HIT
CS&E

第六章　平摊分析

张炜
计算机科学与技术学院

HIT
CS&E

提纲

6.1 平摊分析原理

- 平摊分析的基本思想
- 平摊分析方法

生活给我们的启发

平常的日子
开销低

犒劳一下自己
开销适中

聚会
开销高

购物
开销高

生活是有预算的，人们总是这样安排自己的生活

- 平常日子占绝大多数
- 偶尔犒劳一下自己，然后回归平常的生活
- 大笔开销之后，会适当地节约

结果：生活中的日均花销总维持在适当水平

某段时间的生活费 ≈ 日均花销 × 天数

• Ch3的一个算法

Graham-Scan(*Q*)

/* 栈S从底到顶存储按逆时针方向排列的CH(Q)顶点 */

```
1. 求Q中y-坐标值最小的点p0;
2. 按照与p0极角(逆时针方向)大小排序Q中其余点，结果为<p1,p2, ...,pm>;
3. Push(p0, S); Push(p1, S); Push(p2, S);
4. FOR  i=3  TO  m  DO
5.      While  NextToTop(S),Top(S)和pi形成非左移动  Do
6.              Pop(S);
7.      Push(pi, S);
8. Rerurn S.
```

考察FOR循环的每次执行

- 如果5-6步被执行，代价较高
- 否则，代价很低

能否像日常生活的例子一样

- 分析操作的平摊代价
- 操作序列代价 = 操作个数×平摊代价

- 算法操作数据，数据结构管理数据
- 根据算法需求设计或选用数据结构
- 能否根据预算来设计数据结构
  - 确保频发操作代价低
  - 确保偶发操作代价高
  - 每个操作的平摊代价低
- 操作序列代价= 操作个数×平摊代价

本章目标

目标1：掌握平摊分析技术

- 能阅读并理解文献中的平摊分析过程和结果
- 能用它分析连续作用到某数据结构上的一系列操作的总代价
- 初步学习根据算法需求利用平摊分析设计数据结构

目标2：积累三种有用的数据结构，理解现有算法分析结果

- 动态表
- 斐波那契堆
- 并查集

目标3：理解高级程序设计语言中的抽象实现

- Malloc申请的数组与定长数组操作代价相当
- Set的抽象实现的性能

平摊分析

算法经常在某个数据结构上执行一系列操作
- 每个操作的代价各不相同（有高、有低）

问题
- 从平均效果看，每个操作的代价如何分析？
- 操作序列的时间复杂度如何分析？

平摊分析
- 将操作序列的总代价分摊到每个操作上
- 不涉及每个操作被执行的概率
- 不同于平均复杂度分析

平摊分析的基本思想

- 聚集方法（每个操作的代价）
  - 为每个操作都赋予相同的平摊代价
  - 确定*n*个操作的上界$T(n)$, 每个操作平摊$T(n)/n$
- 会计方法（整个操作序列的代价）
  - 不同类型操作赋予不同的平摊代价
  - 某些操作在数据结构的特殊对象上“预付”代价
- 势能方法（整个操作序列的代价）
  - 不同类型操作赋予不同的平摊代价
  - “预付”的代价作为整个数据结构的“能量”

6.2 聚集方法

- 聚集方法的原理
- 聚集方法的实例之一
- 聚集方法的实例之二

一目了然原理

日期	开销
5月7日	30元
5月8日	50元
5月9日	120元
5月10日	30元
5月11日	30元
…..	……

操作	开销
OP_1	C_1
OP_2	C_2
OP_3	C_3
OP_4	C_4
OP_5	C_5
…..	……

日均开销= Σ每日开销 ÷ 天数

平摊代价= $\Sigma \boldsymbol{C_i}$ ÷ 操作个数

聚集方法的原理

聚集方法的目的

- 分析平摊代价的上界

分析方法

- 分析操作序列中每个操作的代价上界c_i
- 求得操作序列的总代价的上界$T(n)=c_1+c_2+\ldots+c_n$
- 将$T(n)$平摊到每个操作上得到平摊代价$T(n)/n$

特点

- 每个操作获得相同的平摊代价
- 较准确地计算$T(n)$需要一定的技巧

聚集方法实例之一: 栈操作系列

- 普通栈操作及其时间代价
  - **Push(*S*, *x*)**: 将对象压*x*入栈*S*
  - **Pop(*S*)**： 弹出并返回*S*的顶端元素
  - 两个操作的运行时间都是$O(1)$
  - 可把每个操作的实际代价视为**1**
  - n个**Push**和**Pop**操作系列的总代价是n
  - n个操作的实际运行时间为$\theta(n)$

- 新的普通栈操作及其时间代价
  - 操作**Multipop(*S*, *k*):**

    去掉*S*的*k*个顶对象, 当|*S*|<*k*时弹出整个栈
  - 实现算法

    Multipop(*S*, *k*)
    1 While not STACK-EMPTY(*S*) and $k \neq 0$ Do
    2 Pop(*S*);
    3 $k \leftarrow k-1$.
  - **Multipop(*S*, *k*)**的实际代价 (设**Pop**的代价为**1**)
    - **Multipop**的代价为***min*(|*S*|, *k*)**

- 初始栈为空的n个栈操作序列的分析
  - n个栈操作序列由**Push**、**Pop**和**Multipop**组成
  - 粗略分析
    - 最坏情况下，每个操作都是**Multip**
    - 每个**Multipop**的代价最坏是$O(n)$
    - 操作系列的最坏代价为$T(n) = O(n^2)$
    - 平摊代价为$T(n)/n = O(n)$
  - 精细分析
    - 一个对象在每次被压入栈后至多被弹出一次
    - 在非空栈上调用**Pop**的次数(包括在**Multipop**内的调用)至多为**Push**执行的次数, 即至多为n
    - 最坏情况下操作序列的代价为$T(n) \leq 2n = O(n)$
    - 平摊代价$=T(n)/n=O(1)$

分析太粗糙！！！

n-1个push
1个multipop

聚集方法实例之二：二进计数器

- 问题定义：由 0 开始计数的k位二进计数器

  输入：k位二进制变量x，初始值为0

  输出：x+1 mod 2^k

  数据结构：

  A[0..k-1]作为计数器, 存储x

  x的最低位在A[0]中, 最高位在A[k-1]中

  $$x = \sum_{i=0}^{k-1} A[i] \cdot 2^i$$

- 计数器加1算法

输入：*A*[0..*k*-1]，存储二进制数*x*

输出：*A*[0..*k*-1]，存储二进制数*x*+1 *mod* 2^k

INCREMENT(*A*)

$i \leftarrow 0$

while $i<k$ **and** $A[i]=1$ **Do**

    $A[i] \leftarrow 0$;

    $i \leftarrow i+1$;

If $i<k$ **Then** $A[i] \leftarrow 1$

• 初始为零的计数器上n个**INCREMENT**操作分析

Counter Value N	A[7]	A[6]	A[5]	A[4]	A[3]	A[2]	A[1]	A[0]	每个操作 Cost
0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0	0	1	0	2
3	0	0	0	0	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	0	1	0	0	3
5	0	0	0	0	0	1	0	1	1
6	0	0	0	0	0	1	1	0	2
7	0	0	0	0	0	1	1	1	1
8	0	0	0	0	1	0	0	0	4
9	0	0	0	0	1	0	0	1	1
10	0	0	0	0	1	0	1	0	2
11	0	0	0	0	1	0	1	1	1
12	0	0	0	0	1	1	0	0	3
13	0	0	0	0	1	1	0	1	1
14	0	0	0	0	1	1	1	0	2
15	0	0	0	0	1	1	1	1	1
16	0	0	0	1	0	0	0	0	5

- 粗略分析
  - 每个Increment的时间代价最多$O(k)$
  - n个Increment序列的时间代价最多$O(kn)$
  - n个Increment平摊代价为$O(k)$
  - 例如上例中：$k*n=8*16=128$
- 精细分析

操作Cost＝O(发生改变的位数)

Counter Value N	A[7]	A[6]	A[5]	A[4]	A[3]	A[2]	A[1]	A[0]	Total Cost
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0	0	1	0	3
3	0	0	0	0	0	0	1	1	4
4	0	0	0	0	0	1	0	0	7
5	0	0	0	0	0	1	0	1	8
6	0	0	0	0	0	1	1	0	10
7	0	0	0	0	0	1	1	1	11
8	0	0	0	0	1	0	0	0	15
9	0	0	0	0	1	0	0	1	16
10	0	0	0	0	1	0	1	0	18
11	0	0	0	0	1	0	1	1	19
12	0	0	0	0	1	1	0	0	22
13	0	0	0	0	1	1	0	1	23
14	0	0	0	0	1	1	1	0	25
15	0	0	0	0	1	1	1	1	26
16	0	0	0	1	0	0	0	0	31

•精细分析

- $A[0]$每1次操作发生一次改变，总次数为n
- $A[1]$每2次操作发生一次改变，总次数为$n/2$
- $A[2]$每4次操作发生一次改变，总次数为$n/2^2$
- $A[3]$每8次操作发生一次改变，总次数为$n/2^3$
- 一般地
  - 对于i=0, 1, …., lg$n$, $A[i]$改变次数为$n/2^i$
  - 对于i>lg$n$, $A[i]$不发生改变
    (因为n个操作结果为n，仅涉及$A[0]$至$A[\lg n]$位）
- $T(n)= \sum_{0\leq i\leq \lg n} n/2^i < n \sum_{0\leq i\leq \infty} 1/2^i = 2n = O(n)$
- 每个Increment操作的平摊代价为$O(1)$

6.3 会计方法

- 会计方法的原理
- 会计方法的实例之一
- 会计方法的实例之二

一目了然知原理

预算：早餐5元
午餐10元
晚餐15元

日期	早餐	午餐	晚餐
5月7日	+1	+2	+3
5月8日	-2	-2	-2
5月9日	+0.5	+3	+2
5月10日	-0.5	-1	-1
5月11日	+1	+1	+1
…	…..	…..	…..

If 总结余≥0 **then**
总开销≤ (5+10+15)×天数

预算：第1类操作 α_1元
……
第k类操作 α_k元

操作	种类	实际代价	结余代价
OP_1	1	c_1	α_1-c_1
OP_2	3	c_2	α_3-c_2
OP_3	2	c_3	α_2-c_3
OP_4	k	c_4	α_k-c_4
OP_5	k-2	c_5	α_{k-2}-c_5
…	…..	…..	…..

If 总结余≥0 **then**
总开销≤ α_1×第1类操作个数
+…+
α_k×第k类操作个数

结余代价应该怎么管理呢？

Accounting方法的原理

- **Accounting方法**
  - 目的是分析n个操作序列的复杂性上界
  - 一个操作序列中有不同类型的操作
  - 不同类型的操作的操作代价各不相同
  - 于是我们为每种操作分配不同的平摊代价
    - 平摊代价可能比实际代价大，也可能比实际代价小

数据结构中存储的Credit在任何时候都必须非负，即$\Sigma_{1\le i\le n}\alpha_i - \Sigma_{1\le i\le n}c_i \ge 0$恒成立

支付实际代价

  - 平摊代价的选择规则：
    - 设c_i和α_i是操作i的实际代价和平摊代价
    - $\Sigma_{1\le i\le n}\alpha_i \ge \Sigma_{1\le i\le n}c_i$ 必须对于任意n个操作序列都成立

栈操作序列的分析

- 各栈操作的实际代价
  - **Cost(PUSH)=1**
  - **Cost(POP)=1**
  - **Cost(MULTIPOP)=*min*{*k*, *s*}**
- 各栈操作的平摊代价
  - **Cost(PUSH)=2**
    - 一个*1*用来支付**PUSH**的开销,
    - 另一个*1*存储在压入栈的元素上, 预支**POP**的开销
  - **Cost(POP)=0**
  - **Cost(MULTIPOP)=0**
- 平摊代价满足
  - $\Sigma_{1\leq i\leq n}\alpha_i - \Sigma_{1\leq i\leq n}c_i \geq 0$ 对于任意n个操作序列都成立
    - 因为在**n**个操作序列中, **POP**个数(包括**MULTIPOP**中的**POP**)不大于**PUSH**个数.
- n个栈操作序列的总平摊代价
  - $O(n)$

二进制计数器Increment操作序列分析

- **Increment**操作的平摊代价
  - 每次一位被置**1**时，付**2**美元
    - **1**美元用于置**1**的开销
    - **1**美元存储在该“**1**”位上，用于支付其被置**0**时的开销
    - 置**0**操作无需再付款
  - **Cost(Increment)=2**
- 平摊代价满足
  - $\Sigma_{1\leq i\leq n}\alpha_i \geq \Sigma_{1\leq i\leq n} c_i$ 对于任意n个操作序列都成立，因为从前面的分析可知$\Sigma_{1\leq i\leq n} c_i < 2n$
- n个**Increment**操作序列的总平摊代价
  - $O(n)$

6.4 势能方法

- 势能方法的原理
- 势能方法的实例之一
- 势能方法的实例之二

一目了然知原理

大家有没有觉得会计方法很麻烦？

预算：早餐5元　　午餐10元　　晚餐15元

- 一个月30天，在饭卡中存30×(5+10+15)=900元
- 月底的时候，如果饭卡中仍有余款，则总开销≤900

预算：第1类操作α_1元　　……　　第k类操作α_k元

- 给数据结构关联一个函数Φ用于管理结余代价
- 如果Op_i是第j类操作，且
  - 实际代价c_i低于α_j，则结余代价增长，Φ的函数值增长α_j-c_i
  - 实际代价c_i高于α_j，则结余代价减小，Φ的函数值减小$c_i-\alpha_j$
- 所有操作结束后，如果结余代价大于0

  总开销≤ α_1×第1类操作个数 +…+ α_k×第k类操作个数

Potential方法的原理

- **Potential**方法
  - 目的是分析**n**个操作系列的复杂性上界
  - 在会计方法中，如果操作的平摊代价比实际代价大，我们将余额与数据结构的数据对象相关联
  - **Potential**方法把余额与整个数据结构关联，所有的这样的余额之和，构成数据结构的势能
    - 如果操作的平摊代价大于操作的实际代价，势能增加
    - 如果操作的平摊代价小于操作的实际代价，要用数据结构的势能来支付实际代价，势能减少

- 数据结构势能的定义
  - 考虑在初始数据结构D_0上执行n个操作
  - 对于操作i
    - 操作i的实际代价为c_i
    - 操作i将数据结构D_{i-1}变为D_i
    - 数据结构D_i的势能是一个实数$\phi(D_i)$，ϕ是一个正函数
    - 操作i的平摊代价：$\alpha_i = c_i + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1})$
  - n个操作的总平摊代价（必须是实际代价的上界）

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} (c_i + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1}))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i + \phi(D_n) - \phi(D_0)$$

  - 关键是ϕ的定义
    - 保证$\phi(D_n) \geq \phi(D_0)$, 使总平摊代价是总实际代价的上界
    - 如果对于所有i, $\phi(D_i) \geq \phi(D_0)$，可以保证$\phi(D_n) \geq \phi(D_0)$
    - 实际可以定义$\phi(D_0) = 0$，$\phi(D_i) \geq 0$

栈操作序列的分析

- 栈的势能定义
  - $\phi(D_m)$定义为栈D_m中对象的个数，于是
    - $\phi(D_0)=0$，D_0是空栈
    - $\phi(D_i)\geq 0=\phi(D_0)$，因为栈中对象个数不会小于0
    - n个操作的总平摊代价是实际代价的上界
  - 栈操作的平摊代价（设栈D_{i-1}中具有s个对象）
    - PUSH: $\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})=1+(s+1)-s=2$
    - POP: $\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})=1+(s-1)-s=0$
    - MULTIPOP(S, k): 设$k'=min(k,s)$

      $\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})=k'+(s-k')-s=k'-k'=0$
  - n个栈操作序列的平摊代价是$O(n)$

二进制计数器操作序列分析

- 计数器的势能定义
  - $\phi(D_m)$定义为第m个操作后计数器中1的个数b_m
    - $\phi(D_0)=0$，D_0中1的个数为0
    - $\phi(D_i)\geq 0=\phi(D_0)$, 因为计数器中$1$的个数不会小于0
    - 于是，n个操作的总平摊代价是实际代价的上界
  - INCREMENT操作的平摊代价
    - 第i个INCREMENT操作将 t_i个1置0, 实际代价为t_i+1
    - 计算操作i的平摊代价$\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})$
      - If $t_i=k$, 操作i resets所有k位, 所以$b_{i-1}=t_i=k$
      - If $b_i>0$, 则$b_i=b_{i-1}-t_i+1$
      - 于是 $b_i\leq b_{i-1}-t_i+1$

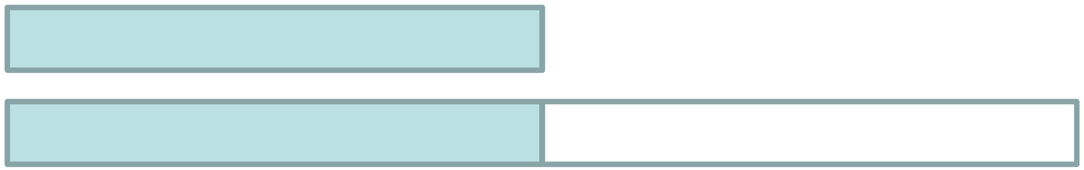
        $\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})=b_i-b_{i-1}\leq b_{i-1}-t_i+1-b_{i-1}=1-t_i$
      - 平摊代价$\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})\leq(t_i+1)+(1-t_i)=2$
  - n个操作序列的总平摊代价是$O(n)$

6.5 动态表性能平摊分析

- 动态表的概念
- 动态表的扩张与收缩
- 仅含扩张操作的动态表平摊分析
- 一般的动态表平摊分析
- 目标
  - ✓ 深入理解平摊分析的三种方法
  - ✓ 运用平摊分析分析算法复杂性
  - ✓ 深入理解一种语言现象

编程初体验时的困惑

- 数组很受青睐
  - ✓ 优点：(1)结构简单；(2)操作方便、快捷…
  - ✓ 动态数据
    - size = ….. //获取数据元素个数
    - Array = malloc(size*sizeof(Object))
    - Array就可以像数组一项操作了
  - ✓ 动态申请的空间仍然不够用
    - Array = realloc(Array, newSzie*sizeof(Object))



    - 问题：大量的元素复制是否会严重影响算法的性能？
- 本小节尝试利用平摊分析技术回答上面的问题

动态表—基本概念

- 动态表支持的操作
  - ✓ **TABLE-INSERT:**将某一元素插入表中
  - ✓ **TABLE-DELETE:**将一个元素从表中删除
- 数据结构:用一个(一组)数组来实现动态表
- 非空表T的装载因子$\alpha(T)= T$存储的对象数/表大小
  - ✓ 空表的大小为0，装载因子为1
  - ✓ 如果动态表的装载因子以一个常数为下界，则表中未使用的空间就始终不会超过整个空间的一个常数部分

动态表的表示

设*T*表示一个动态表:

- *table*[*T*]是一个指向表示表的存储块的指针
- *num*[*T*]包含了表中的项数
- *size*[*T*]是*T*的大小
- 开始时，*num*[*T*]=*size*[*T*]=0

C语言的一种实现:

```
Typedef   struct  DynamicTable
{
    int         size;
    int         num;
    object *  table;
} DynamicTable;
```

动态表的扩张

- 插入一个数组元素时,完成的操作包括
  - 分配一个包含比原表更多的槽的新表
  - 再将原表中的所有数据项复制到新表中去

- 常用的启发式技术是分配一个比原表大一倍的新表,
  - 只对表执行插入操作,则表的装载因子总是至少为1/2
  - 浪费掉的空间就始终不会超过表总空间的一半

扩张算法

```
算法：TABLE—INSERT(T, x)                    /*复杂的插入操作*/
    If  size[T]=0 Then                      /*开销为常数*/
        获取一个大小为1的表 table[T];
        size[T]←1;
    If  num[T]=size[T] Then                 /*开销取决于size[T]*/
        获取一个大小为 2×size[T]的新表new-table;
        将 table[T]中元素插入new-table;     /*简单插入操作*/
        释放 table[T];
        table[T]←new-table;
        size[T]←2×size[T];
    将 x插入table[T];
    num[T]←num[T]+1
```

初始为空的表上n次插入操作的代价分析(1)

聚集分析-粗略分析

- 考察第i次操作的代价C_i
  - 如果i=1, C_i=1;
  - 如果$num[T]<size[T]$, C_i=1;
  - 如果$num[T]=size[T]$, $C_i=i$;
- 共有n次操作
  - 最坏情况下,每次进行n次操作,总的代价上界为n^2
- 这个界不精确
  - n次TABLE—INSERT操作并不常常包括扩张表的代价
  - 仅当i-1为2的整数幂时第i次操作才会引起一次表地扩张

聚集分析-精细分析

- 第i次操作的代价C_i
  - 如果$i-1=2^m$, $C_i=i$; 否则C_i=1
- n次TABLE—INSERT操作的总代价为 $\sum_{i=1}^{n} c_i \le n + \sum_{j=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^j < n + 2n = 3n$

★每一操作的平摊代价为$3n/n=3$

初始为空的表上n次插入操作的代价分析(2)

会计方法

- 每次执行TABLE—INSERT平摊代价为1（尝试）

第1次元素插入 $\boxed{{}^{0}x_1}$

第2次元素插入,扩张 $\boxed{{}^{-1}x_1}\boxed{{}^{0}x_2}$ 总余额<0

平摊代价须>1

HIT
CS&E

初始为空的表上n次插入操作的代价分析(2)

会计方法

- 每次执行**TABLE—INSERT**平摊代价为**2**（再尝试）

第**1**次元素插入

$^{1}x_1$	

第**2**次元素插入,扩张

$^{0}x_1$	$^{1}x_2$

第**3**次元素插入,扩张

$^{-1}x_1$	$^{0}x_2$	$^{1}x_3$	

第**4**次元素插入

$^{-1}x_1$	$^{0}x_2$	$^{1}x_3$	$^{1}x_4$

第**5**次元素插入扩张

$^{-2}x_1$	$^{-1}x_2$	$^{0}x_3$	$^{0}x_4$	$^{1}x_5$			

总余额<**0**

平摊代价须>**2**

初始为空的表上n次插入操作的代价分析(2)

会计方法

- 每次执行TABLE—INSERT平摊代价为3

第1次元素插入	$^{2}x_1$							
第2次元素插入,扩张	$^{1}x_1$	$^{2}x_2$						
第3次元素插入,扩张	$^{0}x_1$	$^{1}x_2$	$^{2}x_3$					
第4次元素插入	$^{0}x_1$	$^{1}x_2$	$^{2}x_3$	$^{2}x_4$				
一般情况下，刚扩张完	$^{0}x_1$	$^{0}x_2$	$^{0}x_3$	$^{1}x_4$				
	$^{1}x_1$	$^{0}x_2$	$^{0}x_3$	$^{0}x_4$	$^{1}x_5$			
再发生扩张时，会怎样？	$^{1}x_1$	$^{1}x_2$	$^{1}x_3$	$^{1}x_4$	$^{1}x_5$	$^{1}x_7$	$^{1}x_6$	$^{1}x_8$

总余额≥0恒成立，根据会计方法原理，总实际代价≤总平摊代价

长度为n的操作序列，总实际代价≤3n

初始为空的表上*n*次插入操作的代价分析(2)

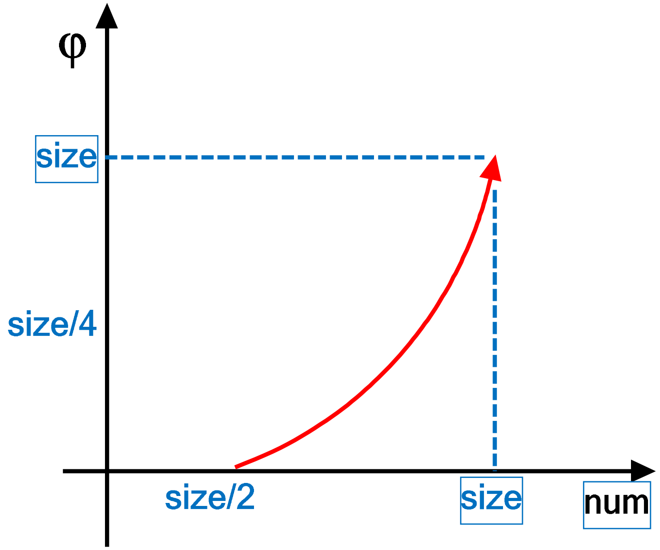
会计方法

- 每次执行**TABLE—INSERT**平摊代价为**3**
  - ✓**1**支付第**11**步中的基本插入操作的实际代价
  - ✓**1**作为自身的存款
  - ✓**1**存入表中第一个没有存款的数据上
- 当发生表的扩张时，数据的复制的代价由数据上的存款来支付
- 任何时候，总余额非负
- 初始为空的表上n次**TABLE-INSERT**操作的平摊代价总和为**3*n***

初始为空的表上*n*次插入操作的代价分析(3)

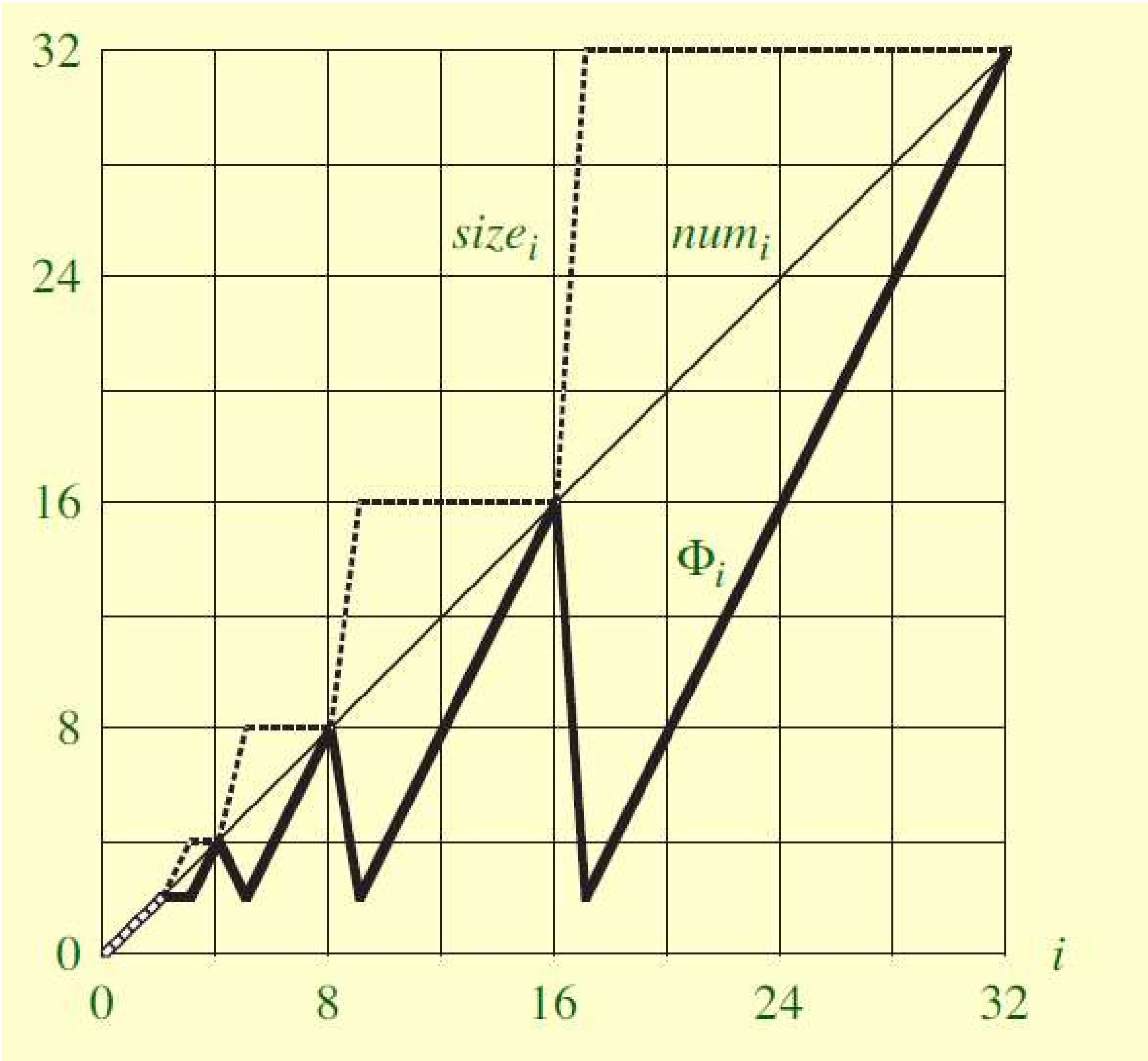
势能法分析

?势怎么定义才能使得表满发生扩张时势能能支付扩张的代价



- 如果势能函数满足
  - 刚扩充完, $\phi(T)=0$
  - 表满时 $\phi(T)=size(T)$
- $\phi(T)=2*num[T]-size[T]$
  - $num[T]\geq size[T]/2$， $\phi(T)\geq 0$
  - *n*次TABLE－INSERT操作的总的平摊代价是总的实际代价的一个上界
- 第i次操作的平摊代价
  - 如果发生扩张, $\alpha_i=3$
  - 如果未发生扩张, $\alpha_i=3$
- 初始为空的表上*n*次插入操作的代价的上界为3*n*

势能法



动态表的扩张与收缩

- 表的扩张
- 表的收缩
  - 表具有一定的丰满度
  - 表的操作序列的复杂度是线性的
- 表的收缩策略
  - 表的装载因子小于**1/2**时，收缩表为原表的一半
  - ***n***＝**2*k***,考察下面的一个长度为***n***的操作序列：
    - 前***n*/2**个操作是插入，后跟**I D D I I D D I I…**

前**n/2**个插入操作得到满表	x_1	x_2	...	$x_{n/2}$					
I	x_1	x_2	...	$x_{n/2}$	$x_{n/2+1}$		...		***n*/2+1**个操作
D	x_1	x_2	...	$x_{n/2}$			...		**1**个操作
D	x_1	x_2	...						***n*/2-1**个操作
I									

HIT
CS&E

动态表的扩张与收缩

- 表的扩张
- 表的收缩
  - 表具有一定的丰满度
  - 表的操作序列的复杂度是线性的
- 表的收缩策略
  - 表的装载因子小于1/2时，收缩表为原表的一半
  - $n=2^k$,考察下面的一个长度为n的操作序列：
    - 前n/2个操作是插入，后跟I D D I I D D I I…

后n/2个操作中每组IDDI

共有n/8个IDDI分组
每组需要代价≥n

后n/2个操作总代价≥n^2/8

x_1	x_2	…	$x_{n/2}$

x_1	x_2	…	$x_{n/2}$	$x_{n/2+1}$		…	

n/2+1个操作

x_1	x_2	…	$x_{n/2}$			…	

1个操作

x_1	x_2	…	

n/2-1个操作

动态表的扩张与收缩

- 表的扩张
- 表的收缩
  - 表具有一定的丰满度
  - 表的操作序列的复杂度是线性的
- 表的收缩策略
  - 表的装载因子小于**1/2**时，收缩表为原表的一半
  - $n=2^k$,考察下面的一个长度为n的操作序列:
    - 前n/2个操作是插入，后跟**I D D I I D D I I…**
    - 每次扩张和收缩的代价为**O(*n*)**，共有**O(*n*)**扩张或收缩
    - 总代价为$O(n^2)$，而每一次操作的平摊代价为$O(n)$--每个操作的平摊代价太高
- 如果改进的收缩策略呢？

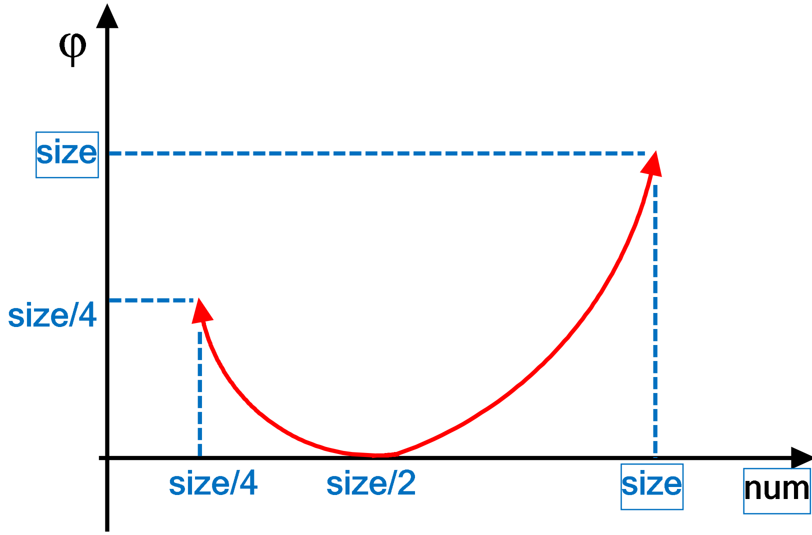
动态表的扩张与收缩

- 表的扩张
- 表的收缩
  - 表具有一定的丰满度
  - 表的操作序列的复杂度是线性的
- 表的收缩策略
  - 表的装载因子小于1/2时，收缩表为原表的一半
  - $n=2^k$,考察下面的一个长度为n的操作序列:
    - 前$n/2$个操作是插入，后跟I D D I I D D I I…
    - 每次扩张和收缩的代价为O(n)，共有O(n)扩张或收缩
    - 总代价为$O(n^2)$，而每一次操作的平摊代价为$O(n)$--每个操作的平摊代价太高
- 改进的收缩策略(允许装载因子低于1/2)
  - 满表中插入数据项时，将表扩大一倍
  - 删除数据项引起表不足1/4满时，将表缩小为原表的一半
  - 扩张和收缩过程都使得表的装载因子变为1/2
  - 表的装载因子的下界是1/4

动态表上*n*次(插入、删除)操作的代价分析

势能函数的定义

- 操作序列过程,势能总是非负的
  - 保证一列操作的总平摊代价即为其实际代价的一个上界
- 表的扩张和收缩过程要消耗大量的势
- 势能函数应满足
  - ***num*(*T*)=*size*(*T*)/2**时，势最小
  - 当***num*(*T*)**减小时，势增加直到收缩
  - 当***num*(*T*)**增加时，势增加直到扩充



- 势能函数特征的细化
  - 当装载因子为**1/2**时，势为**0**
  - 装载因子为**1**时，有***num*[*T*]=*size*[*T*]**，即$\phi(T)=num[T]$。这样当因插入一项而引起一次扩张时，就可用势来支付其代价
  - 当装载因子为**1/4**时，***size*[*T*]=4·*num*[*T*]**。即$\phi(T)=num[T]$。因而当删除某项引起一次收缩时就可用势来支付其代价

$$\Phi(T)=\begin{cases} 2\cdot num[T]-size[T] & \alpha(T)\ge 1/2 \\ size[T]/2-num[T] & \alpha(T)<1/2 \end{cases}$$

n 个操作的代价分析

- 第i次操作的平摊代价: $\alpha_i = c_i + \phi(T_i) - \phi(T_i\text{-}1)$
  - i次操作是TABLE—INSERT ($num_i = num_i + 1$)
  - 若 $\alpha(T_i) \geq 1/2$, $\alpha_i = 3$

$$\Phi(T) = \begin{cases} 2 \cdot num[T] - size[T] & \alpha(T) \geq 1/2 \\ size[T]/2 - num[T] & \alpha(T) < 1/2 \end{cases}$$

  - 若 $\alpha(T_i) < 1/2$, 未扩张
    - $\alpha_i = c_i + \phi_i - \phi_{i-1} = 1 + (size_i/2 - num_i) - (size_{i-1}/2 - num_{i-1}) = 0$
  - 若 $\alpha(T_{i-1}) < 1/2$, $\alpha(T_i) \geq 1/2$: 未扩张
    - $\alpha_i = c_i + \phi_i - \phi_{i-1} = 1 + (2*num_i - size_i) - (size_{i-1}/2 - num_{i-1})$

$$= 1 + (2*(num_{i-1} + 1) - size_{i-1}) - (size_{i-1}/2 - num_{i-1})$$

$$= 3*num_{i-1} - 3/2\, size_{i-1} + 3$$

$$= 3*\alpha(T_{i-1})*size_{i-1} - 3/2\, size_{i-1} + 3$$

$$< 3/2 * size_{i-1} - 3/2\, size_{i-1} + 3 = 3$$

n 个操作的代价分析

- 第i次操作的平摊代价: $\alpha_i = c_i + \phi(T_i) - \phi(T_i - 1)$
  - i次操作是 TABLE—DELETE ($num_i = num_i - 1$)
  - 若 $\alpha(T_{i-1}) < 1/2$,未收缩

$$\Phi(T) = \begin{cases} 2 \cdot num[T] - size[T] & \alpha(T) \geq 1/2 \\ size[T]/2 - num[T] & \alpha(T) < 1/2 \end{cases}$$

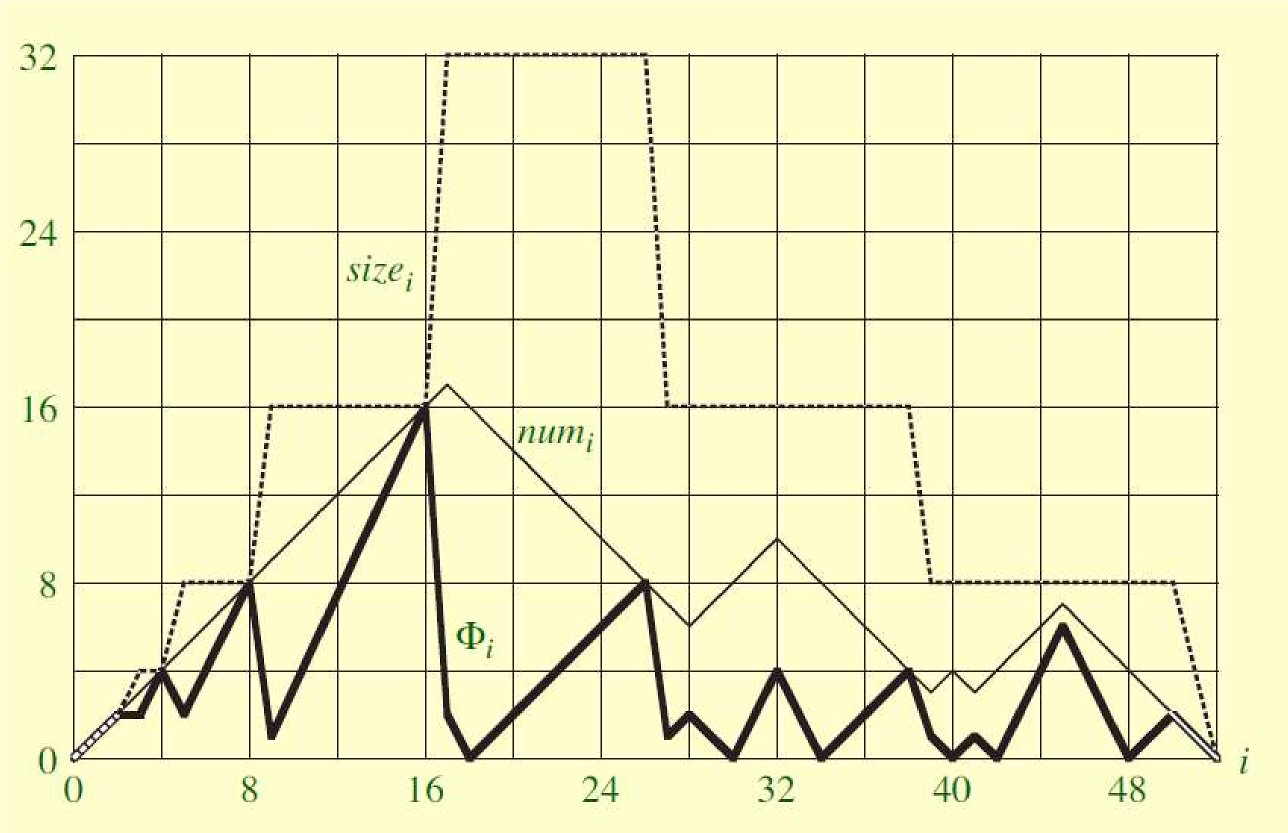
    - $\alpha_i = c_i + \phi_i - \phi_{i-1} = 1 + (size_i/2 - num_i) - (size_{i-1}/2 - num_{i-1})$
    - $= 1 + (size_i/2 - num_i) - (size_{i-1}/2 - num_i - 1) = 2$
  - 若 $\alpha(T_{i-1}) < 1/2$, 收缩
    - $c_i = num_i + 1,\ size_i/2 = size_{i-1}/4 = num_{i-1} = num_i + 1$
    - $\alpha_i = c_i + \phi_i - \phi_{i-1} = num_i + 1 + (size_i/2 - num_i) - (size_{i-1}/2 - num_{i-1})$

      $= num_i + 1 + ((num_i + 1) - num_i) - (2*(num_i + 1) - (num_i + 1)) = 1$
  - 若 $\alpha(T_{i-1}) \geq 1/2$,未收缩

Cost Analyze of *n* Operations

- **Potential function**

$$\Phi(T)=\begin{cases}2\cdot num[T]-size[T] & \alpha(T)\ge 1/2\\ size[T]/2-num[T] & \alpha(T)<1/2\end{cases}$$



平摊代价的计算

- 第i次操作的平摊代价：$\alpha_i = c_i + \phi(T_i) - \phi(T_i - 1)$
  - 第i次操作是**TABLE—INSERT**：未扩张 $\alpha_i \le 3$
  - 第i次操作是**TABLE—INSERT**：扩张 $\alpha_i \le 3$
  - 第i次操作是**TABLE—DELETE**：未收缩 $\alpha_i \le 3$
  - 第i次操作是**TABLE—DELETE**：收缩 $\alpha_i \le 3$
- 作用于一动态表上的n个操作的实际时间为$O(n)$

6.6 斐波那契堆性能平摊分析

- 斐波那契堆及其基本操作
- 应用平摊分析得出斐波那契堆的操作代价
- 运用平摊分析进行算法设计的尝试
- 目标
  - ✓ 深入理解势能方法
  - ✓ 运用平摊分析分析算法复杂性
  - ✓ 积累一种有用的数据结构

HIT
CS&E

堆的性能比较

操作	链表	二叉堆	二项堆	斐波那契堆
make-heap	*1*	*1*	*1*	1
is-empty	*1*	*1*	*1*	1
insert	*1*	*log n*	*log n*	1
delete-min	*n*	*log n*	*log n*	*log n*
decrease-key	*n*	*log n*	*log n*	1
delete	*n*	*log n*	*log n*	*log n*
union	*1*	*n*	*log n*	1
find-min	*n*	*1*	*log n*	1

n -堆中存储的元素个数

平摊分析

定理. 从初始为空的斐波那契堆开始，任意执行由a_1个插入，a_2个删除，a_3个键值减小操作构成的长度为n的操作序列，其时间复杂度$O(a_1 + a_2 \log n + a_3)$.

HIT
CS&E

堆的性能比较

操作	链表	二叉堆	二项堆	斐波那契堆
make-heap	*1*	*1*	*1*	**1**
is-empty	*1*	*1*	*1*	**1**
insert	*1*	***log n***	***log n***	**1**
delete-min	***n***	***log n***	***log n***	***log n***
decrease-key	***n***	***log n***	***log n***	**1**
delete	***n***	***log n***	***log n***	***log n***
union	*1*	***n***	***log n***	**1**
find-min	***n***	*1*	***log n***	**1**

n -堆中存储的元素个数　　　　平摊分析

插入，删除不可能均在***O*(1)**时间内完成. 为什么？

斐波那契堆的历史渊源

斐波那契堆的提出. **[Fredman and Tarjan, 1986]**

- 巧妙的数据结构和分析
- 提出动机: 改进 **Dijkstra's**算法的性能
- **Dijkstra**算法执行:
  - $|V|$次插入堆元素操作
  - $|V|$次抽取堆顶元素操作
  - $|E|$次减小键值操作
  - 总时间复杂度为$O(|E| \log |V|)$
- 改进后时间复杂度为 $O(|E| + |V| \log |V|)$

斐波那契堆的最新研究成果

1.**Strict fibonacci heaps**， Symposium on the Theory of Computing， pp 1177-1184, 2012

2.**Violation Heaps: A Better Substitute for Fibonacci Heaps,** *Data Structures and Algorithms, 2008*

斐波那契堆的过去和现状

- 斐波那契堆的提出. [Fredman and Tarjan, 1986]
  - 巧妙的数据结构和分析
  - 提出动机: 改进 **Dijkstra's**算法的性能
  - **Dijkstra**算法执行:
    - $|V|$次插入堆元素操作
    - $|V|$次抽取堆顶元素操作
    - $|E|$次减小键值操作
    - 总时间复杂度为$O(|E| \log |V|)$
  - 改进后时间复杂度为 $O(|E| + |V| \log |V|)$
- 斐波那契堆的最新研究成果

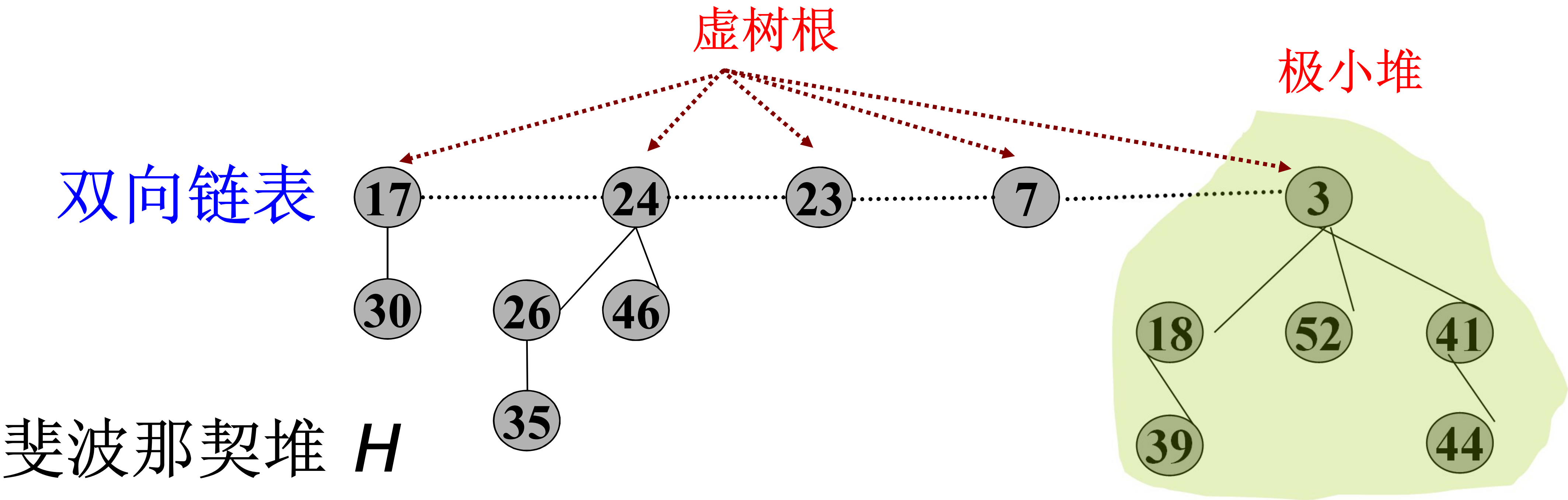
1.Strict fibonacci heaps， Symposium on the Theory of Computing， pp 1177-1184, 2012

2.Violation Heaps: A Better Substitute for Fibonacci Heaps, *Data Structures and Algorithms, 2008*

斐波那契堆的结构(1)

斐波那契堆：

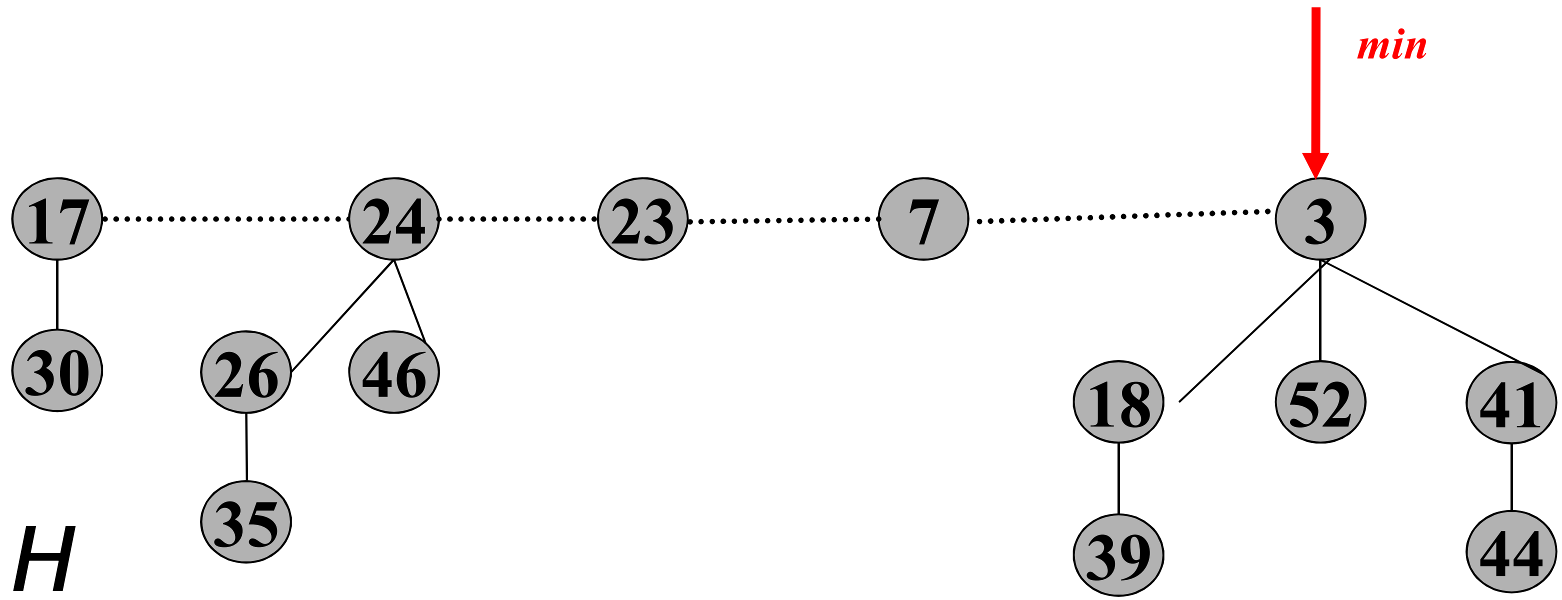
- 一系列树，每棵树均是一个极小堆
  - 任意结点的键值不超过其孩子结点的键值
- 一个指针，指向最小元素
- 一些标记顶点



斐波那契堆的结构(2)

斐波那契堆：

- 一系列树，每棵树均是一个极小堆
- 一个指针，指向最小元素
  - 从堆中查找最小元素(**Find_min**操作)的开销为***O*(1)**
- 一些标记顶点

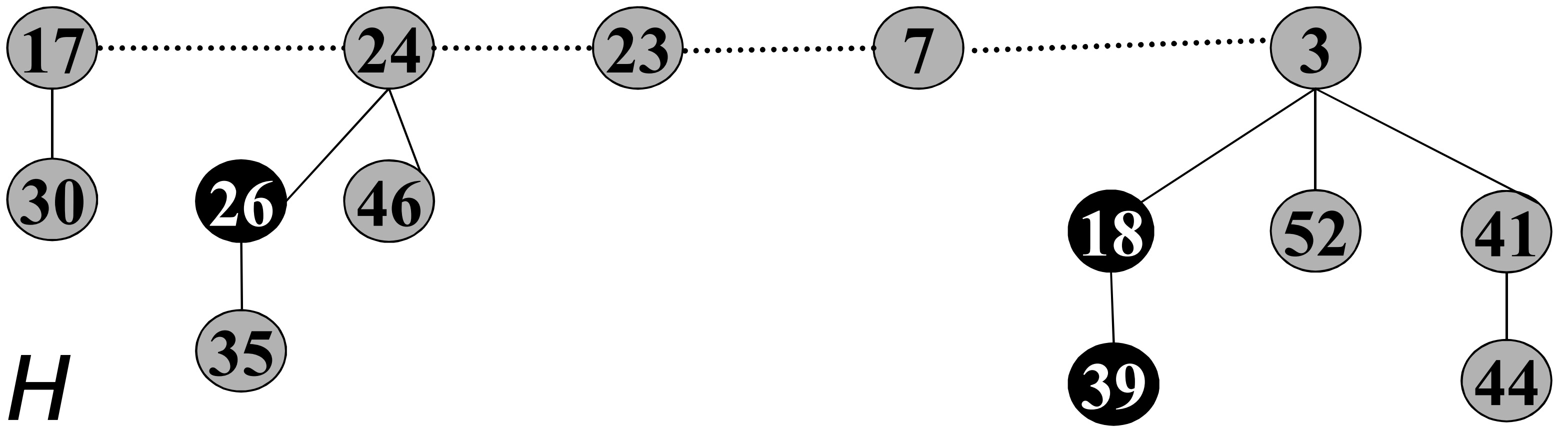


斐波那契堆 *H*

斐波那契堆的结构(3)

斐波那契堆：

- 一系列树，每棵树均是一个极小堆
- 一个指针，指向最小元素
- 一些标记顶点
  - 用于保持堆的“扁平结构”
  - 标记的具体含义是：*x*被标记，如果它以前是树根，但堆操作过程中变成其他结点的孩子且失去过孩子



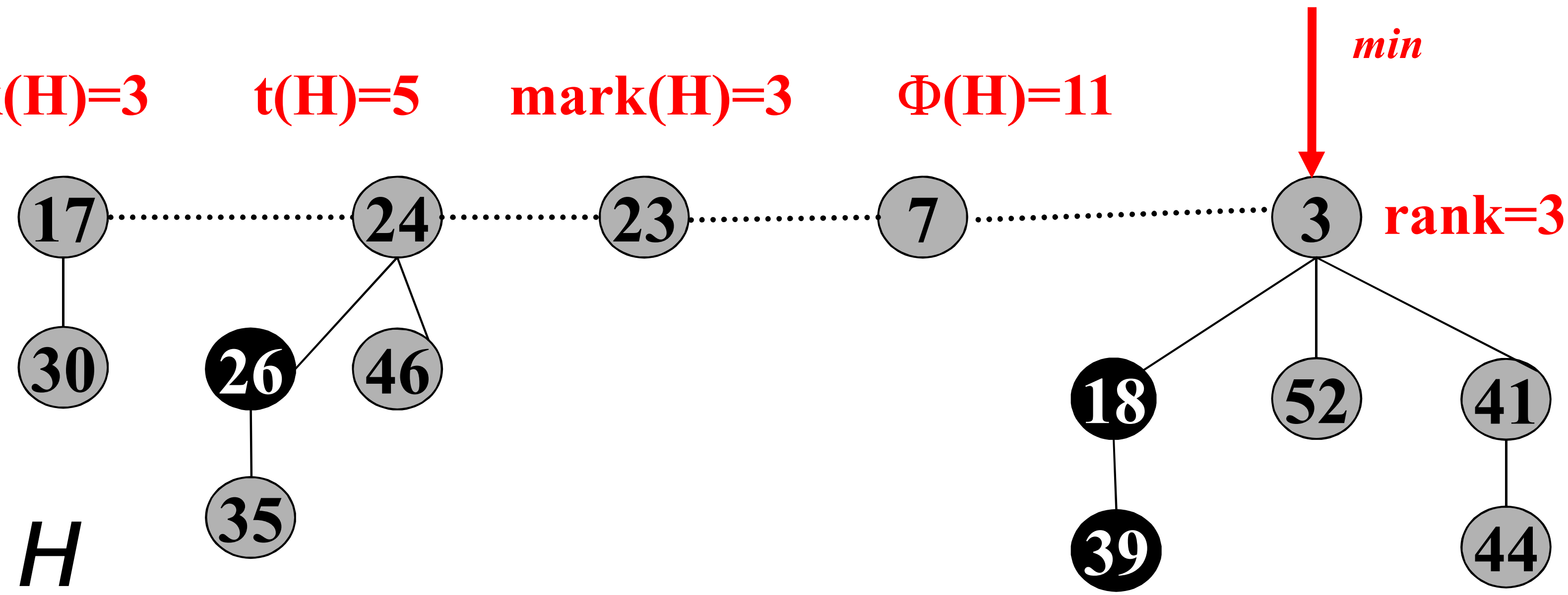
斐波那契堆 *H*

斐波那契堆的结构(4)

斐波那契堆记号：

- n ：堆H中数据元素的个数
- $rank(x)$ ：堆中结点x的孩子数
- $rank(H)$ ：堆H的所有结点中的最大孩子数
- $t(H)$ ：堆H中树的棵数
- $mark(H)$ ：堆H中被标记顶点的个数
- $\Phi(H)=t(H)+2\cdot mark(H)$：势能函数

n=14　rank(H)=3　t(H)=5　mark(H)=3　Φ(H)=11

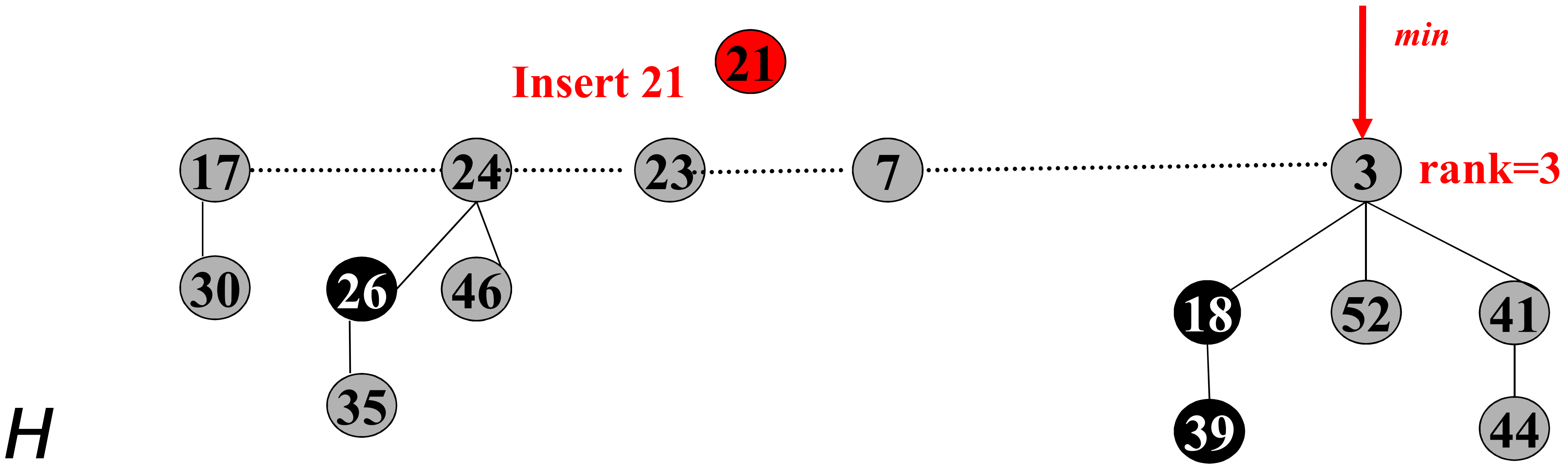


斐波那契堆 H

插入操作Insert

插入操作的过程：

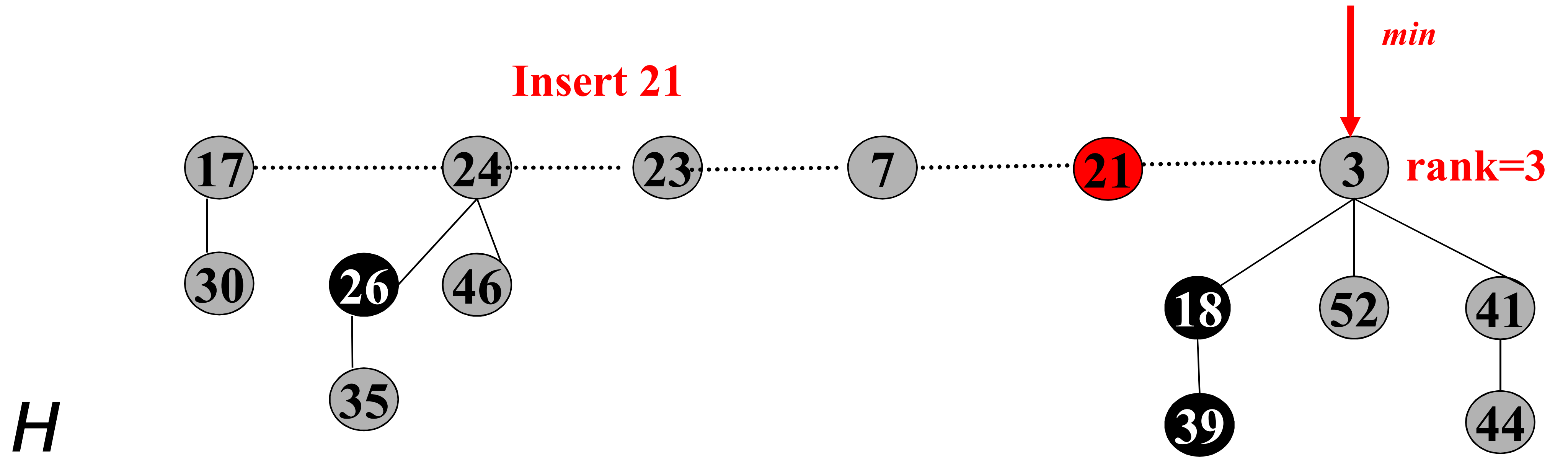
- 以新结点为根，创建一棵新树
- 将新的树插入树根双向链表
- 如有必要，更新最小元素指针



插入操作Insert

插入操作的过程：

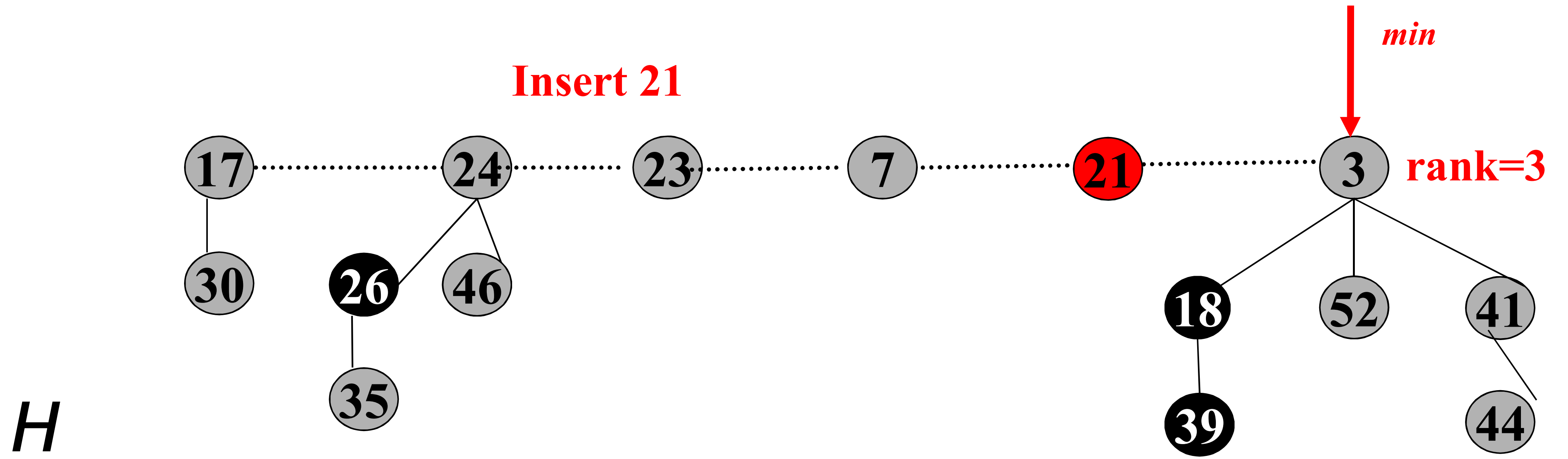
- 以新结点为根，创建一棵新树
- 将新的树插入树根双向链表
- 如有必要，更新最小元素指针



插入操作Insert分析

插入操作的代价分析： （势能函数$\Phi(H)=t(H)+2\cdot mark(H)$）

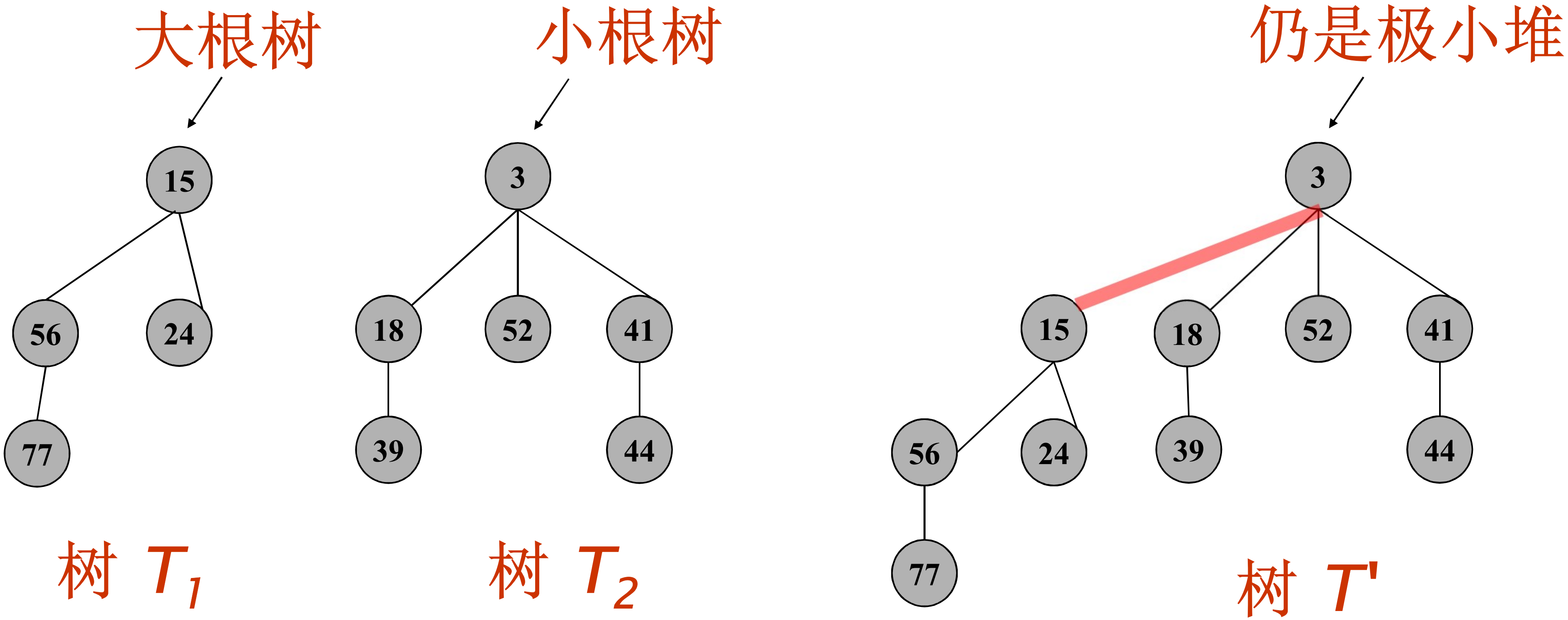
- 实际开销**O(1)**
- 平摊代价**O(1)**
  - 操作完成后，$t(H)$增大1，但mark(H)不变



HIT
CS&E

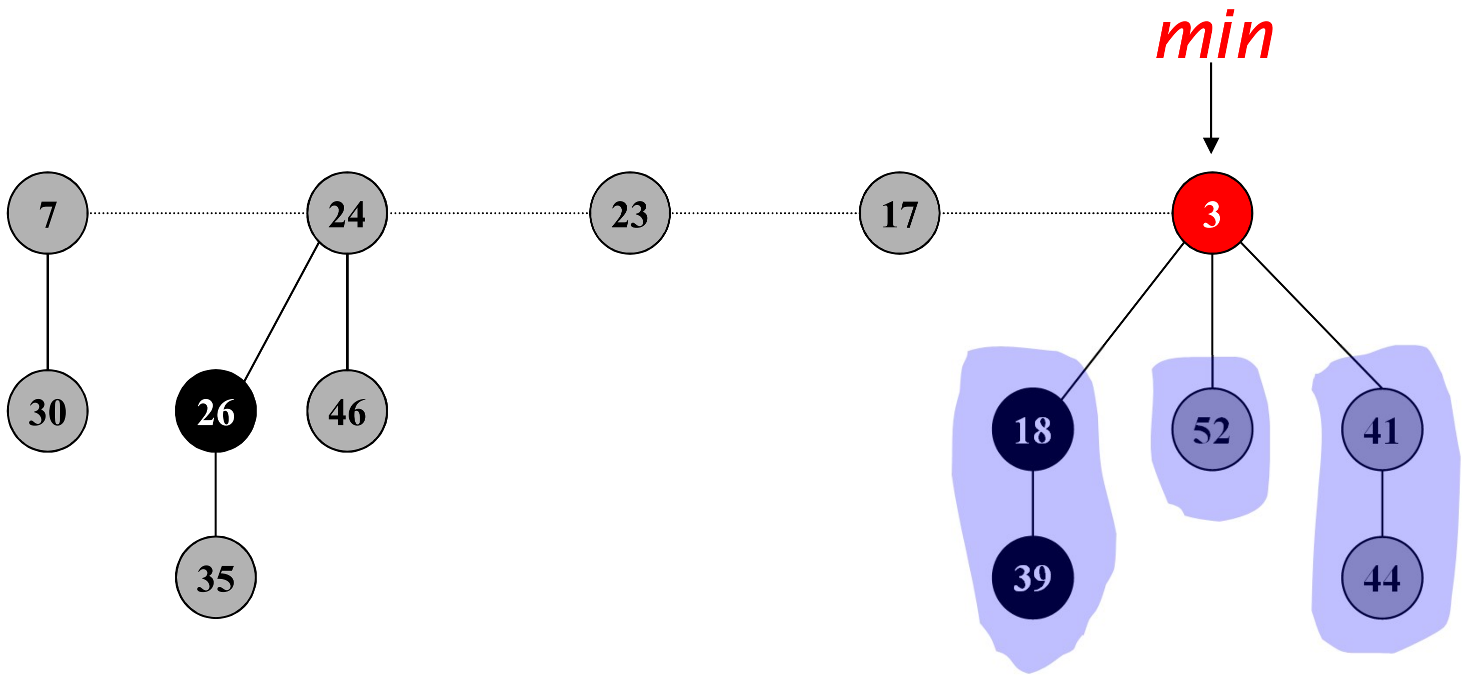
删除堆顶元素Delete_min(1)

- 链接调整操作
  - 将大根树作为小根树的子树，链接在小根树的根下
  - **Delete_min**操作中调用的子操作
  - 实际开销为$O(1)$



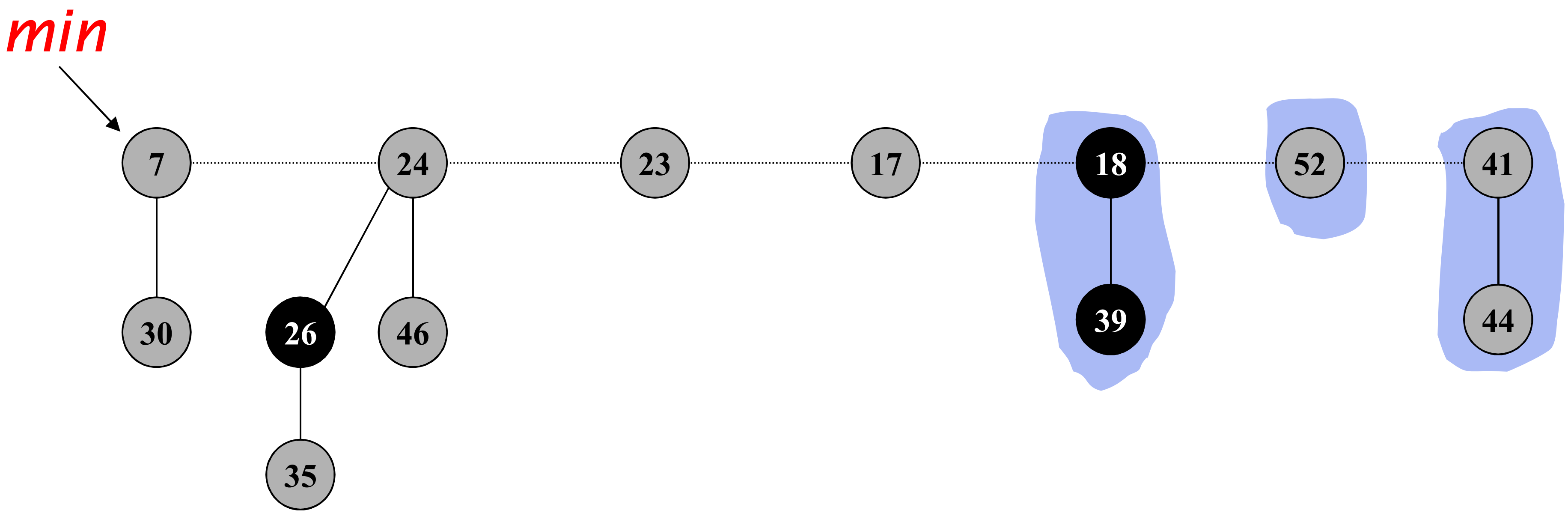
删除堆顶元素Delete_min(2)

- **Delete_min操作过程**
  - 删除最小元素；将其所有孩子链入双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank

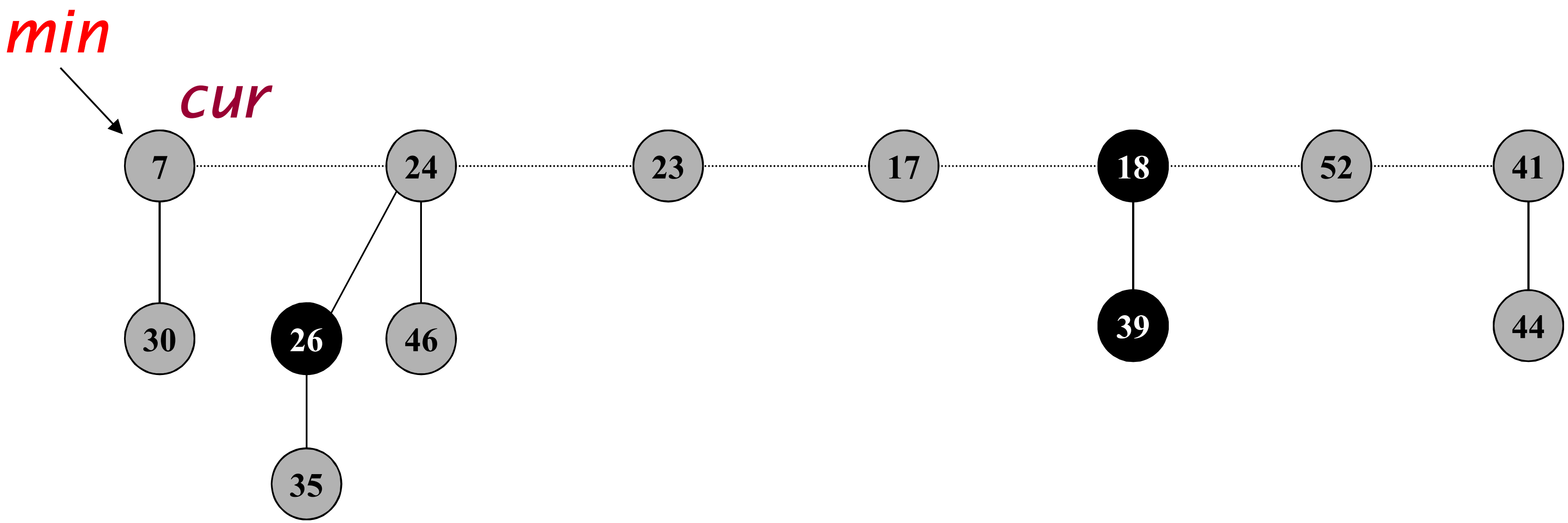


删除堆顶元素Delete_min(3)

- **Delete_min操作过程**
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
    - 实际开销 $O(t(H)+rank(x))$
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank

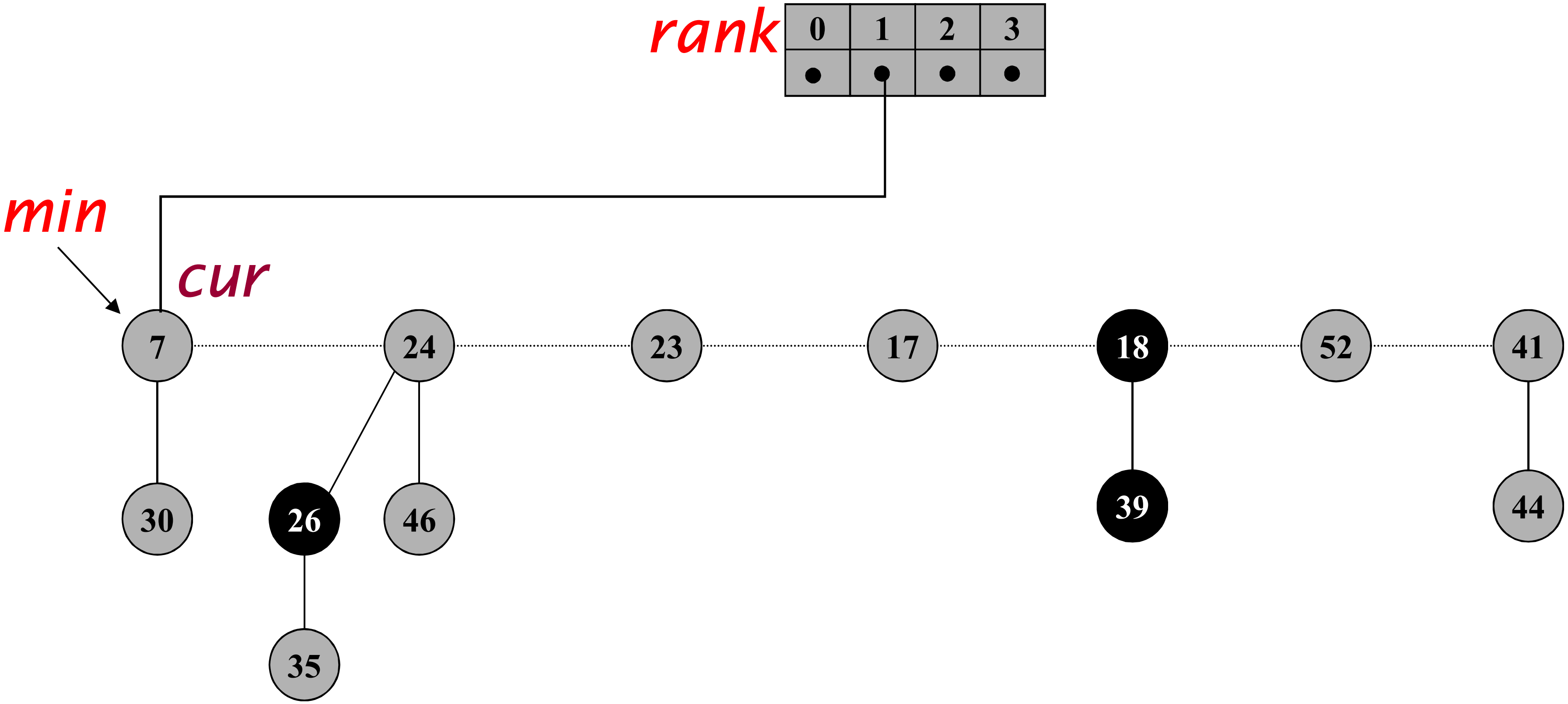


- **Delete_min**操作过程
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同**rank**



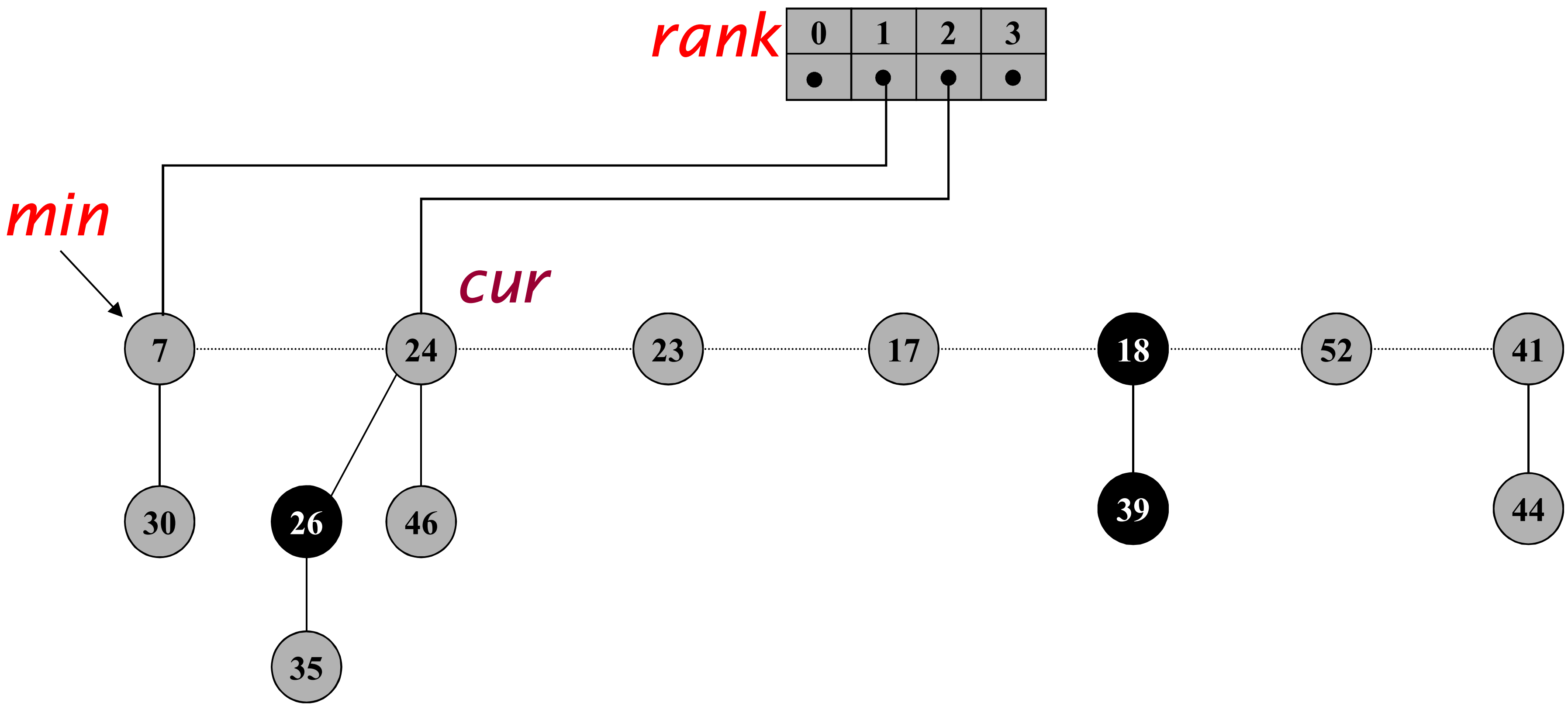
删除堆顶元素Delete_min(5)

- **Delete_min**操作过程
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同**rank**



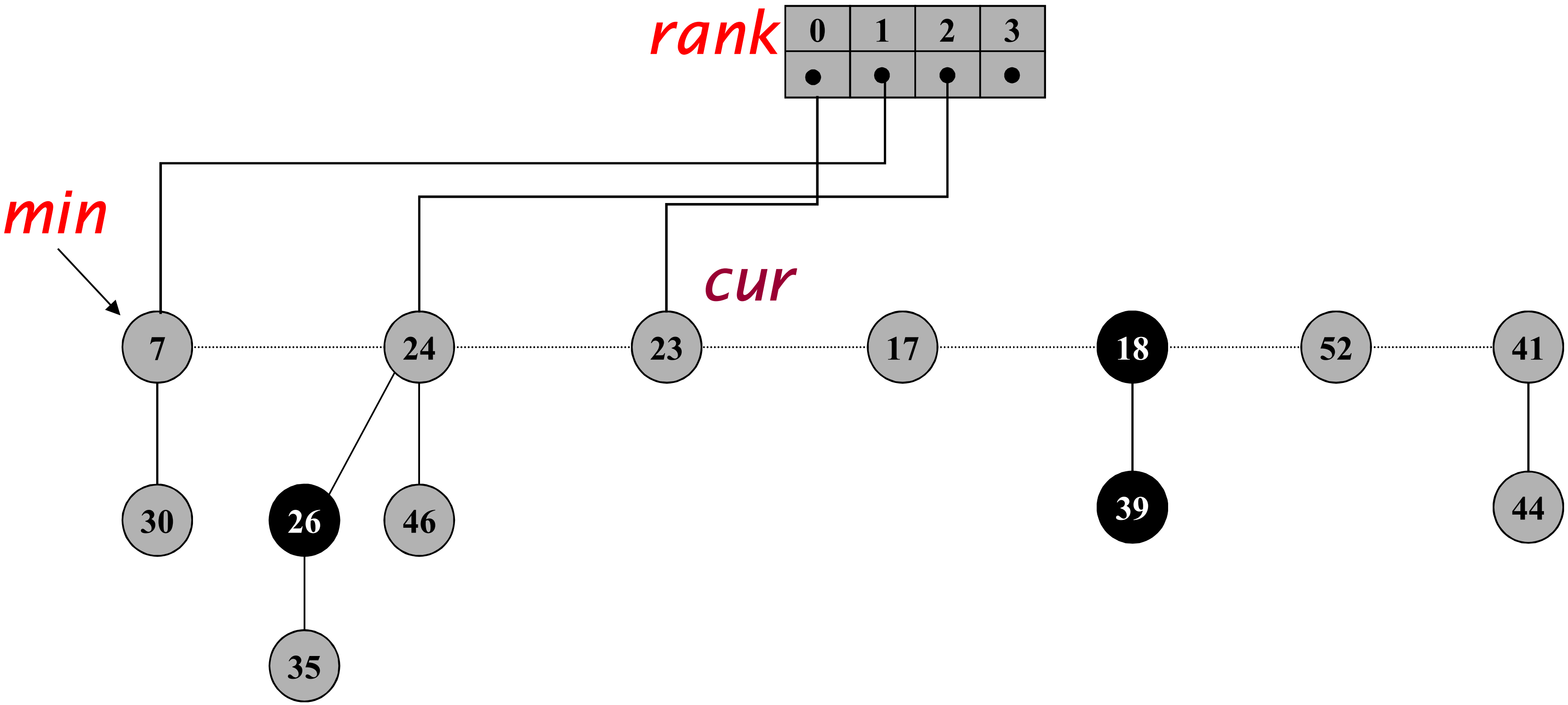
删除堆顶元素Delete_min(5)

- **Delete_min操作过程**
  - 删除最小元素；将其所有孩子链加双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同**rank**



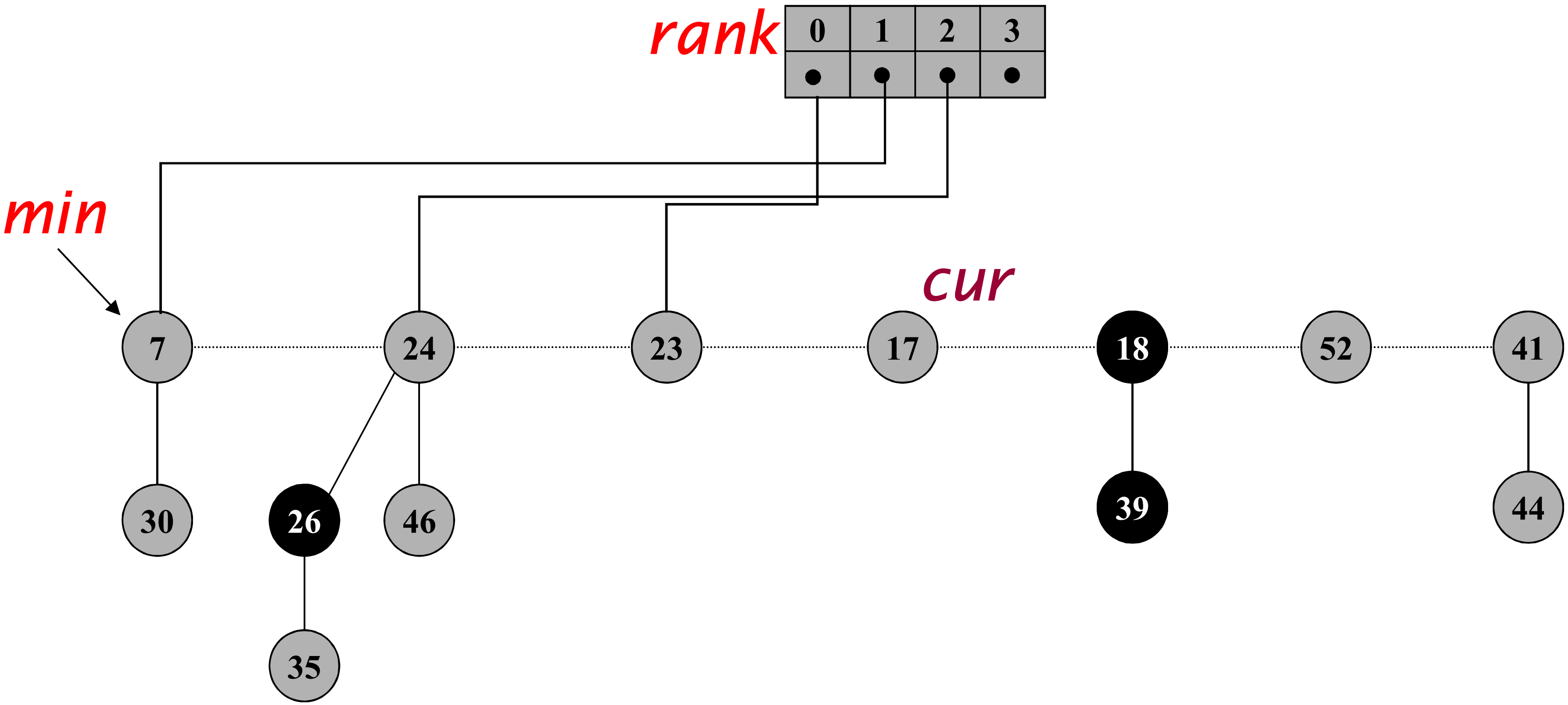
删除堆顶元素Delete_min(5)

- **Delete_min**操作过程
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同**rank**



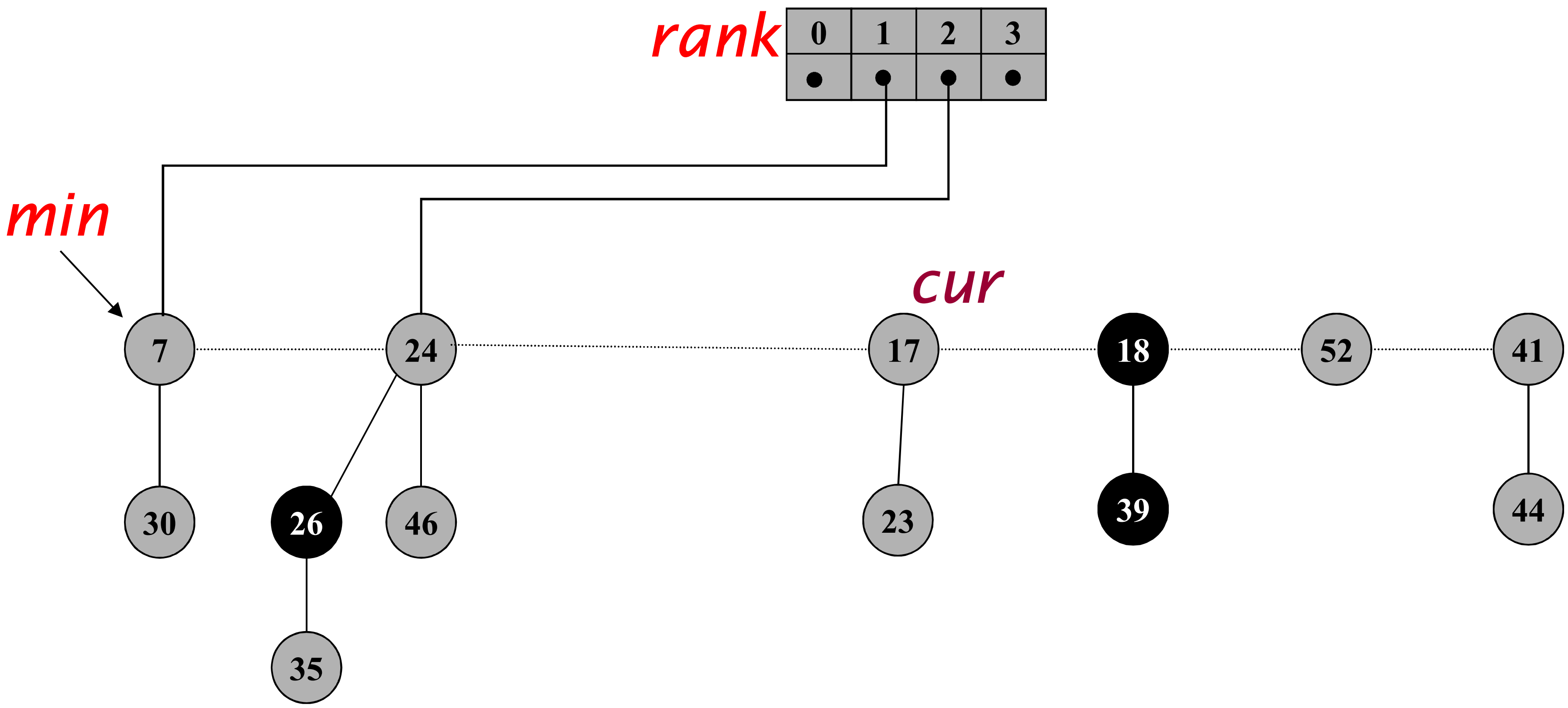
删除堆顶元素Delete_min(5)

- **Delete_min**操作过程
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同**rank**



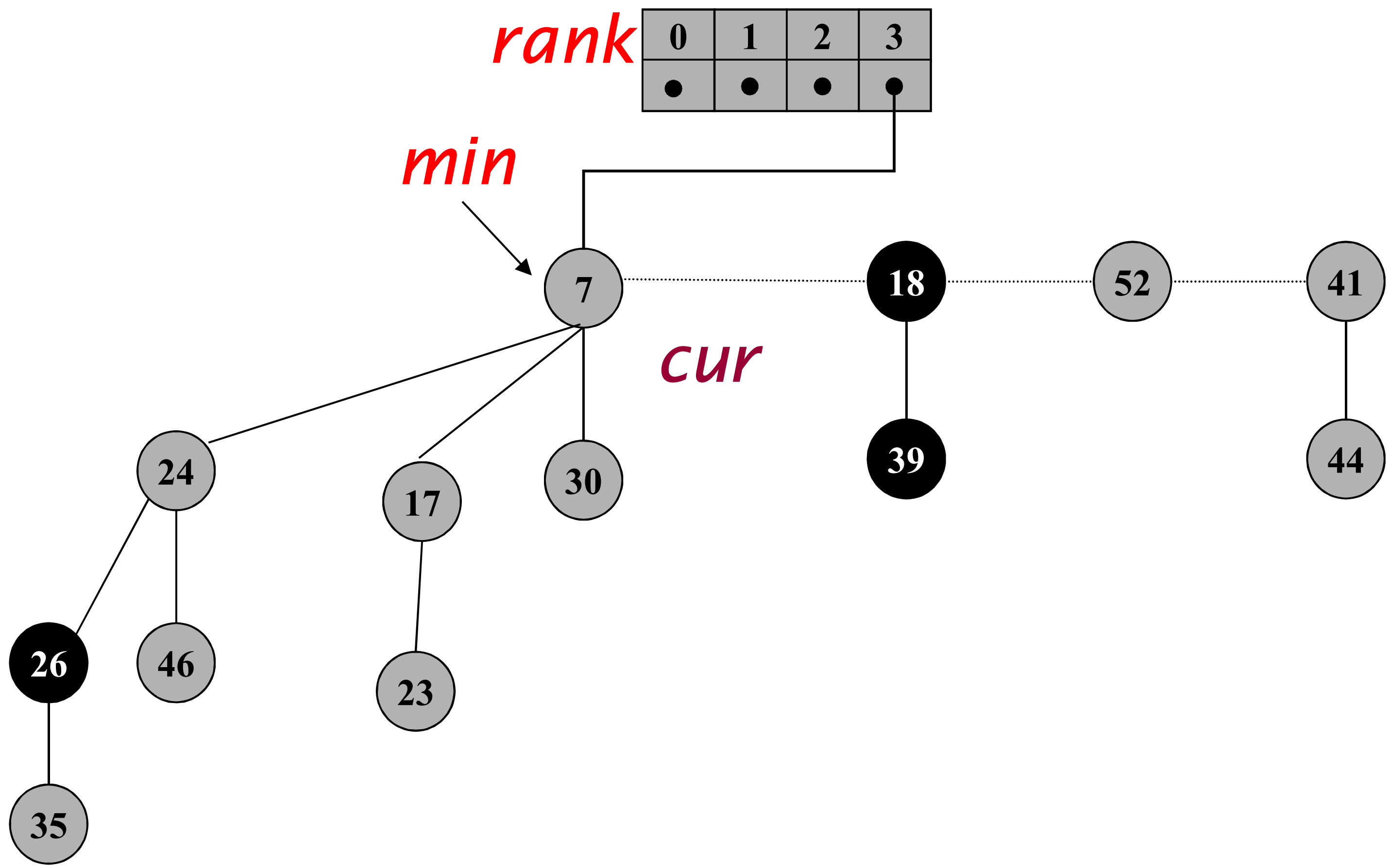
删除堆顶元素Delete_min(5)

- **Delete_min操作过程**
  - 删除最小元素；将其所有孩子链加双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同**rank**



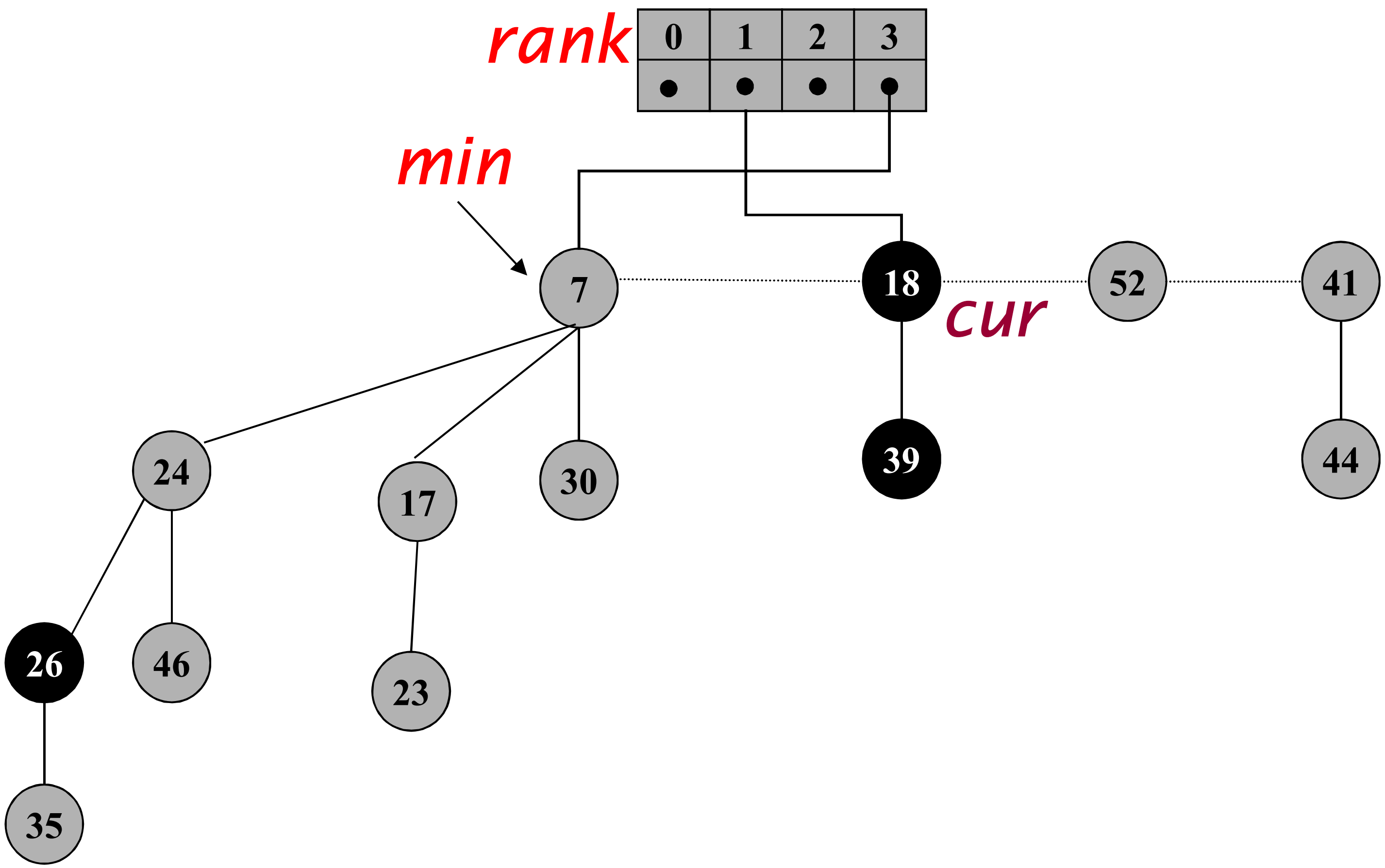
删除堆顶元素Delete_min(5)

- **Delete_min**操作过程
  - 删除最小元素；将其所有孩子链加双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同**rank**



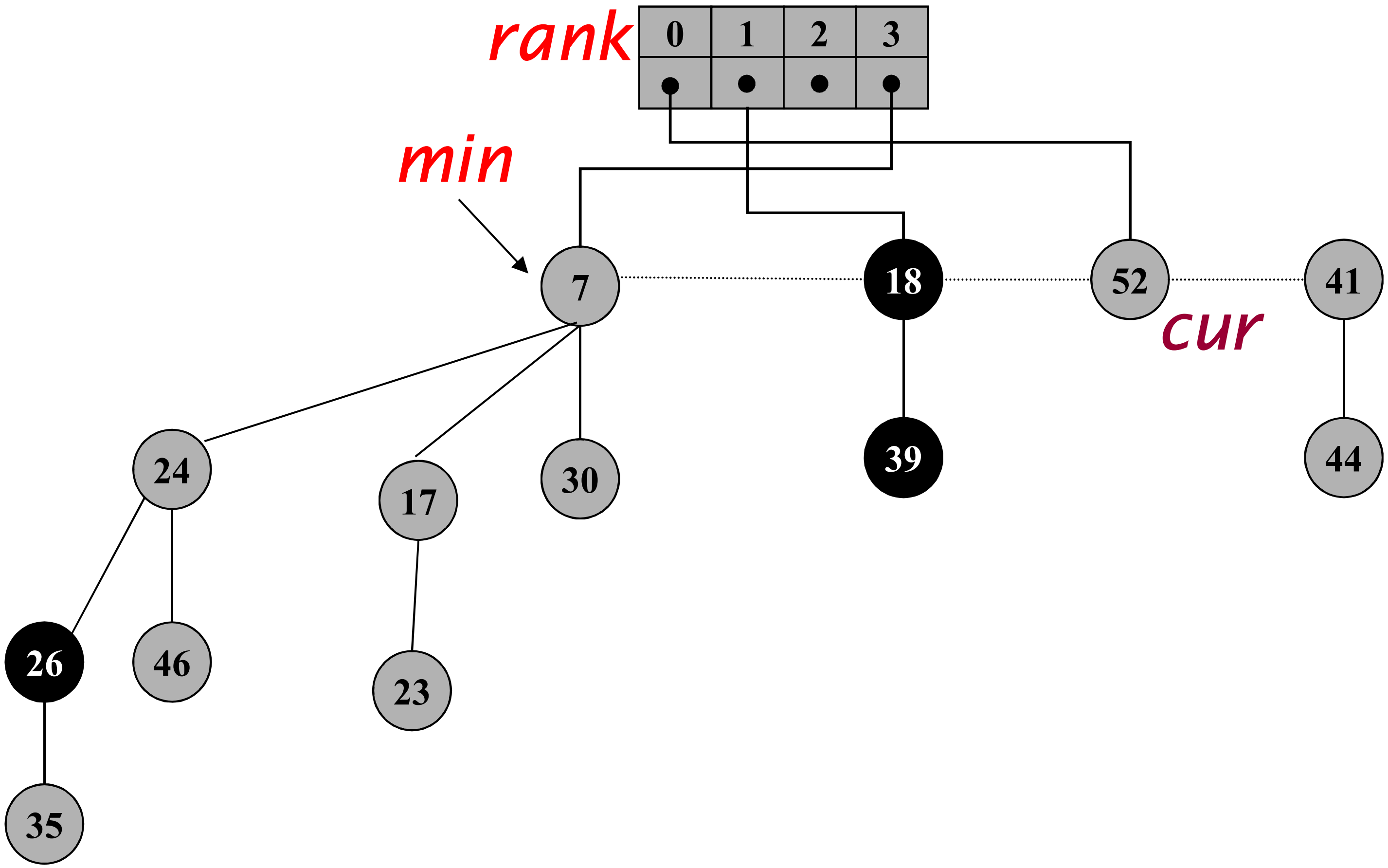
删除堆顶元素Delete_min(5)

- **Delete_min操作过程**
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



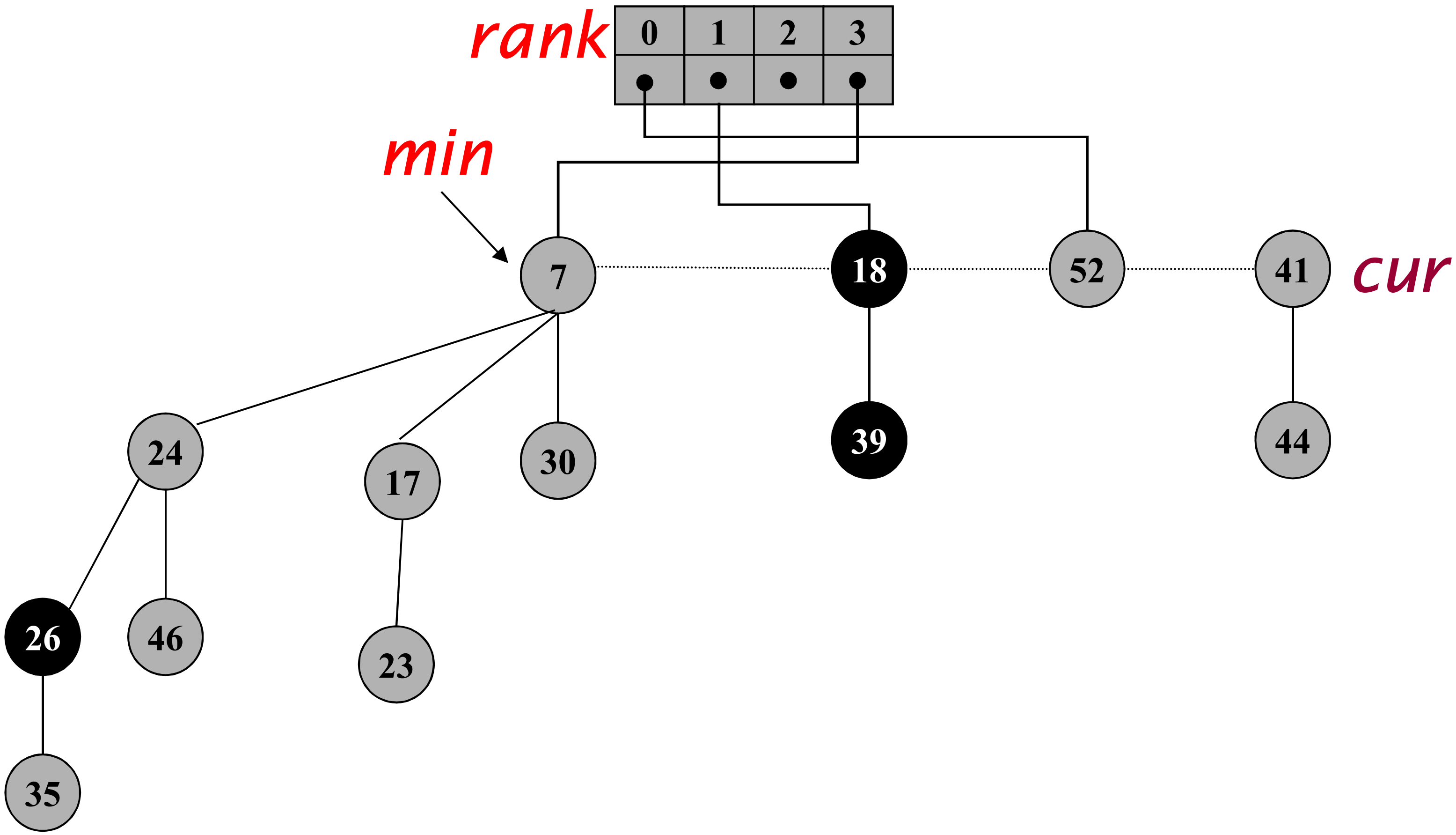
删除堆顶元素Delete_min(5)

- **Delete_min**操作过程
  - 删除最小元素；将其所有孩子链加双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同**rank**



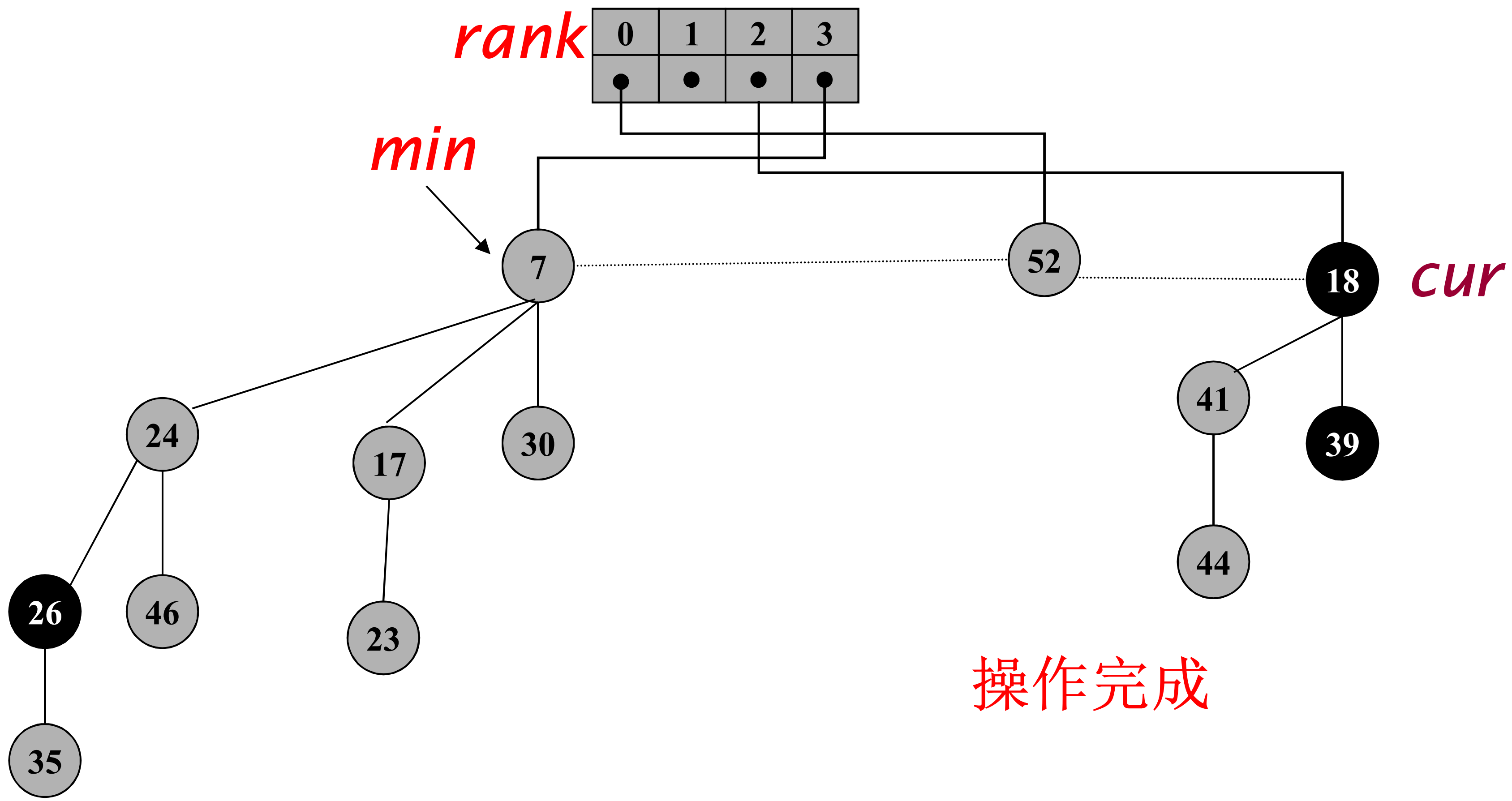
删除堆顶元素Delete_min(5)

- **Delete_min**操作过程
  - 删除最小元素；将其所有孩子链加双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同**rank**



删除堆顶元素Delete_min(5)

- **Delete_min操作过程**
  - 删除最小元素；将其所有孩子链加双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同**rank**



删除堆顶元素Delete_min的分析

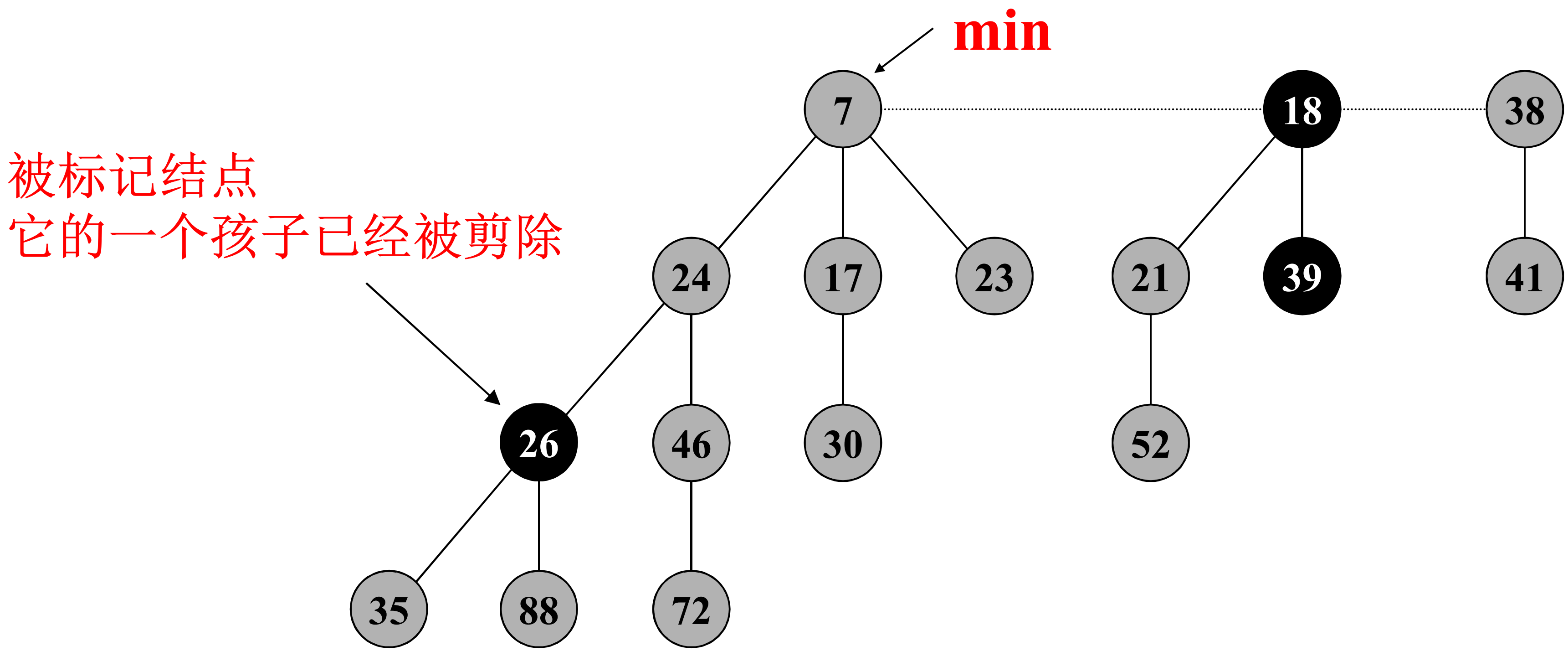
删除操作的代价分析：（势能函数$\Phi(H)=t(H)+2\cdot mark(H)$）

- 实际开销$O(rank(H)) + O(t(H))$
  - $O(rank(H))$ 时间内将最小元素结点的孩子插入双向链表
  - $O(rank(H)) + O(t(H))$ 时间内更新最小元素指针
  - $O(rank(H)) + O(t(H))$ 维护双向链表
- 平摊代价$O(rank(H))$
  - 操作完成后的堆记为H',操作前的堆记为H
  - $t(H') \leq rank(H) + 1$,因为H'中没有两个树具有相同$rank$
  - $\Delta\Phi(H) \leq rank(H) + 1 - t(H)$
- *Delete_min*操作的平摊代价？
  - 这个代价很好，因为
  - 如果只有插入和删除操作，则结果即为二项堆
  - 这意味着$rank(H) \leq lg\ n$
  - 减小键值操作也将确保$rank(H) \leq lg\ n$

键值减小操作Decrease key

直观上，键值减小操作作用于结点x，进行

- 若减小键值后，堆性质仍成立，则仅需减小键值
- 否则, 将x子树剪切下来插入双向链表，标记其父结点
- 为了保持堆的“扁平结构”，一旦剪除某个孩子的第二个孩子结点，则将该结点剪切下来插入双向链表（如果必要，需要去除该结点上的标记）

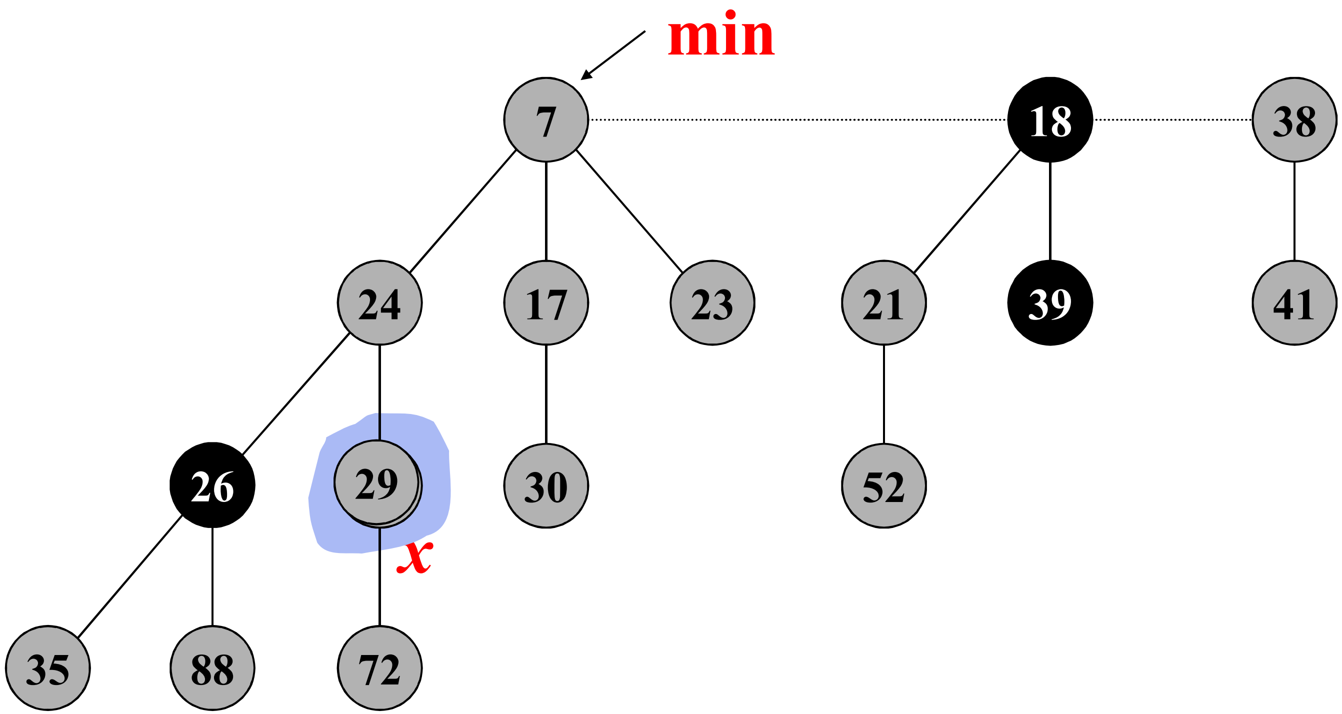


键值减小操作Decrease_key(2)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从46减小为29）

情形1：减小键值后堆性质仍成立

- 减小键值
- 如有必要，更新最小元素指针

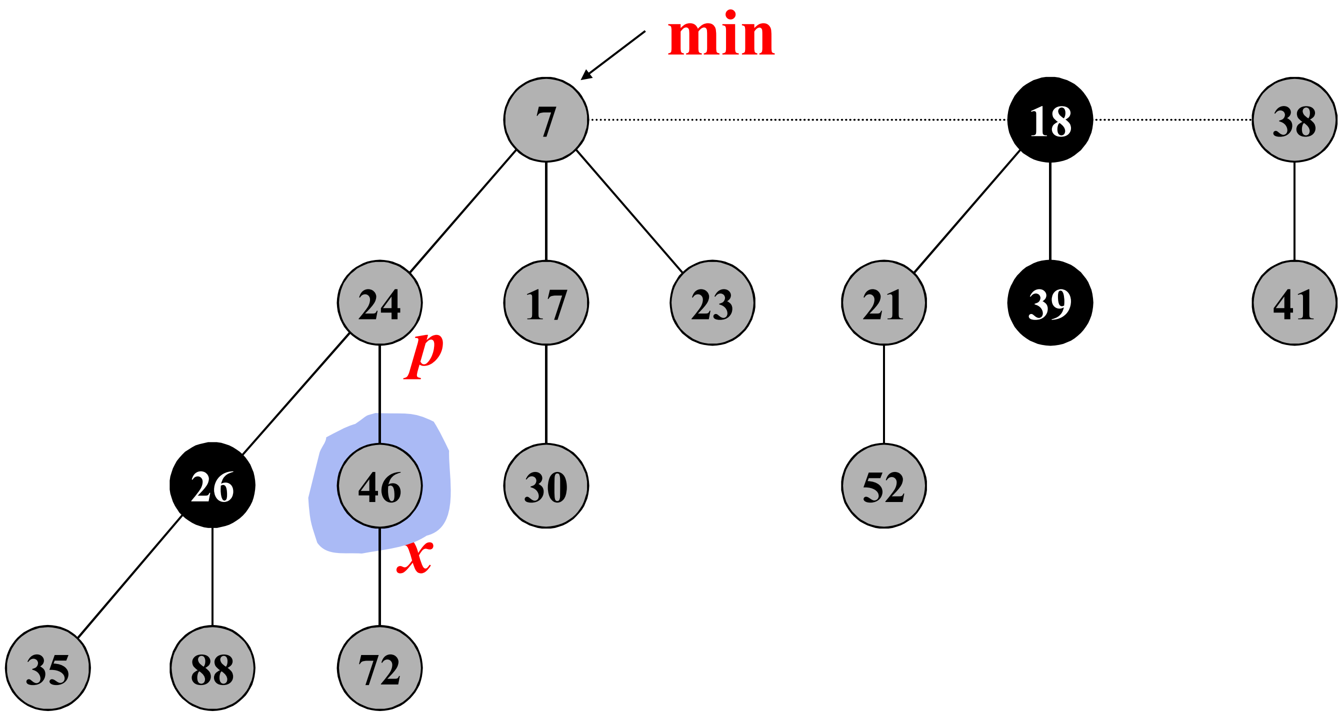


键值减小操作Decrease_key(3)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从46减小为15）

情形2a：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）

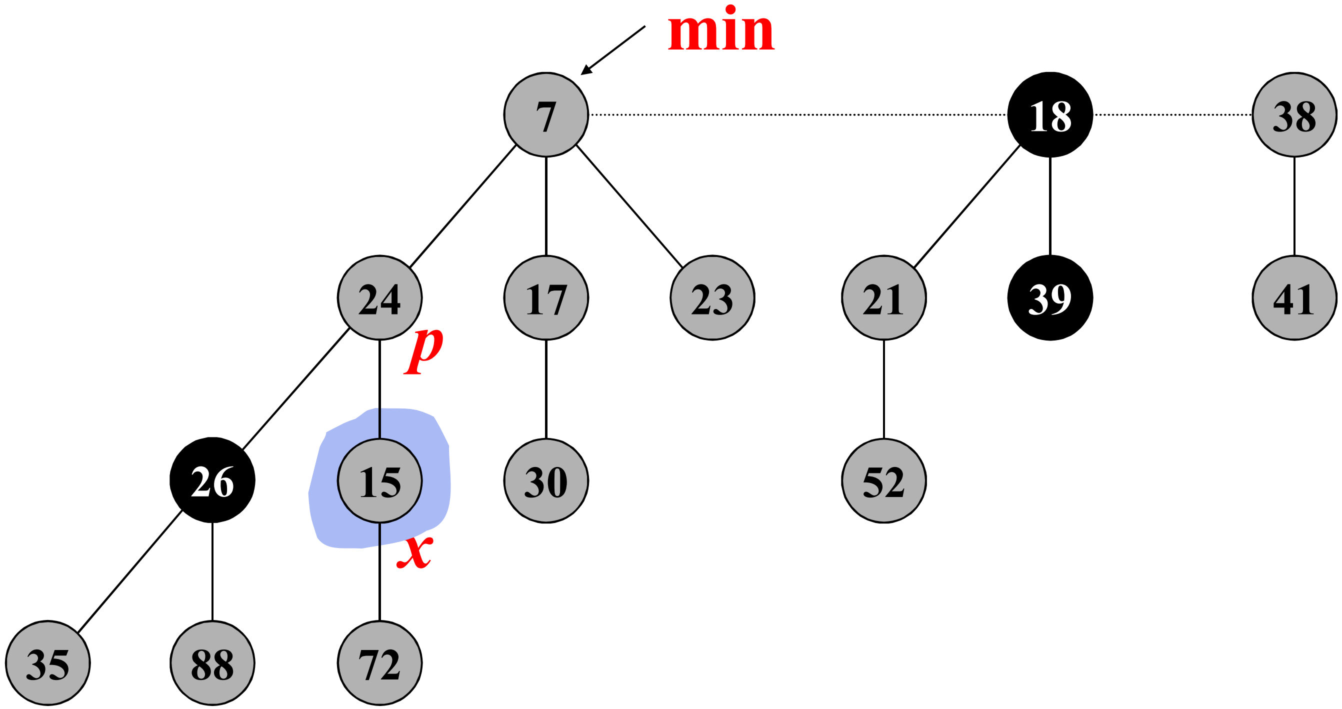


键值减小操作Decrease_key(3)

将键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从46减小为15）

情形2a：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）

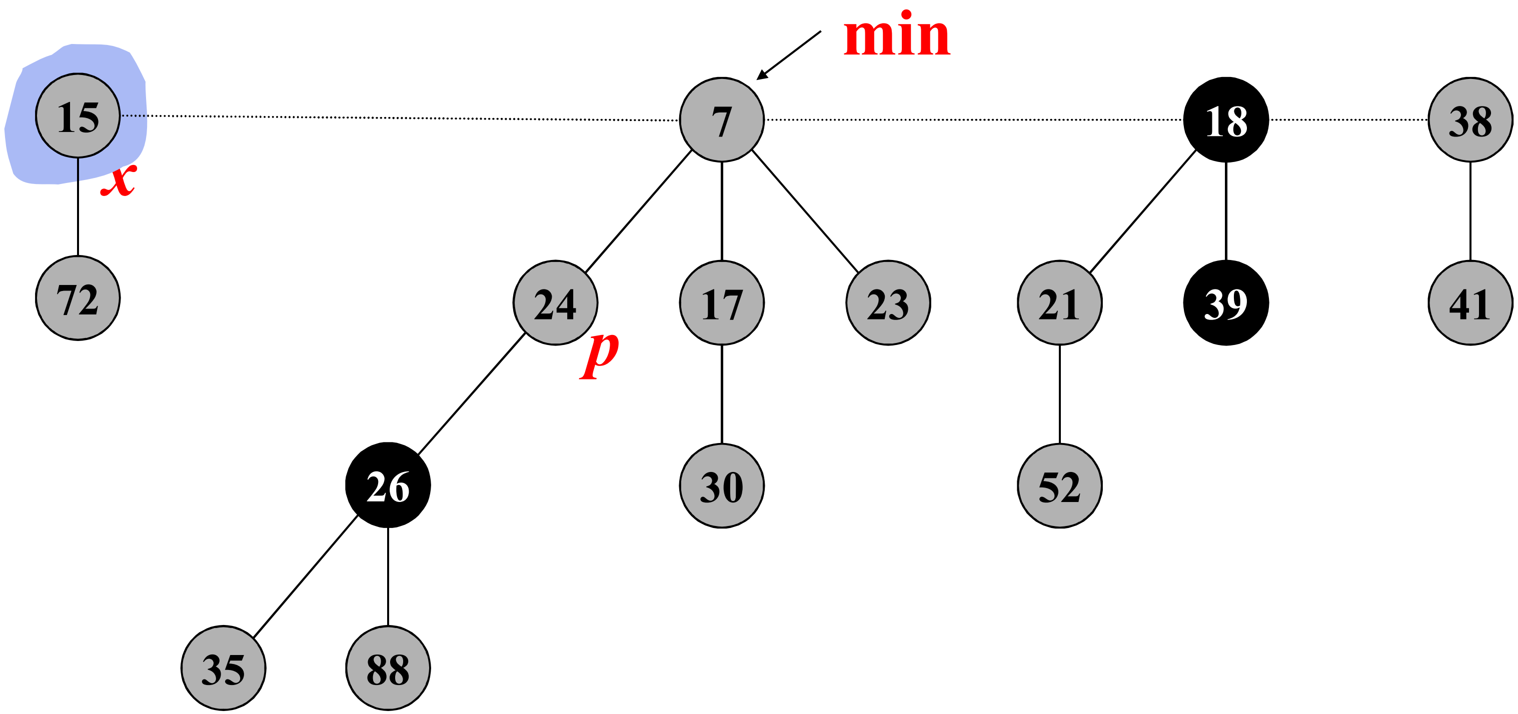


键值减小操作Decrease_key(5)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从46减小为15）

情形2a：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）

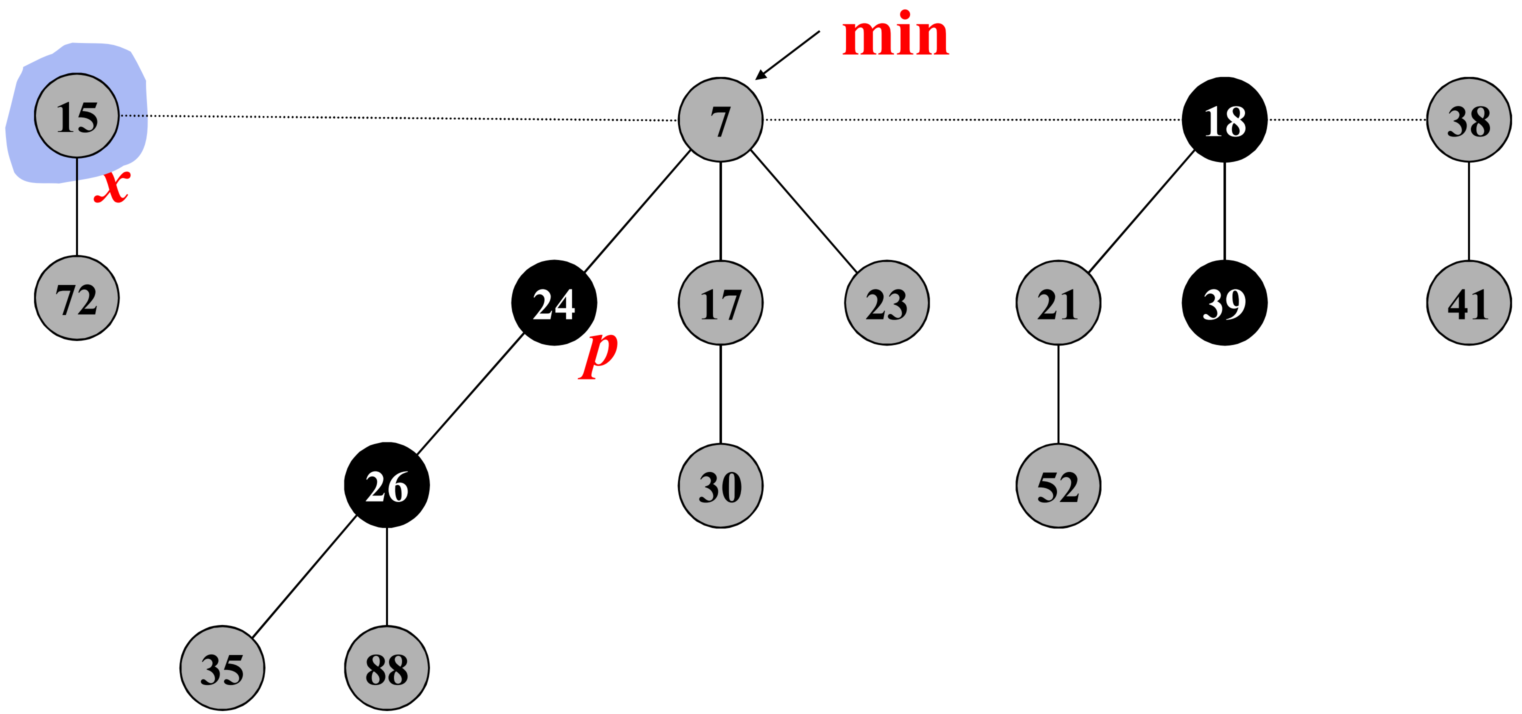


键值减小操作Decrease_key(6)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从46减小为15）

情形2a：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）

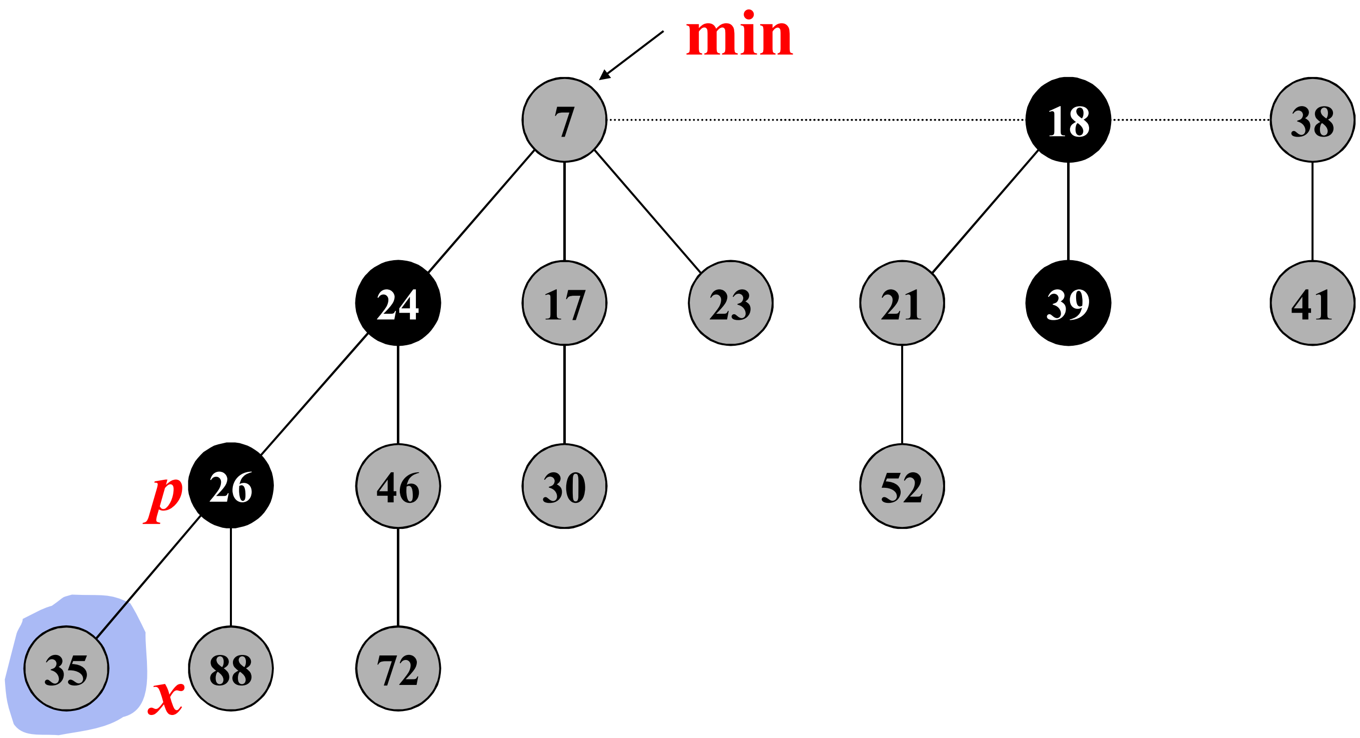


键值减小操作Decrease_key(7)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从35减小为5）

情形2b：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）

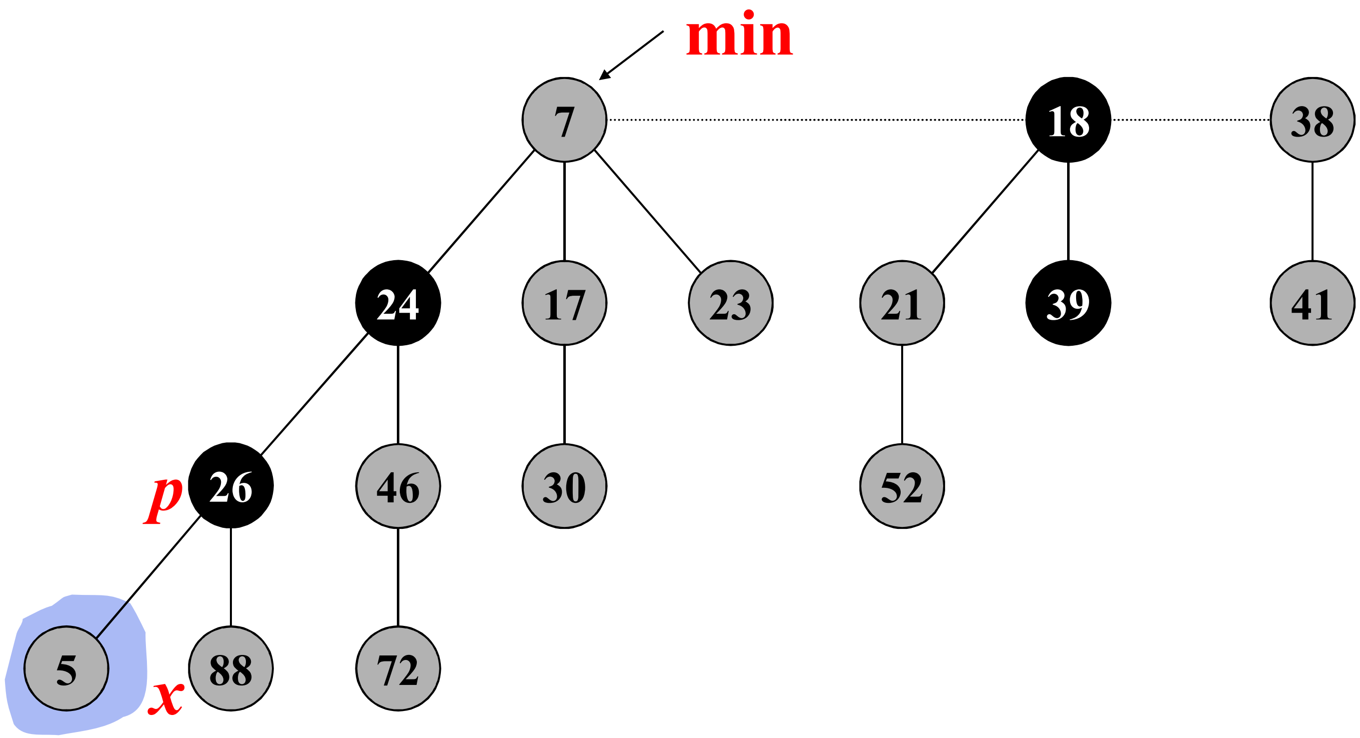


键值减小操作Decrease_key(8)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从35减小为5）

情形2b：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）

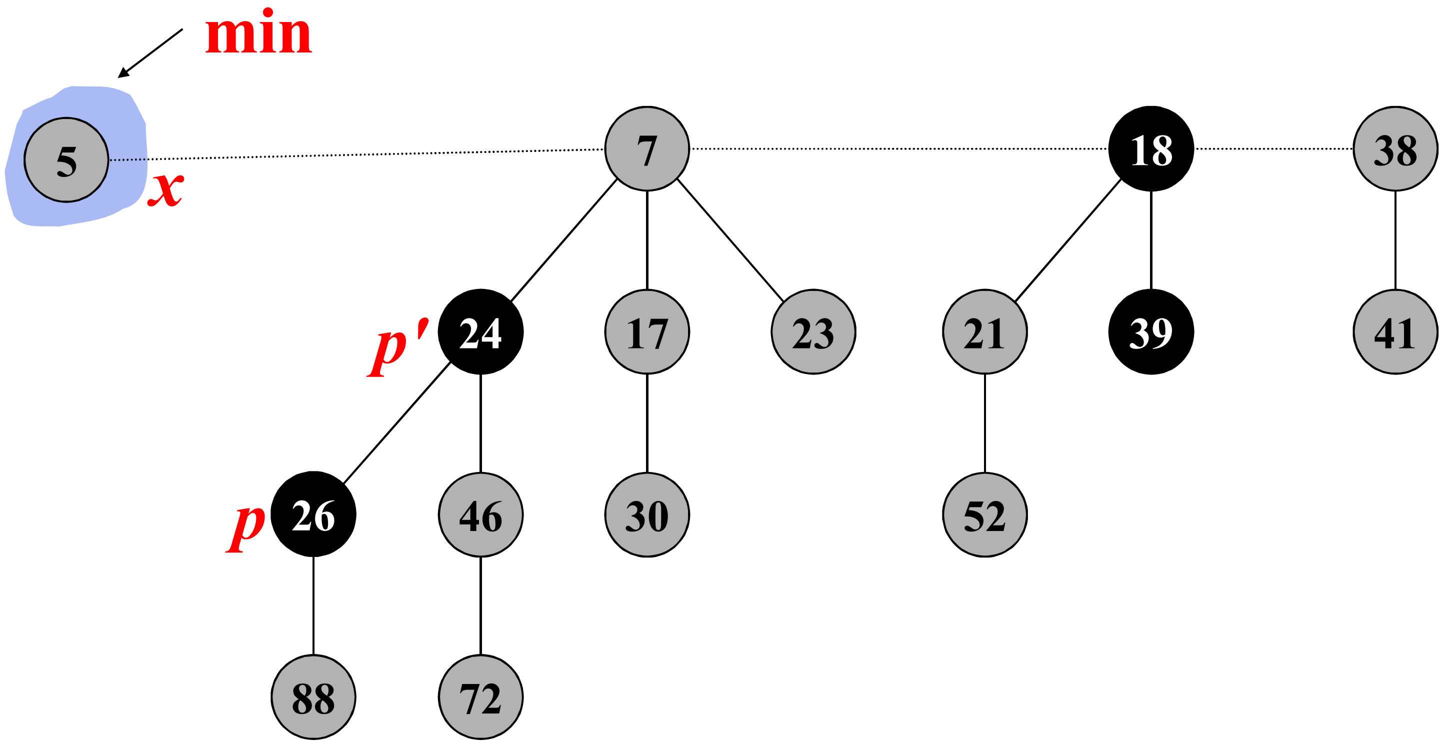


键值减小操作Decrease_key(9)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从35减小为5）

情形2b：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）

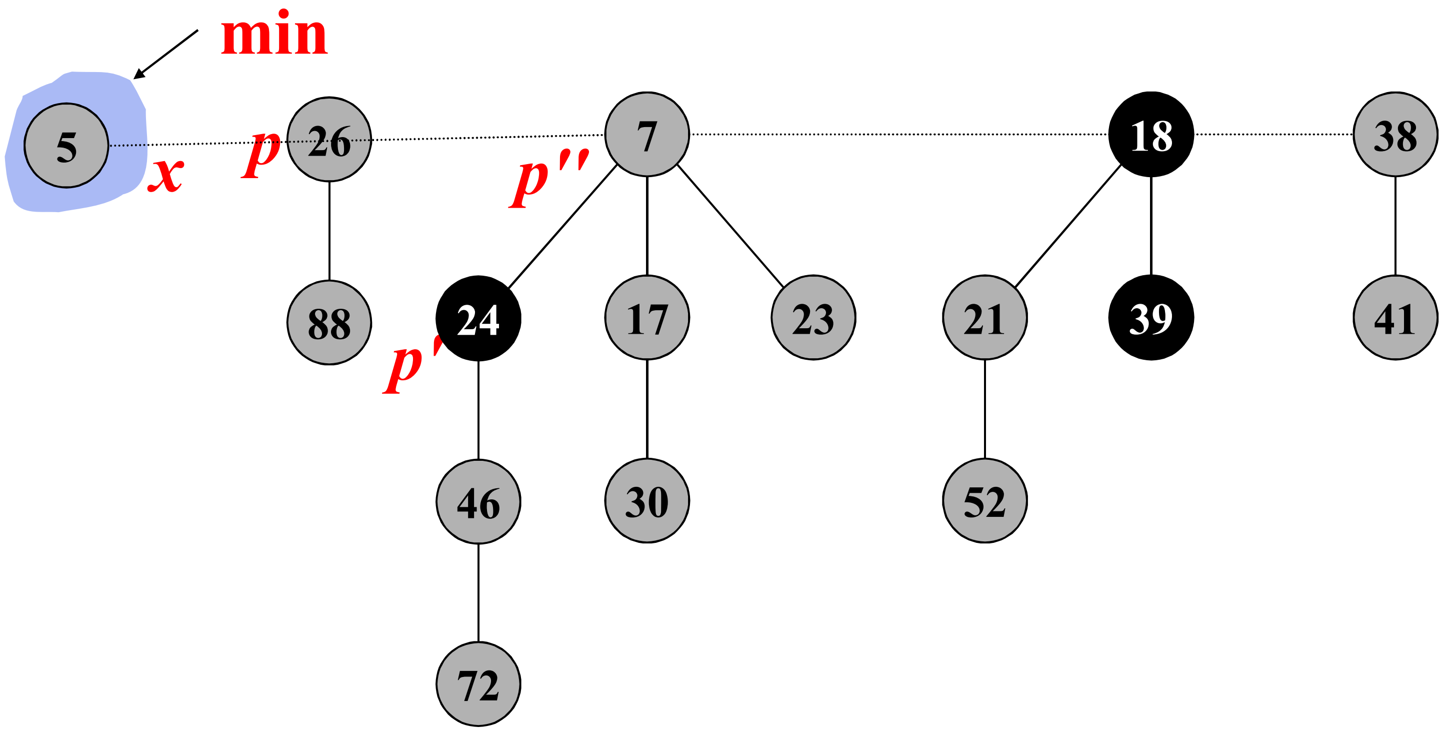


键值减小操作Decrease_key(10)

将键值减小操作作用于结点x（例如，键值从35减小为5）

情形2b：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切x子树，插入双向链表，将x置为未标记结点
- 若x的父结点p未标记，则标价它
- 否则，剪切p,插入双向链表，将p置为未标记结点（递归过程）

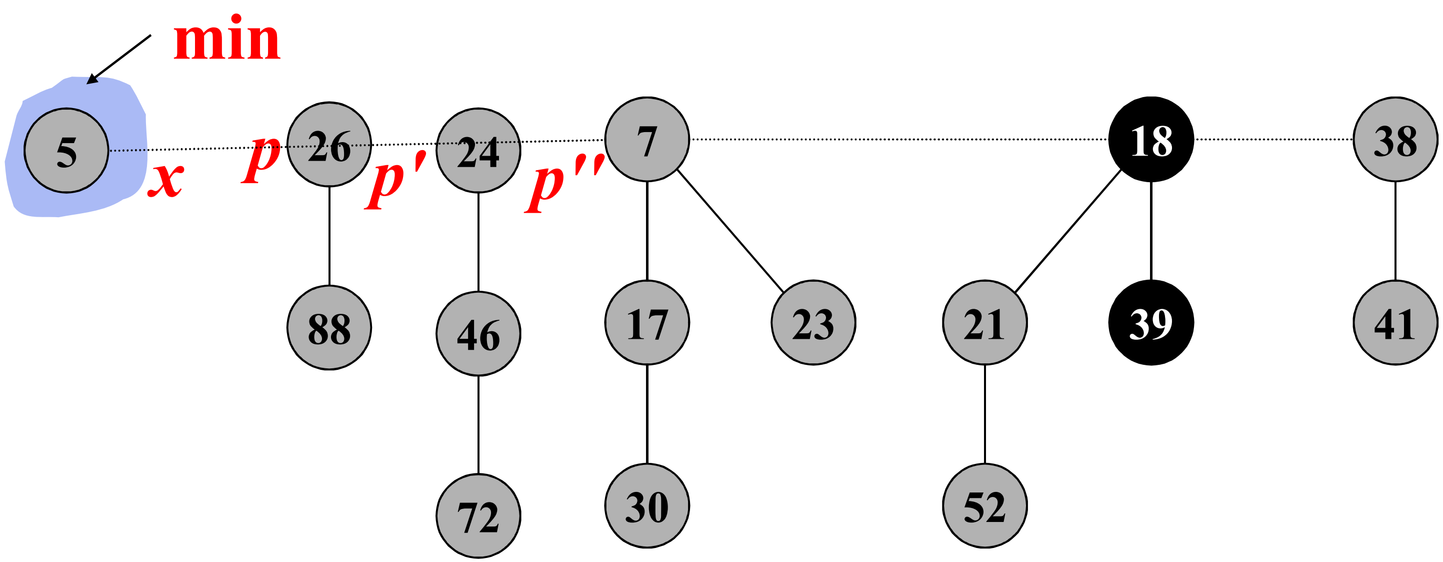


键值减小操作Decrease_key(11)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从35减小为5）

情形2b：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）

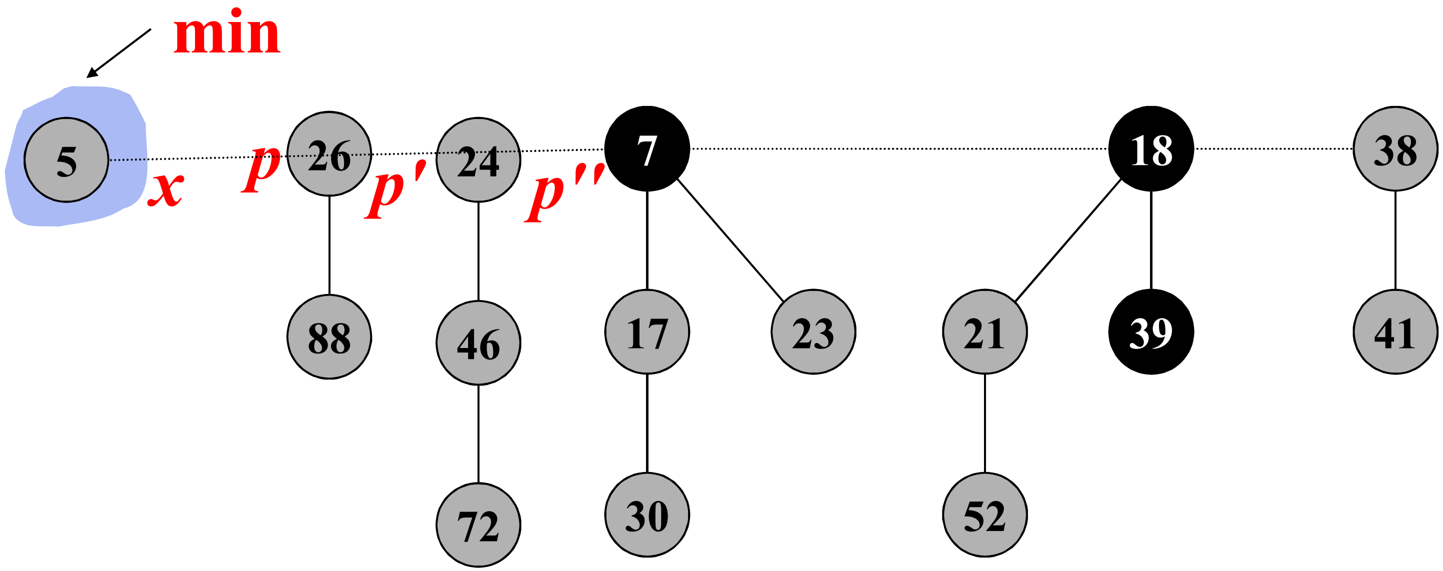


键值减小操作Decrease_key(12)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从35减小为5）

情形2b：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*n*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）



键值减小操作Decrease key的分析

键值减小操作的代价分析（势能函数$\Phi(H)=t(H)+2\cdot mark(H)$）

- 实际开销**O(*c*)**
  - $O(1)$ 时间内减小键值
  - 执行*c*次剪切操作，每次需要时间**O(1)**
- 平摊代价$O(1)$
  - 操作完成后的堆记为H',操作前的堆记为H
  - $t(H') \le t(H) + c$
  - $mark(H')=mark(H)-(c-1)+1= mark(H) - c +2$
  - $\Delta\Phi(H) = c+2(-c+2)=4-c$

目前得到的分析结果

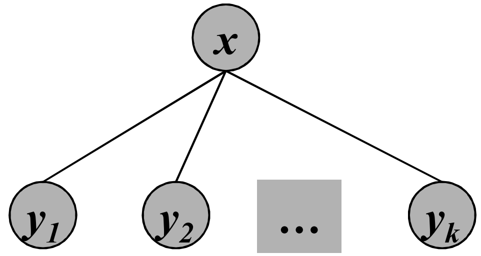
在势能函数$\Phi(H)=t(H)+2\cdot mark(H)$ 下

- 插入操作的平摊代价**O(1)**
- 键值减小操作的平摊代价**O(1)**
- **delete_min**的代价是**O($rank(H)$)**
- 删除操作的平摊代价$O(rank(H))$
  - 先将节点**x**的键值减小为**-∞,**则**x**将出现在堆顶，平摊代价**O(1)**
  - 调用**delete_min**删除堆顶元素**,**平摊代价**O($rank(H)$)**

欲得定理结论，需证明$rank(H)=O(\log n)$

这意味着，斐波那契堆管理的元素个数是$rank(H)$的指数

引理1. 设x是斐波那契堆中的任意结点，记$k=rank(x)$。设 $y_1,y_2,\ldots,y_k$ 是结点x的所有孩子结点且恰好按其成为x的孩子的先后次序列出，则$rank(y_1)\geq 0$,且$rank(y_i)\geq i-2$对$i=2,3,\ldots,k$成立



证明.当y_i成为x的孩子时，

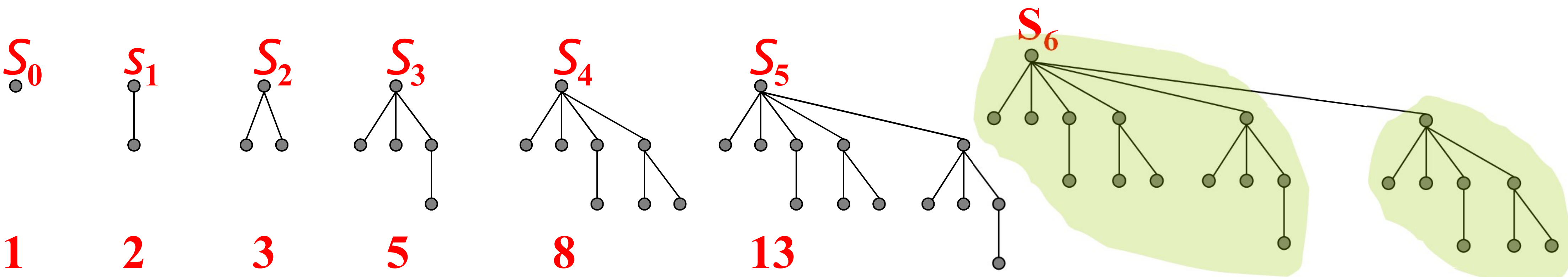
x已有孩子$y_1,y_2,\ldots,y_{i-1}$,故$rank(x)=i-1$

y_i要成为x的孩子，需满足$rank(y_i)=rank(x)=i-1$

y_i成为x的孩子之后，至多失去一个孩子

引理2. 设x是斐波那契堆中的任意结点，记$k=rank(x)$,则x所在的极小堆中至少有$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}$个结点。

证明. 令s_k表示秩为k的斐波那契堆中顶点的最小个数。归纳证明$s_k \geq 1+F(k)$



根据引理1，用归纳法统计x及其子孙结点的个数有　　**8 + 13 = 21**

$s_k = 1+s_0+s_0+s_1+\ldots+s_{k-2}$

　　根　1　2　3　　k

$\geq 1+1+F(0)+F(1)+\ldots+F(k\text{-}2)$　（归纳假设）

$=1+F(k)$　（斐波那契数列性质，习题3.2）

$\geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}$　（斐波那契数列性质，习题3.2）

rank(*H*)的上界分析

引理3. 设***H***是含有***n***个结点的斐波那契堆，则***rank*(*H*)=O(log*n*)**

证明.

- 记$rank(H)=k$
- 考虑H中结点的个数n
- 由引理2可知，结点个数至少为 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}$
- 于是，$n \geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}$

合并操作作用于堆H_1和H_2

- 合并H_1和H_2的根结点双向链表

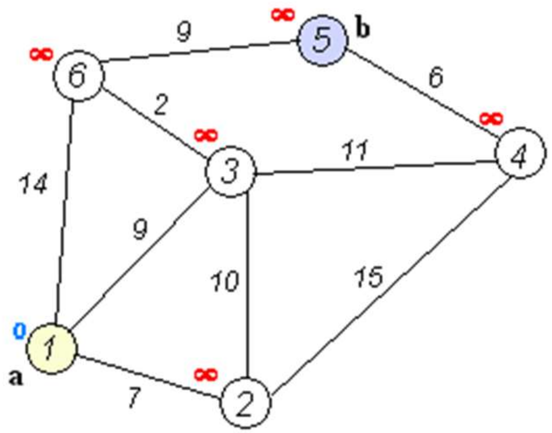
- 实际开销$O(1)$
- 平摊开销$O(1)$
  - $t(H_1 \cup H_2)=t(H_1)+t(H_2)$
  - $mark(H_1 \cup H_2)=mark(H_1)+mark(H_2)$
  - $\Phi(H)=t(H)+2 \cdot mark(H)$
  - 势能改变量为0

删除操作作用于堆的任意结点x

- 将x的键值减小为$-\infty$
- 删除堆顶元素
- 平摊开销$O(\log n)$
  - 减小键值操作的平摊代价为$O(\text{rank}(H))$
  - $rark(H)=O(\log n)$
  - 删除堆顶元素的平摊代价为$O(1)$

结论

操作	链表	二叉堆	二项堆	斐波那契堆
make-heap	1	1	1	1
is-empty	1	1	1	1
insert	1	$\log n$	$\log n$	1
delete-min	n	$\log n$	$\log n$	$\log n$
decrease-key	n	$\log n$	$\log n$	1
delete	n	$\log n$	$\log n$	$\log n$
union	1	n	$\log n$	1
find-min	n	1	$\log n$	1



n -堆中存储的元素个数　　　　平摊分析

定理. 从初始为空的斐波那契堆开始，任意执行由a_1个插入，a_2个删除，a_3个键值减小操作构成的长度为n的操作序列，其时间复杂度$O(a_1 + a_2 \log n + a_3)$.

6.7并查集性能平摊分析

- 并查集的概念和基本操作
- 并查集的线性链表实现
- 并查集的森林实现
- 并查集性能的平摊分析

并查集

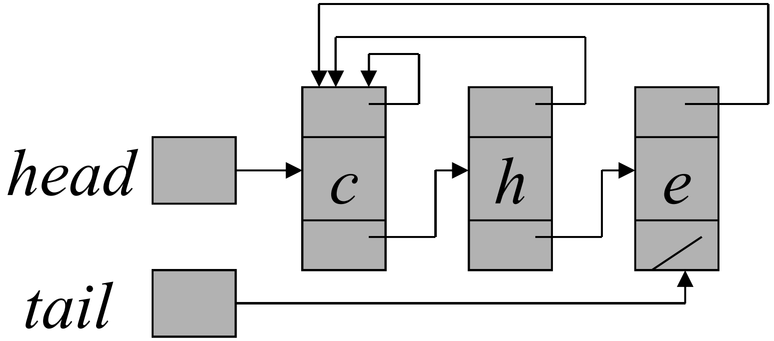
- 目的：管理n个不相交的集合$C=\{S_1,\ldots,S_n\}$
  - 每个集合S_i维护一个代表元素x_i
- 支持的操作
  - **MAKE-SET(*x*):** 创建仅含元素*x*的集合.
  - **UNION(*x*,*y*)**　: 合并代表元素分别*x*和*y*的集合
  - **FIND-SET(*x*)** : 返回*x*所在集合的代表元素
- 目标：使得如下操作序列的代价尽可能低
  - ***n*个MAKE-SET** 操作 (开始阶段执行).
  - ***m*个MAKE-SET, UNION, FIND-SET**操作(后续)
  - $m \geq n$,**UNION**操作至多执行 n-1次
- 典型应用（管理图的连通分支）
  - 找出图的连通分支
  - **Krusal**算法中维护生成树产生过程中的连通分支
- 最新研究

1.Finding dominators via disjoint set union, *Journal of Discrete Algorithms,vol23, pp 2-20, 2013*

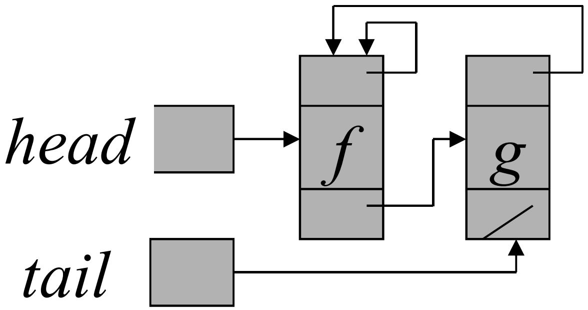
2. Disjoint set union with randomized linking, *Symp. on Discrete Algorithms, pp1005-1017, 2014*

并查集的直接实现为链表

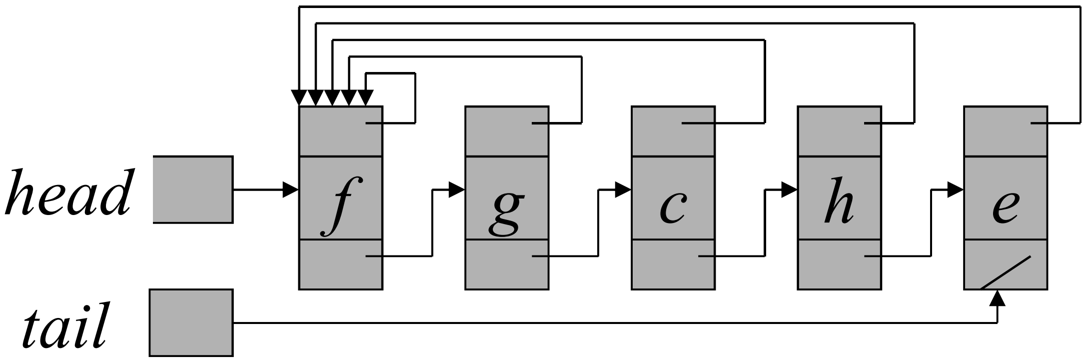
集合 $\{c,h,e\}$



集合 $\{f, g\}$



并集 $\{c,h,e,f,g\}$



每个集合维护为一个链表

- **head**: 链表头指针
- **tail** :链表尾指针
- **rep** :指向代表元素
- **Make-Set**: O(1)
- **Find(x)** : O(1)
- **Union(x,y)**: O($|s_x|$)

并查集链表实现的性能分析

考虑并查集上 如下特定的操作序列的代价

- 开始阶段执行n个MAKE-SET 操作的总代价$O(n)$
- 后跟n-1个 UNION操作的总代价$O(n^2)$

Union(x_1,x_2)	代价O(1)
Union(x_2,x_3)	代价O(2)
Union(x_3,x_4)	代价O(3)
…	
Union(x_{n-1},x_n)	代价O(n-1)

- 总共执行执行2n-1次操作的总代价为$O(n^2)$
- 从平摊效果看，每个操作的开销为$O(n)$

说明链表实现方式是很“蹩脚”，如何提高效率？

并查集链表实现的一种简单改进

考虑并查集链表实现的如下改进，效果会怎样?

•每个链表表头记录集合（或）链表中元素的个数

•**Union**操作时将较短链表链接到较长链表

结果

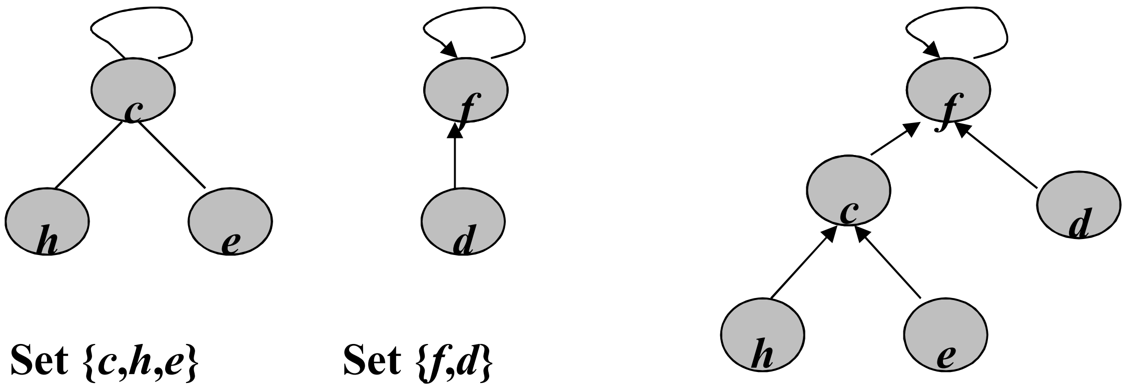
在改进后的并查集上执行由**Make_set, Find**和**Union**操作构成的长度为$m+n$的操作序列（其中**Make_Set**操作有m个），则该操作序列的时间复杂度为$O(m+n\log n)$

为什么?

- 考虑每个元素的**rep**指针被修改的次数 (总共n个元素)
- 每个元素至多参与$\log n$次并，因为并操作使链表长度至少倍增
- 所有**Union**操作一起至多$n\log n$次修改**rep**指针

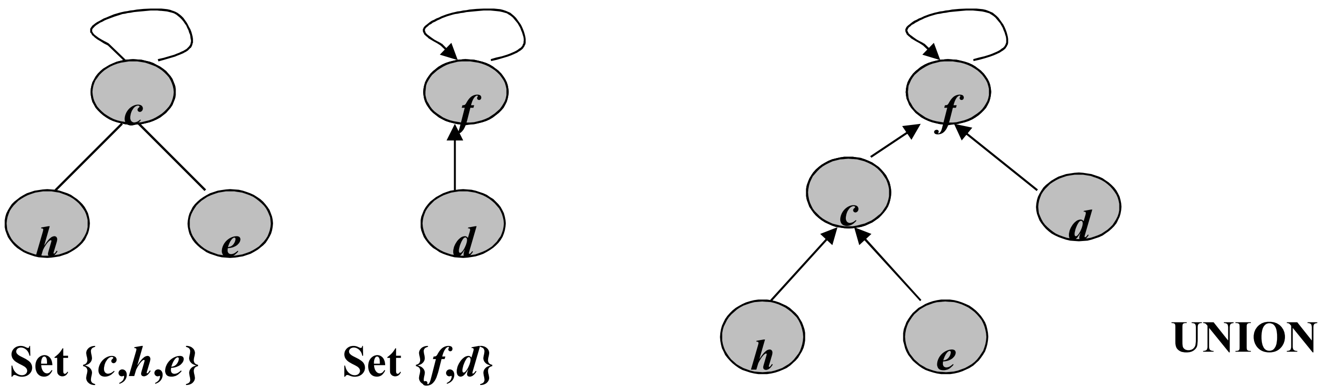
并查集三种操作

- 每个集合表示为一棵有根树
- 树根是代表元素
- 每个结点的指针指向其父结点，根结点指向自身



Set {*c*,*h*,*e*}　　Set {*f*,*d*}　　UNION

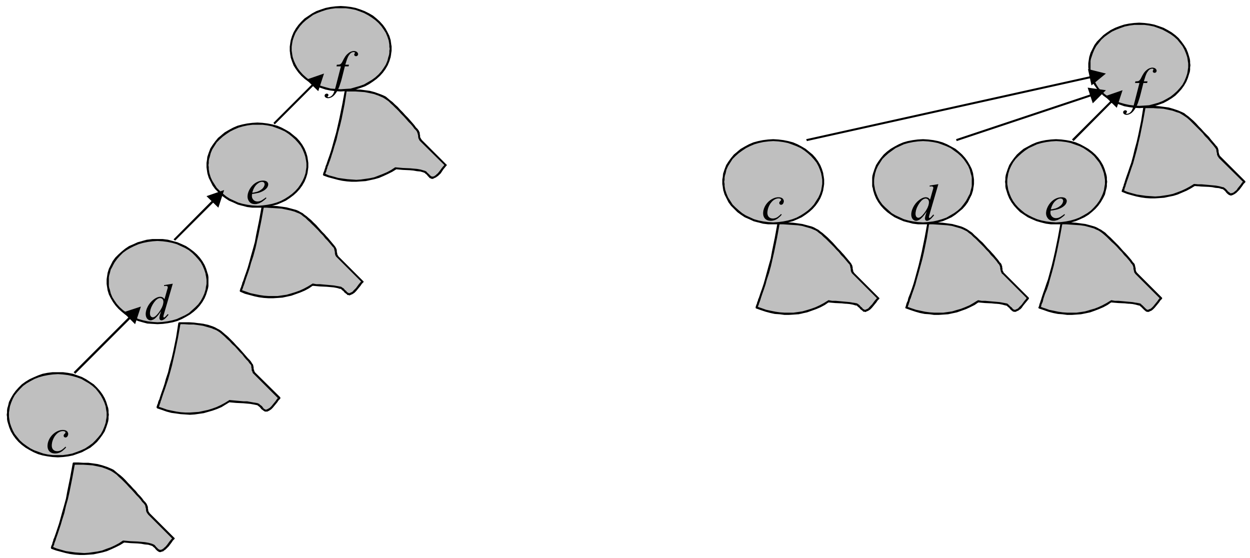
- 并查集可以实现为森林
  - **MAKE-SET(*x*)**: 创建仅含元素*x*的一棵树 $O(1)$
  - **UNION(*x*,*y*)** : 将*x*作为*y*的孩子 $O(1)$
  - **FIND(*x*)** : 从结点*x*沿父指针访问直到树根 $O(T_x)$
  - ***n***次合并操作可能得到深度为***n***的树（简单路径）
  - 在此极端情况下，**Find(x)**的最坏时间复杂性为$O(n)$
  - ***n***次**Find**操作的时间复杂度可能达到$O(n^2)$



改进策略之路径压缩

执行Find(x)时

- 修改*x*到根结点*r*的路径上的所有结点的指针，使其指向根结点*r*
- 路径压缩增加了执行单次Find操作的时间开销
- 树中的路径长度大幅度降低，为后续Find操作节省了时间

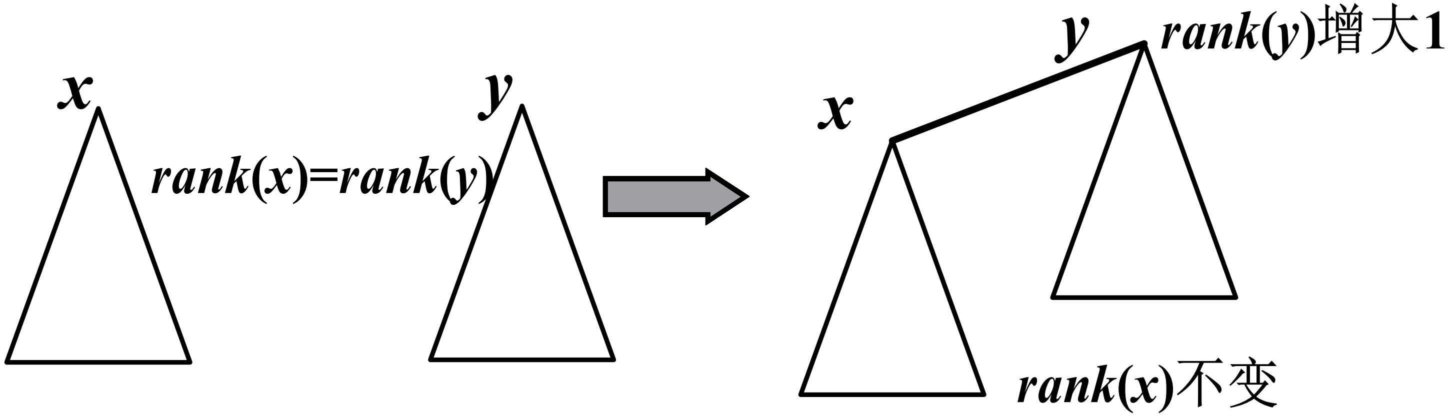


改进策略之按秩合并

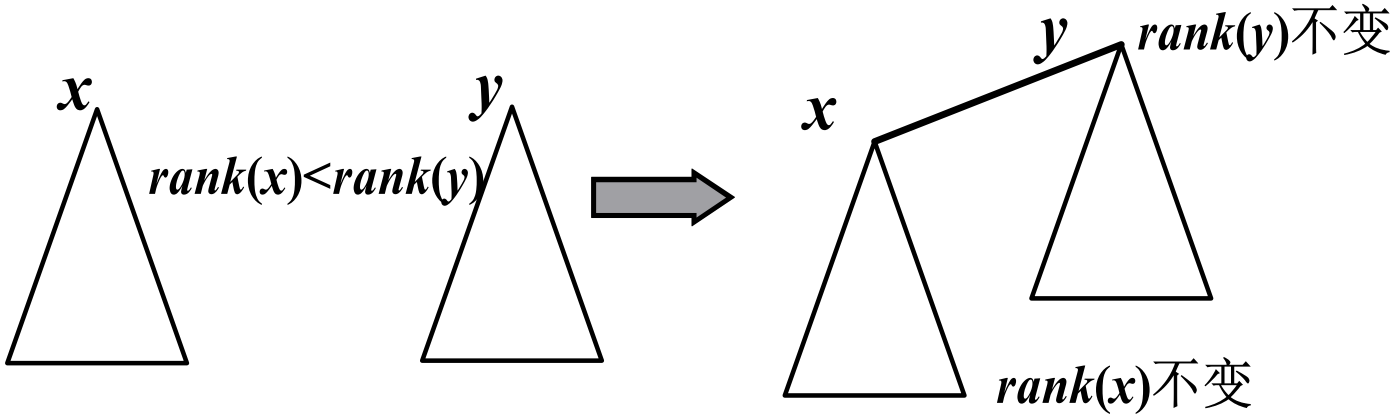
根据以下规则，维护每个结点的秩

- **MakeSet(x)**操作执行时定义结点x的秩为**0**
- **Find**操作不改变任意顶点的秩
- **Union(x,y)** 分两种情况修改结点的秩：
  - 情形a：**rank(x)=rank(y)**。此时，令x指向y且y是并集的代表元素，**rank(y)**增加**1**，**rank(x)**不变（其他结点的秩也保持不变）
  - 情形b：**rank(x)<rank(y)**。此时，令x指向y且y是并集的代表元素，**rank(y)**和**rank(x)**保持不变（其他结点的秩也保持不变）

情形a


x
y
rank(x)=rank(y)
y
rank(y)增大1
x
rank(x)不变

情形b


x
y
rank(x)<rank(y)
y
rank(y)不变
x
rank(x)不变

并查集操作算法

UNION(x,y)

1. LINK(FIND(x),FIND(y))

MAKE-SET(x)

1. rank[x]$\leftarrow$0
2. p[x]$\leftarrow x$

FIND(x)

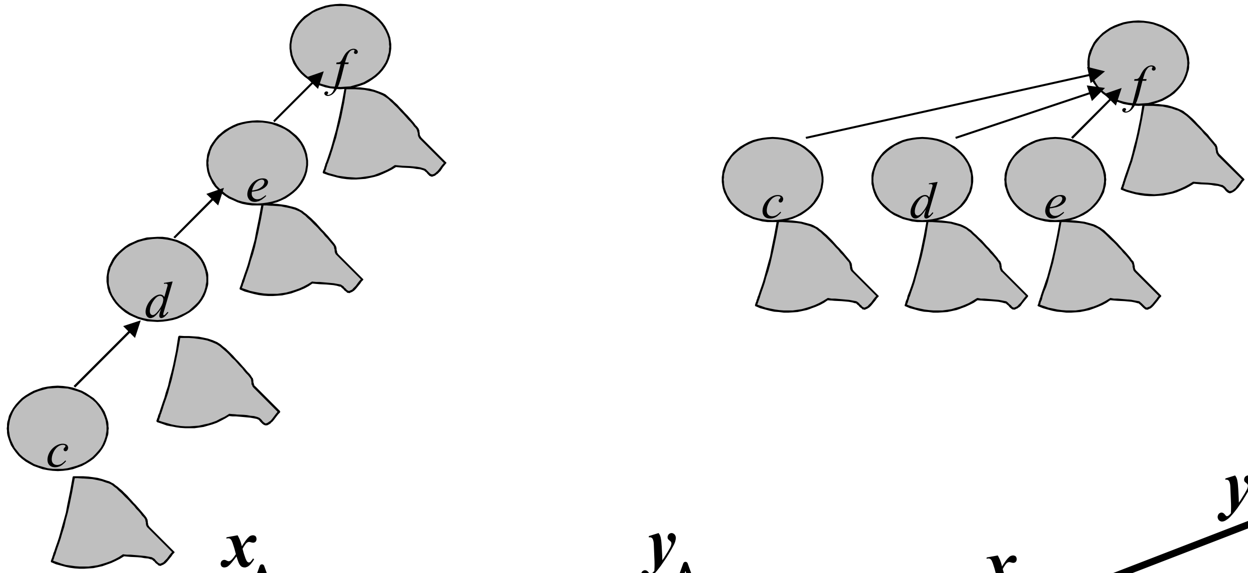
1. Q$\leftarrow\varnothing$
2. While $x\neq$ p[x] Do
3. 将x插入Q;
4. $x\leftarrow p[x]$;
5. For $\forall y\in Q$ do
6. $p[y]\leftarrow x$;
7. 输出x

LINK(x,y)

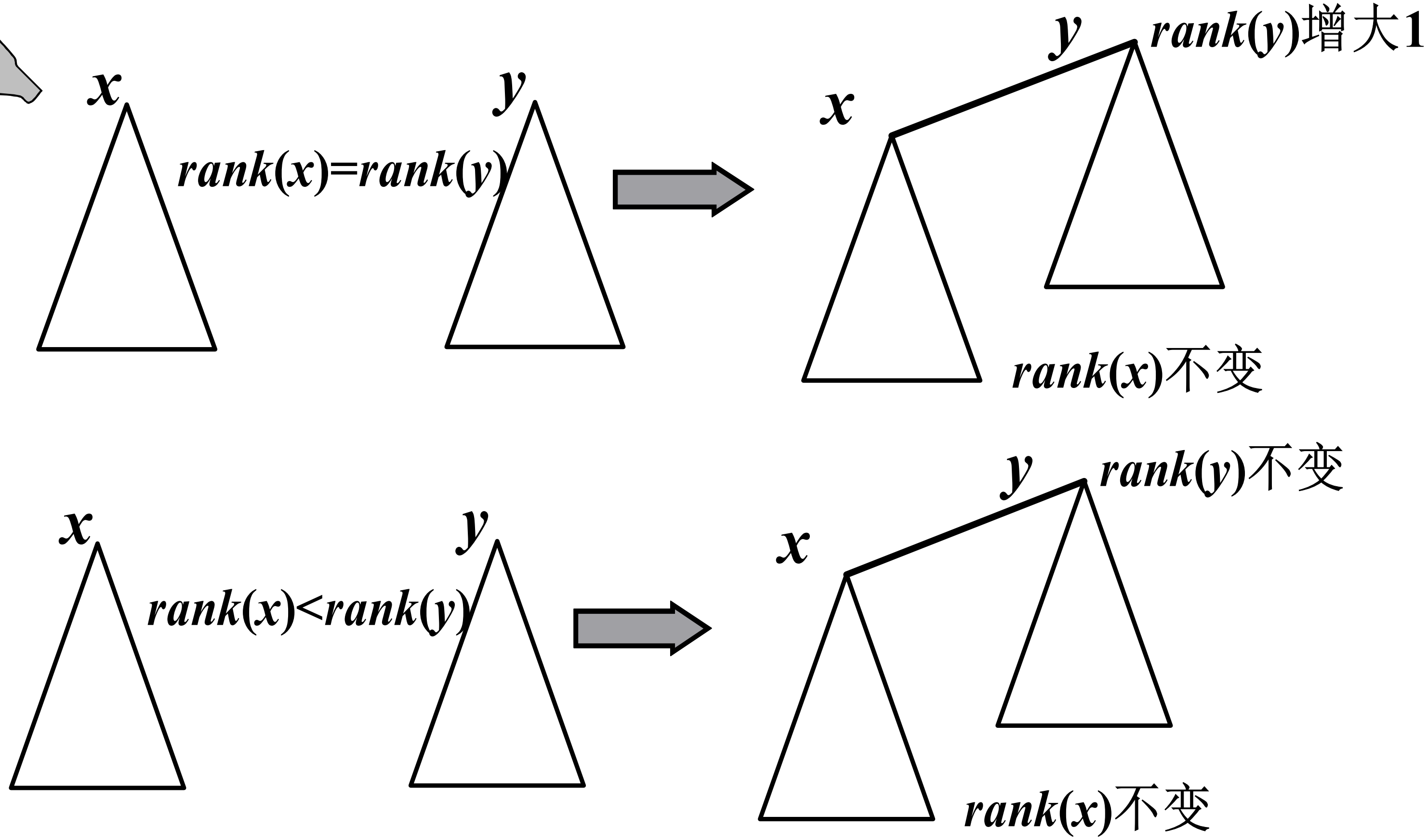
1. if rank[x]>rank[y] then
2. $p[y]\leftarrow x$
3. else $p[x]\leftarrow y$
4. if rank[x]=rank[y] then
5. rank[y] $\leftarrow$ rank[y] +1

HIT
CS&E

Find



Union



并查集中每个元素的秩有什么基本性质呢？

引理1.对于含有n个结点的并查集，秩具有如下性质：

(1) 如果$x \neq p(x)$，则$rank(x) < rank(p(x))$

(2) $rank(x)$的初始值为0，缓慢递增直到x不再是集合的代表元素，此后保持不变

(3)对于任意x, $rank(p(x))$是在操作过程中单调缓慢递增

(4)$rank(x) \leq n-1$对任意结点成立

证明.根据秩的定义和并查集上的操作算法可得

rank(x)缓慢增长

如果将rank(x)与一个缓慢增长的函数相关联

能否得出秩的其他性质呢？

并查集的性能

在并查集上执行m个操作的时间复杂度为$O(m\alpha(n))$

- n是Make_Set操作的个数（亦即：并查集中元素的个数）
- $\alpha(n) \leq 4$，对于绝大多数应用成立
- 近似地看，并查集上的操作序列的时间复杂度几乎是线性的

欲得上述结果，需要

- 讨论一个增长缓慢的函数-阿克曼函数的逆函数
- 深入讨论秩的性质
- 证明上述时间复杂度

阿克曼函数是定义在$k \geq 0, j \geq 1$上的递归函数

$$A_k(j) = \begin{cases} j+1 & 如果 k = 0 \\ A_{k-1}^{(j+1)}(j) & 如果 k \geq 1 \end{cases}$$

利用数学归纳法，不难验证欲得上述结果，需要

- $A_1(j)=A_0(A_0(\ldots(A_0(j))\ldots))$ （j+1层递归）

  $= A_0(A_0(\ldots(A_0(j))\ldots)) +1$ (j层递归)

  $= A_0(A_0(\ldots(A_0(j))\ldots)) +1+1$ (j-1层递归)

  $= \ldots$

  $= A_0(j)+j$

  $=2j+1$

阿克曼函数是定义在$k \geq 0, j \geq 1$上的递归函数

$$A_k(j)=\begin{cases} j+1 & \text{如果} k=0 \\ A_{k-1}^{(j+1)}(j) & \text{如果} k \geq 1 \end{cases}$$

利用数学归纳法，不难验证欲得上述结果，需要

- $A_2(j)=A_1(A_1(\ldots(A_1(j))\ldots))$ （j+1层递归）

$= 2A_1(A_1(\ldots(A_1(j))\ldots)) +1$ (j层递归)

$= 2[2A_1(A_1(\ldots(A_1(j))\ldots)) +1]+1$ (j-1层递归)

$= 2^2A_1(A_1(\ldots(A_1(j))\ldots))+2+1$ (j-1层递归,整理上式)

$= \ldots$

$= 2^jA_1(j)+2^{j-1}+ 2^{j-2}+\ldots+2+1$ (1层递归)

$=2^j(2j+1) +2^{j-1}+ 2^{j-2}+\ldots+2+1$

$= 2^{j+1}j+2^{j+1}-1$ （整理上式）

$=2^{j+1}(j+1)-1$

阿克曼函数是定义在$k \geq 0$, $j \geq 1$上的递归函数

$$A_k(j) = \begin{cases} j+1 & \text{如果} k = 0 \\ A_{k-1}^{(j+1)}(j) & \text{如果} k \geq 1 \end{cases}$$

利用数学归纳法，不难验证欲得上述结果，需要

- $A_1(j)=2j+1$
- $A_2(j)=2^{j+1}(j+1)-1$
- $A_k(j)$是一个“急速”增长的函数

$A_0(1)=1+1=2$

$A_1(1)= 2*1+1=3$

$A_2(1)= 2^{1+1}(1+1)-1= 7$

$A_3(1)=A_2^{(1+1)}(1)=A_2^{(2)}(1)=A_2(A_2(1))=A_2(7)=2^{7+1}(7+1)-1=2047$

$A_4(1)=A_3^{(2)}(1)=A_3(A_3(1)) =A_3(2047)=A_2^{(2048)}(2047)$

$>> A_2(2047) =2^{2048}.2048-1 >2^{2048} =(2^4)^{512} =(16)^{512}>10^{80}$

$A_k^{(j)}(x)$的性质

k-层， 层越大，增长越快

j-迭代次数，迭代次数越大，增长越快

阿克曼函数的逆函数

阿克曼函数的逆函数定义为

$$\alpha(n) = min\ \{k \mid A_k(1) \geq n\}$$

由于阿克曼函数急速增长，**故$\alpha(n)$缓慢增长**

$\alpha(n) \leq 4$在人类实践认知范围总成立

n	$0 \leq n \leq 2$	$n=3$	$4 \leq n \leq 7$	$8 \leq n \leq 2047$	$2048 \leq n \leq A_4(1)$	…
$\alpha(n)$	0	1	2	3	4	…

将$\alpha(.)$作用到rank(x)上，能否得出rank(x)的其他性质？

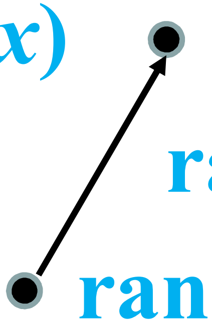
并查集性能的平摊分析

对并查集中的每个结点x,定义

$$Level(x) = \max\{k \mid rank(p(x)) \geq A_k(rank(x))\}$$

$$Iter(x) = \max\{i \mid A_{Level(x)}^{(i)}(rank(x)) \leq rank(p(x))\}$$

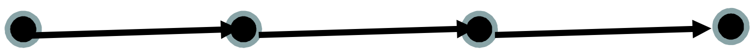
$p(x)$ rank($p(x)$)



rank(x) 与rank($p(x)$)的距离用$\alpha(.)$来刻画

x rank(x)

- 直观上



路径上rank值单调递增有界

  - 一条路径上有***Level***值或**Iter**值较大的节点，路径就很短,继而**Find(*x*)**的代价就低
  - **Level**值、**Iter**可能有助于建立势能函数，它们有什么性质呢？

并查集性能的平摊分析(1)

对并查集中的每个结点**x**,定义

$$Level(x) = \max\{k \mid rank(p(x)) \geq A_k(rank(x))\}$$

$$Iter(x) \quad = \max\{i \mid A_{Level(x)}^{(i)}(rank(x)) \leq rank(p(x))\}$$

- **$0 \leq Level(x) < \alpha(n)$, 且$Level(x)$随时间递增**
  - **$0 \leq Level(x)$**，　因为**$rank(p(x)) \geq rank(x)+1 = A_0(rank(x))$**
  - **$Level(x) < \alpha(n)$**，因为**$A_{\alpha(n)}(rank(x)) \geq A_{\alpha(n)}(1) \geq n > rank(p(x))$**
- **$1 \leq Iter(x) \leq rank(x)$, 且只要$Level(x)$不变则Iter($x$)不变或增大**
  - **$1 \leq Iter(x)$**，　因为**$rank(p(x)) \geq A_{\mathrm{Level(x)}}(rank(x)) = A_{Level(x)}^{(1)}(rank(x))$**
  - **$Iter(x) \leq rank(x)$**，　因为 $A_{Level(x)}^{(rank(x)+1)}(rank(x)) = A_{Level(x)+1}(rank(x))$ **>rank(p(x))**
- 只要**$Level(x)$**不变则**Iter(x)**不变或增大
  - 由于**rank(p[x])**随时间单调递增，仅当**Level(x)**增大时**Iter(x)**减小

定义并查集上q个操作之后结点x的势能$\phi_q(x)$为

$$\phi_q(x)=\begin{cases}\alpha(n)\cdot rank(x) & 若x是树根或rank(x)=0\\ [\alpha(n)-Level(x)]\cdot rank(x)-Iter(x) & 若x不是树根且rank(x)\geq 1\end{cases}$$

- $0\leq\phi_q(x)\leq\alpha(n)\mathrm{rank}(x)$
  - 若x是树根，显然
  - 若x不是树根，则
  - $\phi_q(x)=[\alpha(n)-Level(x)]\mathrm{rank}(x)-\mathrm{Iter}(x)$
    $\geq[\alpha(n)-(\alpha(n)-1)]\mathrm{rank}(x)-\mathrm{rank}(x)$
    $=0$
  - $\phi_q(x)=[\alpha(n)-Level(x)]\mathrm{rank}(x)-\mathrm{Iter}(x)$
    $\leq[\alpha(n)-(0)]\mathrm{rank}(x)-0$
    $=\alpha(n)\mathrm{rank}(x)$

并查集性能的平摊分析(3)

定义并查集上q个操作之后结点x的势能$\phi_q(x)$为

$$\phi_q(x)=\begin{cases}\alpha(n)\cdot rank(x) & \text{若}x\text{是树根或}rank(x)=0\\ [\alpha(n)-Level(x)]\cdot rank(x)-Iter(x) & \text{若}x\text{不是树根且}rank(x)\geq 1\end{cases}$$

- 若x不是树根，第q+1个操作是Union或Find，则$\phi_{q+1}(x)\leq\phi_q(x)$
  - rank(x)和$\alpha(n)$不变
  - 若rank(x)=0,由Iter(x)≤rank(x)可知，论断成立
  - 若rank(x)≥1，（Level(x)单调递增）
    - *Level*(x)保持不变，Iter(x)增大，$\phi_{q+1}(x)\leq\phi_q(x)-1$
    - *Level*(x)增大，Iter(x)不变或减小，
      [$\alpha(n)$-*Level*(x)]rank(x)至少减小*rank*(x)
      Iter(x)至多减小rank(x)-1，因为Iter(x)<rank(x)
      $\phi_{q+1}(x)\leq\phi_q(x)-1$

并查集性能的平摊分析(4)

定义并查集在q个操作之后的势能ϕ_q为

$$\phi_q = \Sigma_x \phi_q(x)$$

- $\phi_q \geq 0$恒成立，因为$0 \leq \phi_q(x) \leq \alpha(n)\mathrm{rank}(x)$对任意$x$成立
- 并查集上任意操作序列的总平摊代价≥总实际代价

并查集性能的平摊分析(5)

势能 $\phi_q = \Sigma_x \phi_q(x)$

$$\phi_q(x) = \begin{cases} \alpha(n)\cdot rank(x) & \text{若}x\text{是树根或}rank(x)=0 \\ [\alpha(n)-Level(x)]\cdot rank(x) - Iter(x) & \text{若}x\text{不是树根且}rank(x)\ge 1 \end{cases}$$

Make_Set操作的平摊代价为*O*(1)

Make_Set(*y*):

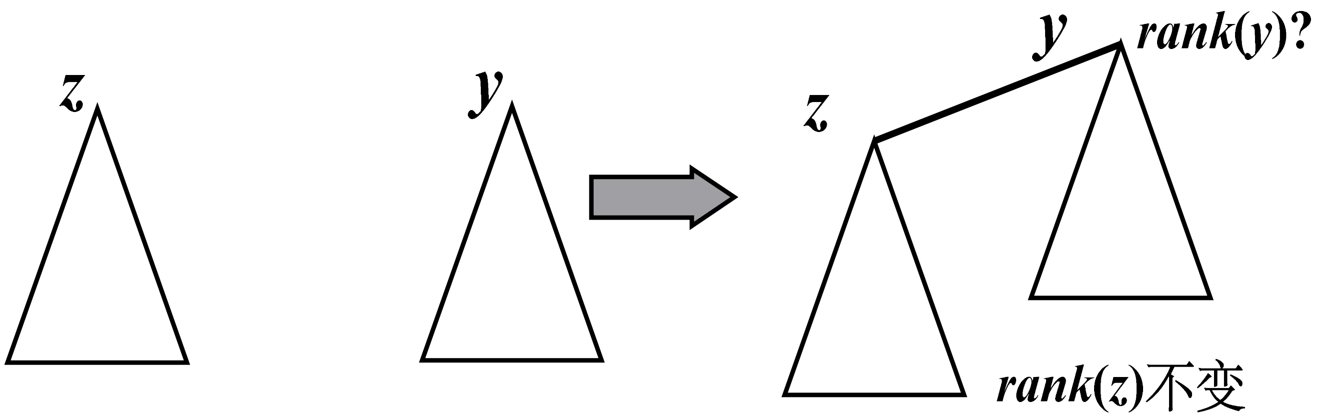
- 实际代价为***O*(1)**
- 势能的增量为**0**
  - 新增一棵以*y*为树根的树，*y*的势能为0
  - 不改变其他树的结构和**rank**，其他结点的势能不变

势能$\phi_q = \Sigma_x\, \phi_q(x)$ 并查集性能的平摊分析(6)

$$\phi_q(x) = \begin{cases} \alpha(n)\cdot rank(x) & \text{若}x\text{是树根或}rank(x)=0 \\ [\alpha(n) - Level(x)]\cdot rank(x) - Iter(x) & \text{若}x\text{不是树根且}rank(x)\ge 1 \end{cases}$$

Union(y,z)操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$

- 实际代价为$\Theta(1)$
- 势能增量为$\Theta(\alpha(n))$
  - 不妨设合并后，y是z的父结点
  - 操作仅可能改变rank(y)



哪些节点的势能可能会发生改变？可能会怎么变？

势能 $\phi_q = \Sigma_x \phi_q(x)$

并查集性能的平摊分析(6)

$$\phi_q(x) = \begin{cases} \alpha(n) \cdot rank(x) & \text{若}x\text{是树根或}rank(x)=0 \\ [\alpha(n) - Level(x)] \cdot rank(x) - Iter(x) & \text{若}x\text{不是树根且}rank(x) \geq 1 \end{cases}$$

Union(y,z)操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$

- 实际代价为$\Theta(1)$
- 势能增量为$\Theta(\alpha(n))$
  - 不妨设合并后，y是z的父结点
  - 操作仅可能改变rank(y)
  - 势能发生变化的结点只能是y，z和操作之前y的子结点w
    - w不是树根，必有$\phi_{q+1}(w) \leq \phi_q(w)$（参照前面的性质）
    - z的势能不会增加

      操作前，z是树根，故$\phi_q(z) = \alpha(n)\text{rank}(z)$

      操作后，rank(z)不变，且$0 \leq \phi_{q+1}(z) \leq \alpha(n)\text{rank}(z)$
    - y的势能至多增大$\alpha(n)$

      操作前，y是树根，故$\phi_q(y) = \alpha(n)\text{rank}(y)$

      操作时，rank(y)增大1或保持不变

      操作后，y仍是树根，$\phi_{q+1}(y) \leq \phi_q(y) + \alpha(n)$

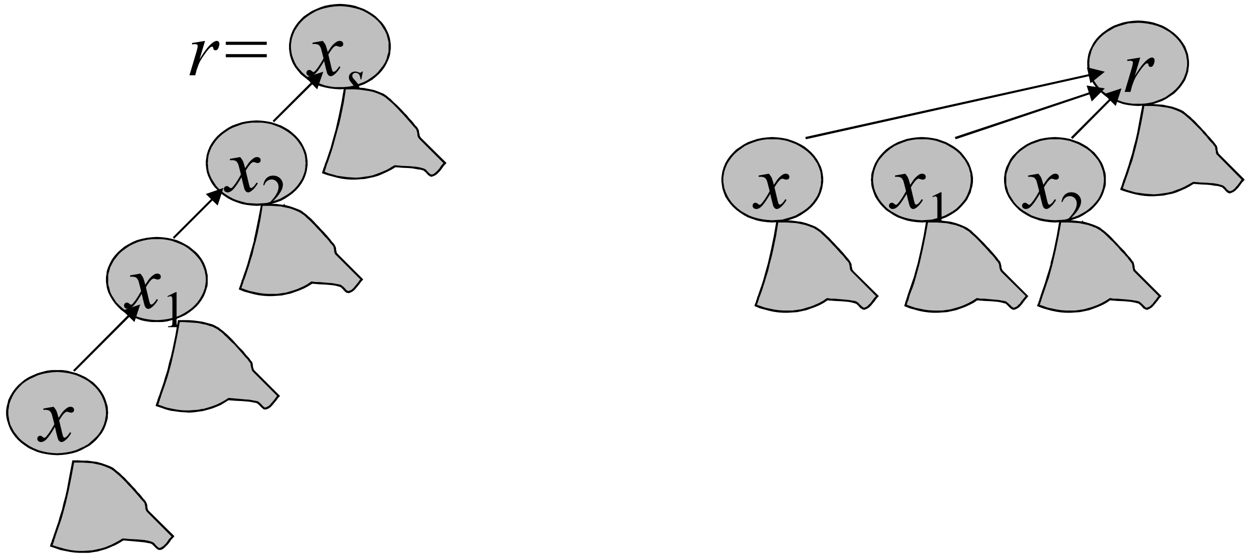
并查集性能的平摊分析(7)

势能$\phi_q = \Sigma_x\, \phi_q(x)$

$$\phi_q(x) = \begin{cases} \alpha(n)\cdot rank(x) & 若x是树根或rank(x)=0 \\ [\alpha(n)-Level(x)]\cdot rank(x)-Iter(x) & 若x不是树根且rank(x)\geq 1 \end{cases}$$

Find(x)操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$

- 实际代价为$\Theta(s)$



- $x=x_0,x_1,\ldots,x_{s-1}$的势能不会增加

  因为它们不是树根，故$\phi_{q+1}(x_i)\leq\phi_q(x_i)$（前面的结论）

- 树根r的势能不会发生变化

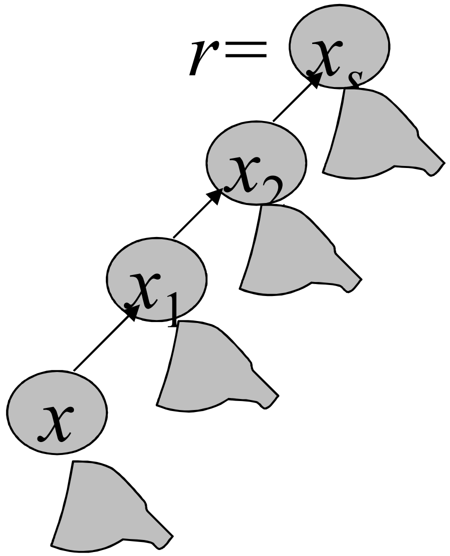
  rank(r)未发生变化

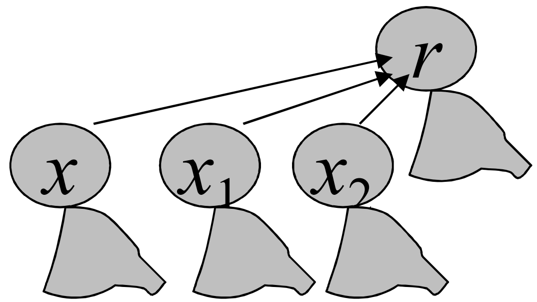
势能 $\phi_q = \Sigma_x \phi_q(x)$

$$\phi_q(x)=\begin{cases}\alpha(n)\cdot rank(x) & \text{若}x\text{是树根或}rank(x)=0\\ [\alpha(n)-Level(x)]\cdot rank(x)-Iter(x) & \text{若}x\text{不是树根且}rank(x)\geq 1\end{cases}$$

Find(x)操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$

- 实际代价为$\Theta(s)$





- 平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$
  路径$x,x_1,\ldots,x_s$上至少有s-[$\alpha(n)$+2]个结点的势能至少减小1（参见讲义）

结论

在并查集上执行*m*个操作的时间复杂度为$O(m\alpha(n))$

- **Make_Set**操作的平摊代价为$O(1)$
- **Union**操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$
- **Union**操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$
- **n**是**Make_Set**操作的个数，亦即并查集管理的数据对象的个数
- $\alpha(n)\le 4$，对于绝大多数应用成立
- 近似地看，并查集上的操作序列的时间复杂度几乎是线性的