МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Учебный год 2023/2024

Курс 1, семестр 1

Дисциплина Математический анализ

Расчётно-графическая работа № 1

«Множества»

Вариант 2

Выполнили:

Петров Вячеслав Маркович P3108

Таджеддинов Рамиль Эмильевич P3108

Елисеев Константин Иванович P3108

Санкт-Петербург 2023

Содержание

Задания

Задание 1.1

Перечислите элементы множества C = $\{x: x \in \mathbf{Z}$ и $6x^2+x-1=0\}$.

Решение: C = $\{x: x \in \mathbf{Z}$ и $6x^2+x-1=0\}$ = ∅

Решим квадратное уравнение $6x^2 + x - 1 = 0$

a = 6, b = 1, c = -1,

$D = b^2 – 4ac = 1^2 – 4\cdot6\cdot(-1) = 1 + 24 = 25$,

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{25}}{2\cdot6} = \frac{1}{3}$,

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\cdot6} = -\frac{1}{2}$.

Таким образом, A = $\{x: x \in \mathbf{Z}$ и $6x^2+x-1=0\}$ = ∅

Задание 1.2

Опишите множество при помощи характеристического свойства: M = {Множество чисел 1, 4, 9, 25, 36,…}.

Решение: M = $\{x: x=n^2, n \in \mathbf{N}$ и $n \neq 4k, k \in \mathbf{N}\}$

Задание 1.3

Эквивалентны ли следующие множества A = $\{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$ и B = $\{2, 3\}$

Решение: Рассмотрим множество A = $\{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$

Решим квадратное уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$

a = 1, b = -3, c = 2,

$D = b^2 – 4ac = (-3)^2 – 4\cdot1\cdot2 = 9 – 8 = 1$,

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\cdot1} = 1$,

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\cdot1} = 2$.

Таким образом, A = $\{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$ = {2, 1}.

Т.к. {2, 1} ≠ $\{2, 3\}$, то множества A = {2, 1} и B = $\{2, 3\}$ не являются эквивалентными.

Задание 1.4

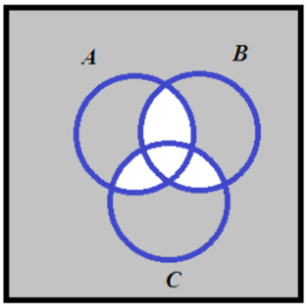
Даны множества U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, A = {1, 2, 3}, B = {1, 3, 5, 6}, C = {4, 5, 6}.

1) $A \setminus C$ = {1, 2, 3} \ {4, 5, 6} = {1, 2, 3}

2) $\overline{B}$ = U \ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6} \ {1, 3, 5, 6} = {2, 4}
$A \setminus \overline{B}$ = {1, 2, 3} \ {2, 4} = {1, 3}
3) $B \setminus C$ = {1, 3, 5, 6} \ {4, 5, 6} = {1, 3}
4) $\overline{A \cup B} = \overline{\{1,2,3\} \cup \{1,3,5,6\}} = \overline{\{1,2,3,5,6\}}$ = U \ {1, 2, 3, 5, 6} = {1, 2, 3, 4, 5, 6} \ {1, 2, 3, 5, 6} = {4}
5) $\overline{\mathrm{C}} = \overline{\{4,5,6\}}$ = U \ $\{4,5,6\}$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6} \ {4, 5, 6} = {1, 2, 3}
$\overline{\mathrm{C}} \cup A = \{1,2,3\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3\}$
6) $\overline{A} = \overline{\{1,2,3\}}$ = U \ $\{1,2,3\}$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6} \ {1, 2, 3} = {4, 5, 6}
$\overline{A} \cup B = \{4,5,6\} \cup \{1,3,5,6\} = \{1,3,4,5,6\}$
7) $\overline{A} = \overline{\{1,2,3\}}$ = U \ $\{1,2,3\}$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6} \ {1, 2, 3} = {4, 5, 6}
$B \cap \overline{A} = \{1,3,5,6\} \cap \{4,5,6\} = \{5,6\}$
8) $A \cup B \cup C = \{1,2,3\} \cup \{1,3,5,6\} \cup \{4,5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$
9) $(A \cup B) \cap C = (\{1,2,3\} \cup \{1,3,5,6\}) \cap \{4,5,6\} = \{1,2,3,5,6\} \cap \{4,5,6\} = \{5,6\}$
10) $(A \setminus B) \cup C = (\{1,2,3\} \setminus \{1,3,5,6\}) \cup \{4,5,6\} = \{2\} \cup \{4,5,6\} = \{2,4,5,6\}$
11) $\overline{A} = \overline{\{1,2,3\}}$ = U \ $\{1,2,3\}$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6} \ {1, 2, 3} = {4, 5, 6}
$(\overline{A} \setminus B) \cup C = (\{4,5,6\} \setminus \{1,3,5,6\}) \cup \{4,5,6\} = \{4\} \cup \{4,5,6\}$ = {4, 5, 6}
12) $\overline{A} = \overline{\{1,2,3\}}$ = U \ $\{1,2,3\}$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6} \ {1, 2, 3} = {4, 5, 6}
$\overline{\mathrm{C}} = \overline{\{4,5,6\}}$ = U \ $\{4,5,6\}$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6} \ {4, 5, 6} = {1, 2, 3}
$(\overline{A} \cup B) \cap \overline{C} = (\{4,5,6\} \cup \{1,3,5,6\}) \cap \{1,2,3\} = \{1,3,4,5,6\} \cap \{1,2,3\} = \{1,3\}$
13) $\overline{A} = \overline{\{1,2,3\}}$ = U \ $\{1,2,3\}$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6} \ {1, 2, 3} = {4, 5, 6}
$(A \cup B) \setminus (\overline{A} \cap C) = (\{1,2,3\} \cup \{1,3,5,6\}) \setminus (\{4,5,6\} \cap \{4,5,6\})$
$= \{1,2,3,5,6\} \setminus \{4,5,6\} = \{1,2,3\}$
14) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = (\{1,2,3\}\{1,3,5,6\}) \cup (\{1,2,3\}\{4,5,6\}) = \{2\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3\}$
15) $(C \cup A) \setminus (C \cap A) = (\{4,5,6\} \cup \{1,2,3\}) \setminus (\{4,5,6\} \cap \{1,2,3\}) = \{1,2,3,4,5,6\} \setminus \emptyset$
16) $(A \cup B) \cap (A \cap C) = (\{1,2,3\} \cup \{1,3,5,6\}) \cap (\{1,2,3\} \cap \{4,5,6\}) = \{1,2,4,5,6\} \cap \emptyset = \emptyset$
17) $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{\{1,2,3\} \cup \{1,3,5,6\} \cup \{4,5,6\}} = \overline{\{1,2,3,4,5,6\}} = \emptyset$
18) $\overline{C} \cup (B \setminus A) = \overline{\{4,5,6\}} \cup (\{1,3,5,6\} \setminus \{1,2,3\}) = \{1,2,3\} \cup \{5,6\} = \{1,2,3,5,6\}$
19) $A \oplus C = \{1,2,3\} \oplus \{4,5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$
20) $(A \setminus B) \oplus (A \setminus C) = (\{1,2,3\} \setminus \{1,3,5,6\}) \oplus (\{1,2,3\} \setminus \{4,5,6\}) = \{2\} \oplus \{1,2,3\} = \{1,3\}$
21) $(\overline{A} \setminus B) \oplus (B \setminus A) = \left(\overline{\{1,2,3\}} \setminus \{1,3,5,6\}\right) \oplus (\{1,3,5,6\} \setminus \{1,2,3\}) = \{4\} \oplus \{5,6\} = \{4,5,6\}$

Задание 1.5

Опишите множество, соответствующее закрашенной части диаграммы Венна:



Решение: $\overline{(A \cap B)\ \cup\ (A \cap C)\ \cup\ (B \cap C)}$

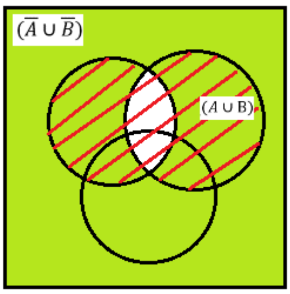
Задание 1.6

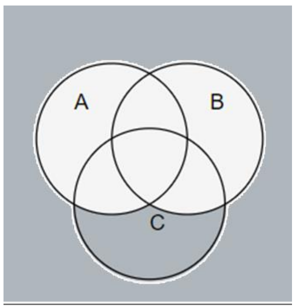
Для каждого из приведенных ниже множеств используйте диаграммы Венна и заштрихуйте те ее части, которые изображают заданные множества:

$(\overline{A} \cup \overline{B})\backslash(A \cup B)$, $(A\backslash B) \cap C$

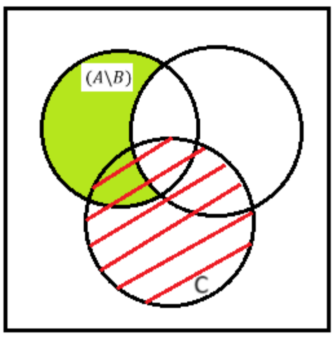
Ответ:

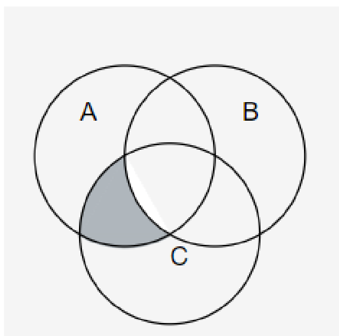
а) $(\overline{A} \cup \overline{B})\backslash(A \cup B)$





б) $(A\backslash B) \cap C$



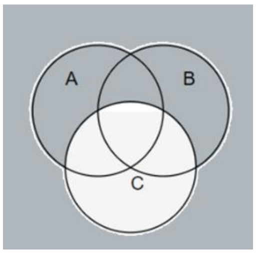


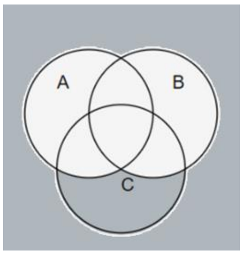
Задание 1.7

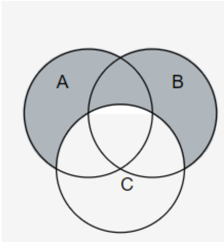
С помощью диаграммы Венна проверьте справедливость соотношения

$\overline{C}\backslash\overline{A \cup B} = \overline{A}\backslash\overline{B \cup C}$

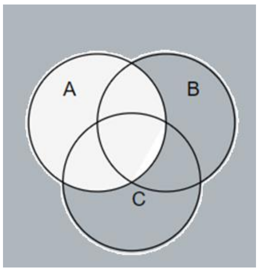
1) $\overline{C}$ 2) $\overline{A \cup B}$ 3) $\overline{C} \backslash \overline{A \cup B}$

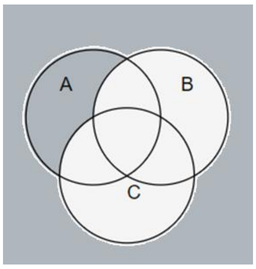


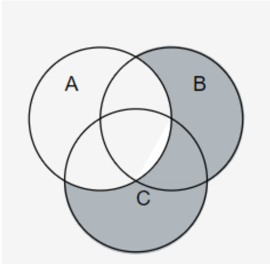




1) $\overline{A}$ 2) $\overline{B \cup C}$ 3) $\overline{A} \backslash \overline{B \cup C}$







Таким образом, $\overline{C} \backslash \overline{A \cup B} \neq \overline{A} \backslash \overline{B \cup C}$

Задание 1.8

Докажите тождество (A ∪ B) \ C = (A\C) ∪ (B\C), используя свойства операций.

Решение:

Используя выражение для разности A \ B = A ∩ $\overline{B}$ имеем:

$$(A \cup B) \backslash C = (A \cup B) \cap \bar{C}$$

По дистрибутивности:

$$(A \cup B) \cap \bar{C} = (A \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{C})$$

Используя выражение для разности $A \backslash B = A \cap \overline{B}$:

$$(A \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{C}) = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$$

Таким образом, тождество (A ∪ B) \ C = (A\C) ∪ (B\C) доказано.

Задание 1.9

Используя формулу включений-исключений, решите задачу. В студенческой группе 20 человек. Из них 10 имеют оценку «девять» по химии, 8 – по математике, 7 – по физике, 4 – по химии и по математике, 5 – по химии и по физике, 4 – по математике и по физике, 3 – по химии, по математике и по физике. Сколько студентов в группе не имеют оценок «девять»?

Используем формулу включений-исключений:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

где A, B и C – множества студентов, получивших оценку «девять» по химии, математике и физике соответственно.

$|A \cup B \cup C| = 10 + 8 + 7 - 4 - 5 - 4 + 3 = 15$

Таким образом, 15 студентов получили оценку «девять» по хотя бы одному предмету. Осталось вычислить количество студентов, которые не получили оценку «девять»:

20 - 15 = 5

Из условия задачи - 10 человек имеют оценку "девять" по химии, 8 - по математике и 7 - по физике. 4 человека имеют оценку "девять" и по химии, и по математике; 5 человек имеют оценку "девять" и по химии, и по физике; 4 человека имеют оценку "девять" и по математике, и по физике; 3 человека имеют оценку "девять" по всем трем предметам. Чтобы найти количество студентов, которые не имеют оценок "девять", нужно вычесть из общего числа студентов (20) количество студентов, которые имеют оценку "девять" по химии (10), количество студентов, которые имеют оценку "девять" по математике (8) и количество студентов, которые имеют оценку "девять" по физике (7). Однако, при вычитании мы учтем дважды тех студентов, которые имеют оценку "девять" по двум предметам, и трижды тех, кто имеет оценку "девять" по всем трем предметам. Поэтому нужно вычесть из суммы количество студентов, которые имеют оценку "девять" и по двум предметам (4+5+4=13) и тех, кто имеет оценку "девять" по всем трем предметам (3). Итого: 20 - 10 - 8 - 7 + 13 - 3 = 5. Ответ: 5 студентов в группе не имеют оценок "девять".

Ответ: 5 студентов в группе не имеют оценок «девять».

Задание 1.10

Используя формулу включений-исключений, решите задачу. Сколько натуральных чисел от 1 до 10000 не делится ни на α , ни на β , ни на γ , ни на δ ?

Решение: Пусть $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$, $\delta = 4$.

Если число делится на 4, то оно делится и на 2. Поэтому число 4 можно в условии задачи опустить.
Пусть *A*, *B*, *C* – множества целых положительных чисел, не превосходящих 1000, делящихся нацело на 2, 3, и 5 соответственно. Тогда $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$ – множества целых положительных чисел, не превосходящих 10000, делящихся нацело на 2*3=6, 2*5=10, 3*5=15, 2*3*5=30
Тогда, используя формулу включения и исключения имеем:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = [\frac{10000}{2}] + [\frac{10000}{3}] + [\frac{10000}{5}] - [\frac{10000}{2*3}] - [\frac{10000}{2*5}] - [\frac{10000}{3*5}] + [\frac{10000}{2*3*5}]$ = 5000 + 3333 + 2000 – 1666 – 1000 – 666 + 333 = 7334
10000-7334 = 2666

Ответ: 2666 целых положительных чисел, не превосходящих 10000 и не делящихся нацело ни на одно из чисел 2, 3, 4 и 5.

Задание 1.11

Методом математической индукции доказать, что при n ∈ N: $7^{2n} - 1$ кратно 24

Решение:

База индукции: если n = 1, то $7^{2\cdot 1} - 1 = 48 \vdots 24$ – верно

Предположение индукции: предположим, что утверждение является справедливым для n = k: $(7^{2k} - 1) \vdots 24$

Шаг индукции: докажем справедливость утверждения для n = k + 1

$7^{2(k+1)} - 1 = 7^{2k+2} - 1 = 49\cdot 7^{2k} - 1 = 49\cdot 7^{2k} - 49 + 48 = 49\cdot(7^{2k} - 1) + 48$

Из предположения: $(7^{2k} - 1) \vdots 24$, а также $48 \vdots 24$, значит $(49\cdot(7^{2k} - 1) + 48) \vdots 24$

Следовательно утверждение $(7^{2n} - 1)$ кратно 24 при n ∈ N верно

Задание 1.12

Доказать, что при любом n ∈ N выполняется равенство:

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \cdots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{n}{a(a+n)}$$

Рассмотрим левую часть (в ней представлен телескопический ряд):

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \cdots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} =$$
$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} + \cdots + \frac{1}{a+n-1} - \frac{1}{a+n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+n} = \frac{a+n-a}{a(a+n)} = \frac{n}{a(a+n)}$$

Левая часть = правой части, следовательно утверждение верно при любом n ∈ N

Вывод

В ходе работы мы изучили основные понятия и свойства множеств, а также освоили операции объединения, пересечения и разности. Используя диаграммы Венна, мы визуализировали эти операции. Вывод: понимание этих концепций важно для математического анализа, и работа помогла уяснить базовые принципы работы с множествами и их графическую представимость.

Оценочный лист

Вклад каждого участника по 5-бальной шкале:

- Петров Вячеслав Маркович P3108 – 5 баллов
- Таджеддинов Рамиль Эмильевич P3108 – 5 баллов
- Елисеев Константин Иванович P3108 – 5 баллов