**Многочлен от одной переменной. Деление с остатком. Наибольший общий делитель многочленов. Алгоритм Евклида. Схема Горнера. Теорема Безу. Основная теорема алгебры.**

***Определение.*** Многочленом с действительными коэффициентами $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ называется выражение вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$.

***Определение.*** Пусть имеем два многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ и $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m$.

Тогда $f(x) = g(x) \Leftrightarrow m = n, a_0 = b_0, a_1 = b_1, ..., a_{n-1} = b_{n-1}, a_n = b_n$.

***Определение.*** Разделить многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$ с остатком значит найти такие многочлены $q(x)$ и $h(x)$, что $f(x) = q(x)\cdot g(x) + h(x)$, причем степень $h(x)$ меньше степени $g(x)$.

***Замечание.*** $q(x)$ – неполное частное, $h(x)$ – остаток.

***Теорема (о делении с остатком).*** Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – произвольные многочлены с действительными коэффициентами. Тогда можно разделить с остатком, причем единственным образом, многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$.

***Пример.*** Разделить с остатком многочлен $f(x) = 4x^5 + 3x^3 - x^2 + 5$ на многочлен $g(x) = x^3 - 3x + 1$.

***Решение.***

$$
\begin{array}{l|l}
4x^5 + 3x^3 - x^2 + 5 & x^3 - 3x + 1 \\
\cline{2-2}
\underline{4x^5 - 12x^3 + 4x^2} & 4x^2 + 15 \\
\quad 15x^3 - 5x^2 + 5 & \\
\quad \underline{15x^3 - 45x + 15} & \\
\qquad -5x^2 + 45x - 10 &
\end{array}
$$

$$4x^5 + 3x^3 - x^2 + 5 = (4x^2 + 15)\,(x^3 - 3x + 1) - 5x^2 + 45x - 10$$

$q(x) = 4x^2 + 15$ $\qquad$ $h(x) = -5x^2 + 45x - 10$

***Теорема*** (***о делении многочлена на (x – a).***

Пусть $f(x)$ – произвольный многочлен, $a$ – число. Тогда этот многочлен можно единственным образом представить в виде $f(x) = q(x)\cdot(x-a) + c$, где $c = f(a)$.

***Схема Горнера***

| | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | …………… | $a_{n-1}$ | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b_0 = a_0$ | $b_1 = ab_0 + a_1$ | $b_2 = ab_1 + a_2$ | …………… | $b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1}$ | $c = ab_{n-1} + a_n$ |

***Пример.***

1) Разделить $f(x) = 7x^5 - 3x^4 - 2x^2 + 3x - 1$ на $x - 2$

| | 7 | -3 | 0 | -2 | 3 | -1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 7 | 11 | 22 | 42 | 87 | 173 |

Пояснение

| | 7 | -3 | 0 | -2 | 3 | -1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 7 | 2·7-3=11 | 2·11+0=22 | 2·22-2=42 | 2·42+3=87 | 2·87-1=173 |

$q(x) = 7x^4 + 11x^3 + 22x^2 + 42x + 87$ $\qquad$ $c = 173$

2) Найти $f(2)$.

$f(2) = c = 173$ (по теореме).

***Теорема (Безу).*** Число $a$ – корень многочлена $f(x)$ (т.е. $f(a) = 0$) $\Leftrightarrow$ $f(x)$ делится на ($x$–$a$).

***Определение.*** Число $a$ – корень многочлена $f(x)$. Если $f(x)$ делится без остатка на $(x-a)^k$ $(k \geq 1)$, но не делится на $(x-a)^{k+1}$, то $a$ называется корнем кратности $k$. Корни кратности 1 называются простыми корнями.

***Пример.***

1) $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$. Проверить, является ли 2 корнем многочлена $f(x)$.

| | 1 | -5 | 7 | -2 | 4 | -8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | -3 | 1 | 0 | 4 | 0 - остаток |

Вывод: 2 является корнем многочлена.

2) Определить кратность корня 2.

| | 1 | -5 | 7 | -2 | 4 | -8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | -3 | 1 | 0 | 4 | 0 - остаток |
| 2 | 1 | -1 | -1 | -2 | 0 | |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | | |
| 2 | 1 | 3 | 7 | 14 | | |

Вывод: 2 – корень кратности три.

***Определение.*** Многочлен $\varphi(x)$ называется общим делителем для многочленов $f(x)$ и $g(x)$, если он служит делителем каждого из этих многочленов.

***Определение.*** Наибольшим общим делителем отличных от нуля многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется такой многочлен $d(x)$, который является их общим делителем и сам делится на любой другой общий делитель этих многочленов.

Обозначение. $(f(x),\ g(x))$

Для нахождения наибольшего общего делителя используется ***алгоритм Евклида (алгоритм последовательного деления)***

***Пример.*** $f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3$ $\qquad g(x)=3x^3+10x^2+2x-3$

Найти $(f(x),\ g(x))$.

$$\begin{array}{l|l}
x^4+3x^3-x^2-4x-3 & 3x^3+10x^2+2x-3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4+\frac{10}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-x} & \frac{1}{3}x-\frac{1}{9} \\
\quad -\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2-3x-3 & \\
\quad \underline{-\frac{1}{3}x^3-\frac{10}{9}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{1}{3}} & \\
\qquad\qquad -\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3} \qquad \times\left(-\frac{9}{5}\right) &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
3x^3+10x^2+2x-3 & x^2+5x+6 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^3+15x^2+18x} & 3x-5 \\
\quad -5x^2-16x-3 & \\
\quad \underline{-5x^2-25x-30} & \\
\qquad\qquad 9x+27 \qquad \times\left(\frac{1}{9}\right) &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^2+5x+6 & x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^2+3x} & x+2 \\
\quad 2x+6 & \\
\quad \underline{2x+6} & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

$(f(x),\ g(x)) = x+3$

***Основная теорема алгебры.*** Всякий многочлен с любыми числовыми коэффициентами, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный.

***Следствие.*** Всякий многочлен $f(x)$ степени $n$ ($n \geq 1$) с любыми числовыми коэффициентами имеет $n$ корней, если каждый из корней считать столько раз, какова его кратность.

***Утверждение***. Если $\frac{p}{q}$ – несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем многочлена $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ с целыми коэффициентами, то:

1) $q$ – есть делитель $a_0$;
2) $p$ – есть делитель $a_n$;
3) $p - mq$ есть делитель $f(m)$ при любом целом $m$.

В частности, $p - q$ есть делитель $f(1)$, $p + q$ есть делитель $f(-1)$.

***Следствие***. Если $p$ – целый корень многочлена $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ с целыми коэффициентами, то $p$ – есть делитель $a_n$.

**Упражнения**

1. Пользуясь алгоритмом Евклида, найти наибольший общий делитель многочленов *f(x)* и *g(x),* если: $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + 11x^2 + 8x - 4$, $g(x) = x^5 + 6x^3 + x^2 + 8x + 4$
2. Пользуясь схемой Горнера
а) разделить многочлен $f(x) = 5x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ на двучлен *(x+3)*; б) найти *f(-3)*
3. Отделить кратные множители многочлена $f(x) = x^6 - 3x^5 + 10x^3 - 15x^2 + 9x - 2$ .
4. Найти рациональные корни многочлена $f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$

-----------------------------------------

1. Пользуясь алгоритмом Евклида, найти наибольший общий делитель многочленов *f(x)* и *g(x),* если: $f(x) = 5x^4 + x^3 - 9x^2 - 2x - 1$, $g(x) = x^5 - 5x^3 + x^2 + 6x - 2$
2. Пользуясь схемой Горнера
а) разделить многочлен $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$ на двучлен *(x+2)*; б) найти *f(-2)*
3. Отделить кратные множители многочлена $f(x) = x^6 + 2x^5 - 5x^4 - 20x^3 - 25x^2 - 14x - 3$.
4. Найти рациональные корни многочлена $f(x) = x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$