

Матрицы. Операции над матрицами

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдите: 1) $A+B$; 2) $3C+D$; 3) AB ; 4) BA ; 5) CD ; 6) DC ; 7) $\bar{C}B$; 8) BC ; 9) A^2+3A-7 ; 10) C^t ; 11) B^t

Перестановки и подстановки

2. Определить число инверсий в перестановках:

1) (1 3 4 7 8 2 6 9 5) 2) (2 1 7 9 8 6 3 5 4) 3) (9 8 7 6 5 4 3 2 1) 4) (n n-1 ... 2 1)

3. В следующих перестановках перейти от записи в циклах к записи двумя строками:

1) (1 5)(2 3 4) 2) (1 3)(2 5)(4) 3) (1 2 3 4 ... 2n-1 2n)

4. Перемножить подстановки:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^2$$

5. С каким знаком в определитель 6-го порядка входят произведения:

1) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 2) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$

6. Входят ли в определитель 5-го порядка произведения: 1) $a_{13}a_{24}a_{23}a_{41}a_{55}$ 2) $a_{21}a_{13}a_{34}a_{55}a_{42}$

7. Выписать все слагаемые, входящие в состав определителя 4-го порядка со знаком минус и содержащие множитель a_{23}

8. С каким знаком в определитель n-го порядка входит произведение элементов главной диагонали? побочной диагонали?

Вычисление определителей

9. Вычислите определитель второго порядка:

$$\begin{aligned} & \text{a)} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{f)} \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}; \quad \text{g)} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}; \\ & \text{h)} \begin{vmatrix} tg \alpha & -1 \\ 1 & tg \alpha \end{vmatrix}; \quad \text{н)} \begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}; \quad \text{j)} \begin{vmatrix} 1 & \log_5 a \\ \log_5 b & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{l)} \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}; \quad \text{m)} \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

10. Вычислите определитель третьего порядка:

$$\begin{aligned} & \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & -7 & -5 \\ 3 & -2 & 8 \end{vmatrix}; \quad \text{d)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{e)} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}; \quad \text{f)} \begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}; \quad \text{g)} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}; \\ & \text{h)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \quad \text{i)} \begin{vmatrix} b & a & c \\ a & c & b \\ c & b & a \end{vmatrix}; \quad \text{j)} \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{l)} \begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}; \quad \text{m)} \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 1 \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & 1 \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{n)} \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & \cos 2\beta \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} \end{aligned}$$

11. Вычислите определитель:

$$\begin{aligned} & \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{d)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}; \quad \text{e)} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 6 & -13 & 15 & 18 \\ 3 & -6 & 9 & 21 \end{vmatrix}; \\ & \text{f)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}; \quad \text{g)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{h)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{i)} \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Свойства определителей. Разложение определителя по строке (столбцу)

1. Используя свойства определителей, вычислите

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} & \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 8 \\ 13 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 17 & 0 & 24 \\ 7 & -4 & 0 & -3 \end{vmatrix} & \text{в)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 5 & -3 & 5 \end{vmatrix} & \text{г)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 7 \\ 4 & -4 & 15 \end{vmatrix} \\ \text{д)} \begin{vmatrix} 1 & 17 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & -8 & 12 \\ 2 & 34 & 4 & 10 \\ 71 & 8 & 3 & -1 \end{vmatrix} & \text{е)} \begin{vmatrix} 121 & 283 \\ 221 & 183 \end{vmatrix} & \text{ж)} \begin{vmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 0 & 6 & 9 \\ 1 & 7 & 10 \end{vmatrix} \end{array}$$

2. Вычислите определитель:

- 1) приведением к треугольному виду;
- 2) разложением по строке;
- 3) разложением по столбцу;
- 4) разложением по строке (столбцу) с предварительным обнулением элементов этой строки (столбца).

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \text{б)} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} \end{array}$$

Обратная матрица

3. Являются ли взаимно обратными матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

4. Выясните, при каких значениях λ существует матрица, обратная данной.

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ \lambda - 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

5. Вычислите матрицы, обратные данным, если они существуют.

$$\text{а)} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{в)} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 15 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Вычислите матрицу, обратную данной, используя 1) формулу; 2) элементарные преобразования строк.

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Решите матричное уравнение.

$$\begin{array}{ll} \text{а)} X \begin{pmatrix} 10 & 26 \\ -10 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} & \text{б)} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \\ \text{в)} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \\ \text{г)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 2 \\ 5 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$