# Ортогональность

## Содержание



## §1. Ортогональные векторы

**Определение 1.1.** Пусть $x, y \in E$. Говорят, что $x$ **ортогонален** $y$ (пишут $x \perp y$), если $\langle x, y \rangle = 0$.

**Лемма 1.1.** *Пусть $x \perp y_1, y_2, \ldots, y_k$, тогда $x \perp \mathcal{L}\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$.*

**Доказательство**.

$$\left\langle x, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle x, y_i \rangle .$$

$\square$

**Теорема 1.1.** *(Об ортогональности и линейной независимости) Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x$ - набор ненулевых попарно ортогональных векторов, тогда $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ - линейно независимый набор.*

**Доказательство**. Рассмотрим нулевую линейную комбинацию

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0, \quad \|x_j\| \neq 0,$$

$$\left\langle x_j, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle x_j, x_i \rangle = \alpha_j \langle x_j, x_j \rangle = \alpha_j \|x_j\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_j = 0.$$

$\square$

**Теорема 1.2.** *(Пифагора) Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ - набор ненулевых попарно ортогональных векторов, тогда*

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2 .$$

**Доказательство**.

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} x_i\right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{k} x_i, \sum_{j=1}^{k} x_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{k} \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2 .$$

□

**Определение 1.2.** Говорят, что $x$ **ортогонален подпространству** $L \leqslant X_E$, если

$$\forall y \in L \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

**Замечание.** Для обозначения данного факта обычно пишут $x \perp L$.

**Определение 1.3.** **Ортогональным дополнением** пространства $L$ называется множество

$$M = \{x \in X : \quad x \perp L\} .$$

**Лемма 1.2.** *Ортогональное дополнение является подпространством $X_E$.*

**Доказательство**. В этом легко убедиться прямой проверкой.

□

## §2. Процесс ортогонализации

**Теорема 2.1.** *Пусть $\{x_j\}_{j=1}^k$ - линейно-независимый набор в евклидовом пространстве $X_E$, тогда $\{x_j\}_{j=1}^k$ можно преобразовать в ортогональный набор $\{e_j\}_{j=1}^k$.*

**Доказательство**. Используем процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

1. $e_1 = x_1$,
2. $e_2 = x_2 + \alpha_2^1 e_1, \quad e_2 \perp e_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2^1 = -\frac{\langle e_1, x_2 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle}$,
3. $e_3 = x_3 + \alpha_3^2 e_2 + \alpha_3^1 e_1, \quad e_3 \perp e_1, e_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3^1 = -\frac{\langle e_1, x_3 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle}, \alpha_3^2 = -\frac{\langle e_2, x_3 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle}$,

... $\ldots$

m. $e_m = x_3 + \alpha_m^{m-1} e_{m-1} + \ldots + \alpha_m^2 e_2 + \alpha_m^1 e_1, \quad \Rightarrow \quad \alpha_m^j = -\frac{\langle e_j, x_m \rangle}{\langle e_j, e_j \rangle}$.

□

**Замечание.** Для $\{x_j\}_{j=1}^k$ процесс ортогонализации не оборвется, то есть все $e_j \neq 0$.

**Доказательство**. От противного. Пусть

$$e_m = x_m + \alpha_m^{m-1} e_{m-1} + \ldots + \alpha_m^2 e_2 + \alpha_m^1 e_1 = 0,$$

тогда

$$e_m = x_m + \alpha_m^{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{m-1}^i x_i + \ldots + \alpha_m^2 \sum_{i=1}^{2} \alpha_2^i x_i + \alpha_m^1 x_1 = 1 \cdot x_m + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i x_i = 0,$$

но это означает, что $\{x_j\}_{j=1}^k$ - линейно зависимый набор. Противоречие.

$\square$

**Замечание.** Пусть $\{x_j\}_{j=1}^k$ - линейно независимый набор, а $\{x_j\}_{j=1}^{k+1}$ - линейно-зависимый, тогда $e_{k+1} = 0$.

**Замечание.** Имеет место следующее неравенство: $\|e_m\| \leqslant \|x_m\|$

**Доказательство**. Рассмотрим скалярное произведение:

$$\langle e_m, e_m \rangle = \langle e_m, x_m \rangle + 0 + \ldots + 0, \quad \Rightarrow \quad \|e_m\|^2 = \langle x_m, e_m \rangle \leqslant \|x_m\| \cdot \|e_m\|.$$

$\square$

## §3. Ортогональный базис

**Определение 3.1.** Базис $\{e_j\}_{j=1}^n$ евклидова пространства $X_E$ называется

- **ортогональным**, если $\langle e_i, e_{j\neq i} \rangle = 0$.
- **ортонормированным**, если $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

**Теорема 3.1.** *Любой базис евклидова пространства $X_E$ может быть преобразован к ортонормированному базису.*

**Доказательство**. Ортогонализация Грама-Шмидта и нормировка. $\square$

**Лемма 3.1.** *Базис $\{e_j\}_{j=1}^n$ в $X_E$ ортонормирован тогда и только тогда, когда*

$$\forall x, y \in X_E : \quad x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n \eta^j e_j, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \xi^i \eta^i.$$

**Доказательство**. Действительно, прямой проверкой можем убедиться, что

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\xi^i} \eta^j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\xi^i} \eta^j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \xi^i \eta^i.$$

$\square$

**Замечание.** Матрица Грама скалярного произведения в ортогональном базисе имеет диагональный вид, а в ортонормированном базисе имеет вид единичной матрицы:

$$G_{\text{ОБ}} = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}, \quad \lambda_j \neq 0, \quad G_{\text{ОНБ}} = \|\delta_j^i\|.$$