НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерных технологий

Линейная алгебра

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 18

Двоеглазова Наталья

г. Санкт-Петербург

2024

0. Моя матрица:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

1. Поиск собственных чисел

В первую очередь, рассмотрим характеристический многочлен $\chi\,\varphi(t) = \det(A - \lambda E)$.

$$\chi\,\varphi(t) = \begin{vmatrix} -8-\lambda & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -8-\lambda & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8-\lambda \end{vmatrix} = (-8-\lambda)^6$$

$$=> spec(\varphi) = \{-8\}$$

Соответственно, корень $\lambda = -8$ алгебраической кратности 6.

2. Построение ядер W_i

Пусть $\psi = \varphi - \lambda\, id$, тогда его матрица $B = A - \lambda E$. Введем обозначение $W_0 = \{0\}$, а $W_i = \ker(\psi)$ для $i \in \mathbb{N}$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$, найдем W_1:

Рассмотрим матрицу $B = A - \lambda E$, ее последовательные степени и их ядра:

$$0 = B_1 x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + 2x_4 \\ 3x_4 + 3x_5 \\ x_4 + x_5 \\ 2x_6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 = 2x_5 \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 = -x_5 \\ x_6 = 0 \end{pmatrix}$$

$$rank\ B_1 = 3$$

$$\dim W_1 = 3, \text{базис: } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Найдем W_2. Далее $B_2 = (A - \lambda E)^2$:

$$0 = B_2 x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_4 + 3x_5 + 4x_6 \\ 6x_6 \\ 2x_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 = -x_5 \\ x_6 = 0 \end{pmatrix}$$

$$rank\ B_2 = 2$$

$$\dim W_2 = 4, \text{базис: } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Найдем W_3. $B_3 = (A - \lambda E)^3$:

$$0 = B_3 x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R} \\ x_5 \in \mathbb{R} \\ x_6 = 0 \end{pmatrix}$$

$$rank\ B_3 = 1$$

$$\dim W_3 = 5, \qquad \text{базис} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Далле $B_4 = (A - \lambda E)^4$:

$$0 = B_4 x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{матрица обнулилась}$$

$$rank\ B_4 = 0$$

$$\dim W_4 = 6, \qquad \text{базис} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Значит в базисе B_3 будет всего 6 ЛНЗ векторов.

2. Построение лестницы r_i

$$
\begin{aligned}
r_4 &= dim\,W_4 - dim\,W_3 = 6 - 5 = 1 \\
r_3 &= dim\,W_3 - dim\,W_2 = 5 - 4 = 1 \\
r_2 &= dim\,W_2 - dim\,W_1 = 4 - 3 = 1 \\
r_1 &= dim\,W_1 - dim\,W_0 = 3 - 0 = 3
\end{aligned}
$$

Тогда лестница выглядит таким образом:

W_4	0 0 0 0 0 1		
W_3	0 0 0 2 0 0		
W_2	4 6 2 0 0 0		
W_1	6 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0	0 0 0 0 1 0

Данная система векторов является ЛНЗ, следовательно лестница построена правильно.

3. Базис

Полученный базис $V(-8)$:

$$V(-8) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4. Построение ЖНФ

Первый блок будет 4 х 4, поскольку первая лестница размером 4.

$$J_4(-8) = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Второй блок будет 2 х 2, поскольку вторая лестница размером 2.

$$J_2(-8) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Значит, итоговая Жорданова нормальная форма будет выглядеть таким образом:

$$J_6(-8) = \left(\begin{array}{cccc|cc} -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$$

Ура! Всё получилось.