Типовой расчёт №2 по теме:

Теория функций комплексного переменного

Петров Вячеслав Маркович
Поток 22.3, ису 409331
НИУ ИТМО

Санкт-Петербург, 2024 г.

1 Вычислить интеграл $\oint_L f(z)dz$ от функции комплексного аргумента $f(z)$ по указанному замкнутому кусочно-гладкому контуру L при помощи вычетов. $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)}, L = z : |z| = 5/2$

Для вычисления контура интеграла $\oint_L f(z)\,dz$ с помощью вычетов нам необходимо сначала определить полюса функции $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ и затем найти, какие из них находятся внутри контура $L = \{z : |z| = \frac{5}{2}\}$.

Полюса функции $f(z)$ находятся в точках, где знаменатель равен нулю:

- $z = 1$
- $z = 2$
- $z = 3$

Теперь оценим радиус $\frac{5}{2}$: - Полюсы $z = 1$ и $z = 2$ находятся внутри круга радиуса $\frac{5}{2}$ (так как $1 < \frac{5}{2}$ и $2 < \frac{5}{2}$), - Полюс $z = 3$ находится за пределами круга (так как $3 > \frac{5}{2}$).

Следовательно, вписываются только два полюса: $z = 1$ и $z = 2$.

Далее, нам необходимо найти вычеты функции $f(z)$ в этих точках.

1. Вычет в точке $z = 1$:

Вычет $f(z)$ в точке $z = 1$ находится по формуле:

$$\mathrm{Res}(f,1) = \lim_{z\to1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to1}(z-1)\frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \lim_{z\to1}\frac{z+1}{(z-2)(z-3)}$$

Подставим $z = 1$:

$$\mathrm{Res}(f,1) = \frac{1+1}{(1-2)(1-3)} = \frac{2}{(-1)(-2)} = \frac{2}{2} = 1.$$

2. Вычет в точке $z = 2$:

Аналогично, находим вычет в $z = 2$:

$$\mathrm{Res}(f,2) = \lim_{z\to2}(z-2)f(z) = \lim_{z\to2}(z-2)\frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \lim_{z\to2}\frac{z+1}{(z-1)(z-3)}.$$

Подставим $z = 2$:

$$\mathrm{Res}(f,2) = \frac{2+1}{(2-1)(2-3)} = \frac{3}{1\cdot(-1)} = -3.$$

Теперь мы можем использовать формулу для вычисления интеграла по контуру:

$$\oint_L f(z)\,dz = 2\pi i\,(\mathrm{Res}(f,1) + \mathrm{Res}(f,2)) = 2\pi i\,(1-3) = 2\pi i(-2) = -4\pi i.$$

Таким образом, ответ:

$$\boxed{\oint_L f(z)\,dz = -4\pi i}$$

2 Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{xsin(\alpha x)}{x^2+8}\,dx$, $\alpha < 0$

Будем использовать метод комплексного анализа. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{i\alpha x}}{x^2+8}\,dx,$$

где $e^{i\alpha x} = \cos(\alpha x) + i\sin(\alpha x)$. Таким образом, мы имеем

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x\cos(\alpha x)}{x^2+8}\,dx + i\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(\alpha x)}{x^2+8}\,dx.$$

Мы знаем, что

$$\mathrm{Re}(I) = \int_0^{+\infty} \frac{x\cos(\alpha x)}{x^2+8}\,dx,$$

$$\mathrm{Im}(I) = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin(\alpha x)}{x^2+8}\,dx.$$

Обозначим

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{i\alpha x}}{x^2+8}\,dx,$$

где $\alpha < 0$. Данный интеграл можно вычислить с использованием теоремы о вычетах. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{ze^{i\alpha z}}{z^2+8},$$

которая имеет два полюса в точках $z = 2i\sqrt{2}$ и $z = -2i\sqrt{2}$. Для вычисления интеграла мы будем интегрировать по полуокружности в верхней полуплоскости радиуса R, а затем будем брать предел при $R \to \infty$.

Поля второго рода $z = 2i\sqrt{2}$ и $z = -2i\sqrt{2}$ — это простые полюса.

Выбор контура в верхней полуплоскости позволяет учесть только полюс $z = 2i\sqrt{2}$. Вычислим вычет функции $f(z)$ в этой точке:

$$f(z) = \frac{ze^{i\alpha z}}{z^2+8},$$

$$\lim z \to 2i\sqrt{2}(z - 2i\sqrt{2})f(z) = \lim z \to 2i\sqrt{2}\frac{ze^{i\alpha z}}{z + 2i\sqrt{2}}$$

Подставляя $z = 2i\sqrt{2}$:

$$= \frac{2i\sqrt{2}e^{i\alpha(2i\sqrt{2})}}{2i\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}} = \frac{2i\sqrt{2}e^{-2\alpha\sqrt{2}}}{4i\sqrt{2}} = \frac{1}{2}e^{-2\alpha\sqrt{2}}$$

По теореме о вычетах интеграл по замкнутому контуру равен $2\pi i$ умноженному на вычет в полюсе:

$$I(\alpha) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} e^{-2\alpha\sqrt{2}} = \pi i e^{-2\alpha\sqrt{2}}.$$

Теперь выделим действительную и мнимую части:

$$I(\alpha) = \pi i e^{-2\alpha\sqrt{2}}$$

Так как $\mathrm{Im}(I) = \int 0^{+\infty} \frac{x \sin(\alpha x)}{x^2+8}\, dx$, мы получаем:

$$\int 0^{+\infty} \frac{x \sin(\alpha x)}{x^2 + 8}\, dx = \mathrm{Im}(I) = \pi e^{-2\alpha\sqrt{2}}$$

Следовательно, искомый интеграл равен:

$$\int 0^{+\infty} \frac{x \sin(\alpha x)}{x^2 + 8}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-2\alpha\sqrt{2}}$$

Таким образом, результат вычисления интеграла:

$$\boxed{\frac{\pi}{2} e^{-2\alpha\sqrt{2}}}$$