Lib

naimsantos2002

October 2022

Combinatorial

1 Permutations

1.1 Factorial

factorial.tex IntPerm.h

1.2 Cycles

Let $g_S(n)$ be the number of n-permutations whose cycle lengths all belong to the set S. Then

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_S(n)\frac{x^n}{n!} = \exp\left(\sum_{n\in S}\frac{x^n}{n}\right)$$

1.3 Derangements

Permutations of a set such that none of the elements appear in their original position.

$$D(n) = (n-1)(D(n-1)+D(n-2)) = nD(n-1)+(-1)^n = \left\lfloor\frac{n!}{e}\right\rceil$$

1.4 Burnside's lemma

Given a group G of symmetries and a set X, the number of elements of X *up to symmetry* equals

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|,$$

where X^g are the elements fixed by g ($g.x = x$).

If $f(n)$ counts "configurations" (of some sort) of length n, we can ignore rotational symmetry using $G = Z_n$ to get

$$g(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(gcd(n,k)) = \frac{1}{n}\sum_{k|n} f(k)\phi(n/k).$$

2 Partitions and subsets

2.1 Partition function

Number of ways of writing n as a sum of positive integers, disregarding the order of the summands.

$$p(0) = 1,\ p(n) = \sum_{k \in Z \setminus \{0\}} (-1)^{k+1} p(n - k(3k-1)/2)$$

$$p(n) \sim 0.145/n \cdot \exp(2.56\sqrt{n})$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	20	50	100
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	627	~2e5	~2e8

2.2 Lucas' Theorem

Let n, m be non-negative integers and p a prime. Write $n = n_k p^k + ... + n_1 p + n_0$ and $m = m_k p^k + ... + m_1 p + m_0$. Then $nm \equiv \prod_{i=0}^{k} n_i m_i \pmod{p}$.

2.3 Binomials

multinomial.h

3 General purpose numbers

3.1 Bernoulli numbers

EGF of Bernoulli numbers is $B(t) = \frac{t}{e^t - 1}$ (FFT-able). $B[0, \ldots] = [1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, \ldots]$

Sums of powers:

$$\sum_{i=1}^{n} n^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} m + 1k B_k \cdot (n+1)^{m+1-k}$$

Euler-Maclaurin formula for infinite sums:

$$\sum_{i=m}^{\infty} f(i) = \int_m^{\infty} f(x)dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(m)$$

$$\approx \int_m^{\infty} f(x)dx + \frac{f(m)}{2} - \frac{f'(m)}{12} + \frac{f'''(m)}{720} + O(f^{(5)}(m))$$

3.2 Stirling numbers of the first kind

Number of permutations on n items with k cycles. c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1) c(n-1,k), c(0,0) = 1

$\sum_{k=0}^{n} c(n,k) x^k = x(x+1) \ldots (x+n-1)$ $c(8,k) = 8, 0, 5040, 13068, 13132, 6769, 1960, 322, 28, 1$

$c(n,2) = 0, 0, 1, 3, 11, 50, 274, 1764, 13068, 109584, \ldots$

3.3 Eulerian numbers

Number of permutations $\pi \in S_n$ in which exactly k elements are greater than the previous element. k j:s s.t. $\pi(j) > \pi(j+1)$, $k+1$ j:s s.t. $\pi(j) \geq j$, k j:s s.t. $\pi(j) > j$.

$$E(n,k) = (n-k)E(n-1,k-1) + (k+1)E(n-1,k)$$

$$E(n,0) = E(n,n-1) = 1$$

$$E(n,k) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j n+1j(k+1-j)^n$$

3.4 Stirling numbers of the second kind

Partitions of n distinct elements into exactly k groups.

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$$

$$S(n,1) = S(n,n) = 1$$

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}kjj^n$$

3.5 Bell numbers

Total number of partitions of n distinct elements. $B(n) = 1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, \ldots$. For p prime,

$$B(p^m + n) \equiv mB(n) + B(n+1) \pmod{p}$$

3.6 Labeled unrooted trees

\# on n vertices: n^{n-2}
\# on k existing trees of size n_i: $n_1 n_2 \cdots n_k n^{k-2}$
\# with degrees d_i: $(n-2)!/((d_1-1)!\cdots(d_n-1)!)$

3.7 Catalan numbers

$$C_n = \frac{1}{n+1}2nn = 2nn - 2nn+1 = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

$$C_0 = 1,\ C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}C_n,\ C_{n+1} = \sum C_i C_{n-i}$$

$C_n = 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, \ldots$

[noitemsep]sub-diagonal monotone paths in an $n \times n$ grid. strings with n pairs of parenthesis, correctly nested. binary trees with with $n+1$ leaves (0 or 2 children). ordered trees with $n+1$ vertices. ways a convex polygon with $n+2$ sides can be cut into triangles by connecting vertices with straight lines. permutations of $[n]$ with no 3-term increasing subseq.

Game Theory

3.8 Nim-K

Nim podendo tirar de K heaps, aka Moore's Nimk Se soma xi mod (k+1) == 0 pra todo bit i, é uma P position.

3.9 Monotonic Nim

Se n é impar pega o xor de (a(2*i+1) - a(2*i)), se não insere um 0 no inicio e repete.

3.10 Misere Nim

É uma P position se: existe ai¿1 e xor == 0 ou ai==1 e xor == 1.
Geometry

3.11 Formula de Euler

V - E + F = 2

3.12 Pick Theorem

Para achar pontos em coords inteiras num poligono Area = i + b/2 - 1 onde i eh o o numero de pontos dentro do poligono e b de pontos no perimetro do poligono

3.13 Two ears theorem

Todo poligono simples com mais de 3 vertices tem pelo menos 2 orelhas, vertices que podem ser removidos sem criar um crossing, remover orelhas repetidamente triangula o poligono

3.14 Incentro triangulo

(a(Xa, Ya) + b(Xb, Yb) + c(Xc, Yc))/(a+b+c) onde a = lado oposto ao vertice a, incentro eh onde cruzam as bissetrizes, eh o centro da circunferencia inscrita e eh equidistante aos lados

3.15 Delaunay Triangulation

Triangulacao onde nenhum ponto esta dentro de nenhum circulo circunscrito nos triangulos Eh uma triangulacao que maximiza o menor angulo e a MST euclidiana de um conjunto de pontos eh um subconjunto da triangulacao

3.16 Tangência

Dado um Circulo C na origem com raio R e um ponto P = (xp, yp) qualquer: - Se P pertence a C, reta tangente que passa por P é da forma x*(xp) + y*(yp) = r$^2 - Caso contrário, a interseção da reta r : x * (xp) + y * (yp) = r^2 com a circunferencia C são os dois pontos de tangencia$

3.17 Brahmagupta's formula

Area cyclic quadrilateral s = (a+b+c+d)/2 area = sqrt((s-a)*(s-b)*(s-c)*(s-d)) d = 0 =¿ area = sqrt((s-a)*(s-b)*(s-c)*s)

Graphs

3.18 Formula de Euler

V - E + F = 2 (para grafo planar) / V - E + F = 1 + C (C sendo a qtd de componentes no grafo planar)

3.19 Handshaking

Numero par de vertices tem grau impar

3.20 Kirchhoff's Theorem

Monta matriz onde Mi,i = Grau[i] e Mi,j = -1 se houver aresta i-j ou 0 caso contrario, remove uma linha e uma coluna qualquer e o numero de spanning trees nesse grafo eh o det da matriz

3.21 Grafo contem caminho hamiltoniano se

Dirac's theorem: Se o grau de cada vertice for pelo menos n/2

3.22 Ore's theorem

Se a soma dos graus que cada par nao-adjacente de vertices for pelo menos n

3.23 Trees

Tem Catalan(N) Binary trees de N vertices Tem Catalan(N-1) Arvores enraizadas com N vertices

3.24 Caley Formula

n^{n-2} arvores em N vertices com label

According to one of generalizations of Cayley's formula, number of forests of x vertices, where vertices 1,2,...,y belong to different trees is $f(x, y) = y \cdot (x^{x-y-1})$

3.25 Prufer code

Cada etapa voce remove a folha com menor label e o label do vizinho eh adicionado ao codigo ate ter 2 vertices. Prufer sequence tem tamanho n-2 e gera uma sequencia unica para cada arvore com label

3.26 numero de arvores com sequencia de grau di

É multinomio de (n-2 , (d1-1 , .. , dn - 1))

According to one of generalizations of Cayley's formula, number of forests of x vertices, where vertices 1,2,. . . ,y belong to different trees is $f(x, y) = y \cdot (x^(x - y - 1))$

3.27 Flow

- Max Edge-disjoint paths: Max flow com arestas com peso 1
- Max Node-disjoint paths: Faz a mesma coisa mas separa cada vertice em um com as arestas de chegadas e um com as arestas de saida e uma aresta de peso 1 conectando o vertice com aresta de chegada com ele mesmo com arestas de saida
- Konig's Theorem: minimum node cover = maximum matching se o grafo for bipartido, complemento eh o maximum independent set
- Min Node disjoint path cover: formar grafo bipartido de vertices duplicados, onde aresta sai do vertice tipo A e chega em tipo B, entao o path cover eh N - matching
- Min General path cover: Mesma coisa mas colocando arestas de A pra B sempre que houver caminho de A pra B
- Dilworth's Theorem: Min General Path cover = Max Antichain (set de vertices tal que nao existe caminho no grafo entre vertices desse set)
- Hall's marriage: um grafo tem um matching completo do lado X se para cada subconjunto W de X, —W— ¡= —vizinhosW— onde —W— eh quantos vertices tem em W

Math

3.28 Goldbach's

todo numero par n ¿ 2 pode ser representado com n = a + b onde a e b sao primos

3.29 Twin prime

existem infinitos pares p, p + 2 onde ambos sao primos

3.30 Legendre's

sempre tem um primo entre n$^2 e(n+1)^2$

3.31 Lagrange's

todo numero inteiro pode ser inscrito como a soma de 4 quadrados

3.32 Zeckendorf's

todo numero pode ser representado pela soma de dois numeros de fibonnacis diferentes e nao consecutivos

3.33 Euclid's

toda tripla de pitagoras primitiva pode ser gerada com (n$^2 - m^2, 2nm, n^2 + m^2) onden, msaocoprimoseumdelesehpar$

3.34 Wilson's

n eh primo quando (n-1)! mod n = n - 1

3.35 Mcnugget

Para dois coprimos x, y o maior inteiro que nao pode ser escrito como ax + by eh (x-1)(y-1)/2

3.36 Fermat

Se p eh primo entao $a^{p-1} modp = 1$ Se x e m tambem forem coprimos entao $x^k modm = x^{(kmod(m-1))} modm$

3.37 Euler's theorem

$x^{phi(m)} modm = 1$ onde phi(m) eh o totiente de euler

3.38 Chinese remainder theorem

Para equacoes no formato x = a1 mod m1, ... , x = an mod mn onde todos os pares m1, ... , mn sao coprimos Deixe Xk = m1*m2*..*mn/mk e Xk$^-1 modmk = inversodeXkmodmk, entaox = somatoriocomkde1atendeak * Xk*(Xk, mk^-1 modmk) Paraacharoutrasolucaososomarm1*m2*..*mnasolucaoexistente$

3.39 Catalan number

exemplo expressoes de parenteses bem formadas C0 = 1, Cn = somatorio de i=0 to n-1 de Ci*C(n-i+1)

outra forma: Cn = (2n escolhe n)/(n+1)

Se ja tem alguns items voce tem $C(a+b,a) - C(a+b,b+1)$, com $a = n - openNoPrefix$ e $b = n - ClosedNoPrefix$.

O número de caminhos de (0,0) até (n,n) que estão estritamente abaixo da diagonal y=x (mas podem tocar) em um grid é Catalan(n)

3.40 Bertrand's ballot theorem

p votos tipo A e q votos tipo B com p¿q, prob de em todo ponto ter mais As do que Bs antes dele = (p-q)/(p+q)

Se puder empates entao prob = (p+1-q)/(p+1), para achar quantidade de possibilidades nos dois casos basta multiplicar por (p + q escolhe q)

3.41 Propriedades de Coeficientes Binomiais

Somatorio de k = 0 -¿ m de (-1)$^k * (nescolhek) = (-1)^m * (n-1escolhem)$

(N escolhe K) = N/K * (n-1 escolhe k-1)

Somatorio de k = 0 to n de (n escolhe k) = 2^n

Somatorio de m = 0 to n de (m escolhe k) = (n+1 escolhe k + 1)

Somatorio de k = 0 to m de (n+k escolhe k) = (n+m+1 escolhe m)

Somatorio de k = 0 to n de (n escolhe k)$^2 = (2nescolhen)$

Somatorio de k = 0 ou 1 to n de k*(n escolhe k) = n * $2^{(}n-1)$

Somatorio de k = 0 to n de (n-k escolhe k) = Fib(n+1)

3.42 Hockey-stick

Somatorio de i = r -¿ n de (i escolhe r) = (n + 1 escolhe r + 1)

3.43 Vandermonde

(m+n escolhe r) = somatorio de k = 0 to r de (m escolhe k) * (n escolhe r - k)

3.44 Burnside lemma

colares diferentes nao contando rotacoes quando m = cores e n = comprimento (m$^n + somatorioi = 1 - ton - 1dem^gcd(i,n))/n$

3.45 Distribuicao uniforme

a,a+1, ..., b Expected[X] = (a+b)/2

3.46 Distribuicao binomial

Com n tentativas de probabilidade p, X = sucessos: P(X = x) = p$^x * (1-p)^(n-x) * (nescolhex) e E[X] = p * n$

3.47 Distribuicao geometrica onde continuamos ate ter sucesso

X = tentativas: P(X = x) = (1-p)$^(x-1) * p e E[X] = 1/p$

3.48 Linearity of expectation

Tendo duas variaveis X e Y e constantes a e b, o valor esperado de $aX + bY = a \cdot E[X] + b \cdot E[X]$

3.49 Higher order distributions

$E[X^c] = \sum_{k=0}^{c} \left\{ {c \atop k} \right\} n^{\underline{k}} p^k$ where $n^{\underline{k}} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ is the kth falling power of n.

3.50 funcao geradora

$(1+x)^{-n} = somatorio(((-1)^k) * ((n+k-1)escolhek) * (x^k)), k = 0até k = inf$

3.51 phi(m)

$e >= log2(m)$, $n^e\ mod\ m = n^{(phi(m)+(e\ mod\ phi(m))} mod m$

phi(phi(...phi(m))) -¿ 1 em O(logM) iterações

3.52 Number of times on k prefix sum's

Seja T(k, i) = Quantas vezes o valor de V[1] aparece em "i" após fazer "k" somas de prefixo. T(k, i) = somatorio de j = 1 to r de ((k + j - 1) escolhe(k - 1))

3.53 Multiplicative order

Smallest positive K such that a$^k == 1 mod N -> ord_n(a)$

As a consequence of Lagrange's theorem, ord$_n(a) always divides (n)(phi(n))$

Se gcd(a,n)!=1 não existe $k > 0$

3.54 Sum of K powers

- Educ 7 - F

O(min(N,K))

S(n,k) = sum i^k

P[i] = sum(j^k , 0¡=j¡=i).

S(n,k) = t * $((-1)^{k+1-i}) * (n-i)^-1 * finv[i] * finv[k+1-i] * p[i]$
finv[i] = 1/(1*2...*i) e t = (n*(n-1)...*(n-k-1))
Dá pra fazer com interpolação também...

3.55 Pisano

k(m) = menor l tal que F[l] == 0 mod(m) F[l+1]==1 mod(m)
$k(a \cdot b) = lcm(k(a), k(b))$ se gcd(a,b)=1
$k(p^k)$ divide $p^{k-1} \cdot k(p)$
k(5)=20,k(2)=3,k(3)=8
Se $p > 5$:
k(p) divide (p-1) se p == +-1 mod 5
k(p) divide 2*(p+1) se p==+-2 mod 5

3.56 Diofantinas

ax + by = c
divide tudo pelo gcd(a,b); se c mod gcd(a,b)!=0, não tem solução
se não:
a' x + b' y = c' tem solução dada pelo algoritmo de euclides
a resposta do problema original é:
$(X_g * c/g, Y_g * c/g), comX_g eY_g achadoscomeuclides.$
OBS: passa abs(a) e abs(b) no euclides e depois inverter o sinal se era negativo.
Toda solução é na forma
x = x0 + k * b'
y = y0 - k * a'

3.57 Choromatic polynomial of a cycle

numero de modos de pintar um ciclo de tamanho n com K cores: (k-1)^n+$(-1)^n * (k-1)$
pode achar com expo tb se precisar...

3.58 Mersenne

: Primos de Mersenne $2^n - 1$
Lista de Ns que resultam nos primeiros 41 primos de Mersenne:
2; 3; 5; 7; 13; 17; 19; 31; 61; 89; 107; 127; 521; 607; 1.279; 2.203; 2.281; 3.217; 4.253; 4.423; 9.689; 9.941; 11.213; 19.937; 21.701; 23.209; 44.497; 86.243; 110.503; 132.049; 216.091; 756.839; 859.433; 1.257.787; 1.398.269; 2.976.221; 3.021.377; 6.972.593; 13.466.917; 20.996.011; 24.036.583;