写像

武井優己

2019 年 6 月 18 日

1　集合の復習

ここでは、以後登場する集合の記号とその意味、集合の濃度について簡単に復習する。

定義 1.1　A, B を集合とする

(1)　空集合を ϕ と表す
(2)　$A \cup B, A \cap B$ はそれぞれ、A, B の**和集合**、**共通集合**を表す
(3)　$A \backslash B$ は、A の元だが B の元ではないものの全体からなる集合を表す
(4)　$A \subset B$ で、A は B の**部分集合**を表す。$A = B$ のときも部分集合とみなせる
(5)　$A \subset B$ で、$A \neq B$ であれば、A は B の**真部分集合**といい、$A \subsetneq B$ と表す
(6)　$A \not\subset B$ は $A \subset B$ の否定で、$A \backslash B \neq \phi$ を表す
(7)　$A \times B$ は、**直積集合**のことで、$(a, b) \quad (a \in A, b \in B)$ の組からなる集合である

1.1　集合の濃度に関して

A が有限集合なら、A の元の個数のことを $|A|$ と書く。A が無限集合であれば、A の元の個数に応じて、集合の濃度の概念があるが、このレポートでは無限集合に関しては割愛する。

集合の濃度の定義に関しては、このあとの写像を用いるものもあるため、定義 4.9 で示す。

2　写像

2.1　写像とは

写像とは、ある集合 A と B においてある対応関係によって、A のどの元にも B の元が 1 つずつ対応しているとき、この規則を A から B への写像といい、$\boldsymbol{f : A \to B}$ と書く。

2.2　定義域、像、値域

2.2.1　定義域

写像 $f : A \to B$ において、集合 A を f の定義域という。

2.2.2　像、値域

写像 $f : A \to B$ において、$a \in A$ に対応する $b \in B$ を $f(a)$ と書き、これを f による a の**像**、または f の**値域**という。

たとえば集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ において、$f(1) = a, f(2) = c, f(3) = b, f(4) = b$ のような対応があったとする。

このとき、1 の像は a に、2 の像は c に... である。

また、像は集合の単一の元だけではなく、集合そのものからも得られる。

ここで、集合 A 自体の像は $f(A) = \{f(a)|a \in A\}$ と定義でき、集合 A は全ての元が a, b, c に対応しているため、像は $\{a, b, c\}$ となる。無論、この写像は値域となる。

※ x,y 平面上では、定義域を x 軸、値域を y 軸としたが、写像は関数であると考えるとこの定義は腑に落ちるのではないだろうか。

2.3　逆像

像が「対応先」だとすれば、逆像は「対応元」のことである。写像 f の逆対応ということで、 $\boldsymbol{f^{-1}}$ と書き、定義は次のものである。

$$f^{-1}(B) = \{a \in A | f(a) \in B\}$$

この定義のように、逆像とは f でうつすと B の元になるような A の元 a を集めた集合である。また、逆像はどんな写像からも得ることができる。ただし、逆像は写像ではなく単なる集合である。

例 2.1　集合 A と B を $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ と置く。

また、f(x) の対応を $f(1) = a, f(2) = c, f(3) = b, f(4) = b$ とする。

このとき、逆像は以下のようになる。

$$\begin{aligned} f^{-1}(a) &= \{1\} \\ f^{-1}(b) &= \{3, 4\} \\ f^{-1}(c) &= \{2\} \\ f^{-1}(d) &= \phi \end{aligned}$$

2.3.1　逆像はなぜ写像と言えないのか？

全単射でない写像を考えるとイメージが付きやすい。ここでは $x \in \mathbb{Z}$ における $f(x) = x^2$ を例に上げる。

$f(x) = x^2$ の逆関数 f^{-1} は、$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$ である。ここでおもむろに $x = \{4\}$ という一元集合を f に与えてみると

$$f^{-1}(\{4\}) = \pm 2$$

と {4} に対して、{2, -2} が得られた。この結果より、写像の定義機をもう一度思い出すと、「写像とは、ある集合 A と B においてある規則によって、A のどの元にも B の元が 1 つずつ対応しているとき、この規則を A から B への写像という」であった。しかし、b に対して、$\{\pm a\}$ というふたつの値が対応しており、これは写像とは言えないことがわかる。よって、$f(x) = x^2$ において、逆像は写像とは言えないのである。

2.4　色々な写像

2.4.1　恒等写像

X を空でない集合とするとき、$id_X : X \to X$ を $id_X(x) = x(x \in X)$ で定める。これを X の恒等写像と呼ぶ。

恒等写像は必ず全単射である。

2.4.2　包含写像

$S \subset A$ のとき、写像 $i : S \to A$ を $i(a) = a(a \in A)$ で定める。この i を包含写像と呼ぶ。

3　合成写像

$f : A \to B$ と $g : B \to C$ が写像なら、A から C への写像 $g \circ f$ を

$$g \circ f(a) = g(f(a))$$

と定義し、f, g の合成という。

4　単射、全射、全単射

4.1　単射

$f : A \to B$ が単射 (injective) であるとは、

$$\forall a, a' \in A, a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$$

が成り立つことを言う。

これは、単射 $f : A \to B$ とは、A から任意に 2 つの元 a と a' を取ってきたときに、a と a' が異なるのであれば、$f(a)$ と $f(a')$ も異なるということを言っている。

一般的にはこれの対偶を取って、

$$\forall a, a' \in A, f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

と表すことが多い。

命題 4.1　写像 $f : X \to Y$ が実数上の関数の場合、単調増加、単調減少は単射になる。

証明

(1) $f: X \to Y$ が単調増加のときに f は単射を示す。任意に $x_1, x_2 \in X$ を取る。$x_1 \neq x_2$ とすると、$x_1 < x_2$ か $x_1 > x_2$ のいずれかが成立する。$x_1 < x_2$ の場合は、$f(x_1) < f(x_2)$ が、$x_1 > x_2$ の場合は、$x_1 > x_2$ が $f(x_1) > f(x_2)$ が成立する。いずれの場合も、$f(x_1) \neq f(x_2)$ なので、f は単射である。

(2) $f: X \to Y$ が単調減少のときに f が単射であることも、(1) と同様に示すことが出来る。

例 4.2　1 次関数、$f(x) = ax + b$ は単射である

$f(x) = f(y)$ のとき、$ax + b = ay + b$ であるから、$x = y$ である。

例 4.3　三角関数 $f(x) = sinx$ は単射でない

$x = 0, y = \pi$ とすると、$(x) = f(y) = 0$ であるが、$x \neq y$ である。

命題 4.4　合成写像における単射性

$f: A \to B, g: B \to C$ とする。

(1) f と g が単射ならば、$g \circ f$ は単射である

(2) $g \circ f$ が単射ならば、f は単射である

(3) $g \circ f$ が単射でも、g は単射であるとは限らない

(4) $g \circ f$ が単射で、f が全射ならば、g は単射である

証明

(1) $g \circ f(a) = g \circ f(a') \quad (a, a' \in A)$ とすると、$f(a), f(a) \in B$、$g(f(a)) = g(f(a'))$ である。
ここで、g は単射より、$f(a) = f(a')$ が言え、f が単射より、$a = a'$ である。よって、$g \circ f$ は単射。

(2) $a, a' \in A$ に対して、$f(a) = f(a')$ とする。$g \circ f$ は単射であるから、$g(f(a)) = g(f(a')) \Rightarrow f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$ より、f は単射。

(3) 反例を上げる。

$$
\begin{aligned}
f &: [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} \qquad (x \in [0, \infty)) \\
g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(y) \quad = y^2 \qquad (y \in \mathbb{R})
\end{aligned}
$$

とする。
$g \circ f: [0, \infty) \to R, (g \circ f)(x) = (\sqrt{x})2 = x$ は単調増加より、単射。しかし、$-1 \neq 1$ ではあるが、$f(-1) = f(1)$ であるため、g は単射とならない。

(4) $b, b' \in B, \quad b \neq b'$ とする。f は全射より、$f(a) = b, f(a') = b'$ となるような、$a, a' \in A$ が存在する。このとき、$g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a), \quad g(b') = g(f(a')) = g \circ f(a')$ である。$g \circ f$ は単射より、$g(f(a)) \neq g(f(a'))$ である。よって、$g(b) \neq g(b')$ だから、g は単射。

4.2　全射

$f: A \to B$ が全射 (surjective) であるとは、

$$\forall b \in B, \exists a \in A, b = f(a)$$

が成り立つことを言う。

これは、全射 $f: A \to B$ とは、$a \in A, b \in B$ に対して、$f(a) = b$ となる a が存在することを言っている。

つまり全射とは、集合 A の各元が集合 B の各元全てに対応することをいう。言い換えると、集合 A により、集合 B の元全てが覆われることである。

例 4.5　1 次関数、$f(x) = ax + b$ は全射である

任意 $y \in \mathbb{R}$ に対して，$x = \frac{y-b}{a}$ とおけば $f(x) = y$ となる x が存在する。

(*写像を作る上ではこういった変形が大事である)

例 4.6　**2 次関数 $f(x) = x^2$ は実数全体で全射でない**

$y = -1$ とすると、どんな実数 x を取ってきても、$f(x) = -1$ になるような x が存在しない。

ただし、実数全体で全射でないと明記しているとおり、$x > 0$ で、$f(x) = x^2$ は全射となる。

命題 4.7　合成写像における全射性

$f: A \to B, g: B \to C$ とする。

(1)　f と g が全射ならば、$g \circ f$ は全射である

(2)　$g \circ f$ が全射ならば、g は全射である

(3)　$g \circ f$ が全射でも、f が全射とは限らない

(4)　$g \circ f$ が全射で、g が単射ならば、f は全射である

証明

(1)　任意に $c \in C$ を取る。g が全射より、ある $b \in B$ が存在して、$g(b) = c$ である。
また、f が全射より、特に $b \in B$ に対して、ある $a \in A$ が存在して、$f(a) = b$ となる。これより、$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$ であるから、$g \circ f$ は全射。

(2)　任意に $c \in C$ を取る。$g \circ f$ は全射より、ある $a \in A$ が存在して、$g \circ f(a) = g(f(a)) = c$ となる。
$b \in B$ に対して、$f(a) = b$ と置くと、$g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a) = c$ であるから、$g \circ f$ の全射性より、g は全射。

(3)　反例を上げる。

$$f : [0, \infty\ ) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} \qquad (x \in [0, \infty\ ])$$
$$g : \mathbb{R} \to [0, \infty\ ), g(y) = y^2$$

とする。
$g \circ f(x) = x = id[0, \infty\ )$ と恒等写像であるため、$g \circ f$ は全射である。しかし、$f(x) = -1$ となるような x は存在せず、f は全射とはならない。

(4)　任意に $c \in C$ を取る。$g \circ f$ を全射と仮定すると、ある $a \in A$ が存在して、$g \circ f(a) = g(f(a)) = c$ となる。ここで、$f(a) := b$ とおく。g は単射より、$g(b) = g(b') \Rightarrow b = b'$ なので、全ての $b \in B$ に対して、$f(a) = b$ とならなざるを得ず、f は全射である。

4.3　全単射

写像 $f: A \to B$ が全単射であるとは、f が全射かつ単射であることをいう。このとき A と B の元は 1 対 1 に対応している。

また全単射では、有限集合における次の命題が言える。

命題 4.8　A, B が有限集合で、$|A| = |B|$ であれば、以下が成り立つ。

(1)　$A \subset B$ なら、$A = B$ である。

(2)　$f: A \to B$ が写像なら、f が単射であることと、全単射であることは同値である

は同値であり、このとき f は全単射となる。

証明

(1)

※ $B \backslash A$ または、$B - A$ は、差集合のこと。B に含まれているが A に含まれていない元の集合

$B = A \cup (B \backslash A)$、$A \cap (B \backslash A) = \phi$ より、$|B| = |A| + |B \backslash A|$ である。

$|A| = |B|$ であれば $|B \backslash A| = 0$ なので、$B = A$ である。

(2) f が単射とする。したがって、$|f(A)| = |A| = |B|$ は明らか。(1) により、$f(A) = B$ が言えるので、f は全射である。よって、f は全単射。

4.4　集合の濃度

定義 4.9　(1)　A, B が有限集合なら、$|A| \leqq |B|$ は自然数における大小関係をそのまま表すものとする

(2)　A が有限集合で、B が無限集合であれば、$|A| \leqq |B|$ と定義する

(3)　A, B が無限集合であるとき、写像 $f: A \to B$ が存在し、f が単射であるなら、$|A| \leqq |B|$ と定義する

(4)　A, B が集合であるとき、写像 $f: A \to B$ が存在し、f が全単射であるなら、$|A| = |B|$ と定義する

(5)　$|A| \leqq |B|$ で、$|A| \neq |B|$ なら $|A| < |B|$ と定義する

4.5　逆写像

A, B を集合とし、写像 $f: A \to B$ とする。f に対して、ある $g: B \to A$ が存在し、$g \circ f = id_A$、$f \circ g = id_B$ が成立するとき、f は逆写像を持つという。このとき、g は f の逆写像という。

また、写像 $f: A \to B$ が全単射であることと、逆写像を持つことは同値である。

証明

$f: A \to B$ が逆写像を持つことより、ある $g: B \to A$ があり、$g \circ f = id_A, \quad f \circ g = id_B$。

(※ $f(g(b) = f(a) = b, \quad g(f(a) = g(b) = a$ より)

f が単射であるとする。$f(x) = f(y), x, y \in A$ とすると、$g \circ f(x) = g \circ f(y) \Rightarrow x = y$ が言え、f は単射である。(4.4)

f が全射であるとする。任意の $b \in B$ を取り、g で送ると、$g(b) \in A$ である。この $g(b)$ は、$f \circ g(b) = b$ という恒等写像の行き先に対応する元であるから、全射であることが言える。(言い換えると、$f \circ g(b) = b$ となる、$g(b)$ が存在する。)

命題 4.10　以上のことより、逆写像の定義域と値域は、それぞれ元の写像の値域と定義域であることが言える。

例題 4.11　$f : A \to B$ を写像とするとき、

(1)　f は単射である
(2)　$S \subset A$ に対し、$f^{-1}(f(S)) \subset S$

は同値であることを証明せよ

証明

(1) => (2)

$a \in f^{-1}(f(S)) = x \in A | f(x) \in f(S)$ を取ってくる。$f(a) \in f(S)$ より、ある $a' \in S$ があって、$f(a') = f(a)$ である。

今、f は単射より、$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$。つまり、$a \in S$ が言え、$f^{-1}(f(S)) \subset S$ である。

(2) => (1)

$a, b \in A$ に対して、$f(a) = f(b)$ とする。$S = \{a, b\}$ とすると、$f^{-1}(f(\{a\})) = \{a\}$, $f^{-1}(f(\{b\})) = \{b\}$ となる。仮定より、$f(a) = f(b)$ だから、$\{a\} = \{b\}$ が言える。これより、a と b は一致しており、S は $S = \{a\}$ か $S = \{b\}$ の一元集合である。よって、$a = b$ である。

例題 4.12　$f : A \to B$ を写像とするとき、

(1)　f は全射である
(2)　任意の部分集合 $S \subset B$ に対して、$f(f^{-1}(S)) = S$

は同値であることを証明せよ

証明

(1) => (2)

$S \subset B$ を任意の部分集合とする。$b \in S$ であれば、$f^{-1}(b) \in f^{-1}(S)$ である。これより、$b \in f(f^{-1}(S))$ が言えるので、$S \subset f(f^{-1}(S))$ である。

$b \in f(f^{-1}(S))$ をとってくる。像の定義より、ある $a \in A$ があり、$f(a) = b \in f(f^{-1}(S))$ となる。$a \in f^{-1}(S)$ より、$f(a) \in S$ つまり、$b \in S$ となり、$f(f^{-1}(S)) \subset S$ が言える。

これらより、$f(f^{-1}(S)) = S$ である。

(2) => (1)

$S \subset B$ を任意の部分集合とする。任意の $b \in B$ を取ってきて、$\{b\} \subset B$ である。ここで、$f(f^{-1}(S)) = S$ に対し、$f(f^{-1}(\{b\})) = \{b\}$ が言える。つまり、$f^{-1}(\{b\}) \neq \phi$ であるから、$f(f^{-1}(S)) = S$ であれば、f は全射である。

参考文献

[1]　藤田博司 [集合と位相をなぜ学ぶのか] 技術評論社

[2]　雪江明彦 [代数学 1 群論入門] 日本評論社