3. Expresiones Regulares.

Las expresiones regulares pueden definir los mismos lenguajes que describen los distintos tipos de autómatas: los lenguajes regulares. Sin embargo, las expresiones regulares ofrecen una forma declarativa para expresar las cadenas que se desea aceptar.

Definición.

Construcción Recursiva.

Dado un alfabeto Σ, los símbolos $\varnothing$, λ y los operadores $+$ (unión), . (concatenación) y * (clausura) y los paréntesis (y), definimos una **EXPRESIÓN REGULAR** (ER) sobre el alfabeto Σ como:

BASE:

- El símbolo $\varnothing$ es una ER.
- El símbolo λ es una ER.
- Cualquier símbolo $a \in \Sigma$ es una ER

PASO INDUCTIVO:

- Si α y β son ER, entonces $\alpha + \beta$ es una ER.
- Si α y β son ER, entonces $\alpha \cdot \beta$ es una ER.
- Si α es una ER, entonces $\alpha*$ es una ER.
- Si α es una ER, entonces (α) es una ER.

Lenguaje descripto por una Expresión Regular.

BASE:

- Si $\alpha = \varnothing$, entonces $L(\alpha) = \varnothing$
- Si $\alpha = \lambda$, entonces $L(\alpha) = \{\lambda\}$
- Si $\alpha = a$ y $(a \in \Sigma)$, entonces $L(\alpha) = \{a\}$

PASO INDUCTIVO:

- Si α y β son ER, entonces $L(\alpha + \beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$
- Si α y β son ER, entonces $L(\alpha \cdot \beta) = L(\alpha) \cdot L(\beta)$
- Si α es una ER, entonces $L(\alpha *) = (L(\alpha))*$
- Si α es una ER, entonces $L((\alpha)) = L(\alpha)$

Precedencia de los operadores.

El orden de precedencia de los operadores es el siguiente:

1. El operador asterisco (*) es el de precedencia más alta.
2. El siguiente en precedencia es el operador de concatenación, o "punto". Dado que la concatenación es una operación asociativa, no importa en qué orden se realicen las sucesivas concatenaciones, aunque si hay que elegir, las aplicaremos por la izquierda. Por ejemplo, **012** se aplica así: (**01**)**2**.
3. Por último, se aplican todos los operadores de unión (+) a sus operandos. Dado que la unión es asociativa, no importa en que orden se lleven a cabo, pero supondremos que se calculan empezando por la izquierda.

Propiedades de las Expresiones Regulares.

Equivalencia de Expresiones Regulares.

Dos Expresiones Regulares r_1 y r_2 son equivalentes si describen el mismo lenguaje, es decir, si $L(r_1) = L(r_2)$

Propiedad Asociativa de +.

Si α , β y γ son ER, $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

Demostración:

Si α , β y γ son ER, $L((\alpha+\beta)+\gamma)=L(\alpha+\beta)\cup L(\gamma)=L(\alpha)\cup L(\beta)\cup L(\gamma)$

Y también, $L(\alpha+(\beta+\gamma))=L(\alpha)\cup L(\beta+\gamma)=L(\alpha)\cup L(\beta)\cup L(\gamma)$

Por lo tanto, $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

Propiedad Conmutativa de +.

Si α y β son ER, $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

Demostración:

Si α y β son ER, $L(\alpha+\beta)=L(\alpha)\cup L(\beta)=L(\beta)\cup L(\alpha)=L(\beta+\alpha)$

Por lo tanto, $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

Neutro de la operación +

Si α es una ER, $\alpha+\varnothing=\alpha$

Demostración:

Si α es una ER, $L(\alpha+\varnothing)=L(\alpha)\cup L(\varnothing)=L(\alpha)\cup\varnothing=L(\alpha)$

Por lo tanto, $\alpha+\varnothing=\alpha$

Idempotencia de la operación +

Si α es una ER, $\alpha+\alpha=\alpha$

Demostración:

Si α es una ER, $L(\alpha+\alpha)=L(\alpha)\cup L(\alpha)=L(\alpha)$

Por lo tanto, $\alpha+\alpha=\alpha$

Neutro de la operación de concatenación.

Si α es una ER, $\alpha\cdot\lambda=\alpha$

Demostración:

Si α es una ER, $L(\alpha\cdot\lambda)=L(\alpha)\cdot L(\lambda)=L(\alpha)\cdot\{\lambda\}$.

Por definición, $L_1.L_2=\{\omega=\omega_1\cdot\omega_2|\omega_1\in L_1\wedge\omega_2\in L_2\}$

Entonces $L(\alpha).\{\lambda\}=\{\omega=\omega_1\cdot\lambda=\omega_1|\omega_1\in L(\alpha)\}=L(\alpha)$

Por lo tanto, $\alpha\cdot\lambda=\alpha$

Concatenación con el neutro de +.

Si α es una ER, $\alpha\cdot\varnothing=\varnothing$

Demostración:

Si α es una ER, $L(\alpha\cdot\varnothing)=L(\alpha)\cdot L(\varnothing)=L(\alpha)\cdot\varnothing$.

Por definición, $L_1.L_2=\{\omega=\omega_1\cdot\omega_2|\omega_1\in L_1\wedge\omega_2\in L_2\}$

Entonces $L(\alpha).\varnothing=\{\omega=\omega_1\cdot\omega_2|\omega_1\in L(\alpha)\wedge\omega_2\in\varnothing\}$

Que $\omega_2\in\varnothing$, significa que $\omega_2\in\overline{\Sigma^*}$. Es decir $\omega_2\in(\Sigma^*-\Sigma^*)$, o sea:

$\omega_2\in\Sigma^*\wedge\omega_2\notin\Sigma^*$

$L(\alpha).\varnothing=\{\omega=\omega_1\cdot\omega_2|\omega_1\in L(\alpha)\wedge\omega_2\in\Sigma^*\wedge\omega_2\notin\Sigma^*\}=\varnothing=L(\varnothing)$ ya que

$\omega_2\in\Sigma^*\wedge\omega_2\notin\Sigma^*$ es siempre falso.

Propiedad Asociativa de la concatenación.

Si α , β y γ son ER, $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$

Demostración:

Si α , β y γ son ER, $L((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma) = L(\alpha \cdot \beta) \cdot L(\gamma)$

Por definición, $L_1.L_2 = \{\omega = \omega_1 \cdot \omega_2 | \omega_1 \in L_1 \wedge \omega_2 \in L_2\}$

Por lo tanto, $L(\alpha \cdot \beta) \cdot L(\gamma) = \{\omega = \omega_1 \omega_2 \mid \omega_1 \in L(\alpha \cdot \beta) \wedge \omega_2 \in L(\gamma)\}$

Y también, $\omega_1 \in L(\alpha \cdot \beta) \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_3 \omega_4 \mid \omega_3 \in L(\alpha) \wedge \omega_4 \in L(\beta)$

Es decir, $\omega \in L(\alpha \cdot \beta) \cdot L(\gamma) \Leftrightarrow \omega = \omega_3 \omega_4 \omega_2 \mid \omega_3 \in L(\alpha) \wedge \omega_4 \in L(\beta) \wedge \omega_2 \in L(\gamma)$

Eso equivale a,

$\omega = \omega_3 (\omega_4 \cdot \omega_2) \mid \omega_3 \in L(\alpha) \wedge (\omega_4 \cdot \omega_2) \in L(\beta \cdot \gamma) \Leftrightarrow \omega \in L(\alpha) \cdot L(\beta \cdot \gamma)$

Es decir, $\omega \in L(\alpha \cdot \beta) \cdot L(\gamma) \Leftrightarrow \omega \in L(\alpha) \cdot L(\beta \cdot \gamma)$

Por lo tanto, $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$

Propiedad Distributiva de la concatenación respecto de +.

Si α , β y γ son ER, $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

Demostración:

Si α , β y γ son ER, $L(\alpha \cdot (\beta + \gamma)) = L(\alpha) \cdot L(\beta + \gamma)$

Por definición, $L(\alpha) L(\beta + \gamma) = \{\omega = \omega_1 \cdot \omega_2 | \omega_1 \in L(\alpha) \wedge \omega_2 \in L(\beta + \gamma)\}$

Por definición, $L(\beta + \gamma) = L(\beta) \cup L(\gamma)$

Entonces, $L(\alpha) L(\beta + \gamma) = \{\omega = \omega_1 \cdot \omega_2 | \omega_1 \in L(\alpha) \wedge (\omega_2 \in L(\beta) \vee \omega_2 \in L(\gamma))\}$

Dado que la conjunción es distributiva con la disyunción:

$L(\alpha) L(\beta + \gamma) = \{\omega = \omega_1 \cdot \omega_2 | (\omega_1 \in L(\alpha) \wedge \omega_2 \in L(\beta)) \vee (\omega_1 \in L(\alpha) \wedge \omega_2 \in L(\gamma))\}$

$L(\alpha) L(\beta + \gamma) = \{\omega | (\omega \in L(\alpha) \cdot L(\beta)) \vee (\omega \in L(\alpha) \cdot L(\gamma))\}$

$L(\alpha) L(\beta + \gamma) = \{\omega | (\omega \in L(\alpha \cdot \beta)) \vee (\omega \in L(\alpha \cdot \gamma))\} = \{\omega | \omega \in L(\alpha \cdot \beta) \cup L(\alpha \cdot \gamma)\}$

Por lo que $L(\alpha) L(\beta + \gamma) = L(\alpha \cdot \beta) \cup L(\alpha \cdot \gamma)$

Por lo tanto, $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

Clausura * de λ.

La clausura * de λ es λ .

Demostración:

Si α es una ER, $L(\alpha^*) = (L(A))^*$.

En el caso de que $\alpha = \lambda$, $L(\lambda^*) = (L(\lambda))^* = \{\lambda\}^*$

La clausura de Kleene se define por: $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$, por lo que en este caso,

$\{\lambda\}^* = \{\lambda\}^0 \cup \{\lambda\}^1 \cup \{\lambda\}^2 \ldots \cup = \{\lambda\} \cup \{\lambda\} \cup \{\lambda\} \ldots = \{\lambda\}$.

Por lo que $L(\lambda^*) = \{\lambda\}$

Por lo tanto, $\lambda^* = \lambda$

Clausura * de $\varnothing$.

La clausura * de $\varnothing$ es λ .

Demostración:

Si α es una ER, $L(\alpha^*) = (L(A))^*$.

En el caso de que $\alpha = \varnothing$, $L(\varnothing^*) = (L(\varnothing))^* = \varnothing^*$

La clausura de Kleene se define por: $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$, por lo que en este caso,

$\varnothing^* = \varnothing^0 \cup \varnothing^1 \cup \varnothing^2 ... \cup = \{\lambda\} \cup \varnothing \cup \varnothing ... = \{\lambda\}$.

Por lo que $L(\varnothing^*) = \{\lambda\}$

Por lo tanto, $\varnothing^* = \lambda$

Cuadro de propiedades:

1. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
2. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
3. $\alpha + \varnothing = \alpha$
4. $\alpha + \alpha = \alpha$
5. $\alpha \cdot \lambda = \alpha$
6. $\alpha \cdot \varnothing = \varnothing$
7. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
8. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma,\ (\beta + \gamma) \cdot \alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$
9. $\lambda^* = \lambda$
10. $\varnothing^* = \lambda$
11. $\alpha \cdot \alpha^* = \alpha^* \cdot \alpha$
12. $\alpha^* = \alpha^* \cdot \alpha^* = (\alpha^*)^*$
13. $\alpha^* = \lambda + \alpha \cdot \alpha^*$
14. $(\alpha + \beta)^* = (\alpha^* + \beta^*)^*$
15. $(\alpha + \beta)^* = (\alpha^* \cdot \beta^*)^* = (\alpha^* \cdot \beta)^* \cdot \alpha^*$
16. $\alpha \cdot (\beta \cdot \alpha)^* = (\alpha \cdot \beta)^* \cdot \alpha$

Autómatas Finitos y Expresiones Regulares.

Las expresiones regulares definen los mismos lenguajes que los autómatas finitos. Como los AFD, AFND y AFND-λ definen los mismos lenguajes, alcanza con mostrar que

1. Todo lenguaje definido mediante un AFD también se define mediante una expresión regular.
2. Todo lenguaje definido por una expresión regular puede definirse mediante un AFND-λ.

Conversión de un AFD en una expresión regular.

Teorema de Análisis de Kleene.

Si L es un lenguaje aceptado por un autómata finito M, entonces existe una expresión regular α tal que $L = L(M) = L(\alpha)$

Mediante ecuaciones de expresiones regulares.

Una ***ecuación de expresiones regulares*** con incógnitas o variables $x_1, x_2, ... x_n$ es una ecuación del tipo: $\boxed{x_i = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}x_1 + \ldots + \alpha_{in}x_n}$, donde cada coeficiente α_{ij} es una expresión regular. Una solución para x_i es una expresión regular.

A una ecuación de la forma $\boxed{X = \alpha X + \beta}$, donde α y β son expresiones regulares, se la llama ***ecuación fundamental*** de expresiones regulares.

Lema de Arden

Sea $X = \alpha X + \beta$ la ecuación fundamental. Entonces $X = \alpha^* \beta$ es una solución para la ecuación fundamental y esta solución es única si $\lambda \notin L(\alpha)$.

Es decir: $X = \alpha . X + \beta \Leftrightarrow X = \alpha^* \beta$

Demostración:

Primero vemos que se cumpla $\boxed{\boldsymbol{X = \alpha^* \cdot \beta \Rightarrow X = \alpha \cdot X + \beta}.}$

$$X = \alpha^* \cdot \beta \Rightarrow X = (\alpha^+ + \lambda) \cdot \beta \Rightarrow X = \alpha^+ \cdot \beta + \beta \Rightarrow X = (\alpha \cdot \alpha^*) \cdot \beta + \beta$$

Eso equivale a: $X = \alpha \cdot (\alpha^* \cdot \beta) + \beta$

Es decir, $X = \alpha \cdot X + \beta$

Luego vemos si se cumple $\boxed{\boldsymbol{X = \alpha \cdot X + \beta \Rightarrow X = \alpha^* \cdot \beta}}$

Queremos llegar a ver que $X = \alpha^* \beta$, y eso implica mostrar que $X \subseteq \alpha^* \beta \wedge \alpha^* \beta \subseteq X$

Primera parte: $\boldsymbol{X \subseteq \alpha^* \beta \Leftrightarrow \forall \omega \in X : \omega \in \alpha^* \beta}$

Por inducción en $|\omega|$

Caso base: $|\omega| = 0 \Rightarrow \omega = \lambda$.

Tenemos por hipótesis que $\omega \in X \wedge X = \alpha . X + \beta$

Eso significa que $\omega \in \alpha X \vee \omega \in \beta$.

Como además $\lambda \notin \alpha$, $\omega \notin \alpha X$, y necesariamente $\omega = \lambda \in \beta$

Como $\beta \subseteq \alpha^*\beta \Rightarrow \omega \in \alpha^*\beta$
Hipótesis inductiva: para $|\omega'| < n,\ \omega' \in \alpha^*\beta$
Tesis inductiva: $|\omega| = n,\ \omega \in \alpha^*\beta$
Si $\omega \in \beta$, entonces $\omega \in \alpha^*\beta$
Si $\omega \notin \beta,\ \omega \in X \wedge X = \alpha X + \beta$, luego $\omega \in \alpha X \vee \omega \in \beta$. Pero supusimos que $\omega \notin \beta$, luego necesariamente $\omega \in \alpha X$. En este caso, existen cadenas $\omega_1 \in \alpha \wedge \omega_2 \in X$ tal que $\omega = \omega_1\omega_2$, con $|\omega_1| \geq 1 \wedge |\omega| > |\omega_2|$.
Por hipótesis inductiva, $\omega_2 \in \alpha^*\beta$
Luego, $\omega = \omega_1\omega_2 \in \alpha(\alpha^*\beta)$
Pero además, $\alpha(\alpha^*\beta) = (\alpha\alpha^*)\beta = \alpha^+\beta \subset \alpha^*\beta$
$\therefore \omega \in \alpha^*\beta$
Queda entonces demostrado que $X \subseteq \alpha^*\beta$
Segunda parte: $\boldsymbol{\alpha^*\beta \subseteq X \Leftrightarrow \forall\omega \in \alpha^*\beta: \omega \in X}$
Se demuestra de manera similar.

Considerando también la hipótesis de $\lambda \notin L(\alpha)$, veamos que además es única.

Sea $\omega \in S$, tal que $|\omega| = n$, con $n \geq 0$, entonces tenemos dos casos posibles:

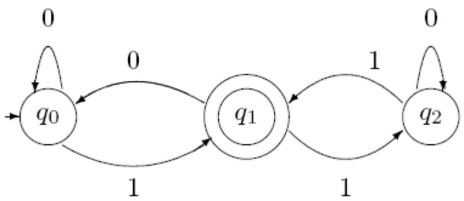
1. $\omega \in \alpha^{n+1}S$: Pero si $\lambda \notin L(\alpha)$, entonces la cadena más corta que puede haber en $\alpha^{n+1}S$ es de largo n+1. Luego $\omega \notin \alpha^{n+1}S$ y este caso queda descartado.
2. $\omega \in \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \cdot \beta$: Se cumple por haber descartado el caso anterior.

   Necesariamente, $\omega \in \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \cdot \beta \subseteq \alpha^* \cdot \beta, \Rightarrow S \subseteq \alpha^* \cdot \beta$.

   Por lo tanto, $S = \alpha^* \cdot \beta$

Algoritmo para obtener la Expresión Regular a partir de un Autómata Finito:
Para obtener la expresión regular a partir de un AF se sigue el algoritmo:
Entrada: $M = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta, F \rangle$
Salida: α tal que $L(\alpha) = L(M)$

1. Obtener las ecuaciones características del autómata.
- $\forall q_i \in Q$, la ecuación tiene en el primer miembro el estado q_i y en el segundo miembro una suma de términos aq_j por cada $\delta(q_i, a) = q_j$.
- Si $q_i \in F$, agregar el término λ al segundo miembro.
2. Resolver el sistema de ecuaciones.
   Usando el Lema de Arden y las propiedades de expresiones regulares, se obtiene la expresión regular para cada ecuación.
3. $\alpha \leftarrow$ solución para la ecuación correspondiente al estado inicial.
   Ejemplo: $M = \langle \{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, q_0, \{q_1\}, \delta \rangle$



Ejemplo dado en clase

Las ecuaciones son:

$$q_0 = 0q_0 + 1q_1$$
$$q_1 = 0q_0 + 1q_2 + \lambda$$
$$q_2 = 1q_1 + 0q_2$$

En (3) $q_2 = 0 \cdot 1 q_1$
$\Longrightarrow q_0 = q_2$
Obs: no está minimizado

Comenzando por la última ecuación, se tiene por Lema de Arden que $q_2 = 0^*1q_1$ y sustituyendo en la segunda ecuación queda $q_1 = 0q_0 + 10^*1q_1 + \lambda$

De donde se obtiene que $q_1 = (10^*1)^*(0q_0 + \lambda)$, también por lema de Arden.
Y este valor se sustituye en la primera ecuación:

$$q_0 = 0q_0 + 1(10^*1)^*(0q_0 + \lambda) = 0q_0 + 1(10^*1)^*0q_0 + 1(10^*1)^*$$

Luego de aplicar la propiedad distributiva y por el lema de Arden, se obtiene como única solución:

$$q_0 = (0 + 1(10^*1)^*0)^*1(10^*1)^*$$

Por ser la solución para el estado inicial, esta es la expresión regular que describe el lenguaje del autómata.

Conversión de expresiones regulares en autómatas.

Teorema de Síntesis de Kleene.

Si L es un lenguaje asociado a la expresión regular α , existe un autómata finito M tal que $L = L(M) = L(\alpha)$

Método de composición de autómatas.

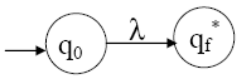
Si L es un lenguaje asociado a la expresión regular α , existe un autómata finito M tal que $L = L(M) = L(\alpha)$. Este autómata tiene un único estado de aceptación y ningún arco que entre al estado inicial o que salga del estado de aceptación.

Demostración:

Por inducción estructural sobre R.

BASE:

- Si $\alpha = \lambda$, entonces $L(\alpha) = \{\lambda\}$, por lo que existe un autómata finito

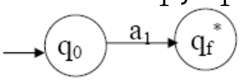


$M = \langle\{q_0, q_f\}, \Sigma, q_0, \delta, \{q_f\}\rangle$ ya que $L(M) = \{\lambda\}$

- Si $\alpha = \varnothing$, entonces $L(\alpha) = \varnothing$, por lo que existe un autómata finito

$M = \langle\{q_0, q_f\}, \Sigma, q_0, \delta, \{q_f\}\rangle$ ya que $L(M) = \emptyset$

- Si $\alpha = a_1$ y $a_1 \in \Sigma$, entonces $L(\alpha) = \{a_1\}$, por lo que existe un autómata finito

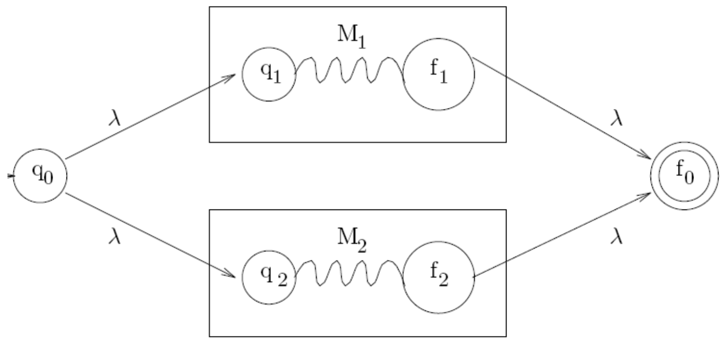


$M = \langle\{q_0, q_f\}, \Sigma, q_0, \delta, \{q_f\}\rangle$, ya que $\mathrm{L(M)} = \{\mathrm{a}_1\}$

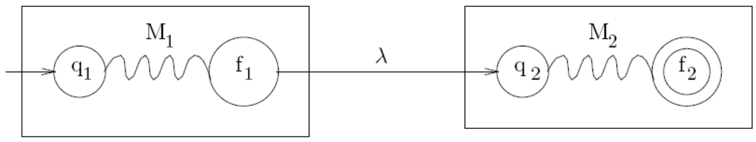
PASO INDUCTIVO:

Suponemos que el enunciado del teorema es verdadero para las subexpresiones inmediatas de una expresión regular dada; es decir, los lenguajes de estas subexpresiones son los lenguajes de algún AFN- λ con un único estado de aceptación.

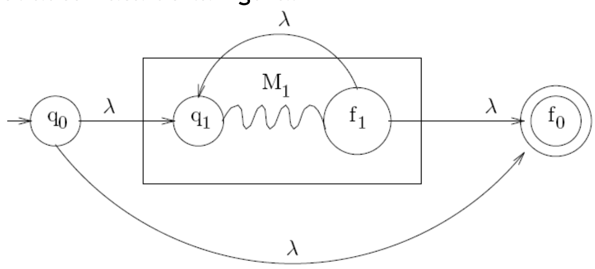
1. La expresión es de la forma $R_1 + R_2$ para dos expresiones regulares R_1 y R_2. El autómata de la figura, desde el nuevo estado inicial, permite llegar al estado inicial del autómata R_1 o al estado inicial del autómata correspondiente a R_2. Luego, se alcanzará algún estado de aceptación de uno de estos autómatas, siguiendo un camino etiquetado por alguna cadena de $L(R_1)$ o bien $L(R_2)$. Una vez alcanzado el estado de aceptación del autómata correspondiente a R_1 o R_2, siguiendo uno de los arcos λ se llega al estado de aceptación del nuevo autómata, por lo tanto, el lenguaje del autómata es $L(M) = L(R_1) \cup L\ (R_2)$



2. La expresión es de la forma R_1R_2 para dos expresiones regulares R_1 y R_2. En el autómata de la figura, el estado inicial del primer autómata se convierte en el estado inicial del conjunto y el estado de aceptación del segundo autómata se convierte en el estado de aceptación del conjunto. Los únicos caminos desde el estado inicial hasta el de aceptación pasan primero a través del autómata para R_1 en el que debe seguir un camino etiquetado con una cadena perteneciente a $L(R_1)$ y luego a través del autómata para R_2., donde sigue un camino etiquetado con una cadena perteneciente a $L(R_2)$. Por lo tanto, los caminos en el autómata de la figura son todos y sólo los etiquetados con cadenas pertenecientes a $L(M) = L(R_1)L\ (R_2)$



3. La expresión es de la forma R* para una expresión R más pequeña. Utilizamos el autómata de la figura:



Dicho autómata permite:
a) ir directamente desde el estado inicial al estado de aceptación siguiendo un camino etiquetado con λ, por lo que acepta λ, que pertenece a L(R*) sin importar qué expresión sea R.
b) ir al estado inicial del autómata correspondiente a R, atravesando el autómata una o más veces y luego al estado de aceptación. Este conjunto de caminos permite aceptar cadenas pertenecientes a L(R).L(R).L(R)…. Cubriendo por tanto todas las cadenas pertenecientes a $L(R^+)$.

4. La expresión es de la forma (R) para alguna expresión R más pequeña. El autómata correspondiente a R también sirve para reconocer el autómata correspondiente a (R), ya que L((R)) = L(R).

El autómata construido satisface las tres condiciones dadas en la hipótesis inductiva: un único estado de aceptación y ningún arco que entre en el estado inicial o que salga del estado de aceptación.