Ортогональная проекция

Содержание

§1 Ортогональная сумма подпространств 1

§2 Ортогональный проектор 2

§3 Задача о перпендикуляре 2

§1. Ортогональная сумма подпространств

Теорема 1.1. *Пусть L - подпространство евклидова пространства X_E и*

$$M = L^{\perp} = \{x \in X_E : \quad x \perp L\},$$

тогда

$$E = L \dot{+} M \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X_E \quad \exists! z \in L,\ h \in L^{\perp} : \quad x = z + h.$$

Доказательство. Выполним по пунктам:

1. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^k$ - ортонормированный базис в L,
2. Дополним $\{e_j\}_{j=1}^k$ до базиса X_E : $\quad \{e_1, e_2, \ldots, e_k; x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\}$
3. Проведем процесс ортогонализации Грама-Шмидта

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_k; e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_n\},$$

4. $\forall x = \sum_{i=1}^k \xi^i e_i + \sum_{i=k+1}^n \xi^i e_i = z + h \quad \Rightarrow \quad X_E = L + M.$
5. Пусть $x = h_1 + z_1 = h_2 + z_2$, тогда $h_2 - h_1 = z_1 - z_2$ и

$$\|h_2 - h_1\|^2 = \langle z_1 - z_2, h_2 - h_1 \rangle = 0, \quad \Rightarrow \quad h_2 - h_1 = 0.$$

$\square$

Замечание. В данном случае прямая сумма $X_E = L \dot{+} M = L \oplus M$ называется также *ортогональной суммой* подпространств L и M.

Замечание 1.1. В более общем случае, сумма попрано ортогональных подпространств $L_i \perp L_{j \neq i}$ называется ортогональной суммой подпространств:

$$L = \bigoplus_{i=1}^{s} L_i.$$

§2. Ортогональный проектор

Определение 2.1. Ортогональным проектором на подпространство L называется линейный оператор, обладающий следующим свойством:

$$\mathcal{P}_L^{\perp}(x) = z, \quad x = z + h, \quad z \in L, \quad h \in M = L^{\perp}.$$

Замечание 2.1. Тогда вектор z называется *ортогональной проекцией* x на L.

Теорема 2.1. *Пусть* $\{e_j\}_{j=1}^n$ *- ортонормированный базис в* X_E*. Тогда вид ортогонального проектора в этом базисе:*

$$\mathcal{P}_L^{\perp} x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle \, e_i, \quad \forall x \in X_E.$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$x = z + h \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_L^{\perp} z = z, \quad \mathcal{P}_L^{\perp} h = 0.$$

Действительно, пусть e_j - элемент базиса, лежащий в L, тогда

$$\mathcal{P}_L^{\perp} e_j = \sum_{i=1}^{k} \langle e_j, e_i \rangle \, e_i = e_j.$$

Если e_l - элемент базиса, лежащий в M $(k < l \leq n)$, тогда

$$\mathcal{P}_L^{\perp} e_l = \sum_{i=1}^{k} \langle e_l, e_i \rangle \, e_i = 0.$$

□

§3. Задача о перпендикуляре

Определение 3.1. Задачей о перпендикуляре называется задача об отыскании компонент произвольного вектора x в подпространствах L и M.

Замечание 3.1. Алгоритм решения задачи о перпендикуляре:

1. Найти ортонормированный базис $\{e_j\}_{j=1}^k$ подпространства L;
2. Найдем ортогональную проекцию $\mathcal{P}_L^{\perp} x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle \, e_i$,
3. Найдем ортогональную проекцию $\mathcal{P}_M^{\perp} = x - \mathcal{P}_L^{\perp}$.

Лемма 3.1. *Имеет место следующее сравнение:*

$$\left\| \mathcal{P}_L^{\perp} x \right\| \leqslant \|x\|$$

Доказательство. Из теоремы Пифагора непосредственно следует, что

$$\left\|\mathcal{P}_L^\perp x\right\|^2 + \left\|\mathcal{P}_M^\perp x\right\|^2 = \|x\|^2 .$$

$\square$

Замечание. При $x \in L$ данное неравенство обращается в равенство.

Определение 3.2. Коэффициенты $\alpha_i = \langle x, e_i\rangle$ ортонормированном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ пространства X_E называются **коэффициентами Фурье** вектора x относительно этого базиса.

Лемма 3.2. *Справедливо следующее равенство:*

$$\left\|\mathcal{P}_L^\perp x\right\|^2 = \sum_{i=1}^k |\langle x, e_i\rangle|^2 = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2$$

Доказательство. Действительно, прямой проверкой можно убедиться, что

$$\left\|\mathcal{P}_L^\perp x\right\|^2 = \left\langle \mathcal{P}_L^\perp x, \mathcal{P}_L^\perp x\right\rangle = \sum_{i,j=1}^k \langle\langle x, e_i\rangle e_i, \langle x, e_j\rangle e_j\rangle =$$

$$= \sum_{i,j=1}^k \langle x, e_i\rangle \langle x, e_j\rangle \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^k |\langle x, e_i\rangle|^2 = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2$$

$\square$

Лемма 3.3. *(Следствие предыдущих лемм) Неравенство Бесселя:*

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in L.$$

Теорема 3.1. *Система ортонормированных векторов $\{e_i\}_{i=1}^k$ является полной в X_E тогда и только тогда, когда для любого $x \in X_E$ имеет место равенство Парсеваля:*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2, \quad \alpha_i = \langle e_i, x\rangle \quad \forall x \in X_E.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Очевидно.
$\Leftarrow$ Пусть для любого x выполняется равенство Парсеваля. Предположим, что

$$x = z + h, \quad z = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i\rangle e_i, \quad h \perp z,$$

тогда по теореме Пифагора

$$\|x\|^2 = \|z\|^2 + \|h\|^2 \,, \quad \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 + \|h\|^2 \,,$$

откуда следует, что $h = 0$ и система $\{e_i\}_{i=1}^{k}$ - полная в X_E.

$\square$