MOWNIT - Zestaw 3B Aproksymacja

Opracował: Mateusz Woś

Zadania:

1.Aproksymować funkcję f(x) = 1+ x^3 -w przedziale [0,1] wielomianem pierwszego stopnia metodą średniokwadratową ciągłą dla w(x)=1.

Metoda średniokwadratowa ciągła dla w(x) = 1.
Baza będzie miała wtedy postać $\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = x$

Aby dostać współczynniki funkcji aproksymującej musimy rozwiązać poniższy układ.

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_3 \\ f_2 & f_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_5 \\ f_6 \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$f_1 = \int_0^1 w(x)\phi_0(x)\phi_0(x)dx = \int_0^1 dx = 1$$

$$f_2 = \int_0^1 w(x)\phi_1(x)\phi_0(x)dx = \int_0^1 xdx = 0.5$$

$$f_3 = \int_0^1 w(x)\phi_0(x)\phi_1(x)dx = \int_0^1 dx = 0.5$$

$$f_4 = \int_0^1 w(x)\phi_1(x)\phi_1(x)dx = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$$

$$f_5 = \int_0^1 w(x)\phi_0(x)f(x)dx = \int_0^1 (1 + x^3)dx = 1.25$$

$$f_6 = \int_0^1 w(x)\phi_1(x)f(x)dx = \int_0^1 x(1 + x^3)dx = 0.7$$

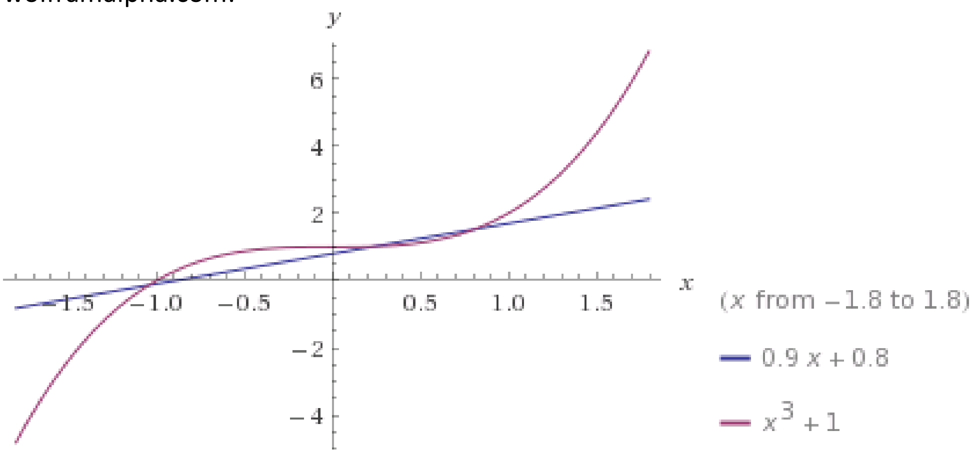
Otrzymujemy, więc:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

Z tego:

$$a_0 = 0.8, a_1 = 0.9$$
$$f_a(x) = 0.9x + 0.8$$

Funkcja z wolframalpha.com:



2.Aproksymować funkcję f(x) = 1+ x^3 -w przedziale [0,1] wielomianem stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Czebyszewa.

Z wagą $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Baza ma postać: $T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1$

Aby dostać współczynniki funkcji aproksymującej musimy rozwiązać poniższy układ.

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_4 & f_5 & f_6 \\ f_7 & f_8 & f_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{10} \\ f_{11} \\ f_{12} \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$f_1 = \int_0^1 w(x)T_0(x)T_0(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$f_2 = \int_0^1 w(x)T_0(x)T_1(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 1$$

$$f_3 = \int_0^1 w(x)T_0(x)T_2(x)dx = \int_0^1 \frac{(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0$$

$$f_4 = \int_0^1 w(x)T_1(x)T_0(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 1$$

$$f_5 = \int_0^1 w(x)T_1(x)T_1(x)dx = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{4}$$

$$f_6 = \int_0^1 w(x)T_1(x)T_2(x)dx = \int_0^1 \frac{x(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{3}$$

$$f_7 = \int_0^1 w(x)T_2(x)T_0(x)dx = \int_0^1 \frac{(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0$$

$$f_8 = \int_0^1 w(x)T_2(x)T_1(x)dx = \int_0^1 \frac{x(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{3}$$

$$f_9 = \int_0^1 w(x)T_2(x)T_2(x)dx = \int_0^1 \frac{(2x^2-1)(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{4}$$

$$f_{10} = \int_0^1 w(x)T_0(x)f(x)dx = \int_0^1 \frac{(x^3+1)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{4+3\pi}{6}$$

$$f_{11} = \int_0^1 w(x)T_1(x)f(x)dx = \int_0^1 \frac{x(x^3+1)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{16+3\pi}{16}$$

$$f_{12} = \int_0^1 w(x)T_2(x)f(x)dx = \int_0^1 \frac{(2x^2-1)(1+x^3)}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0.4$$

Mamy więc:

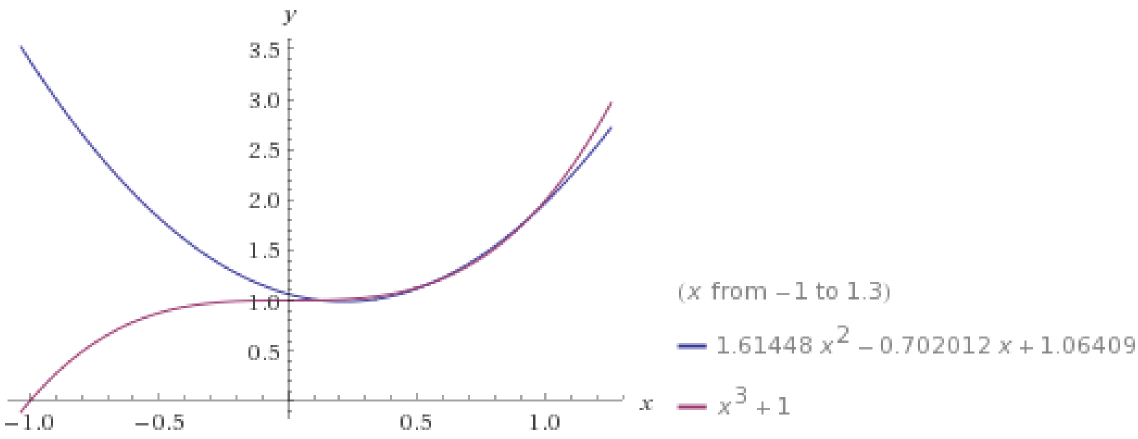
$$\begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{\pi}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4+3\pi}{6} \\ \frac{16+3\pi}{16} \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

Czyli:

$$a_0 \approx 1.87133, a_1 \approx -0.702012, a_2 \approx 0.807239$$

$$f_a(x) = 1.87133 - 0.702012x + 0.807239(2x^2-1)$$

Funkcja z wolframalpha.com:



Zadania domowe:

1.Obliczyć 4-5 współczynników aproksymacji funkcji |x| w przedziale [-1,1] wielomianami Czebyszewa. Obliczyć błąd aproksymacji w równoodległych punktach z odstępem 0.2, poczynając od punktu –0.8. Narysować na papierze kratkowanym funkcję aproksymowaną i aproksymującą.

Baza ma postać: $T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^2 - 3x, T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$
Do obliczenia współczynników mogę posłużyć się wzorem:

$$c_i = \frac{1}{\lambda_i} \int_{-1}^{1} p(x)T_i(x)f(x)dx$$

$$\frac{1}{\pi}\ dla\ \lambda_0, \frac{2}{\pi}\ dla\ reszty\ \lambda_i$$

Mamy więc:

$$c_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi}$$

$$c_2 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{|x| * x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$$

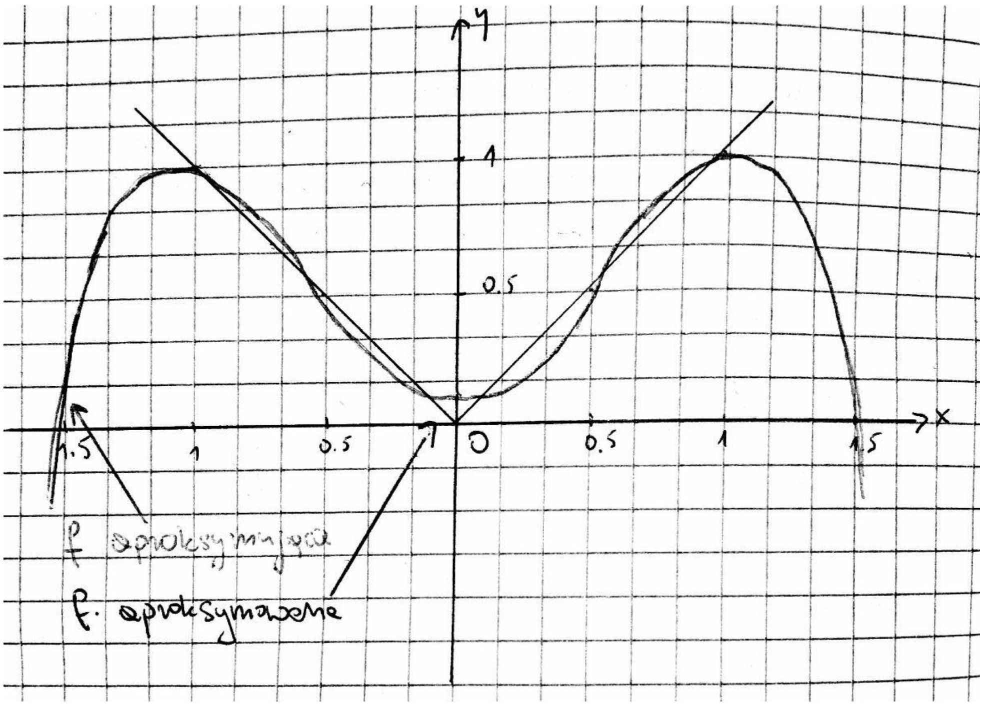
$$c_3 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{|x| * (2x^2 - 1)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{4}{3\pi}$$

$$c_4 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{|x|(4x^2 - 3x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$$

$$c_5 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{|x|(8x^4 - 8x^2 + 1)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{-4}{15\pi}$$

Funkcja ma postać:

$$f_a(x) = \frac{-4}{15\pi}(8x^4 - 8x^2 + 1) - \frac{4}{3\pi}(2x^2 - 1) + \frac{2}{\pi}$$



Błąd aproksymacji:

x	aproksymowana	aproksymująca	Bł. bezwględny	Bł. względny
-0.8	0.8	≈0.8270	0.0270	3.375%
-0.6	0.6	≈0.5893	0.0107	1,78%
-0.4	0.4	≈0.3544	0.0456	11.4%
-0.2	0.2	≈0.1873	0.0127	6.35%
0	0	≈0.1273	0.1273	infinity
0.2	0.2	≈0.1873	0.0127	6.35%
0.4	0.4	≈0.3533	0.0456	11.4%
0.6	0.6	≈0.5893	0.0107	1,78%
0.8	0.8	≈0.8270	0.0270	3.375%
1	1	≈0.9761	0.0239	2.39%

2. Wykonać aproksymację funkcję |sin(x)| funkcjami trygonometrycznymi w zakresie [-pi, pi].

Funkcję |sinx| można z łatwością rozwinąć w szereg cosinusów z pomocą szeregu Fouriera. Jako, że |sinx| jest parzyste nie występują sinusy:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx = -\frac{2[(-1)^n + 1]}{\pi(n^2 - 1)}$$

Dla parzystych n licznik się zeruje. Dla nieparzystych jest równy -4. Rozwińmy funkcje dla 3 punktów.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n cosnx$$

$$a_2 = \frac{-4}{3\pi}, a_4 = \frac{-4}{15\pi}, a_6 = \frac{-4}{35\pi}$$

Wtedy funkcja wygląda tak:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{-4}{3\pi}\cos(2x) + \frac{-4}{15\pi}\cos(4x) + \frac{-4}{35\pi}\cos(6x)$$

Funkcja z wolframalpha: