MOWNIT - Zestaw 4B Całkowanie numeryczne

Opracował: Mateusz Woś

Zadania:

1. *Obliczyć* $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ *wg wzoru prostokątów, trapezów i wzoru Simpsona (zwykłego i złożonego n=3, 5). Porównać wyniki i błędy.*

Rzeczywista wartość całki I wynosi: $I = \log(2) \approx 0.69315$

a) Metoda prostokątów

$n = 3, h = \frac{1}{3}$ $(h = \frac{x_k - x_p}{n})$

$x_s = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right\}$ $(x_i = \frac{b-a}{2}, gdzie\ apoczatek\ przedzialu\ prostokątak, b - koniec)$

$I_{p3} = \left(f\left(\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{5}{6}\right)\right) * h = 0.68975$

Błąd bezwzględny: $B_B = \left|I - I_{p3}\right| = 0.0034$

Błąd względny: $B_w = \frac{B_B}{I} * 100\% = 0.49\%$

$n = 5, h = \frac{1}{5}$

$x_s = \left\{\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}\right\}$

$I_{p5} = \left(f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{3}{10}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{7}{10}\right) + f\left(\frac{9}{10}\right)\right) * h = 0.69191$

Błąd bezwzględny: $B_B = \left|I - I_{p5}\right| = 0.00124$

Błąd względny: $B_w = \frac{B_B}{I} * 100\% = 0.17\%$

b) Metoda trapezów

$n = 3, h = \frac{1}{3}$

$x_s = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ $(x_i = x_p + \frac{i(x_k - x_p)}{n})$

$I_{t3} = \left(f(0) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f(1)\right) * \frac{h}{2} = 0.7$

Błąd bezwzględny: $B_B = |I - I_{t3}| = 0.00685$

Błąd względny: $B_w = \frac{B_B}{I} * 100\% = 0.99\%$

$$n = 5, h = \frac{1}{5}$$

$$x_s = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right\}$$

$$I_{t5} = \left(f(0) + f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) + f(1)\right) * \frac{h}{2} = 0.69563$$

Błąd bezwzględny: $B_B = |I - I_{t5}| = 0.00248$

Błąd względny: $B_w = \frac{B_B}{I} * 100\% = 0.36\%$

c) Metoda Simpsona

$$n = 3, h = \frac{1}{3}$$

$$x_s = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\} \ (x_i = x_p + \frac{i(x_k - x_p)}{n})$$

$$I_{s3} = \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{2}(f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}) = 0.69445$$

Błąd bezwzględny: $B_B = |I - I_{s3}| = 0.0013$

Błąd względny: $B_w = \frac{B_B}{I} * 100\% = 0.19\%$

$$n = 5, h = \frac{1}{5}$$

$$x_s = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right\}$$

$$I_{s5} = \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{4}(f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}) = 0.69325$$

Błąd bezwzględny: $B_B = |I - I_{s5}| = 0.0001$

Błąd względny: $B_w = \frac{B_B}{I} * 100\% = 0.014\%$

2. *Obliczyć całkę $I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)} dx$ korzystając z wielomianów ortogonalnych (np. Legendre'a) dla n=8.*

Rzeczywista wartość całki I wynosi: $I = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$

Korzystając z wielomianów Legendre'a dla max n=8. Mamy:

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$
$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$
$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$
$$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$$
$$P_8(x) = \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)$$

W takim razie:
Macierz diagonalna to: $s_{m,n} = \int_{-1}^{1} P_{m-1}(x) * P_{n-1}(x) dx$
Wektor wyrazów wolnych: $b_m = \int_{-1}^{1} P_{m-1}(x) * f(x) dx$
Ponadto: $b_m(x) = c_m * s_{m,m}$
Wiemy więc, że funkcja aproksymująca to:

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{n} c_i * P_{i-1}(x)$$

Mamy więc:

$$s_{11} = \int_{-1}^{1} P_0(x) * P_0(x) = \int_{-1}^{1} 1 = 2$$
$$s_{22} = \int_{-1}^{1} P_1(x) * P_1(x) = \int_{-1}^{1} x^2 = \frac{2}{3}$$
$s_{33} = \frac{2}{5}, s_{44} = \frac{2}{7}, s_{55} = \frac{2}{9}, s_{66} = \frac{2}{11}, s_{77} = \frac{2}{13}, s_{88} = \frac{2}{15}, s_{99} = \frac{2}{17}$

$$b_1 = \int_{-1}^{1} P_0(x) * f(x) = \frac{\pi}{2}$$
$$b_2 = \int_{-1}^{1} P_1(x) * f(x) = 0$$
$b_3 = 3 - \pi, b_4 = 0, b_5 = \frac{51\pi - 120}{12}, b_6 = 0, b_7 = \frac{644 - 205\pi}{10}, b_8 = 0, b_9 = \frac{1667\pi}{16} - \frac{11456}{35}$

Z tego obliczamy:
$c_1 = \frac{\pi}{4}, c_2 = 0, c_3 = \frac{15 - 5\pi}{2}, c_4 = 0, c_5 = \frac{153\pi - 480}{8}, c_6 = 0, c_7 = \frac{13(205\pi - 644)}{20}, c_8 = 0,$
$c_9 = \frac{17(58345\pi - 91648)}{1120}$

Nasza funkcja wygląda następująco:

$$f(x) = \frac{(1276530255\pi - 4010333184)x^8 + (7659235584 - 2438015580\pi)x^6}{28672} + \frac{(1452340890\pi - 4562638080)x^4 + (870777600 - 277186140\pi)x^2 + 8385615\pi - 26315520)}{28672}$$

Po wprowadzeniu funkcji i scałkowaniu jej na przedziale (-1,1) na stronie wolframalpha.com otrzymujemy wartość $\frac{\pi}{2}$ co równe jest rzeczywistej wartości naszej początkowej całki.

Zadanie domowe:

1. *Obliczyć całkę $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)} dx$ korzystając ze wzoru prostokątów, trapezów i wzoru Simpsona dla h=0.1*

Rzeczywista wartość całki I wynosi: $I = \frac{\pi}{4} \approx 0.78540$

a)

$$n = 10, h = \frac{1}{10} \ (h = \frac{x_k - x_p}{n})$$

$$x_s = \left\{\frac{1}{20}, \frac{3}{20}, \frac{5}{20}, \frac{7}{20}, \frac{9}{20}, \frac{11}{20}, \frac{13}{20}, \frac{15}{20}, \frac{17}{20}, \frac{19}{20}\right\}$$

$$(x_i = \frac{b-a}{2}, gdzie\ apoczatek\ przedzialu\ prostokątak, b - koniec)$$

$$I_{p10} = \left(f\left(\frac{1}{20}\right) + f\left(\frac{3}{20}\right) + f\left(\frac{5}{20}\right) + \cdots + f(\frac{19}{20})\right) * h = 0.78560$$

Błąd bezwzględny: $B_B = \left|I - I_{p10}\right| = 0.0002$

Błąd względny: $B_w = \frac{B_B}{I} * 100\% = 0.03\%$

b)

$$n = 10, h = \frac{1}{10}$$

$$x_s = \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}, 1\right\}$$

$$I_{t10} = \left(f(0) + 2f\left(\frac{1}{10}\right) + 2f\left(\frac{2}{10}\right) + \cdots + 2f\left(\frac{9}{10}\right) + f(1)\right) * \frac{h}{2} = 0.78498$$

Błąd bezwzględny: $B_B = |I - I_{t5}| = 0.00042$

Błąd względny: $B_w = \frac{B_B}{I} * 100\% = 0.05\%$

c)

$n = 10, h = \frac{1}{10}$

$x_s = \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}, 1\right\}$

$I_{s10} = \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{9}(f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}) \approx 0.78540$

Błąd bezwzględny: $B_B = |I - I_{s10}| \approx 0$

Błąd względny: $B_w = \frac{B_B}{I} * 100\% \approx 0\%$

2. *Metodą Gaussa obliczyć następującą całkę* $I = \int_0^1 \frac{1}{(x+3)} dx$ *dla n=4. Oszacować resztę kwadratury.*

Rzeczywista wartość całki I wynosi: $I = \log(\frac{4}{3}) \approx 0.2877$

Rozwiązanie metodą Gaussa-Legendre'a.

Mamy:

$$A_0 = A_4 = 0.236927$$
$$A_1 = A_3 = 0.478629$$
$$A_2 = 0.568889$$

$$x_0 = 0.906180$$
$$x_1 = 0.538469$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = -0.538469$$
$$x_4 = -0.906180$$

Wyprowadzamy funkcję g(x) aby znormalizować przedział do przedziału [-1,1]

$$g(x) = \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2} f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})$$

$$I(f) = \sum_{i=0}^{4} A_i g(x_i) = 0.2876822$$

Błąd bezwzględny: $B_B = \left|I - I_p\right| \approx 0.0000178$

Błąd względny: $B_w = \frac{B_B}{I} * 100\% \approx 0.006\%$