MOWNIT - Zestaw 5B Pierwiastki równań nieliniowych

Opracował: Mateusz Woś

Zadania:

1. Napisz iteracje wg metody Newtona do rozwiązywania każdego z następujących równań nieliniowych:

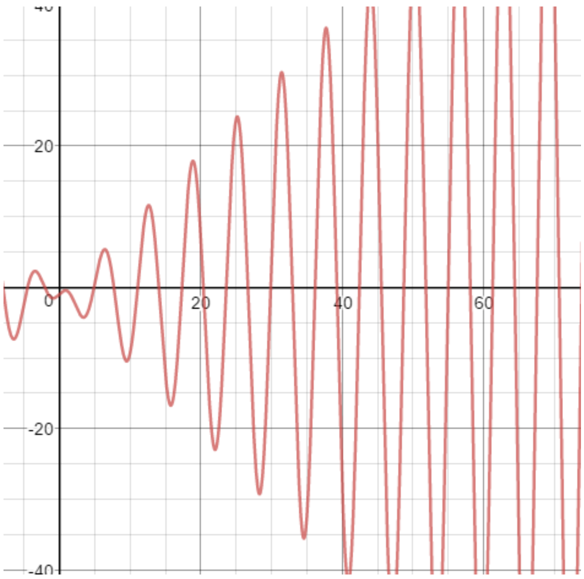
(a) $x \cos(x) = 1$;

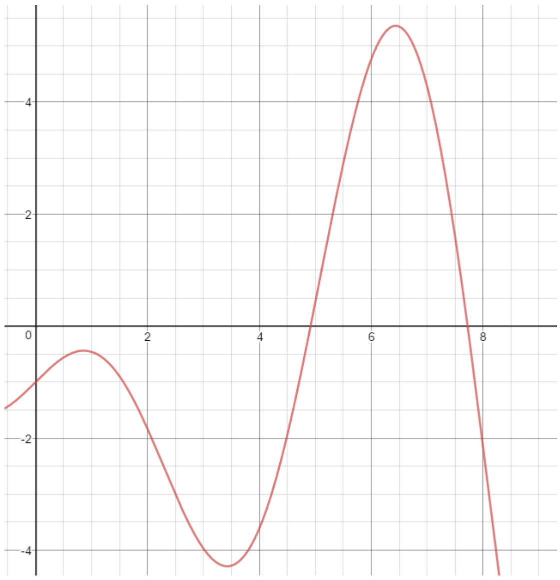
(b) $x^3 - 5x - 6 = 0$;

(c) $e^{-x} = x^2 - 1$

Ad. a) x cos(x) =1

Wygenerowałem wykres funkcji, aby w przybliżeniu określić granicę przedziału, w którym znajduję się dany pierwiastek.





Widać, iż funkcja jest okresowa i ma nieskończenie wiele pierwiastków. Dla tego zadania obliczę dwa pierwsze pierwiastki na dodatniej części osi OX. Pierwiastki mieszczą się w przedziale [4,5] i [7,8]

Warunek f(x)f(b) < 0:

$f(4)f(5) \approx -1.4937 < 0$

$f(7)f(8) \approx -9.2554 < 0$

Warunki są spełnione, więc funkcja ma miejsca zerowe w tych przedziałach.

Licząc pierwiastki za pomocą metody Newtona Raphsona:

$f(x) = xcos(x) - 1$

$f'(x) = \cos(x) - xsin(x)$

$f''(x) = -2\sin(\mathrm{x}) - \mathrm{xcos}(\mathrm{x})$

Należy sprawdzić znak wyrażenia f'(x)*f''(x) dla punktów brzegowych:
Dla x=4 => $f(x) = -3.6145, f'(x) = 2.3735, f''(x) = 4.1281$
Dla x=5 => $f(x) = 0.4183, f'(x) = 5.0782, f''(x) = 0.4995$
Dla x=7 => $f(x) = 4.2773, f'(x) = -3.8450, f''(x) = -6.5912$
Dla x=8 => $f(x) = -2.1640, f'(x) = -8.0603, f''(x) = -0.8147$

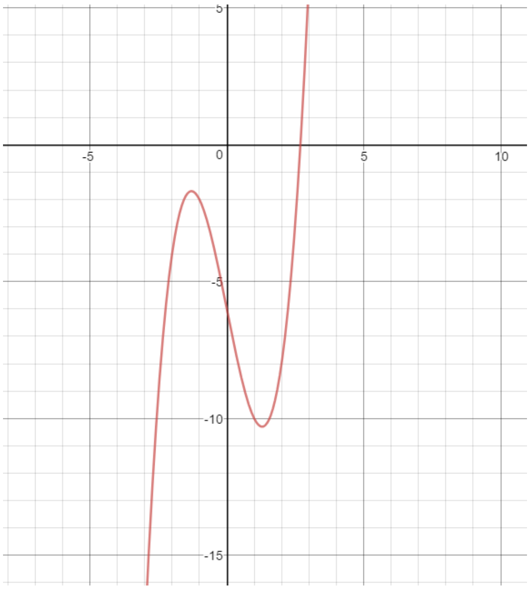
Dla obu przedziałów wartości są dodatnie.
Z tego wynika:
dla przedziału [4,5]: $x_0 = b = 5$; [7,8]: $x_0 = b = 8$
Za dokładność obliczeń przyjmiemy $\varepsilon = 10^{-5}$

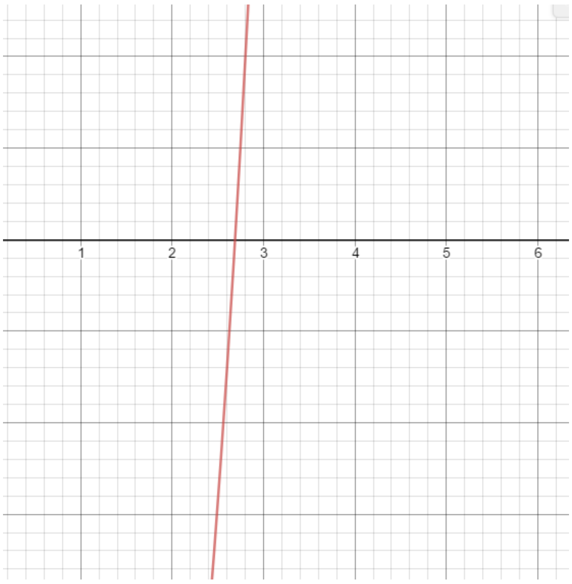
$Dla\ x \in [4,5]$:
$x_0 = 5$
$x_1 = 5 - \frac{f(5)}{f'(5)} = 4.9176; |x_0 - x_1| = 0.0824 > \varepsilon$
$x_2 = 4.9176 - \frac{f(4.9176)}{f'(4.9176)} = 4.917186; |x_1 - x_2| = 0.000414 > \varepsilon$
$x_3 = 4.91718 - \frac{f(4.91718)}{f'(4.91718)} = 4.917185925; |x_2 - x_3| < \varepsilon$

$Dla\ x \in [7,8]$:
$x_0 = 8$
$x_1 = 8 - \frac{f(8)}{f'(8)} = 7.73153; |x_0 - x_1| = 0.26847 > \varepsilon$
$x_2 = 7.73153 - \frac{f(7.73153)}{f'(7.73153)} = 7.724164; |x_1 - x_2| = 0.007366 > \varepsilon$
$x_3 = 7.724164 - \frac{f(7.724164)}{f'(7.724164)} = 7.7241532; |x_2 - x_3| = 0.0000108 > \varepsilon$
$x_4 = 7.7241532 - \frac{f(7.7241532)}{f'(7.7241532)} = 7.7241531924; |x_3 - x_4| < \varepsilon$

Warunki spełnione dla obu przedziałów. Otrzymaliśmy miejsca zerowe:
$x_1 = 4.917185925\ i\ x_2 = 7.7241531924$

Ad. b) x³ - 5x - 6 = 0;





Wygenerowałem wykres funkcji, aby w przybliżeniu określić granicę przedziału, w którym znajduję się dany pierwiastek.
Z wykresu możemy wywnioskować, iż pierwiastek będzie znajdował się w przedziale [2,3].

Warunek f(a)f(b) < 0:
$f(2)f(3) = -48 < 0$

Warunki są spełnione, więc funkcja ma miejsca zerowe w tych przedziale.
Licząc pierwiastek za pomocą metody Newtona Raphsona:
$f(x) = x^3 - 5x - 6$
$f'(x) = 3x^2 - 5$
$f''(x) = 6\text{x}$

Należy sprawdzić znak wyrażenia f'(x)*f''(x) dla punktów brzegowych:
Dla x=2 => $f(x) = -8, f'(x) = 7, f''(x) = 12$
Dla x=3 => $f(x) = 6, f'(x) = 19, f''(x) = 18$

Znak wyrażenia zawsze jest dodatni, czyli przyjmujemy $x_0 = b = 3$
Za dokładność obliczeń przyjmiemy $\varepsilon = 10^{-5}$

Sprawdzam warunek zbieżności dla x=3

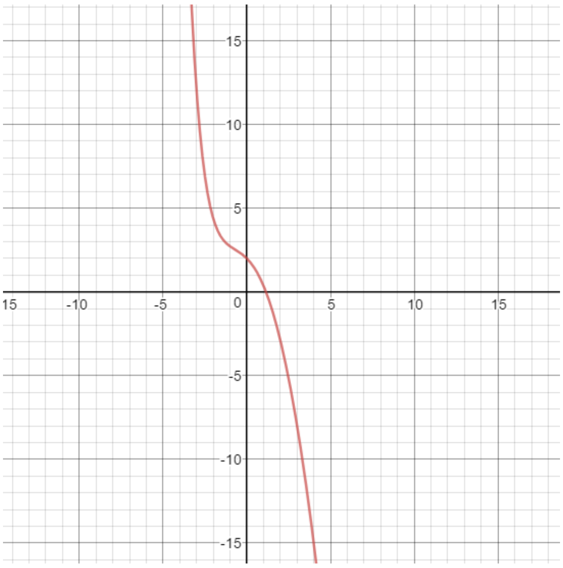
$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right| < 1 \rightarrow \left|\frac{f(3)f''(3)}{f'(3)^2}\right| < 1 \rightarrow 0.299 < 1$$

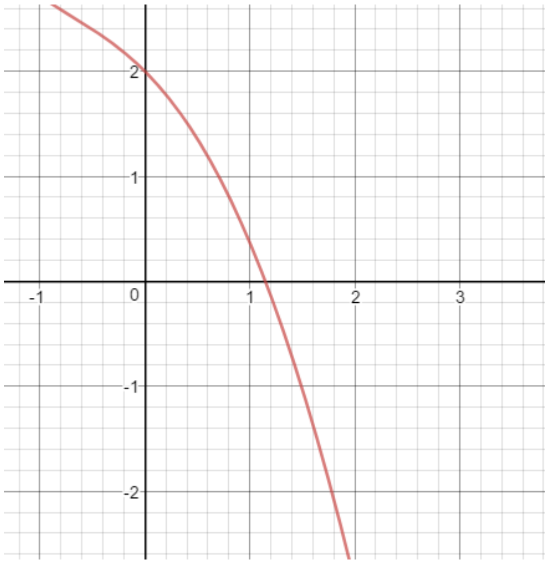
$Dla\ x \in [2,3]$:
$x_0 = 3$
$x_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 2.6842; |x_0 - x_1| = 0.31578 > \varepsilon$
$x_2 = 2.6842 - \dfrac{f(2.6842)}{f'(2.6842)} = 2.689106; |x_1 - x_2| = 0.004906 > \varepsilon$
$x_3 = 2.689106 - \dfrac{f(2.689106)}{f'(2.689106)} = 2.6890954; |x_2 - x_3| = 0.0000106 > \varepsilon$

$$x_4 = 2.6890954 - \frac{f(2.6890954)}{f'(2.6890954)} = 2.6890953237; |x_3 - x_4| < \varepsilon$$

Warunek spełniony dla przedziału. Otrzymaliśmy miejsce zerowe:
$x_0 = 2.6890953237$

Ad. c) $e^{-x} = x^2 - 1$





Wygenerowałem wykres funkcji, aby w przybliżeniu określić granicę przedziału, w którym znajduję się dany pierwiastek.
Z wykresu możemy wywnioskować, iż pierwiastek będzie znajdował się w przedziale [1,2].

Warunek f(a)f(b) < 0:
$f(1)f(2) = -1.0538 < 0$

Warunki są spełnione, więc funkcja ma miejsca zerowe w tych przedziale.
Licząc pierwiastek za pomocą metody Newtona Raphsona:
$f(x) = e^{-x} - x^2 + 1$
$f'(x) = -2x - e^{-x}$
$f''(x) = e^{-x} - 2$

Należy sprawdzić znak wyrażenia f'(x)*f''(x) dla punktów brzegowych:
Dla x=1 => $f(x) = 0.3678, f'(x) = -2.3678, f''(x) = -1.6321$
Dla x=2 => $f(x) = -2.8646, f'(x) = -4.1353, f''(x) = -1.8644$

Znak wyrażenia zawsze jest dodatni, czyli przyjmujemy x_0 = b = 2
Za dokładność obliczeń przyjmiemy $\varepsilon = 10^{-5}$

Sprawdzam warunek zbieżności dla x=3
$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right| < 1 \rightarrow \left|\frac{f(2)f''(2)}{f'(2)^2}\right| < 1 \rightarrow 0.0312 < 1$$

$Dla\ x \in [\ 1{,}2]$:
$x_0 = 2$
$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = \ 1.3072; |x_0 - x_1| = 0.6928 > \ \varepsilon$
$x_2 = 1.3072 - \dfrac{f(1.3072)}{f'(1.3072)} = \ 1.15532; |x_1 - x_2| = 0.15188 > \ \varepsilon$
$x_3 = 1.15532 - \dfrac{f(1.15532)}{f'(1.15532)} = \ 1.147776; |x_2 - x_3| = 0.007544 > \ \varepsilon$
$x_4 = 1.147776 - \dfrac{f(\ 1.147776)}{f'(\ 1.147776)} = \ 1.1477577; |x_3 - x_4| = 0.0000183 > \ \varepsilon$
$x_5 = 1.1477577 - \dfrac{f(\ 1.1477577)}{f'(\ 1.1477577)} = \ 1{,}147757632145; |x_5 - x_4| < \ \varepsilon$

Warunek spełniony dla przedziału. Otrzymaliśmy miejsce zerowe:
$x_0 = 1{,}147757632145$

2. (a) Pokaż, że iteracyjna metoda $x_{k+1} = (x_{k-1}f(x_k) - x_kf(x_{k-1}))/(f(x_k) - f(x_{k-1}))$ matematycznie jest równoważna z metodą siecznych przy rozwiązywaniu skalarnego nieliniowego równania f (x) = 0.
(b) Jeśli zrealizujemy obliczenia w arytmetyce zmiennoprzecinkowej o skończonej precyzji, jakie zalety i wady ma wzór podany w podpunkcie (a), w porównaniu ze wzorem dla metody siecznych podanym poniżej?
$x_{k+1} = x_k - (f\ (x_k)\ (x_k - x_{k-1})\ /\ (f\ (x_k) - f\ (x_{k-1}))$

Ad.b)

Metoda siecznych:
Zalety:
- Po wykonaniu interpolacji za jej pomocą niepotrzebna jest znajomość pochodnej funkcji
- Bardziej efektywna, ponieważ iteracja wymaga jedynie wyznaczenia wartości funkcji

Wady:
- Redukcja cyfr przy odejmowaniu
- Metoda może nie być zbieżna do pierwiastka
- Przybliżenie może być błędne jeśli ciąg przybliżeń nie jest malejący

Metoda iteracyjna:
Zalety:
- Im bliżej rozwiązania wystartujemy tym mniejsza ilość obliczeń musimy wykonać aby otrzymać poprawny wynik
- Zmniejszona ilość operacji
- Brak odejmowania, redukcji. Dokładny wynik nawet przy skomplikowanych funkcjach.

Wady:
- Pomimo mniejszej ilość iteracji, może być wolniejsza ze względu na złożoność

3. Zapisz iteracje Newtona do rozwiązywania następującego układu równań nieliniowych.
(dla ułatwienia przyjąłem $x_1 = x$; $x_2 = y$)

$$\begin{cases} x^2 + xy^3 = 9 \\ 3x^2y - y^3 = 4 \end{cases}$$

Metoda Newtona dla funkcji wielu zmiennych jest uogólnieniem metody dla funkcji jednej zmiennej. Dla funkcji wielu zmiennych gdy $f = (f_1, f_2, .. f_n): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ możemy funkcje przybliżyć równaniem afinicznym: $f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$
Gdzie $Df(x_0)$:

$$Df(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Załóżmy, że $x = x_o$, wtedy:

$$f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) = 0$$
$$f(x_0) + Df(x_0)x - Df(x_0)x_0 = 0$$
$$Df(x_0)x = Df(x_0)x_0 - f(x_0)$$

Gdy $Df(x_0)$ jest odwracalne to:

$$x = \frac{Df(x_0)x_0 - f(x_0)}{Df(x_0)} = I(x_0) - [DF(X_k)]^{-1}f(x_0)$$
$$x = x_0 - [DF(X_k)]^{-1}f(x_0)$$

Ogólnie można zapisać: $f_i(x_1, x_2, .. x_n) = 0 \quad \equiv F(X) = 0, gdzie$

$$\mathrm{X} = (x_1, x_2, .. x_n), \mathrm{F} = (f_1, f_2, .. f_n)$$

Otrzymujemy więc rekurencyjne rozwiązanie:

$$X_{k+1} = X_k - [DF(X_k)]^{-1}F(X_k)$$

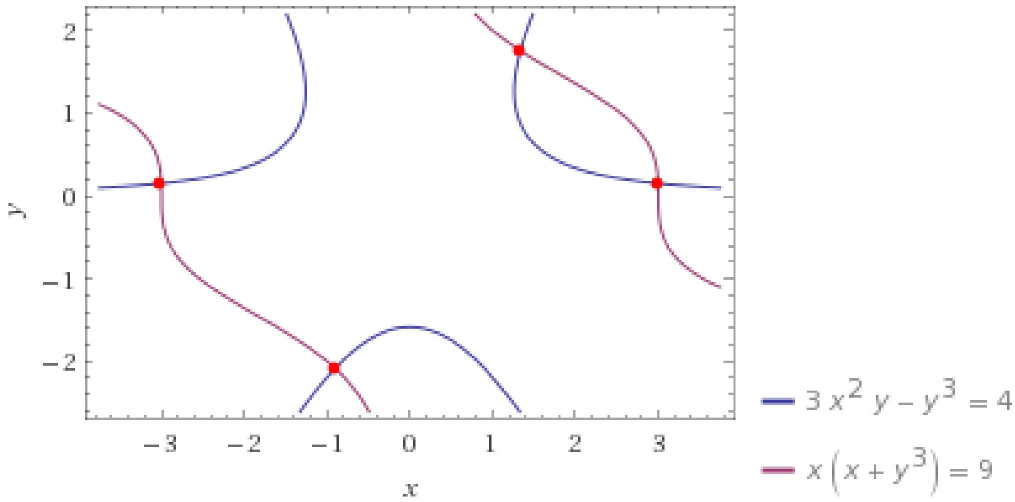
W naszym przypadku otrzymujemy równania:

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + xy^3 - 9 \\ 3x^2y - y^3 - 4 \end{bmatrix}$$

$$DF(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial \mathrm{y}} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial \mathrm{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y^3 & 3y^2x \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{bmatrix}$$

$$X_{k+1} = X_k - \begin{bmatrix} 2x + y^3 & 3y^2x \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x^2 + xy^3 - 9 \\ 3x^2y - y^3 - 4 \end{bmatrix}$$

Aby zacząć obliczać musimy znać w przybliżeniu przedziały, w których znajdują się dane pierwiastki.



Wykres wygenerowany przez wolframalpga.com.

Z wykresu możemy wywnioskować, iż pierwiastki będą mieścić się w przedziałach:

1. $x \in [-3.5;\ -2.5]; y \in [-0.5; 0.5]$
2. $x \in [-1.5;\ -0.5]; y \in [-2.5; -1.5]$
3. $x \in [1;\ 2]; y \in [1; 2]$
4. $x \in [2.5;\ 3.5]; y \in [-0.5; 0.5]$

Obliczenia zostały wykonane przez program komputerowy.

Ad.1)

$$(x_0, y_0) = (-2.5, 0.5)$$
$$(x_1, y_1) = (-2.944751, 0.02302)$$
$$(x_2, y_{02}) = (-3.0006277, 0.152894)$$
$$(x_3, y_3) = (-3.001619797, 0.14810494)$$
$$(x_4, y_4) = (-3.00162488668, 0.14810799497)$$

Ad.2)

$$(x_0, y_0) = (-0.5, -1.5)$$
$$(x_1, y_1) = (-1.38009, -2.451735)$$
$$(x_2, y_{02}) = (-1.040786, -2.158146)$$
$$(x_3, y_3) = (-0.9013452, -2.08656217)$$
$$(x_4, y_4) = (-0.9012661911, -2.0865875929)$$

Ad.3)

$$(x_0, y_0) = (2, 2)$$
$$(x_1, y_1) = (1{,}5{,}1{,}791667)$$
$$(x_2, y_{02}) = (1.347977, 1.7538239)$$
$$(x_3, y_3) = (1.3363974, 1.754215276)$$

$$(x_4, y_4) = (1.3363557738, 1.7542351996)$$

Ad. 4)

$$(x_0, y_0) = (3.5, 0.5)$$
$$(x_1, y_1) = (3.159907, 0.20336)$$
$$(x_2, y_{02}) = (3.009087, 0.1530182)$$
$$(x_3, y_3) = (3.00183584, 0.14811141)$$
$$(x_4, y_4) = (3.001625251, 0.1481079741)$$

Za dokładność przyjąłem czterokrotne obliczenie wartości, bez przyjmowania warunku stopu. Dla ułatwienia obliczeń.