Отображения в линейных пространствах

Данный раздел посвящен рассмотрению отображений в линейных пространствах. Ранее в курсе мы уже познакомились с примером таких отображений – линейные операторы (эндоморфизмы). В заключительном разделе мы увидим, что существует еще несколько типов отображений, обладающих свойствами линейности или схожими с ними. Конечной целью является выявление общего подхода к рассмотрению любых отображений такого рода.

Содержание

Литература:

- Винберг Э. Б. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2013.
- Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. М.: Физико-математическая литература, 2000.
- Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. М.: «Наука», 1984.
- Гайфуллин А. А., Пенской А. В., Смирнов С. В. Задачи по линейной алгебре и геометрии. М.: МЦНМО, 2014. (Содержит подробные решения)
- Ершов А.В. Лекции по линейной алгебре. Москва, 2022

Лекция II. Билинейные и квадратичные формы

§1. Введение

Пусть V – линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Определение 1.1. Билинейной формой на пространстве V называется такая функция $b : V \times V \to \mathbb{K}$, что $\forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ выполняется:

(а) Линейность по первому аргументу:

$$b(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 b(x_1, y) + \lambda_2 b(x_2, y)$$

(б) Линейность по второму аргументу:

$$b(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 b(x, y_1) + \lambda_2 b(x, y_2)$$

Замечание 1.1. Билинейная форма при фиксировании одного из аргументов есть ничто иное как линейная форма согласно определению, которое было введено ранее.

Пример 1.1. Пусть $f, g \in V^*$ – линейные формы в пространстве $V(\mathbb{K})$. Билинейная форма может быть задана как

$$b : V \times V \to \mathbb{K}, \qquad b(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$

Пример 1.2. Любое вещественнозначное скалярное произведение в пространстве $V(\mathbb{R})$ линейно по каждому из аргументов, а следовательно является билинейной формой.

Пример 1.3. Пусть $V = \mathbb{K}^n$ – арифметическое пространство. Билинейную форму можно задать как

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \xi^i \eta^j,$$

где $x = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n) \in V$ и $y = (\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n) \in V$.

Замечание 1.2. Последний пример примечателен тем, что любую билинейную форму можно представить в таком виде.

Рассмотрим $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ – множество всех билинейных форм с аргументами из V. Для этого множества справедливо следующее.

(а) Билинейные формы $b, b' \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ равны тогда и только тогда, когда принимают равные значения на одинаковых парах аргументов:

$$b = b' \qquad \Leftrightarrow \qquad b(x, y) = b'(x, y) \quad \forall x, y \in V$$

(б) Существует нулевая билинейная форма $\theta \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$, принимающая $0 \in \mathbb{K}$ на любой паре аргументов.

$$\theta \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V): \qquad \theta(x,y) = 0, \quad \forall x, y \in V$$

(в) Может быть определена сумма билинейных форм $b, b' \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ как отображение вида

$$c = b + b' \qquad \Leftrightarrow \qquad c(x,y) = b(x,y) + b'(x,y), \quad \forall x, y \in V$$

(г) Может быть определено умножение билинейной формы $b \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ на скаляр $\lambda \in \mathbb{K}$ как отображение вида

$$d = \lambda b \qquad \Leftrightarrow \qquad d(x,y) = \lambda b(x,y), \quad \forall x, y \in V$$

Лемма 1.1. *Отображения c и d являются билинейными формами.*

Доказательство. Аналогично соответствующим утверждениям для линейных форм.

Лемма 1.2. *Множество $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ наделено структурой линейного пространства.*

Доказательство. Можно убедиться путем прямой проверки аксиом линейного пространства.

Определение 1.2. Билинейная форма $b \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ называется **симметричной**, если выполняется $b(x,y) = b(y,x)$.

Определение 1.3. Билинейная форма $b \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ называется **антисимметричной**, если выполняется $b(x,y) = -b(y,x)$.

Замечание 1.3. Множество симметричных (антисимметричных) билинейных форм образует линейное подпространство $\mathrm{Bil}^{S}_{\mathbb{K}}(V)$ $(\mathrm{Bil}^{AS}_{\mathbb{K}}(V))$ в $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$.

Из каждой билинейной формы может быть изготовлена симметричная форма:

$$b^S(x,y) = \frac{1}{2}(b(x,y) + b(y,x)), \qquad b^S \in \mathrm{Bil}^{S}_{\mathbb{K}}(V)$$

Аналогично может быть изготовлена антисимметричная форма:

$$b^{AS}(x,y) = \frac{1}{2}(b(x,y) - b(y,x)), \qquad b^{AS} \in \mathrm{Bil}^{AS}_{\mathbb{K}}(V)$$

Лемма 1.3. *Сумма симметричной и антисимметричной формы, построенных согласно процедуре выше, дает исходную билинейную форму.*

Доказательство. Убеждаемся непосредственной проверкой:

$$b^S(x,y)+b^{AS}(x,y)=\frac{1}{2}(b(x,y)+b(y,x))+\frac{1}{2}(b(x,y)-b(y,x))=b(x,y)$$

Лемма 1.4. *Пространство билинейных форм представляется в виде прямой суммы подпространств симметричных и антисимметричных билинейных форм.*

$$\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)=\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}^S(V)\oplus\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}^{AS}(V)$$

Доказательство. Процедура изготовления симметричных (антисимметричных) форм, описанная выше, позволяет заключить, что

$$\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)=\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}^S(V)+\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}^{AS}(V)$$

Покажем, что сумма будет прямой. Пусть билинейная форма $h(x,y)$ такова, что $h\in\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}^S(V)\bigcap\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}^{AS}(V)$. Тогда имеем

$$\begin{cases}h(x,y)=h(y,x)\\h(x,y)=-h(y,x)\end{cases}\quad\Rightarrow\quad h(y,x)=-h(y,x)\quad\Rightarrow\quad h(x,y)=0\quad\forall x,y\in V$$

В пересечении подпространств лежит только нулевая билинейная форма. Следовательно сумма является прямой.

§2. Матрица билинейной формы

Предположим, что V – конечномерное линейное пространство. Зафиксируем в V базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, где $n=\dim V$.

Определение 2.1. Коэффициентами β_{ij} билинейной формы $b(x,y)$ называются значения этой линейной формы на базисных векторах пространства.

$$b(e_i,e_j)=\beta_{ij}$$

Теорема 2.1. *Задание билинейной формы эквивалентно заданию ее значений на базисных векторах, т.е. заданию ее коэффициентов.*

Доказательство. Пусть в выбранном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейного пространства V билинейная форма $b(x,y)$ задана набором коэффициентов $\{\beta_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Тогда $\forall x=\sum_{i=1}^n\xi^ie_i, y=\sum_{j=1}^n\eta^je_j$:

$$b(x,y)=b\left(\sum_{i=1}^n\xi^ie_i,\sum_{j=1}^n\eta^je_j\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\xi^i\eta^jb(e_i,e_j)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\xi^i\eta^j\beta_{ij}$$

По аналогии с линейными формами, коэффициенты которых можно представить в виде вектора-строки, существует аналогичное представление для билинейной формы.

Определение 2.2. Матрицей билинейной формы $b(x, y)$ называется матрица B, составленная из ее коэффициентов.

Лемма 2.1. *Пространство билинейных форм* $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ *изоморфно пространству квадратных матриц* $M_n(\mathbb{K})$.

Доказательство. Изоморфизм устанавливается следующим образом:

$$b \leftrightarrow B \qquad b' \leftrightarrow B'$$
$$b + b' \leftrightarrow B + B'$$
$$\lambda b \leftrightarrow \lambda B$$

Соответствие между линейными операциями с билинейными формами и матрицами проверяется непосредственной проверкой определений.

Замечание 2.1. Матрица симметричной (антисимметричной) билинейной формы является симметричной (антисимметричной).

$$b^S \leftrightarrow B_S \qquad B_S = B_S^T$$
$$b^{AS} \leftrightarrow B_{AS} \qquad B_{AS} = -B_{AS}^T$$

В силу того, что матрица билинейной формы определяется как объект, зависящий от выбора базиса, то и смена базиса должна приводить к изменению матрицы билинейной формы. Действительно аналогичную ситуацию мы уже встречали на примере матрицы линейного оператора. Однако закон преобразования будет, хоть и похожим, но отличаться от преобразования матрицы линейного оператора.

Теорема 2.2. *Матрицы* B *и* B' *билинейной формы* $b(x, y)$*, заданные в базисах* $\{e_i\}_{i=1}^n$ *и* $\{e'_j\}_{j=1}^n$ *связаны соотношением*

$$B' = C^T B C,$$

где $C = (c_j^i)$ *- матрица перехода от базиса* $\{e_i\}_{i=1}^n$ *к базису* $\{e'_j\}_{j=1}^n$.

Доказательство. Полагая, что известна матрица перехода $C = (c_j^i)$, компоненты нового базиса можно выразить через векторы старого базиса как

$$e'_j = \sum_{i=1}^n c_j^i e_i$$

Воспользуемся этим, чтобы получить компоненты матрицы билинейной формы в новом базисе

$$\beta'_{ij} = b(e'_i, e'_j) = b\left(\sum_{k=1}^n c_i^k e_k, \sum_{l=1}^n c_j^l e_l\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_i^k c_j^l\, b(e_k, e_l) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_i^k c_j^l \beta_{kl},$$

где $\beta_{kl} = b(e_k, e_l)$ для всех $k, l = 1, ..n$ - коэффициенты матрицы билинейной формы в старом базисе. Данное двойное суммирование означает ничто иное как матричное умножение, которое можно записать в виде

$$B' = C^T B C$$

Данное утверждение легко проверяется прямым раскрытием матричного умножения в индексном виде.