α

Лекция 4

«ПЛФ и тензоры»

Содержание лекции:

Ключевые слова:

Авторы курса:

Свинцов М.В.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

4.1 Основные определения

Пусть X - конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Полилинейной формой, типа (p, q) на X назовем полилинейное отображение вида

$$U : \underbrace{X \times \ldots \times X}_{p} \times \underbrace{X^* \times \ldots \times X^*}_{q} \to \mathbb{K}$$

иными словами функцию U, определенную на p векторах пространства X и q линейных формах пространства X^*, которая линейна по каждому из аргументов

$$U(x_1, \ldots, \alpha x_i' + \beta x_i'', \ldots, x_p; y^1, \ldots, y^q) =$$
$$= \alpha U(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_p; y^1, \ldots, y^q) + \beta U(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_p; y^1, \ldots, y^q)$$

Валентностью ПЛФ называют пару чисел (p, q), определяющих количество векторов и ковекторов (линейных форм), являющихся аргументами полилинейного отображения.

Пример 4.1.

1. Линейные формы над X - это отображения вида

$$\varphi : X \to \mathbb{K}$$

Следовательно, линейная форма $\varphi \in X^*$ является ПЛФ типа $(1, 0)$.

2. Линейные формы над X^* - это отображения вида

$$\hat{x} : X^* \to \mathbb{K}$$

Следовательно, линейная форма $\hat{x} \in X^{**}$ является ПЛФ типа $(0, 1)$. Однако ранее обсуждалось, что между пространствами X и X^{**} существует естественный изоморфизм, определяемый как

$$x \leftrightarrow \hat{x} \qquad (\hat{x}, f) = (f, x)$$
$$x \in X, \quad f \in X^*, \quad \hat{x} \in X^{**}$$

Следовательно, можно утверждать, что ПЛФ типа $(0, 1)$ по сути своей – это векторы пространства X в силу отождествления пространств $X \simeq X^{**}$.

3. Билинейные формы над X – это отображения вида

$$b : X \times X \to \mathbb{K}$$

Таким образом, билинейная форма - это ПЛФ типа $(2, 0)$. Примером билинейной формы служит скалярное произведение двух векторов

$$U(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$

4. Можно также рассмотреть трилинейные формы как отображения вида

$$\psi : X \times X \times X \to \mathbb{K}$$

являющиеся ПЛФ типа $(3, 0)$. Отображения такого вида встречались в геометрии - это смешанное произведение трех векторов.

Опционально. Допматериал

Рассмотрение ПЛФ валентности $(1, 1)$ *оказывается чуть более нетривиальной задачей, которая приведет нас к определению линейного оператора. Пусть задано полилинейное отображение* $\varphi(x; f)$

$$\varphi : X \times X^* \to \mathbb{K}$$

При фиксированном x *функция* $\varphi(x; f)$ *является линейной формой над* X^*

$$\varphi(x; f) = (\hat{x}, f) = (f, v) = f(\psi(x))$$

учитывая, что в силу изоморфности пространств $X \simeq X^{**}$ *можно утверждать, что* $\forall x \in X, \exists! v = \psi(x) \in X$ *такой, что удовлетворяет равенству выше. Действительно, естественный изоморфизм между* X *и* X^{**} *не утверждает, что объекты* x *и* v *равны, но вместе с ним между ними существует однозначное отображение. Покажем, что* $\psi(x)$ *определяет линейный оператор. Для этого рассмотрим свойства линейности тензора*

$$f(\psi(\alpha x_1 + \alpha x_2)) = \varphi(\alpha x_1 + \beta x_2; f) = \alpha\varphi(x_1; f) + \beta\varphi(x_2; f) =$$
$$= \alpha f(\psi(x_1)) + \beta f(\psi(x_2)) = f(\alpha\psi(x_1)) + f(\beta\psi(x_2)) = f(\alpha\psi(x_1) + \beta\psi(x_2))$$

Откуда следует

$$\psi(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha\psi(x_1) + \beta\psi(x_2)$$

Можно показать обратное, что для каждого оператора $\psi \in \mathrm{End}(X)$ *может быть построена ПЛФ вида*

$$\varphi(x; f) = f(\psi(x))$$

обладающий необходимыми свойствами.

Nota bene *Линейный оператор соответствует смешанной ПЛФ типа* $(1, 1)$.

4.2 Действия с полилинейными формами

Прежде всего договоримся о том, в каком случае будем считать полилинейные формы равными.

Полилинейные формы U и V одинаковой валентности (p, q) будем называть равными, если

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q) = V(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q)$$

для любых наборов $x_1, x_2, \ldots, x_p \in X$ и $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q \in X^*$.

Иными словами, как и ранее для любого отображения мы определяем равенство как поточечное, полагая, что отображения должны принимать одинаковые значения на одинаковых наборах аргументов.

Безусловно сразу можно определить, что мы считаем нулевой полилинейной формой, а также сумму полилинейных форм и их произведение на скаляр.

Нуль-формой Θ валентности (p, q) называется такая полилинейная форма, что

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q) = 0 \qquad \forall x_i \in X, \varphi^j \in X^*$$

Пусть U и V - полилинейные формы валентности (p, q).

Отображение $W = U + V$ будем называть суммой полилинейных форм U и V, если

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q) =$$
$$= U(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q) + V(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q)$$

для любых наборов $x_1, x_2, \ldots, x_p \in X$ и $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q \in X^*$.

Аналогично можно ввести и умножение на скаляр.

Отображение λU будем называть произведением полилинейной формы U на скаляр λ, если

$$(\lambda U)(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q) = \lambda \cdot U(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q)$$

для любых наборов $x_1, x_2, \ldots, x_p \in X$ и $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q \in X^*$.

Введенные отображения W и λU очевидно также являются тензорами, что можно легко показать исходя из линейности отображений U и V по каждому из аргументов. Данная процедура уже не раз показывалась на различных частных случаях тензоров и может быть обобщена по тому же принципу.

Теорема 4.1. *Множество Ω^p_q полилинейных форм валентности (p, q) образует линейное пространство.*

▶

Доказательство сводится к проверке аксиом линейного пространства. ◀

Помимо линейных операций с полилинейными формами может быть также введена мультипликативная операция.

Произведением полилинейных форм $U \in \Omega_{q_1}^{p_1}$ и $V \in \Omega_{q_2}^{p_2}$ называют отображение $W = U \cdot V$ вида

$$W(x_1, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \dots x_{p_1+p_2}; \varphi^1, \dots, \varphi^{q_1}, \varphi^{q_1+1}, \dots \varphi^{q_1+q_2}) =$$
$$U(x_1, \dots, x_{p_1}; \varphi^1, \dots, \varphi^{q_1}) \cdot V(x_{p_1+1}, \dots x_{p_1+p_2}; \varphi^{q_1+1}, \dots \varphi^{q_1+q_2})$$

Теорема 4.2. *Отображение W, введенное как произведение полилинейных форм, является полилинейной формой.*

$$W \in \Omega_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}$$

►
Для доказательства необходимо рассмотреть линейность полилинейных форм U и V по каждому из аргументов. ◄

Свойства произведения полилинейных форм

1. Некоммутативность
$$U \cdot V \neq V \cdot U$$
Данное свойство очевидно вытекает из определения произведения в силу того, что порядок произведения U и V определяет порядок аргументов в W. Однако продемонстрируем это свойство на более простом примере. Рассмотрим следующие полилинейные формы, определенные как произведения обычных линейных форм $f^1, f^2 \in X^*$
$$W_1 = f^1 \cdot f^2 \qquad \Rightarrow \qquad W_1(x_1, x_2) = f^1(x_1) \cdot f^2(x_2)$$
$$W_2 = f^2 \cdot f^1 \qquad \Rightarrow \qquad W_2(x_1, x_2) = f^2(x_1) \cdot f^1(x_2)$$

2. Ассоциативность
$$U \cdot (V \cdot W) = (U \cdot V) \cdot W$$

3. Нуль-форма
$$U \cdot \Theta_{(p_2,q_2)} = \Theta_{(p_1,q_1)} \cdot V = \Theta_{(p_1+p_2,q_1+q_2)}$$

4. Законы согласования операций (дистрибутивность)
$$U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$$
$$(U + V) \cdot W = U \cdot W + V \cdot W$$
$$(\alpha U) \cdot V = \alpha(U \cdot V) = U \cdot (\alpha V)$$

4.3 Тензор ПЛФ

Зафиксируем в $X(\mathbb{K})$ базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ и построим к нему сопряженный базис $\{f^j\}_{j=1}^n$ в пространстве X^*. Вспомним, что эти базисы связаны соотношением

$$f^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Тензором полилинейной формы W валентности (p, q) называется набор из n^{p+q} скаляров, определяемые как

$$\omega_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q} = W(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \ldots, f^{j_q}),$$

где индексы $i_1, i_2, \ldots, i_p$ и $j_1, j_2, \ldots, j_q$ принимают значения $1, .., n$, где $n = \dim X$ - размерность пространства X.

Важно отметить, что в различных математических традициях принято по-разному определять понятия "полилинейная форма" и "тензор". Полилинейная форма действительно определяется как функция нескольких векторных и функциональных аргументов, но в то же время иногда между тензором или полилинейной формой ставится знак равенства, а иногда, как в определении выше, тензором называют именно набор компонент полилинейной формы. Данное отличие не является принципиальным и часто становится ясным из контекста, но необходимо понимать, что некоторые авторы вводят между ними различия.

Замечание о немом суммировании

Прежде чем перейдем к дальнейшим рассуждениям, отметим следующий факт. Наличие большого количества индексов в случае анализа линейных объектов нередко приводит к большому количеству суммирований как в теоретических выкладках, так и в практических приложениях тензоров. По этой причине вводится так называемое **правило Эйнштейна**, или правило о немом суммировании. В контексте данной темы договоримся о следующем:

1. Если в одночлене присутствует одинаковый верхний и нижний индекс, то подразумевается суммирование по нему:
$$a^i b_i = \sum_i a^i b_i$$

2. Индекс, по которому происходит суммирование, называют немым в силу того, что его обозначение не принципиально, т.е.
$$a^i b_i = a^j b_j = a^k b_k$$

3. Необходимо соблюдение баланса индексов. Если индекс не является немым, то в левой и правой частях равенства должны присутствовать одни и те же индексы, а также должен быть неизменным их порядок, т.е.
$$a_{ik} b^{kl} = c_i^l$$

Данное соглашение является общепринятым в силу того, что позволяет достаточно компактно записывать многие алгебраические выражения. Например, система линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ может быть записана как

$$a_{ij} x^j = b_i,$$

где (a_{ij}) - компоненты матрицы системы, x^j - компоненты вектора неизвестных, а b_i - компоненты вектора правой части.

Перейдем теперь к дальнейшему анализу тензоров.

Теорема 4.3. *Задание ПЛФ эквивалентно заданию ее тензора – компонент в паре базисов пространств X и X^*.*

►

Рассмотрим набор векторов $x_1, \ldots, x_p$ и форм $\varphi^1, \ldots, \varphi^q$, заданных своими разложениями по базисам

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} \xi_k^i e_i = \xi_k^i e_i \qquad \varphi^l = \sum_{j=1}^{n} \eta_j^l f^j = \eta_j^l f^j$$

Применим к ним тензор $W(x_1, \ldots, x_p; \varphi^1, \ldots, \varphi^q)$ и воспользуемся его линейными свойствами

$$\begin{gathered} W(x_1, \ldots, x_p; \varphi^1, \ldots, \varphi^q) = W(\xi_1^{i_1} e_{i_1}, \ldots, \xi_p^{i_p} e_{i_p}; \eta_{j_1}^1 f^{j_1}, \ldots, \eta_{j_q}^q f^{j_q}) = \\ = \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \ldots \xi_p^{i_p} \eta_{j_1}^1 \eta_{j_2}^2 \ldots \eta_{j_q}^q W(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \ldots, f^{j_q}) = \\ = \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \ldots \xi_p^{i_p} \eta_{j_1}^1 \eta_{j_2}^2 \ldots \eta_{j_q}^q \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q} \end{gathered}$$

◄

Таким образом мы получаем, что компоненты тензора однозначно задают его в фиксированной паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{f^j\}_{j=1}^n$. Данное свойство аналогично рассмотренным ранее:

1. Разложению вектора по базису пространства X;

2. Разложению линейной формы на коэффициенты в базисе сопряженного пространства X^*;

3. Матрице линейного оператора, где коэффициент с индексом (ij) соответствует i-й координате образа j-го базисного вектора;

4. Матрице билинейной формы, где коэффициент с индексом (ij) соответствует значению билинейной формы на базисных векторах e_i и e_j.

Продолжим рассмотрение полилинейных форм и линейных пространств Ω_q^p, которые они образуют.

4.4 Тензорный базис

Помимо определения компонент тензора в выбранной паре базисов можно также задать набор тензоров $\left\{{}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}_{t_1,t_2,\ldots,t_q}W\right\}$, которые действуют на набор аргументов следующим образом

$${}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}_{t_1,t_2,\ldots,t_q}W(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} \ldots \xi_p^{s_p} \eta_{t_1}^1 \eta_{t_2}^2 \ldots \eta_{t_q}^q$$

Иными словами, тензор ${}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}_{t_1,t_2,\ldots,t_q}W$ определим как отображение возвращающее произведение t_1-ой координаты первого вектора, на t_2-ю координату второго вектора и т.д.

Nota bene Введенные таким образом тензоры, вычисленные на базисных векторах, позволяют сформулировать соотношение аналогичное сопряженности базисов пространств X и X^*:

$$\begin{aligned}&{}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}_{t_1,t_2,\ldots,t_q}W(e_{i_1},e_{i_2},\ldots,e_{i_p};f^{j_1},f^{j_2},\ldots,f^{j_q})=\\&={}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}_{t_1,t_2,\ldots,t_q}\omega^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}=\delta^{s_1}_{i_1}\delta^{s_2}_{i_2}\ldots\delta^{s_p}_{i_p}\delta^{j_1}_{t_1}\delta^{j_2}_{t_2}\ldots\delta^{j_q}_{t_q}\end{aligned}$$

Теорема 4.4. *Набор тензоров* $\left\{{}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}_{t_1,t_2,\ldots,t_q}W\right\}$ *является базисом пространства* Ω^p_q.
►
Рассмотрим линейную комбинацию данных тензоров, порождающую нулевой тензор той же валентности:

$${}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}_{t_1,t_2,\ldots,t_q}W\alpha^{t_1t_2\ldots t_q}_{s_1s_1\ldots s_p}=\Theta$$

где $\alpha^{t_1t_2\ldots t_q}_{s_1s_1\ldots s_p}$ - коэффициенты линейной комбинации.

Вычислим полученную линейную комбинацию на базисных наборах пространств X и $X*$

$${}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}_{t_1,t_2,\ldots,t_q}W(e_{i_1},e_{i_2},\ldots,e_{i_p};f^{j_1},f^{j_2},\ldots,f^{j_q})\alpha^{t_1t_2\ldots t_q}_{s_1s_1\ldots s_p}=0$$

В силу определения компонент тензора на базисных векторах данное равенство можно записать иным образом

$$\delta^{s_1}_{i_1}\delta^{s_2}_{i_2}\ldots\delta^{s_p}_{i_p}\delta^{j_1}_{t_1}\delta^{j_2}_{t_2}\ldots\delta^{j_q}_{t_q}\alpha^{t_1t_2\ldots t_q}_{s_1s_1\ldots s_p}=0$$

Полагая, что в левой части выполняется немое суммирование с символами Кронекера, можно получить, что

$$\alpha^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}=0$$

Иными словами, все коэффициенты $\alpha^{\vec{j}}_{\vec{i}}$ равны нулю, что доказывает линейную независимость выбранного набора тензоров. Полнота данного набора выражается в том, что произвольный тензор может быть разложен по этому базису, а коэффициенты разложения и есть компоненты тензора в выбранном базисе. ◄

Существует достаточно простой способ определить тензоры, являющиеся элементами базиса пространства тензоров. Рассмотрим для начала тензора типа $U\in\Omega^p_0$. Набор

$${}^{s_1s_2\ldots s_p}W=f^{s_1}\cdot f^{s_2}\cdot\ldots\cdot f^{s_p}$$

образует базис в Ω^p_0, если $\{f^k\}^n_{k=1}$ образуют базис в X^*:

$$\begin{aligned}&{}^{s_1s_2\ldots s_p}W(x_1,x_2,\ldots,x_p)=(f^{s_1}\cdot f^{s_2}\cdot\ldots\cdot f^{s_p})(x_1,x_2,\ldots,x_p)=\\&=f^{s_1}(x_1)\cdot f^{s_2}(x_2)\cdot\ldots\cdot f^{s_p}(x_p)=\xi^{s_1}_1\xi^{s_2}_2\ldots\xi^{s_p}_p\end{aligned}$$

что совпадает с определением тензорного базиса.

Рассмотрим теперь пространство тензоров типа Ω^p_q. Пусть $\{f^k\}^n_{k=1}$ - базис в пространстве X^* и $\{\hat{x}_j\}^n_{j=1}$ - базис пространства X^{**}. Тогда базис пространства Ω^p_q образуют полилинейные формы вида

$${}^{s_1s_2\ldots s_p}_{t_1t_2\ldots t_q}W=f^{s_1}\cdot f^{s_2}\cdot\ldots\cdot f^{s_p}\cdot\hat{x}_{t_1}\cdot\hat{x}_{t_2}\cdot\ldots\hat{x}_{t_q}$$

Введение базиса пространства X^{**} необходимо для получения компонент линейных форм, являющихся аргументами полилинейной формы. Однако в силу $X \simeq X^{**}$ можно утверждать, что существует изоморфизм, отображающий базис $\{\hat{x}_j\}_{j=1}^n$ в $\{e_j\}_{j=1}^n$, а следовательно тензорный базис можно составлять из следующих компонент:

$$ {}^{s_1 s_2 \ldots s_p}_{t_1 t_2 \ldots t_q} W \leftrightarrow f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot \ldots \cdot f^{s_p} \cdot e_{t_1} \cdot e_{t_2} \cdot \ldots e_{t_q} $$

4.5 Преобразование компонент тензора

Посмотрим теперь как изменяются компоненты тензора при изменениях базиса пространства X. Пусть задана матрица перехода T с компонентами (τ_i^j), для которой существует обратная матрица $S = T^{-1}$ с компонентами (σ_j^i). С помощью этих матриц, как было показано ранее, преобразуются как сами базисные векторы

$$ e'_i = e_j \tau_i^j \qquad f'^i = \sigma_j^i f^j $$

Покажем связь компонент тензора в новом базисе $\omega'^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ с компонентами тензора в старом базисе $\omega^{l_1 l_2 \ldots l_q}_{k_1 k_2 \ldots k_p}$

$$ \begin{gathered} \omega'^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} = W(e'_{i_1}, e'_{i_2}, \ldots, e'_{i_p}; f'^{j_1}, f'^{j_2}, \ldots, f'^{j_q}) = \\ = W(e_{k_1}\tau_{i_1}^{k_1}, e_{k_2}\tau_{i_2}^{k_2}, \ldots, e_{k_p}\tau_{i_p}^{k_p}; f^{l_1}\sigma_{l_1}^{j_1}, f^{l_2}\sigma_{l_2}^{j_2}, \ldots, f^{l_q}\sigma_{l_q}^{j_q}) = \\ = \tau_{i_1}^{k_1}\tau_{i_2}^{k_2} \ldots \tau_{i_p}^{k_p}\sigma_{l_1}^{j_1}\sigma_{l_2}^{j_2} \ldots \sigma_{l_q}^{j_q} W(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_p}; f^{l_1}, f^{l_2}, \ldots, f^{l_q}) = \\ = \tau_{i_1}^{k_1}\tau_{i_2}^{k_2} \ldots \tau_{i_p}^{k_p}\sigma_{l_1}^{j_1}\sigma_{l_2}^{j_2} \ldots \sigma_{l_q}^{j_q} \omega^{l_1 l_2 \ldots l_q}_{k_1 k_2 \ldots k_p} \end{gathered} $$

В данной цепочке преобразований подразумевается, что происходит суммирование по всем немым индексам.

Обратим внимание на тот факт, что нижние индексы, *ковариантные*, всегда преобразуются согласно матрице перехода с компонентами (τ_j^i). В это же время преобразование верхних индексов, *контравариантных*, всегда связано с компонентами (σ_j^i) обратной матрицы к матрице перехода. Положение индекса определяет природу его преобразования - с помощью самой матрицы перехода (ко-) или с помощью обратной (контра-) матрицы. В этом заключается ключевое отличие в природе индексов и объектов, которые эти индексы определяют.

Nota bene Нередко можно встретить источники, где приведенный закон преобразований компонент тензора принимается за его определение. Особенно часто данное определение используется в физике. Иными словами, за тензор принимается набор скаляров, которые изменяются определенным образом при преобразованиях координат.
Рассмотрим различные частные случаи этого закона преобразования:

1. $\Omega_1^0 = X^*$: линейные формы

$$ f \in \Omega_1^0 \qquad \varphi'_i = \varphi_j \tau_i^j $$

В матричном виде закон преобразования принимает вид

$$f' = fT$$

что соответствует преобразованиям координат линейной формы.

2. $\Omega^1_0 = X^{**} \simeq X$: векторы

$$x \in \Omega^1_0 \qquad \xi'^i = \sigma^i_j \xi^j$$

В матричном виде закон преобразования принимает вид

$$x' = Sx$$

что соответствует преобразованиям координат вектора.

3. $\Omega^1_1 = \mathrm{Hom}(X)$: линейные операторы

$$\mathcal{A} \in \Omega^1_1 \qquad \alpha'^i_j = \sigma^i_k \alpha^k_l \tau^l_j$$

В матричном виде закон преобразования принимает вид

$$A' = SAT$$

что соответствует преобразованиям матрицы оператора.

4. Ω^2_0: дважды контравариантные тензоры, которые, в частности, могут рассматриваться как билинейные формы от линейных форм в качестве аргументов, или, так называемые диады или бивекторы

$$\Psi \in \Omega^2_0 \qquad \psi'^{ij} = \sigma^i_k \psi^{kl} \sigma^j_l$$

В матричном виде закон преобразования принимает вид

$$\Psi' = S\Psi S^T$$

что соответствует преобразованиям соответствующих объектов.

Отдельно стоит отметить, что можно рассматривать тензоры ранга 0. С точки зрения полилинейных форм - это функция, которая не имеет аргументов. Следовательно, можно поставить ей в соответствие элемент из поля, над которым определяется пространство тензоров:

$$c \in \Omega^0_0 \simeq \mathbb{K}$$

Закон преобразования элементов этого пространства становится предельно тривиальным - в силу отсутствия аргументов такой "формы" , преобразование базиса никак не повлияет на сам элемент, а значит

$$c' = c$$

Nota bene Тензоры нулевого ранга являются инвариантными относительно преобразований базиса. Обычно в таком случае именно их именуют *скалярами*. Однако стоит понимать, что не любое число является таковым. Например, произвольная компонента тензора ранга $p + q \geqslant 1$ уже будет изменяться при преобразованиях базиса.

4.6 Свертка тензора

Определим еще одну операцию над полилинейными формами и тензорами соответственно. Рассматривая мотивацию введения этой операции, приведем два примера.

Во-первых, пусть $\mathcal{A} \to \alpha^i_j \in \Omega^1_1$ - тензор ранга $(1,1)$, т.е. линейный оператор. Что получится в результате обозначения индексов одной и той же буквой? Несложно догадаться, что, применяя соглашение Эйнштейна, в результате получим скаляр, тензор ранга $(0,0)$

$$\alpha^i_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i_i = \mathrm{tr}\mathcal{A} \in \Omega^0_0$$

Во-вторых, рассмотрим применение этого же линейного оператора $\mathcal{A} \to \alpha^i_j \in \Omega^1_1$ к вектору $x \to \xi^j \in \Omega^1_0$

$$y = \mathcal{A}x \qquad \leftrightarrow \qquad \eta^i = \alpha^i_j \xi^j$$

С точки зрения тензорной алгебры эту операцию можно рассматривать как совокупность двух. Сначала мы можем тензорно умножить оператор на вектор

$$\mathcal{A} \otimes x \qquad \leftrightarrow \qquad (\alpha^i_j) \otimes (\xi^k) = \eta^{ik}_j \in \Omega^2_1$$

После чего мы снова переобозначаем индексы j и k одной и той же буквой, чтобы привести к определению действия оператора, написанному выше

$$\eta^i = \eta^{ij}_j = \sum_{j=1}^{n} \eta^{ij}_j \in \Omega^1_0$$

И в том, и в другом случае мы фиксировали два индекса (причем один верхний и один нижний), обозначали их одинаково и получали новый тензорный объект, который получался немым суммированием по этому индексу согласно правилу Эйнштейна. Данный подход является достаточно распространенным и может быть описан как на языке полилинейных форм, так и на языке тензоров самих по себе.

Сверткой полилинейной формы $W \in \Omega^p_q$ называется отображение, результатом которого является функция $\tilde{W}$ от $p-1$ векторного аргумента и $q-1$ ковекторного аргумента, определяемое как

$$\tilde{W}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_p; \varphi^1, \ldots, \varphi^q) =$$
$$= W(x_1, \ldots, x_{k-1}, \mathbf{e_r}, x_{k+1}, \ldots, x_p; \varphi^1, \ldots, \varphi^{l-1}, \mathbf{f^r}, \varphi^{l+1}, \ldots, \varphi^q)$$

полагая, что в правой части производится суммирование по немому индексу r.

Полученная функция $\tilde{W}$ является полилинейной формой в силу того, что свойства линейности индуцируются из W. Рассмотрим компоненты полученной полилинейной формы и введем для них обозначения в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{f^j\}_{j=1}^n$

$$W \qquad \leftrightarrow \qquad \omega^{j_1 \ldots j_{l-1} j_l j_{l+1} \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k i_{k+1} \ldots i_p}$$
$$\tilde{W} \qquad \leftrightarrow \qquad \tilde{\omega}^{j_1 \ldots j_{l-1} j_{l+1} \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_p}$$

Компоненты полилинейной формы $\tilde{W}$ связаны с компонентами полилинейной формы W соотношением

$$\tilde{\omega}^{j_1\ldots j_{l-1}j_{l+1}\ldots j_q}_{i_1\ldots i_{k-1}i_{k+1}\ldots i_p} = \omega^{j_1\ldots j_{l-1}\mathbf{r}j_{l+1}\ldots j_q}_{i_1\ldots i_{k-1}\mathbf{r}i_{k+1}\ldots i_p},$$

которое получается из рассмотрения определения свертки при подстановке в них базисных векторов в качестве аргументов согласно определению тензора полилинейной формы.

Nota bene Свертка является линейным оператором $\mathrm{Hom}(\Omega^p_q, \Omega^{p-1}_{q-1})$ на пространствах тензоров. Необходимым условием для существования свертки является наличие хотя бы одного верхнего и хотя бы одного нижнего индекса.

Пример 4.2.

1. Свертка полилинейной формы валентности $(1, 1)$ соответствующей линейному оператору дает скаляр, называемый следом оператора

   $$\mathrm{tr}\mathcal{A} = \alpha^i_i = \alpha^1_1 + \alpha^2_2 + \ldots + \alpha^n_n$$

   В силу того, что скаляр является инвариантом, можно сделать вывод, что след линейного оператора не зависит от базиса.

2. Через свертку также можно рассматривать применение линейной формы f к вектору x

   $$f(x) = f_i x^i = f_1 x^1 + \ldots f_n x^n$$

Как можно предположить из приведенных примеров результат свертки не зависит от базиса. Справедливо ли это для произвольной свертки полилинейной формы, если количество индексов превышает 1?

Лемма 4.1. *Свертка полилинейной формы не зависит от выбора базисов.*
▶
Пусть даны две пары базисов

$$\{e_k\}^n_{k=1}, \{f^l\}^n_{l=1} \qquad f^l(e_k) = \delta^l_k$$
$$\{\tilde{e}_j\}^n_{j=1}, \{\tilde{f}^i\}^n_{i=1} \qquad \tilde{f}^i(\tilde{e}_j) = \delta^i_j,$$

которые связаны матрицей перехода τ^k_j и обратной к ней σ^i_l.

Обратимся к определению свертки в новом базисе

$$W(\ldots, \tilde{e}_s, \ldots; \ldots \tilde{f}^s, \ldots) = W(\ldots, \tau^k_s e_k, \ldots; \ldots \sigma^s_l f^l, \ldots) =$$
$$= \tau^k_s \sigma^s_l W(\ldots, e_k, \ldots; \ldots f^l, \ldots) = \delta^k_l W(\ldots, e_k, \ldots; \ldots f^l, \ldots) =$$
$$= W(\ldots, e_k, \ldots; \ldots f^k, \ldots),$$

что соответствует определению свертки в старом базисе. ◀

Если количество индексов как верхних, так и нижних превышает 1, то естественно данную операцию можно применять такое количество раз, сколько хватит индексов сверху и/или снизу. Однако в случае равенства количества ковариантных и контравариантных индексов всегда есть возможность получить скаляр.

> Полной сверткой полилинейной формы $U \in \Omega_p^p$ называется результат p-кратного сворачивания этой полилинейной формы.

Nota bene Количество различных полных сверток полилинейной формы валентности (p, p) равно $p!$.