Отображения в линейных пространствах

Данный раздел посвящен рассмотрению отображений в линейных пространствах. Ранее в курсе мы уже познакомились с примером таких отображений – линейные операторы (эндоморфизмы). В заключительном разделе мы увидим, что существует еще несколько типов отображений, обладающих свойствами линейности или схожими с ними. Конечной целью является выявление общего подхода к рассмотрению любых отображений такого рода.

Содержание

Литература:

- Винберг Э. Б. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2013.
- Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. М.: Физико-математическая литература, 2000.
- Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. М.: «Наука», 1984.
- Гайфуллин А. А., Пенской А. В., Смирнов С. В. Задачи по линейной алгебре и геометрии. М.: МЦНМО, 2014. (Содержит подробные решения)
- Ершов А.В. Лекции по линейной алгебре. Москва, 2022

Лекция III. Квадратичные формы

§1. Основные определения

Пусть V – линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Предположим также, что в этом линейном пространстве определена билинейная форма $b : V \times V \to \mathbb{K}$.

Определение 1.1. **Квадратичной формой** на линейном пространстве V называется отображение $q(v)$, построенное из билинейной формы $b(x, y)$ следующим образом:

$$q : V \to \mathbb{K}, \qquad q(v) = b(v, v), \qquad \forall x \in V$$

Замечание 1.1. Любая билинейная форма $b(x, y)$ задает квадратичную функцию $q(v)$, которая получается из нее ограничением области определения с $V \times V$ на диагональ $\{(v, v) : v \in V\} \subset V \times V$.

Лемма 1.1. *Квадратичная форма является однородным полиномом степени 2 от координат вектора.*

Доказательство. Справедливы следующие рассуждения:

$$q(\lambda v) = b(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 b(v, v) = \lambda^2 q(v)$$

Тем самым мы показали, что квадратичная форма является однородной функцией 2-го порядка. Зафиксируем теперь базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в пространстве V. Произвольный вектор можем разложить по этому базису единственным образом $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$. Тогда квадратичная функция в координатном представлении имеет вид

$$q(v) = q\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i\right) = b\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i, \sum_{j=1}^n v^j e_j\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i v^j b(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i v^j \beta_{ij},$$

где β_{ij} – коэффициенты билинейной формы, по которой построена квадратичная форма $q(v)$. ЧТД.

Лемма 1.2. *По квадратичной форме $q(v)$ однозначно восстанавливается симметричная компонента билинейной формы $b(x, y)$.*

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму от суммы векторов $x, y \in V$:

$$q(x+y) = b(x+y, x+y) = b(x, x)+b(x, y)+b(y, x)+b(y, y) = q(x)+b(x, y)+b(y, x)+q(y)$$

Откуда
$$b(x,y)+b(y,x)=q(x+y)-q(x)-q(y)$$

Если билинейную форму полагать симметричной, т.е. $b \in \mathrm{Bil}^S(V)$, то имеем

$$b(x,y)=\frac{1}{2}\left(q(x+y)-q(x)-q(y)\right)$$

Замечание 1.2. Предыдущей леммой определяется взаимно однозначное соответствие между множеством квадратичных форм и множеством симметричных билинейных форм.

Замечание 1.3. Антисимметричной билинейной форме соответствует только нулевая квадратичная форма.

Замечание 1.4. Полагая, что билинейная форма описывается матрицей с коэффициентами β_{ij}, квадратичную форму можно также представить в виде:

$$q(v)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}v^iv^j=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ii}(v^i)^2+2\sum_{i<j}\beta_{ij}v^iv^j,$$

где v^i – i-я координата вектора v в выбранном базисе.

§2. Нормальный вид квадратичной формы

Рассмотрим симметричную билинейную форму $b \in \mathrm{Bil}^S(V)$.

Определение 2.1. Векторы $u, v \in V$ называются ортогональными относительно билинейной формы b (b-ортогональными), если $b(u,v)=0$.

Это определение в некотором смысле обобщает определение ортогональности относительно скалярного произведения.

Замечание 2.1. В силу симметричности билинейной формы можно утверждать, что
$$u \perp v \quad \Leftrightarrow \quad v \perp u$$

Определение 2.2. Базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в V называется ортогональным относительно b, если его векторы попарно ортогональны, т.е. $b(e_i,e_j)=0$ при $i \neq j$.

Замечание 2.2. Симметричная билинейная форма и квадратичная форма ей соответствующая в базисе b-ортогональных векторов имеют диагональный вид:

$$b(u,v)=\beta_1u^1v^1+\ldots\beta_nu^nv^n, \qquad q(v)=\beta_1(v^1)^2+\ldots+\beta_n(v^n)^2$$

Теорема 2.1. *Для каждой симметричной билинейной (и квадратичной) формы существует b-ортогональный базис.*

Доказательство. Докажем индукцией по $n = \dim V$. При $n = 1$ теорема очевидна. Пусть $n > 1$ и билинейная (квадратичная) форма не является нулевым отображением (здесь снова теорема становится очевидной). Выберем вектор $e_1 \in U_1$ такой, что $b(e_1, e_1) = q(e_1) \neq 0$. Рассмотрим множество векторов $U_1^\perp$, которые являются b-ортогональными вектору e_1. Очевидно, что оно является линейным подпространством. Более того можно утверждать, что

$$V = U_1 \oplus U_1^\perp, \qquad \dim U_1^\perp = n - 1$$

Мы уже показывали справедливость подобного утверждения для ортогональных друг другу подпространств в евклидовом пространстве. К такому подпространству мы вновь можем применить предположение индукции, рассматривая сужение симметричной билинейной (квадратичной) формы на это подпространство. В силу того, что вектор e_1 будет b-ортогональным любому вектору из базиса $\{e_2, \ldots, e_n\}$ подпространства $U_1^\perp$, где все векторы также могут быть выбрано как попарно ортогональные, получаем базис пространства V, составленный из ортогонального относительно b набора векторов. ■

Предположим теперь, что найден ортогональный базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид.

$$q(v) = a_1(v^1)^2 + \ldots + a_n(v^n)^2, \qquad a_i = q(e_i)$$

Лемма 2.1. *В поле $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ любая квадратичная форма может быть приведена к виду*

$$q(v) = (\widetilde{v}^1)^2 + \ldots + (\widetilde{v}^r)^2,$$

где r – количество ненулевых a_i.

Доказательство. Сделаем преобразование вида

$$e_i \mapsto \widetilde{e}_i = \lambda e_i, \quad \lambda \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \widetilde{a}_i = \lambda_i^2 a_i$$

В поле $\mathbb{C}$ можно всегда выбрать такие числа λ_i, что $\widetilde{a}_i = 1$. ■

Замечание 2.3. В поле $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ квадраты ненулевых чисел λ_i всегда являются положительными, поэтому указанным преобразованием базиса мы можем найти такие λ_i для всех $a_i \neq 0$, что $|\widetilde{a}_i| = 1$, но при этом знак сохранится. Следовательно в $\mathbb{R}$ квадратичная форма может быть приведена только к виду

$$q(v) = \sum_{i=1}^{r_+} (\widetilde{v}^i)^2 - \sum_{j=r_+ +1}^{r_-} (\widetilde{v}^j)^2$$

Определение 2.3. Указанные виды квадратичной формы в $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ называются **нормальным видом** квадратичной формы, а числа r_+ и r_- – **положительным и отрицательными индексами инерции** вещественной квадратичной функции. Набор этих чисел (r_+, r_-) также называют **сигнатурой** квадратичной формы.

Сигнатура квадратичной формы является ее инвариантом (не зависит от базиса). Чтобы это показать, введем еще несколько определений.

Определение 2.4. Квадратичная форма называется **положительно определенной**, если $q(v) > 0$ для любого $v \in V, v \neq 0$. Аналогичным образом вводится **отрицательно определенная** форма.

Определение 2.5. Квадратичная форма называется **положительно полуопределенной**, если $q(v) \geqslant 0$ для любого $v \in V, v \neq 0$. Аналогичным образом вводится **отрицательно полуопределенная** форма.

Замечание 2.4. Могут также рассматриваться неопределенные квадратичные формы. т.е. такие квадратичные формы, для которых не выполняется ни одно из условий в рассмотренных определениях.

Сформулируем утверждение.

Лемма 2.2. *Положительный индекс инерции r_+ квадратичной формы равен максимальной размерности подпространства, на котором $q(v)$ является положительно определенной.*

Доказательство. Квадратичная форма в нормальном виде для $\mathbb{R}$ положительно определена для линейной оболочки векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_{r_+}\}$. Пусть U – произвольное подпространство в V, на котором q положительно определена, т.е. $\forall u \in U$ справедливо $q(u) > 0$. Подпространство W определим как линейную оболочку:

$$W = \langle e_{r_+ + 1}, \ldots, e_n \rangle, \qquad \Rightarrow \qquad \forall w \in W, \quad q(w) \leqslant 0$$

Очевидно, что $U \cap W = 0$, а следовательно для размерностей имеем

$$\dim(U + W) = \dim U + (n - r_+) \leqslant \dim V = n$$

Откуда мы получаем, что $\dim U \leqslant r_+$, что и требовалось доказать.

Замечание 2.5. Вследствие того, что индекс инерции определяется размерностью подпространства, он не может зависеть от выбора базиса. Аналогичные рассуждения справедливы и для отрицательного индекса инерции.

Сформулируем критерий положительной определенности квадратичной формы.

Теорема 2.2. *(Критерий Сильвестра) Вещественная квадратичная форма q, имеющая матрицу A_q в некотором базисе, положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы A_q положительны.*

Доказательство. Необходимость.

Если квадратичная форма положительно определена, то определитель ее матрицы в произвольном базисе также положительный. В базисе q-ортогональных векторов матрица представляет собой единичную матрицу, определитель которой равен 1. Рассмотрим преобразование матрицы квадратичной формы при смене базиса с матрицей перехода C

$$A'_q = C^T A_q C \qquad \Rightarrow \qquad \det A'_q = \det(C^T A_q C) = \det(C^T C) > 0$$

Произвольный минор, полученный на пересечении строк и столбцов с индексами $1 \leqslant i_1 < i_2 \dots i_k \leqslant n$ представляет собой матрицу сужения квадратичной формы на подпространство, образованное линейной оболочкой базисных векторов соответствующих этим строкам (столбцам). Квадратичная положительно определенная форма является таковой на любом своем подпространстве. Следовательно произвольный минор является положительным, а значит и угловые миноры тоже.

Достаточность.

Покажем индукцией по $n = \dim V$. При $n = 1$ теорема очевидна. Предположим, что результат теоремы справедлив на пространствах размерности не превосходящей $n-1$. Пусть A_q – вещественная симметричная матрица порядка n, у которой все угловые миноры положительны. По предположению индукции сужение на подпространство размерности $n-1$ является положительно определенным, а значит положительный индекс инерции $r_+ \geqslant n-1$. Следовательно в отсутствие $a_i = 0$ мы имеем $r_+ + r_- = n$, а значит r_- может быть либо 0, либо 1. В последнем случае нормальный вид квадратичной формы:

$$q(v) = \sum_{i=1}^{r+} (v^i)^2 - (v^n)^2$$

Но определитель матрицы такой квадратичной формы отрицателен. Следовательно единственная возможность для индексов инерции $r_+ = n$ и $r_- = 0$, что и говорит о положительной определенности квадратичной формы.

§3. Билинейные и квадратичные формы в евклидовом пространстве

Пусть E_V – евклидово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Определим также в этом пространстве линейный оператор $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Определим при помощи него билинейную функцию b_φ

$$b_\varphi(u, v) = \langle u, \varphi(v) \rangle, \qquad \forall u, v \in V$$

Замечание 3.1. Обратим внимание, что линейные пространства эндоморфизмов и билинейных форм имеют одинаковую размерность $\dim \mathrm{End}(V) = \dim \mathrm{Bil}(V) = n^2$. Сопоставление между билинейными формами и операторами определяет изоморфизм этих линейных пространств.

Замечание 3.2. Данный изоморфизм не зависит от базиса (канонический изоморфизм), а только лишь от выбора скалярного произведения. Следовательно относительно него существует единственный однозначно определяемый оператор, позволяющий получить данную билинейную форму.

Несложно проверить, что симметричной билинейной форме будет соответствовать самосопряженный оператор. Следовательно и квадратичной форме будет соответствовать самосопряженный оператор. Оператор, определяемый таким образом, называют присоединенным оператором к билинейной (квадратичной) форме.

Лемма 3.1. *Матрицы Грама G скалярного произведения, квадратичной формы A_q и присоединенного к нему оператора A_φ связаны соотношением*

$$A_q = GA_\varphi$$

Доказательство. Зафиксируем базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в V. Для любых векторов, представленных их координатными столбцами u и v, можно найти значение квадратичной формы при помощи ее матрицы с одной стороны, а с другой стороны можно воспользоваться способом вычисления скалярного произведения через матрицу Грама:

$$x^T A_q y = x^T G A_\varphi y \qquad \Rightarrow \qquad A_q = GA_\varphi$$

Замечание 3.3. В силу построенного изоморфизма между квадратичными формами и самосопряженными операторами для диагонализации квадратичной формы достаточно найти ортонормированный базис из собственных векторов (он всегда существует для самосопряженного оператора). При этом матрица Грама будет единичной матрицей $G = E$, а матрица самосопряженного оператора примет вид диагональной матрицы $A_\varphi = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.