Типовой расчёт №1 по теме:

Теория функций комплексного переменного

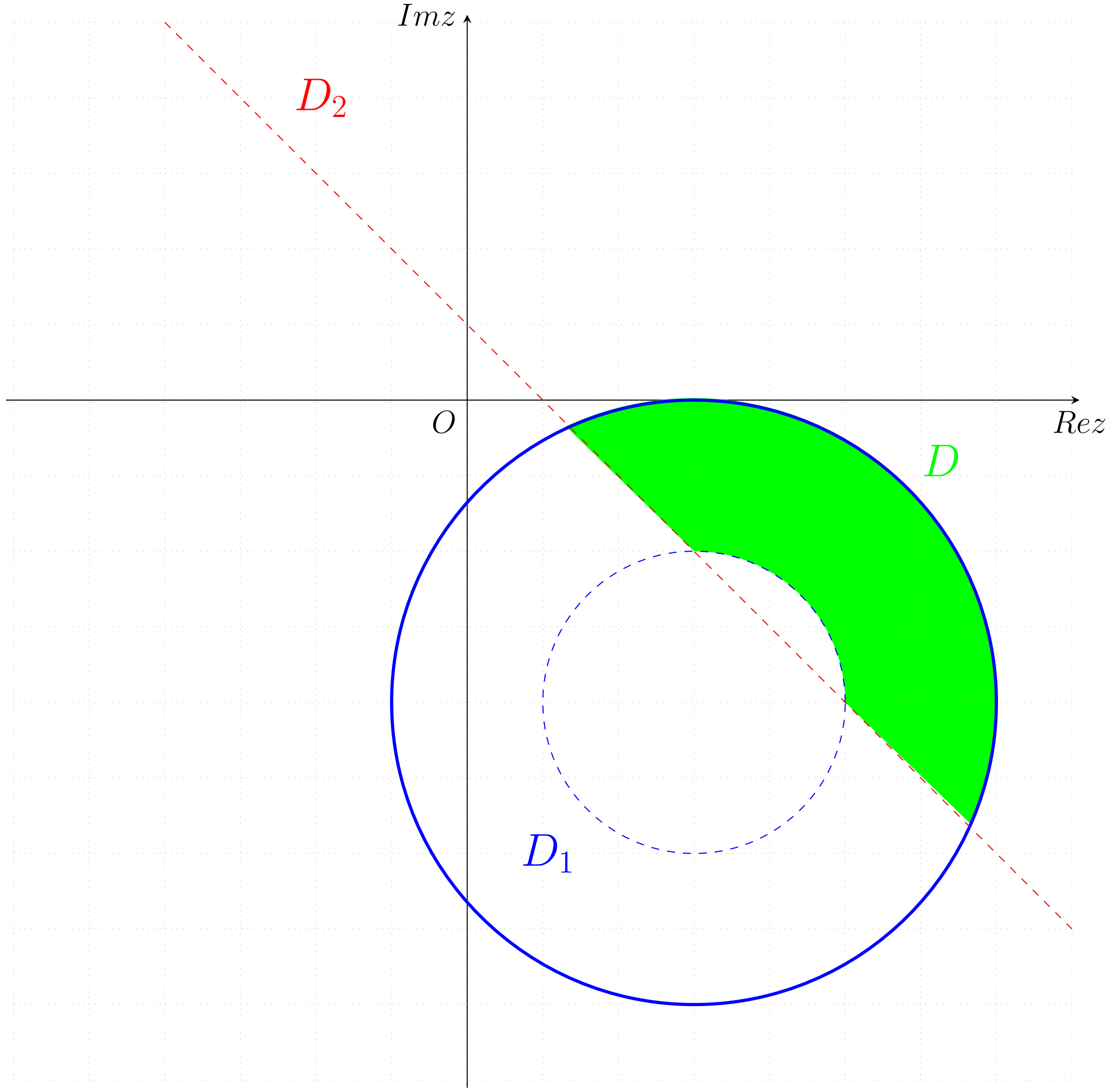
Петров Вячеслав Маркович
Поток 22.3, ису 409331
НИУ ИТМО

Санкт-Петербург, 2024 г.

1 Изобразить на комплексной плоскости множество D, заданное неравенствами: $D = \{z : 2 < |z - 3 + 4i| \leq 4, Rez + Imz > 1\}$

Неравенство $2 < |z-3+4i| \leq 4$ задаёт на комплексной плоскости кольцо с центром в точке $z_1 = 3-4i$ и $R_1 = 2$, $R_2 = 4$. Неравенство $Rez+Imz > 1$ задаёт полуплоскость D_2, находящуюся выше прямой $Imz = 1 - Rez$

Множество D является пересечением множеств D_1 и D_2. Множества D_1, D_2 и D изображены на рисунке. Множество D закрашено.



2 Найти вссе значения функции в указанной точке. Вычислить $Arcth(1 - i)$

По определению функции "гиперболический котангенс":

$$cthz = \frac{chz}{shz} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$$

Пусть $w = 1 - i$. Тогда:

$$z = Arcthw$$

$$cthz = w$$

$$\frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = w$$

$$e^z + e^{-z} = (e^z - e^{-z})w$$

$$e^z(1 - w) = e^{-z}(-w - 1)| * e^z$$

$$e^{2z}(1 - w) = -w - 1$$

$$e^{2z} = \frac{w + 1}{w - 1}$$

$$Ln(e^{2z}) = Ln(\frac{w + 1}{w - 1})$$

$$2z = Ln(\frac{w + 1}{w - 1})$$

$$z = \frac{1}{2}Ln(\frac{w + 1}{w - 1})$$

Подставим $w = 1 - i$. Тогда:

$$z = \frac{1}{2}Ln(\frac{1 - i + 1}{1 - i - 1}) = \frac{1}{2}Ln(\frac{2 - i}{-i}) = \frac{1}{2}Ln(\frac{(2 - i)i}{-i^2}) = \frac{1}{2}Ln(\frac{2i - i^2}{1}) = \frac{1}{2}Ln(2i+1) = \frac{1}{2}Ln(\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{2}{\sqrt{5}}i+\frac{1}{\sqrt{5}}))$$

$$= \frac{1}{2}Ln(\frac{1}{\sqrt{5}}e^{arccos(\frac{1}{\sqrt{5}})i}) = \frac{1}{2}(ln(\frac{1}{\sqrt{5}})+arccos(\frac{1}{\sqrt{5}})i+2\pi ki) = \frac{1}{2}(ln(\frac{1}{\sqrt{5}})+arccos(\frac{1}{\sqrt{5}})i)+\pi ki, k \in Z$$

Здесь $arccos(\frac{1}{\sqrt{5}})$ можно заменить на $arctg(2)$

3 Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по известной действительной или мнимой части. $u(x, y) = x^2 - y^2 - x$

Для того, чтобы функция $u(x, y)$ являлась вещественной частью аналитической в односвязной области D функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы в области D функция $u(x, y)$ являлась гармонической, то есть удовлетворяла уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в области D. В том случае, если гармоническая функция $u(x, y)$ задана в односвязной области D, можно с точностью до постоянного слагаемого найти аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, то есть восстановить аналитическую функцию по заданной её действителльной (или мнимой) части. При этом сопряжённая с $u(x, y)$ гармоническая функция $v(x, y)$ находится при помощи криволинейного интеграла:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + C \tag{1}$$

где $(x_0, y_0) \in D$ и $(x, y) \in D$ (интеграл не зависит от кривой, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x, y), а зависит лишь от точки (x, y), если точка (x_0, y_0) фиксирована).

Если область D не односвязна, то найденная функция $v(x, y)$, а следовательно, и $f(z) = u + iv$ могут оказаться неоднозначными.

Сначала проверим, что заданная функция удовлетворяет уравнению Лапласа. Действительно, имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

Следовательно, для нашей функции уравнение Лапласа выполнено при всех x и y, то есть она является гармонической на всей плоскости.

Теперь найдём сопряжённую по отношению к $u(x, y)$ (то есть связанную с ней уловиями Коши-Римана) гармоническую функцию $v(x, y)$, тогда $f(z) = u + iv$ и будет искомой аналитической функцией. Для нахождения $v(x, y)$ можно воспользоваться формулой (1) или непосредственно условиями Коши-Римана. В этом примере покажем, как для нахождения $v(x, y)$ использовать условия Коши-Римана.

По одному из условий Коши-Римана выполнено:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1$$

Фиксируем $x = x_0$, при этом для определения функции $v(x, y)$ возникает обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dv}{dy}(x_0, y) = 2x_0 - 1$$

Интегрируя, находим:

$$v(x_0, y) = \int (2x_0 - 1)dy = 2x_0 y - y + c(x_0),$$

затем, варьируя константу x_0, получим

$$v(x, y) = 2xy - y + c(x),$$

Осталось определить функцию $c(x)$. Из $v'_x = -u'_y$ - второго условия Коши-Римана находим

$$2y + c'(x) = 2y => c'(x) = 0 => c(x) = const$$

Таким образом,

$$f(z) = (x^2 - y^2 - x) + i(2xy - y + c) = (x^2 - y^2 + 2xyi) - (x + iy) + ci = z^2 - z + ic$$

Ответ: $f(z) = z^2 - z + ic$

4 Вычислить интеграл от заданной функции $f(z)$ по заданной кривой C. Вычислить $\oint_C Rez\,dz$, где C - ломанная с вершинами O(0;0), A(1;1), B(2;1)

Пусть L - отрезок прямой, соединяющий точки O и A, M - точки A и B, тогда

$$\oint_C Rez\,dz = \oint_L Rez\,dz + \oint_M Rez\,dz$$

4.1 отрезок L

Пусть кривая L задана уравнением $z(t) = x(t) + iy(t)$, где $t \in [\alpha, \beta]$. Интеграл по кривой L от функции комплексного переменного $f(z)$ можно выразить через криволинейный интеграл, а для его вычcления использовать одно из выражений:

$$\oint_L f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\,(dx(t) + idy(t))$$

В нашем случае кривую L - отрезок прямой, соединяющий точки (0;0) и (1;1) можно задать явным уравнением в координатах $(x, y) : y = x, 0 \leq x \leq 1$. В случае явного задания имеем $x(t) = x$, $y(t) = y(x)$, $dz = (1 + iy'(x))dx$, откуда

$$\oint_L Rez\,dz = \int_0^1 Re(x+ix)\,(1+ix')dx = \int_0^1 Re(x+ix)\,(1+i)dx = (1+i)\int_0^1 xdx = (1+i)\frac{x^2}{2}|_0^1 = (1+i)(\frac{1}{2}-$$

4.2 отрезок M

Пусть кривая M задана уравнением $z(t) = x(t) + iy(t)$, где $t \in [\alpha, \beta]$. Интеграл по кривой M от функции комплексного переменного $f(z)$ можно выразить через криволинейный интеграл, а для его вычcления использовать одно из выражений:

$$\oint_M f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\,(dx(t) + idy(t))$$

В нашем случае кривую M - отрезок прямой, соединяющий точки (1;1) и (2;1) можно задать явным уравнением в координатах $(x, y) : y = 1, 1 \leq x \leq 2$. В случае явного задания имеем $x(t) = x$, $y(t) = y(x)$, $dz = (1 + iy'(x))dx$, откуда

$$\oint_M Rez\,dz = \int_1^2 Re(x+1i)\,(1+i1')dx = \int_1^2 Re(x+i)\,(1+0)dx = \int_1^2 xdx = \frac{x^2}{2}|_1^2 = \frac{4}{2}-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

4.3 Итог

$$\oint_C Rez\,dz = \oint_L Rez\,dz + \oint_M Rez\,dz = \frac{1+i}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4+i}{2}$$

Ответ: $\frac{4+i}{2}$

5 Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности указанной точки $z = z_0$. Найти область представимости функции полученным рядом. $f(z) = ln(\frac{1-z}{1+z})$, $z_0 = 0$

Чтобы разложить функцию $\ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$ в ряд Тейлора в окрестности $z = 0$, начнем с применения свойств логарифмов:

$$\ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = \ln(1-z) - \ln(1+z).$$

Теперь мы можем использовать разложения в ряд Тейлора для $\ln(1-z)$ и $\ln(1+z)$:

1. Ряд для $\ln(1-z)$:

$$\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots\right), \quad |z| < 1.$$

2. Ряд для $\ln(1+z)$:

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = \left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots\right), \quad |z| < 1.$$

Теперь подставим оба разложения в наше выражение:

$$\ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = \left(-z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots\right) - \left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots\right).$$

Упрощая, получаем:

$$\ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = -2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1} = -2z - \frac{2z^3}{3} - \dots,$$

где все четные члены сокращаются, а нечетные члены складываются с учетом знака.

Теперь, для нахождения области представимости этого ряда, мы видим, что разложения $\ln(1-z)$ и $\ln(1+z)$ требуют, чтобы модуль z был меньше 1, т.е. $|z| < 1$. Таким образом, область представимости функции $\ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$ в виде ряда Тейлора в окрестности $z = 0$ равна:

$$|z| < 1.$$

6 Разложить указанную функцию в ряд Лорана в указанной области. Разложить функцию $f(z) = z(z-2)^{-1}$ в ряд Лорана по степеням z области $|z| > 2$

Чтобы разложить функцию $\frac{z}{z-2}$ в ряд Лорана в области $|z| > 2$, начнем с преобразования функции:

$$\frac{z}{z-2} = \frac{z}{z(1-\frac{2}{z})} = \frac{1}{1-\frac{2}{z}}.$$

Теперь применим разложение в ряд геометрической серии, которое имеет вид:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (\text{при } |x| < 1).$$

Для нашего случая $x = \frac{2}{z}$. Поскольку мы рассматриваем область $|z| > 2$, то $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$. Таким образом, можно записать:

$$\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n}.$$

Следовательно,

$$\frac{z}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n}.$$

Таким образом, окончательное разложение в ряд Лорана выглядит так:

$$\frac{z}{z-2} = 1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \cdots \quad (|z| > 2).$$