НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерных технологий

Математический анализ

ИДЗ №2 – 2 семестр

Двоеглазова Наталья

г. Санкт-Петербург

весна (уже лето) 2024

№1

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! \cdot e^n}{n^{n+2}} \cdot \sin\frac{\pi}{2^n}$$

Проверим необходимое условие сходимости ряда, а именно:

Пусть ряд с общим членом a_n сходится. Тогда $\underset{n\to\infty}{a_n} \to 0$.
Соответственно, если $\underset{n\to\infty}{a_n} \to \infty$, то ряд точно расходится.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!! \cdot e^n}{n^{n+2}} \cdot \sin\frac{\pi}{2^n} = 0 \left(\text{т. к.} \underset{n\to\infty}{\sin\frac{\pi}{2^n}} \to 0\right).$$

К сожалению, проверка ничего не дала.

А что по признакам? Воспользуемся признаком Даламбера ($a_n > 0$):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+1)!! \cdot e^{n+1} \cdot \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{(n+1)^{n+3}}}{\frac{(2n-1)!! \cdot e^n \cdot \sin\frac{\pi}{2^n}}{n^{n+2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!! \cdot e^{n+1} \cdot \sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot n^{n+2}}{(2n-1)!! \cdot e^n \cdot \sin\frac{\pi}{2^n} \cdot (n+1)^{n+3}} =$$

Рассмотрим выражения «по частям»:

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n-1)!!} = 2n, \qquad \frac{e^{n+1}}{e^n} = e, \qquad \frac{n^{n+2}}{(n+1)^{n+3}} \to 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\,cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \left(\text{т. к.} \frac{\pi}{2^{n+1}} \to 0, \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \to 1\right) = \frac{1}{2},$$

Тогда:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} e * 0 = 0 < 1, 0 \in [0, +\infty].$$

Тогда, ряд с общим членом $a_n = \frac{(2n-1)!! \cdot e^n}{n^{n+2}} \cdot \sin\frac{\pi}{2^n}$ сходится.

№2

Исследовать ряд на сходимость (абсолютную и условную):

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin 2n \ \cdot \ln^2 n}{\sqrt{n}}$$

Проверим необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 2n \ \cdot \ln^2 n}{\sqrt{n}} = 0.$$

К сожалению, снова мимо. Не факт, что ряд расходится.

Воспользуемся признаком Дирихле.

Пусть даны последовательности a_n и b_n, причем b_n — монотонна.

Тогда для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ достаточно выполнение условий:

Частичные суммы $A_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$ ограничены в совокупности ($|A_k| \le C, \forall\, k \in \mathbb{N}$),

Последовательность b_n — стремится к 0, при $n \to \infty$.

Пусть $a_n = \sin 2n$, $b_n = \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}$. Тогда:

$$A_n = \sum_{n=2}^{k} \sin 2n = \frac{\sin\left(\frac{k+1}{2}n\right)\sin\left(\frac{k}{2}n\right)}{\sin\frac{n}{2}} \text{ , } |\sin x| \le 1 \Rightarrow \text{ ограничено для } \forall k \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}} = 0$$

=> выполнены оба условия признака Дирихле, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin 2n \cdot \ln^2 n}{\sqrt{n}}$ сходится.

Осталось проверить на абсолютную сходимость .

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\sin 2n\ \cdot \ln^2 n}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\sin 2n\ |\ \cdot \ln^2 n}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{sin^2 2n\ \cdot \ln^2 n}{\sqrt{n}} \le \sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\sin 2n\ |\ \cdot \ln^2 n}{\sqrt{n}}$$

Заметим, что $sin^2 2n = \frac{1-\cos 4n}{2}$

Таким образом

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{sin^2 2n\ \cdot \ln^2 n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1-cos\ 4n)\ \cdot \ln^2 n}{2\sqrt{n}}$$

Разделим на два ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1-cos\ 4n)\ \cdot \ln^2 n}{2\sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{2\sqrt{n}} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{cos\ 4n\ \cdot \ln^2 n}{2\sqrt{n}}$$

В свою очередь

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}} \le \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{2\sqrt{n}}$$

А ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ – расходится. Следовательно ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{2\sqrt{n}}$ – расходится.

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1-cos\ 4n)\ \cdot\ln^2 n}{2\sqrt{n}}$ – расходится => $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{sin^2 2n\ \cdot\ln^2 n}{\sqrt{n}}$ – расходится =>

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\sin 2n\ \cdot \ln^2 n}{\sqrt{n}}\right| \text{ – расходится (оценили снизу расходящимся рядом).}$$

№3

Исследовать ряд на сходимость (абсолютную и условную):

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int\limits_{n-1}^{n+1}\frac{arctg\ x}{1+x^5}\ dx$$

Рассмотрим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\int\limits_{n-1}^{n+1}\frac{arctg\ x}{1+x^5}\ dx\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\int\limits_{n-1}^{n+1}\frac{arctg\ x}{1+x^5}\ dx\right|$$

Так как $arctg\ (x)$ – ограничен $\left(|arctg\ (x)| \le \frac{\pi}{2}\right)$, оценим $\left|\frac{arctg\ x}{1+x^5}\right|$:

$$\left|\frac{arctg\ x}{1+x^5}\right| \le \frac{\pi/2}{1+x^5}$$

Теперь оценим интеграл:

$$\left|\int\limits_{n-1}^{n+1}\frac{arctg\ x}{1+x^5}\ dx\right| \le \int\limits_{n-1}^{n+1}\left|\frac{arctg\ x}{1+x^5}\right|\ dx\ \le \frac{\pi}{2}\int\limits_{n-1}^{n+1}\frac{1}{1+x^5}\ dx$$

$\dfrac{1}{1+x^5} \le 1$, для любых $x \in$ промежутку $[0, +\infty)$, заданном значением n.

$$\frac{\pi}{2}\int\limits_{n-1}^{n+1}\frac{1}{1+x^5}\ dx \le \frac{\pi}{2}\int\limits_{n-1}^{n+1}1\ dx = \pi\,, \qquad => |a_n| \le \pi$$

Также отметим, что:

$$\frac{\pi}{2}\int\limits_{n-1}^{n+1}\frac{1}{1+x^5}\ dx \le \frac{\pi}{2}\int\limits_{n-1}^{n+1}\frac{1}{1+x^2}\ dx$$

Проинтегрировав, получим:

$$\int\limits_{n-1}^{n+1}\frac{1}{1+x^2}\ dx\ =\ arctg\ (n+1) - arctg(n-1) = artcg\ \left(\frac{2}{n^2}\right)$$

Тогда оценим наш ряд сверху:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{n-1}^{n+1} \frac{arctg\, x}{1+x^5}\, dx \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} artcg\left(\frac{2}{n^2}\right)$$

Воспользуемся интегральным признаком Коши:

Ряд с общим членом $f(n)$, где $f(n)$ – монотонна, сходится,

$$\text{если} \int_{1}^{+\infty} f(x)\, dx - \text{сходится.}$$

Исследуем на сходимость $\int_1^{+\infty} arctg\left(\frac{2}{x^2}\right)\, dx$. Так как $\frac{2}{x^2} \to 0$, то мы можем воспользоваться эквивалентом $arctg\left(\frac{2}{x^2}\right) \sim \frac{2}{x^2}$.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx \; - \text{сходится} => \int_{1}^{+\infty} arctg\left(\frac{2}{x^2}\right)\, dx \; - \text{сходится} =>$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_{n-1}^{n+1} \frac{arctg\, x}{1+x^5}\, dx - \text{сходится абсолютно.}$$

№4

Найти предел $f(x)$ данной функциональной последовательности $f_n(x)$ при $n \to \infty$ и выяснить, будет ли эта сходимость равномерной на заданных множествах. Рекомендуется строить семейства графиков $y = f_n(x)$ или **$y = |f_n(x) - f(x)|$.**

$$f_n(x) = \sin^2\left(\sqrt{1+nx^2} - \sqrt{nx}\right), E_1 = (0,1), E_2 = (1,+\infty).$$

При $x \in (1,+\infty)$ и $n \to \infty$:

$$\sqrt{1+nx^2} \approx \sqrt{nx}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\,nx\sqrt{x}}\right) = \sqrt{nx} + \frac{1}{2\sqrt{nx}}$$

$$\sqrt{1+nx^2} - \sqrt{nx} \approx \sqrt{nx} + \frac{1}{2\sqrt{nx}} - \sqrt{nx} = \frac{1}{2\sqrt{nx}} \to 0$$

Следовательно, $\sin^2\left(\sqrt{1+nx^2} - \sqrt{nx}\right) \sim \left(\frac{1}{2\sqrt{nx}}\right)^2 = \frac{1}{4nx} \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\sqrt{1+nx^2} - \sqrt{nx}\right) = 0$$

$$=> \ f(x) = 0$$

При $x \in (0,\ 1)$ и $n \to \infty$:

$$\sqrt{1+nx^2} = \sqrt{nx^2}\sqrt{1+\frac{1}{nx^2}} = \sqrt{nx^2}\left(1+\frac{1}{2nx^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$
$$= \sqrt{nx^2} + \frac{1}{2\sqrt{nx^2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Тогда:

$$\sqrt{1+nx^2} \approx \sqrt{nx} + \frac{1}{2\sqrt{nx}} \ => \ \sqrt{1+nx^2} - \sqrt{nx} \approx \frac{1}{2\sqrt{nx}} = \frac{1}{4nx}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\sqrt{1+nx^2} - \sqrt{nx}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4nx^2} = 0$$

$$=> \ f(x) = 0$$

Но что же с равномерной сходимостью? Для начала вспомним определение:

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n > n_0\; \forall x \in D \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Итак,

$$|f_n(x) - f(x)| = |\sin^2\left(\sqrt{1+nx^2} - \sqrt{nx}\right)|$$

Для $E_2 = (1, +\infty)$, при $x_n = n$:

$$\left|\sin^2\left(\sqrt{1+nx_n^2} - \sqrt{nx_n}\right)\right| \leq \left|\sin^2\left(\sqrt{1+n^3} - n\right)\right| \leq \left|\left(\sqrt{1+n^3} - n\right)^2\right| \leq$$

$$\leq \left|1 + n^3 - n\sqrt{1+n^3} + n^2\right| \leq 1 + 2n^3 \geq \varepsilon$$

Все-таки равномерной сходимости на этом множестве нет.

Равномерная сходимость будет отсутствовать для $E_1 = (0, 1)$, обоснуем:

При $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \in (0,\ 1)$:

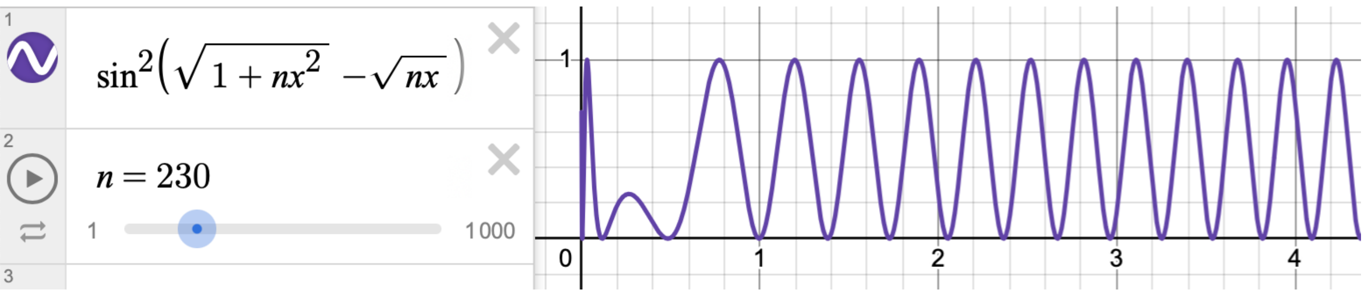
$$\sin^2(\sqrt{1+nx_n^2} - \sqrt{nx_n}) = \sin^2\left(\sqrt{2} - 1\right) \sim 0.17 > 0.1$$

Для $\varepsilon_0 = 0.1$ верно:

$$\exists \varepsilon_0 = 0.1 :\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \ \exists n = n_0 + 1\ \exists x = \frac{1}{\sqrt{n_0 + 1}} \in D\colon |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon.$$

Мы получили отрицание критерия равномерной сходимости по Коши. Действительно, на данном промежутке функция не сходится равномерно.

График также говорит о том, что ни на одном из множеств не будет равномерной сходимости.



№5

Исследовать равномерную сходимость ряда на данных множествах:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2x\cos nx}{1+\sqrt{nx}}, D=[1,+\infty]$$

$$\text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{\sqrt{n}+x}\sin^2\left(\frac{\ln x}{n}\right), D_1=(1,2), D_2=(2,+\infty)$$

а)

Воспользуемся определением равномерной сходимости ряда:

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists n_0\ \in\ \mathbb{N}:\ \forall n>n_0\ \forall\ p\ \in\ \mathbb{N}\ \forall x\in D \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

Очевидно, $\frac{\sin 2x\cos nx}{1+\sqrt{nx}}\to 0$ при $x\to\ +\infty$.

Оценим $f_n(x)$ сверху….

$$\frac{\sin 2x\cos nx}{1+\sqrt{nx}}\leq\frac{1}{1+\sqrt{nx}}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$$

Тогда положим $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$ => ряд равномерно сходится на D.

б)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{\sqrt{n}+x}\sin^2\left(\frac{\ln x}{n}\right)$$

б. 1 Рассмотрим первое множество: $D_1=(1,2)$. Заметим, что x ограничен: $x<2$:

Опять-таки $\frac{nx}{\sqrt{n}+x}\sin^2\left(\frac{\ln x}{n}\right)\to 0$ при $n\to\ \infty$ $(\frac{nx}{\sqrt{n}+x}\sin^2\left(\frac{\ln x}{n}\right)\sim\ \frac{\ln^2 x}{n(\sqrt{n}+x)}\ , x<2\ )$

Тогда снова оценочки…

$$0\leq\frac{nx}{\sqrt{n}+x}\sin^2\left(\frac{\ln x}{n}\right)\leq\frac{2n}{\sqrt{n}+2}\sin^2\left(\frac{\ln 2}{n}\right)\leq\ 2\sqrt{n}\ \sin^2\left(\frac{\ln 2}{n}\right)\leq\ 2\sqrt{n}<\varepsilon$$

Тогда $n > \frac{\varepsilon^2}{4}$ => Положим $n_0 = \left[\frac{\varepsilon^2}{4}\right]$.

$$=> \text{ряд} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{\sqrt{n}+x} \sin^2\left(\frac{\ln x}{n}\right) \text{ равномерно сходится на } D_1 = (1,2).$$

б. 2 Рассмотрим второе множество: $D_1 = (2, +\infty)$.

Если махать руками, то понятное дело, что nx будет расти быстрее, чем $\sqrt{n} + x$, какой бы n_0 мы не взяли, следовательно, ни о какой равномерной сходимости речи и быть не может. Но махать руками не будем!

Проверим необходимое условие равномерной сходимости:

$$\left|\left|f_n\right|\right|_{D1} \to 0 \text{, при } n \to \infty$$

Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{1}{n}$, будем пользоваться эквивалентами:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{n}} \sin^2\left(\frac{\ln\frac{1}{n}}{n}\right) \sim \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{n}} \frac{\ln^2\frac{1}{n}}{n^2} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{n^2\sqrt{n}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(\sqrt{n}+\frac{1}{n})}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$=> \text{ряд} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{\sqrt{n}+x} \sin^2\left(\frac{\ln x}{n}\right) \text{ не сходится равномерно на } D_2 = (2, +\infty)$$

№6

Найдите область определения данной функции и докажите ее непрерывность на области определения. Исследуйте на равномерную сходимость. Если пользуетесь равномерной сходимостью, ее надо доказать.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-nx)}{x\sqrt{n}}$$

Во-первых, как в 5 классе, $x \neq 0$.
Во-вторых, заметим, что для сходимости ряда необходим $x > 0$, так как при $x < 0$ экспоненциальный член будет соответственно экспоненциально расти, что приведет к расходимости ряда.

Таким образом, рассматриваемая область определения нашей функции $f(x)$ это $x \in (0, +\infty)$.

Теперь перейдем к исследованию равномерной сходимости, воспользуемся отрицанием критерия Коши равномерной сходимости:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ : \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n = n_0 + 1 \ \exists x \in D : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

$$\text{при } x_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \qquad \left|\frac{\exp(-nx_n)}{x_n\sqrt{n}}\right| \leq \text{n} * \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq n \geq \varepsilon$$

При $n = [\varepsilon + 1]$ получим то, что нужно. Тогда равномерной сходимости на $(0, +\infty)$ нет (из-за малых x).

Перейдем к вопросу о непрерывности функции.

Функция будет непрерывна на любом отрезке $[\alpha, a]$, при $\alpha > 0$. Докажем это с помощью признака Вейерштрасса:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-nx)}{x\sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\alpha n}\alpha\sqrt{n}} = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\alpha n}\sqrt{n}}$$

- Ряд сходится, поскольку $\frac{1}{e^{\alpha n}}$ экспоненциально стремится к нулю.

Итак, мы оценили наш ряд числовым, а тогда он равномерно сходится по признаку Вейерштрасса и наша $f(x)$ непрерывна на всей области определения $(0, +\infty)$,

№7

Найти сумму числового ряда, используя приемы дифференцирования и интегрирования степенного ряда.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}$$

Поработаем с нашим рядом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}\ (x)^n \quad \text{для } x = 1 \in \mathbb{R}$$

Заметим, что

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(x)^n}{(n)!}$$

Формулы Тейлора преследуют нас, но кое-что мешает, а именно $\frac{n^3}{n+1}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^n\, n^3}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} * \frac{n^3}{n+1}$$

Еще раз заметим, что

$$\int_0^x e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)!} \int_0^x x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)!} * \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$-e^{-x} + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Отлично, разобрались с факториалом. Вынесем x за знак суммы и поделим все равенство на него:

$$\frac{-e^{-x} + 1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{(n+1)!}$$

Теперь понятно: чтобы получить n^3 – нужно дифференцировать. Этим и займемся.

$$\left(\frac{-e^{-x}+1}{x}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\,(x)^n}{(n+1)!} + \frac{(-1)^n}{(n)!}C\right)'$$

$$\frac{xe^{-x}+e^{-x}-1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n\,(x)^{n-1}}{(n+1)!}$$

Потеряли одну степень у x. Ничего страшного – просто домножим на x.

$$\frac{xe^{-x}+e^{-x}-1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n\,(x)^n}{(n+1)!}$$

$$\left(\frac{xe^{-x}+e^{-x}-1}{x}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\,n\,(x)^n}{(n+1)!}\right)'$$

$$\frac{-x^2e^{-x}-xe^{-x}-e^{-x}+1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n^2\,(x)^{n-1}}{(n+1)!}$$

Потеряли одну степень у x. Ничего страшного – еще раз домножим на x.

$$\frac{-x^2e^{-x}-xe^{-x}-e^{-x}+1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n^2\,(x)^n}{(n+1)!}$$

$$\left(\frac{-x^2e^{-x}-xe^{-x}-e^{-x}+1}{x}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\,n^2\,(x)^n}{(n+1)!}\right)'$$

$$\frac{e^{-x}(x^3+x+1)-1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n^3\,(x)^{n-1}}{(n+1)!}$$

Потеряли одну степень у x. Ничего страшного – еще раз домножим на x.

$$\frac{e^{-x}(x^3+x+1)-1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n^3\,(x)^n}{(n+1)!}$$

Время подставить $x = 1$ в вычисленное выражение:

$$\frac{3-e}{e} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n^3}{(n+1)!}$$