1. El conjunto $P \subseteq \Sigma^*$, donde $\Sigma = \{a, b\}$ se define **recursivamente** de la siguiente manera:

- $\lambda \in P$
- si $x \in P \Rightarrow ax^R bx \in P$

a) **Demostrar por inducción estructural** que $P \subset L$ siendo
$L = \{\omega \in \{a,b\}^* / \omega = (ab)^n \wedge n \geq 0\}$

Ej $\quad \lambda \Longrightarrow ab \in P \Longrightarrow ababab$

Sea P_m el m-esimo elemento $(m \geq 0) \in P$ obtenido a partir de la cantidad de m pasos recursivos tq $P_m = aP_{m-1}^R b P_{m-1}$

Pruebo por inducción en m

CB) $P_0 = \lambda$, $\lambda = (ab)^0 \Rightarrow P_0 \in L$, $P_1 = a\lambda^R b\lambda = ab = (ab)^1 \in L$

HI) $\forall k < m$, $\quad P_k \in L \Rightarrow P_k = (ab)^n$

TI) $\forall m$, $\quad P_m \in L$

D/

$$P_m = aP_{m-1}^R b P_{m-1}$$

$$\xRightarrow{m-1<m} \underbrace{a(ba)^n b}_{=(ab)^{n+1}}(ab)^n = (ab)^{n+1}(ab)^n$$

$$= (ab)^{2n+1} \in L$$

$$\therefore P_m \in L$$

** Demostremos por inducción completa que $(x^r)^n = (x^n)^r \quad \forall n \geq 0$

(CB) $n=0 \Rightarrow (x^r)^0 = \lambda$ y $(x^0)^r = \lambda^r = \lambda$ ✓

(HI) se cumple que $(x^n)^r = (x^r)^n$

(T) Quiero ver si se cumple que $(x^{n+1})^r = (x^r)^{n+1}$

Tengo que $(x^r)^{n+1} = (x^r)^n . (x^r)$

$= (x^n)^r . (x^r)$ por HI

$= (x . x^n)^r$ por prop. $(w_1 w_2)^r = w_2^r . w_1^r$

$= (x^{n+1})^r$ ∎

2. **Demostrar** usando el Lema de Bombeo que el lenguaje
$L = \{a^r b^s c^t / s = r + t\}$ **no es regular.**

Lema del bombeo para Lenguajes Regulares.

Si L es un **lenguaje regular infinito**
Entonces:
$\exists n / \forall \omega \in L, : |\omega| \geq n \Rightarrow$ podemos dividir ω en 3 cadenas, $\omega = xyz$ de modo que:
1. $y \neq \lambda$
2. $|xy| \leq n$
3. $\forall k \geq 0 : xy^k z \in L$

Supongamos que L es regular $\Longrightarrow$

Sea ese $n = N$

Veamos si cumple con $\omega = a^N b^{2N} c^N$ $\quad (|\omega| = 4N \geq N)$

$\Rightarrow \omega = xyz \Rightarrow x = a^{|x|}, y = a^{|y|}, z = a^{N-|xy|} b^{2N} c^N$ Esta es la unica opción, pues $|xy| \leq N$

$k=0$: $\Rightarrow xy^0 z \in L \Rightarrow xz \in L$

$\Rightarrow a^{|x|} a^{N-|xy|} b^{2N} c^N \in L$

$\Rightarrow 2N = (N - |y|) + N$

$N = N - |y|$

$|y| = 0$ Abs! Pues $y \neq \lambda$ $\quad \therefore$ L no es regular

3. Mostrar que la **Expresión Regular** $(a(ab)^*a+b)(ab)^*$ define el lenguaje correspondiente al autómata $M = \langle\{a,b\},\{p,q,r,s,t,u\},\delta,p,\{t\}\rangle$, con δ dada por la tabla:

δ	a	b	λ
$\to p$	$\{r\}$	$\{t\}$	
q	$\emptyset$	$\{r\}$	$\{s\}$
r	$\{q,t\}$	$\emptyset$	
s	$\emptyset$	$\{r\}$	
$*t$	$\{u\}$	$\emptyset$	
u	$\emptyset$	$\{t\}$	

Veamos si es min (todos accesibles)

$clau_\lambda(p)=\{p\}$ $\quad clau_\lambda(s)=\{s\}$

$clau_\lambda(q)=\{q,s\}$ $\quad clau_\lambda(t)=\{t\}$

$clau_\lambda(r)=\{r\}$ $\quad clau_\lambda(u)=\{u\}$

δ	a	b
$\to$ P	R	T
R	QST	—
$*$QST	U	R
$*$ T	U	—
U	—	T
—	—	—

$Q/E_0 = \{\{P,R,U,-\},\{T,QST\}\}$

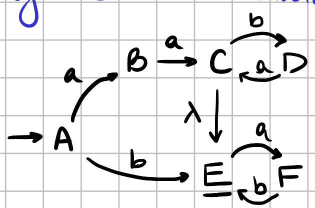
$Q/E_1 = \{\{P,U\},\{R\},\{-\},\{T,QST\}\}$

$Q/E_2 = \{\{P\},\{U\},\{R\},\{-\},\{T\},\{QST\}\}$ ✓

16. $\alpha\cdot(\beta\cdot\alpha)^* = (\alpha\cdot\beta)^*\cdot\alpha$

Hagamos un automata para $(a(ab)^*a+b)(ab)^*$

$=(aa(ba)^*+b)(ab)^*$



	a	b	λ
$\to$ A	B	E	
B	A	—	
C	—	D	E
D	C	—	
$*$ E	F	—	
F	—	E	
—	—	—	

$clau_\lambda(A)=\{A\}$ $\quad clau_\lambda(D)=\{D\}$

$clau_\lambda(B)=\{B\}$ $\quad clau_\lambda(E)=\{E\}$

$clau_\lambda(C)=\{C,E\}$ $\quad clau_\lambda(F)=\{F\}$

	a	b
$\to$ A	B	E
B	CE	—
$*$CE	F	D
D	CE	—
$*$ E	F	—
F	—	E
—	—	—

$Q/E_0 = \{\{A,B,D,F\},\{CE,E\}\}$

$Q/E_1 = \{\{A,F\},\{B,D\},\{-\},\{CE,E\}\}$

$Q/E_2 = \{\{A\},\{B,D\},\{-\},\{CE\},\{E\}\}$

$\Rightarrow$ Llamo $\{B,D\}=B'$ y $CE = C'$

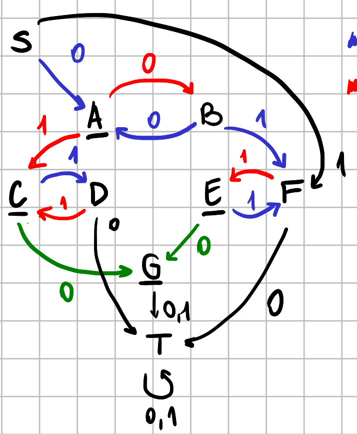
	a	b
$\to$ A	B'	E
B'	C'	—
$*$ C'	F	B
$*$ E	F	—
F	—	E

$\Rightarrow$ A = P
B' = R
C' = QST
E = T
F = U

4. Construir un **Autómata Finito Determinístico Mínimo** M que acepte el lenguaje L, tal que $L = \{\omega \in \{0,1\}^* / \omega = 0^i 1^j x \text{ con x=0 si } i+j \equiv 0(2) \wedge \text{ x} = 1 \text{ si } i+j \equiv 1(2)\}$.
Ejemplos:
$0111 \in L, 0011 \in L, 00110 \in L$
$00111 \notin L$

Si $i+j$ es par $0^i 1^j 0$
es impar $0^i 1^j 1$

Impar
Par



	0	1
→S	4 A	2 F
∗A	1 B	6 C
B	4 A	2 F
∗C	5 G	2 D
D	3 T	6 C
∗E	5 G	2 F
F	3 T	6 E
∗G	3 T	3 T
T	3 T	3 T

Veamos si es min

$Q/E_0 = \{ \{S,B,D,F,T\}, \{A,C,E,G\} \}$

$Q/E_1 = \{ \{S,B\}, \{D,F\}, \{T\}, \{A\}, \{G\}, \{C,E\} \}$

$Q/E_2 = \{ \{S,B\}, \{D,F\}, \{T\}, \{A\}, \{G\}, \{C,E\} \}$

$Q/E_2 = Q/E_1$

$\{D,F\} = D'$ $\{C,E\} = C'$ $\{S,B\} = S'$