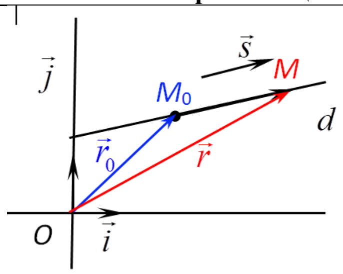
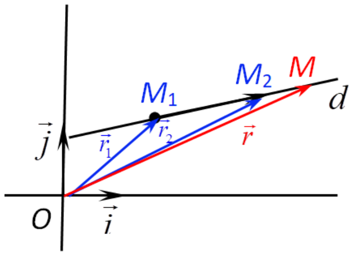
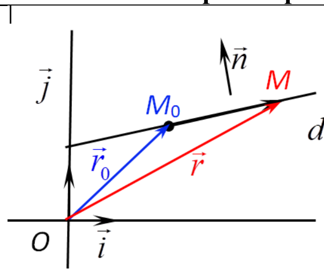
Практическое занятие 4. Прямая на плоскости

Теоретические сведения

	Точкой и направляющим вектором	Двумя точками	Точкой и вектором нормали
			
	$\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}\quad M_0(x_0, y_0)$ $\vec{s} = s_x\vec{i} + s_y\vec{j}$, $\vec{s}$ - направляющий вектор $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}\quad M(x, y)$	$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\quad M_1(x_1, y_1)$ $\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}\quad M_2(x_2, y_2)$ $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}\quad M(x, y)$	$\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j}$ $\vec{n}$ – вектор нормали $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}\quad M(x, y)$
Векторные уравнения	$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\cdot\vec{s}$	$\vec{r} = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$	$(\vec{r} - \vec{r}_0)\cdot\vec{n} = 0$
Уравнения в координатах	Параметрические уравнения прямой $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + ts_x \\ y = y_0 + ts_y \end{cases}}$ Уравнение прямой с определителем $\boxed{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ s_x & s_y \end{vmatrix} = 0}$ Каноническое уравнение прямой $\boxed{\dfrac{x - x_0}{s_x} = \dfrac{y - y_0}{s_y}}$	$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0}$ $\boxed{\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$	$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}$

Уравнение с угловым коэффициентом $\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}$ $k = \dfrac{s_2}{s_1}$ – угловой коэффициент Геометрический смысл углового коэффициента (тангенс угла между положительным направлением оси Ox и прямой) $k = tg\varphi$	Уравнение прямой в отрезках $\boxed{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1}$, здесь a и b – отрезки, отсекаемые прямой на осях Ox и Oy.	**Общее уравнение прямой** $Ax+By+C=0$ $\vec{s} = (-B, A)$ – направляющий вектор $\vec{n} = (A, B)$ – вектор нормали
Геометрический смысл знака трехчлена $Ax + By + C$ Если в аффинной системе координат прямая d задана уравнением $Ax + By + C = 0$, то полуплоскости с границей d определяются неравенствами $Ax + By + C > 0$, $Ax + By + C < 0$.	Нормальное уравнение прямой: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, α – угол между осью абсцисс и вектором нормали, p – расстояние от начала координат до прямой, $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ – нормирующий множитель, применяемый к общему уравнению прямой $Ax+By+C=0$, знак берется противоположный знаку C	

Особенности расположения прямой относительно системы координат, если некоторые из чисел *A*, *B* и *C* равны нулю ($A^2 + B^2 \neq 0$). 1. $C = 0 \Leftrightarrow d: Ax + By = 0 \Leftrightarrow O \in d$. 2. $A = 0 \Rightarrow d: By + C = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \vec{s} = (-B, 0), \vec{i} = (1, 0) \Rightarrow$ $\vec{s} \parallel \vec{i} \Rightarrow d \parallel Ox$. 3. $B = 0 \Rightarrow d: Ax + C = 0 \Rightarrow$. $\Rightarrow \vec{s}(0, A), \vec{j} = (0, 1) \Rightarrow \vec{s} \parallel \vec{j} \Rightarrow d \parallel Oy$ 4. $A = C = 0 \Rightarrow d: y = 0 \Rightarrow d = Ox$. 5. $B = C = 0 \Rightarrow d: x = 0 \Rightarrow d = Oy$.	**Взаимное расположение прямых** $d_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $d_2: A_2x + B_2y + C = 0$ **1.** $\boxed{d_1 = d_2 \Leftrightarrow A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1}$ **2.** $\boxed{d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1}$ **3.** $\boxed{d_1 \text{ и } d_2 \text{ пересекаются} \Leftrightarrow A_2 = \lambda A_1,\ B_2 \neq \lambda B_1}$ Чтобы найти точку пересечения надо решить систему $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$	*Замечание.* Если в уравнениях прямых коэффициенты не равны нулю, то $d_1 = d_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ $d_1 \cap d_2 \neq \varnothing \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$

Метрические задачи

Расстояние от точки до прямой	Угол между прямыми	
$M_0(x_0, y_0)$, $d: Ax+By+C=0$ $\boxed{\rho(M_0, d)=\frac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}}$	$d_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ и $d_2: A_2x+B_2y+C=0$, $d_1 \nparallel d_2$ $\boxed{\cos\left(d_1 \hat{,} d_2\right)=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}}$ $\boxed{\sin\left(d_1 \hat{,} d_2\right)=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}}$ $\boxed{tg\left(d_1 \hat{,} d_2\right)=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}}$.	$d_1: y=k_1x+b_1$ и $d_2: y=k_2x+b_2$, $d_1 \nparallel d_2$. $\boxed{tg\left(d_1 \hat{,} d_2\right)=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}}$
	Условие перпендикулярности прямых	
	$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$	$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow 1+k_1k_2=0$

Задачи

1. Дана прямая $9x-12y+10=0$. Написать для этой прямой: а) вектор нормали; б) направляющий вектор; в) угловой коэффициент; г) нормальное уравнение; д) уравнение с угловым коэффициентом; е) уравнение в отрезках; ё) параметрические уравнения.
2. Составить уравнение прямой, если известно, что основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую – точка $P(2,3)$. \\$2x+3y-13=0$\\
3. Найти уравнение прямой, проходящей через начало координат, если известно, что нормальный вектор этой прямой имеет одинаковые координаты. \\$x+y=0$\\
4. Найти длину перпендикуляра, проведенного из начала координат, к прямой, проходящей через точки $M_1\left(2,\frac{15}{2}\right)$ и $M_2(-4,3)$, и угол между осью Ox и этим перпендикуляром. \\$\frac{24}{5}$, $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$ \\
5. Провести прямую на расстоянии $d=3$ от точки $P(-2,4)$ параллельно прямой $5x+12y+2=0$ \\$5x+12y+1=0$ $5x+12y-77=0$\\
6. Найти расстояние между прямыми $4x+3y-4=0$ и $8x+6y+3=0$.
7. (А-485) Вывести формулу для вычисления расстояния между параллельными прямыми $Ax+By+C_1=0$ и $Ax+By+C_2=0$.
   Пользуясь полученной формулой, определить расстояние между прямыми:
   а) $3x+4y-18=0$ и $3x+4y-43=0$; б) $x+y-6=0$ и $2x+2y-3=0$. \\5; $\frac{9\sqrt{2}}{2}$
8. (А-376) Написать уравнения средних линий треугольника, вершины которого находятся в точках $A(2,6)$, $B(-4,0)$, $C(4,2)$. \\ $2x+y-1=0$; $x-y+1=0$; $x-4y+13=0$; \\
9. (А-481) Написать уравнение окружности с центром в точке $P(6,-3)$ и касающейся прямой $3x-4y-15=0$. \\ $(x-6)^2+(y+3)^2=9$\\
10. (А-495) Найти уравнения биссектрис, образованных прямыми:
    а) $x-3y+2=0$ и $3x+y-1=0$; б) $x+2y+5=0$ и $4x-2y-3=0$.
    \\\\ $2x+4y-3=0$ и $4x-2y+1=0$; $2x-6y-13=0$ и $6x+2y+7=0$\\
11. (А-412) Определить координаты точки, симметричной точке $M(2,-5)$ относительно прямой $2x+8y-15=0$. \\(5,7)\\

------

12. (А-373) Написать уравнение прямой:

а) проходящей через точки $A(-1, 1)$ и $B(2, 5)$;

б) проходящей через начало координат и точку $A(2, 5)$;

в) проходящей через точку $A(2, -6)$ и параллельной вектору $p\{1, -1\}$;

г) отсекающей на осях координат отрезки $a = 3$, $b = -2$;

д) проходящей через точку $A(3, 5)$ и параллельной оси Ox;

е) проходящей через точку $B(-1, 2)$ и параллельной оси Oy;

ж) проходящей через точку $A(1, -5)$ и параллельной прямой $x - 3y + 1 = 0$;

з) проходящей через точку $A(2, 2)$ и параллельной прямой $x + y = 0$.

\\а) $4x - 3y + 7 = 0$, б) $5x - 2y = 0$, в) $x + y + 4 = 0$, г) $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$, д) $y - 5 = 0$, е) $x + 1 = 0$, ж) $x - 3y - 16 = 0$, з) $x + y - 4 = 0$.\\

13. (А-418) Исследовать, как расположены относительно осей координат следующие прямые:

а) $2x - 3y = 0$; г) $3y + 1 = 0$;
б) $3x - y + 1 = 0$; д) $x + 2y = 0$;
в) $5x - 1 = 0$; е) $6x = 0$.

14. (А-419) Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых и в случае пересечения определить координаты общей точки

а) $x + y - 3 = 0$ и $2x - 2y - 6 = 0$;
б) $x + 2y + 1 = 0$ и $x + 2y + 3 = 0$;
в) $\frac{\sqrt{3}}{2}x - 3y + \sqrt{3} = 0$ и $x - 2\sqrt{3}y + 2 = 0$;
г) $y = 3$ и $x + y = 0$;
д) $x + y + 1 = 0$ и $x + y - 1 = 0$;
е) $x = 0$ и $x + 3 = 0$;
ж) $\sqrt{5}x - 3y + 1 = 0$ и $\frac{5}{3}x - \sqrt{5}y + \frac{\sqrt{5}}{3} = 0$.

\\ а) пересекаются в точке М(3,0), б) параллельны, в) совпадают,
г) пересекаются в точке М(-3,3), д) параллельны, е) параллельны, ж) совпадают\\