Математика (базовый уровень)
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Расчётно графическая работа по теме

"Линейное пространство и СЛАУ"

Подготовили:
Файзиев Фаридун, P3112
Мостовский Матвей, P3133
Глебов Андрей, P3112

Преподаватель:
Кожевникова Элина Олеговна

г. Санкт-Петербург. 2022 г.

1 СЛАУ и Определители

1.1 Задание

Даны две системы алгебраических уравнений

$$a)\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=10 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x-y+3z=9 \\ 3x-5y+z=-4 \\ 4x-7y+z=5 \end{cases}$$

План

1. Исследуйте системы на совместность/несовместность, определенность/неопределенность на основе теоремы Кронекера-Капелли и следствия из него (о количестве решений).
2. Для совместной определенной системы (если она есть):
   (a) Найдите определитель основной матрицы методом разложения по 3-й строке и затем по 2-му столбцу (без предварительного упрощения элементарными преобразованиями).
   (b) Решите её, проверьте решение подстановкой.
3. Для неопределенной или несовместной системы (если она есть):
   (a) Запишите её как однородную. Найдите базис подпространства, которое задаётся этой системой. Изобразите подпространство решений на графике.
   (b) Найдите множество всех решений неопределённой системы, изобразите его на том же графике.

1.2 Решение

Совместность, Определенность

Теорема Кронкера-Капелли
Критерий совместности системы линейных алгебраических уравнени. Система уравнений $Ax = B$ разрешима тогда и только тогда, когда $rang\ A = rang\ A \mid B$, где $A \mid B$ - расширенная матрица

Следствие из Теоремы Кронкерна-Капелли
Совместная система будет определена (её решение единственно), если ранг системы равен числу всех её переменных.

Пункт а)

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&-1\\3&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\10\end{pmatrix}$$

Найдем ранги матриц с помощью метода Гаусса, оставляя только линейно независмые вектора-строки

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&-1\\3&3&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-7\\0&-3&-7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-7\end{pmatrix}\implies rang\ A=2$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&-1&3\\3&3&2&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-3&-7&-5\\0&-3&-7&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&-2.5&1\\0&0&-2.5&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&-2.5&1\\0&0&0&9\end{pmatrix}\implies rang\ A\mid B=3$$

$$rang\ A \neq rang\ A\mid B \implies \text{Система не совместна и не определена}$$

Пункт b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & -3 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies rang\ A = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 9 \\ 3 & -5 & 1 & -4 \\ 4 & -7 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & -8 & -31 \\ 0 & -3 & -11 & -31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & -8 & -31 \\ 0 & 0 & 1 & 15.5 \end{pmatrix} \implies rang\ A \mid B = 3$$

$$rang\ A = rang\ A \mid B \implies \text{Система совместна}$$
$$rang\ A = \dim x \implies \text{Система определена}$$

Поиск определителя и решение системы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = Ax = B$$

Поиск определеителя

Разложение по 3 строке:

$$\det A = 4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - (-7) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 14 + 7(-8) - 2 = -2$$

Разложение по 2 столбцу:

$$\det A = -(-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-5) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (-7) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 5 \cdot (-11) + 7 \cdot (-8) = -2$$

Решение системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 1 & 3 \\ 4 & -7 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & -8 & -31 \\ 0 & 0 & 1 & 15.5 \end{array}\right)$$

$z = 15.5$

$$-2y - 8z = -31 \implies y = \frac{-31 + 8z}{-2} = -46.5$$

$$x - y + 3z = 9 \implies x = 9 - 3z + y = -84$$

Решение: $\begin{pmatrix} -84 \\ -46.5 \\ 15.5 \end{pmatrix}$

Решение однородной системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -7 \end{pmatrix} \implies$$

$\implies x_1, x_2$ - основные переменные;

x_3 - свободная переменная

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{3}x_3 \\ x_2 = -\frac{7}{3}x_3 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} \frac{5}{3}x_3 \\ -\frac{7}{3}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ - общее решение}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ - базис решений}$$

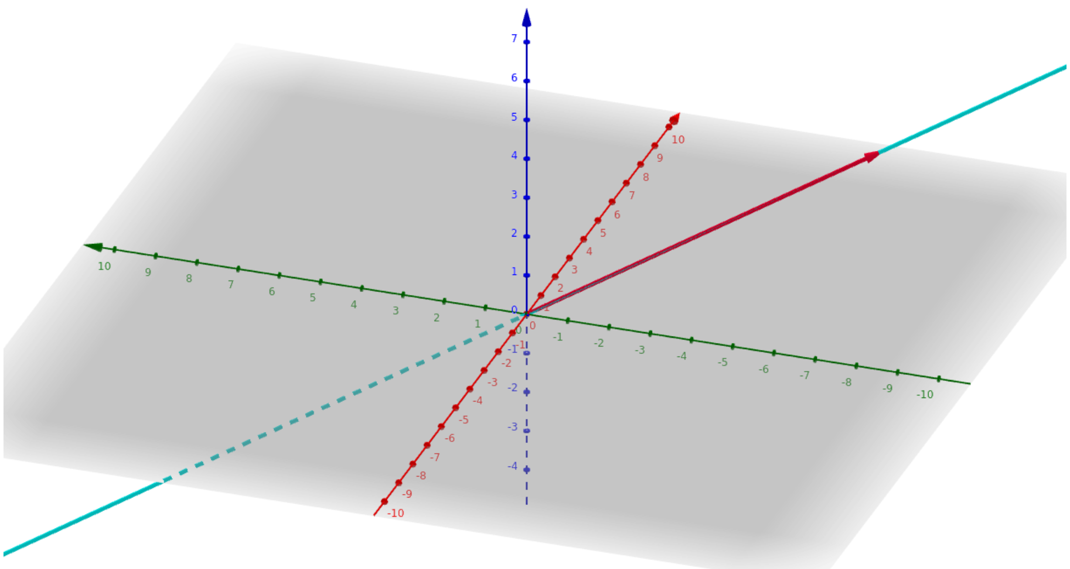

Рис. 1: Подпространство решений на графике

2 Координаты вектора в базисе

2.1 Задание

Докажите, что система $\mathcal{A}$ является базисом в соответствующем линейном пространстве L. Найдите в этом базисе координаты элемента x.

a) L - пространство матриц второго порядка

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) L - пространство многочленов степени не больше четырёх

$$\mathcal{A} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$e_1 = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4; \quad e_2 = t + t^2 + t^3 + t^4$$
$$e_3 = t^2 + t^3 + t^4; \quad e_4 = t^3 + t^4; \quad e_5 = t^4$$
$$x = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$$

2.2 Решение

Пункт a)

Докажем, что $\mathcal{A}$ - базис

k - коэффициенты линейной комбинации

$$k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 + k_4A_4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0k_1 + 1k_2 + 1k_3 + 1k_4 & 1k_1 + 0k_2 + 1k_3 + 1k_4 \\ 1k_1 + 1k_2 + 0k_3 + 1k_4 & 1k_1 + 1k_2 + 1k_3 + 0k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ k_1 + k_3 + k_4 = 0 \\ k_1 + k_2 + k_4 = 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \implies 3(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) = 0$$

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0 \implies \forall i \in \{1, 2, 3, 4\},\ k_i = 0$$

Из того факта, что 0 матрица представима только через тривиальную комбинацию следует линейная независимость набора $\mathcal{A}$, а значит он является базисом.

Найдем координаты x в данном базисе

$$\begin{cases} k_2 + k_3 + k_4 = 1 \\ k_1 + k_3 + k_4 = 4 \\ k_1 + k_2 + k_4 = 2 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 2 \end{cases} \implies 3(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) = 9$$

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 3 \implies k_1 = 2;\ k_2 = -1;\ k_3 = 1;\ k_4 = 1$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Пункт b)

Аналогично пункту a)

$$\sum_{i=1}^{5} k_ie_i = 0k_1 + t(k_1 + k_2) + t^2(k_1 + k_2 + k_3) + t^3(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + t^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5) = 0$$

$$\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 0 \end{cases} \implies \forall i = \{1, ..., 5\},\ k_i = 0$$

Найдем координаты x в данном базисе

$$\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_1 + k_2 = -1 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 1 \\ k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = -1 \\ k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -2 \\ k_3 = 2 \\ k_4 = -2 \\ k_5 = 2 \end{cases}$$

$$x = 1e_1 - 2e_2 + 2e_3 - 2e_4 + 2e_5$$

3 Линейная оболочка и СЛАУ

3.1 Задание

Найдите систему линейных уравнений, подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой системы векторов $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

3.2 Решение

Рассмотрим систему с 4 неизвестными и 3 уравнениями $Ax = 0$, где i-ая строка матрицы A - это i-ый вектор в наборе $\mathcal{A}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & -4 \end{pmatrix} x = 0$$

Найдем ФСР этой системы

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 5x_2 - 1x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \dfrac{3(0.2x_3 + 0.8x_4) - 2x_3 - 4x_4}{2} = -0.7x_3 - 0.8x_4 \\ x_2 = \dfrac{x_3 + 4x_4}{5} = 0.2x_3 + 0.8x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

Подставим вместо x_3 и x_4 значения (0, 10) и (10, 0), таким образом получив частное решение

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \text{Общее решение: } x = C_1 \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{где } (C_1, C_2) \neq (0, 0)$$

В итоге, подставив эти частные решения, мы получим искомую нами систему

$$Bx = \begin{pmatrix} -8 & 8 & 0 & 10 \\ -7 & 2 & 10 & 0 \end{pmatrix} x = 0$$

Объяснение решения

$Ax = 0$ - система, в которой каждая строчка - это данный нам вектор. Если мы найдем ФСР этой системы, то мы фактический найдем вектора, компоненты которых, при подстановке в линейную комбинацию с каким-либо из наших решений, дают 0. То есть, для любого вектора b_i из ФСР $Ax = 0$ правда, что $b_i \cdot a_i = 0$, что значит, что матрица B с векторами b_i в качестве строк это и есть искомая нами система

4 Координаты при смене базиса

4.1 Задание

В линейном пространстве со стандартным базисом $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

заданы системы векторов $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$

1. Покажите, что каждая система образует базис
2. Проверьте каждый из этих базисов на ортогональность и ортонормаированость
3. Найдите матрицу перехода $\mathcal{T}$ из базиса $\mathcal{A}$ в базис $\mathcal{B}$
4. Вектор x в базисе $\mathcal{B}$ имеет координаты $x_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{pmatrix}^T$. Найдите его координаты $x_{\mathcal{A}}$ в базисе $\mathcal{A}$
5. В базисе E изобразите вектора $\mathcal{A}$ и вектор x

*Для расчетов рекмендуется использовать онлайн-калькулятор, так что автор позволил себе использовать язык программирования 'python', библиотеку 'numpy' и сервис https://matrixcalc.org/

$$a_1 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.0795 \\ 0.8624 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.7866 \\ 0.3624 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0.7071 \\ 0.6124 \\ 0.3536 \end{pmatrix}$$
$$b_1 = \begin{pmatrix} -0.9142 \\ -4.1326 \\ 3.3295 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} -2.1213 \\ -3.2513 \\ 1.3888 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} -0.7929 \\ 0.1436 \\ 4.1654 \end{pmatrix}$$
$$x_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1.3448 \\ -0.4138 \\ -0.5517 \end{pmatrix}$$

4.2 Решение

Проверка базиса

Система образует базис, если она линейно независима
$\det A = 1.000092227944 \neq 0 \implies$ Система $\mathcal{A}$ образует базис
$\det B = -28.999412120235 \neq 0 \implies$ Система $\mathcal{B}$ образует базис

Ортогональность и ортонормированность

Для проверки ортогональности нужно проверить, что скалярное произведение каждой пары векторов в системе равно 0
$a_1 \cdot a_2 \approx 0.0000353 \neq 0 \implies \mathcal{A}$ - не ортогональный базис
$b_1 \cdot b_2 = 19.99962444 \neq 0 \implies \mathcal{B}$ - не ортогональный базис

Для проверки ортонормированности необходимо удостовериться, что длина каждого вектора равна 1
$|a_3| = 1.0000285645920322 \neq 1 \implies \mathcal{A}$ - не образует ортонормированный базис
$|b_1| = 5.385138312986956 \neq 1 \implies \mathcal{B}$ - не образует ортонормированный базис

Матрица перехода из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$

$A \cdot \mathcal{T} = B \implies \mathcal{T} = A^{-1}B$
A, B - матрицы, где каждый столбик это вектор систем $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ соответственно

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 2.9999217120383377 & 2.0000079445712884 & 3.9998116457915214 \\ 3.9998851088471747 & 1.999921346950009 & 1.0000848298943132 \\ -1.9999741173871002 & 2.9999387656475185 & 0.9998068278158734 \end{pmatrix}$$

Переход от $x_{\mathcal{B}}$ к $x_{\mathcal{A}}$

$AT = B \implies BT^{-1} = A$
Матрица перехода $\mathcal{B} \to \mathcal{A} = \mathcal{T}^{-1}$

$$\mathcal{T}^{-1} = \begin{pmatrix} -0.17242381886359012 & 0.48277194840136467 & 0.20688986217426056 \\ 0.20689417742246216 & -0.37931377137699235 & -0.44827838669174563 \\ 0.27587998062659236 & -0.17241999244105646 & 0.06897998447407111 \end{pmatrix}$$

$$x_{\mathcal{A}} = Tx_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0.999995345902375 \\ 3.9997312403570744 \\ -1.9997839587432464 \end{pmatrix}$$

Изображение векторов

$$T_E \text{ - матрица перехода из A в E}$$
$$AT_E = E \implies T_E = A^{-1}E = A^{-1}$$
$$x_E = T_E x_A = A^{-1}x_A = \begin{pmatrix} -1.9067299375586808 \\ -3.3706202581519964 \\ 2.4493572425385843 \end{pmatrix}$$

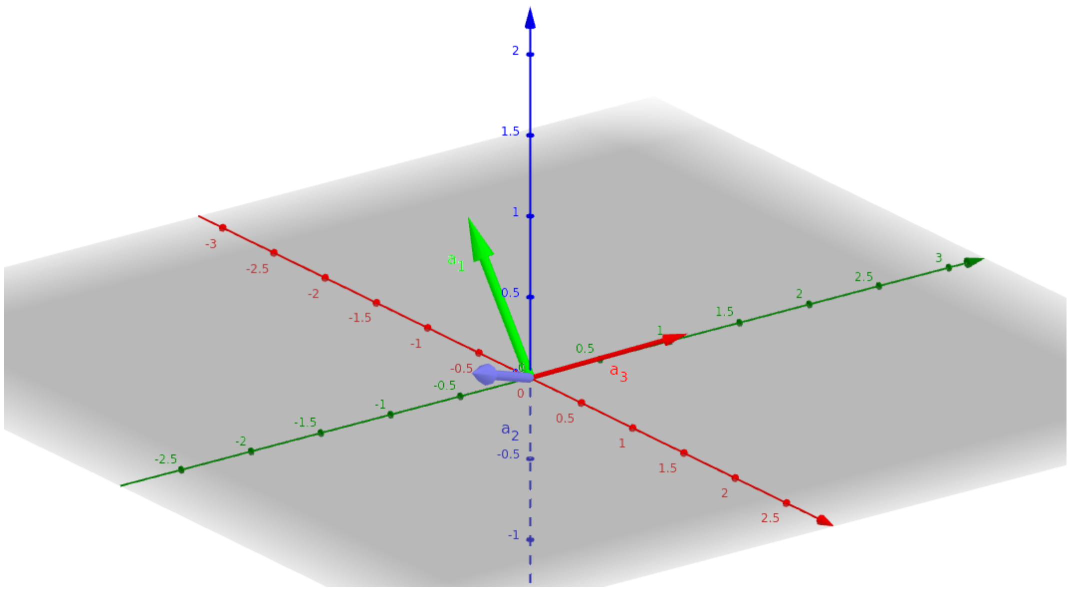

Рис. 2: Вектора базиса $\mathcal{A}$ в базисе E

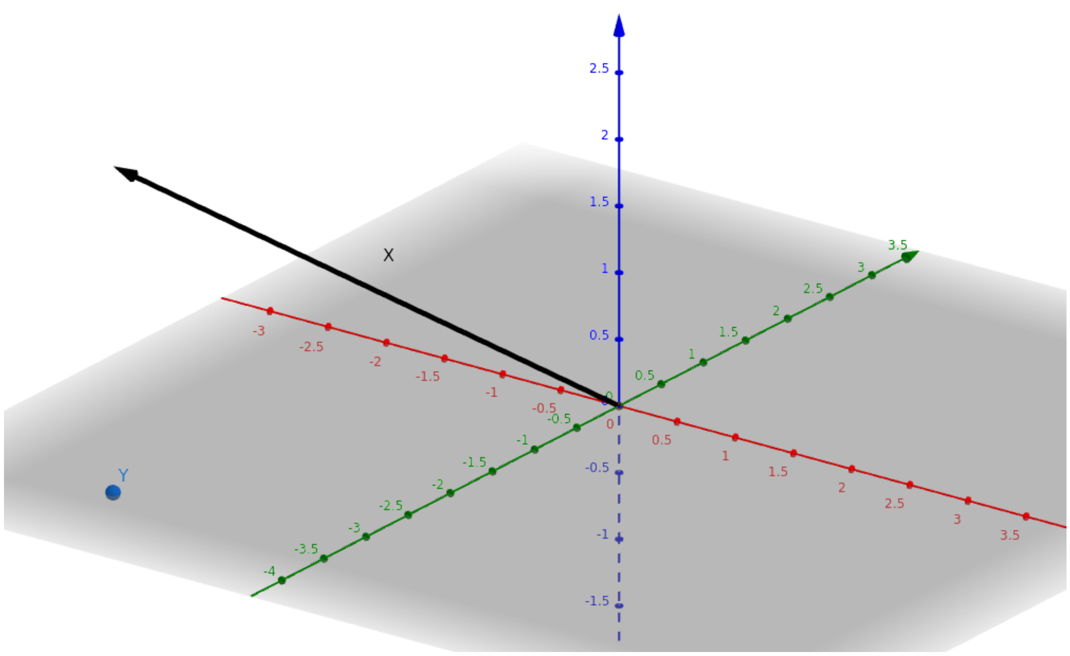

Рис. 3: Вектор x в базисе E

5 Вывод

Во время выполнения этой расчетной работы мы научились решать системы линейных алгебраических уравнений с помощью системы Гаусса, находить детерминант через разложение по строкке/столбцу, определять является ли набор элементов линейного пространства базисом, пользоваться матрицой перехода, а также разузнали некоторые смежные термины/теоремы.

5.1 Оценочный лист

- Файзиев Фаридун, P3112, 100%: Решение задачи, подготовка отчета

- Мостовский Матвей, P3133, 80%: Решение задачи

- Глебов Андрей, P3112, 80%: Решение задачи