



# Models and ~~heuristics~~ for the unrelated parallel machine scheduling problem with additional resources

BCC342 - Introdução à Otimização 17.2  
Alexandre Magno; Wagner Ferreira



UFOP



decom

departamento  
de computação



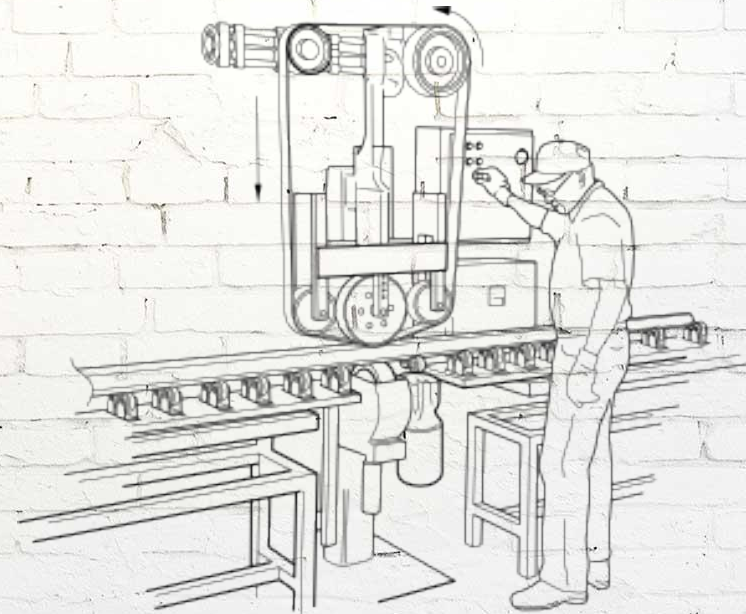
## **ARTIGO IMPLEMENTADO**

FANJUL-PEYRO, Luis; PEREA, Federico; RUIZ, Rubén. Models and matheuristics for the unrelated parallel machine scheduling problem with additional resources. European Journal of Operational Research, v. 260, n. 2, p. 482-493, 2017.



# PROBLEMA ABORDADO

- Programação de Máquinas Paralelas Não-relacionadas com Recurso Adicional
- Recurso adicional:
  - ◆ Renovável;
  - ◆ Positivo inteiro;
  - ◆ De processamento.
- Proximidade com a realidade.



# PROBLEMA ABORDADO

Exemplo:



> MINIMIZAR PROCESSAMENTO



## EXEMPLO DO ARTIGO

→ Matriz de tempo gasto pela máquina i no trabalho j.

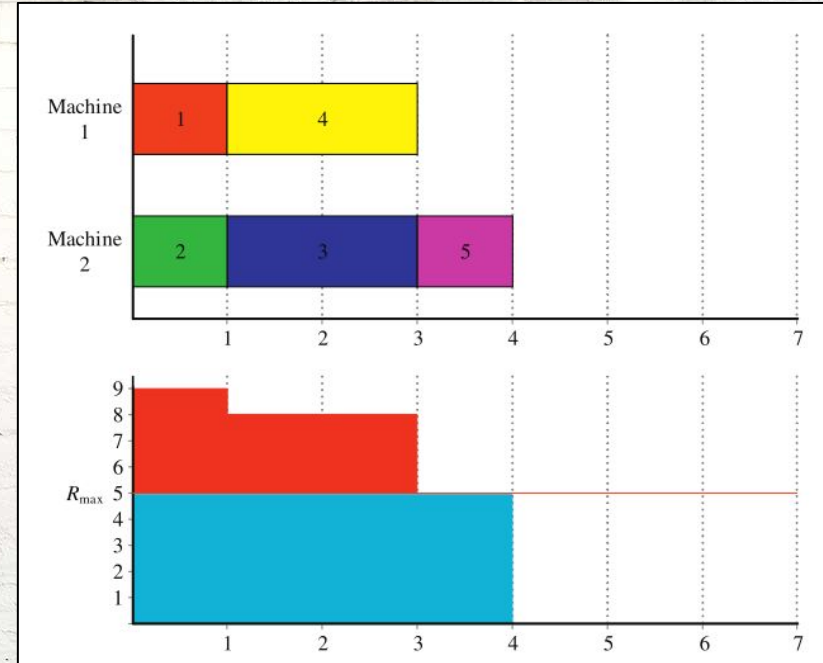
$$P = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

→ Matriz de recursos gasto pela máquina i no trabalho j.

$$R = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

## EXEMPLO DO ARTIGO

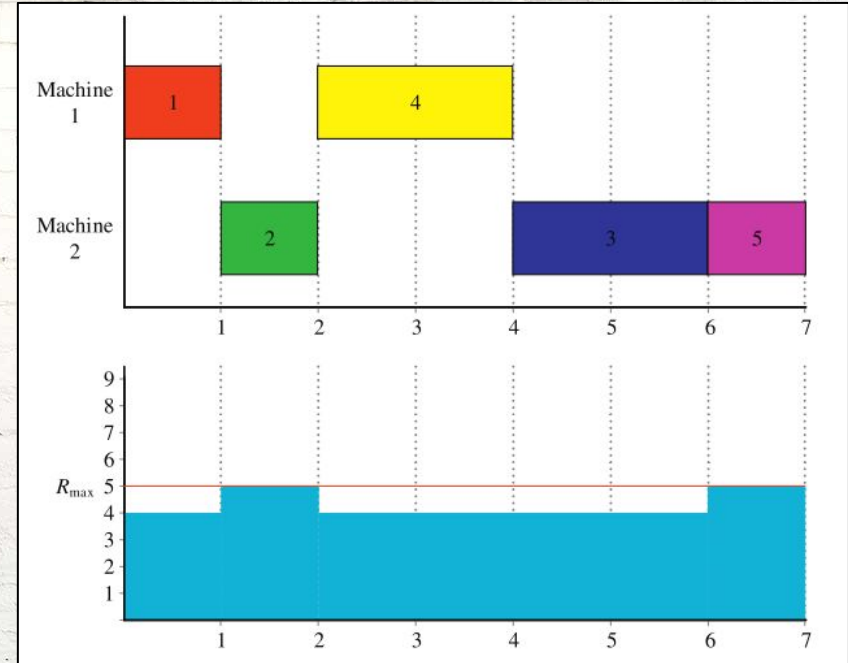
→ Solução ótima desconsiderando recursos.





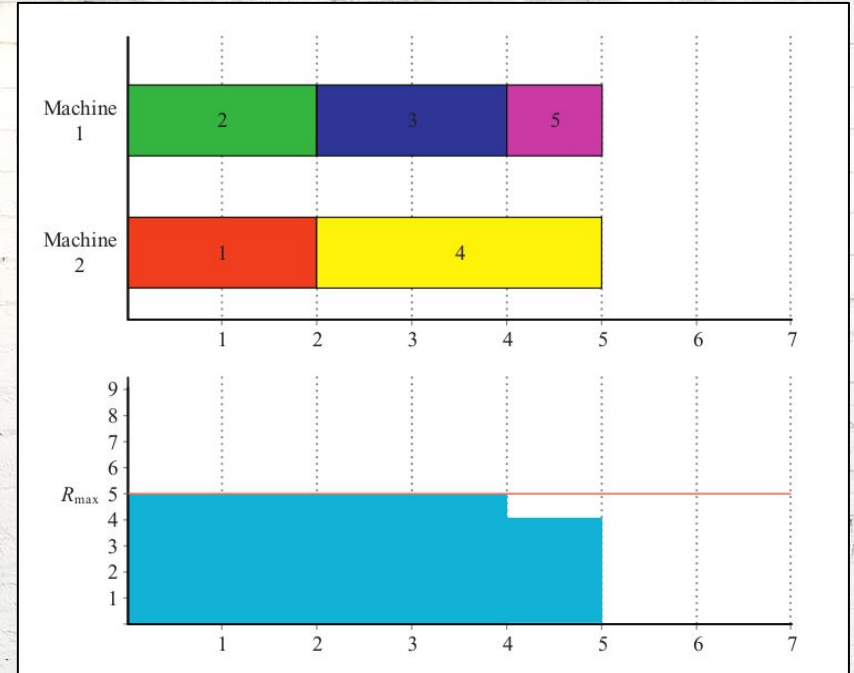
## EXEMPLO DO ARTIGO

→ Solução anterior considerando recursos.



## EXEMPLO DO ARTIGO

→ Solução ótima considerando recursos.







# MODELO MATEMÁTICO

## Conjuntos de índices

- Lista de máquinas  $i = \{1..m\}$
- Lista de trabalhos  $j = \{1..n\}$
- Lista de tempo  $k = \{1..k\}$

# MODELO MATEMÁTICO

## Conjuntos de Parâmetros

- Número de máquinas =  $m$  ;
- Número de trabalhos =  $n$  ;
- Tempo máximo de processamento =  $k_{\max}$  ;
- Recurso disponível =  $R_{\max}$  ;
- Matriz  $P_{ij}$  - tempo de processamento do trabalho  $j$  pela máquina  $i$ ;
- Matriz  $R_{ij}$  - recursos necessários pela máquina  $i$  para o trabalho  $j$ .





# MODELO MATEMÁTICO

## Variáveis de decisão

$x_{ijk} = 1$  , se o trabalho  $j$  é designado a máquina  $i$  e completa seu processamento no tempo  $k$ , e zero caso contrário.

$C_{\max}$  é o tempo total de processamento

# MODELO MATEMÁTICO

## Função objetivo

Minimizar makeSpan =  $C_{\max}$

## Restrições

- Tempo de Processamento;
- Trabalho único;
- Máquina ocupada;
- Recurso limite.

$$\sum_i \sum_{k \geq p_{ij}} kx_{ijk} \leq C_{\max}, \forall j,$$

$$\sum_i \sum_{k \geq p_{ij}} x_{ijk} = 1, \forall j,$$

$$\sum_j \sum_{s \in \{\max\{k, p_{ij}\}, \dots, k+p_{ij}-1\}} x_{ijs} \leq 1, \forall i, k,$$

$$\sum_i \sum_j \sum_{s \in \{\max\{k, p_{ij}\}, \dots, k+p_{ij}-1\}} r_{ij}x_{ijs} \leq R_{\max}, \forall k.$$



```
param m, integer, >=1; #Quantidade de máquinas disponíveis para o trabalho
param n, integer, >=0; #Quantidade de trabalhos a serem realizados
param Rmax, integer, >=1; #Quantidade máxima de um certo recurso disponível
param Kmax, integer, >=0; #Tempo de execução máximo dos trabalhos
```

```
set Maq := 1 .. m;  
set Trab := 1 .. n;  
set Temp := 1 .. Kmax;
```

```
param P{i in Maq, j in Trab}, integer, >=0; #Tempo de processamento necessário pela máquina i para realizar o trabalho j
param R{i in Maq, j in Trab}, integer, >=0; #Quantidade de recurso necessário pela máquina i para realizar o trabalho j
```

```
var x{i in Maq, j in Trab, k in Temp} , binary; #Assume valor 1 se o trabalho j é assinalado à máquina i  
→ → → → → → → → → → → → → → # e finaliza o processamento no tempo k; zero caso contrário  
var Cmax, integer, >=0; #Variável utilizada para exprmer o tempo de processamento
```

```
makespanTime{j in Trab}:sum{i in Maq, k in P[i,j]..Kmax} k*x[i,j,k] <= Cmax;
```

```
singleMachine{i in Mag, k in Temp}:sum{j in Trab, s in max(k,P[i,j])..min(Kmax,k+P[i,j]-1)} x[i,j,s] <= 1;
```

```
resourceLimit{k in Temp}:sum{i in Maq, j in Trab, s in max(k,P[i,j])..min(Kmax,k+P[i,j]-1)} R[i,j]*x[i,j,s] <= Rmax;
```

```
solve;
```

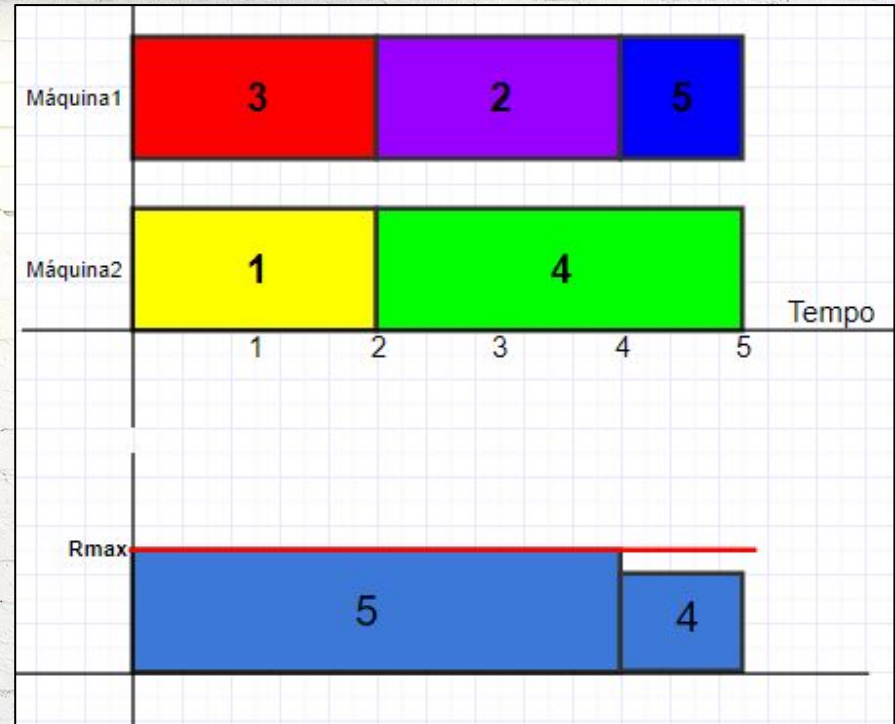
# RESULTADOS

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$R_{\max} = 5$$

$$K_{\max} = 10$$





# RESULTADOS

P =

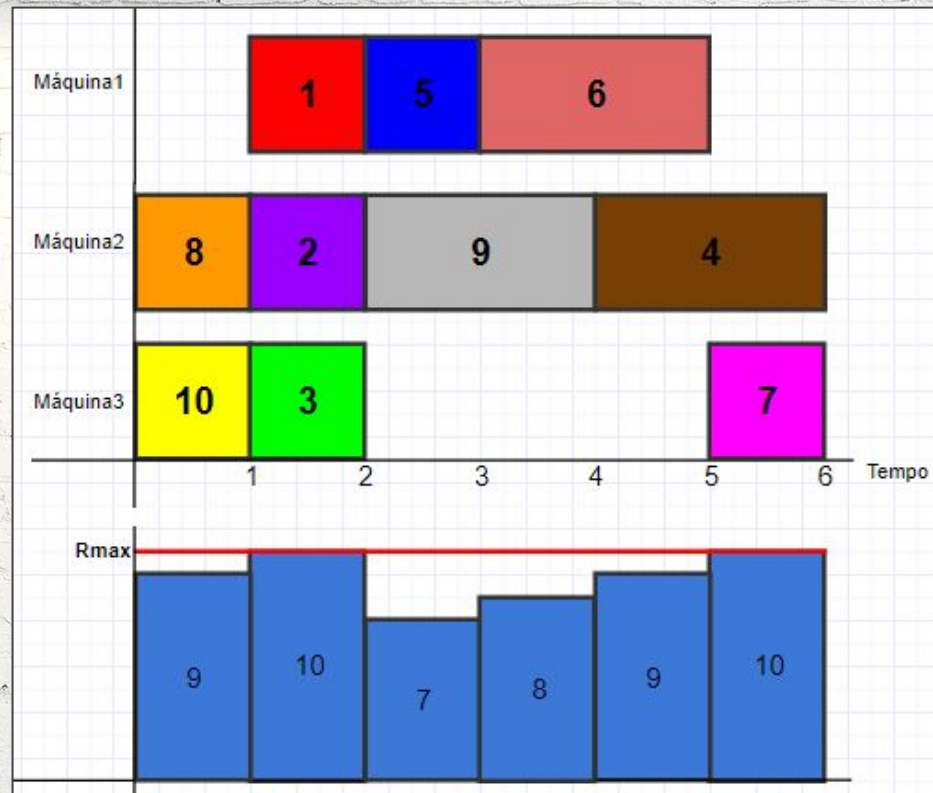
1	2	2	3	1	2	4	5	2	3
2	1	4	2	1	5	2	1	2	2
5	2	1	3	2	4	1	2	6	1

R =

4	3	3	4	3	4	5	2	3	6
5	2	3	5	8	2	3	5	4	7
6	4	4	3	4	4	5	8	3	4

$R_{\max} = 10$

$K_{\max} = 15$



Three black, dome-shaped pendant lights hang from a chain against a white brick wall. The lights are positioned horizontally across the top of the frame, casting a warm glow on the wall below. The text "end();" is centered on the wall, below the lights.

**end();**