Группа P3208

Студент Петров Вячеслав Маркович

Преподаватель Сорокина Е. К.

К работе допущен

Работа выполнена

Отчет принят

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №1.01

Исследование распределения случайной величины

1. Цель работы.

Исследование распределения случайной величины на примере многократных измерений определённого промежутка времени.

2. Задачи, решаемые при выполнении работы.

1. Провести многократные измерения определенного промежутка времени.
2. Построить гистограмму распределения результатов измерения.
3. Вычислить среднее значение и дисперсию полученной выборки.
4. Сравнить гистограмму с графиком функции Гаусса с такими же, как и у экспериментального распределения средним значением и дисперсией.

3. Объект исследования.

Случайная величина – результат измерения промежутков времени между входящими/выходящими в/из коворкинг людьми.

4. Метод экспериментального исследования.

Многократное прямое измерение промежутков времени и проверка закономерностей распределения исследуемой случайной величины.

5. Рабочие формулы и исходные данные.

- Среднее арифметическое всех результатов измерений

$$\langle t\rangle_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i$$

- Дисперсия

$$D(t) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(t_i - \langle t\rangle_N)^2$$

- Выборочное среднеквадратичное отклонение

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(t_i - \langle t\rangle_N)^2}$$

- Максимальное значение плотности распределения

$$\rho_{max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

- Среднеквадратичное отклонение среднего значения

$$\sigma_{\langle t\rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(t_i - \langle t\rangle_N)^2}$$

- Нормальное распределение, описываемое функцией Гаусса

$$\rho(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(t - \langle t\rangle)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Доверительный интервал

$$\Delta_{\langle t \rangle} = t_{\alpha,N} \cdot \sigma_{\langle t \rangle}$$

6. Измерительные приборы.

№ п/п	*Наименование*	*Тип прибора*	*Используемый диапазон*	*Погрешность прибора*
1	*секундомер*	*цифровой*	*0 - 45 с*	*0,1 с*

7. Схема установки (*перечень схем, которые составляют Приложение 1*).

Наблюдение за входящими и выходящими людьми в коворкинг ИТМО (Ломоносова, 9). Отмечается время между последними двумя людьми, проходящими через вход. Таким образом, проведено 50 измерений. Если два человека заходят вместе время регистрируется только 1 раз (разница <5 секунд).

8. Результаты прямых измерений и их обработки (*таблицы, примеры расчетов*).

Таблица 1 Результаты прямых измерений.

№	$t_i, \text{с}$	$t_i - \langle t \rangle_N, \text{с}$	$(t_i - \langle t \rangle_N)^2, \text{с}^2$
1	26,6	0,71	0,50
2	21,3	-4,59	21,09
3	18,2	-7,69	59,17
4	23,9	-1,99	3,97
5	40,3	14,41	207,59
6	30,4	4,51	20,32
7	15,6	-10,29	105,93
8	21,7	-4,19	17,57
9	32,6	6,71	45,00
10	33,1	7,21	51,96
11	42,0	16,11	259,47
12	18,9	-6,99	48,89
13	19,1	-6,79	46,13
14	25,3	-0,59	0,35
15	27,8	1,91	3,64
16	24,6	-1,29	1,67
17	33,2	7,31	53,41
18	37,4	11,51	132,43
19	23,7	-2,19	4,80
20	24,6	-1,29	1,67

21	41,8	15,91	253,06
22	10,3	-15,59	243,11
23	9,1	-16,79	281,97
24	34,1	8,21	67,37
25	21	-4,89	23,93
26	37,8	11,91	141,80
27	24,3	-1,59	2,53
28	22,8	-3,09	9,56
29	26,6	0,71	0,50
30	34,7	8,81	77,58
31	15,9	-9,99	99,84
32	11,9	-13,99	195,78
33	21,3	-4,59	21,09
34	15,7	-10,19	103,88
35	31,7	5,81	33,73
36	36,6	10,71	114,66
37	26,6	0,71	0,50
38	25,7	-0,19	0,04
39	35,4	9,51	90,40
40	29,6	3,71	13,75
41	39,4	13,51	182,47
42	14,8	-11,09	123,03
43	23,8	-2,09	4,38
44	30,6	4,71	22,17
45	34,6	8,71	75,83
46	12,5	-13,39	179,35
47	20,6	-5,29	28,01
48	14,8	-11,09	123,03
49	12,8	-13,09	171,40
50	37,5	11,61	134,75
	$\langle t\rangle_N = 25{,}89$ с	$\sum_{i=1}^{N}(t_i - \langle t\rangle_N) = 0\ c$	$\sigma_N = 8{,}93$ с $\rho_{max} = 0{,}045$ с^{-1}

9. Расчет результатов косвенных измерений (*таблицы, примеры расчетов*).

Заполним подвал таблицы 1

Для начала вычислим среднее арифметическое всех измерений:

$$\langle t\rangle_N = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} t_i \approx 25{,}89 \text{ с}$$

Теперь используя $\langle t\rangle_N$ вычислим дисперсию и выборочное среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{50-1}\sum_{i=1}^{50}(t_i - 25{,}89)^2} \approx 8{,}93 \text{ с}$$

$$D(t) = \frac{1}{50-1}\sum_{i=1}^{50}(t_i - 25{,}89)^2 \approx 79{,}69 \text{ с}^2$$

Используя значение σ_N вычислим максимальное значение плотности распределения:

$$\rho_{max} = \frac{1}{8{,}93\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}045\ c^{-1}$$

Теперь заполним таблицу 2

Найдём в первом столбце таблицы 1 максимальное t_{max} и минимальное t_{min} значения результатов измерений:

$$t_{max} = 42{,}0 \text{ с} \quad d_{min} = 9{,}1 \text{ с}$$

Разобьём промежуток $[t_{min}, t_{max}]$ на m равных интервалов Δt. Так как $\sqrt{N} = \sqrt{50} \approx 7$ примем $m = 7$ откуда получаем:

$$\Delta t = \frac{t_{max} - t_{min}}{m} = \frac{42{,}0 - 9{,}1}{7} \approx 4{,}7 \text{ с}$$

Выделим границы интервалов, используя Δt и занесём в первый столбец таблицы 2

В общем случае:

$$t_{\text{низ}_i} = t_{\text{низ}_{i-1}}$$

$$t_{\text{верх}_i} = t_{\text{низ}_i} + \Delta d$$

Для примера рассчитаем первый интервал:

$$t_{\text{низ}} = t_{\text{мин}} = 9{,}1 \text{ с}$$

$$t_{\text{верх}} = t_{\text{низ}} + \Delta t = 9{,}1 + 4{,}7 = 13{,}8 \text{ с}$$

Вычислим ΔN – количество результатов измерений, попавших в каждый из интервалов, и занесём эти значение во второй столбец таблицы 2

Для примера в первый интервал $[9{,}1;\ 13{,}8]$ попадает 5 значений результатов измерений.

Для каждого из интервалов вычислим опытное значение плотности вероятности и заполним третий столбец таблицы 2:

Для первого интервала получим:

$$\frac{\Delta N}{N\Delta t} = \frac{5}{50 \cdot 4{,}7} = 0{,}021\ \text{с}^{-1}$$

Теперь для каждого интервалов вычислим значение t, соответствующее середине данного интервала и заполним четвертый столбец таблицы 2. Вычислять t будем как среднее арифметическое верхней и нижней границы интервала

Для первого интервала получим:

$$\mathrm{t} = \frac{9{,}1 + 13{,}8}{2} = 11{,}45\ \text{с}$$

Наконец для каждого интервала вычислим значение $\rho(t)$ нормального распределения функции Гаусса и заполним последний столбец таблицы 2.

Для первого интервала получим

$$\rho(t) = \frac{1}{8{,}93 \cdot \sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(11{,}45\ -\ 25{,}89\ )^2}{2 \cdot 8{,}93^2}\right) = 0{,}012\ \text{с}^{-1}$$

Таблица 2 Данные для построения гистограммы

Границы интервалов, с	ΔN	$\frac{\Delta N}{N\Delta t}$, с$^{-1}$	t, с	ρ, с$^{-1}$
9,10 13,80	5	0,021	11,45	0,012
13,80 18,50	6	0,026	16,15	0,025
18,50 23,20	8	0,034	20,85	0,038
23,20 27,90	12	0,051	25,55	0,045
27,90 32,60	5	0,021	30,25	0,040
32,60 37,30	8	0,034	34,95	0,027
37,30 42,00	6	0,026	39,65	0,014

Заполним таблицу 3

Вычислим границы стандартных интервалов

Для первого интервала получим:

От: $\langle t \rangle_N -\ \sigma = 25{,}89\ - 8{,}93 = 16{,}96$ с

До: $\langle t \rangle_N + \sigma = 25{,}89 + 8{,}93 = 34{,}82$ с

Теперь определим количество результатов измерений, попавших в каждый из интервалов, и вычислим вероятность попадания в каждый из интервалов.

Например, для первого интервала получим $\Delta N = 31$. Получаем:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{31}{50} \approx 0{,}620$$

Таблица 3 Стандартные доверительные интервалы

	Интервал, с		ΔN	$\frac{\Delta N}{N}$	P
	от	до			
$\langle t \rangle N \pm \sigma_N$	16,96	34,82	31	0,62	0,683
$\langle t \rangle N \pm 2\sigma_N$	8,04	43,75	50	1,00	0,954
$\langle t \rangle N \pm 3\sigma_N$	-0,89	52,67	50	1,00	0,997

10. Расчет погрешностей измерений (*для прямых и косвенных измерений*).

Рассчитаем среднеквадратичное отклонение среднего значения:

$$\sigma_{\langle t \rangle} = \sqrt{\frac{1}{50(50-1)}\sum_{i=1}^{50}(t_i - 25{,}89)^2} = 1{,}26\ c$$

Табличное значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha,N}$ для доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$:

$$t_{\alpha,N} = 2{,}01$$

Рассчитаем доверительный интервал:

$$\Delta_{\langle t \rangle} = t_{\alpha,N} \cdot \sigma_{\langle t \rangle} = 2{,}01 \cdot 1{,}26 = 2{,}54\ \text{с}$$

Определим абсолютную погрешность измерения с учетом доверительного интервала $\Delta_{\langle t \rangle}$ и инструментальной погрешности $\Delta_{ит} = 0{,}1$ с:

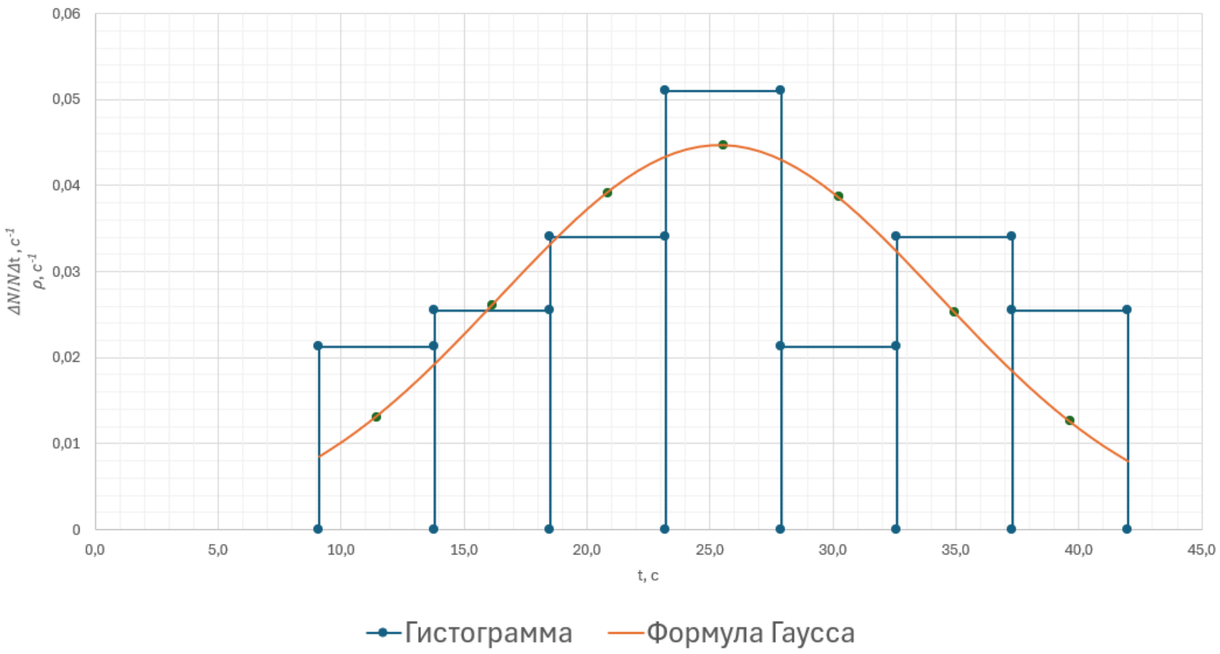
$$\Delta_t = \sqrt{{\Delta_{\langle t \rangle}}^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \Delta_{ит}\right)^2} = \sqrt{2{,}54^{\,2} + \left(\frac{2}{3} \cdot 0{,}1\right)^2} \approx 2{,}54\ \text{с}$$

Вычислим относительную погрешность измерения:

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta_t}{\langle t \rangle_N} \cdot 100\% = \frac{2{,}54}{25{,}89} \cdot 100\% \approx 9{,}8\%$$

11. Графики (*перечень графиков, которые составляют Приложение 2*).

График 1 Гистограмма и функция плотности распределения



12. Окончательные результаты.

Среднее арифметическое всех результатов измерений с учетом погрешности:

$$t = (25{,}89 \pm 2{,}54)\ c; \quad \varepsilon_t = 9{,}8\% \quad \alpha = 0{,}95$$

13. Выводы и анализ результатов работы.

В ходе работы было исследовано распределение случайной величины на примере многократных замеров временного отрезка, получена выборка из 50 измерений. После были вычислены среднее значение, среднеквадратичное отклонение и дисперсия полученной выборки. Результаты прямых измерений, данные для построения гистограммы, стандартные доверительные интервалы были занесены в соответствующие таблицы. Кроме того, я сравнил полученные вероятности для стандартных интервалов с табличными значениями для нормального распределения: видно сходство, что подтверждает случайность измеряемой величины.

На основе заполненных таблиц была построена гистограмма и функция Гаусса. При одинаковых начальных параметрах отмечается их сходство кроме одного промежутка. Также вид функции Гаусса похож на нормальное распределение.

Также, определил значение коэффициента Стьюдента для доверительной вероятности и рассчитал доверительный интервал. И на основе полученных данных произвёл вычисление абсолютной и относительной погрешности измерений.