Практическое занятие 5. Прямые и плоскости в пространстве
Теоретические сведения

Плоскость в пространстве

Обозначения:
$\boldsymbol{n} = (A, B, C)$: вектор нормали к плоскости
$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$: пара неколлинеарных векторов, базис направляющего подпространства
$\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$: радиус-векторы точек плоскости

Способы задания плоскости в пространстве:

(а) Параметрические уравнения плоскости в пространстве:
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} \iff \begin{cases} x = x_0 + \alpha a_x + \beta b_x \\ y = y_0 + \alpha a_y + \beta b_y \\ z = z_0 + \alpha a_z + \beta b_z \end{cases}$$

(б) Уравнение на основе компланарности векторов:
$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$

(в) Уравнение плоскости, заданной точкой и вектором нормали:
$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0 \iff A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

(г) Общее уравнение плоскости:
$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) = -D \iff Ax + By + Cy + D = 0$$

(д) Уравнение плоскости в отрезках:
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$
где $a = -D/A, b = -D/B$ и $c = -D/C$ – отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных прямых.

(е) Нормальное уравнение плоскости
$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$
где $\cos\alpha, \cos\beta$ и $\cos\gamma$ – направляющие косинусы, p – расстояние от начала координат до плоскости.

Прямая в пространстве

Обозначения:
$\boldsymbol{s} = (s_x, s_y, s_z)$: направляющий вектор прямой
$\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$: радиус-векторы точек прямой

Способы задания прямой в простр.

(а) Параметрические уравнения прямой в пространстве
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \cdot \mathbf{s} \iff \begin{cases} x = x_0 + ts_x \\ y = y_0 + ts_y, \\ z = z_0 + ts_z \end{cases}$$

(б) Канонические уравнения прямой в пространстве
$$\frac{x - x_0}{s_x} = \frac{y - y_0}{s_y} = \frac{z - z_0}{s_z}$$

(в) Уравнение прямой, проходящей через две точки
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

(г) Прямая как пересечение двух плоскостей
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Взаимное расположение плоскостей в пространстве

Пусть плоскости заданы общими уравнениями
$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1) = -D_1$$
$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = (\mathbf{r}_2, \mathbf{n}_2) = -D_2$$
или
$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$
$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

(а) Параллельность плоскостей
$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 = \lambda\mathbf{n}_2 \\ D_1 \neq \lambda D_2 \end{cases}$$
(б) Совпадение плоскостей
$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 = \lambda\mathbf{n}_2 \\ D_1 = \lambda D_2 \end{cases}$$
(в) Пересечение плоскостей
$$\mathbf{n}_1 \neq \lambda\mathbf{n}_2 \text{ или } [\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2] = \mathbf{s} \neq 0$$
(г) Ортогональность плоскостей
$$(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0$$

Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть прямые в пространстве заданы векторными параметрическими уравнениями
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t_1\mathbf{s}_1$$
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t_2\mathbf{s}_2$$
Возможно несколько случаев:
(а) Прямые параллельны
$$\mathbf{s}_1 \parallel \mathbf{s}_2 \nparallel (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$
(б) Прямые совпадают
$$\mathbf{s}_1 \parallel \mathbf{s}_2 \parallel (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$
(в) Прямые пересекаются (в таком случае они гарантированно лежат в одной плоскости)
$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = 0, \mathbf{s}_1 \neq \lambda\mathbf{s}_2$$
(г) Прямые скрещиваются и тогда невозможно провести через них плоскость
$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \neq 0$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть плоскость задана векторным нормальным уравнением, а прямая в пространстве – векторным параметрическим уравнением:
$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) = -D$$
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t \cdot \mathbf{s}$$
Возможно несколько случаев:
(а) Прямая и плоскость параллельны
$$(\mathbf{s}, \mathbf{n}) = 0$$
(б) Прямая принадлежит плоскости (частный случай параллельности)
$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{n}) = 0$$
(в) Прямая пересекает плоскость
$$(\mathbf{s}, \mathbf{n}) \neq 0$$
Причем точка пересечения может быть определена через параметр t
$$t = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{n})}{(\mathbf{s}, \mathbf{n})}$$
(г) Прямая ортогональна плоскости (частный случай пересечения)
$$\mathbf{s} \parallel \mathbf{n} \iff \mathbf{s} = \lambda\mathbf{n}$$

Расстояние от точки до плоскости

Даны плоскость α : $Ax+By+Cz+D=0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
$$\rho(M_0, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Расстояние между параллельными плоскостями

α_1 : $Ax+By+Cz+D_1=0$ и

α_2 : $Ax+By+Cz+D_2=0$, $D_1 \neq D_2$.
$$\rho(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Угол между плоскостями

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$
$$\cos(\alpha_1 \hat{\ } \alpha_2) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Задачи

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $P(2,0,-1)$ и $Q(1,-1,3)$ и перпендикулярной плоскости $3x+2y-z+5=0$. \\$7x-11y-z-15=0$\\
2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $P(2,1,-3)$ перпендикулярно двум плоскостям $2x-3y+z-5=0$ и $x+4y-2z+3=0$. \\$2x+5y+11z+24=0$\\
3. Найти уравнение плоскости, точки которой одинаково удалены от точек $P(1,-4,2)$ и $Q(7,1,-5)$. \\$6x+5y-7z-27=0$\\
4. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через точки $P(4,-2,1)$ и $Q(2,4,-3)$. \\$x+7y+10z=0$\\
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+5y+9z-13=0$ и $3x-y-5z+1=0$ и через точку $M(0,2,1)$. \\$x+y+z-3=0$\\
6. Привести к каноническому виду уравнения прямой $\begin{cases}2x+3y-16z-7=0,\\ 3x+y-17z=0.\end{cases}$ \\$\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}$\\
7. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $N(5,-1,-3)$ и параллельной прямой $\begin{cases}2x+3y+z-6=0,\\ 4x-5y-z+2=0.\end{cases}$ \\$\frac{x-5}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{-11}$\\
8. Найти точку N, симметричную точке $M(1,1,1)$ относительно плоскости $x+y-2z-6=0$. \\ $N(3,3,-3)$\\

------

9. Найти уравнение плоскости, зная, что точка $P(4,-3,12)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость. \\$4x-3y+12z-169=0$\\
10. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку пересечения плоскостей $2x+2y+z-7=0$, $2x-y+3z-3=0$, $4x+5y-2z-12=0$ и через точки $M(0,3,0)$ и $N(1,1,1)$. \\$x-z=0$\\
11. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(3,0,-1), B(1,2,-4), C(0,7,-2)$. Найти уравнения сторон AD и CD. \\$\frac{x-3}{-1}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{2}, \frac{x}{-2}=\frac{y-7}{2}=\frac{z+2}{-3}$\\
12. Найти параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M(2,-5,1)$ и $N(-1,1,2)$. \\$\begin{cases}x=2-3t\\ y=-5+6t\\ z=1+t\end{cases}$\\
13. Найти угол между прямыми $\begin{cases}4x-y-z+12=0,\\ y-z-2=0\end{cases}$ и $\begin{cases}3x-2y+16=0,\\ 3x-z=0.\end{cases}$ \\$\arccos\frac{20}{21}$\\
14. Найти расстояние от точки $A(1,2,1)$ до плоскости $2x-y+2z+9=0$. \\$\frac{11}{3}$\\

15. Доказать, что расстояние от точки M до прямой d, заданной точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{p}$, может быть найдено по формуле

$$\rho(M,d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{p}\right]\right|}{|\vec{p}|}.$$

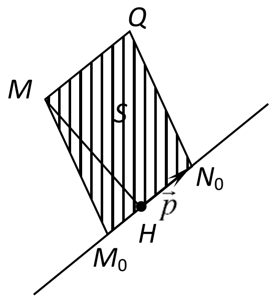

Рис.

Решение.

$M\notin d \quad\Rightarrow\quad \left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{p}\right]\right|=S$, где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{p}$. С другой стороны, $S=M_0N_0\cdot MH=|\vec{p}|\rho(M_0,d)$ (рис.).

Таким образом, $|\vec{p}|\rho(M_0,d)=\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{p}\right]\right|$, $\rho(M,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{p}\right]\right|}{|\vec{p}|}$.

16. Доказать, что расстояние между скрещивающимися прямыми $d_1=d_1(M_1,\vec{p}_1)$ и $d_2=d_2(M_2,\vec{p}_2)$, может быть найдено по формуле $\rho(d_1,d_2)=\dfrac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{p}_1,\vec{p}_2\right)\right|}{\left|\left[\vec{p}_1,\vec{p}_2\right]\right|}$.

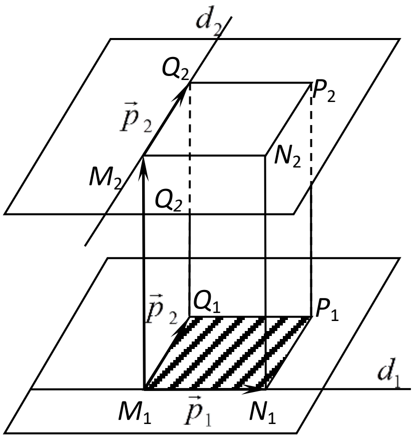

Рис.

Решение.

$d_1\subset\alpha_1,\ \alpha_1\parallel d_2,\ d_2\subset\alpha_2,\ \alpha_2\parallel d_1$. Тогда $\rho(d_1,d_2)=\rho(\alpha_1,\alpha_2)$.

$\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{p}_1,\vec{p}_2\right)\right|=V$, где V – объем параллелепипеда $M_1N_1P_1Q_1M_2N_2P_2Q_2$ (рис.). С другой стороны $V=\rho(d_1,d_2)\cdot S_{M_1N_1P_1Q_1}=\rho(d_1,d_2)\left|\left[\vec{p}_1,\vec{p}_2\right]\right|$. Таким образом,

$$\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{p}_1,\vec{p}_2\right)\right|=\rho(d_1,d_2)\left|\left[\vec{p}_1,\vec{p}_2\right]\right|,\quad \rho(d_1,d_2)=\frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{p}_1,\vec{p}_2\right)\right|}{\left|\left[\vec{p}_1,\vec{p}_2\right]\right|}.$$

17. Найти расстояние от точки A (7;9;7) до прямой p, заданной уравнением $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{2}$.

Указание. Первый способ решения состоит в том, что ищется проекция A' точки A на прямую p, а затем $|AA'|$. Второй способ – воспользоваться формулой, доказанной в задаче 15.

18. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми:

$$\begin{cases}x=-4t,\\ y=-1+3t,\\ z=-2-t\end{cases}\qquad \text{и}\qquad \begin{cases}x=4-2t,\\ y=1-t,\\ z=1-3t.\end{cases}$$

Указание. Первый способ решения состоит в том, чтобы через одну из данных прямых провести плоскость, параллельную другой прямой, и найти расстояние от произвольной точки второй прямой до построенной плоскости. Второй способ – воспользоваться формулой, доказанной в задаче 16.