



Лекция 4

«ПЛФ и тензоры»

Содержание лекции:

Ключевые слова:

Авторы курса:

Свинцов М.В.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

4.1 Основные определения

Пусть X - конечномерное линейное пространство над полем \mathbb{K} .

Полилинейной формой, типа (p, q) на X назовем полилинейное отображение вида

$$U : \underbrace{X \times \dots \times X}_p \times \underbrace{X^* \times \dots \times X^*}_q \rightarrow \mathbb{K}$$

иными словами функцию U , определенную на p векторах пространства X и q линейных формах пространства X^* , которая линейна по каждому из аргументов

$$\begin{aligned} U(x_1, \dots, \alpha x'_i + \beta x''_i, \dots, x_p; y^1, \dots, y^q) = \\ = \alpha U(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_p; y^1, \dots, y^q) + \beta U(x_1, \dots, x''_i, \dots, x_p; y^1, \dots, y^q) \end{aligned}$$

Валентностью ПЛФ называют пару чисел (p, q) , определяющих количество векторов и ковекторов (линейных форм), являющихся аргументами полилинейного отображения.

Пример 4.1.

1. Линейные формы над X - это отображения вида

$$\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}$$

Следовательно, линейная форма $\varphi \in X^*$ является ПЛФ типа $(1, 0)$.

2. Линейные формы над X^* - это отображения вида

$$\hat{x} : X^* \rightarrow \mathbb{K}$$

Следовательно, линейная форма $\hat{x} \in X^{**}$ является ПЛФ типа $(0, 1)$. Однако ранее обсуждалось, что между пространствами X и X^{**} существует естественный изоморфизм, определяемый как

$$\begin{aligned} x \leftrightarrow \hat{x} \quad (\hat{x}, f) &= (f, x) \\ x \in X, \quad f \in X^*, \quad \hat{x} &\in X^{**} \end{aligned}$$

Следовательно, можно утверждать, что ПЛФ типа $(0, 1)$ по сути своей - это векторы пространства X в силу отождествления пространств $X \simeq X^{**}$.

3. Билинейные формы над X - это отображения вида

$$b : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$$

Таким образом, билинейная форма - это ПЛФ типа $(2, 0)$. Примером билинейной формы служит скалярное произведение двух векторов

$$U(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$

4. Можно также рассмотреть трилинейные формы как отображения вида

$$\psi : X \times X \times X \rightarrow \mathbb{K}$$

являющиеся ПЛФ типа $(3, 0)$. Отображения такого вида встречались в геометрии - это смешанное произведение трех векторов.

Опционально. Допматериал

Рассмотрение ПЛФ валентности $(1, 1)$ оказывается чуть более нетривиальной задачей, которая приведет нас к определению линейного оператора. Пусть задано полилинейное отображение $\varphi(x; f)$

$$\varphi : X \times X^* \rightarrow \mathbb{K}$$

При фиксированном x функция $\varphi(x; f)$ является линейной формой над X^*

$$\varphi(x; f) = (\hat{x}, f) = (f, v) = f(\psi(x))$$

учитывая, что в силу изоморфности пространств $X \simeq X^{**}$ можно утверждать, что $\forall x \in X, \exists! v = \psi(x) \in X$ такой, что удовлетворяет равенству выше. Действительно, естественный изоморфизм между X и X^{**} не утверждает, что объекты x и v равны, но вместе с ним между ними существует однозначное отображение. Покажем, что $\psi(x)$ определяет линейный оператор. Для этого рассмотрим свойства линейности тензора

$$\begin{aligned} f(\psi(\alpha x_1 + \beta x_2)) &= \varphi(\alpha x_1 + \beta x_2; f) = \alpha \varphi(x_1; f) + \beta \varphi(x_2; f) = \\ &= \alpha f(\psi(x_1)) + \beta f(\psi(x_2)) = f(\alpha \psi(x_1) + \beta \psi(x_2)) = f(\psi(\alpha x_1 + \beta x_2)) \end{aligned}$$

Откуда следует

$$\psi(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \psi(x_1) + \beta \psi(x_2)$$

Можно показать обратное, что для каждого оператора $\psi \in \text{End}(X)$ может быть построена ПЛФ вида

$$\varphi(x; f) = f(\psi(x))$$

обладающий необходимыми свойствами.

Nota bene Линейный оператор соответствует смешанной ПЛФ типа $(1, 1)$.

4.2 Действия с полилинейными формами

Прежде всего договоримся о том, в каком случае будем считать полилинейные формы равными.

Полилинейные формы U и V одинаковой валентности (p, q) будем называть равными, если

$$U(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = V(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q)$$

для любых наборов $x_1, x_2, \dots, x_p \in X$ и $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q \in X^*$.

Иными словами, как и ранее для любого отображения мы определяем равенство как поточечное, полагая, что отображения должны принимать одинаковые значения на одинаковых наборах аргументов.

Безусловно сразу можно определить, что мы считаем нулевой полилинейной формой, а также сумму полилинейных форм и их произведение на скаляр.

Нуль-формой Θ валентности (p, q) называется такая полилинейная форма, что

$$\Theta(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = 0 \quad \forall x_i \in X, \varphi^j \in X^*$$

Пусть U и V - полилинейные формы валентности (p, q) .

Отображение $W = U + V$ будем называть суммой полилинейных форм U и V , если

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) &= \\ &= U(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) + V(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) \end{aligned}$$

для любых наборов $x_1, x_2, \dots, x_p \in X$ и $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q \in X^*$.

Аналогично можно ввести и умножение на скаляр.

Отображение λU будем называть произведением полилинейной формы U на скаляр λ , если

$$(\lambda U)(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = \lambda \cdot U(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q)$$

для любых наборов $x_1, x_2, \dots, x_p \in X$ и $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q \in X^*$.

Введенные отображения W и λU очевидно также являются тензорами, что можно легко показать исходя из линейности отображений U и V по каждому из аргументов. Данная процедура уже не раз показывалась на различных частных случаях тензоров и может быть обобщена по тому же принципу.

Теорема 4.1. Множество Ω_q^p полилинейных форм валентности (p, q) образует линейное пространство.



Доказательство сводится к проверке аксиом линейного пространства. ◄

Помимо линейных операций с полилинейными формами может быть также введена мультипликативная операция.

Произведением полилинейных форм $U \in \Omega_{q_1}^{p_1}$ и $V \in \Omega_{q_2}^{p_2}$ называют отображение $W = U \cdot V$ вида

$$W(x_1, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_2}; \varphi^1, \dots, \varphi^{q_1}, \varphi^{q_1+1}, \dots, \varphi^{q_1+q_2}) = \\ U(x_1, \dots, x_{p_1}; \varphi^1, \dots, \varphi^{q_1}) \cdot V(x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_2}; \varphi^{q_1+1}, \dots, \varphi^{q_1+q_2})$$

Теорема 4.2. *Отображение W , введенное как произведение полилинейных форм, является полилинейной формой.*

$$W \in \Omega_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}$$

►

Для доказательства необходимо рассмотреть линейность полилинейных форм U и V по каждому из аргументов. ◀

Свойства произведения полилинейных форм

1. Некоммутативность

$$U \cdot V \neq V \cdot U$$

Данное свойство очевидно вытекает из определения произведения в силу того, что порядок произведения U и V определяет порядок аргументов в W . Однако продемонстрируем это свойство на более простом примере. Рассмотрим следующие полилинейные формы, определенные как произведения обычных линейных форм $f^1, f^2 \in X^*$

$$\begin{aligned} W_1 = f^1 \cdot f^2 &\Rightarrow W_1(x_1, x_2) = f^1(x_1) \cdot f^2(x_2) \\ W_2 = f^2 \cdot f^1 &\Rightarrow W_2(x_1, x_2) = f^2(x_1) \cdot f^1(x_2) \end{aligned}$$

2. Ассоциативность

$$U \cdot (V \cdot W) = (U \cdot V) \cdot W$$

3. Нуль-форма

$$U \cdot \Theta_{(p_2, q_2)} = \Theta_{(p_1, q_1)} \cdot V = \Theta_{(p_1+p_2, q_1+q_2)}$$

4. Законы согласования операций (дистрибутивность)

$$\begin{aligned} U \cdot (V + W) &= U \cdot V + U \cdot W \\ (U + V) \cdot W &= U \cdot W + V \cdot W \\ (\alpha U) \cdot V &= \alpha(U \cdot V) = U \cdot (\alpha V) \end{aligned}$$

4.3 Тензор ПЛФ

Зафиксируем в $X(\mathbb{K})$ базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ и построим к нему сопряженный базис $\{f^j\}_{j=1}^n$ в пространстве X^* . Вспомним, что эти базисы связаны соотношением

$$f^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Тензором полилинейной формы W валентности (p, q) называется набор из n^{p+q} скаляров, определяемые как

$$\omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = W(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}),$$

где индексы i_1, i_2, \dots, i_p и j_1, j_2, \dots, j_q принимают значения $1, \dots, n$, где $n = \dim X$ - размерность пространства X .

Важно отметить, что в различных математических традициях принято по-разному определять понятия "полилинейная форма" и "тензор". Полилинейная форма действительно определяется как функция нескольких векторных и функциональных аргументов, но в то же время иногда между тензором или полилинейной формой ставится знак равенства, а иногда, как в определении выше, тензором называют именно набор компонент полилинейной формы. Данное отличие не является принципиальным и часто становится ясным из контекста, но необходимо понимать, что некоторые авторы вводят между ними различия.

Замечание о немом суммировании

Прежде чем перейдем к дальнейшим рассуждениям, отметим следующий факт. Наличие большого количества индексов в случае анализа линейных объектов нередко приводит к большому количеству суммирований как в теоретических выкладках, так и в практических приложениях тензоров. По этой причине вводится так называемое **правило Эйнштейна**, или правило о немом суммировании. В контексте данной темы договоримся о следующем:

1. Если в одночлене присутствует одинаковый верхний и нижний индекс, то подразумевается суммирование по нему:

$$a^i b_i = \sum_i a^i b_i$$

2. Индекс, по которому происходит суммирование, называют немым в силу того, что его обозначение не принципиально, т.е.

$$a^i b_i = a^j b_j = a^k b_k$$

3. Необходимо соблюдение баланса индексов. Если индекс не является немым, то в левой и правой частях равенства должны присутствовать одни и те же индексы, а также должен быть неизменным их порядок, т.е.

$$a_{ik} b^{kl} = c_i^l$$

Данное соглашение является общепринятым в силу того, что позволяет достаточно компактно записывать многие алгебраические выражения. Например, система линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ может быть записана как

$$a_{ij} x^j = b_i,$$

где (a_{ij}) - компоненты матрицы системы, x^j - компоненты вектора неизвестных, а b_i - компоненты вектора правой части.

Перейдем теперь к дальнейшему анализу тензоров.

Теорема 4.3. Задание ПЛФ эквивалентно заданию ее тензора – компонент в паре базисов пространств X и X^* .



Рассмотрим набор векторов x_1, \dots, x_p и форм $\varphi^1, \dots, \varphi^q$, заданных своими разложениями по базисам

$$x_k = \sum_{i=1}^n \xi_k^i e_i = \xi_k^i e_i \quad \varphi^l = \sum_{j=1}^n \eta_j^l f^j = \eta_j^l f^j$$

Применим к ним тензор $W(x_1, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q)$ и воспользуемся его линейными свойствами

$$\begin{aligned} W(x_1, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q) &= W(\xi_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, \xi_p^{i_p} e_{i_p}; \eta_{j_1}^1 f^{j_1}, \dots, \eta_{j_q}^q f^{j_q}) = \\ &= \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_p^{i_p} \eta_{j_1}^1 \eta_{j_2}^2 \dots \eta_{j_q}^q W(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}) = \\ &= \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_p^{i_p} \eta_{j_1}^1 \eta_{j_2}^2 \dots \eta_{j_q}^q \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} \end{aligned}$$



Таким образом мы получаем, что компоненты тензора однозначно задают его в фиксированной паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{f^j\}_{j=1}^n$. Данное свойство аналогично рассмотренным ранее:

1. Разложению вектора по базису пространства X ;
2. Разложению линейной формы на коэффициенты в базисе сопряженного пространства X^* ;
3. Матрице линейного оператора, где коэффициент с индексом (ij) соответствует i -й координате образа j -го базисного вектора;
4. Матрице билинейной формы, где коэффициент с индексом (ij) соответствует значению билинейной формы на базисных векторах e_i и e_j .

Продолжим рассмотрение полилинейных форм и линейных пространств Ω_q^p , которые они образуют.

4.4 Тензорный базис

Помимо определения компонент тензора в выбранной паре базисов можно также задать набор тензоров $\{\xi_{t_1, t_2, \dots, t_q}^{s_1, s_2, \dots, s_p} W\}$, которые действуют на набор аргументов следующим образом

$$\xi_{t_1, t_2, \dots, t_q}^{s_1, s_2, \dots, s_p} W(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} \dots \xi_p^{s_p} \eta_{t_1}^1 \eta_{t_2}^2 \dots \eta_{t_q}^q$$

Иными словами, тензор $\xi_{t_1, t_2, \dots, t_q}^{s_1, s_2, \dots, s_p} W$ определим как отображение возвращающее произведение t_1 -ой координаты первого вектора, на t_2 -ю координату второго вектора и т.д.

Nota bene Введенные таким образом тензоры, вычисленные на базисных векторах, позволяют сформулировать соотношение аналогичное сопряженности базисов пространств X и X^* :

$$\begin{aligned} & {}^{s_1, s_2, \dots, s_p}_{t_1, t_2, \dots, t_q} W(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}) = \\ & = {}^{s_1, s_2, \dots, s_p}_{t_1, t_2, \dots, t_q} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \delta_{i_1}^{s_1} \delta_{i_2}^{s_2} \dots \delta_{i_p}^{s_p} \delta_{t_1}^{j_1} \delta_{t_2}^{j_2} \dots \delta_{t_q}^{j_q} \end{aligned}$$

Теорема 4.4. Набор тензоров $\{{}^{s_1, s_2, \dots, s_p}_{t_1, t_2, \dots, t_q} W\}$ является базисом пространства Ω_q^p .



Рассмотрим линейную комбинацию данных тензоров, порождающую нулевой тензор той же валентности:

$${}^{s_1, s_2, \dots, s_p}_{t_1, t_2, \dots, t_q} W \alpha_{s_1 s_1 \dots s_p}^{t_1 t_2 \dots t_q} = \Theta$$

где $\alpha_{s_1 s_1 \dots s_p}^{t_1 t_2 \dots t_q}$ - коэффициенты линейной комбинации.

Вычислим полученную линейную комбинацию на базисных наборах пространств X и X^*

$${}^{s_1, s_2, \dots, s_p}_{t_1, t_2, \dots, t_q} W(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}) \alpha_{s_1 s_1 \dots s_p}^{t_1 t_2 \dots t_q} = 0$$

В силу определения компонент тензора на базисных векторах данное равенство можно записать иным образом

$$\delta_{i_1}^{s_1} \delta_{i_2}^{s_2} \dots \delta_{i_p}^{s_p} \delta_{t_1}^{j_1} \delta_{t_2}^{j_2} \dots \delta_{t_q}^{j_q} \alpha_{s_1 s_1 \dots s_p}^{t_1 t_2 \dots t_q} = 0$$

Полагая, что в левой части выполняется немое суммирование с символами Кронекера, можно получить, что

$$\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = 0$$

Иными словами, все коэффициенты $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ равны нулю, что доказывает линейную независимость выбранного набора тензоров. Полнота данного набора выражается в том, что произвольный тензор может быть разложен по этому базису, а коэффициенты разложения и есть компоненты тензора в выбранном базисе. ◀

Существует достаточно простой способ определить тензоры, являющиеся элементами базиса пространства тензоров. Рассмотрим для начала тензор типа $U \in \Omega_0^p$. Набор

$${}^{s_1 s_2 \dots s_p} W = f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot \dots \cdot f^{s_p}$$

образует базис в Ω_0^p , если $\{f^k\}_{k=1}^n$ образуют базис в X^* :

$$\begin{aligned} {}^{s_1 s_2 \dots s_p} W(x_1, x_2, \dots, x_p) &= (f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot \dots \cdot f^{s_p})(x_1, x_2, \dots, x_p) = \\ &= f^{s_1}(x_1) \cdot f^{s_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f^{s_p}(x_p) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} \dots \xi_p^{s_p} \end{aligned}$$

что совпадает с определением тензорного базиса.

Рассмотрим теперь пространство тензоров типа Ω_q^p . Пусть $\{f^k\}_{k=1}^n$ - базис в пространстве X^* и $\{\hat{x}_j\}_{j=1}^n$ - базис пространства X^{**} . Тогда базис пространства Ω_q^p образуют полилинейные формы вида

$${}^{s_1 s_2 \dots s_p}_{t_1 t_2 \dots t_q} W = f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot \dots \cdot f^{s_p} \cdot \hat{x}_{t_1} \cdot \hat{x}_{t_2} \cdot \dots \cdot \hat{x}_{t_q}$$

Введение базиса пространства X^{**} необходимо для получения компонент линейных форм, являющихся аргументами полилинейной формы. Однако в силу $X \simeq X^{**}$ можно утверждать, что существует изоморфизм, отображающий базис $\{\hat{x}_j\}_{j=1}^n$ в $\{e_j\}_{j=1}^n$, а следовательно тензорный базис можно составлять из следующих компонент:

$${}^{s_1 s_2 \dots s_p}_{t_1 t_2 \dots t_q} W \leftrightarrow f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot \dots \cdot f^{s_p} \cdot e_{t_1} \cdot e_{t_2} \cdot \dots \cdot e_{t_q}$$

4.5 Преобразование компонент тензора

Посмотрим теперь как изменяются компоненты тензора при изменениях базиса пространства X . Пусть задана матрица перехода T с компонентами (τ_i^j) , для которой существует обратная матрица $S = T^{-1}$ с компонентами (σ_j^i) . С помощью этих матриц, как было показано ранее, преобразуются как сами базисные векторы

$$e'_i = e_j \tau_i^j \quad f'^i = \sigma_j^i f^j$$

Покажем связь компонент тензора в новом базисе $\omega'^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$ с компонентами тензора в старом базисе $\omega^{l_1 l_2 \dots l_q}_{k_1 k_2 \dots k_p}$

$$\begin{aligned} \omega'^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} &= W(e'_{i_1}, e'_{i_2}, \dots, e'_{i_p}; f'^{j_1}, f'^{j_2}, \dots, f'^{j_q}) = \\ &= W(e_{k_1} \tau_{i_1}^{k_1}, e_{k_2} \tau_{i_2}^{k_2}, \dots, e_{k_p} \tau_{i_p}^{k_p}; f^{l_1} \sigma_{l_1}^{j_1}, f^{l_2} \sigma_{l_2}^{j_2}, \dots, f^{l_q} \sigma_{l_q}^{j_q}) = \\ &= \tau_{i_1}^{k_1} \tau_{i_2}^{k_2} \dots \tau_{i_p}^{k_p} \sigma_{l_1}^{j_1} \sigma_{l_2}^{j_2} \dots \sigma_{l_q}^{j_q} W(e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_p}; f^{l_1}, f^{l_2}, \dots, f^{l_q}) = \\ &= \tau_{i_1}^{k_1} \tau_{i_2}^{k_2} \dots \tau_{i_p}^{k_p} \sigma_{l_1}^{j_1} \sigma_{l_2}^{j_2} \dots \sigma_{l_q}^{j_q} \omega^{l_1 l_2 \dots l_q}_{k_1 k_2 \dots k_p} \end{aligned}$$

В данной цепочке преобразований подразумевается, что происходит суммирование по всем неммым индексам.

Обратим внимание на тот факт, что нижние индексы, *ковариантные*, всегда преобразуются согласно матрице перехода с компонентами (τ_j^i) . В это же время преобразование верхних индексов, *контравариантных*, всегда связано с компонентами (σ_j^i) обратной матрицы к матрице перехода. Положение индекса определяет природу его преобразования - с помощью самой матрицы перехода (ко-) или с помощью обратной (контра-) матрицы. В этом заключается ключевое отличие в природе индексов и объектов, которые эти индексы определяют.

Nota bene Нередко можно встретить источники, где приведенный закон преобразований компонент тензора принимается за его определение. Особенно часто данное определение используется в физике. Иными словами, за тензор принимается набор скаляров, которые изменяются определенным образом при преобразованиях координат.

Рассмотрим различные частные случаи этого закона преобразования:

1. $\Omega_1^0 = X^*$: линейные формы

$$f \in \Omega_1^0 \quad \varphi'_i = \varphi_j \tau_i^j$$

В матричном виде закон преобразования принимает вид

$$f' = fT$$

что соответствует преобразованиям координат линейной формы.

2. $\Omega_0^1 = X^{**} \simeq X$: векторы

$$x \in \Omega_0^1 \quad \xi'^i = \sigma_j^i \xi^j$$

В матричном виде закон преобразования принимает вид

$$x' = Sx$$

что соответствует преобразованиям координат вектора.

3. $\Omega_1^1 = \text{Hom}(X)$: линейные операторы

$$\mathcal{A} \in \Omega_1^1 \quad \alpha'^i_j = \sigma_k^i \alpha_l^k \tau_j^l$$

В матричном виде закон преобразования принимает вид

$$A' = SAT$$

что соответствует преобразованиям матрицы оператора.

4. Ω_0^2 : дважды контравариантные тензоры, которые, в частности, могут рассматриваться как билинейные формы от линейных форм в качестве аргументов, или, так называемые диады или бивекторы

$$\Psi \in \Omega_0^2 \quad \psi'^{ij} = \sigma_k^i \psi^{kl} \sigma_l^j$$

В матричном виде закон преобразования принимает вид

$$\Psi' = S\Psi S^T$$

что соответствует преобразованиям соответствующих объектов.

Отдельно стоит отметить, что можно рассматривать тензоры ранга 0. С точки зрения полилинейных форм - это функция, которая не имеет аргументов. Следовательно, можно поставить ей в соответствие элемент из поля, над которым определяется пространство тензоров:

$$c \in \Omega_0^0 \simeq \mathbb{K}$$

Закон преобразования элементов этого пространства становится предельно тривиальным - в силу отсутствия аргументов такой "формы", преобразование базиса никак не повлияет на сам элемент, а значит

$$c' = c$$

Nota bene Тензоры нулевого ранга являются инвариантными относительно преобразований базиса. Обычно в таком случае именно их именуют *скалярами*. Однако стоит понимать, что не любое число является таковым. Например, произвольная компонента тензора ранга $p + q \geq 1$ уже будет изменяться при преобразованиях базиса.

4.6 Свертка тензора

Определим еще одну операцию над полилинейными формами и тензорами соответственно. Рассматривая мотивацию введения этой операции, приведем два примера.

Во-первых, пусть $\mathcal{A} \rightarrow \alpha_j^i \in \Omega_1^1$ - тензор ранга $(1, 1)$, т.е. линейный оператор. Что получится в результате обозначения индексов одной и той же буквой? Несложно догадаться, что, применяя соглашение Эйнштейна, в результате получим скаляр, тензор ранга $(0, 0)$

$$\alpha_i^i = \sum_{i=1}^n \alpha_i^i = \text{tr} \mathcal{A} \in \Omega_0^0$$

Во-вторых, рассмотрим применение этого же линейного оператора $\mathcal{A} \rightarrow \alpha_j^i \in \Omega_1^1$ к вектору $x \rightarrow \xi^j \in \Omega_0^1$

$$y = \mathcal{A}x \quad \leftrightarrow \quad \eta^i = \alpha_j^i \xi^j$$

С точки зрения тензорной алгебры эту операцию можно рассматривать как совокупность двух. Сначала мы можем тензорно умножить оператор на вектор

$$\mathcal{A} \otimes x \quad \leftrightarrow \quad (\alpha_j^i) \otimes (\xi^k) = \eta_j^{ik} \in \Omega_1^2$$

После чего мы снова переобозначаем индексы j и k одной и той же буквой, чтобы привести к определению действия оператора, написанному выше

$$\eta^i = \eta_j^{ij} = \sum_{j=1}^n \eta_j^{ij} \in \Omega_0^1$$

И в том, и в другом случае мы фиксировали два индекса (причем один верхний и один нижний), обозначали их одинаково и получали новый тензорный объект, который получался немой суммированием по этому индексу согласно правилу Эйнштейна. Данный подход является достаточно распространенным и может быть описан как на языке полилинейных форм, так и на языке тензоров самих по себе.

Сверткой полилинейной формы $W \in \Omega_q^p$ называется отображение, результатом которого является функция \tilde{W} от $p - 1$ векторного аргумента и $q - 1$ ковекторного аргумента, определяемое как

$$\begin{aligned} \tilde{W}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q) = \\ = W(x_1, \dots, x_{k-1}, \mathbf{e}_r, x_{k+1}, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^{l-1}, \mathbf{f}^r, \varphi^{l+1}, \dots, \varphi^q) \end{aligned}$$

полагая, что в правой части производится суммирование по некому индексу r .

Полученная функция \tilde{W} является полилинейной формой в силу того, что свойства линейности индуцируются из W . Рассмотрим компоненты полученной полилинейной формы и введем для них обозначения в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{f^j\}_{j=1}^n$

$$\begin{aligned} W & \leftrightarrow \omega_{i_1 \dots i_{k-1} i_k i_{k+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_{l-1} j_l j_{l+1} \dots j_q} \\ \tilde{W} & \leftrightarrow \tilde{\omega}_{i_1 \dots i_{k-1} i_k i_{k+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_{l-1} j_l j_{l+1} \dots j_q} \end{aligned}$$

Компоненты полилинейной формы \tilde{W} связаны с компонентами полилинейной формы W соотношением

$$\tilde{\omega}_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_{l-1} j_{l+1} \dots j_q} = \omega_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_{l-1} j_{l+1} \dots j_q},$$

которое получается из рассмотрения определения свертки при подстановке в них базисных векторов в качестве аргументов согласно определению тензора полилинейной формы.

Nota bene Свертка является линейным оператором $\text{Hom}(\Omega_q^p, \Omega_{q-1}^{p-1})$ на пространствах тензоров. Необходимым условием для существования свертки является наличие хотя бы одного верхнего и хотя бы одного нижнего индекса.

Пример 4.2.

1. Свертка полилинейной формы валентности $(1, 1)$ соответствующей линейному оператору дает скаляр, называемый следом оператора

$$\text{tr} \mathcal{A} = \alpha_i^i = \alpha_1^1 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^n$$

В силу того, что скаляр является инвариантом, можно сделать вывод, что след линейного оператора не зависит от базиса.

2. Через свертку также можно рассматривать применение линейной формы f к вектору x

$$f(x) = f_i x^i = f_1 x^1 + \dots + f_n x^n$$

Как можно предположить из приведенных примеров результат свертки не зависит от базиса. Справедливо ли это для произвольной свертки полилинейной формы, если количество индексов превышает 1?

Лемма 4.1. *Свертка полилинейной формы не зависит от выбора базисов.*



Пусть даны две пары базисов

$$\begin{aligned} \{e_k\}_{k=1}^n, \{f^l\}_{l=1}^n & \quad f^l(e_k) = \delta_k^l \\ \{\tilde{e}_j\}_{j=1}^n, \{\tilde{f}^i\}_{i=1}^n & \quad \tilde{f}^i(\tilde{e}_j) = \delta_j^i, \end{aligned}$$

которые связаны матрицей перехода τ_j^k и обратной к ней σ_l^i .

Обратимся к определению свертки в новом базисе

$$\begin{aligned} W(\dots, \tilde{e}_s, \dots; \dots, \tilde{f}^s, \dots) &= W(\dots, \tau_s^k e_k, \dots; \dots, \sigma_l^s f^l, \dots) = \\ &= \tau_s^k \sigma_l^s W(\dots, e_k, \dots; \dots, f^l, \dots) = \delta_l^k W(\dots, e_k, \dots; \dots, f^l, \dots) = \\ &= W(\dots, e_k, \dots; \dots, f^k, \dots), \end{aligned}$$

что соответствует определению свертки в старом базисе. ◀

Если количество индексов как верхних, так и нижних превышает 1, то естественно данную операцию можно применять такое количество раз, сколько хватит индексов сверху и/или снизу. Однако в случае равенства количества ковариантных и контравариантных индексов всегда есть возможность получить скаляр.

|| Полной сверткой полилинейной формы $U \in \Omega_p^p$ называется результат p -кратного сворачивания этой полилинейной формы.

Nota bene Количество различных полных сверток полилинейной формы валентности (p, p) равно $p!$.

4.7 Транспонирование

В первую очередь посмотрим к чему приведет перестановка двух аргументов полилинейной формы. Пусть $W \in \Omega_q^p$ полилинейная форма валентности (p, q) .

|| Транспонированием полилинейной формы W по (r, s) -м аргументам называется операция, позволяющая получить полилинейную форму $W^{T_{rs}}$ вида

$$\begin{aligned} W^{T_{rs}}(\dots, x_s, \dots, x_r, \dots; \varphi^1, \dots, \varphi^q) = \\ = W(\dots, x_r, \dots, x_s, \dots; \varphi^1, \dots, \varphi^q) \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно ввести и транспонирование по (r, s) -м ковекторных аргументов. Важно отметить, что не нарушая природу полилинейной формы и законы ее преобразования, можно транспонировать только по аргументы одной природы.

Посмотрим, как транспонирование полилинейной формы отразится на ее компонентах - тензоре полилинейной формы. Пусть W задана своими компонентами в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{f^j\}_{j=1}^n$:

$$W \quad \leftrightarrow \quad \omega_{i_1 \dots r \dots s \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$$

Транспонирование по (r, s) -м аргументам приведет к перестановке индексов тензора полилинейной формы

$$(\omega^{T_{rs}})^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots s \dots r \dots i_p} = \omega_{i_1 \dots r \dots s \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$$

Операция транспонирования в некотором смысле идентична транспонированию матриц и может быть описана с ее помощью.

4.8 Симметричные и антисимметричные полилинейные формы

Рассмотрим пространства Ω_0^p полилинейных форм от p векторных аргументов. Продолжая идею транспонирования полилинейных форм, можно говорить в целом о произвольных перестановках аргументов.

|| Полилинейная форма $U \in \Omega_0^p$ называется симметричной, если ее значения не зависят от порядка следования аргументов, т.е.

$$U(x_1, x_2, \dots, x_p) = U(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}), \quad \sigma \in S_n$$

Рассмотрим множество полилинейных форм $\Sigma^p(\mathbb{K})$, обладающих таким свойством.

Лемма 4.2. Множество $\Sigma^p(\mathbb{K})$ является линейным подпространством Ω_0^p .

►

Пусть $U, V \in \Sigma^p(\mathbb{K})$. Очевидно, что

$$U + V \in \Sigma^p(\mathbb{K}), \quad \alpha U \in \Sigma^p(\mathbb{K})$$

Следовательно $\Sigma^p(\mathbb{K})$ замкнуто относительно линейных операций, индуцированных из $\Omega_0^p(\mathbb{K})$. ◀

Пусть в пространствах X и X^* задан базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ и форма U задается своими компонентами в этом базисе

$$U \leftrightarrow u_{i_1 i_2 \dots i_p}$$

Тогда можно утверждать, что тензор такой полилинейной формы симметричен по своим индексам

$$u_{i_1 i_2 \dots i_p} = u_{\sigma(i_1) \sigma(i_2) \dots \sigma(i_p)}$$

Иными словами, значение компоненты тензора не зависит от порядка индексов.

Также можно говорить об ином свойстве, которое схоже с симметричностью.

Полилинейная форма $U \in \Omega_0^p$ называется антисимметричной, если она меняет знак при любой транспозиции любых двух ее аргументов, т.е.

$$V(x_1, x_2, \dots, x_p) = (-1)^{N(\sigma)} V(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}), \quad \sigma \in S_n$$

Лемма 4.3. Множество всех антисимметричных полилинейных форм валентности $(p, 0)$ образует подпространство $\Lambda^p(\mathbb{K})$ пространства Ω_0^p .

►

Доказательство аналогично приведенному выше. ◀

Также как и в случае симметричности данное свойство, определенное на полилинейных формах, переносится на тензор данной полилинейной формы.

$$v_{i_1 i_2 \dots i_p} = (-1)^{N(\sigma)} v_{\sigma(i_1) \sigma(i_2) \dots \sigma(i_p)}, \quad \sigma \in S_n$$

В случае антисимметричных полилинейных форм можно сформулировать необходимое и достаточное условие.

Теорема 4.5. Полилинейная форма $V \in \Omega_0^p$ является антисимметричной тогда и только тогда, когда она обращается в ноль при совпадении любых двух ее аргументов.

$$V \in \Lambda^p(\mathbb{K}) \Leftrightarrow V(\dots, x_i, \dots, x_i, \dots) = 0$$

►

Пусть $V \in \Lambda^p(\mathbb{K})$ - антисимметричная полилинейная форма. Тогда при вычислении функции от двух равных аргументов получаем

$$\begin{aligned} V(\dots, x_i, \dots, x_i, \dots) &= -V(\dots, x_i, \dots, x_i, \dots) \\ V(\dots, x_i, \dots, x_i, \dots) &= 0 \end{aligned}$$

Пусть теперь $V(\dots, x_i, \dots, x_i, \dots) = 0$. Определим x_i как

$$x_i = x' + x''$$

В силу свойств линейности по каждому аргументу представим полилинейную форму в виде

$$\begin{aligned} V(\dots, x' + x'', \dots, x' + x'', \dots) &= \\ &= V(\dots, x', \dots, x', \dots) + V(\dots, x', \dots, x'', \dots) + \\ &+ V(\dots, x'', \dots, x', \dots) + V(\dots, x'', \dots, x'', \dots) = \\ &= V(\dots, x', \dots, x'', \dots) + V(\dots, x'', \dots, x', \dots) = 0 \end{aligned}$$

Откуда из последнего равенства делаем вывод, что перестановка двух аргументов приводит к изменению знака полилинейной формы. ◀

Из этой теоремы есть несколько примечательных следствий.

Лемма 4.4. *Значение антисимметричной полилинейной формы на линейно зависимом наборе векторов равна нулю.*

Лемма 4.5. *При количестве аргументов $p > n = \dim X$ пространство $\Lambda^p(\mathbb{K})$ содержит только нуль-форму.*

$$\Lambda^p(\mathbb{K}) = \{\Theta\}$$

►

Действительно, при $p > n$ произвольный набор векторов $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ всегда будет линейно зависимым и по предыдущей лемме полилинейная форма на таком наборе векторов будет принимать нулевое значение. ◀

4.9 Симметризация и альтернирование

Для дальнейших рассуждений важно отметить, что будут рассматриваться поля \mathbb{K} , содержащие поле рациональных чисел в качестве подполя.

Введем операцию, которая позволяет получить из любой полилинейной формы $U \in \Omega_0^p$ получить симметричную форму $V \in \Sigma^p(\mathbb{K})$.

Операцией симметризации называется отображение $V = \text{Sym } U$, действующее как

$$V(x_1, x_2, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} U(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

Покажем, что полученная таким способом полилинейная форма действительно будет симметричной.

Лемма 4.6. *Результатом операции симметризации является симметричная полилинейная форма.*



Пусть $\chi \in S_n$ - произвольная перестановка. Тогда

$$\begin{aligned} V(x_{\chi(1)}, x_{\chi(2)}, \dots, x_{\chi(p)}) &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} U(x_{\sigma \circ \chi(1)}, x_{\sigma \circ \chi(2)}, \dots, x_{\sigma \circ \chi(p)}) = \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\varphi} U(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \dots, x_{\varphi(p)}) = V(x_1, x_2, \dots, x_p) \end{aligned}$$



Nota bene Нормировочный множитель $1/p!$ необходим для того, чтобы

$$\text{Sym } U = U, \quad U \in \Sigma^p(\mathbb{K})$$

Иными словами, чтобы симметризация симметричной полилинейной формы не изменяла ее.

Аналогичным образом можно ввести операцию получения антисимметричной формы из произвольной.

Операцией альтернирования (асимметризации) называется отображение $W = \text{Asym } U$, действующее как

$$W(x_1, x_2, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{N(\sigma)} U(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

Можно также показать, что результат альтернирования всегда является антисимметричной формой.

Лемма 4.7. Результатом операции альтернирования является антисимметричная полилинейная форма.



Пусть $\chi \in S_n$ - произвольная перестановка. Тогда

$$\begin{aligned} W(x_{\chi(1)}, x_{\chi(2)}, \dots, x_{\chi(p)}) &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{N(\sigma)} U(x_{\sigma \circ \chi(1)}, x_{\sigma \circ \chi(2)}, \dots, x_{\sigma \circ \chi(p)}) = \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\varphi = \sigma \circ \chi} (-1)^{N(\varphi \circ \chi^{-1})} U(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \dots, x_{\varphi(p)}) = \\ &= (-1)^{N(\chi^{-1})} \frac{1}{p!} \sum_{\varphi} (-1)^{N(\varphi)} U(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \dots, x_{\varphi(p)}) = (-1)^{N(\chi^{-1})} W(x_1, x_2, \dots, x_p) \end{aligned}$$

Откуда, учитывая $N(\chi) = N(\chi^{-1})$ и получаем свойство антисимметричности. ◄

Отметим некоторые свойства введенных операций.

Свойства симметрирования и альтернирования

1. Линейность:

$$\begin{aligned}\text{Sym}(U + V) &= \text{Sym}U + \text{Sym}V \\ \text{Sym}(\alpha U) &= \alpha \text{Sym}U \\ \text{Asym}(U + V) &= \text{Asym}U + \text{Asym}V \\ \text{Asym}(\alpha U) &= \alpha \text{Asym}U\end{aligned}$$

2. Композиция:

$$\begin{aligned}\text{SymSym} &= \text{Sym} \\ \text{AsymAsym} &= \text{Asym} \\ \text{SymAsym} &\rightarrow 0 \\ \text{AsymSym} &\rightarrow 0\end{aligned}$$

Первое свойство указывает на то, что операции симметрирования и альтернирования являются линейными операторами на пространствах полилинейных форм:

$$\begin{aligned}\text{Sym} &\in \text{Hom}(\Omega_0^p, \Sigma^p) \\ \text{Asym} &\in \text{Hom}(\Omega_0^p, \Lambda^p)\end{aligned}$$

Однако еще более интересные свойства этих операций раскрываются при учетывании свойств композиции. Данные свойства отражают проективный характер линейных операторов, а следовательно можно говорить о том, что:

1. Операция симметрирования - это проектор на пространство симметричных полилинейных форм.
2. Операция альтернирования - это проектор на пространство антисимметричных полилинейных форм.

4.10 Внешнее произведение полилинейных форм (доп.материал)

Избежать проблемного места произведения антисимметричных полилинейных форм позволяет следующая операция, которая, вообще говоря, может быть введена для произвольных полилинейных форм, даже не обладающих свойством антисимметричности.

Внешним произведением полилинейных форм $U \in \Omega^p$ и $V \in \Omega^q$ называется отображение вида

$$U \wedge V = \frac{(p+r)!}{p!r!} \text{Asym}(U \cdot V)$$

В связи с тем, что внешнее произведение определяется через оператор альтернирования, без сомнений результатом будет являться антисимметричная полилинейная форма. Более того

$$U \wedge V \in \Lambda^{p+q}$$

При рассмотрении пространства антисимметричных полилинейных форм оказывалось, что не все такие подпространства являются нетривиальными.

Свойства внешнего произведения

1. Если $p + q > n = \dim X$, то

$$U \wedge V = \Theta$$

Действительно, не все подпространства антисимметричных форм являются нетривиальными, а только те, в которых количество аргументов не превосходит размерность пространства $n = \dim X$.

2. Умножение на скаляр

$$(\alpha U) \wedge V = \alpha U \wedge V = U \wedge (\alpha V)$$

3. Ассоциативность

$$U \wedge (V \wedge W) = (U \wedge V) \wedge W = U \wedge V \wedge W = \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!} \text{Asym}(U \cdot V \cdot W)$$

Покажем справедливость этого свойства

$$\begin{aligned} (U \wedge V) \wedge W &= \left(\frac{(p+q)!}{p!q!} \text{Asym}(U \cdot V) \right) \wedge W = \\ &= \frac{((p+q)+r)!}{(p+q)!r!} \text{Asym} \left(\frac{(p+q)!}{p!q!} \text{Asym}(U \cdot V) \cdot W \right) = \\ &= \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!} \text{Asym}(U \cdot V \cdot W), \end{aligned}$$

где воспользовались определением внешнего произведения и свойством альтернирования произведения.

4. Дистрибутивность

$$U \wedge (V + W) = U \wedge V + U \wedge W$$

также напрямую следует из свойств линейности альтернирования.

5. Антикоммутативность

$$U \wedge V = (-1)^{pq} V \wedge U$$

Действительно для каждого из q аргументов формы V необходимо совершить p попарных транспозиций, чтобы "передвинуть" на соответствующее место в начале. Однако каждая из полученных $p + \dots + p = p \cdot q$ транспозиций приведет к появлению множителя (-1) благодаря антисимметричности альтернирования, лежащего в основе внешнего произведения.

6. Нуль-форма

$$U \wedge \Theta = \Theta \wedge U = \Theta,$$

что также очевидно из свойств тензорного произведения.

Nota bene Перечисленные выше свойства позволяют определить на пространстве антисимметричных форм так называемую алгебру Грассмана.

4.11 Базис пространства антисимметричных форм (доп.материал)

Для рассмотрения еще одного свойства антисимметричных форм и внешнего произведения, которое вводится благодаря ему, введем базис на этом подпространстве.

Напомним общее определение базиса пространства полилинейных форм, снова уточнив его для подпространств вида Ω_0^p .

Базис пространства Ω_0^p образует набор полилинейных форм

$$s_1 s_2 \dots s_p W(x_1, x_2, \dots, x_p) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} \dots \xi_p^{s_p}$$

Построим из этого набора систему полилинейных форм вида

$$s_1 s_2 \dots s_p F = p! \text{Asym}(s_1 s_2 \dots s_p W)$$

Очевидно, что данные полилинейные формы F будут антисимметричны по своим базисным индексам. Благодаря этому справедливы свойства

1. При совпадении двух произвольных индексов форма F обращается в нуль-форму

$$\dots t \dots t \dots F = \Theta$$

2. Перестановка базисных индексов также приводит к появлению множителя, зависящего от четности перестановки

$$\sigma(s_1) \sigma(s_2) \dots \sigma(s_p) F = (-1)^{N(\sigma)} s_1 s_2 \dots s_p F$$

Теорема 4.6. Следующий набор образует базис в пространстве Λ^p

$$\{s_1 s_2 \dots s_p F : 1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_p \leq n\}$$

►

Не будем приводить полное доказательство данной теоремы, но аргументируем ее справедливость. Во-первых, как уже говорилось, количество индексов p не может превосходить размерность пространства n . Во-вторых, любое повторение базисных индексов приведет к тому, что данная полилинейная форма вырождается в нуль-форму. Откуда следует, что единственной возможностью выбора базисного набора является такая система полилинейных форм, что индексы будут всегда строго различны, и т.к. они обладают антисимметричностью есть возможность их упорядочить строго по возрастанию путем транспозиции индексов. Данную процедуру можно рассматривать как прореживание базиса пространства Ω_0^p до базиса пространства Λ^p . ◀

Nota bene Рассматривая количество всех возможных наборов p базисных индексов антисимметричных полилинейных форм в пространстве размерности $\dim X = n$, можно получить размерность пространства Λ^p

$$\dim \Lambda^p = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Из последнего замечания можно выделить несколько частных случаев:

1. $p = 0$: $\Lambda^0 = \mathbb{K}$, $\dim \Lambda^0 = 1$
2. $p = 0$: $\Lambda^1 = X^*$, $\dim \Lambda^0 = n$
- ... $p < n$: ...
- 4 $p = n$: Λ^n , $\dim \Lambda^n = 1$

Примечательно, что для антисимметричной полилинейной формы в пространстве $\dim X = n$ с n аргументами существует только один базисный элемент, оно является одномерным. Следовательно справедливо следующее утверждение

Лемма 4.8. Для любого $V \in \Lambda^n$ имеет место

$$V = \alpha^{1,2,\dots,n} F$$

►

$$\begin{aligned} {}^{1,2,\dots,n}F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= n! \text{Asym}({}^{1,2,\dots,n}W)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= n! \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} (-1)^{N(\sigma)} {}^{1,2,\dots,n}W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= \sum_{\sigma} (-1)^{N(\sigma)} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \dots \xi_n^{\sigma(n)}, \end{aligned}$$

что в точности совпадает с определителем матрицы, составленной из векторов $\{x_1, \dots, x_n\}$. Иными словами, значение формы $V \in \Lambda^n$ в силу одномерности этого подпространства определяется одним единственным числом, который совпадает с определителем матрицы системы векторов-аргументов. ◀

Благодаря определению внешнего произведения можно определить базис пространства Λ^p через него. Пусть $\{f^i\}_{i=1}^n$ - базис пространства X^* , тогда полилинейные формы

$${}^{i_1 i_2 \dots i_p} F = f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \dots \wedge f^{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$$

образуют базис пространства Λ^p .