Отображения в линейных пространствах

Данный раздел посвящен рассмотрению отображений в линейных пространствах. Ранее в курсе мы уже познакомились с примером таких отображений – линейные операторы (эндоморфизмы). В заключительном разделе мы увидим, что существует еще несколько типов отображений, обладающих свойствами линейности или схожими с ними. Конечной целью является выявление общего подхода к рассмотрению любых отображений такого рода.

Содержание

Литература:

- Винберг Э. Б. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2013.
- Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. М.: Физико-математическая литература, 2000.
- Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. М.: «Наука», 1984.
- Гайфуллин А. А., Пенской А. В., Смирнов С. В. Задачи по линейной алгебре и геометрии. М.: МЦНМО, 2014. (Содержит подробные решения)
- Ершов А.В. Лекции по линейной алгебре. Москва, 2022

Лекция I. Линейные формы

§1. Введение

Пусть V – линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Определение 1.1. **Линейной формой** на пространстве V называется такая функция $f : V \to \mathbb{K}$, что $\forall v, v_1, v_2 \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ выполняется:

(а) Аддитивность: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$.

(б) Однородность: $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Замечание 1.1. Аналогичные свойства были введены для линейных операторов, что позволяет их рассматривать как схожие объекты. Действительно, поле $\mathbb{K}$ также является линейным пространством. Рассматривая линейные отображения вида $f : V \to U$, мы имеем частные случаи:

- При $U := V$, f – линейный оператор (эндоморфизм).
- При $U := \mathbb{K}$, f – линейная форма.

Замечание 1.2. Для любого линейного отображения $f : V \to U$ справедливо, что образом линейной комбинации произвольных векторов $v_i \in V$ будет линейная комбинация образов этих векторов:

$$f\left(\sum_i \alpha_i v_i\right) = \sum_i \alpha_i f(v_i)$$

Пример 1.1. Пусть V – евклидово пространство с введенным скалярным произведением $\langle x, y \rangle$. Линейную форму $f(v)$ можно задать как

$$f(v) = \langle a, v \rangle,$$

где $a \in V$ – фиксированный вектор.

Пример 1.2. Пусть $V = M_n(\mathbb{K})$ – пространство квадратных матриц n-го порядка с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$. Линейную форму можно задать как

$$f(A) = \operatorname{tr} A, \qquad A \in M_n(\mathbb{K})$$

Пример 1.3. Пусть $V = \mathbb{R}^{\leqslant n}[x]$ – пространство полиномов степени не выше n. Линейную форму можно задать как

$$f(p) = p(x)\Big|_{x=x_0}$$

Пример 1.4. Пусть $V = \mathbb{K}^n$ – арифметическое пространство элементов $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Линейную форму можно задать как

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Замечание 1.3. Последний пример примечателен тем, что любую линейную форму можно представить в таком виде.

Предположим, что V – конечномерное линейное пространство. Зафиксируем в V базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, где $n = \dim V$.

Определение 1.2. **Коэффициентами** φ_i линейной формы f называются значения этой линейной формы на базисных векторах пространства.

$$f(e_i) = \varphi_i$$

Теорема 1.1. *Задание линейной формы эквивалентно заданию ее значений на базисных формах, т.е. заданию ее коэффициентов.*

Доказательство. Пусть в выбранном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейного пространства V линейная форма f задана набором коэффициентов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$. Тогда $\forall v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \in V$:

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n f(v^i e_i) = \sum_{i=1}^n v^i f(e_i) = \sum_{i=1}^n v^i \varphi_i$$

Таким образом получаем, что образ любого вектора однозначно определен координатами этого векторами и коэффициентами линейной формы, где оба набора чисел найдены *в одном и том же базисе.*

§2. Сопряженное пространство

Рассмотрим множество линейных форм, заданных в линейном пространстве V.

Определение 2.1. Линейные формы f и g будем называть **равными**, если

$$f = g \qquad \Leftrightarrow \qquad f(v) = g(v), \quad \forall v \in V$$

Определение 2.2. Линейная форма θ называется **нулевой (нуль-формой)**, если

$$\theta(v) = 0, \qquad \forall v \in V$$

Очевидно, что мы можем определить действия на множестве форм.

Определение 2.3. **Суммой** линейных форм f и g называется отображение $h = f + g$, для которого справедливо

$$h(v) = f(v) + g(v), \qquad \forall v \in V$$

Лемма 2.1. *Отображение h является линейной формой.*

Доказательство. Покажем справедливость свойства аддитивности:

$$h(v_1+v_2)=f(v_1+v_2)+g(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)+g(v_1)+g(v_2)=$$
$$=(f(v_1)+g(v_1))+(f(v_2)+g(v_2))=h(v_1)+h(v_2)$$

Выполнение свойства однородности показывается аналогично.

Определение 2.4. Произведением линейной формы f на число $\alpha\in\mathbb{K}$ называется отображение $l=\alpha f$ такое, что

$$l(v)=\alpha\cdot f(v),\qquad \forall v\in V$$

Доказательство. Аналогично лемме о сумме линейных форм.

Из приведенных выше определений и лемм следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.1. *Множество линейных форм V^*, заданных на линейном пространстве V образует линейное (сопряженное) пространство.*

Рассмотрим некоторый базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в пространстве V. Введем набор линейных форм $\{f^j\}_{j=1}^n$ следующим образом:

$$f^j(v)=v_j,$$

которая возвращает j-ю координату вектора $v\in V$ в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Очевидно, что для линейных форм из этого набора справедливо

$$f^j(e_i)=\delta_i^j=\begin{cases}1, & \text{если}\quad i=j,\\ 0, & \text{если}\quad i\neq j\end{cases}$$

Лемма 2.2. *Набор линейных форм $\{f^j\}_{j=1}^n$ является базисом в сопряженном пространстве V^*.*

Доказательство. Чтобы показать справедливость утверждения, необходимо доказать полноту и линейную независимость этого набора. Покажем сначала полноту:

$$f(v)=\sum_{i=1}^n\varphi_i v^i=\sum_{i=1}^n\varphi_i f^i(v)=\left(\sum_{i=1}^n\varphi_i f^i\right)(v)$$

Аналогично с линейной независимостью. Предположим, что линейная комбинация форм с некоторыми коэффициентами α_i равна нуль-форме.

$$\sum_{i=1}^n\alpha_i f^i=\theta$$

Применяя эту нуль-форму к произвольному базисному вектору, получим

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f^i\right)(e_k) = \theta(e_k) = 0$$

Учитывая также свойства линейности и их определение

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f^i(e_k) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_k f^k(e_k) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_k = 0$$

Замечание 2.1. Каждому базису в пространстве V может быть найден и притом единственный сопряженный базис, связанный с ним соотношением, которое указано выше.

Посмотрим теперь как преобразуется сопряженный базис при преобразовании базиса пространства X.

Теорема 2.2. *Пусть $\{f^i\}_{i=1}^n$ и $\{\widetilde{f}^l\}_{l=1}^n$ – базисы V^*, сопряженные соответственно базисам $\{e^j\}_{j=1}^n$ и $\{\widetilde{e}^k\}_{k=1}^n$. Тогда*

$$\widetilde{f}^l = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^l f^i$$

где $(\sigma_i^l) = S$ – элементы обратной матрицы перехода, полагая $(\tau_k^j) = T$ – матрица перехода из $\{e^j\}_{j=1}^n$ в $\{\widetilde{e}^k\}_{k=1}^n$.

Доказательство. По определению сопряженных базисов имеем

$$\widetilde{f}^l(\widetilde{e}_k) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^l f^i \left(\sum_{i=1}^{n} \tau_k^j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_i^l \tau_k^j f^i(e_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_i^l \tau_k^j \delta_j^i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_i^l \tau_k^i = \delta_k^l$$

Откуда следует, что произведение матрицы, составленной из σ_i^l, на матрицу перехода с элементами τ_k^i должно быть равно единичной матрице. А это есть не что иное как определение обратной матрицы.

Теорема 2.3. *Преобразование координат формы в V^* при переходе от базиса $\{f^i\}_{i=1}^n$ к базису $\{\widetilde{f}\}_{l=1}^n$ имеет вид*

$$\widetilde{\eta}_l = \sum_{i=1}^{n} \tau_l^i \eta_i \qquad (\widetilde{\eta}^1, \widetilde{\eta}^2, \ldots, \widetilde{\eta}^n) = (\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n) \cdot T$$

Доказательство.

$$\widetilde{\eta}_l = f(\widetilde{e}_l) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i f^i \left(\sum_{j=1}^{n} \tau_l^j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \eta_i \tau_l^j f^i(e_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \eta_i \tau_l^j \delta_j^i = \sum_{i=1}^{n} \tau_l^i \eta_i$$

Замечание 2.2. Координаты линейной формы преобразуются точно по такому же закону, что и сам базис пространства V. По этой причине их также называют **ковекторами**.

§3. Изоморфизмы сопряженных пространств

В силу доказанного утверждения о базисе сопряженного пространства справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пространство V и сопряженное пространство V^* изоморфны.*

Доказательство. Справедливость утверждения следует из того, что $\dim V = \dim V^*$ (мощности базисов равны), а следовательно

$$V \simeq \mathbb{K}^n \simeq V^*$$

Изоморфизм устанавливается введенным соответствием между базисами пространств V и V^*.

Отметим, что операцию нахождения сопряженного пространства можно применять итеративно.

Определение 3.1. Вторым сопряженным пространством называют $V^{**} = (V^*)^*$.

Элементами второго сопряженного пространства являются функции, также обладающие линейностью, от линейных форм.

Теорема 3.1. *Между пространствами V и V^{**} можно установить изоморфизм без использования базиса (канонический изоморфизм).*

Доказательство. Рассмотрим элементы второго сопряженного пространства $\widehat{v}, \widehat{u} \in V^{**}$:

$$\widehat{v} : V^* \to \mathbb{K}, \qquad \widehat{v}(f) \in \mathbb{K}$$
$$\widehat{v}(f+g) = \widehat{v}(f) + \widehat{v}(g), \qquad \widehat{v}(\alpha f) = \alpha \widehat{v}(f)$$
$$(\widehat{v} + \widehat{u})(f) = \widehat{v}(f) + \widehat{u}(f), \qquad (\alpha \widehat{v})(f) = \alpha \widehat{v}(f)$$

Канонический изоморфизм устанавливается отношением

$$\widehat{x} \leftrightarrow x : \qquad \widehat{v}(f) = f(v)$$

Замечание 3.1. Данное утверждение имеет ряд важных следствий для тензорного анализа, который будет обсуждаться позднее.