НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерных технологий

Математический анализ

ИДЗ №2 – 2 семестр

Двоеглазова Наталья

г. Санкт-Петербург

весна (уже лето) 2024

№1

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\ \cdot e^n}{n^{n+2}} \cdot \sin\frac{\pi}{2^n}$$

Воспользуемся признаком Даламбера ($a_n > 0$):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(2n+1)!!\ \cdot e^{n+1} \cdot \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{(n+1)^{n+3}}}{\dfrac{(2n-1)!!\ \cdot e^{n} \cdot \sin\frac{\pi}{2^{n}}}{n^{n+2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!\ \cdot e^{n+1} \cdot \sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot n^{n+2}}{(2n-1)!!\ \cdot e^{n} \cdot \sin\frac{\pi}{2^{n}} \cdot (n+1)^{n+3}} =$$

Рассмотрим выражения «по частям»:

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n-1)!!} = 2n\,, \qquad \frac{e^{n+1}}{e^n} = e,$$

$$\frac{n^{n+2}}{(n+1)^{n+3}} \sim \frac{n^{n+2}}{n^{n+3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3}} = \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3}}\ \ , \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \sim e$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\ \left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sin\ \left(\frac{\pi}{2^{n}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\ cos\ \left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \left(\text{т. к.} \frac{\pi}{2^{n+1}} \to 0, \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\ \to 1\right) = \frac{1}{2}\ ;$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1\ )(2n-1)!!\ \cdot e \cdot 1 \cdot n^{n+2}}{(2n-1)!!\ \cdot 2 \cdot (n+1)^{n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1\ )\ \cdot e}{2 \cdot n(n+1)^{n+3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1\ )\ \cdot e}{2 \cdot n\ \cdot\ e^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2 \cdot n\ \cdot\ e^2} = \frac{1}{e^2}$$

Тогда:

$$= \frac{1}{e^2} < 1\,, 0\ \in [0, +\infty].$$

Тогда, ряд с общим членом $a_n = \frac{(2n-1)!!\ \cdot e^n}{n^{n+2}} \cdot \sin\frac{\pi}{2^n}$ сходится.

№2

Исследовать ряд на сходимость (абсолютную и условную):

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin 2n \ \cdot \ln^2 n}{\sqrt{n}}$$

Проверим необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 2n \ \cdot \ln^2 n}{\sqrt{n}} = 0.$$

К сожалению, снова мимо. Не факт, что ряд расходится.

Воспользуемся признаком Дирихле.

Пусть даны последовательности a_n и b_n, причем b_n – монотонна.

Тогда для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ достаточно выполнение условий:

Частичные суммы $A_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ ограничены в совокупности ($|A_k| \le C, \forall\, k \in \mathbb{N}$),

Последовательность b_n – стремится к 0, при $n \to \infty$.

Пусть $a_n = \sin 2n$, $b_n = \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}$. Тогда:

$$A_n = \sum_{n=2}^{k} \sin 2n = \frac{\sin\left(\frac{k+1}{2} n\right) \sin\left(\frac{k}{2} n\right)}{\sin \frac{n}{2}} \text{ , } |\sin x| \le 1 \Rightarrow \text{ ограничено для } \forall k \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}} = 0$$

=> выполнены оба условия признака Дирихле, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin 2n \cdot \ln^2 n}{\sqrt{n}}$ сходится.

Осталось проверить на абсолютную сходимость .

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\sin 2n\ \cdot \ln^2 n}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\sin 2n\ |\ \cdot \ln^2 n}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{sin^2 2n\ \cdot \ln^2 n}{\sqrt{n}} \le \sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\sin 2n\ |\ \cdot \ln^2 n}{\sqrt{n}}$$

Заметим, что $sin^2 2n = \frac{1-\cos 4n}{2}$

Таким образом

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{sin^2 2n\ \cdot \ln^2 n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1 - cos\ 4n)\ \cdot \ln^2 n}{2\sqrt{n}}$$

Разделим на два ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1 - cos\ 4n)\ \cdot \ln^2 n}{2\sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{2\sqrt{n}} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{cos\ 4n\ \cdot \ln^2 n}{2\sqrt{n}}$$

В свою очередь

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}} \le \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{2\sqrt{n}}$$

А ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ – расходится. Следовательно ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{2\sqrt{n}}$ – расходится.

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1-cos\ 4n)\ \cdot\ln^2 n}{2\sqrt{n}}$ – расходится => $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{sin^2 2n\ \cdot\ln^2 n}{\sqrt{n}}$ – расходится =>

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\sin 2n\ \cdot \ln^2 n}{\sqrt{n}}\right|$$ – расходится (оценили снизу расходящимся рядом).

№3

Исследовать ряд на сходимость (абсолютную и условную):

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int\limits_{n-1}^{n+1}\frac{arctg\ x}{1+x^5}\ dx$$

Рассмотрим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\int\limits_{n-1}^{n+1}\frac{arctg\ x}{1+x^5}\ dx\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\int\limits_{n-1}^{n+1}\frac{arctg\ x}{1+x^5}\ dx\right|$$

Так как $arctg\ (x)$ – ограничен $\left(|arctg\ (x)| \leq \frac{\pi}{2}\right)$, оценим $\left|\frac{arctg\ x}{1+x^5}\right|$:

$$\left|\frac{arctg\ x}{1+x^5}\right| \leq \frac{\pi/2}{1+x^5}$$

Теперь оценим интеграл:

$$\left|\int\limits_{n-1}^{n+1}\frac{arctg\ x}{1+x^5}\ dx\right| \leq \int\limits_{n-1}^{n+1}\left|\frac{arctg\ x}{1+x^5}\right|\ dx\ \leq \frac{\pi}{2}\int\limits_{n-1}^{n+1}\frac{1}{1+x^5}\ dx$$

$\frac{1}{1+x^5} \leq 1$, для любых $x \in$ промежутку $[0,+\infty)$, заданном значением n.

$$\frac{\pi}{2}\int\limits_{n-1}^{n+1}\frac{1}{1+x^5}\ dx \leq \frac{\pi}{2}\int\limits_{n-1}^{n+1}1\ dx = \pi, \qquad => |a_n| \leq \pi$$

Также отметим, что:

$$\frac{\pi}{2}\int\limits_{n-1}^{n+1}\frac{1}{1+x^5}\ dx \leq \frac{\pi}{2}\int\limits_{n-1}^{n+1}\frac{1}{1+x^2}\ dx$$

Проинтегрировав, получим:

$$\int\limits_{n-1}^{n+1}\frac{1}{1+x^2}\ dx = arctg\ (n+1) - arctg(n-1) = artcg\ \left(\frac{2}{n^2}\right)$$

Тогда оценим наш ряд сверху:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_{n-1}^{n+1}\frac{arctg\,x}{1+x^5}\,dx\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} artcg\,\left(\frac{2}{n^2}\right)$$

Воспользуемся интегральным признаком Коши:

Ряд с общим членом $f(n)$, где $f(n)$ − монотонна, сходится,

$$\text{если} \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx - \text{сходится.}$$

Исследуем на сходимость $\int_1^{+\infty} arctg\left(\frac{2}{x^2}\right)\,dx$. Так как $\frac{2}{x^2} \to 0$, то мы можем воспользоваться эквивалентом $arctg\left(\frac{2}{x^2}\right) \sim \frac{2}{x^2}$.

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{2}{x^2}dx\ - \text{сходится} => \int_{1}^{+\infty} arctg\left(\frac{2}{x^2}\right)\,dx\ - \text{сходится} =>$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_{n-1}^{n+1}\frac{arctg\,x}{1+x^5}\,dx - \text{сходится абсолютно.}$$

№4

Найти предел $f(x)$ данной функциональной последовательности $f_n(x)$ при $n \to \infty$ и выяснить, будет ли эта сходимость равномерной на заданных множествах. Рекомендуется строить семейства графиков $y = f_n(x)$ или **$y = |f_n(x) - f(x)|$** .

$$f_n(x) = \sin^2\left(\sqrt{1+nx^2} - \sqrt{nx}\right), E_1 = (0,1), E_2 = (1,+\infty).$$

При $x \in (1,+\infty)$ и $n \to \infty$:

$$\sqrt{1+nx^2} \approx \sqrt{nx}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\,nx\sqrt{x}}\right) = \sqrt{nx} + \frac{1}{2\sqrt{nx}}$$

$$\sqrt{1+nx^2} - \sqrt{nx} \approx \sqrt{nx} + \frac{1}{2\sqrt{nx}} - \sqrt{nx} = \frac{1}{2\sqrt{nx}} \to 0$$

Следовательно, $\sin^2\left(\sqrt{1+nx^2} - \sqrt{nx}\right) \sim \left(\frac{1}{2\sqrt{nx}}\right)^2 = \frac{1}{4nx} \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\sqrt{1+nx^2} - \sqrt{nx}\right) = 0$$

$$=> \ f(x) = 0$$

При $x \in (0,\ 1)$ и $n \to \infty$:

$$\sqrt{1+nx^2} = \sqrt{nx^2}\sqrt{1+\frac{1}{nx^2}} = \sqrt{nx^2}\left(1+\frac{1}{2nx^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$
$$= \sqrt{nx^2} + \frac{1}{2\sqrt{nx^2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Тогда:

$$\sqrt{1+nx^2} \approx \sqrt{nx} + \frac{1}{2\sqrt{nx}} \ => \ \sqrt{1+nx^2} - \sqrt{nx} \approx \frac{1}{2\sqrt{nx}} = \frac{1}{4nx}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\sqrt{1+nx^2} - \sqrt{nx}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4nx^2} = 0$$

$$=> \ f(x) = 0$$

Но что же с равномерной сходимостью? Для начала вспомним определение:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n > n_0\ \forall x \in D \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Итак,

$$|f_n(x) - f(x)| = |\sin^2\left(\sqrt{1+nx^2} - \sqrt{nx}\right)|$$

Для $E_2 = (1, +\infty)$:

Поговорим об абстрактном... Итак, для любого $\forall\, x \in E_2, nx^2 > nx$, соответственно все значения $\sqrt{1+nx^2} - \sqrt{nx}$, какой бы n мы не взяли, начиная с некоторого х, значение аргумента синуса будет критически увеличиваться. А $\sin^2(\sqrt{1+nx^2} - \sqrt{nx})$ будет принимать различные значения от 0 до 1. Поэтому………… (долгая пауза……..)

Равномерной сходимости на этом множестве нет. Пожалуйста. Отпустите. Я хочу домой.

Равномерная сходимость будет отсутствовать для $E_1 = (0, 1)$, обоснуем:

При $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \in (0,\ 1)$:

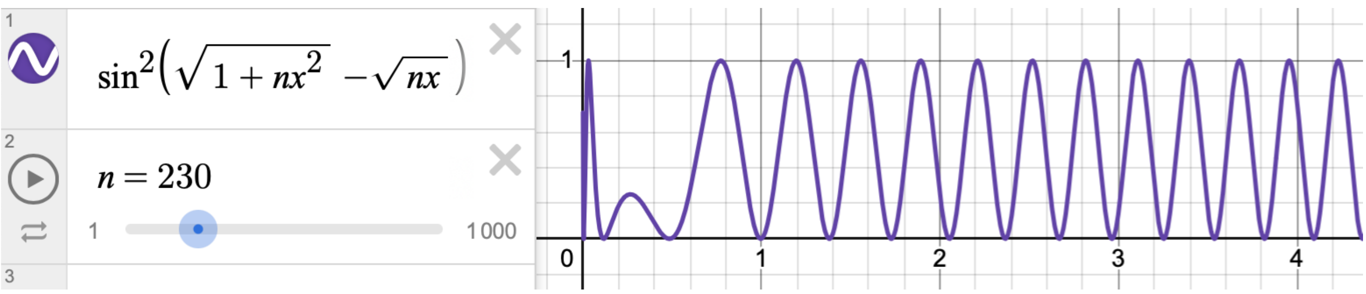
$$\sin^2(\sqrt{1+nx_n^2} - \sqrt{nx_n}) = \sin^2(\sqrt{2} - 1) \sim 0.17 > 0.1$$

$$\text{Для } \varepsilon_0 = 0.1 \text{ верно:}$$

$$\exists \varepsilon_0 = 0.1 :\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \ \exists n = n_0 + 1\ \exists x = \frac{1}{\sqrt{n_0+1}} \in D\colon |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon.$$

Мы получили отрицание критерия равномерной сходимости по Коши. Действительно, на данном промежутке функция не сходится равномерно.

График также говорит о том, что ни на одном из множеств не будет равномерной сходимости.



№5

Исследовать равномерную сходимость ряда на данных множествах:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2x \cos nx}{1+\sqrt{nx}}, D = [1, +\infty]$$

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{\sqrt{n}+x} \sin^2\left(\frac{\ln x}{n}\right), D_1 = (1, 2), D_2 = (2, +\infty)$$

а)

Воспользуемся определением равномерной сходимости ряда:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists n_0\ \in\ \mathbb{N}:\ \forall n > n_0\ \forall\ p\ \in\ \mathbb{N}\ \forall x \in D \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Очевидно, $\frac{\sin 2x \cos nx}{1+\sqrt{nx}} \to 0$ при $x \to\ +\infty$. Тогда $|f_n(x) - f(x)| = \frac{\sin 2x \cos nx}{1+\sqrt{nx}}$.

Для исследования равномерной сходимости нужно показать, что $|f_n(x)|$ стремится к нулю равномерно на D.

Оценим $|f_n(x)|$:

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin 2x \cos nx}{1+\sqrt{nx}}\right| \le \frac{1}{1+\sqrt{nx}}$$

Теперь покажем, что $\frac{1}{1+\sqrt{nx}} \to 0$ равномерно по x.
Для любого $\varepsilon > 0$ нам нужно найти n_0 такое, что для всех $n > n_0$ и для всех $x \in [1, +\infty]$:

$$\frac{1}{1+\sqrt{nx}} <\ \varepsilon$$

Решим неравенство относительно n:

$$1 <\ \varepsilon\left(1+\sqrt{nx}\right) \Rightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2 \left(\frac{1}{x}\right)$$

Так как x $\ge$ 1, $\frac{1}{x} \le 1$. Тогда для $x \in [1, +\infty]$: $\ \ n > \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2$

Таким образом, выбрав $n_0 = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2$, мы придем к выполнению условия для всех $n > n_0$ и всех $x \in [1, +\infty]$:

$$\left|\frac{\sin 2x \cos nx}{1 + \sqrt{nx}}\right| < \varepsilon$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2x \cos nx}{1+\sqrt{nx}}$ сходится равномерно на $D = [1, +\infty]$.

б)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{\sqrt{n} + x} \sin^2\left(\frac{\ln x}{n}\right)$$

б. 1 Рассмотрим первое множество: $D_1 = (1, 2)$. Заметим, что x ограничен: $x < 2$:

Опять-таки $\sin^2\left(\frac{\ln x}{n}\right) \le \frac{\ln^2 x}{n^2}$, $x < 2$.

Снова оценочки…

$$0 \le \frac{nx}{\sqrt{n} + x} \sin^2\left(\frac{\ln x}{n}\right) \le \frac{2n}{\sqrt{n} + 2} * \frac{\ln^2 2}{n^2} \le \frac{2 \ln^2 2}{n\sqrt{n} + 2n} \le \frac{2 \ln^2 2}{n^{\frac{3}{2}}} \le \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Оценили сверху сходящимся рядом, рассмотрев sup по $x \in (1,2)$. Также мы можем подобрать такое n_0, что для всех $n > n_0$ и всех $x \in (1,2)$ и $\forall\varepsilon$ выполнится критерий равномерной сходимости.

$$=> \text{ряд} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{\sqrt{n} + x} \sin^2\left(\frac{\ln x}{n}\right) \text{ равномерно сходится на } D_1 = (1,2).$$

б. 2 Рассмотрим второе множество: $D_1 = (2, +\infty)$.

Если махать руками, то понятное дело, что nx будет расти быстрее, чем $\sqrt{n} + x$, какой бы n_0 мы не взяли, следовательно, ни о какой равномерной сходимости речи и быть не может. Но махать руками не будем!

Проверим необходимое условие равномерной сходимости:

$$\left||f_n|\right|_{D1} \to 0\text{ , при } n \to \infty$$

Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{1}{n}$, будем пользоваться эквивалентами:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{n}} \sin^2\left(\frac{\ln\frac{1}{n}}{n}\right) \sim \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{n}} \frac{\ln^2\frac{1}{n}}{n^2} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{n^2\sqrt{n}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(\sqrt{n}+\frac{1}{n})}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$=> \text{ ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{\sqrt{n}+x} \sin^2\left(\frac{\ln x}{n}\right) \text{ не сходится равномерно на } D_2 = (2, +\infty)$$

№6

Найдите область определения данной функции и докажите ее непрерывность на области определения. Исследуйте на равномерную сходимость. Если пользуетесь равномерной сходимостью, ее надо доказать.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-nx)}{x\sqrt{n}}$$

Во-первых, как в 5 классе, $x \neq 0$.
Во-вторых, заметим, что для сходимости ряда необходим $x > 0$, так как при $x < 0$ экспоненциальный член будет соответственно экспоненциально расти, что приведет к расходимости ряда.

Таким образом, рассматриваемая область определения нашей функции $f(x)$ это $x \in (0, +\infty)$.

Теперь перейдем к исследованию равномерной сходимости:

При малых $x \to 0 : e^{-nx} \to 1$ и $\frac{1}{x\sqrt{n}} \to \infty \quad => \quad f_n(x) \leq \frac{1}{x\sqrt{n}}$

Таким образом, при малых x, $f_n(x)$ может достигать произвольно больших значений, что мешает равномерной сходимости, т.к. будет невозможно подобрать такое n_0, которое бы удовлетворяло условию равномерной сходимости. Значит, на области определения функция не сходится равномерно.

Теперь о вопросе непрерывности функции:

Функция будет непрерывна на всей области определения. Обоснуем.

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x из окрестности x_0 выполняется:

$$|x - x_0| < \delta => |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Для частичных сумм ряда:

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-nx}}{x\sqrt{n}}$$

Каждый член $\frac{e^{-nx}}{x\sqrt{n}}$ непрерывен на $x \in (0, +\infty)$. Сумма конечного числа

Непрерывных функций также является непрерывной функцией. Значит $S_N(x)$ непрерывная для любого N.

Рассмотрим остаточный член:

$$R_N(x) = f(x) - S_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{x\sqrt{n}}$$

Для любого на $x \in (0, +\infty)$ существует $\delta > 0$: $x \geq \delta$. Тогда :

$$\left|\frac{e^{-nx}}{x\sqrt{n}}\right| \leq \frac{e^{-n\delta}}{\delta\sqrt{n}}$$

Сумма $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{e^{-n\delta}}{\sqrt{n}}$ сходится, так как $e^{-n\delta}$ убывает экспоненциально. Значит

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{e^{-n\delta}}{\sqrt{n}} < \varepsilon\delta$$

Следовательно, для всех $x \in (0, +\infty)$

$$|R_N(x)| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{x\sqrt{n}}\right| < \varepsilon$$

Для того, чтобы доказать непрерывность суммы ряда, рассмотрим $f(x)$ в точке x_0 и покажем, что $f(x)$ непрерывна в x_0. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, что для всех x из окрестности точки x_0:

$$|x - x_0| < \delta => |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Так как $S_N(x)$ непрерывна и $R_N(x) \to 0$ равномерно на $(0, +\infty)$, существует N_0, такое что для всех $N \geq N_0$:

$$|S_N(x) - S_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ и } |R_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ и } |R_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |S_N(x) - S_N(x_0)| + |R_N(x)| + |R_N(x_0)| < \varepsilon$$

Так как x_0 выбрана произвольно, то $f(x)$ непрерывна на всей области определения $x \in (0, +\infty)$.

№7

Найти сумму числового ряда, используя приемы дифференцирования и интегрирования степенного ряда.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}$$

Поработаем с нашим рядом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}\ (x)^n \quad \text{для } x = 1 \in \mathbb{R}$$

Заметим, что

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(x)^n}{(n)!}$$

Формулы Тейлора преследуют нас, но кое-что мешает, а именно $\frac{n^3}{n+1}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^n\, n^3}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} * \frac{n^3}{n+1}$$

Еще раз заметим, что

$$\int_0^x e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)!} \int_0^x x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)!} * \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$-e^{-x} + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Отлично, разобрались с факториалом. Вынесем x за знак суммы и поделим все равенство на него:

$$\frac{-e^{-x} + 1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{(n+1)!}$$

Теперь понятно: чтобы получить n^3 – нужно дифференцировать. Этим и займемся.

$$\left(\frac{-e^{-x}+1}{x}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\,(x)^n}{(n+1)!} + \frac{(-1)^n}{(n)!}C\right)'$$

$$\frac{xe^{-x}+e^{-x}-1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n\,(x)^{n-1}}{(n+1)!}$$

Потеряли одну степень у x. Ничего страшного — просто домножим на x.

$$\frac{xe^{-x}+e^{-x}-1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n\,(x)^n}{(n+1)!}$$

$$\left(\frac{xe^{-x}+e^{-x}-1}{x}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\,n\,(x)^n}{(n+1)!}\right)'$$

$$\frac{-x^2e^{-x}-xe^{-x}-e^{-x}+1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n^2\,(x)^{n-1}}{(n+1)!}$$

Потеряли одну степень у x. Ничего страшного — еще раз домножим на x.

$$\frac{-x^2e^{-x}-xe^{-x}-e^{-x}+1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n^2\,(x)^n}{(n+1)!}$$

$$\left(\frac{-x^2e^{-x}-xe^{-x}-e^{-x}+1}{x}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\,n^2\,(x)^n}{(n+1)!}\right)'$$

$$\frac{e^{-x}(x^3+x+1)-1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n^3\,(x)^{n-1}}{(n+1)!}$$

Потеряли одну степень у x. Ничего страшного — еще раз домножим на x.

$$\frac{e^{-x}(x^3+x+1)-1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n^3\,(x)^n}{(n+1)!}$$

Время подставить $x = 1$ в вычисленное выражение:

$$\frac{3-e}{e} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n^3}{(n+1)!}$$

№3 Илюши

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\pi n}^{\pi n+\pi}\frac{\cos^2 x}{x}dx$$

Рассмотрим общий член ряда:

$$\int_{\pi n}^{\pi n+\pi}\frac{\cos^2 x}{x}dx \ = \int_{\pi n}^{\pi n+\pi}\frac{1+\cos 2x}{2x}dx \ = \frac{1}{2}\int_{\pi n}^{\pi n+\pi}\frac{1}{x}dx + \int_{\pi n}^{\pi n+\pi}\frac{\cos 2x}{2x}dx \ =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi n}^{\pi n+\pi}\frac{1}{x}dx + \int_{\pi n}^{\pi n+\pi}\frac{\cos 2x}{2x}dx$$

$$\frac{1}{2}\int_{\pi n}^{\pi n+\pi}\frac{1}{x}dx \ = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\int_{\pi n}^{\pi n+\pi}\frac{\cos 2x}{2x}dx \ \sim \frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{n})$$

Тогда для значения общего члена ряда

$$\int_{\pi n}^{\pi n+\pi}\frac{\cos^2 x}{x}dx \sim \ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

№8

Для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-\pi,\pi]$, построить три ряда Фурье: общий тригонометрический ряд, ряд Фурье по синусам и по косинусам.

$$f(x) = 1 + x^2, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

1) Общий тригонометрический ряд:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Найдем коэффициенты a_0, a_n, b_n:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

Перейдем к вычислениям…. Да хранит нас господь…

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + x^2)dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx\right) = \frac{1}{\pi} \left(x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{2\pi^2}{3} + 2$$

Нулевой коэффициент на базе, идем дальше.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + x^2) \cos(nx)\, dx = -\frac{2}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx)\, dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(-\frac{x\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx\right) = \frac{4\cos(\pi n)}{n^2} = \frac{4(-1)^{\mathrm{n}}}{n^2}$$

Теперь к “бэ энному”:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1+x^2)\sin(nx)\,dx = \frac{2\pi}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(\frac{x\sin(nx)}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\,dx\right) = \frac{2\cos(nx)}{\pi n^3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

УРА, слава богу, мы посчитали. В результате нам стали доступны древние знания шумеров, и мы можем записать тригонометрический многочлен для $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$:

$$T_N(x) = 1+\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{N}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

И тригонометрический ряд:

$$1+\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

Теперь нужно построить графики тригонометрических многочленов для разных N и график $f(x)$. Не буду далеко отходить от ТЗ, и построю графики для T_5, T_{10} и T_{50}:

График функции $f(x)$:

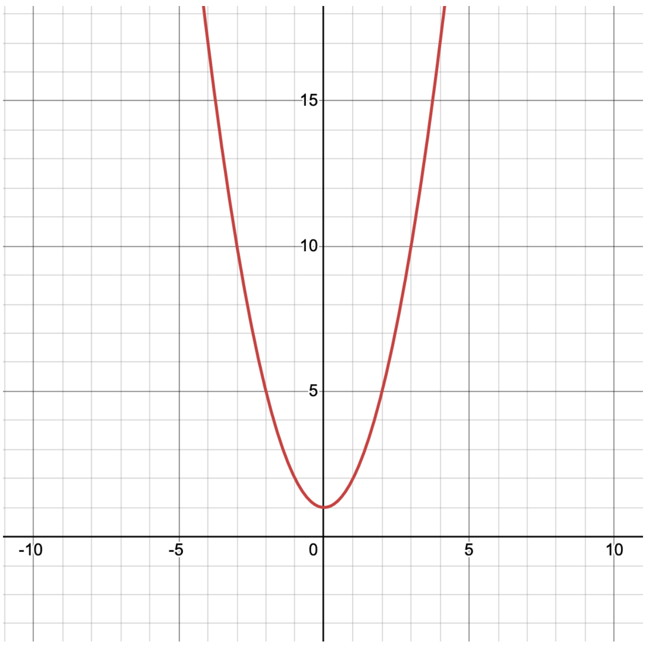


График T_5:

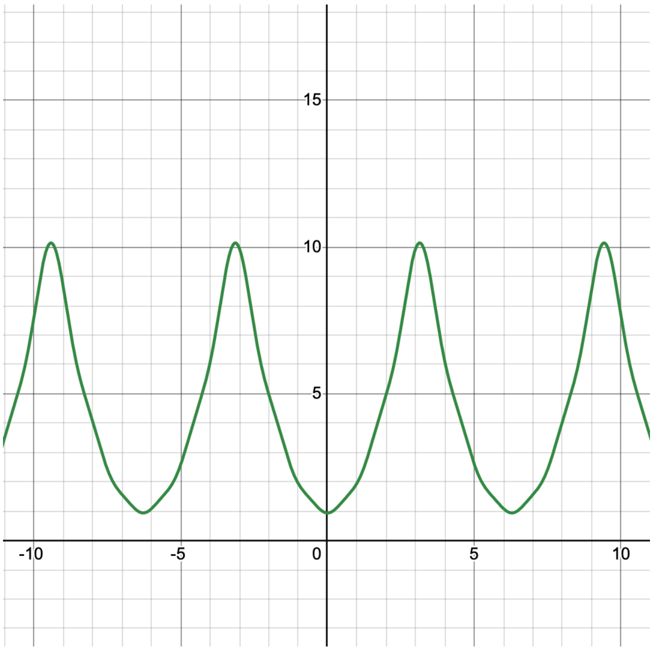


График T_{10}:

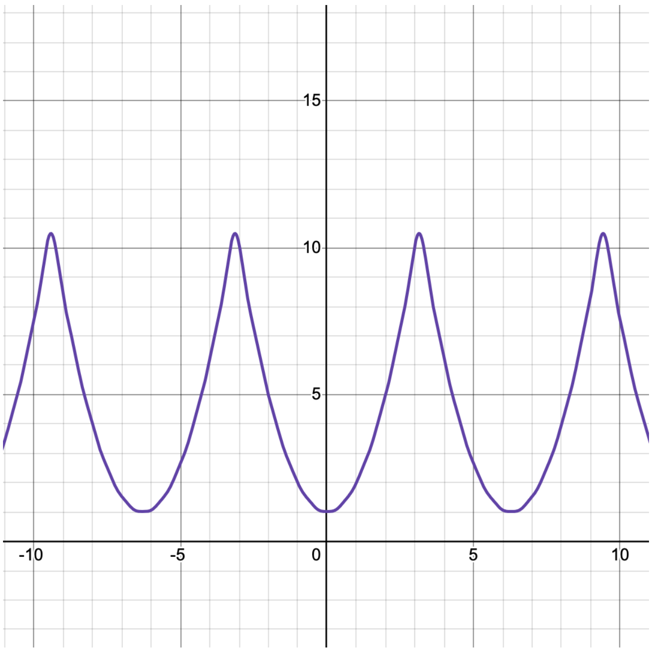
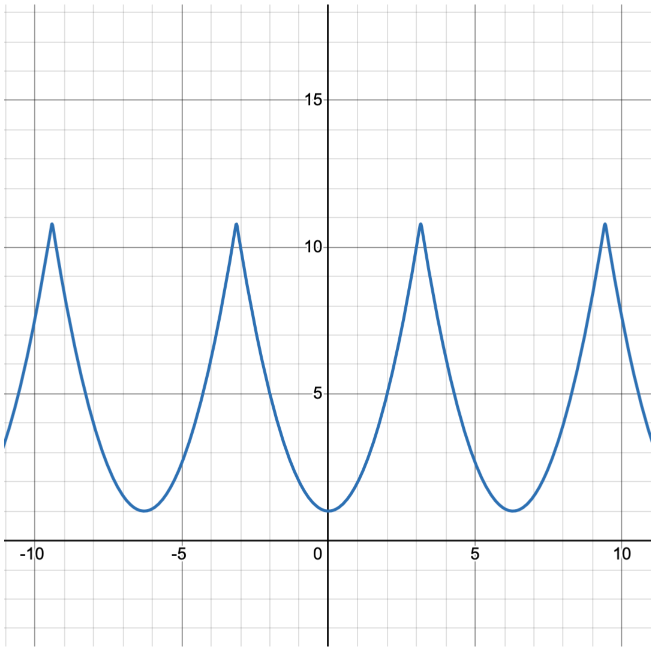


График T_{50}:



Перейдем к поиску значения ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$. Пусть $x_0 = 0$. Тогда:

$$T_N(x_0) = 1 + \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{N} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(n0) = 5 + \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

Теперь, если приравняем полученное значение общего тригонометрического ряда в точке x_0 к $f(x)$, то получим:

$$f(x_0) = 1 + \pi^2 = T_N(x_0) = 5 + \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

$$=> \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12} + 1$$

Крутяк, посчитали. Но это еще не конец (˚ >⌓<).

2) Разложение по косинусам. Так как изначальная $f(x)$ – четная, то возьмем $g(x) = f(x)$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos{(nx)}$$

Все коэффициенты сохранятся, поэтому:

$$TC_N(x) = 1 + \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{N} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

Ряд косинусов:

$$1 + \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{N} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

Графики тоже не изменятся, поэтому за картиночками обращаться к предыдущему пункту.

3) Разложение по синусам: тут то и начинается самое интересное.. Нужно поменять четность, тогда возьмем $g(x) = siqn(x)(1 + x^2)$на $[-\pi, \pi]$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos{(nx)}$$

Заново. Считать. Коэффициенты. Погнали:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} sign(x)(1 + x^2)dx \; = \frac{1}{\pi}\left(- \int_{-\pi}^{0} (1 + x^2)\, dx \; + \int_{0}^{\pi} (1 + x^2)dx \right)$$
$$= \frac{1}{\pi}\left((-x^3 - x)\,\Big|_{-\pi}^{0} + (x^3 + x)\Big|_{0}^{\pi} \right) = 0$$

Нулевой коэффициент на базе дубль два, идем дальше.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} sign(x)(1 + x^2) \sin(nx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(- \int_{-\pi}^{0} (1 + x^2)\, dx \ + \ \int_{0}^{\pi} (1 + x^2) \sin{(nx)} dx \right) =$$

$$= \frac{2}{n}\left(\frac{1(1 + x^2)\cos(nx)}{n} \Bigg|_{0}^{\pi} + \frac{2}{n} \int_{0}^{\pi} x \cos(nx)\, dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(\left(\frac{2}{n^2} - 1 - \pi^2 \right) * (-1)^n + 1 - \frac{2}{n^2} \right)$$

Получаем многочлен

$$TS_N(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\left(\left(\frac{2}{n^2} - 1 - \pi^2 \right) * (-1)^n + 1 - \frac{2}{n^2} \right) * \sin{(nx)}$$

Ряд

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\left(\left(\frac{2}{n^2} - 1 - \pi^2 \right) * (-1)^n + 1 - \frac{2}{n^2} \right) * \sin(nx)$$

Снова графики. Построим графики для функции $g(x)$ и TS_5, TS_{10} и TS_{50}:

График $g(x)$:

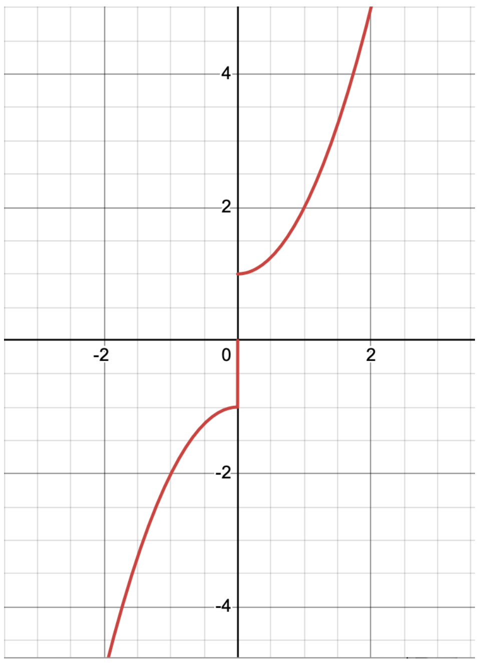


График T_5:

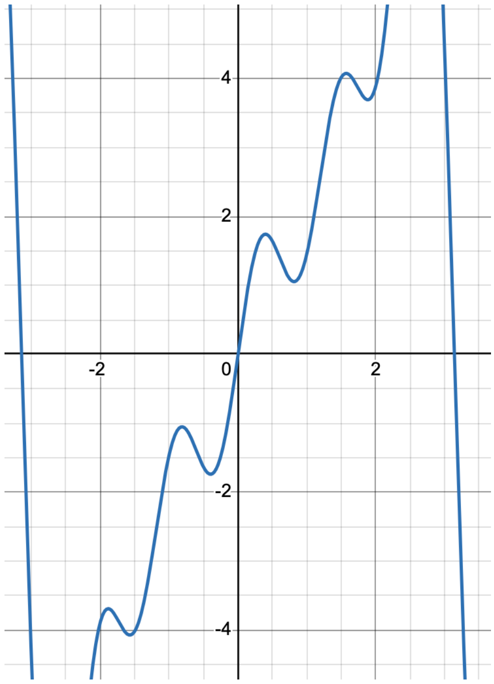


График T_{10}:

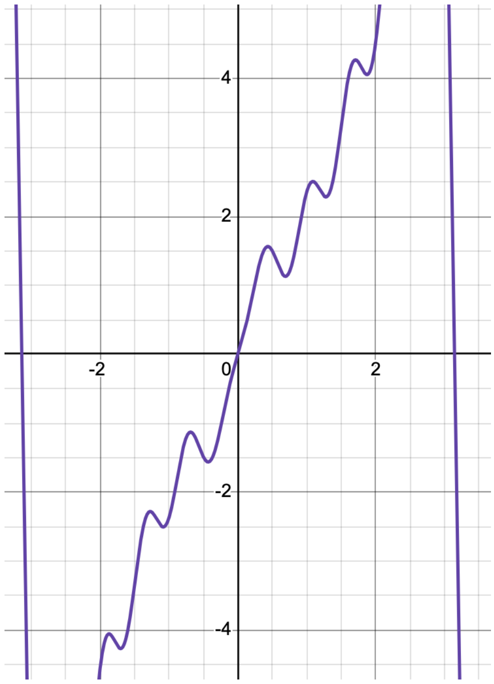
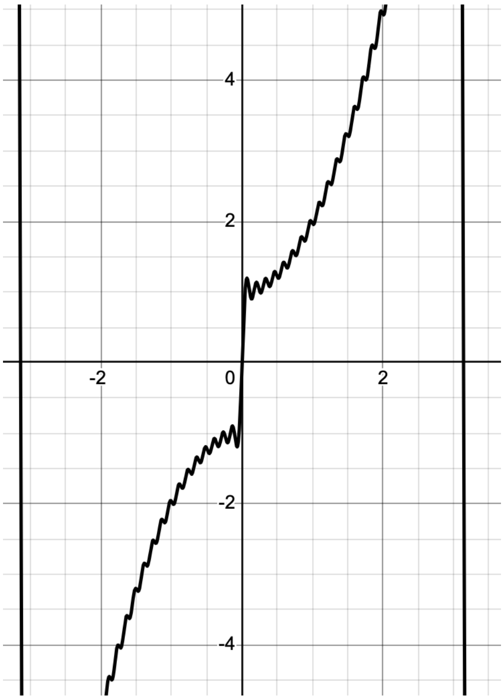


График T_{50}:



Ну вот и все.