

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Домашняя работа № 2

По дискретной математике

Вариант 140

Выполнил:

Петров Вячеслав Маркович Р3108

Проверил:

Поляков Владимир Иванович

Санкт-Петербург 2024

Исходный граф:

V/V	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10	e11	e12
e1	0				1	1		4	4			5
e2		0				3		5	1		4	5
e3			0					5		2	3	
e4				0	5	2				5	4	2
e5	1			5	0			1				
e6	1	3		2		0	1		2	1	4	
e7						1	0	1	2	3	1	3
e8	4	5	5		1		1	0	1	4		4
e9	4	1				2	2	1	0		4	4
e10			2	5		1	3	4		0		
e11		4	3	4		4	1		4		0	5
e12	5	5		2			3	4	4		5	0

Найти кратчайшие пути от начальной вершины e_1 ко всем остальным вершинам
Вспользуемся алгоритмом Дейкстры

1. $l(e_1) = 0^+$; $l(e_i) = \infty$, для всех $i \neq 1$, $p = e_1$
Результаты итерации запишем в таблицу

	1
e_1	0^+
e_2	∞
e_3	∞
e_4	∞
e_5	∞
e_6	∞
e_7	∞
e_8	∞
e_9	∞
e_{10}	∞
e_{11}	∞
e_{12}	∞

2. $\Gamma_{e_1} = \{e_5, e_6, e_8, e_9, e_{12}\}$ - все пометки временные, уточним их:

$$\begin{aligned}
 l(e_5) &= \min[\infty, 0^+ + 1] = 1; \\
 l(e_6) &= \min[\infty, 0^+ + 1] = 1; \\
 l(e_8) &= \min[\infty, 0^+ + 4] = 4; \\
 l(e_9) &= \min[\infty, 0^+ + 4] = 4; \\
 l(e_{12}) &= \min[\infty, 0^+ + 5] = 5.
 \end{aligned}$$

3. $l(e_i^+) = \min[l(e_i)] = l(e_5) = 1$;

4. Вершина e_5 получает постоянную пометку $l(e_5) = 1^+$, $p = e_5$

	1	2
e_1	0^+	
e_2	∞	∞
e_3	∞	∞

e ₄	∞	∞
e ₅	∞	1 ⁺
e ₆	∞	1
e ₇	∞	∞
e ₈	∞	4
e ₉	∞	4
e ₁₀	∞	∞
e ₁₁	∞	∞
e ₁₂	∞	5

5. Не все вершины имеют постоянные пометки,

$\Gamma_{e_5} = \{e_1, e_4, e_8\}$

Временные пометки имеют вершины e₄, e₈ - уточняем их:

$$l(e_4) = \min[\infty, 1 + 5] = 6$$

$$l(e_8) = \min[4, 1 + 1] = 2$$

6. $l(e_i^+) = \min[l(e_i)] = l(e_6) = 1^+$;

7. Вершина e₆ получает постоянную пометку $l(e_6) = 1^+$, $p = e_6$

	1	2	3
e ₁	0 ⁺		
e ₂	∞	∞	∞
e ₃	∞	∞	∞
e ₄	∞	∞	6
e ₅	∞	1 ⁺	
e ₆	∞	1	1 ⁺
e ₇	∞	∞	∞
e ₈	∞	4	2
e ₉	∞	4	4
e ₁₀	∞	∞	∞
e ₁₁	∞	∞	∞
e ₁₂	∞	5	5

8. Не все вершины имеют постоянные пометки,

$\Gamma_{e_6} = \{e_1, e_2, e_4, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$

Временные пометки имеют вершины e₂, e₄, e₇, e₉, e₁₀, e₁₁ - уточняем их:

$$l(e_2) = \min[\infty, 1 + 3] = 4$$

$$l(e_4) = \min[6, 1 + 2] = 3$$

$$l(e_7) = \min[\infty, 1 + 1] = 2$$

$$l(e_9) = \min[4, 1 + 2] = 3$$

$$l(e_{10}) = \min[\infty, 1 + 1] = 2$$

$$l(e_{11}) = \min[\infty, 1 + 4] = 5$$

9. $l(e_i^+) = \min[l(e_i)] = l(e_7) = 2^+$

10. Вершина e₇ получает постоянную пометку $l(e_7) = 2^+$, $p = e_7$

	1	2	3	4
e ₁	0			

	+			
e_2	∞	∞	∞	4
e_3	∞	∞	∞	∞
e_4	∞	∞	6	3
e_5	∞	1 +		
e_6	∞	1	1 ⁺	
e_7	∞	∞	∞	2 ⁺
e_8	∞	4	2	2
e_9	∞	4	4	3
e_1 0	∞	∞	∞	2
e_1 1	∞	∞	∞	5
e_1 2	∞	5	5	5

11. Не все вершины имеют постоянные пометки,
 $\Gamma_{e_7} = \{e_6, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$

Временные пометки имеют вершины $e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}$ - уточняем их:

$$l(e_8) = \min[2, 2 + 1] = 3$$

$$l(e_9) = \min[3, 2 + 2] = 3$$

$$l(e_{10}) = \min[2, 2 + 3] = 2$$

$$l(e_{11}) = \min[5, 2 + 1] = 3$$

$$l(e_{12}) = \min[5, 2 + 3] = 5$$

12. $l(e_i^+) = \min[l(e_i)] = l(e_8) = 2$

13. Вершина e_8 получает постоянную отметку $l(e_8) = 2^+$, $p = e_8$

	1	2	3	4	5
e_1	0 ⁺				
e_2	∞	∞	∞	4	4
e_3	∞	∞	∞	∞	∞
e_4	∞	∞	6	3	3
e_5	∞	1 ⁺			
e_6	∞	1	1 ⁺		
e_7	∞	∞	∞	2 +	
e_8	∞	4	2	2	2 ⁺
e_9	∞	4	4	3	3
e_1 0	∞	∞	∞	2	2
e_1 1	∞	∞	∞	5	3
e_1 2	∞	5	5	5	5

14. Не все вершины имеют постоянные пометки,
 $\Gamma_{e_8} = \{e_1, e_2, e_3, e_5, e_7, e_9, e_{10}, e_{12}\}$

Временные пометки имеют вершины $e_2, e_3, e_9, e_{10}, e_{12}$ - уточняем их:

$$\begin{aligned}
l(e_2) &= \min[4, 2 + 5] = 4 \\
l(e_3) &= \min[\infty, 2 + 5] = 7 \\
l(e_9) &= \min[3, 2 + 1] = 3 \\
l(e_{10}) &= \min[2, 2 + 4] = 2 \\
l(e_{12}) &= \min[5, 2 + 4] = 5
\end{aligned}$$

$$15. l(e_i^+) = \min[l(e_i)] = l(e_{10}) = 2$$

16. Вершина e_{10} получает постоянную отметку $l(e_{10}) = 2^+$, $p = e_{10}$

	1	2	3	4	5	6
e_1 0 +						
e_2	∞	∞	∞	4	4	4
e_3	∞	∞	∞	∞	∞	7
e_4	∞	∞	6	3	3	3
e_5	∞	1 +				
e_6	∞	1	1 +			
e_7	∞	∞	∞	2 +		
e_8	∞	4	2	2	2 +	
e_9	∞	4	4	3	3	3
e_{10} 0	∞	∞	∞	2	2	2 +
e_{11} 1	∞	∞	∞	5	3	3
e_{12} 2	∞	5	5	5	5	5

17. Не все вершины имеют постоянные пометки,
 $\Gamma_{e_{10}} = \{e_3, e_4, e_6, e_7, e_8\}$

Временные пометки имеют вершины e_3, e_4 – уточняем их:

$$\begin{aligned}
l(e_3) &= \min[7, 2 + 2] = 4 \\
l(e_4) &= \min[3, 2 + 5] = 3
\end{aligned}$$

$$18. l(e_i^+) = \min[l(e_i)] = l(e_4) = 3$$

19. Вершина e_4 получает постоянную отметку $l(e_4) = 3^+$, $p = e_4$

	1	2	3	4	5	6	7
e_1 0 +							
e_2	∞	∞	∞	4	4	4	4
e_3	∞	∞	∞	∞	∞	7	4
e_4	∞	∞	6	3	3	3	3 +
e_5	∞	1 +					
e_6	∞	1	1 +				
e_7	∞	∞	∞	2			

				+			
e_8	∞	4	2	2	2 ₊		
e_9	∞	4	4	3	3	3	3
e_1 0	∞	∞	∞	2	2	2 ₊	
e_1 1	∞	∞	∞	5	3	3	3
e_1 2	∞	5	5	5	5	5	5

20. Не все вершины имеют постоянные пометки,
 $\Gamma_{e_4} = \{e_5, e_6, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$

Временные пометки имеют вершины e_{11}, e_{12} – уточняем их:

$$(e_{11}) = \min[3, 3 + 4] = 3$$

$$(e_{12}) = \min[5, 3 + 2] = 5$$

21. $l(e_i^+) = \min[l(e_i)] = l(e_9) = 3$

22. Вершина e_9 получает постоянную отметку $l(e_9) = 3^+$, $p = e_9$

	1	2	3	4	5	6	7	8
e_1 0 ₊								
e_2	∞	∞	∞	4	4	4	4	4
e_3	∞	∞	∞	∞	∞	7	4	4
e_4	∞	∞	6	3	3	3	3 ₊	
e_5	∞	1 ₊						
e_6	∞	1	1 ₊					
e_7	∞	∞	∞	2 ₊				
e_8	∞	4	2	2	2 ₊			
e_9	∞	4	4	3	3	3	3	3 ₊
e_1 0	∞	∞	∞	2	2	2 ₊		
e_1 1	∞	∞	∞	5	3	3	3	3
e_1 2	∞	5	5	5	5	5	5	5

23. Не все вершины имеют постоянные пометки,
 $\Gamma_{e_9} = \{e_1, e_2, e_6, e_7, e_8, e_{11}, e_{12}\}$

Временные пометки имеют вершины e_2, e_{11}, e_{12} – уточняем их:

$$(e_2) = \min[4, 3 + 1] = 4$$

$$(e_{11}) = \min[3, 3 + 4] = 3$$

$$(e_{12}) = \min[5, 3 + 4] = 5$$

24. $l(e_i^+) = \min[l(e_i)] = l(e_{11}) = 3$

25. Вершина e_{11} получает постоянную отметку $l(e_{11}) = 3^+$, $p = e_{11}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
e_1	0 ₊								
e_2	∞	∞	∞	4	4	4	4	4	4
e_3	∞	∞	∞	∞	∞	7	4	4	4
e_4	∞	∞	6	3	3	3	3 ₊		
e_5	∞	1 ₊							
e_6	∞	1	1 ₊						
e_7	∞	∞	∞	2 ₊					
e_8	∞	4	2	2	2 ₊				
e_9	∞	4	4	3	3	3	3	3 ₊	
e_{10}	∞	∞	∞	2	2	2 ₊			
e_{11}	∞	∞	∞	5	3	3	3	3	3 ₊
e_{12}	∞	5	5	5	5	5	5	5	5

26. Не все вершины имеют постоянные пометки,
 $\Gamma_{e_{11}} = \{e_2, e_3, e_4, e_6, e_7, e_9, e_{12}\}$

Временные пометки имеет вершина e_2, e_3, e_{12} - уточняем её:

$$(e_2) = \min[4, 3 + 4] = 4$$

$$(e_3) = \min[4, 3 + 3] = 4$$

$$(e_{12}) = \min[5, 3 + 5] = 5$$

27. $l(e_i^+) = \min[l(e_i)] = l(e_2) = 4$

28. Вершина e_2 получает постоянную отметку $l(e_2) = 4^+$, $p = e_2$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
e_1	0 ₊									
e_2	∞	∞	∞	4	4	4	4	4	4	4 ₊
e_3	∞	∞	∞	∞	∞	7	4	4	4	4
e_4	∞	∞	6	3	3	3	3 ₊			
e_5	∞	1 ₊								
e_6	∞	1	1 ₊							
e_7	∞	∞	∞	2 ₊						
e_8	∞	4	2	2	2 ₊					

e_9	∞	4	4	3	3	3	3	3_+		
e_1 0	∞	∞	∞	2	2	2_+				
e_1 1	∞	∞	∞	5	3	3	3	3	3_+	
e_1 2	∞	5	5	5	5	5	5	5	5	5

29. Не все вершины имеют постоянные пометки,
 $\Gamma e_2 = \{e_6, e_8, e_9, e_{11}, e_{12}\}$

Временные пометки имеет вершина e_{12} - уточняем её:

$$(e_{12}) = \min[5, 4 + 5] = 5$$

30. $l(e_i^+) = \min[l(e_i)] = l(e_3) = 4$

31. Вершина e_3 получает постоянную отметку $l(e_3) = 4^+$, $p = e_3$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 0	1 1
e_1 0_+											
e_2	∞	∞	∞	4	4	4	4	4	4	4_+	
e_3	∞	∞	∞	∞	∞	7	4	4	4	4	4_+
e_4	∞	∞	6	3	3	3	3_+				
e_5	∞	1_+									
e_6	∞	1	1_+								
e_7	∞	∞	∞	2_+							
e_8	∞	4	2	2	2_+						
e_9	∞	4	4	3	3	3	3	3_+			
e_1 0	∞	∞	∞	2	2	2_+					
e_1 1	∞	∞	∞	5	3	3	3	3	3_+		
e_1 2	∞	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

32. Не все вершины имеют постоянные пометки,
 $\Gamma e_3 = \{e_8, e_{10}, e_{11}\}$

Все смежные вершины имеют постоянные отметки, уточнение не требуется.

33. $l(e_i^+) = \min[l(e_i)] = l(e_{12}) = 5$

34. Вершина e_{12} получает постоянную отметку $l(e_{12}) = 5^+$, $p = e_{12}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
e_1	0 ₊											
e_2	∞	∞	∞	4	4	4	4	4	4	4 ₊		
e_3	∞	∞	∞	∞	∞	7	4	4	4	4	4 ₊	
e_4	∞	∞	6	3	3	3	3 ₊					
e_5	∞	1 ₊										
e_6	∞	1	1 ₊									
e_7	∞	∞	∞	2 ₊								
e_8	∞	4	2	2	2 ₊							
e_9	∞	4	4	3	3	3	3	3 ₊				
e_{10}	∞	∞	∞	2	2	2 ₊						
e_{11}	∞	∞	∞	5	3	3	3	3	3 ₊			
e_{12}	∞	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5 ₊

Минимальные пути к вершинам равны их постоянным меткам.