. 73, pp. 1832–1835, Dec. 1983.
- [12] Bracewell, R. N., «The Fast Hartley Transform», *Proc. IEEE*, Vol. 72, No. 8, pp. 1010–1018, Aug. 1984.
- [13] Bracewell, R. N., *The Fourier Transform and Its Applications*, 2nd ed. revised, McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1986.
- [14] Burrus, C. S., «Efficient Fourier Transform and Convolution Algorithms», in *Advanced Topics in Signal Processing*, J. S. Lim and A. V. Oppenheim, Eds., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [15] Burrus, C. S., and Parks, T. W., *DFT/FFT and Convolution Algorithms Theory and Implementation*, Wiley, New York, NY, 1985.
- [16] Candy, J. C., and Temes, G. C., *Oversampling Delta-Sigma Data Converters*, IEEE Press, New York, NY, 1992.
- [17] Castleman, K. R., *Digital image Processing*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.
- [18] Chan, D. S. K., and Rabiner, L. R., «An Algorithm for Minimizing Roundoff Noise in Cascade Realizations of Finite Impulse Response Digital Filters», *Bell System Technical J*, Vol. 52, No. 3, pp. 347–385, Mar. 1973b.
- [19] Chan, D. S. K., and Rabiner, L. R., «Analysis of Quantization Errors in the Direct Form for Finite Impulse Response Digital Filters», *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-21, pp. 354–366, Aug. 1973c.

- [20] Chellappa, R., Girod, B., Munson, D.C., Tekalp, A. M., and Vetterli, M., «The Past, Present, and Future of Image and Multidimensional Signal Processing», *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 15, No. 2, pp. 21–58, March 1998.
- [21] Chen, W. H., Smith C. H., and Fralick, S. C., «A Fast Computational Algorithm for the Discrete Cosine Transform», *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 25, pp. 1004–1009, Sept. 1977.
- [22] Chen, X., and Parks, T. W., «Design of FIR Filters in the Complex Domain», *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-35, pp. 144–153, 1987.
- [23] Cheney, E. W., *Introduction to Approximation Theory*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1982.
- [24] Chow, Y., and Cassignol, E., *Linear Signal Flow Graphs and Applications*, Wiley, New York, NY, 1962.
- [25] Churchill, R. V., and Brown, J. W., *Introduction to Complex Variables and Applications*, 5th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1990.
- [26] Claasen, T. A. C. M., Mecklenbrauker, W. F. U., and PEEK, J. B. H., «Second-Order Digital Filter with Only One Magnitude-Truncation Quantizer and Having Practically No Limit Cycles», *Electronics Letters*, Vol. 9, No. 2, pp. 531–532, Nov. 1973.
- [27] Clements, M. A., and Pease, J., «On Causal Linear Phase hR Digital Filters», *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-3, pp. 479–484, Apr. 1989.
- [28] Constantinides, A. U., «Spectral Transformations for Digital Filters», *Proc. IEE*, Vol. 117, No. 8, pp. 1585–1590, Aug. 1970.
- [29] Cooley, J. W., Lewis, P. A. W., and Welch, P. D., «Historical Notes on the Fast Fourier Transform», *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-15, pp. 76–79, June 1967.
- [30] Cooley, J. W., and Tukey, J. W., «An Algorithm for the Machine Computation of Complex Fourier Series», *Mathematics of Computation*, Vol. 19, pp. 297–301, Apr. 1965.
- [31] Crochiere, R. E., and Oppenheim, A. V., «Analysis of Linear Digital Networks», *Proc. IEEE*, Vol. 63, pp. 581–595, Apr. 1975.
- [32] Crochiere, R. E., and Rabiner, L. R., *Multirate Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- [33] Daniels, R. W., *Approximation Methods for Electronic Filter Design*, McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1974.
- [34] Danielson, U. C., and Lanczos, C., «Some Improvements in Practical Fourier Analysis and Their Application to X-Ray Scattering from Liquids», *J. Franklin Inst.*, Vol. 233, pp. 365–380 and 435–452, Apr. and May 1942.
- [35] Davenport, W. B., *Probability and Random Processes: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*, McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1970.
- [36] Deller, J. R., Proakis, J. G., and Hansen, J. H. L., *Discrete-Time Processing of Speech Signals*, Macmillan Publishing Company, New York, NY, 1993.
- [37] DSP Committee, IEEE ASSP, Eds., *Programs for Digital Signal Processing*, IEEE Press, New York, NY, 1979.

- [38] Dudgeon, D. E., and Mersereau, R. M., *Two-Dimensional Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- [39] Duhamel, P., «Implementation of ‘Split-Radix’ FFT Algorithms for Complex, Real, and Real-Symmetric Data», *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-34, pp. 285–295, Apr. 1986.
- [40] Duhamel, P., and Hollmann, H., «Split Radix FFT Algorithm», *Electronic Letters*, Vol. 20, pp. 14–16, Jan. 5, 1984.
- [41] Ebert, P. M., Mazo, J. E., and Taylor, M. C., «Overflow Oscillations in Digital Filters», *Bell System Technicalf*, Vol. 48, pp. 2999–3020, 1969.
- [42] Elliott, D. F., and Rao, K. R., *Fast Transforms: Algorithms, Analysis, Applications*, Academic Press, New York, NY, 1982.
- [43] Fettweis, A., «Wave Digital Filters: Theory and Practice», *Proc. IEEE*, Vol. 74, No. 2, pp. 270–327, Feb. 1986.
- [44] Flanagan, J. L., *Speech Analysis, Synthesis and Perception*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, NY, 1972.
- [45] Gardner, W. A., *Statistical Spectral Analysis: A Nonprobabilistic Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [46] Gentleman, W. M., and Sande, U., «Fast Fourier Transforms for Fun and Profit», in *Proc. 1966 Fall Joint Computer Conf*, AFIPS Conf. Proc., Vol. 29, pp. 563–578, Spartan Books, Washington, D.C., 1966.
- [47] Goertzel, U., «An Algorithm for the Evaluation of Finite Trigonometric Series», *American Math. Monthly*, Vol. 65, pp. 34–35, Jan. 1958.
- [48] Gold, B., Oppenheim, A. V., and Rader, C. M., «Theory and Implementation of the Discrete Hilbert Transform», *Proc. Symp. Computer Processing in Communications*, Vol. 19, Polytechnic Press, New York, NY, 1970.
- [49] Gold, B., and Rader, C. M., *Digital Processing of Signals*, McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1969.
- [50] Gray, A. H., and Markel, J. D., «A Computer Program for Designing Digital Elliptic Filters», *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-24, pp. 529–538, Dec. 1976.
- [51] Grossman, S.I., *Calculus Part 2*, 5th ed., Saunders College Publications, Fort Worth, TX, 1992.
- [52] Guillemin, E. A., *Synthesis of Passive Networks*, Wiley, New York, NY, 1957.
- [53] Hannan, E. J., *Time Series Analysis*, Methuen and Company, London, England, 1960.
- [54] Harris, F. J., «On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform», *Proc. IEEE*, Vol. 66, pp. 51–83, Jan. 1978.
- [55] Hayes, M. H., *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, Wiley, New York, NY, 1996.
- [56] Hayes, M. H., Lim, J. S., and Oppenheim, A. V., «Signal Reconstruction from Phase and Magnitude», *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, No. 6, pp. 672–680, Dec. 1980.
- [57] Haykin, S. S., *Adaptive Filter Theory*, 3rd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

- [58] Heideman, M. T., Johnson, D. H., and Burrus, C. S., «Gauss and the History of the Fast Fourier Transform», *IEEE ASSP Magazine*, Vol. 1, No.4, pp. 14–21, Oct., 1984.
- [59] Helms, H. D., «Fast Fourier Transform Method of Computing Difference Equations and Simulating Filters», *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. 15, No. 2, pp. 85–90, 1967.
- [60] Herrmann, O., «On the Design of Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase», *Elec. Lett.*, Vol. 6, No. 11, pp. 328–329, 1970.
- [61] Herrmann, O., Rahiner, L. R., and Chan, D. S. K., «Practical Design Rules for Optimum Finite Impulse Response Lowpass Digital Filters», *Bell System Technical J.*, Vol. 52, No. 6, pp. 769–799, July–Aug. 1973.
- [62] Herrmann, O., and Schussler, W., «Design of Nonrecursive Digital Filters with Minimum Phase», *Elec. Lett.*, Vol. 6, No. 11, pp. 329–330, 1970a.
- [63] Herrmann, O., and Schussler, W., «On the Accuracy Problem in the Design of Nonrecursive Digital Filters», *Arch. Electronic Übertragungstechnik*, Vol. 24, pp. 525–526, 1970b.
- [64] Hewes, C. R., Broderson, R. W., and Buss, D. D., «Applications of CCD and Switched Capacitor Filter Technology», *Proc. IEEE*, Vol. 67, No. 10, pp. 1403–1415, Oct. 1979.
- [65] Hnatek, E. R., *A User's Handbook of D/A and AID Converters*, Reprinted 1st ed., R. E. Krieger Publishing Co., Malabar, 1988.
- [66] Hofstetter, E., Oppenheim, A. V., and Siegel, J., «On Optimum Nonrecursive Digital Filters», *Proc. 9th Allerton Conf Circuit System Theory*, Oct. 1971.
- [67] Hwang, S. Y., «On Optimization of Cascade Fixed Point Digital Filters», *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-21, No. 1, pp. 163–166, Jan. 1974.
- [68] Jackson, L. B., «On the Interaction of Roundoff Noise and Dynamic Range in Digital Filters», *Bell System Technical J.*, Vol. 49, pp. 159–184, Feb. 1970a.
- [69] Jackson, L. B., «Roundoff-Noise Analysis for Fixed-Point Digital Filters Realized in Cascade or Parallel Form», *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-18, pp. 107–122, June 1970b.
- [70] Jackson L. B., *Digital Filters and Signal Processing: with MATLAB Exercises*, 3rd ed., Kluwer Academic Publishers, Hingham, MA, 1996.
- [71] Jain, A. K., *Fundamentals of Digital Image Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [72] Jayant, N. S., and Noll, F., *Digital Coding of Waveforms*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- [73] Jenkins U. M., and Watts, D. U., *Spectral Analysis and Its Applications*, Holden-Day, San Francisco, CA, 1968.
- [74] Kaiser, J. F., «Digital Filters», Chap. 7 in *System Analysis by Digital Computer*, F. F. Kuo and J. F. Kaiser, Eds., Wiley, New York, NY, 1966.
- [75] Kaiser, J. F., «Nonrecursive Digital Filter Design Using the I0-Sinh Window Function», *Proc. 1974 IEEE International Symp. on Circuits and Systems*, San Francisco, CA, pp. 20–23, Apr. 1974.
- [76] Kaiser J. F., and Hamming, R. W., «Sharpening the Response of a Symmetric Nonrecursive Filter by Multiple Use of the Same Filter», *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-25, No. 5, pp. 415–422, Oct. 1977.

- [77] Kaiser, J. F., and Schafer, R. W., «On the Use of the Io-Sinh Window for Spectrum Analysis», *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, No. 1, pp. 105–107, Feb. 1980.
- [78] Kan, E. P. F., and Aggarwal, J. K., «Error Analysis of Digital Filters Employing Floating Point Arithmetic», *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-18, pp. 678–686, Nov. 1971.
- [79] Kaneko, T., and Liu, B., «Accumulation of Roundoff Error in Fast Fourier Transforms», *J. Assoc. Comput. Mach.*, Vol. 17, pp. 637–654, Oct. 1970.
- [80] Karam, L. J., and McClellan, J. H., «Complex Chebychev Approximation for FIR Filter Design», *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. 42, pp. 207–216, March 1995.
- [81] Kay, S. M., *Modern Spectral Estimation Theory and Application*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [82] Kay, S. M., and Marple, S. L., «Spectrum Analysis: A Modern Perspective», *Proc. IEEE*, Vol. 69, pp. 1380–1419, Nov. 1981.
- [83] Knuth, D. E., *The Art of Computer Programming; Seminumerical Algorithms*, 3rd ed., Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1997.
- [84] Koopmanns, L. H., *Spectral Analysis of Time Series*, 2nd ed., Academic Press, New York, NY, 1995.
- [85] Lam, H. Y. F., *Analog and Digital Filters: Design and Realization*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979.
- [86] Lighthill, M. J., *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1958.
- [87] Lim, J. S., *Two-Dimensional Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [88] Liu, B., and Kaneko, T., «Error Analysis of Digital Filters Realized in Floating-Point Arithmetic», *Proc. IEEE*, Vol. 57, pp. 1735–1747, Oct. 1969.
- [89] Liu, B., and PELED, A., «Heuristic Optimization of the Cascade Realization of Fixed Point Digital Filters», *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-23, pp. 464–473, 1975.
- [90] Macovski, A., *Medical Image Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- [91] Makhoul, J., «Linear Prediction: A Tutorial Review», *Proc. IEEE*, Vol. 62, pp. 561–580, Apr. 1975.
- [92] Makhoul, J., «A Fast Cosine Transform in One and Two Dimensions», *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 28, No. 1, Feb. 1980.
- [93] Markel, J. D., «FET Pruning», *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-19, pp. 305–311, Dec. 1971.
- [94] Markel, J. D., and GRAY, A. H., Jr., *Linear Prediction of Speech*, Springer-Verlag, New York, NY, 1976.
- [95] Marple, S. L., *Digital Spectral Analysis with Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.
- [96] Martucci, S. A., «Symmetrical Convolution and the Discrete Sine and Cosine Transforms», *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 42, No. 5, pp. 1038–1051, May 1994.

- [97] Mason, S., and Zimmermann, H. J., *Electronic Circuits, Signals and Systems*, Wiley, New York, NY, 1960.
- [98] Mathworks, *Signal Processing Toolbox Users Guide*, The Mathworks, Inc., Natick, MA, 1998.
- [99] McClellan, J. H., and Parks, T. W., «A Unified Approach to the Design of Optimum FIR Linear Phase Digital Filters», *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-20, pp. 697–701, Nov. 1973.
- [100] McClellan, J. H., and Rader, C. M., *Number Theory in Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979.
- [101] Mersereau, R. M., Schafer, R. W., Barnwell, T. P., and Smith, D. L., «A Digital Filter Design Package for PCs and TMS32Os», *Proc. MID CON*, Dallas, TX, 1984.
- [102] Mills W. L., Mullis, C. T., and Roberts, R. A., «Digital Filter Realizations Without Overflow Oscillations», *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-26, pp. 334–338, Aug. 1978.
- [103] Nawab, S. H., and Quatieri, T. F., «Short-Time Fourier Transform», in *Advanced Topics in Signal Processing*, J. S. Lim and A. V. Oppenheim, Eds., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [104] Nyquist, H., «Certain Topics in Telegraph Transmission Theory», *AIEE Trans.*, pp. 617–644, 1928.
- [105] Oetken, U., Parks, I. W., and Schussler, H. W., «New Results in the Design of Digital Interpolators», *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-23, pp. 301–309, June 1975.
- [106] Oppenheim, A. V., Schafer, R. W., and Stockam, T. G. Jr., «Nonlinear Filtering of Multiplied and Convolved Signals», *Proc. IEEE*, Vol. 56, No. 8, pp. 1264–1291, Aug. 1968.
- [107] Oppenheim, A. V., and Johnson, D. H., «Discrete Representation of Signals», *Proc. IEEE*, Vol. 60, No. 6, pp. 681–691, June 1972.
- [108] Oppenheim, A. V., and Schafer, R. W., *Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.
- [109] Oppenheim, A. V., and Willsky, A. S., with S. H. Nawab, *Signals and Systems*, Second Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.
- [110] O'Shaughnessy, D., *Speech Communication, Human and Machine*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1987.
- [111] Papoulis, A., «On the Approximation Problem in Filter Design», *IRE Cony. Record*, Pt. 2, pp. 175–185, 1957.
- [112] Papoulis, A., *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1991.
- [113] Parks, T. W., and Burrus, C. S., *Digital Filter Design*, Wiley, New York, NY, 1987.
- [114] Parks, T. W., and McClellan, J. H., «Chebyshev Approximation for Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase», *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-19, pp. 189–194, Mar. 1972a.
- [115] Parks, T. W., and McClellan, J. H., «A Program for the Design of Linear Phase Finite Impulse Response Filters», *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-20, No. 3, pp. 195–199, Aug. 1972b.

- [116] Parsons, T. *Voice and Speech Processing*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1986.
- [117] Phillips, C. L., and Nagle, H. I., Jr., *Digital Control System Analysis and Design*, 3rd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.
- [118] Pratt W., *Digital Image Processing*, 2nd ed., Wiley, New York, NY, 1991.
- [119] Rabiner, L. R., «The Design of Finite Impulse Response Digital Filters Using Linear Programming Techniques», *Bell System Technical J.*, pp. 1177–1198, July–Aug. 1972a.
- [120] Rabiner, L. R., «Linear Program Design of Finite Impulse Response (FIR) Digital Filters», *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-20, No. 4, pp. 280–288, Oct. 1972b.
- [121] Rabiner, L. R., and Gold, B., *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.
- [122] Rabiner, L. R., Kaiser, J. F., Herrmann, O., and Dolan, M. T., «Some Comparisons Between FIR and hR Digital Filters», *Bell System Technical J.*, Vol. 53, No. 2, pp. 305–331, Feb. 1974.
- [123] Rabiner, L. R., and Schafer, R. W., *Digital Processing of Speech Signals*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1978.
- [124] Rabiner L. R., and Schafer, R. W., «On the Behavior of Minimax FIR Digital Hilbert Transformers», *Bell System Technical J.*, Vol. 53, No. 2, pp. 361–388, Feb. 1974.
- [125] Rabiner, L. R., Schafer; R. W., and Rader, C. M., «The Chirp z-Transform Algorithm», *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-17, pp. 86–92, June 1969.
- [126] Rader, C. M., «Discrete Fourier Transfoims When the Number of Data Samples Is Prime», *Proc. IEEE*, Vol. 56, pp. 1107–1108, June 1968.
- [127] Rader, C. M., «An Improved Algorithm for High-Speed Autocorrelation with Applications to Spectral Estimation», *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-18, pp. 439–441, Dec. 1970.
- [128] Rader, C. M., and Brenner, N. M., «A New Principle for Fast Fourier Transformation», *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-25, pp. 264–265, June 1976.
- [129] Rader, C. M., and Gold, B., «Digital Filter Design Techniques in the Frequency Domain», *Proc. IEEE*, Vol. 55, pp. 149–171, Feb. 1967.
- [130] Ragazzini, J. R., and Franklin, U. F., *Sampled Data Control Systems*, McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1958.
- [131] Rao, K. R., and Yip, P., *Discrete Cosine Transform: Algorithms, Advantages, Applications*, Academic Press, Boston, MA, 1990.
- [132] Rao, K. R., and Hwang, J. J., *Techniques and Standards for Image, Video, and Audio Coding*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.
- [133] Rao, S. K., and Kailath, T., «Orthogonal Digital Filters for VLSI Implementation», *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-31, No. 11, pp. 933–945, Nov. 1984.
- [134] Robinson, F. A., and Durrani, T. S., *Geophysical Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.

- [135] Robinson, F. A., and Treitel, S., *Geophysical Signal Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [136] Runge, C., «Über die Zerlegung Empirisch Gegebener Periodischer Functionen in Sinuswellen», *Z. Math. Physik*, Vol. 48, pp. 443–456, 1903; Vol. 53, pp. 117–123, 1905.
- [137] Sandberg, I. W., «Floating-Point-Roundoff Accumulation in Digital Filter Realization», *Bell System Technical J.*, Vol. 46, pp. 1775–1791, Oct. 1967.
- [138] Schaefer, R. T., Schafer, R. W., and Mersereau, R. M., «Digital Signal Processing for Doppler Radar Signals», *Proc. 1979 IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 170–173, 1979.
- [139] Schafer, R. W., and Rabiner, L. R., «A Digital Signal Processing Approach to Interpolation», *Proc. IEEE*, Vol. 61, pp. 692–702, June 1973.
- [140] Schmid, H., *Electronic Analog/Digital Conversions*, Wiley, New York, NY, 1976.
- [141] Schüssler, H. W., and Steffen, P., «Some Advanced Topics in Filter Design», in *Advanced Topics in Signal Processing*, J. S. Lim and A. V. Oppenheim, Eds., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [142] Shannon, C. F., «Communication in the Presence of Noise», *Proc. IRE*, pp. 10–12, Jan. 1949.
- [143] Singleton, R. C., «An Algorithm for Computing the Mixed Radix Fast Fourier Transform», *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-17, pp. 93–103, June 1969.
- [144] Skolnik, M. I., *Introduction to Radar Systems*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1986.
- [145] Slepian, D., Landau, H. T., and Pollack, H. O., «Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis, and Uncertainty Principle (I and II)», *Bell System Technical J.*, Vol. 40, No. 1, pp. 43–80, Jan. 1961.
- [146] Steiglitz, K., «The Equivalence of Analog and Digital Signal Processing», *Information and Control*, Vol. 8, No. 5, pp. 455–467, Oct. 1965.
- [147] Stockham, T. U., Jr., «High Speed Convolution and Correlation», *1966 Spring Joint Computer Conference*, AFIPS Proc., Vol. 28, pp. 229–233, 1966.
- [148] Storer, J. F., *Passive Network Synthesis*, McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1957.
- [149] Tribolet, J. M., «A New Phase Unwrapping Algorithm», *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-25, No. 2, pp. 170–177, Apr. 1977.
- [150] Tukey, J. W., *Exploratory Data Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1977.
- [151] Vaidyanathan, P. P., *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [152] Vernet, J. L., «Real Signals Fast Fourier Transform: Storage Capacity and Step Number Reduction by Means of an Odd Discrete Fourier Transform», *Proc. IEEE*, pp. 1531–1532, Oct. 1971.
- [153] Volder, J. E., «The CORDIC Trigonometric Computing Technique», *IRE Trans. Electronic Computers*, Vol. EC-8, pp. 330–334, Sept. 1959.
- [154] Weinberg, L., *Network Analysis and Synthesis*, R. F. Kreiger, Huntington, NY, 1975.

- [155] Weinstein, C. J., «Roundoff Noise in Floating Point Fast Fourier Transform Computation», *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-17, pp. 209–215, Sept. 1969.
- [156] Weinstein, C. J., and Oppenheim, A. V., «A Comparison of Roundoff Noise in Floating Point and Fixed Point Digital Filter Realizations», *Proc. IEEE*, Vol. 57, pp. 1181–1183, June 1969.
- [157] Welch, P. D., «A Fixed-Point Fast Fourier Transform Error Analysis», *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-17, pp. 153–157, June 1969.
- [158] Welch, P. D., «The Use of the Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra», *IEEE Trans. Audio Electroacoustics* Vol. AU-iS, pp. 70–73, June 1970.
- [159] Widrow, B., «Statistical Analysis of Amplitude-Quantized Sampled-Data Systems», *AIEE Trans. (Applications and Industry,)* Vol. 81, pp. 555–568, Jan. 1961.
- [160] Widrow, B., «A Study of Rough Amplitude Quantization by Means of Nyquist Sampling Theory», *IRE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-3, pp. 266–276, Dec. 1956.
- [161] Widrow, B., and Stearns, S. D., *Adaptive Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.
- [162] Winograd, S., «On Computing the Discrete Fourier Transform», *Mathematics of Computation*, Vol. 32, No. 141, pp. 175–199, Jan. 1978.
- [163] Zverev, A. I., *Handbook of Filter Synthesis*, Wiley, New York, NY, 1967.

Литература на русском языке

- [164] Ахмед Н., Рао К. Ортогональные преобразования при цифровой обработке сигналов. – М.: Связь, 1980.
- [165] Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов.- М.: Мир, 1989. – 448 с.
- [166] Гадзиковский В. И. Теоретические основы цифровой обработки сигналов. – М.: Радио и связь, 2004. – 344 с.
- [167] Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов. – М.: Советское Радио, 1973. – 368 с.
- [168] Гольденберг Л. М., Матюшкин Б. Д., Поляк М. Н. Цифровая обработка сигналов: Справочник. – М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.
- [169] Гонсалес Р., Будс Р. Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера. 2005. – 1072 с.
- [170] Доджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. – М.: Мир, 1988. – 488 с.
- [171] Каппеллинни В., Константинидис Дж., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 360 с.
- [172] Куприянов М. С., Матюшкин Б. Д. Цифровая обработка сигналов: процессы, алгоритмы, средства проектирования. – СПб.: Политехника, 1999. – 592 с.
- [173] Макклленнан Дж., Рейдер Ч. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. – М.: Радио и связь, 1983. – 264 с.
- [174] Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. – М.: Связь, 1979. – 416 с.
- [175] Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
- [176] Сергиенко А. В. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2002. – 608 с.
- [177] Сэломон Д. Сжатие данных, изображений и звука. – М.: Техносфера, 2004. – 368 с.
- [178] Трахтман А. М., Трахтман В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. – М.: Советское радио, 1975. – 208 с.
- [179] Цифровые радиоприемные системы: Справочник /Под ред. М. И. Жодзишского. – М.: Радио и связь, 1990. – 208 с.
- [180] Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. – М.: Физматгиз, 1963. – 966 с.
- [181] Чуи К. Введение в вейвлеты. – М.: Наука, 2001.
- [182] Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений. – М.: Советское радио, 1979.

Предметный указатель

- АПВФ, 655
АПЛЧМ, 656
аппроксимация равномерно пульсирующая, 494
АЦП, 155
АЧХ, 255
- белый шум, 822
 узкополосный, 822
бит знаковый, 376
БИХ-система, 51, 265
- вектор
 нуля, 273
 полюса, 273
- выборочная дисперсия, 731
- выборочное среднее, 730
- граф потоковый
 невычислимый, 367
 смена ориентации, 368
- групповая задержка, 257
- двоичный код
 дополнительный, 204
 смещенный, 204
- дискретизация
 повышающая, 184
 поникающая, 180
- ДКП, 592
- ДНП, 165, 211
- ДПФ, 14, 548
- ДРФ, 548, 550
- единичный скачок, 32
- ЗВПФ, 695, 715
- звук
 взрывной, 725
 вокализованный, 725
 фрикативный, 725
- значение
 среднее, 85
 среднеквадратичное, 817
- идеальный дискретно-непрерывный преобразователь, 165
- ИСЗ, 36
- импульс, 31
 дискретный, 31
 единичный, 31
интерполятор, 186
интерполяция узкополосная, 243
искажение
 амплитудное, 255
 из-за наложения спектров, 157
 фазовое, 255
исток, 354
- КИХ-система, 51, 266
- колебания переполнений, 420
- компоненты
 периодически нечетная, 575
 периодически четная, 575
- компрессор, 179
 частоты дискретизации, 179
- коэффициент
 передискретизации, 215
- КЧХ, 60
- лепесток
 боковой, 470
 главный, 470
- мантийса, 379
- математическое ожидание, 85, 816
- множитель всепропускающий, 285
- мощность средняя, 817
- наложение спектров, 157
- независимость статистическая, 815
- НДП, 154
- нули функции, 114
- область сходимости, 113
- однородное линейное разностное уравнение, 56
- ОДС, 21
- окно недетерминированное, 717
- ОС, 113
- отклик, 35
- отношение сигнал/шум, 209
- ошибка квантования, 206
- полюса функции, 114
- порядок с инвертированием разрядов, 642

последовательность
 автоковариационная, 817
 автокорреляционная, 86, 817
 детерминированная, 50
 корреляционная
 взаимная, 818
 левосторонняя, 116
 ограниченная, 41
 правосторонняя, 115
 сопряженно-кососимметрична, 74
 сопряженно-симметрична, 74
 представление рекуррентное, 54
 преобразователь
 Гильbertа, 794
 аналогово-цифровой, 155
 непрерывно-дискретный, 154
 продолжение нулем, 587
 прореживание, 184
 прореживатель, 184
 процедура Барлетта, 737
 процесс
 случайный, 83, 814
 эргодический, 819
 разность центральная, 542
 распределение вероятности, 814
 рассеяние, 703
 расширитель, 185
 частоты дискретизации, 184
 реакция, 35
 системы
 кратковременная, 66
 установившаяся, 66
 речевой тракт, 724
 решение однородное, 56
 ряд Лорана, 114
 свертка, 43
 блочная, 588
 периодическая, 555
 сигнал
 анalogовый, 28
 неstationарный, 724
 цифровой, 28
 система
 без запоминания, 37
 всепропускающая, 285
 детерминированная, 40
 инверсивная, 53
 минимально-фазовая, 264

с бесконечной импульсной характеристикой, 51
 с дискретизованной частотой, 367
 с конечной импульсной характеристикой, 51
 случайные величины
 линейно независимые, 816
 некоррелированные, 816
 статистически независимые, 817
 случайные процессы
 статистически независимые, 817
 стационарные, 815
 в широком смысле, 818
 соединение
 каскадное, 49
 параллельное, 49
 состояние покоя в начальном положении, 58
 спектр, 68
 амплитудный, 68
 комплексный, 791
 мощности, 822
 фазовый, 68
 спектральная плотность
 мощности, 86, 822
 взаимная, 822
 энергии, 79
 спектрограмма, 715
 широкополосная, 726
 среднее по ансамблю, 815
 сток, 354
 сумматор, 38
 суммирование перекрытий, 589
 С/Ш, 209
 ТЧП, 692
 уплотнитель, 40
 фаза, 33
 непрерывная, 257
 фазовращатель девяностоградусный, 102
 ФВЧ, 256
 фильтр
 защиты от наложения спектров, 198
 с крутым срезом, 199
 с ограничением максимума неравномерности, 495
 ФНЧ, 255
 форма реализации

- каноническая, 352
прямая I, 352
прямая II, 352
форманта, 725
функция
автокорреляционная, 85
характеристическая, 140, 254
Фурье-спектр, 68
Фурье-образ, 68
ФЧХ, 62, 255

характеристика, 379
амплитудно-частотная, 255
импульсная, 42
фазо-частотная, 62, 255
частотная, 60
хранение перекрытий, 590
- ЦАП, 211

частота
Допплера, 728
Найквиста, 160
дискретизации, 30, 154
минимально допустимая, 160
круговая, 33

частоты
верхние, 35, 62
ложные, 157
нижние, 35, 62

шаг дискретизации, 30, 154

энергия частичная, 299
эргодичность, 819

Заявки на книги присылайте по адресу:

125319 Москва, а/я 594

Издательство "Техносфера"

e-mail: knigi@technosphera.ru

sales@technosphera.ru

факс: (495) 956 33 46

В заявке обязательно указывайте
свой почтовый адрес!

Подробная информация о книгах на сайте

<http://www.technosphera.ru>

Тел.(495)234 01 10

**А. Оппенгейм, Р. Шафер
Цифровая обработка сигналов**

Перевод – С.А. Кулешов

Компьютерная верстка – С.А. Кулешов

Дизайн – И.А. Куколева

Дизайн книжных серий – С.Ю. Биричев

Корректор – О.Ч. Кохановская

Выпускающий редактор – О.Н. Кулешова

Ответственный за выпуск – О.А. Казанцева

Формат 70x100/16. Печать офсетная.

Гарнитура Computer modern LaTeX.

Печ.л 53,5. Тираж 1500 экз. Зак. № 2186.

Бумага офсет №1, плотность 65 г/м²

Издательство "Техносфера"

Москва, Лубянский проезд, дом 27/1

Диапозитивы изготовлены ООО "Европолиграфик"

Отпечатано в ООО ПФ "Полиграфист"

160001 г. Вологда, ул. Челюскинцев, дом 3

МИР ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ

А. ОППЕНГЕЙМ, Р. ШАФЕР

Цифровая обработка
сигналов

ПЕРЕВОД 2-ГО ИЗДАНИЯ
ВСЕМИРНО ИЗВЕСТНОГО КУРСА
МАССАЧУСЕТСКОГО
ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА (MIT)

НАСТОЛЬНАЯ КНИГА
СПЕЦИАЛИСТОВ ПО DSP



ТЕХНОСФЕРА

ISBN 5-94836-077-6



9 785948 360775 >