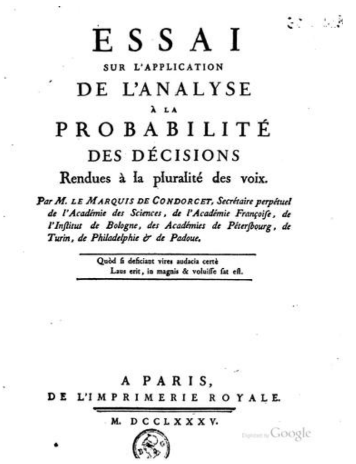
DM n° 1 - DM électoral

à rendre avant le 11/03/2016

Exercice 1. *Théorème d'Arrow*

La mise au point d'une procédure de vote qui reflète au mieux les préférences des électeurs est un exercice difficile, étudié dès le XVIIIème siècle par Messieurs le Chevalier de Borda (*Mémoire sur les élections au scrutin*, 1784) et le Marquis de Condorcet (*Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, 1785). Ils ont identifié des configurations problématiques, comme celle du tableau ci-dessous avec 3 électeurs et 3 candidats, où il est impossible d'extraire un vainqueur : il n'y a pas de candidat qui sortirait vainqueur de tout duel avec ses concurrents. En départageant à la majorité, dans le duel A contre B, A serait vainqueur, mais dans A contre C, C serait vainqueur, et dans B contre C, B serait vainqueur (parfois appelé *paradoxe de Condorcet*).


ESSAI
SUR L'APPLICATION
DE L'ANALYSE
À LA
PROBABILITÉ
DES DÉCISIONS
Rendues à la pluralité des voix.

Par M. LE MARQUIS DE CONDORCET, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, de l'Académie Françoise, de l'Institut de Bologne, des Académies de Péterſbourg, de Turin, de Philadelphie & de Padoue.

Quòd ſi deficiant vires audacia certè
Laus erit, in magnis & voluiſſe ſat eſt.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXXV.

Electeur 1	$A > B > C$
Electeur 2	$B > C > A$
Electeur 3	$C > A > B$

En 1951, Kenneth Arrow confirme ces difficultés : il démontre l'impossibilité de créer une procédure de vote respectant quelques conditions pourtant naturelles, souhaitables et faibles en apparence. Dans tout ce qui suit, le vote concernera $N \geq 2$ électeurs qui doivent départager un ensemble S de candidats, $|S| \geq 3$. Une *liste de préférence* (ou *préférence* tout court) est un ordre total sur *tous* les candidats. Chaque électeur a sa liste de préférence (*préférence individuelle*). Un *profil de préférence* Π est tout simplement le N-uplet constitué des N préférences individuelles des électeurs. Une *procédure de vote* (ou *fonction de choix social*) est une fonction qui associe à un profil une liste de préférence en sortie (*préférence sociale*) sensée aggréger au mieux l'ensemble des préférences individuelles. Voici une liste de propriétés que l'on peut souhaiter ou rencontrer :

- une procédure de vote est *universelle* si son domaine de définition est l'ensemble de tous les profils possibles (elle est capable de fournir un choix collectif quelque soit le N-uplet d'entrée) ;
- une procédure de vote est *unanime* si pour tout couple de candidats a, b et tout profil Π, si a est classé devant b dans toutes les préférences du profil, alors a est classé devant b dans la préférence sociale en sortie ;
- une procédure de vote est *indifférente aux options non-pertinentes* si pour tout couple de candidats a, b, le classement entre a et b dans la préférence sociale en sortie ne dépend que du classement entre a et b dans chaque préférence du profil d'entrée (autrement dit si deux profils différents classent malgré tout a et b de la même manière dans chaque préférence individuelle, alors le classement entre a et b en sortie doit être le même) ;
- une procédure de vote est une *dictature* s'il existe un électeur fixé tel que la procédure de vote revient juste à renvoyer pour tout profil la préférence individuelle de cet individu (il impose sa liste et les autres individus n'ont aucune influence).

1. On considère la procédure de vote suivante : pour chaque préférence, on associe $|S| - 1$ points au premier de la préférence, $|S| - 2$ au deuxième , . . . , 0 au dernier. Dans la préférence sociale, $a > b$ si la somme des points de a est strictement supérieure à la somme des points de b. En cas d'égalité, on départage les candidats selon un ordre total $a > b > ...$ sur S, arbitraire et défini à l'avance. Montrer que cette procédure de vote renvoie bien une préférence (càd un ordre total sur S), que l'unanimité est respectée mais pas l'indifférence aux options non pertinentes.

Dans les questions qui suivent, on considère une procédure de vote universelle qui respecte l'unanimité et l'indifférence aux options non pertinentes.

2. Soit β un candidat choisi arbitrairement. Montrer que si dans un profil Π, toutes les préférences des N individus classent β soit en première position soit en dernière position alors β est classé soit en première position soit en dernière position dans la préférence sociale.

3. Construire un profil Π^* tel qu'il existe un individu n^* qui possède toutes les propriétés suivantes :
- ▷ Dans le profil Π^*, toutes les préférences des individus différents de n^* classent β soit en première, soit en dernière position.
- ▷ Dans le profil Π^*, n^* classe β en premier dans sa préférence et, en sortie, β est premier de la préférence sociale.
- ▷ Si n^* change sa préférence en plaçant β en dernier, sans modifier le reste du profil, alors pour ce nouveau profil Π_*, β devient dernier de la préférence sociale.

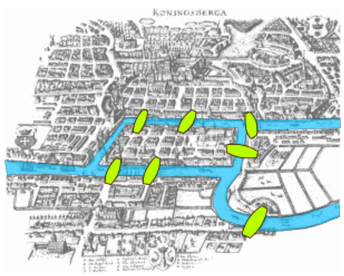
4. Prouver que pour tout couple de candidats a et c différents de β et pour tout profil, si dans la préférence de l'individu n^* on a $a > c$ (resp. $a < c$), alors dans la préférence sociale $a > c$ (resp. $a < c$).

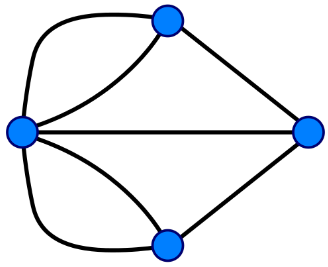
5. Prouver que pour tout candidat a différent de β et pour tout profil, si dans la préférence de l'individu n^* on a $a > \beta$ (resp. $a < \beta$), alors dans la préférence sociale $a > \beta$ (resp. $a < \beta$).

6. Conclure par le théorème d'Arrow (1951) : *avec au moins trois candidats, toute procédure de vote qui est universelle, unanime et indifférente aux options non pertinentes, est forcément une dictature.*

Exercice 2. *Théorème d'Euler*

L'invention de la théorie des graphes remonte à l'étude du problème des sept ponts de Königsberg par Euler. La question était : étant donnée la carte de Königsberg (à droite), est-il possible de visiter la ville en traversant chaque pont exactement une fois ?





On peut reformuler la question en demandant s'il existe un chemin parcourant exactement une fois chaque arête sur le graphe correspondant. Un tel parcours s'appelle un chemin eulérien. De la même manière, un cycle eulérien est un cycle qui passe exactement une fois par chaque arête.

Plus formellement, soit un graphe $G = (V, E)$ on dit que $C = (e_1, e_2, \dots, e_t) \in E^t$ est un *chemin eulérien* si :
- — $\forall i$, le sommet d'arrivé de e_i est le sommet de départ de e_{i+1} (C est un parcours),
- — $\{\{e_1, e_2, \dots, e_t\}\} = E$ (toutes les arrêtes sont couvertes une et une seule fois).
  ("=" au sens multiset donc chaque arête apparaît autant de fois dans l'écriture du chemin que dans le multiset E).

Si de plus C est un cycle alors C est un *cycle eulérien*. On dit qu'un graphe est eulérien s'il possède au moins un cycle eulérien.

On va s'interesser dans cet exercice aux deux théorèmes suivants :

Théorème d'Euler (1736) :
- — Un graphe connexe est eulérien si et seulement si tout ses sommets ont degré pair.
- — Un graphe connexe possède un chemin eulérien si et seulement si aucun ou deux sommets ont degré impair.

1. D'après ces théorèmes, quelle est la réponse au problème des ponts de Königsberg ?

2. Montrer que si tous les sommets d'un graphe G ont un degré pair et qu'un sommet s du graphe a un degré non-nul alors il existe dans G un cycle contenant s.

3. Montrer la première partie du théorème : Un graphe connexe est eulérien si et seulement si tout ses sommets ont degré pair.

4. Expliquer ce qu'il faudrait modifier dans la preuve précédente pour montrer la deuxième partie du théorème.

5. Donner un algorithme en $\mathcal{O}(|E| + |V|)$ pour trouver un cycle eulérien d'un graphe eulérien (le graphe est donné sous forme de listes d'adjacence).