Классификация распределения с помощью случайных графов

Соколовский С.П., Григоренко М.Д.

Дата: 23 мая 2025 г.

Предисловие

Договоримся об обозначениях:

- n — размер вектора реализаций случайной величины
- k, d — параметры построения KNN и дистанционного графов соответственно
- θ, v — параметры распределений
- T^{KNN}, T^{dist} — характеристики случайных графов

Часть I. Исследование свойств характеристики

Используемые инструменты Соколовского С.П.

Весь код в ветке `Crazy-Explorer31/first_part`, в директории `src/`:

- `graphs.py` — реализации KNN и дистанционного графов (у каждого есть метод для построения и отрисовки)
- `characteristics.py` — функции для получения характеристик графов, построенных при данных параметрах (распределений, построения графов...). Самый важный — get_average_characteristics, возвращающий средние характеристики графов, построенных при переданных параметрах
- `visualisations.py` — функции для удобной построения графиков
- `metrics.py` — функции, приближенно считающие ошибку I рода и мощность для данного $\mathcal{A}$. Считается по методу Монте-Карло, используя переданное в функцию множество точек (число компонент, хром число), принадлежащих какому-то распределению.

Используемые инструменты Григоренко М.Д.

Весь код в ветке `maxGrigorenko/first_part`, в директории `src/`:

- `graph_common_functions.py` — реализации KNN и дистанционного графов (у каждого есть метод для построения из значений случайной величины, а также методы вычисления характеристик)
- `distribution_functions.py` — функции для генерации выборки и вычисления матожидания характеристики методом Монте-Карло.

Шаг 1. Фиксируем n. Исследуем взаимосвязь между θ, v и T^{KNN}, T^{dist}

Результаты Соколовского С.П.

В файле `experiments_first_part_1.ipynb` происходит следующее:

- Для каждой тройки (распределение, тип графа, характеристика) перебираются параметры трех перечисленных объектов, после чего вычисляются характеристики полученных графов.
- Для каждой тройки строится диаграмма рассеивания, в которой по горизонтальной оси — параметр распределения, а по вертикальной — характеристика графа

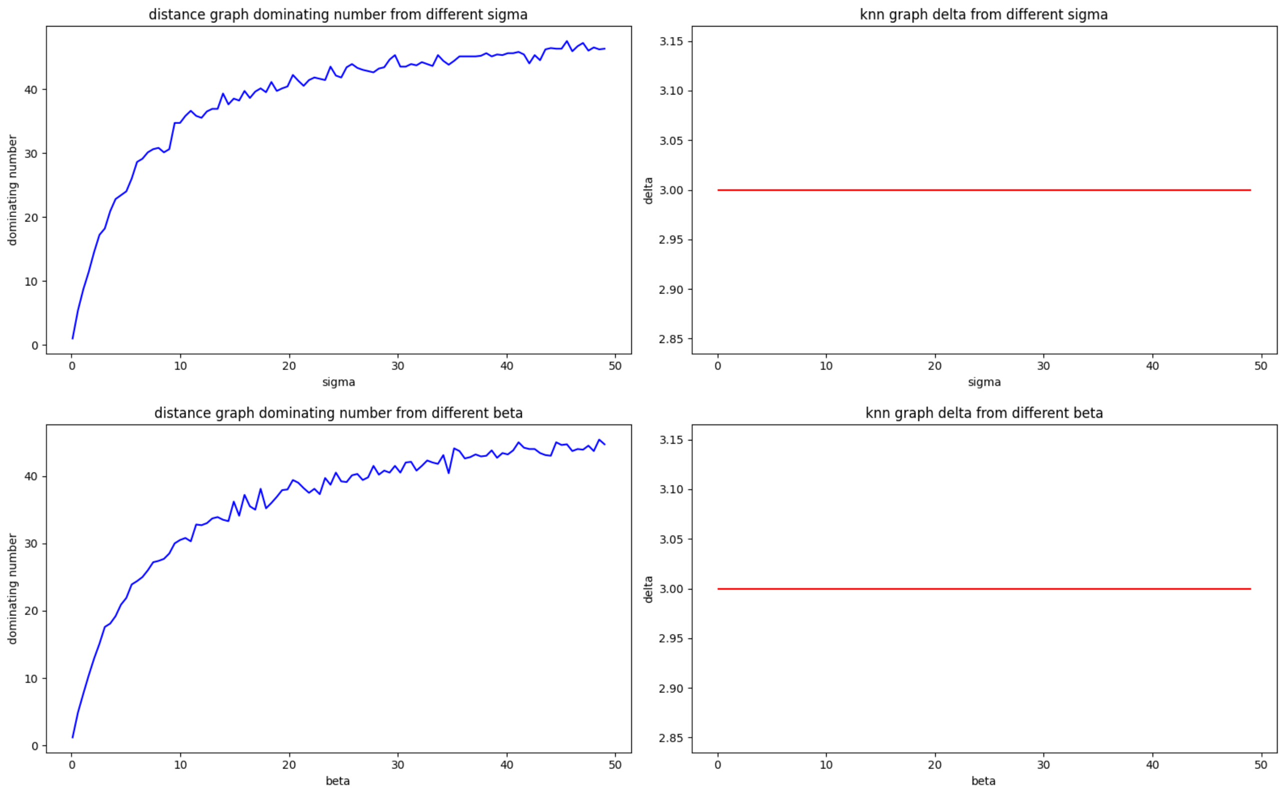
Из графиков заметно, что лишь с дистанционным графом хочется продолжать работать

Результаты Григоренко М.Д.

В файле `experiments_first_part_1.ipynb` происходит следующее:

- Реализованы функции `plot_sigma` и `plot_beta`, перебирающие значения соответствующих параметров распределений и выводящих график зависимости характеристики графов (knn и dist) от перебираемого параметра
- При фиксированном размере выборки проведены эксперименты с различными параметрами d и k.

В результате всех экпериментов delta графа knn была константной, то есть эта характеристика никак не связана с параметрами распределений. А вот доминирующее число дистанционного графа в среднем увеличивалось при увеличении параметра sigma. На двух графиках ниже показана зависимость среднего числа характеристик в завимости от параметров распределений:



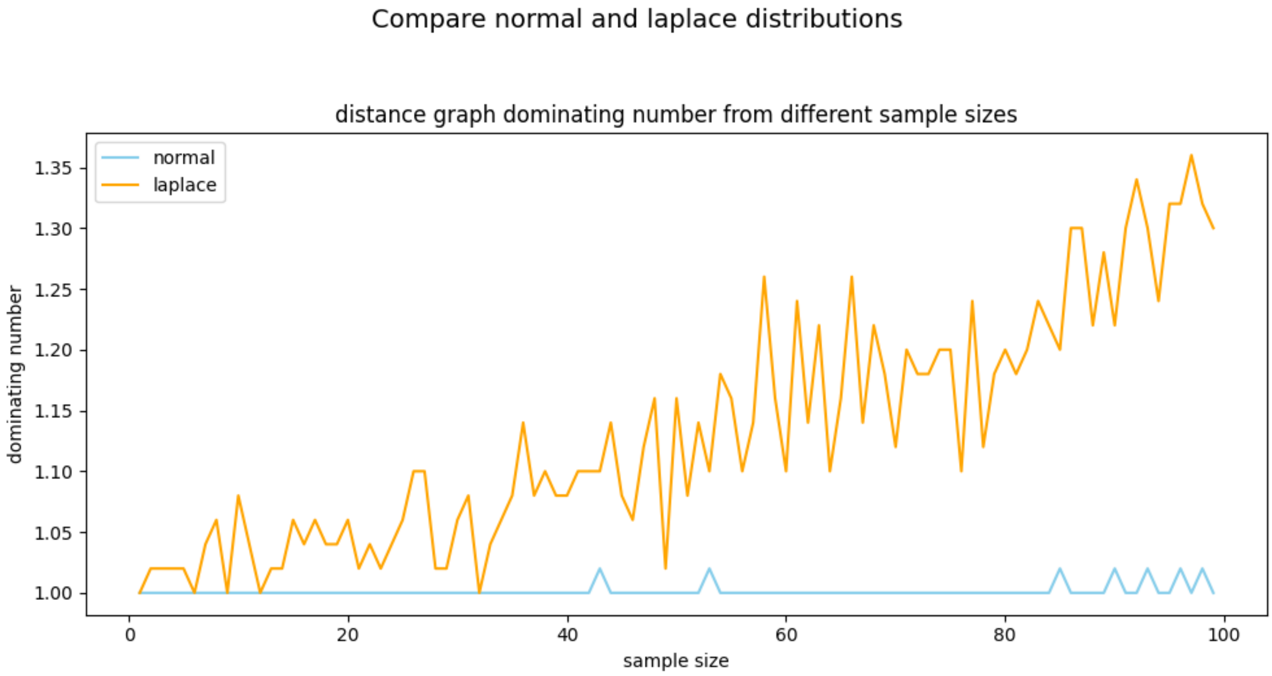
Шаг 2. Фиксируем θ, v. Исследуем взаимосвязь между n, k, d и T^{KNN}, T^{dist}

Результаты Соколовского С.П.

В файле `experiments_first_part_2.ipynb`, аналогично первому шагу, генерятся много налюдений для всех комбинаций распределений, типов графов, их характеристик. Далее на диаграммах рассеивания по оси Ox откладываются параметры построения графов, по Oy — их характеристики, и ещё цветом отражена, при каком n было получено наюлюдение. Выводы аналогичные первому эксперименту

Результаты Григоренко М.Д.

В файле `experiments_first_part_2.ipynb` зафиксированы параметры распределений и отрисованы графики зависимости характеристик графов от размера выборки. delta графа knn оказалась неинформативной характеристикой. А вот доминирующее число дистанционного графа немного по-разному меняется при изменении размера выборки, в особенности, если в качестве параметра дистанционного графа установить значение $d >= 3$, то характеристика графа из нормального распределения становится почти всегда равной 1, а вот при распределении Лапласа немного больше. Снизу график зависимости среднего числа доминирования от размера выборки при $d = 3.5$:



Шаг 3. Фиксируем θ, v. Строим $\mathcal{A}$ для переданного n

Результаты Соколовского С.П.

Файл `experiments_first_part_3.ipynb` поделен на два раздела. В первом фиксируются все параметры и строится $\mathcal{A}$. Во втором рассуждения, изложенные в первом разделе обобщаются, и приведена реализация класса, строящая $\mathcal{A}$ по переданному в конструктор n Используется следующий алгоритм построения $\mathcal{A}$:

1. Строятся точки с координатами (число компонент, хроматическое число) по генерирующимся векторам случайных величин
2. За изначальное $\mathcal{A}$ берется множество всех сгенерированных точек, полученных по первому распределению (Exp).
3. Далее пытаемся удалить точку из $\mathcal{A}$ так, чтобы ошибка I рода не превысила 0.05, а мощность была максимальной (ошибка I рода и мощность считаются на основе точек, сгенерированных в начале). Для этого перебираем все варианты и выбираем наилучший
4. Пытаемся так удалить что-то из $\mathcal{A}$ много раз
5. В итоге получаем искомое $\mathcal{A}$

Результаты Григоренко М.Д.

В файле `experiments_first_part_3.ipynb` реализован алгоритм конструирования множества $\mathcal{A}$, которое должно удовлетворять двум условиям:

1. Контроль ошибки первого рода: вероятность ошибочно отвергнуть нулевую гипотезу H_0 (данные имеют нормальное распределение) при её справедливости не превышает $\alpha = 0.05$.

2. Максимизация мощности: вероятность корректно отвергнуть H_0 в пользу альтернативы H_1 (например, распределение Лапласа) должна быть максимальной.

Множество $\mathcal{A}$ конструируется итеративно следующим образом: На каждом шаге генерируется большое число выборок (number_of_experiments) из нормального распределения. Для каждой выборки вычисляется характеристика графа. Если значение характеристики не принадлежит текущему множеству $\mathcal{A}$, оно считается "ошибочным"(ложным отклонением H_0). Ошибка первого рода оценивается как доля таких "ошибочных"случаев: Пока ошибка err $> \alpha$, в $\mathcal{A}$ добавляется наиболее частое значение характеристики из "ошибочных"результатов (мода). Это снижает долю ошибок за счёт включения типичных для H_0 значений. Процесс останавливается, когда err $\leq \alpha$, либо когда "ошибочные"значения исчерпаны.

Часть II. Несколько характеристик проверки гипотезы

Шаг 1. Исследуем важность характиристик

Результаты Соколовского С.П.

TODO

Результаты Григоренко М.Д.

В файле `experiments_second_part.ipynb` написан класс `DistribituionClassifier`, принимающий на вход параметр n - размер выборки и модель классификации, которую предстоит обучить. Для выявление признаков по данной выборке строится 4 дистанционных графа с различным параметром d, для каждого графа считаются следующие характеристики:

1. Минимальная степень вершины

2. Средняя степень вершины

3. Максимальная степень вершины

4. Число доминирования

5. Кликовое число

TODO

Шаг 2. Метрики качества для разных выборок

Результаты Соколовского С.П.

TODO

Результаты Григоренко М.Д.

TODO

Шаг 3. Выводы о вероятности ошибки первого рода и мощности подхода

Результаты Соколовского С.П.

TODO

Результаты Григоренко М.Д.

TODO