Число Алкуина графа

Павел Кунявский

5 июня 2015

руководитель: Д. В. Карпов

Мужчине необходимо перевезти через реку волка, козу и мешок капусты. Для этого у него есть двухместная лодка, в которую может уместиться он сам и либо волк, либо коза, либо мешок. Можно ли перевезти всех на другую сторону реки, чтобы ни волк с козой, ни коза с мешком капусты не оставались на одной стороне реки без присмотра?

- n предметов
- Лодка размера b
- Произвольный граф G ограничений "нельзя оставлять на одной стороне без присмотра"

Формальное определение плана перевозки: набор троек $(L_1, B_1, R_1)\dots(L_s, B_s, R_s)$

- $L_k \sqcup B_k \sqcup R_k = V$
- $|B_k| \leq b$
- L_k, R_k — независимые в G
- $L_1 \sqcup B_1 = V$, $B_s \sqcup R_s = V$
- для четных $k \geq 2$ верно $L_k = L_{k-1}$,
- для нечетных $k \geq 3$ выполнено $R_k = R_{k-1}$

Число Алкуина графа $AN(G)$ — минимальный размер лодки, для которого существует план перевозки.

Задача была исследована Peter Csorba, Cor A. J. Hurkens, Gerhard J. Woeginger. Основные результаты:

Lemma

Пусть $VC(G)$ — минимальное вершинное покрытие.
$VC(G) \leq AN(G) \leq VC(G) + 1$.

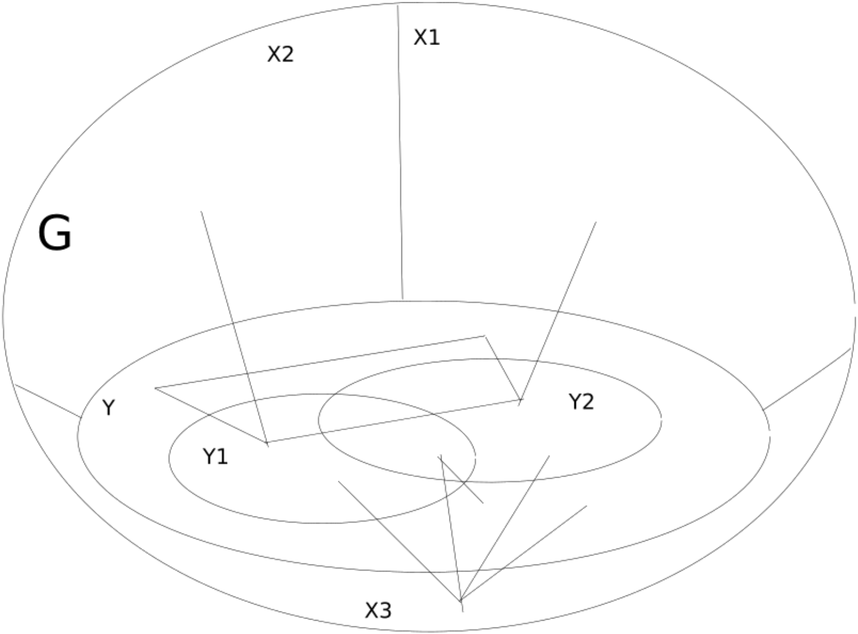
Теорема (структурная теорема)

$AN(G) \leq b \Leftrightarrow \exists X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2 \subset V$

1. $X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3$ — *независимое.*
2. $Y_1, Y_2 \subset Y = V \setminus X,\ Y_1, Y_2 \neq \varnothing,\ |Y| \leq b$
3. $X_1 \sqcup Y_1,\ X_2 \sqcup Y_2$ — *независимые.*
4. $|Y_1| + |Y_2| \geq |X_3|.$

Следствие

Если в графе есть более одного вершинного покрытия, то $AN(G) = VC(G)$


X1
X2
G
Y
Y2
Y1
X3

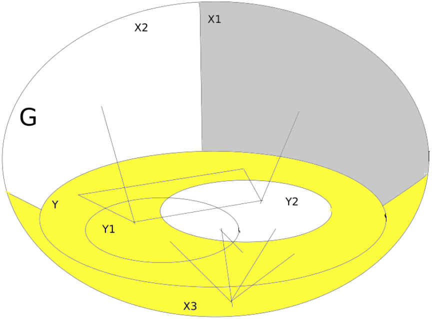
Следствие

Задача о числе Алкуина может быть решена за время $O(4^b \cdot n^{O(1)})$.

Алгоритм:

- Найдем минимальное вершинное покрытие Y.
- Если размер не b, то все понятно
- Иначе переберем 4^b пар Y_1, Y_2.
- X_1, X_2 — все, что не связно с Y_1, Y_2
- Проверили условие теоремы

Оптимизация: на Y_1, Y_2 очень сложное условие. Надо выбрать более удачные множества для перебора. Заметим, что $Z = X_3 \sqcup (Y \setminus Y_2)$ — вершинное покрытие в графе $G \setminus X_1$.



- При фиксированном Y_1, чтобы выполнить структурную теорему:
- Z — вершинное покрытие $G \setminus X_1$.
- $|Z| \leq b + |Y_1|$.
- $Y \not\subseteq Z$.

Теорема

Пусть задача о вершинном покрытии может быть решена за время $O(2^{\alpha VC(G)} \cdot n^{O(1)})$ *Тогда задача о числе Алкуина может быть решена за время* $O(2^{(1+\alpha)b} \cdot n^{O(1)})$.

Алгоритм:

- Найдем минимальное вершинное покрытие Y
- Если размер не b, то все понятно
- Иначе переберем 2^b подмножеств Y_1
- X_1 — все, что не связно с Y_1
- Найдем минимальное вершинное покрытие Z в $G \setminus X_1$, не содержащее Y
- Проверим условие теоремы

Это решение хорошо, когда b маленькое. Что делать в других случаях?

Вместо частей Y можно перебирать X_1, X_2.

- Пусть зафиксировано X_1.
- Тогда Y_1 — максимальное независимое множество в $Y \setminus N_G(X_1)$.
- Аналогично, если зафиксировать X_2 можно найти оптимальное Y_2.
- Заметим, что выбор Y_1 и Y_2 независим, а значит их размеры можно максимизировать отдельно!

Для $S \subset X$ определим $w(S)$, как размер максимального независимого множества в $Y \setminus N_G(S)$. Тогда задача свелась к следующей:

- Найти $X_1, X_2 \subset X$
- $X_1 \cap X_2 = \varnothing$
- $w(X_1), w(X_2) > 0$
- $w(X_1) + w(X_2) \geq n - b - |X_1| - |X_2|$

- Задача распадается на две части. Вычисление весов и поиск оптимальной пары X_1, X_2.
- Пусть задачу о независимом множестве можно решить за время $\mathrm{O}(2^{\beta n} \cdot n^{\mathrm{O}(1)})$. Тогда вычислить веса можно за время $\mathrm{O}(2^{n-b+\beta b} \cdot n^{\mathrm{O}(1)})$, вычислив его независимо для каждого подмножества X.
- Кроме того, вычислить веса можно за время $\mathrm{O}(2^{b} \cdot n^{\mathrm{O}(1)})$ с помощью динамического программирования.

Для поиска оптимальной пары X_1, X_2 определим несколько вспомогательных величин

- $bit(A) = \sum\limits_{k \in A} 2^k$
- $D(A, k) = bit(A) + 2^{|X|} \cdot k + 2^{|X| + \lceil \log 2|Y| \rceil} |A|$

Для поиска оптимальной пары X_1, X_2 определим несколько вспомогательных величин

- $bit(A) = \sum\limits_{k \in A} 2^k$
- $D(A, k) = bit(A) + 2^{|X|} \cdot k + 2^{|X| + \lceil \log 2|Y| \rceil} |A|$
- $D(X_1, k_1) + D(X_2, k_2) = D(X_1 \sqcup X_2, k_1 + k_2)$, если X_1 и X_2 не пересекаются
- $D(X_1, k_1) + D(X_2, k_2)$ не представимо в виде $D(S, s)$, если они пересекаются.
- Таким образом, надо найти пару, X_1, X_2, такую, что $D(X_1, w(X_1)) + D(X_2, w(X_2))$ представим в виде $D(S, s)$ при этом $s + |S|$ максимально.

- Если найти все значения которые принимают $D(X_1, w(X_1)) + D(X_2, w(X_2))$, то задачу можно решить за $\mathrm{O}(2^{n-b} \cdot n^{\mathrm{O}(1)})$.
- Рассмотрим многочлен $P(z) = \sum\limits_{\substack{A \subset X \\ w(A) > 0}} z^{D(A, w(A))}$
- Все возможные значения $D(X_1, w(X_1)) + D(X_2, w(X_2))$ — это в точности степени мономов P^2. P^2 можно вычислить за время $\mathrm{O}(2^{n-b} \cdot n^{\mathrm{O}(1)})$.

Теорема

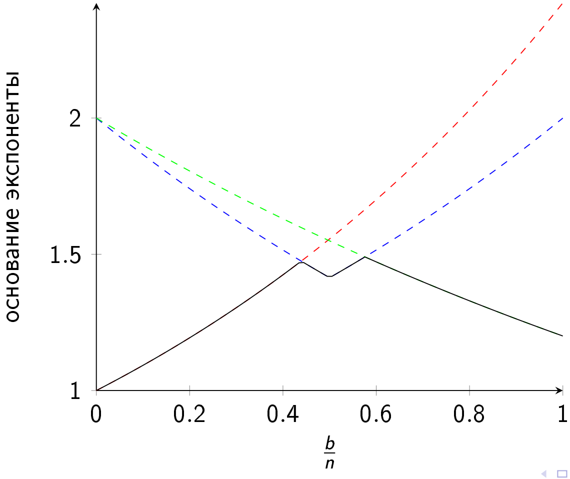
Задача проверки существования плана перевозки на графе размера n с лодкой размера b может быть решена за время $O(\min(2^{(1+\alpha)b}, 2^{n-b+\beta b}, 2^{n-b} + 2^{b}) \cdot n^{O(1)})$

Теорема

Задача проверки существования плана перевозки на графе размера n может быть решена за время $O(2^{max(\frac{1+\alpha}{2+\alpha}, \frac{1}{2-\beta})n} \cdot n^{O(1)})$

Теорема

Задача Алкуина на графе размера n может быть решена за время $O(1.4904^n \cdot n^{O(1)})$



Число Алкуина графа

Павел Кунявский

5 июня 2015

руководитель: Д. В. Карпов