# Унитарный оператор

## Содержание

§1 Определение унитарного оператора 1

§2 Матрица унитарного оператора 2

§3 Спектральные свойства унитарного оператора 3

## §1. Определение унитарного оператора

**Лемма 1.1.** *Пусть $\upsilon$ - опертор в евклидовом пространстве $X_E(\mathbb{k})$, тогда следующие свойства эквиваентны:*

*(а) изометрия:* $\langle \upsilon x, \upsilon y\rangle = \langle x, y\rangle$;

*(б) сохранение нормы:* $\|\upsilon x\| = \|x\|$;

*(в) свойство сопряженного:* $\upsilon^\dagger = \upsilon^{-1}$

**Доказательство**. Проверим следующие импликации:

- Опр.(1) $\Rightarrow$ Опр.(2):

$$\|\upsilon x\|^2 = \langle \upsilon x, \upsilon x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2;$$

- Опр.(2) $\Rightarrow$ Опр.(1):

$$\|\upsilon(x+y)\|^2 = \|\upsilon x\|^2 + \|\upsilon y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle \upsilon x, \upsilon y\rangle,$$
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y^2\| + 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}\,\langle \upsilon x, \upsilon y\rangle$$

  Для Im аналогично рассматриваем $\|\upsilon(x + i\cdot y)\|^2$

- Опр.(1) $\Rightarrow$ Опр.(3):

$$\langle \upsilon x, \upsilon y\rangle = \langle x, \upsilon^\dagger \upsilon y\rangle = \langle x, y\rangle \quad Rightarrow \quad \upsilon^\dagger \upsilon = \mathcal{I}.$$

- Опр.(3) $\Rightarrow$ Опр.(1):

$$\langle x, y\rangle = \langle x, \mathcal{I} y\rangle = \langle x, \upsilon^\dagger \upsilon y\rangle = \langle \upsilon x, \upsilon y\rangle.$$

$\square$

**Определение 1.1. Унитарным** называется оператор $\upsilon$, обладающий одним из перечисленных выше свойств (и, как следствие, всем остальными).

**Лемма 1.2.** *Определитель оператора $\upsilon$ имеет следующее свойство:*

$$|\det \upsilon| = 1.$$

**Доказательство**. Прямой проверкой можно убедиться, что

$$\det \mathcal{I} = \det \left(\upsilon^\dagger \upsilon\right) = \det \upsilon^\dagger \det \upsilon = \overline{\det \upsilon} \cdot \det \upsilon = |\det \upsilon|^2 = 1.$$

$\square$

**Замечание 1.1.** Унитарный оператор в вещественном евклидовом пространстве $X_E$ называется **ортогональным** оператором.

## §2. Матрица унитарного оператора

**Замечание 2.1.** Матрицы унитарного и ортогонального операторов имеют свойсва:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}: &\quad \upsilon \leftrightarrow U, \quad \overline{U^T} = U^{-1}; \\ \mathbb{R}: &\quad \upsilon \leftrightarrow U, \quad U^T = U^{-1}. \end{aligned}$$

**Замечание 2.2.** В вещественном случае

$$\det \upsilon = \det U = \pm 1$$

**Лемма 2.1.** *Пусть $U = \|u_{ik}\|$ - матрица унитарного оператора, тогда:*

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{u}_{ij} u_{kj} = \delta_{ik}.$$

**Замечание 2.3.** Столбцы матрицы унитарного оператора ортогональны.

**Пример 2.1.** Матрица Эйлера - пример ортогональной матрицы:

$$U = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

**Лемма 2.2.** *Множество унитарных операторов, действующих на пространстве $X_E$ образует мультипликативную группу:*

$$\begin{gathered} U(n) = \left\{\upsilon : \quad \upsilon^\dagger \upsilon = \mathcal{I}\right\}, \quad \dim_{\Bbbk} X_E = n. \\ SU(n) = \left\{\upsilon : \quad \upsilon^\dagger \upsilon = \mathcal{I}, \quad \det \upsilon = 1\right\}. \end{gathered}$$

**Доказательство**. Пусть $\upsilon_1, \upsilon_2 \in U(n)$, тогда $\upsilon_1 \upsilon_2 \in U(n)$. Действительно:

$$\langle \upsilon_1 \upsilon_2 x, \upsilon_1 \upsilon_2 y \rangle = \langle \upsilon_2 x, \upsilon_2 y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

$\square$

## §3. Спектральные свойства унитарного оператора

**Лемма 3.1.** *Все собственные значения оператора $\upsilon$ по модулю равны единице:*

$$|\lambda| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = e^{i\chi}.$$

**Доказательство**. Пусть $\upsilon x = \lambda x$, тогда

$$\langle \upsilon x, \upsilon x\rangle = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = |\lambda|^2 \langle x, x\rangle. \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1.$$

□

**Лемма 3.2.** *Собственные векторы унитарного оператора, отвечающие различным собственным значениям ортогональны:*

$$\upsilon x_1 = \lambda_1 x_1, \quad \upsilon x_2 = \lambda_2 x_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2\rangle = 0.$$

**Доказательство**. Убедимся прямой проверкой:

$$\langle x_1, x_2\rangle = \langle \upsilon x_1, \upsilon x_2\rangle = \overline{\lambda}_1 \lambda_2 \langle x_1, x_2\rangle = e^{-i\chi_1} e^{i\chi_2} \langle x_1, x_2\rangle = e^{i(\chi_2 - \chi_1)} \langle x_1, x_2\rangle.$$

Откуда сразу следует:

$$\left(e^{i(\chi_1 - \chi_2)} - 1\right) \langle x_1, x_2\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2\rangle = 0.$$

□

**Лемма 3.3.** *Любое инвариантное подпространство $\upsilon$ является приводящим.*

**Доказательство**. Для любых $x \in L$ и $y \in L^{\perp}$ имеем:

$$0 = \langle x, y\rangle = \langle \upsilon x, \upsilon y\rangle \quad \Rightarrow \quad \upsilon x \perp \upsilon y \quad \Rightarrow \quad \upsilon y \in M.$$

□

**Теорема 3.1.** *Унитарный оператор является опертором скалярного типа.*

**Доказательство**. Доказательство как для случая эрмитова оператора. □

**Пример 3.1.** Ортогональный оператор, вообще говоря, не явяется скалярным.

**Теорема 3.2.** *(Спектральная теорема для унитарного оператора) Пусть $\upsilon : X_E \to X_E$ - унитарный оператор и $\{e_j\}_{j=1}^n$ - ОНБ $X_E$, состоящий из собственных векторов $\upsilon$, тогда:*

$$\upsilon * = \sum_{j=1}^{n} e^{i\chi_j} \langle e_j, *\rangle e_j.$$

**Лемма 3.4.** *Любая эрмитова матрица может быть приведена к диагональной форме унитарным преобразованием.*

**Лемма 3.5.** *Для любого унитарного оператора $\upsilon$ найдется такой самосопряженный оператор $\varphi$, что:*

$$\upsilon = e^{i\varphi}.$$