1. Sea Σ={a,b} un alfabeto donde $\#x$ indica la cantidad de elementos del conjunto x.

   a) Hallar: $\Sigma^0, \Sigma^1, \Sigma^+, \Sigma^*$
   b) Hallar: $\#\Sigma^0, \#\Sigma^2$
   c) ¿cuántas palabras de longitud 3 hay en Σ^*? y de longitud k?
   d) si Σ tuviera p símbolos, ¿cuántas palabras de longitud k habría en Σ^*?

a) $\Sigma^0 = \{\lambda\}$

$\Sigma^1 = \{a, b\}$

$\Sigma^+ = \{a, b, ab, ba, aa, bb, \ldots\}$

$\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \lambda$

b) $\#\Sigma^0 = 1$

$\#\Sigma^2 = 4$

c) Hay 2^k palabras de longitud k

d) p^k

2. Dado $\Sigma = \{a, b\}$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera y cuál falsa?

   a) $\lambda \in \Sigma$ F
   b) $\lambda \in \Sigma^*$ V
   c) $\lambda \in \Sigma^+$ F
   d) $\{\lambda\} = \Sigma^0$ V
   e) $\{\lambda, a\} \subseteq \Sigma^1$ F
   f) $\{a, b\} \subseteq \Sigma^1$ V

3. Considerando $\Sigma_1 = \{a, b\}$ y $\Sigma_2 = \{b, c\}$, calcular:

   a) $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b, c\}$
   b) $\Sigma_1 \cdot \Sigma_2 = \{ab, ac, bb, bc\}$
   c) $\Sigma_1 \cdot \Sigma_2^+ = \{ab, ac, bb, bc, abb, abc, \ldots\}$
   d) $(\Sigma_1 \cdot \Sigma_2)^* = \{ab, ac, bb, bc, abab, acac, \ldots\}$

4. Escribir por lo menos 3 cadenas que pertenezcan a cada uno de los siguientes lenguajes:

   a) $L_1 = \{0^n 1^n / n > 0\}$ $\{01, 0011, 000111\}$
   b) $L_2 = \{0^i 1^j / 0 \leq i \leq j\}$ $\{\lambda, 011, 0111\}$
   c) $L_3 = \{x / x \in \Sigma^*, x$ contiene la subcadena ab y no contiene la subcadena $bc\}$, donde $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ $\{ab, aba, abb\}$
   d) $L_4 = \{a^n b^m d^{m+n} / n, m \geq 0\}$ λ, abdd, ad

5. Describir formalmente los siguientes lenguajes:

   a) el lenguaje formado por $0's$ y $1's$ en el que hay el doble de $0's$ que de $1's$ y todos los $0's$ van delante de los $1's$

   b) el lenguaje formado por palabras que comienzan y terminan en a, teniendo entre medio 3 o más $b's$ seguidas, sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$

a) $L = \{0^{2n} 1^n \mid n > 0\}$

b) $L = \{a^m b^n a^q \mid m, q \geq 0,\ n \geq 3\}$

6. Sea $L = \{ab, aa, baa\}$, ¿cuáles de las siguientes palabras pertenecen a L^+?

   a) $ab|aa$ ✓

   b) $ab|ab$ ✓

   c) $ab|aa|baa|ab|aa$ ✓

   d) $baa|aa|ab|aa|aa|b$ ✗

7. Dados los siguientes lenguajes definidos sobre $A = \{a, b, c\}$:

   $L_1 = \{\lambda, a, ab\}$

   $L_2 = \{x/x \in \{a, b, c\}^*$ y x termina en $a\}$

   $L_3 = \{x/x \in \{a, b, c\}^*$ y x termina en $b\}$

   Calcule el lenguaje resultante de las siguientes operaciones:

   a) $L_1^2 \cap L_3 = \{ab, aab, abab\}$

   b) $L_2 \cup L_1 = \{\lambda, a, ab, aba, aaa, ba, ca, aca\}$

   c) $L_1^R - L_2 = \{\lambda\}$

   d) $L_1 \cdot L_1^R = \{\lambda, aa, aba, abba, ba, a, ab\}$

$L_1^2 = \{\lambda, a, ab, aa, aab, aba, abab\}$

$L_1^R = \{\lambda, a, ba\}$

8. Demostrar que el número máximo de nodos que puede haber en un árbol binario de altura n es $2^{n+1} - 1$

CB: Altura $0 \Longrightarrow 2^{n+1} - 1 = 2^1 - 1 = 1$ ✓   O (1 nodo)

PI: Sean T_1 y T_2 arboles de altura $\underbrace{h=n-1}_{<n}$ y con su max. #nodos

$\Longrightarrow \#T_1 = \#T_2 = 2^{h+1} - 1$

Para agregar un nivel mas, puedo crear un nodo raiz, y unir las raices de T_1 y T_2 con este nuevo nodo

Obs: Es maximo, pues todos los nodos tienen su max #hijos (2)

$$\Longrightarrow \#\text{nodos} = \#T_1 + \#T_2 + 1$$
$$= 2(2^{h+1} - 1) + 1$$
$$= 2^{(h+1)+1} - 1 = 2^{n+1} - 1 \quad \therefore \text{Cumple } \forall n$$

9. Dar una definición recursiva del inverso de una cadena.
Demostrar usando inducción estructural que $(w_1 \cdot w_2)^r = w_2^r \cdot w_1^r$

Base: $\lambda^r = \lambda$

Paso Ind. Si $\omega = a \cdot x \implies \omega^r = x^r \cdot a$

$(w_1 \cdot w_2)^r = w_2^r \cdot w_1^r$

CB) $w_1 = \lambda$ $\quad w_1^r = \lambda \quad \implies \lambda \cdot w_2 = w_2$, $w_2^r \cdot \lambda^r = w_2^r \implies (w_1 \cdot w_2)^2 = w_2^r w_1^r$ ✓

PI) Sea $w_1 = a \cdot x$, asumiendo que con x cumple

$$(w_1 \cdot w_2)^r = (a \cdot x \cdot w_2)^r = \underbrace{(x \cdot w_2)^r \cdot a}_{\text{Por def}} = \underbrace{w_2^r \cdot x^r}_{\text{Por HI}} \cdot a = w_2^r \cdot w_1^r$$

$\overbrace{x^r \cdot a}^{w_1^r}$

$\therefore$ Cumple $\forall w_1$

10. El alfabeto L del sistema axiomático de la lógica proposicional consta de:

- una cantidad finita de variables proposicionales: $p, q, r, s, \ldots$ que representan proposiciones simples
- un conjunto de conectivos lógicos: $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
- dos signos de puntuación: $\{(,)\}$

Es decir que $L = \{p, q, r, s, \ldots., \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (,)\}$
La fórmulas proposicionales se construyen de la siguiente manera:

a) Las variables proposicionales del alfabeto de L son fórmulas bien formadas.
b) Si ϕ, es una fórmula bien formada de L, entonces $(\neg\phi)$ también lo es.
c) Si ϕ, y ψ, son fórmulas bien formadas de L, entonces $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \Rightarrow \psi)$ y $(\phi \Leftrightarrow \psi)$ también lo son.

Demostrar que en una fórmula proposicional bien formada la cantidad de paréntesis izquierdos es igual a la cantidad de paréntesis derechos.

CB) $\alpha = p \implies$ no tiene $()$ $\implies \#_(= \#_) = 0$

PI) Sean ϕ y ψ formulas bien formadas (asumiendo que $\#_(= \#_)$ en ambas)

Veamos que se cumple la hipotesis $\forall \alpha$

$x = \#_((\phi) = \#_)(\phi)$

$y = \#_((\psi) = \#_)(\psi)$

CI: $\alpha = (\neg\phi)$

Obs: Por b) es una form. bien formada

$$\implies \begin{matrix} \#_((\alpha) = x + 1 \\ \#_)(\alpha) = x + 1 \end{matrix} \implies \#_)(\alpha) = \#_((\alpha)$$

CII: $\alpha = (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \Rightarrow \psi)$ o $(\phi \Leftrightarrow \psi)$

Obs: Por b) es una form. bien formada

$$\implies \begin{matrix} \#_((\alpha) = x + y + 1 \\ \#_)(\alpha) = x + y + 1 \end{matrix} \implies \#_)(\alpha) = \#_((\alpha)$$

$\therefore$ Cumple $\forall \alpha$

11. Un conjunto de conectivos lógicos C es completo si para toda proposición ϕ existe una proposición ϕ' equivalente que sólo contiene conectivos de C. Demostrar, teniendo en cuenta las reglas conocidas de lógica, que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ forman un conjunto completo de conectivos respecto de las fórmulas proposicionales que se construyen mediante las reglas del ejercicio ??.

CB) $\alpha = p$ Como no tiene conectivos, es valido para $C' = \{\neg, \wedge, \vee\}$

PI) Sean ϕ y ψ formulas bien formadas tq cumplen la hipotesis

Veamos que se cumple la hip. $\forall \alpha$

CI) $\alpha = (\neg\phi)$, $(\phi \wedge \psi)$ o $(\phi \vee \psi)$

$\Rightarrow$ Utiliza solo los conectivos en $C' \Rightarrow \exists \alpha', \alpha' = \alpha$

CII) $\alpha = (\phi \Rightarrow \psi)$

Sabemos que por logica que $(\phi \Rightarrow \psi) \approx ((\neg\phi) \vee \psi)$

$\Rightarrow$ Utiliza solo los conectivos en $C' \Rightarrow \exists \alpha', \alpha' = ((\neg\phi) \vee \psi)$

CIII) $\alpha = (\phi \Leftrightarrow \psi)$

Sabemos que por logica que $(\phi \Leftrightarrow \psi) \approx (\phi \wedge \psi) \vee ((\neg\phi) \wedge (\neg\psi))$

$\Rightarrow$ Utiliza solo los conectivos en $C' \Rightarrow \exists \alpha', \alpha' = (\phi \wedge \psi) \vee ((\neg\phi) \wedge (\neg\psi))$

$\therefore$ Es completo

12. El conjunto $S \subseteq \{a, b\}^*$ se define de la siguiente manera:

1 ▪ $\lambda \in S$

2 ▪ si $x \in S \Rightarrow axb \in S$

3 ▪ si $x \in S \Rightarrow bxa \in S$

4 ▪ si $x \in S, y \in S \Rightarrow xy \in S$

Demostrar que $S = L$, siendo $L = \{\omega \in \{a, b\}^* / \#_a(\omega) = \#_b(\omega)\}$, es decir en las palabras de L, la cantidad de letras 'a' es igual a la cantidad de letras 'b'.

Nota 1: Se requiere demostrar que $S \subset L$ y que $L \subset S$

Nota 2: Para demostrar $L \subset S$ usar inducción completa sobre la cantidad de letras 'a' que hay en la palabra.

CB) $\omega = \lambda$ $\#_a = \#_b = 0 \Rightarrow \omega \in L$

PI) Sea x, y tq $\#_a(x) = \#_b(x) = c$ y $\#_a(y) = \#_b(y) = d$

CI) $\omega = axb \Rightarrow \#_a = c + 1 = \#_b \Rightarrow \omega \in L$

CII) $\omega = bxa \Rightarrow \#_a = c + 1 = \#_b \Rightarrow \omega \in L$

CIII) $\omega = xy \Rightarrow \#_a = c + d = \#_b \Rightarrow \omega \in L$ $\therefore S \subseteq L$

CB) $\omega = \lambda$ Por 1. $\Rightarrow w \in S$

PI) Sea $x \in L$ tq $|x| = h < n$ y asumimos que cumple la hip.

Puedo crear cualquier cadena $w \in L$ de n caracteres en la forma de

CI: $\omega = a\underbrace{x}_{n-2}b$ $\in L$, pues $\#_a = \#_b$ $\Rightarrow$ Por 2. $\omega \in S$

CII: $\omega = b\underbrace{x}_{n-2}a$ $\in L$ " " $\Rightarrow$ Por 3. $w \in S$

CIII: $\omega = a\underbrace{yz}_{n-2}a$ $\in L$ tq $\#_a(y) = \#_b(y) - 1$

$\#_a(z) = \#_b(y) - 1$

Por def: $|ay|, |za| < n$

$$\left.\begin{array}{l} \#_a(ay) = \#_b(ay) \\ \#_a(za) = \#_b(za) \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} ay \in S \\ za \in S \end{array} \Rightarrow \text{Por 4. } w \in S$$

CIV: $w = byzb$ (Idem a CIII)

$\therefore L \subseteq S$

$\therefore S = L$