Исследование функций и построение графиков.

Порядок исследования функции.

1. Область определения. Координаты точки пересечения с осью OY и с осью OX (если возможно)
2. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва. Вычисление всех односторонних пределов в точках разрыва второго рода. Вертикальные асимптоты.
3. Монотонность. Точки экстремума
4. Выпуклость. Точки перегиба.
5. Наклонные асимптоты. Поведение при $x \to \pm\infty$.
6. Построение графика.

Пример.

$$y = \frac{e^{1-x}}{2+3x}$$

1) Область определения.

$x \in (-\infty \;\; -2/3) \cup (-2/3 \;\; +\infty)$; $y(0) = \frac{1}{2} e \approx 1{,}4$

точек пересечения с OX нет.

2) Функция непрерывна при $x \neq -2/3$ (как частное непрерывных функций)

$$\lim_{x \to -2/3+} \frac{e^{1-x}}{2+3x} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\frac{2}{3}-} \frac{e^{1-x}}{2+3x} = -\infty$$

$x=-\frac{2}{3}$ - вертикальная асимптота

3. Монотонность.

$$y'=-e^{1-x}\cdot\frac{1}{2+3x}+e^{1-x}\left(-\frac{1}{(2+3x)^2}\cdot 3\right)=$$

$$=e^{1-x}\cdot\frac{1}{(2+3x)^2}\left(-2-3x-3\right)=\frac{-e^{1-x}}{(2+3x)^2}(3x+5)$$

y' + − −

y ↗ $-\frac{5}{3}$ ↘ $-\frac{2}{3}$ ↘

возрастает при $x\in(-\infty\ -\frac{5}{3})$

убывает при $x\in(-\frac{5}{3}\ -\frac{2}{3})$

и $x\in(-\frac{2}{3}\ +\infty)$

т $x=-\frac{5}{3}$ - точка максимума. $y(-\frac{5}{3})=\frac{e^{8/3}}{-3}\approx-4.9$

4. Выпуклость.

$$y''=(e^{1-x})''\frac{1}{2+3x}+2(e^{1-x})'\left(\frac{1}{2+3x}\right)'+e^{1-x}\left(\frac{1}{2+3x}\right)''=$$

$$=e^{1-x}\left(\frac{1}{2+3x}-2\frac{-3}{(2+3x)^2}+\frac{-3\cdot(-2)\cdot 3}{(2+3x)^3}\right)=$$

$$=e^{1-x}\frac{1}{(2+3x)^3}\left(4+12x+9x^2+12+18x+18\right)=$$

$$=e^{1-x}\frac{1}{(2+3x)^3}\left(9x^2+30x+34\right)$$

y'' − +

y ∩ $-2/3$ ∪

точек перегиба нет (поскольку $x=-\frac{2}{3}$ - точка разрыва)

5. Наклонные асимптоты

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1-x}}{(2+3x)x} = 0.$$

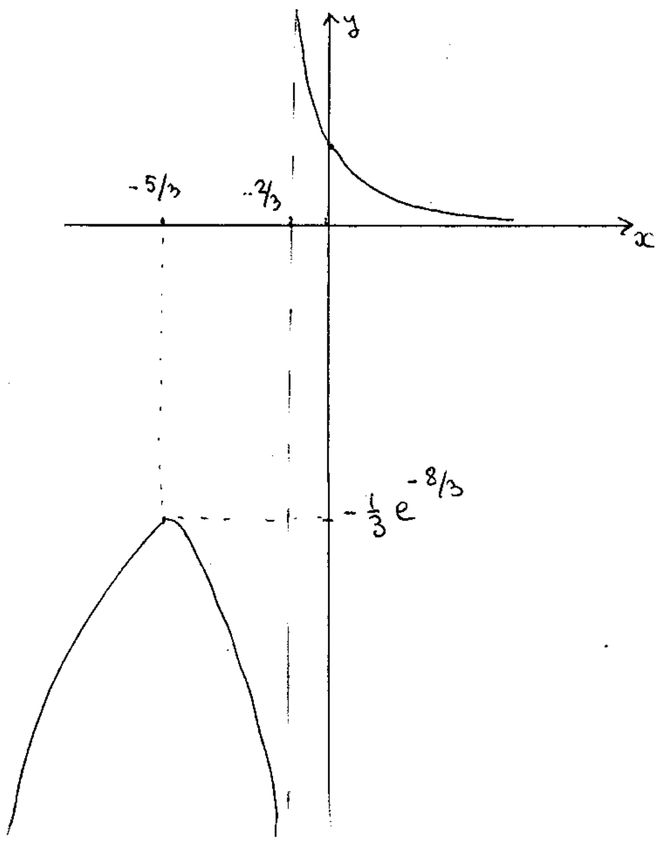
$$b = \lim_{x\to+\infty} (y - kx) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1-x}}{2+3x} = 0.$$

$y = 0$ - асимптота при $x \to +\infty$ (горизонтальная)

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{1-x}}{(2+3x)x} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{1-x}}{3\cdot 2x} = \infty$$

при $x \to -\infty$ наклонных асимптот нет.

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{1-x}}{2+3x} = -\infty$$



$$y = \frac{x^3+3x^2+15x+18}{x^2+5x+6}$$

1. Область определения.

$x \in (-\infty\ -3) \cup (-3\ -2) \cup (-2\ +\infty)$

$y(0)=3$. Для нахождения точки пересечения с осью OX придется решить уравнение $x^3+3x^2+15x+18=0$

Найдем приближенные решения. Рассмотрим функцию $y(x)=x^3+3x^2+15x+18$. При $x \geq 0$ $y(x)>0$. Вычислим $y'(x) = 3x^2+6x+15 = 3(x^2+2x+1+4) = 3(x+1)^2+12>0$

Следовательно, $y(x)$ монотонно возрастающая функция, $y(-1)=5>0$, $y(-2)=-8$, следовательно уравнение $y(x)=0$ имеет единственное решение $\bar{x}$ и $\bar{x} \in (-2\ -1)$. Вычислим $y(-\frac{3}{2}) = -\frac{9}{8}$. Значит, $\bar{x} \in (-1{,}5\ -1)$. $y(-1.25)>0$. Следовательно $\bar{x} \in (-1{,}5\ -1{,}25)$. Возьмем $\hat{x} \approx -1{,}375$.

Проделанная процедура называется приближенным решением уравнения методом деления отрезка пополам.

2. Функция непрерывна всюду кроме точек $x_1=-2$, $x_2=-3$. (нули знаменателя) как частное непрерывных функций

Так как $y(-2) \neq 0$ и $y(-3) \neq 0$, то в точках x_2 и x_1 y является бесконечно большой и, следовательно, точки x_1 и x_2 являются точками разрыва второго рода, а прямые $x=-3$ и $x=-2$ являются вертикальными асимптотами. Вычислим односторонние пределы в этих точках. Отметим, что в точках x_1 и x_2 (а, значит, и в окрестностях этих точек) числитель дроби отрицательный. Так как знаменатель $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ больше нуля при $x\in(-\infty,-3)\cup(-2,+\infty)$, то $\lim\limits_{x\to-3-} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-3+} y=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-2-} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-2+} y=-\infty$.

3. Используя деление многочленов столбиком можно представить y в виде

$$y=x-2+\frac{19x+30}{(x+2)(x+3)} \qquad (1)$$

а если оставшуюся дробь разложить на простейшие, то в виде

$$y=x-2+\frac{27}{x+3}-\frac{8}{x+2} \qquad (2)$$

Для вычисления $y'(x)$ используем формулу (1). Тогда

$$y'(x)=1+\frac{19(x^2+5x+6)-(19x+30)(2x+5)}{(x+3)^2(x+2)^2}=$$

$$= \frac{x^4+25x^2+36+10x^3+12x^2+60x+19x^2+95x+114}{(x^2+5x+6)^2} -$$

$$- \frac{38x^2+60x+95x+150}{(x^2+5x+6)^2} =$$

$$= \frac{x^4+10x^3+18x^2}{(x^2+5x+6)^2} = \frac{x^2(x^2+10x+18)}{(x+2)^2(x+3)^2} =$$

$$= \frac{x^2(x-x_3)(x-x_4)}{(x+2)^2(x+3)^2}$$

где $x_3 = -5-\sqrt{7} \approx -7.65$, $x_4 = -5+\sqrt{7} \approx -2.35$

y'	$+$	x_3	$-$	-3	$-$	x_4	$+$	-2	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

x_3 - точка максимума $y(x_3) \approx -14$,

x_4 - точка минимума $y(x_4) \approx 53.8$

4. Вычисление y'' удобно проводить, используя формулу (2)

Тогда $y'' = \frac{54}{(x+3)^3} - \frac{16}{(x+2)^3} = 2\,\frac{27(x+2)^3-8(x+3)^3}{(x+2)^3(x+3)^3} =$

$$= 2\,\frac{(3x+6)^3-(2x+6)^3}{(x+2)^3(x+3)^3} =$$

$$= 2\,\frac{(3x+6-2x-6)(9x^2+36x+36+4x^2+36+24x+6x^2+30x+36)}{(x+2)^3(x+3)^3} =$$

$$= 2\,\frac{x(19x^2+90x+108)}{(x+2)^3(x+3)^3}$$

y''	$-$	-3	$+$	-2	$-$	0	$+$
y	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

$x=0$ - точка перегиба

5. Наклонные асимптоты (используем (1))

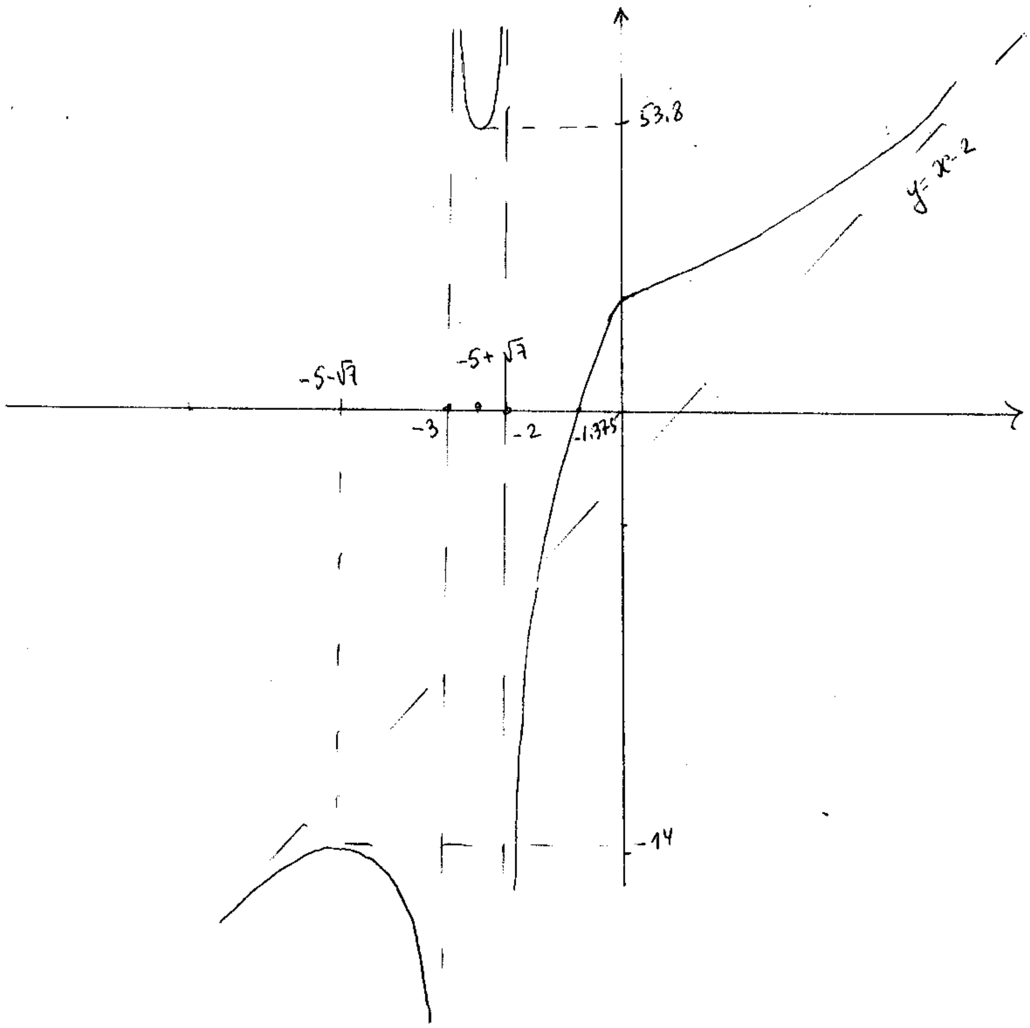
$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{19x+30}{(x^2+5x+6)x}\right)=1$$

$k=1.$

$$\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(-2+\frac{19x+30}{(x+2)(x+3)}\right)=-2.$$

$y = x-2$ – наклонная асимптота

и при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.



Приложения.

1. Деление многочленов столбиком.

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2+15x+18 & x^2+5x+6 \\ \cline{2-2} -\;x^3+5x^2+6x & x-2 \\ \cline{1-1} -2x^2+9x+18 & \\ -\;\;-2x^2-10x-12 & \\ \cline{1-1} 19x+30 & \end{array}$$

$$\frac{x^3+3x^2+15x+18}{x^2+5x+6} = x-2+\frac{19x+30}{x^2+5x+6}.$$

$$\begin{array}{r|l} 5243 & 23 \\ \cline{2-2} 46 & 227 \\ \cline{1-1} 64 & \\ 46 & \\ \cline{1-1} 183 & \\ 161 & \\ \cline{1-1} 22 & \end{array}$$

$$\frac{5243}{23} = 227\frac{22}{23}$$

2. Разложение дроби на простейшие.

$$\frac{19x+30}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3} \qquad A,\ B\ -\ ?$$

$$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3} = \frac{Ax+3A+Bx+2B}{(x+2)(x+3)}$$

$$(A+B)x+3A+2B = 19x+30$$

$$(A+B-19)x+3A+2B-30 = 0.$$

$$\begin{cases} A+B-19=0 \\ 3A+2B-30=0 \end{cases} \qquad A=-8, \quad B=27$$

$$\frac{19x+30}{(x+2)(x+3)} = \frac{27}{x+3}-\frac{8}{x+2}$$