Практическое занятие 3. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов
Теоретические сведения

1. Скалярное произведение векторов

Определение. *Скалярным произведением* векторов $\vec a$ и $\vec b$ называется число, которое находится по формуле

$$\vec a \cdot \vec b = |\vec a||\vec b|\cos\left(\widehat{\vec a, \vec b}\right).$$

Обозначение: $\vec a \cdot \vec b, (\vec a, \vec b), (\vec a, \vec b), \vec a\vec b$

Из определения скалярного произведения следует:

1. $\vec a\vec b = 0 \Leftrightarrow \vec a \perp \vec b$.
2. $\vec a^2 = |\vec a|^2$ (скалярный квадрат вектора $\vec a$) $\Rightarrow |\vec a| = \sqrt{\vec a^2}$.

Если относительно ортонормированного базиса $\vec a = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec b = (b_1, b_2, b_3)$, то

$\vec a\vec b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Свойства скалярного произведения векторов

$(\forall \alpha \in R)(\forall \vec a, \vec b, \vec c)$

1. $\vec a\vec b = \vec b\vec a$

коммутативность скалярного умножения.

2. $(\alpha\vec a)\vec b = \alpha(\vec a\vec b) = \vec a(\alpha\vec b)$

ассоциативность скалярного умножения относительно скалярного множителя.

3. $(\vec a + \vec b)\vec c = \vec a\vec c + \vec b\vec c$

дистрибутивность скалярного умножения относительно сложения векторов.

Следствие.

$$\cos\left(\widehat{\vec a, \vec b}\right) = \frac{\vec a\vec b}{|\vec a||\vec b|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

2. Векторное произведение векторов

Пусть в пространстве задана положительно ориентированная ПДСК $O\vec i\vec j\vec k$ ($\vec i$, $\vec j$, $\vec k$ образуют правый базис).

Определение. *Векторным произведением* вектора $\vec a$ на вектор $\vec b$ называется вектор $\vec c$ такой, что:

1) $|\vec c| = |\vec a| \cdot |\vec b| \sin(\vec a \hat{} \vec b)$, $0 \le (\vec a \wedge \vec b) \le \pi$;

2) $\vec c \perp \vec a, \vec c \perp \vec b$;

3) ($\vec a, \vec b, \vec c$) – правый базис.

Обозначение: $[\vec a, \vec b], [\vec a \cdot \vec b], \vec a \times \vec b$.

Утверждение. $[\vec a, \vec b] = \vec 0 \Leftrightarrow \vec a \parallel \vec b$.

Если относительно ортонормированного базиса $\vec a = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec b = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec c = [\vec a, \vec b]$, то

$$\vec c = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

Свойства векторного произведения

1. $(\forall \vec a, \vec b)$ $[\vec a, \vec b] = -[\vec b, \vec a]$ *антикоммутативность.*

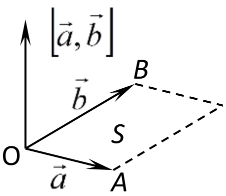
2. $(\forall \vec a, \vec b)(\forall \alpha \in R)$ $[\alpha\vec a, \vec b] = [\vec a, \alpha\vec b] = \alpha[\vec a, \vec b]$

ассоциативность относительно скалярного множителя.

3. $(\forall \vec a, \vec b, \vec c)$ $[\vec a, \vec b + \vec c] = [\vec a, \vec b] + [\vec a, \vec c]$

дистрибутивность векторного произведения относительно сложения векторов.

4. *Геометрический смысл векторного произведения векторов.* Модуль векторного произведения векторов $\vec a$ и $\vec b$ ($\vec a \nparallel \vec b$) равен площади параллелограмма, построенного на их представителях, отложенных от одной точки.



4′. $S_{OAB} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right]\right|$.

3. Смешанное произведение векторов

Пусть в пространстве задана положительно ориентированная ПДСК $O\vec i\vec j\vec k$.

Определение. *Смешанным произведением* векторов $\vec a, \vec b$ и $\vec c$ называется скалярное произведение вектора $\vec a$ на векторное произведение векторов $\vec b$ и $\vec c$.

$$\boxed{(\vec a, \vec b, \vec c) \overset{def}{=} (\vec a[\vec b, \vec c])}.$$

Если относительно ортонормированного базиса в пространстве

$\vec a(a_1, a_2, a_3), \vec b(b_1, b_2, b_3), \vec c(c_1, c_2, c_3)$,

тогда $(\vec a, \vec b, \vec c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

Свойства смешанного произведения векторов

1. Векторы $\vec a, \vec b, \vec c$ компланарны $\Leftrightarrow (\vec a, \vec b, \vec c) = 0$.

2. $(\vec a, \vec b, \vec c) > 0 \Leftrightarrow \vec a, \vec b, \vec c$ и $\vec i, \vec j, \vec k$ ориентированы одинаково;

$(\vec a, \vec b, \vec c) < 0 \Leftrightarrow \vec a, \vec b, \vec c$ и $\vec i, \vec j, \vec k$ ориентированы противоположно.

3. $(\vec a, \vec b, \vec c) = -(\vec b, \vec a, \vec c) = -(\vec a, \vec c, \vec b) = -(\vec c, \vec b, \vec a)$

При перестановке двух сомножителей смешанное произведение меняет знак.

$(\vec a, \vec b, \vec c) = (\vec b, \vec c, \vec a) = (\vec c, \vec a, \vec b)$

Циклическая перестановка сомножителей не меняет смешанное произведение.

4. $(\alpha\vec a, \vec b, \vec c) = (\vec a, \alpha\vec b, \vec c) = (\vec a, \vec b, \alpha\vec c) = \alpha(\vec a, \vec b, \vec c)$

ассоциативность смешанного произведения относительно скалярного множителя.

5. $((\vec a + \vec a'), \vec b, \vec c) = (\vec a, \vec b, \vec c) + (\vec a', \vec b, \vec c)$

дистрибутивность смешанного произведения относительно сложения.

6. *Геометрический смысл смешанного произведения векторов.*

Если векторы $\vec a$, $\vec b$ и $\vec c$ некомпланарны, то модуль их смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на их представителях, отложенных от одной точки.

6′. Объем тетраэдра $V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}\right)\right|$.

Задачи

1. Даны точки $A(4,-3,2)$, $B(10,-6,-4)$, $C(5,-1,8)$. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. \\arccos $\left(-\frac{4}{21}\right)$\\
2. Даны векторы $\vec{a}=\lambda\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-3\vec{k}$ и $\vec{b}=(5+\lambda)\vec{\imath}+\vec{\jmath}+4\vec{k}$. При каком значении параметра λ векторы $\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярны? \\$-\frac{27}{5}$\\
3. Даны точки $A(6,2,-1)$, $B(3,-1,0)$, $C(4,2,-2)$. Найти пр$_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. \\$-\sqrt{14}$\\
4. Найти орт, перпендикулярный векторам $\vec{a}=(1,3,-1)$ и $\vec{b}=(2,0,1)$. \\$\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{\imath}-\vec{\jmath}-2\vec{k})$\\
5. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(4,-4,-2)$, $B(5,-6,1)$, $C(8,-9,4)$. Найти высоту треугольника, проведенную из вершины B. \\$\frac{3\sqrt{6}}{2}$\\
6. Даны точки $A(2,3,-1)$, $B(0,-4,2)$, $C(-3,1,2)$, $D(0,6,-3)$. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$. Определить ориентацию тройки векторов $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$. \\159\\
7. (А-1025) Пусть $\vec{a},\vec{b},\vec{c}-$ произвольные векторы, α,β,γ – произвольные числа. Доказать, что векторы $\alpha\vec{a}-\beta\vec{b},\ \gamma\vec{b}-\alpha\vec{c},\ \beta\vec{c}-\gamma\vec{a}$ компланарны.
8. (А-1026а,б) Пусть $\vec{a},\vec{b}-$ произвольные векторы.
   Доказать тождества: а) $\left[\vec{a}\vec{b}\right]^2+\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$ б) $\left[\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right]=2\left[\vec{a}\vec{b}\right]$.
9. (А-1035) Дан тетраэдр, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}(2,0,0),\overrightarrow{AC}(3,4,0),\overrightarrow{AD}(3,4,2)$. Найти а) объем тетраэдра; б) площади граней; в) длину высоты, проведенной из вершины D; г) угол между ребрами AB и BC; д) угол между гранями ABC и ADC.
   //а) $\frac{8}{3}$, б) 4, 5, $2\sqrt{5}$, $\sqrt{33}$, в) 2, г) $\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}$, д) $\frac{\pi}{2}$//