
TD n° 4 - C'est pas graphe, c'est le début

Exercice 1.*Course d'orientation*

1. Dans le cas d'un graphe *non orienté*, compléter le tableau suivant en indiquant la complexité dans le pire cas pour chaque opération et chaque structure de données utilisée pour stocker le graphe. Donner ces complexités en fonction du nombre de sommets n , du nombre d'arêtes m ou des degrés des sommets.

	listes d'adjacence simplement chaînées	matrice d'adjacence
TESTADJACENCE($s1, s2$)		
ENUMVOISINS(sommet)		
AJOUTER(arête)		
AJOUTER(sommet)		
SUPPRIMER(arête)		
SUPPRIMER(sommet)		
FUSIONNER(deux sommets)		

Dans quels cas pourrait-il être intéressant d'avoir des listes doublement chaînées ou éventuellement d'autres pointeurs entre les listes d'adjacence ? Qu'est-ce qu'on peut dire du cas des graphes orientés ?

2. Même question en complexité amortie pour les suppressions et fusions : quelle est la complexité totale de n suppressions de sommets consécutives ? de $n - 1$ fusions de sommets consécutives ?

3. *Symétriser* un graphe orienté consiste à enlever l'orientation en remplaçant chaque arc par une arête (non orientée). Quelle est la complexité de cette opération si le graphe est donné par sa matrice d'adjacence ? par ses listes d'adjacence ?

Exercice 2.*H1N1*

Un couple reçoit chez lui quatre autres couples. Lorsqu'elles se rencontrent pour la première fois dans la soirée, certaines personnes se serrent la main. À la fin de la soirée, l'hôtesse demande à chaque personne, y compris son épouse, combien elle a serré de mains. Elle obtient des réponses toutes différentes. Sachant qu'on ne serre pas sa propre main, ni celle de sa moitié, pouvez-vous répondre aux questions suivantes :

1. Combien l'hôtesse a-t-elle serré de mains ?
2. Combien son épouse a-t-elle serré de mains ?

Exercice 3.*Araignée, quel drôle de nom pour une Reine*

Soit V un ensemble de n personnes tel que pour toute paire de personnes il y en a toujours une qui est strictement plus forte que l'autre. Une *Reine* est une personne x pour laquelle il existe une partie $A \subseteq V - \{x\}$ (son *armée*) tel que x bat toutes les personnes de A , et toute autre personne est battue par un élément de A ou par x . Existe-t-il toujours une reine dans V ?

Exercice 4.*Ramsey II*

On colorie les arêtes d'un graphe complet à n sommets, $n \geq 6$, avec deux couleurs.

1. Montrer qu'il existe nécessairement un triangle monochromatique.
2. Donner un contre-exemple à cette propriété quand $n = 5$.

Exercice 5.*I want to ride my tricycle, I want to ride my trike*¹

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté avec $|V| = 2n$ et $|E| = m$. Montrer que si G ne contient pas de cycle de longueur 3, alors $m \leq n^2$.

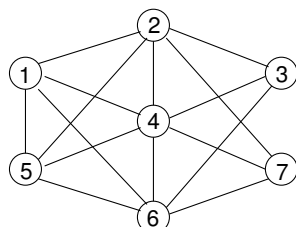
FIGURE 1 – Tricycle de Leopold II²

Exercice 6.*Graphes isothermiques*

Soit k un entier positif, un graphe non vide est dit k -régulier si tous ses sommets sont de degré k . Quels sont les nombres entiers qui peuvent être l'ordre (nombre de sommets) d'un graphe k -régulier ?

Exercice 7.*Igor et Grichka*

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Deux sommets $u, v \in V$ sont dit *jumeaux* s'ils ont les mêmes voisins, c'est à dire $N(u) = N(v)$. C'est une relation d'équivalence dont on cherche à calculer les classes d'équivalence, autrement dit les groupes de sommets jumeaux.



1. Quels sont les sommets jumeaux dans ce graphe ?
2. Donner un algorithme qui calcule les classes de sommets jumeaux en temps $O(|V| + |E|)$.

1. This is a real word.
2. cc-by-sa M0tty