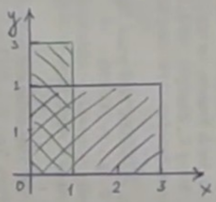
§1 Функции нескольких переменных и скалярное поле

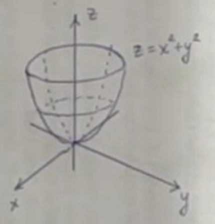
п. 1. Основные понятия

$S = xy$

$y \backslash x$	0	1	2	3
1	0	1	2	3
2	0	2	4	6
3	0	3	6	9
4	0	4	8	12

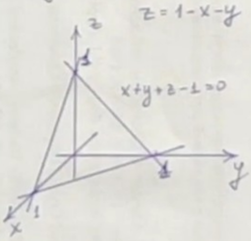


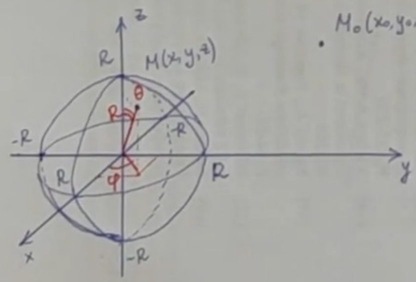
$z = x^2 + y^2$



$x + y + z - 1 = 0$

$z = 1 - x - y$





$M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\rho(M_0, M) = |\overline{M_0M}| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\theta & R = const > 0 \quad \text{радиус сферы} \\ y = R\sin\varphi\sin\theta & 0 \le \varphi < 2\pi \quad \text{азимутальный угол} \\ z = R\cos\theta & 0 \le \theta \le \pi \quad \text{зенитный угол} \end{cases}$$

$$\rho(M_0 M) = \sqrt{(R\cos\varphi\sin\theta - x_0)^2 + (R\sin\varphi\sin\theta - y_0)^2 + (R\cos\theta - z_0)^2}$$

$$\rho = \rho(x, y, z) = \rho(x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\varphi, \theta))$$

или

$\rho = \rho(x, y, z)$, где $\begin{cases} x = x(\varphi, \theta) \\ y = y(\varphi, \theta) \\ z = z(\varphi, \theta) \end{cases}$

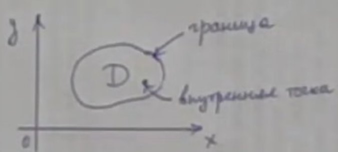
1

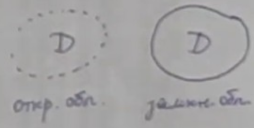
Опр Если каждой паре (x, y) значений двух независимых переменных x и y из некоторой области D соответствует определённое значение величины z, то говорят, что z есть функция независ. перем-х x и y, определённая в обл. D.

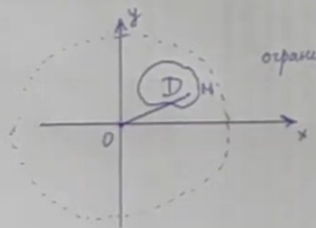
Иными словами, в обл. D задано скалярное поле.

Обозначение: $z = f(x, y)$ $\quad (x, y) \xrightarrow{f} z \quad f\ D \to R$

Опр. $z = f(x, y)$ $\quad (x, y) \in D$ – обл. опр-я







ограниченная обл.

$\exists C > 0 : \forall M \in D \quad |OM| < C$

Опр. Графиком ф-ии $z = f(x, y)$ наз. ГМТ с коорд. $(x, y, f(x, y))$, т.е. поверхность, проекция которой на плоскость Oxy будет областью D.

Пример: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

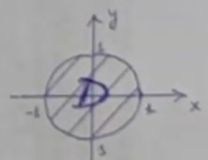
$1 - x^2 - y^2 \ge 0$

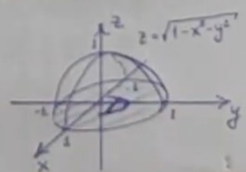
$x^2 + y^2 \le 1$ круг D

$x^2 + y^2 = 1$ граница D

$D(z) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$

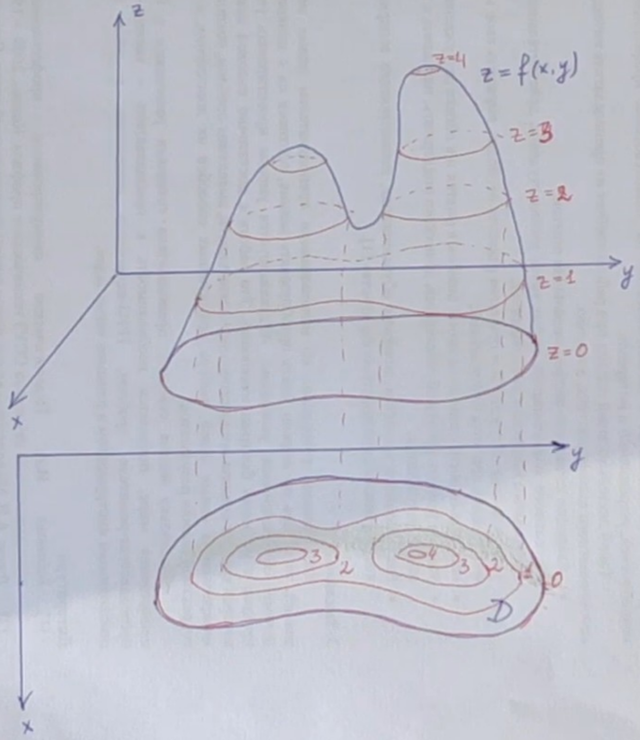
$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (z \ge 0)$





п.2 Линии и поверхности уровня

$z = f(x,y)$ в обл. D



Опр. Линией уровня c ф-ии $z = f(x,y)$ наз. линия, заданная уравнением

$$f(x,y) = c, \text{ где } c \in \mathbb{R}$$

$$L: \begin{cases} z = f(x,y) \\ z = c \end{cases}$$

$$u = F(x,y,z)$$

$$\begin{cases} u = F(x,y,z) \\ u = c \end{cases}$$

$$\alpha: \quad F(x,y,z) = c$$

Пример: Построить линии уровня 1, 2, 3 и 4 ф-ии $z = \frac{1}{x^2+y^2}$ и затем изобразить её график.

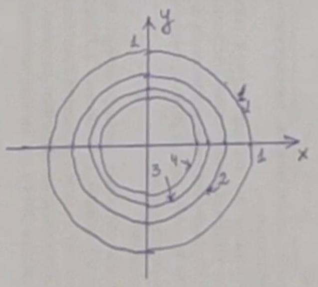
$$L_c: \begin{cases} z = \frac{1}{x^2+y^2} \\ z = c \end{cases} \qquad \frac{1}{x^2+y^2} = c \qquad x^2+y^2 = \frac{1}{c} \qquad r = \frac{1}{\sqrt{c}}$$

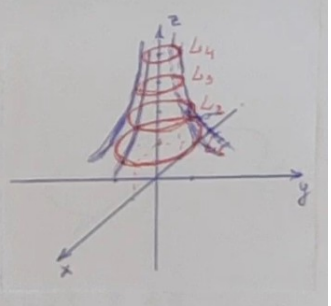
L_1: $x^2+y^2 = 1$

L_2: $x^2+y^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \approx (0{,}7)^2$

L_3: $x^2+y^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \approx (0{,}58)^2$

L_4: $x^2+y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$



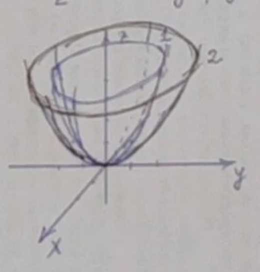


Пример: Найти ур-ия пов-й уровня ф-ии $u = \frac{x^2+y^2}{z}$ и изобразить несколько из них.

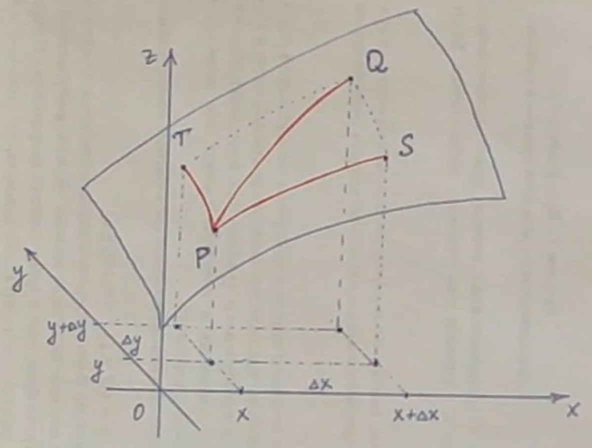
$$\frac{x^2+y^2}{z} = c \qquad z = \frac{1}{c}(x^2+y^2)$$

α_1: $z = x^2+y^2$

α_2: $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$



п.3 Частное и полное приращение ф-ии



$z = f(x,y)$

$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$

частное приращение ф-ии z по x в точке (x,y)

$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$

частное приращение ф-ии z по y в точке (x,y)

$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

полное приращение ф-ии z в точке (x,y)

Замечание: $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$

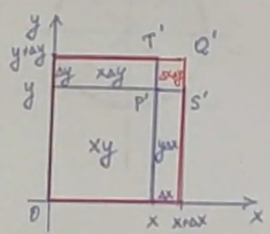
Пример: $z = xy$

$x = 1 \quad \Delta x = 0{,}1$

$y = 2 \quad \Delta y = 0{,}2$

$$\left.\begin{aligned}\Delta_x z &= (x+\Delta x)y - xy = \cancel{xy} + \Delta x y - \cancel{xy} = y\Delta x = 0{,}2\\ \Delta_y z &= x(y+\Delta y) - xy = \cancel{xy} + x\Delta y - \cancel{xy} = x\Delta y = 0{,}2\end{aligned}\right\} 0{,}4$$

$$\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy = \cancel{xy} + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y - \cancel{xy} =$$
$$= x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y = 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}02 = 0{,}42$$



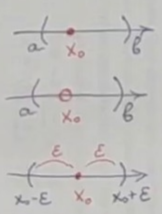
п.4 Предел и непрерывность

$y = f(x)$

$x_0 \in \mathbb{R}$

- $U(x_0)$: $\forall (a,b)$: $x_0 \in (a,b)$
- $\overset{\circ}{U}(x_0) = U(x_0) \setminus \{x_0\}$
- $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

  ε - радиус окрестности



$z = f(x,y)$

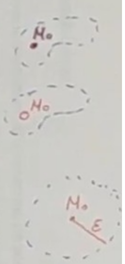
$M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

- $U(M_0)$: $\forall$ откр. обл. $D \subset \mathbb{R}^2$: $M_0 \in D$
- $\overset{\circ}{U}(M_0) = U(M_0) \setminus \{M_0\}$
- $U_\varepsilon(M_0)$: $\forall M(x,y) \in U_\varepsilon(M_0)$ $|MM_0| < \varepsilon$

  ε - радиус окр-ти $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \varepsilon$

  $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \varepsilon^2$

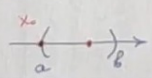
  $\mathbb{R}^3$: открытый шар



- Точкой сгущения (предельной точкой) мн-ва $X \subset \mathbb{R}$ наз. x_0 (не обязательно из X):

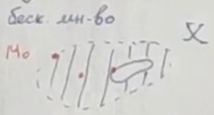
  $\forall U(x_0)$ $\quad U(x_0) \cap X$ - беск. мн-во

  $X = (a,b)$



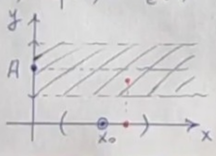
- Точкой сгущения (предельной точкой) мн-ва $X \subset \mathbb{R}^2$ наз. M_0 (не обязательно из X):

  $\forall U(M_0)$ $\quad U(x_0) \cap X$ - беск. мн-во



- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

  $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ $\quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$

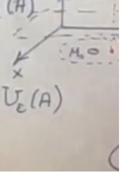


- $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$

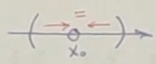
  $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall M \in \overset{\circ}{U}_\delta(M_0)$ $\quad f(M) \in U_\varepsilon(A)$

  $\lim f(x,y) = A$

  $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall (x,y) \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0,y_0)$ $\quad f(x,y) \in U_\varepsilon(A)$



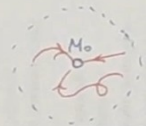
• $y = f(x)$ непр. в x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$



$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$$

• $y = f(x)$ непр. на X, если она непр. в $\forall x \in X$

• $z = f(x,y)$ непр. в $M_0(x_0,y_0)$, если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$



$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

$\lim\limits_{\Delta\rho\to 0} \Delta z = 0$, $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

$\begin{matrix}\Delta x\to 0\\ \Delta y \to 0\end{matrix} \iff \Delta\rho \to 0$

• $z = f(x,y)$ непр. на X, если она непр. $\forall M \in X$

Примеры

(1) Показать, что $z = x^2 + y^2$ непр. на всём $\mathbb{R}^2$

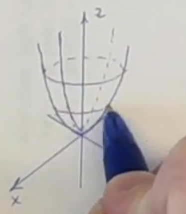
$\Delta z = (x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2 - (x^2+y^2) =$

$= \cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2 + \cancel{y^2} + 2y\Delta y + \Delta y^2 - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} =$

$= 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2$

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$

$\Rightarrow z = x^2 + y^2$ непр. на $\mathbb{R}^2$



(2) Исследовать $z = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ на непр. в $(0;0)$.

$D(z) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\} \Rightarrow$ в $(0;0)$ имеет разрыв.

Установим хар-р разрыва в $(0;0)$:

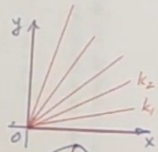
$\exists ?\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ и если нет, то почему?

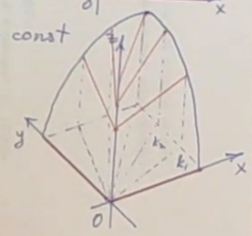
∢ траектории $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$

$z = \frac{2xkx}{x^2+(kx)^2} = \frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{2k}{1+k^2} = const$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z = /y=kx/ = \frac{2k}{1+k^2} = const$

разные для k_1 и k_2!





п.5. Частные производные

• $z = f(x)$

$\frac{dz}{dx} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$ – производная $z=f(x)$ в точке x.

$\frac{dz}{dx}$, z', $\frac{dz}{dx}(x)$, $z'(x)$

• $z = f(x,y)$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ – частная производная $z = f(x,y)$ по x в точке $M(x,y)$

y – фикс.

$\frac{\partial z}{\partial x}$, z'_x, $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$, $z'_x(M)$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ – частная производная $z = f(x,y)$ по y в точке $M(x,y)$

x – фикс.

$\frac{\partial z}{\partial y}$, z'_y, $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$, $z'_y(M)$

$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim\limits_{\Delta l\to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}$ – производная $z = f(x,y)$ по напр. $\vec{l}$ в точке $M(x,y)$

$\frac{\partial z}{\partial l}$, z'_l, $\frac{\partial z}{\partial l}(x,y)$, $z'_l(M)$

Замечание: мн-во всех касат. к графику $z = f(x,y)$ в точке M образует касат. плоскость к графику $z = f(x,y)$ в точке M.

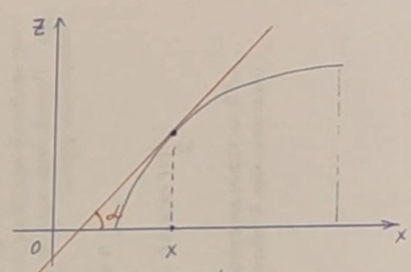
Примеры:

(1) Найти частные произв. $z = x^2 \sin y$.

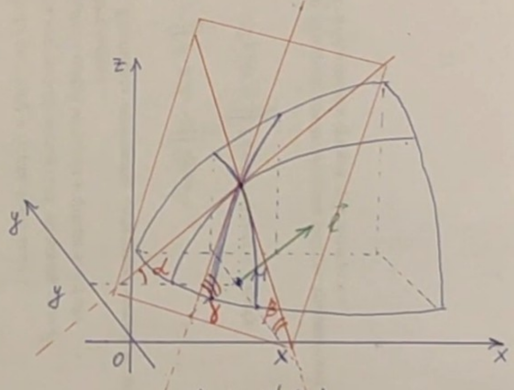
$z'_x = 2x\sin y$

$z'_y = x^2$

Геом. смысл:



$tg\,\alpha = z'(x)$



$tg\,\alpha = z'_x(M)$

$tg\,\beta = z'_y(M)$

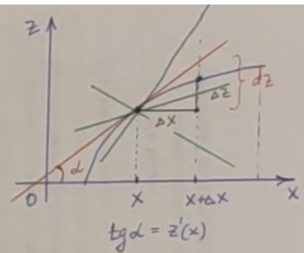
$tg\,\gamma = z'_l(M)$

п.6 Дифференциал

• $z=f(x)$

Дифф-л $z=f(x)$ в x — лин. часть Δz в x, обозн. dz:

$$dz = A\Delta x, \quad A\in\mathbb{R}$$



$\operatorname{tg}\alpha = z'(x)$

∃ $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}$ $\quad \frac{\Delta z}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(\Delta x) \quad /\cdot\Delta x$

$$\Delta z = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{\substack{\text{лин. часть} \\ dz}} + \underbrace{\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x}_{o(\Delta x)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} dz &= f'(x)\Delta x \overset{\Delta x = dx}{=} f'(x)\,dx \\ \Delta z &= dz + o(\Delta x) \end{aligned}}$$

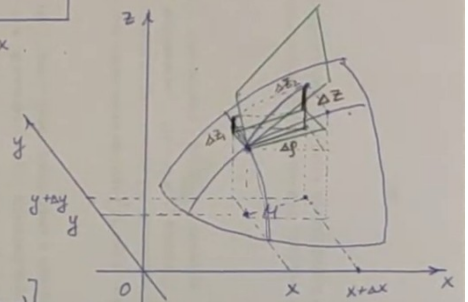
Замечание: Если у $z=f(x)$ ∃ dz в x, то $z=f(x)$ наз. дифф-й в x.

∃ $f'(x)$ $\Leftrightarrow$ дифф-ть

• $z=f(x,y)$

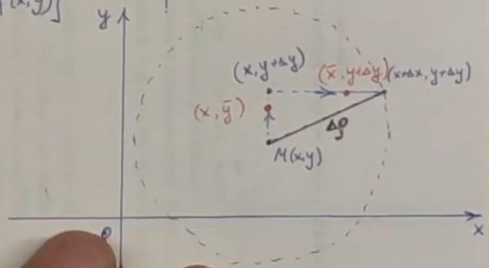
Дифф-л $z=f(x,y)$ в $M(x,y)$ — лин. часть Δz в M, обозн. dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y, \quad A,B\in\mathbb{R}$$



∃ $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ и непр. в $M(x,y)$

∢ $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = \underbrace{\left[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\right]}_{\Delta z_2} + \underbrace{\left[f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\right]}_{\Delta z_1}$



$\Delta z_1 = f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = /x\text{-фикс.}, f(x,y)=\psi(y)/ = \psi(y+\Delta y) - \psi(y) =$

$= /\text{т. Лагранжа}: \exists\, \bar y \in (y, y+\Delta y)/ = \psi'(\bar y)\Delta y = f'_y(x,\bar y)\Delta y$

$\Delta z_2 = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = /y\text{-фикс.}, f(x,y+\Delta y) = \varphi(x)/ = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) =$

$= /\text{т. Лагранжа}: \exists\, \bar x \in (x, x+\Delta x)/ = \varphi'(\bar x)\Delta x = f'_x(\bar x, y+\Delta y)\Delta x$

$\Rightarrow \Delta z = f'_x(\bar x, y+\Delta y)\Delta x + f'_y(x,\bar y)\Delta y$

∢ $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0} f'_x(\bar x, y+\Delta y) \overset{\text{непр.}}{=} f'_x(x,y)$, $\quad f'_x(\bar x, y+\Delta y) = f'_x(x,y)$

$\lim\limits_{\Delta\rho\to 0} f'_y(x,\bar y) \overset{\text{непр.}}{=} f'_y(x,y)$, $\quad f'_y(x,\bar y) = f'_y(x,y) + o_2(\Delta\rho)$

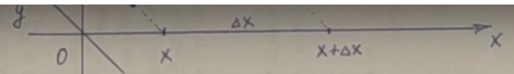
$$\Rightarrow \Delta z = \underbrace{f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y}_{\substack{\text{лин. часть} \\ dz}} + \underbrace{o_1(\Delta\rho)\Delta x + o_2(\Delta\rho)\Delta y}_{o(\Delta\rho)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} dz &= f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y = \Big/ \begin{matrix}\Delta x = dx \\ \Delta y = dy\end{matrix} \Big/ = f'_x(x,y)\,dx + f'_y(x,y)\,dy \\ \Delta z &= dz + o(\Delta\rho) \end{aligned}}$$

Опр. Ф-ия $z=f(x,y)$, полное приращение которой в данной точке $M(x,y)$ может быть представлено в виде суммы двух слагаемых: выражения, линейного отн. Δx и Δy, и б.м.р. отн. $\Delta\rho$, — наз. дифференцируемой в $M(x,y)$, а лин. часть приращения Δz наз. дифференциалом dz.

Замечание: ∃ f'_x, f'_y в $M(x,y)$ $\Leftrightarrow$ $z=f(x,y)$ дифф-ма в M.

непрерывны



в точке (x,y)

Замечание: $\Delta Z \neq \Delta_x Z + \Delta_y Z$

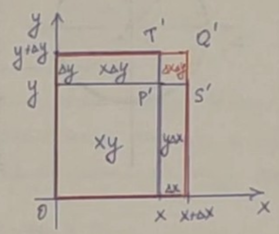
Пример: $z = xy$

$x = 1 \quad \Delta x = 0{,}1$

$y = 2 \quad \Delta y = 0{,}2$

$$\left.\begin{aligned} \Delta_x z &= (x+\Delta x)y - xy = \cancel{xy} + \Delta x y - \cancel{xy} = y\Delta x = 0{,}2 \\ \Delta_y z &= x(y+\Delta y) - xy = \cancel{xy} + x\Delta y - \cancel{xy} = x\Delta y = 0{,}2 \end{aligned}\right\} 0{,}4$$

$$\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy = \cancel{xy} + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y - \cancel{xy} =$$
$$= x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y = 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}02 = 0{,}42$$



5

Пример:

Найти дифф-л ф-ии $z = xy$ в точке $M(1,2)$, полагая $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

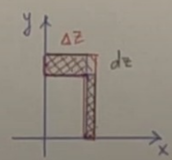
$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y = y\Delta x + x\Delta y \quad ; \quad dz(M) = 2\Delta x + \Delta y = /\Delta x = 0{,}1,\ \Delta y = 0{,}2/ = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$

$z'_x = y \qquad z'_x(M) = 2$

$z'_y = x \qquad z'_y(M) = 1$

Вспомним пример из п.3:

$$\Delta z = \underbrace{y\Delta x + x\Delta y}_{dz} + \underbrace{\Delta x\Delta y}_{o(\rho)}$$



п.7. Производная сложной ф-ии. Полная производная. Полный дифф-л сложной ф-ии.

~ **Производная сложной ф-ии**

$$z = z(u,v) \qquad \left.\begin{aligned} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow z \text{ — сложная ф-ия } x \text{ и } y$$

Замечание: z можно выразить через x и y непосредственно:

$$z = z(u,v) = z(u(x,y), v(x,y)) = f(x,y)$$

Пример: $z = u^3v^3 + u + 1, \quad u = x^2 + y^2, \quad v = e^{x+y} + 1$

$$\Rightarrow z = (x^2+y^2)^3(e^{x+y}+1)^3 + (x^2+y^2) + 1$$

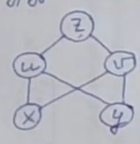
Пример: z – успеваемость по математике

u – своевременность

v – собранность

x – кол-во сериалов, кот. хочется посмотреть в ближ. время

y – кол-во дней Рождений друзей в ближ. время



] $z(u,v)$, $u(x,y)$, $v(x,y)$ имеют непр. частн. произв. по всем своим аргументам.

Задача: Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$\measuredangle$ $\underset{y\text{-фикс.}}{\Delta x} \longrightarrow \Delta_x u,\ \Delta_x v \longrightarrow \Delta z$:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v + o_1(\Delta_x u)\cdot\Delta_x u + o_2(\Delta_x v)\cdot\Delta_x v \quad /:\Delta x$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + o_1(\Delta_x u)\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + o_2(\Delta_x v)\frac{\Delta_x v}{\Delta x}$$

] $\Delta x \to 0 \overset{\text{непр.}}{\Rightarrow} \Delta_x u, \Delta_x v \to 0 \Rightarrow o_1(\Delta_x u), o_2(\Delta_x v) \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0}$: $\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}$

$\measuredangle$ $\underset{x\text{-фикс.}}{\Delta y}$: $\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}}$

Пример: $z = \ln(u^2+v)$, $u = e^{x+y^2}$, $v = x^2+y$

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2+v} \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2+v}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y\,e^{x+y^2}$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$

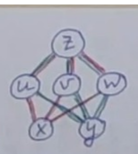
$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v}\cdot e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v}\cdot 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2+v}\,2y\,e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v}\cdot 1$$

подставить выраж-е для u и v через x и y

Варианты:

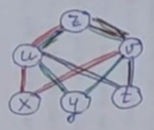
• $z = z(u, v, w)$, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, $w = w(x,y)$



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$$

• $z = z(u,v)$, $u = u(x,y,t)$, $v = v(x,y,t)$

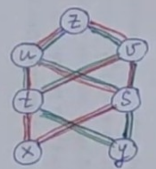


$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}$$

• $z = z(u,v)$, $u = u(t,s)$, $v = v(t,s)$, $t = t(x,y)$, $s = s(x,y)$

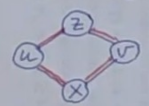


$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}\right)$$

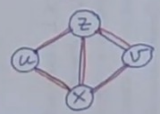
~ Полная производная

• $z = z(u,v)$, $u = u(x)$, $v = v(x)$



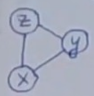
$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$ — полная производная сложн. ф-ии z (очевидно, что по $\underline{x}$)

• $z = z(x, u, v)$, $u = u(x)$, $v = v(x)$



$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$ — полная производная сложн. ф-ии z

Пример. $z = x^2 + \sqrt{y}$, $y = \sin x$

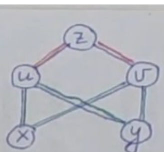


$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ $\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \cos x$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\cos x = 2x + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

~ Полный дифференциал сложной ф-ии

$z = z(u,v)$, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$



$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)}_{\frac{\partial z}{\partial x}}dx + \underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\frac{\partial z}{\partial y}}dy =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Замечание: Форма дифференциала (1го порядка) инвариантна отн. того, являются ли u и v независ. переменными или ф-ии независ. переменных.

Пример: Найти полный дифф-л сложной ф-ии z:

$z = u^2v^3$, $u = x^2\sin y$, $v = x^3e^y$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot dv = 2uv^3du + 3u^2v^2dv$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) = 2uv^3\left(2x\sin y\,dx + \overset{x^2\cos y}{\cancel{3xe^y}}dy\right) +$$

$$+ 3u^2v^2\left(3x^2e^ydx + x^3e^ydy\right) =$$

$$= \left(2uv^3\,2x\sin y + 3u^2v^2\,3x^2e^y\right)dx + \left(2uv^3x^2\cos y + 3u^2v^2x^3e^y\right)dy$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left.\begin{matrix}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \\ + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\end{matrix}\right\}$$

$$= \left(2uv^3\,2x\sin y + 3u^2v^2\,3x^2e^y\right)dx + \left(2uv^3x^2\cos y + 3u^2v^2x^3e^y\right)dy$$

п.8. Производная от ф-ии, заданной неявно.

<u>Задача:</u> $y = y(x)$ задана неявно: $F(x,y)=0$
Найти y'.

Вспомним алгоритм на примере:

$$\underbrace{e^y - e^x + xy}_{F(x,y)} = 0 \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$ – оператор полной произв.-й по x

(полной, т.к. $y = y(x)$ $\Rightarrow F(x, y(x)) = f(x)$)

$$\frac{d}{dx}\left(e^y - e^x + xy\right) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\left(e^{y(x)}\right)' - \left(e^x\right)' + \left(x \cdot y(x)\right)' = 0$$

$$e^y y' - e^x + y + xy' = 0$$

$$y'\left(e^y + x\right) = e^x - y$$

$$y' = \frac{e^x - y}{e^y + x}$$ – явное выражение y' через x и y, кот. задана неявно.

$\sphericalangle$ $F(x,y) = e^y - e^x + xy$ как ф-ию нуавис. перем. x и y.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -e^x + y = -(e^x - y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^y + x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^x - y}{e^y + x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Докажем ф-лу в общем виде.

<u>Теорема</u>

$y = y(x)$ непр. и задана неявно: $F(x,y) = 0$
в некот. окр-ти точки (x,y), удовл.-й равенству, непр-ны F, F'_x, F'_y
в точке (x,y) $F'_y \neq 0$.

$$\Rightarrow \boxed{y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}}$$

$\square$ x $\quad y(x) \quad F(x,y) = 0$

$\sphericalangle$ $\Delta x \quad \Delta y \quad F(x+\Delta x, y+\Delta y) = 0$

$$\Delta F = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = 0$$

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + o_1(\Delta\rho)\Delta x + o_2(\Delta\rho)\Delta y = 0 \quad \Big/ : \Delta x$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + o_1(\Delta\rho) + o_2(\Delta\rho)\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\left(\frac{\partial F}{\partial y} + o_2(\Delta\rho)\right) = -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + o_1(\Delta\rho)\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + o_1(\Delta\rho)}{\frac{\partial F}{\partial y} + o_2(\Delta\rho)}$$

$$\Delta x \to 0 \overset{\text{по непр. } y}{\Longrightarrow} \Delta y \to 0 \Rightarrow \Delta\rho \to 0 :$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$, где $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ по усл. $\blacksquare$

<u>Задача:</u> $z = z(x,y)$ задана неявно: $F(x,y,z) = 0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}}$$

При этом: z – непр.
F, F'_x, F'_y, F'_z – непр.
$F'_z \neq 0$

<u>Примеры:</u>

① $$\underbrace{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}_{F(x,y,z)} = 0$$

$$z_1 = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$
$$z_2 = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}$$

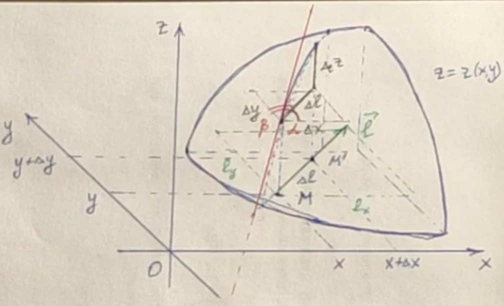
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$$

② $$\underbrace{e^z + x^2 y + z + 5}_{F(x,y,z)} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{e^z + 1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{e^z + 1}$$

п. 9. Производная по направлению



Вспомним п.5: $z = z(x,y)$, $M(x,y)$, $\vec{l} = (l_x, l_y)$

Δx, Δy вдоль $\vec{l}$ $\Rightarrow M'(x+\Delta x, y+\Delta y) \Rightarrow \Delta l = |MM'| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

$\Rightarrow \Delta_l z$

$\dfrac{\partial z}{\partial l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta_l z}{\Delta l}$ – производная z по напр. $\vec{l}$ в точке M.

Задача: Найти ф-лу для $\dfrac{\partial z}{\partial l}$.

$\exists\ z, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ непр. в окр-ти M.

$\sphericalangle\ \Delta_l z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y + o_1(\Delta l)\Delta x + o_2(\Delta l)\Delta y \ /: \Delta l$

$\dfrac{\Delta_l z}{\Delta l} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\Delta x}{\Delta l} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\Delta y}{\Delta l} + o_1(\Delta l)\dfrac{\Delta x}{\Delta l} + o_2(\Delta l)\dfrac{\Delta y}{\Delta l}$

$\dfrac{\Delta x}{\Delta l} = \cos\alpha$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta l} = \cos\beta$, где $\cos\alpha, \cos\beta$ – напр. косинусы $\vec{l}$

$\dfrac{\Delta_l z}{\Delta l} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cos\beta + o_1(\Delta l)\cos\alpha + o_2(\Delta l)\cos\beta$

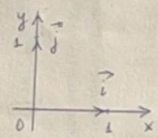
$\Delta l \to 0$:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta}, \quad \text{где } \cos\alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|}, \ \cos\beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|}$$

Замечание: $\sphericalangle\ \vec{l} = \vec{i}$: $\alpha = 0$, $\beta = \dfrac{\pi}{2}$

$\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = 0$

$\dfrac{\partial z}{\partial l} = \dfrac{\partial z}{\partial x} 1 + \dfrac{\partial z}{\partial y} 0 = \dfrac{\partial z}{\partial x}$



$\vec{l} = \vec{j}$: $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\beta = 0$

$\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 1$

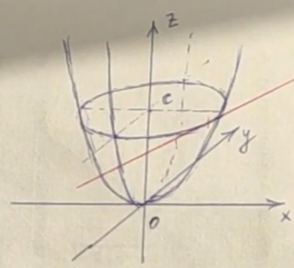
$\dfrac{\partial z}{\partial l} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot 0 + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot 1 = \dfrac{\partial z}{\partial y}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ – частные случаи $\dfrac{\partial z}{\partial l}$, т.е. по напр. $\vec{i}$ и $\vec{j}$, соотв.

Примеры:

① $z = x^2 + y^2$, M_0 на линии уровне L_c, $\vec{l}$ вдоль касат. к L_c.

Найти $\dfrac{\partial z}{\partial l}(M_0)$ в напр. $\vec{l}$.



L_c: $x^2 + y^2 = c$ – линия ур., $M_0(x_0, y_0) \in L_c$

Ур-ие касат. к L_c в M_0:

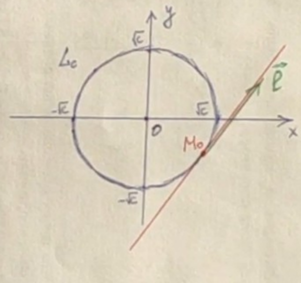
$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$, где $y_0 = y(x_0)$

$\dfrac{y - y_0}{y'(x_0)} = \dfrac{x - x_0}{1}$ $\qquad y' = -\dfrac{(x^2+y^2-c)'_x}{(x^2+y^2-c)'_y} = -\dfrac{2x}{2y} = -\dfrac{x}{y}$

$\dfrac{x - x_0}{1} = \dfrac{y - y_0}{y'(x_0)}$ $\qquad y'(x_0) = -\dfrac{x_0}{y_0}$

$\vec{s} = (1, y'(x_0))$ $\qquad \vec{s}\left(1, -\dfrac{x_0}{y_0}\right)$ $\qquad \sphericalangle\ \vec{l} = y_0 \cdot \vec{s} = (y_0, -x_0)$

$|\vec{l}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ $\qquad \cos\alpha = \dfrac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$



$\cos\beta = -\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$

$\sphericalangle\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad \dfrac{\partial z}{\partial x}(M_0) = 2x_0$

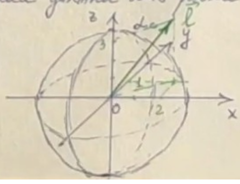
$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}(M_0) = 2y_0 \quad \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial l} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cos\beta =$

$= 2x_0 \dfrac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} + 2y_0\left(-\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\right) = 0$

При этом: L_c – линия произв. ур. c, M_0 – произв. точка на L_c $\Rightarrow$ произв. по напр. касат-х к линиям ур. равны 0.

Не удивительно! Т.к. вдоль линий ур. ф-ия $z = \text{const}$, а значит производная должна быть равна 0.

② $u = x^2 + y^2 + z^2$, $M = (1, 1, 1)$, $\vec{l} = (2, 1, 3)$, $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M) = ?$



$\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}(M) = 2x|_M = 2 \qquad |\vec{l}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14} \qquad \cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{14}}$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}(M) = 2y|_M = 2 \qquad \cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$

$\dfrac{\partial u}{\partial z}(M) = 2z|_M = 2 \qquad \cos\gamma = \dfrac{3}{\sqrt{14}}$

$\dfrac{\partial u}{\partial l}(M) = 2\dfrac{2}{\sqrt{14}} + 2\dfrac{1}{\sqrt{14}} + 2\dfrac{3}{\sqrt{14}} = \dfrac{12}{\sqrt{14}}$

п. 10. Частные производные высших порядков.

$z = z(x,y)$ $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y(x,y)$ — ф-ии перем. x и y

1   2

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (z'_x)'_x = z''_{xx}(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (z'_x)'_y = z''_{xy}(x,y)$$
$$\overset{?}{=}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (z'_y)'_x = z''_{yx}(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (z'_y)'_y = z''_{yy}(x,y)$$

4

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

8

Производная n-го пор. — это производная от производной $(n-1)$-го пор.

Примеры:

① $z = x^2 y + y^3$ Найти частн. произв. 2-го пор.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (2xy)'_x = 2y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (2xy)'_y = \underline{2x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3y^2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (x^2+3y^2)'_y = 6y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (x^2+3y^2)'_x = \underline{2x}$$

② $z = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$ Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ и $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^x + 2xy^3 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^x + 2y^3 \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \underline{2ye^x + 6y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^x + 3x^2y^2 + \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2ye^x + 6xy^2 \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \underline{2ye^x + 6y^2}$$

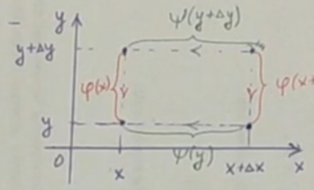
③ $u = z^2 e^{x+y^2}$ Найти $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z^2 e^{x+y^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z^2 e^{x+y^2} \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 2yz^2 e^{x+y^2} \qquad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z} = 2y\, e^{x+y^2}$$

Зависят ли производные от порядка дифф-е ?

Теорема

$z = z(x,y)$, z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx} — непр. в окр. $M(x,y)$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ $(z''_{xy} = z''_{yx})$



□ $\measuredangle\ A = [z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x+\Delta x, y)] - [z(x, y+\Delta y) - z(x,y)]$

$\rceil\ \varphi(x) = z(x, y+\Delta y) - z(x,y)$

$\Rightarrow A = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$

Т.к. z'_x опр. в окр. M, то $\varphi(x)$ дифф-ма на $(x, x+\Delta x)$

$\Rightarrow$ по т. Лагранжа $\exists\ \bar{x} \in (x, x+\Delta x)$:

$A = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \varphi'(\bar{x})\Delta x$

$\varphi'(\bar{x}) = z'_x(\bar{x}, y+\Delta y) - z'_x(\bar{x}, y)$

Т.к. z''_{xy} опр. в окр. M, то z'_x дифф-ма по y на $(y, y+\Delta y)$

$\Rightarrow$ по т. Лагранжа $\exists\ \bar{y} \in (y, y+\Delta y)$:

$\varphi'(\bar{x}) = z'_x(\bar{x}, y+\Delta y) - z'_x(\bar{x}, y) = z''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\Delta y$

$\Rightarrow A = z''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\Delta x \Delta y$

$\measuredangle\ A = [z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x, y+\Delta y)] - [z(x+\Delta x, y) - z(x,y)]$

$\rceil\ \psi(y) = z(x+\Delta x, y) - z(x,y)$

$\Rightarrow A = \psi(y+\Delta y) - \psi(y)$

Т.к. z'_y опр. в окр. M, то $\psi(y)$ дифф-ма на $(y, y+\Delta y)$

$\Rightarrow$ по т. Лагранжа $\exists\ \bar{\bar{y}} \in (y, y+\Delta y)$:

$A = \psi(y+\Delta y) - \psi(y) = \psi'(\bar{\bar{y}})\Delta y$

$\psi'(y) = z'_y(x+\Delta x, y) - z'_y(x,y)$

Т.к. z''_{yx} опр. в окр. M, то z'_y дифф-ма по x на $(x, x+\Delta x)$

$\Rightarrow$ по т. Лагранжа $\exists\ \bar{\bar{x}} \in (x, x+\Delta x)$:

$\psi'(\bar{\bar{y}}) = z'_y(x+\Delta x, \bar{\bar{y}}) - z'_y(x, \bar{\bar{y}}) = z''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})\Delta x$

$\Rightarrow A = z''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})\Delta y \Delta x$

$$\Rightarrow z''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\Delta x \Delta y = z''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})\Delta y \Delta x, \qquad \bar{x} \text{ и } \bar{\bar{x}} \in (x, x+\Delta x), \quad \bar{y} \text{ и } \bar{\bar{y}} \in (y, y+\Delta y)$$

$M'(x+\Delta x, y+\Delta y) \longrightarrow M(x,y)$:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} z''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} z''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$$

$$\underline{z''_{xy}(x,y) = z''_{yx}(x,y)} \quad \text{по непр. } z''_{xy} \text{ и } z''_{yx} \text{ в } M(x,y)$$

Следствие: Если частн. произв. непр. в точке, то порядок дифф-е в этой точке не важен.

Упражнение: $u = z^2 e^{x+y^2}$ из примера ③. Проверить, что частн. произв. 3-го пор. по x, y, z совпадают.

п.11. Дифференциалы высших порядков

• $z = z(x,y)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)z$$ ← оператор дифф-ла 1-го пор.

оператор дифф-ла 2-го пор.

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z$$

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy\right)dx + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy\right)dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

$$\Rightarrow d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2\right)z$$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Можно показать, что:

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z = \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3}dy^3\right)z$$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

...

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k\right)z, \quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

• $u = u(x,y,z)$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)u$$

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}dydz\right)u$$

Бином Ньютона

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

...

Примеры

① $z = \sin(2x+y)$ Найти d^3z в точке $(0;\pi)$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cos(2x+y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4\sin(2x+y)$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = -8\cos(2x+y)$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(0;\pi) = 8$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(2x+y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\cancel{\cos}\sin(2x+y)$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -\cos(2x+y)$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}(0;\pi) = 4$

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} = -4\cos(2x+y)$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} = -2\cos(2x+y)$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}(0;\pi) = 2$

$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(0;\pi) = 1$

$d^3z(0;\pi) = 8dx^3 + 12dx^2dy + 6dxdy^2 + dy^3$

② $u = xyz$ Найти d^2u

$\frac{\partial u}{\partial x} = yz$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = z$

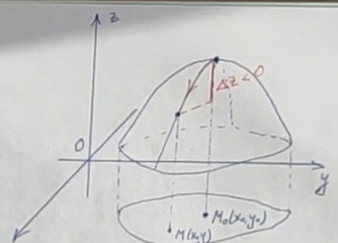
$\frac{\partial u}{\partial y} = xz$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = y$

$\frac{\partial u}{\partial z} = xy$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = x$

$d^2u = 2z\,dxdy + 2y\,dxdz + 2x\,dydz$

п.12. Максимум и минимум ф-ии

$z = z(x,y)$



Опр. В точке $M_0(x_0,y_0)$ ф-ия $z(x,y)$ имеет:

• максимум (max), если $z(x,y) < z(x_0,y_0) \iff \Delta z < 0$

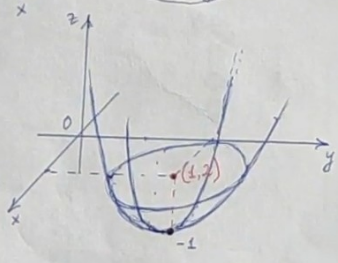
• минимум (min), если $z(x,y) > z(x_0,y_0) \iff \Delta z > 0$

Опр. Минимум и максимум ф-ии наз. экстремумами, а точки, в кот. они достигаются, наз. точками экстремума.

Примеры:

① $z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$ в $M_0(1,2)$ достиг. экстремума (минимума)

параболоид с верш. в $(1,2)$



Покажем это: $z(1,2) = -1$ $\forall (x,y) \neq (1,2)$ $(x-1)^2$ и $(y-1)^2 > 0$

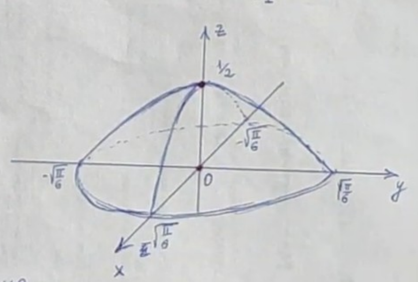
$\Rightarrow z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 > -1$

$\Rightarrow z(x,y) > z(1,2) \Rightarrow M_0(1,2)$ – точка минимума

$z = -1$ – минимум

② $z = \frac{1}{2} - \sin(x^2+y^2)$ в $O(0;0)$ достиг. максимума

$\sin(x^2+y^2) = \frac{1}{2}$ $x^2+y^2 = \frac{\pi}{6}$



Покажем это: $\sphericalangle\ \Delta z(0;0) = z(x,y) - z(0;0) =$

$= \left(\frac{1}{2} - \sin(x^2+y^2)\right) - \left(\frac{1}{2} - \underbrace{\sin(0^2+0^2)}_{0}\right) = -\sin(x^2+y^2)$

$\sphericalangle$ окрестность точки $O(0;0)$: $0 < x^2+y^2 \leq \frac{\pi}{6}$ $\Rightarrow \sin(x^2+y^2) > 0$

$(M(x,y) \neq O(0;0))$ $\Rightarrow \Delta z < 0$

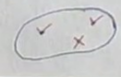
$\Rightarrow O(0;0)$ – точка максимума

$z = \frac{1}{2}$ – максимум

Как найти точки экстремума?

Н.У. ⇒ точки, подозрит. на экстр.

Д.У. ⇒ точки экстр.



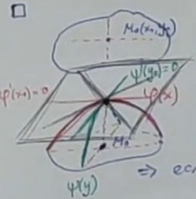
Опр. Точка, в кот. $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ или $\nexists$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ или $\nexists$, наз. критической.

Критич. точка, для кот. $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, наз. стационарной.

Теорема (необходимые условия экстремума)

$M_0(x_0, y_0)$ – точка экстремума ф-ии $z = z(x,y)$ $\Rightarrow$ M_0 – критическая, т.е. $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = 0 \text{ или } \nexists \\ \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = 0 \text{ или } \nexists \end{cases}$

□



$\measuredangle$ $z(x,y)$ в окр. $M_0(x_0,y_0)$ при фикс. $y = y_0$

$\Rightarrow z = z(x, y_0) = \varphi(x)$ – ФОП и x_0 – т. экстр. $\varphi(x)$

$\Rightarrow$ по Н.У. экстр. ФОП: $\varphi'(x_0) = 0$ или $\nexists$, т.е. $z'_x(x_0,y_0) = 0$ или $\nexists$

$\measuredangle$ $z(x,y)$ в окр. $M_0(x_0,y_0)$ при фикс. $x = x_0$

$\Rightarrow z = (x_0, y) = \psi(y)$ – ФОП и y_0 – т. экстр.

$\Rightarrow$ по Н.У. экстр. ФОП: $\psi'(y_0) = 0$ или $\nexists$, т.е. $z'_y(x_0,y_0) = 0$ или $\nexists$

$\Rightarrow$ если $M_0(x_0,y_0)$ – т. экстр. $z(x,y)$, то z'_x и z'_y в M_0 $= 0$ или $\nexists$, т.е. M_0 – критическая ■

Замечание: Теорема не утверждает, что если M_0 – критическая, то она т. экстр. !

Теорема сужает варианты для поиска: критические точки подозрит. на экстр., а в др. точках экстр. точно нет.

Почему? M_1 – не критич. точка, но ~~точка экстр.~~ $\Rightarrow$ по Н.У. она критическая (противоречие!)

Пример: Н.У. $\neq$ Д.У. в общем случае

$z = x^2 - y^2 + 1$ – гиперболич. параболоид

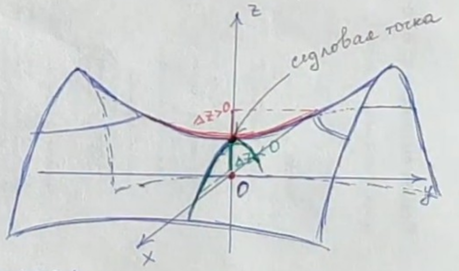
$\measuredangle$ $O(0;0)$

Н.У.: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$ $\Big|$ $x = 0$, $y = 0$ $\Rightarrow O(0;0)$ – стац. точка

$\measuredangle$ $\Delta_x z(0;0) = z(x,0) - z(0,0) = x^2 > 0$ при $x \neq 0$

$\Delta_y z(0;0) = z(0,y) - z(0,0) = -y^2 < 0$ при $y \neq 0$

$\Big\}$ $O(0;0)$ – не т. экстр. по опр.



Теорема (достаточные условия экстремума)

] $M_0(x_0, y_0)$ – стац. точка ф-ии $z = z(x,y)$

и в окр. M_0 ф-ия z имеет непр. частн. произв. до 3-го пор. (вкл.)

] $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0)$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0)$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0)$, $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$

$\Rightarrow$
1) если $D > 0$ и $A < 0$, то M_0 – т. максимума
2) если $D > 0$ и $A > 0$, то M_0 – т. минимума
3) если $D < 0$, то M_0 – седловая точка (экстр. нет)
4) если $D = 0$, то требуется доп. исслед-е (проверка др. Д.У.)

□ бу док-ва ■

Примеры:

(4) вспомним $z = x^2 - y^2 + 1$ из (3)

$O(0;0)$ – седловая

Д.У.: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0) = 2$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0) = 0$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0) = -2$

$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$

$\Rightarrow O(0;0)$ – седловая точка

(5) вспомним $z = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2)$ из (2)

$O(0;0)$ – т. максимума

Н.У.: $\frac{\partial z}{\partial x} = -2x\cos(x^2+y^2)$, $\frac{\partial z}{\partial x}(0) = 0$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y\cos(x^2+y^2)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0) = 0$

$\Rightarrow O(0;0)$ – стац. точка

Д.У.: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2\left(\cos(x^2+y^2) - 2x^2\sin(x^2+y^2)\right)$, $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0) = -2$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy\sin(x^2+y^2)$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0) = 0$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\left(\cos(x^2+y^2) - 2y^2\sin(x^2+y^2)\right)$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0) = -2$

$D = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$, $A = -2 < 0$ $\Rightarrow O(0;0)$ – т. макс.

(6) $z = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4$ Найти экстремумы

Н.У.: $z'_x = 2x - 2$, $z'_y = 2y - 4$, $\exists\ \forall (x,y)$; $= 0$ при $x = 1$; $= 0$ при $y = 2$

$\Rightarrow M_0(1,2)$ – стац. точка

Д.У.: $z''_{xx} = 2$, $A = 2$; $z''_{xy} = 0$, $B = 0$; $z''_{yy} = 2$, $C = 2$

$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$

$A = 2 > 0$

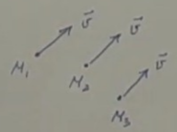
$\Rightarrow M_0(1,2)$ – т. минимума

$z(1,2) = -1$ – минимум

§2 Векторная ф-ия и векторное поле

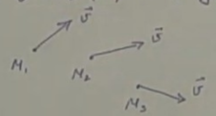
п.1 Основные понятия

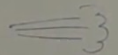
∡ $\vec{v} = (v_x, v_y) = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$

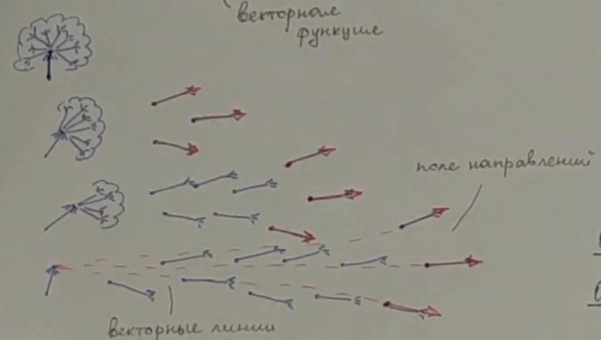


∡ $\vec{v} = \vec{v}(M) = \vec{v}(x;y) = \vec{v}\,(v_x(x;y), v_y(x;y)) =$

$= v_x(x,y)\,\vec{i} + v_y(x,y)\,\vec{j}$



Пример:  $\vec{v}(x,y)$ векторная функция



Опр. Векторной функцией (вектор-функцией) в области D наз. вектор, координатами которого являются ф-ии в этой обл. D:

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z),\, Q(x,y,z),\, R(x,y,z)\big) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$$

Т.е. в обл. D задано векторное поле.

Опр. Графиком вектор-ф-ии явл. поле направлений.

Опр. Линия, в каждой точке которой вект. поле направлено по касательной к ней, наз. векторной линией этого вект. поля.

Пример: $\vec{F}(x,y) = (x-y,\, x+y)$, т.е. $P(x,y) = x-y$, $Q(x,y) = x+y$

Вект. линии: $y(x)$

$\vec{F}$ – напр. вектор касательной к графику $y(x)$

$$y'(x) = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \qquad y' = \frac{x+y}{x-y}$$

$$y^2 + 2xy - x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

п.2 Градиент

$z = z(x,y)$ дифф. в обл. D

Опр. В каждой точке M обл. D зададим вектор:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}(M);\ \frac{\partial z}{\partial y}(M)\right) = \frac{\partial z}{\partial x}(M)\,\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}(M)\,\vec{j} = \operatorname{grad} z(M)$$

– градиент ф-ии $z = z(x,y)$ в обл. D.

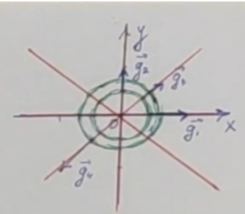
Замечание:

- Градиент – вектор-ф-ия в обл. D и задаёт вект. поле в обл. D, кот. наз. полем градиентов.
- z – ск. поле в обл. D
  $\operatorname{grad} z$ – вект. поле в обл. D
  ⇒ любому ск. полю, дифф. в обл. D, соответствует поле его градиентов в этой обл.
- $u = u(x,y,z)$
  $$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x};\ \frac{\partial u}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

⇒ касат-е ⊥ ⇒ градиент ⊥ линиям ур.

Замечание: аналогичное св-во ⊥ градиента ф-ии трёх переменных $u = u(x,y,z)$ к поверхности ур. этой ф-ии будет доказано в одном из след. видео.

Пример: $z = \dfrac{x^2+y^2}{2}$



$\operatorname{grad} z = (x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\vec{g}_1 = \operatorname{grad} z(1,0) = (1,0)$

$\vec{g}_2 = \operatorname{grad} z(0,1) = (0,1)$

$\vec{g}_3 = \operatorname{grad} z\left(\frac{\sqrt2}{2}; \frac{\sqrt2}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt2}{2}; \frac{\sqrt2}{2}\right)$

$\vec{g}_4 = \operatorname{grad} z(-1;-1) = (-1;-1)$

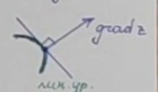
- Вект. линии градиента: $k = y' = \dfrac{y}{x}$ $\quad y = Cx,\ C \in \mathbb{R}$ и $x = 0$
  – пучок прямых из $O(0,0)$
- Линии уровня ф-ии: $x^2 + y^2 = 2C$
  – концентрич. окр-ти с ц. в $O(0;0)$

? Всегда ли поле градиентов ф-ии напр. ⊥ линиям ур. этой ф-ии?

Свойства градиента

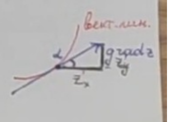
① Градиент в каждой точке направлен ⊥ к линии уровня, проходящей через эту точку.

□ • $z = z(x,y)$ $\quad z(x,y) = C$ – лин. ур.



$k_1 = y' = -\dfrac{z'_x}{z'_y}$

• $\operatorname{grad} z = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}; \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = z'_x\vec{i} + z'_y\vec{j}$



$k_2 = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{z'_y}{z'_x}$

• $k_1 \cdot k_2 = -\dfrac{z'_x}{z'_y} \cdot \dfrac{z'_y}{z'_x} = -1$

② Линейность:

$\mathrm{grad}(f+g) = \mathrm{grad}f + \mathrm{grad}g$

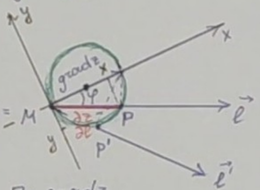
$\mathrm{grad}(af) = a\,\mathrm{grad}f, \quad a \in \mathbb{R}$

□ Упр. ■

③ $\mathrm{grad}(f\cdot g) = f\,\mathrm{grad}g + g\,\mathrm{grad}f$

□ Упр. ■

④ $\frac{\partial z}{\partial \ell} = \text{Пр}_{\vec{\ell}}\,\mathrm{grad}\,z$



□ $\frac{\partial z}{\partial \ell} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta =$

$= \mathrm{grad}\,z \cdot \vec{\ell^0} =$

$= |\mathrm{grad}\,z|\cos\varphi = \text{Пр}_{\vec{\ell}}\,\mathrm{grad}\,z$

$\varphi = \angle(\mathrm{grad}\,z, \vec{\ell^0})$ ■

Геом. смысл:

$$\begin{cases} x = \frac{\partial z}{\partial \ell}\cdot\cos\varphi \\ y = \frac{\partial z}{\partial \ell}\cdot\sin\varphi \end{cases} \qquad \frac{\partial z}{\partial \ell} = |\mathrm{grad}\,z|\cdot\cos\varphi, \quad] \; |\mathrm{grad}\,z| = g$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = g\cdot\cos^2\varphi = \frac{1}{2}g(1+\cos 2\varphi) \\ y = g\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}g\sin 2\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(x - \frac{g}{2}\right) = \frac{1}{2}g\cos 2\varphi \\ y = \frac{1}{2}g\sin 2\varphi \end{cases}$$

$$\left(x-\frac{g}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{g^2}{4}\cos^2 2\varphi + \frac{g^2}{4}\sin^2 2\varphi = \frac{g^2}{4}$$

$\Rightarrow \left(x-\frac{g}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{g^2}{4}$ – траектория окружности, с центром в $(g/2, 0)$ и радиусом $g/2$.

$\Rightarrow$ Получаем, что величина произв. ф-ии z по напр. $\vec{\ell^0}$ в точке M м.б. найдена как длина хорды MP, где P – точка пересечения окружности, содержащей точку M и с диаметром $|\mathrm{grad}\,z|$, и луча вдоль напр. $\vec{\ell^0}$. (φ – острый)

Если изменить напр. $\vec{\ell}$ на противоположное (φ – тупой), то знак $\frac{\partial z}{\partial \ell}$ изменится, но абс. величина сохранится

Замечание:

$u = u(x,y,z)$ ф-ла верна: $\frac{\partial u}{\partial \ell} = \text{Пр}_{\vec{\ell}}\,\mathrm{grad}\,u$

При этом вместо окружности рисуется сфера.

⑤ Производная ф-ии по напр. её градиента максимальна и равна $\frac{\partial z}{\partial \ell} = |\mathrm{grad}\,z|$

□ $\frac{\partial z}{\partial \ell} = |\mathrm{grad}\,z|\cdot\cos\varphi, \quad \varphi = \angle(\mathrm{grad}\,z, \vec{\ell^0})$

$\cos\varphi = 1$ при $\varphi = 0$ ■

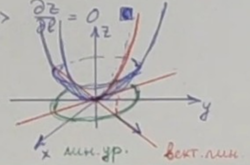
Таким образом, градиент показывает напр. наибольшего изменения ф-ии.

⑥ Производная ф-ии по напр., $\perp$ градиенту, равна 0.

□ $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial \ell} = 0$ ■

Замечание:

Вспомним пример: $z = \frac{x^2+y^2}{2}$

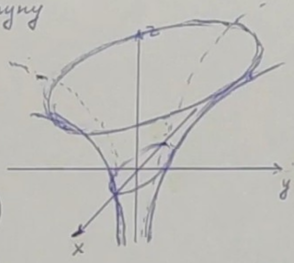


Примеры:

① Найти наибольшую крутизну подъема поверхности

$z = \ln(x^2+2y^2)$

в точке $(6, 4, \ln 100)$.



○ Св-во 5: $\frac{\partial z}{\partial \ell} = |\mathrm{grad}\,z|$

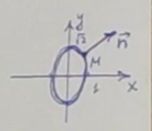
$\measuredangle\ \mathrm{grad}\,z = \left(\frac{2x}{x^2+2y^2}; \frac{4y}{x^2+2y^2}\right)$

$\mathrm{grad}\,z(6,4) = \left(\frac{12}{100}; \frac{16}{100}\right)$

$|\mathrm{grad}\,z(6,4)| = \sqrt{\left(\frac{12}{100}\right)^2 + \left(\frac{16}{100}\right)^2} = \frac{\sqrt{144+256}}{100} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow$ наиб. крутизна подъема: $1/5$. ●

② Док-ть, что произв. ф-ии $z = y^2/x$ в любой точке эллипса $2x^2 + y^2 = 1$ по напр. нормали к эллипсу равна 0.



○ $]\ M(x,y)$ – точка на эллипсе

$\frac{\partial z}{\partial n}(M) = \mathrm{grad}\,z(M)\cdot\vec{n^0} \overset{\text{покажем}}{=} 0$

• $\mathrm{grad}\,z(M) = \left(-\frac{y^2}{x^2}; 2\frac{y}{x}\right)$

• $\vec{n}$ – нормаль к эллипсу

$]$ эллипс $2x^2+y^2=1$ – это линия ур. ф-ии $\tilde{z} = 2x^2+y^2$

по св-ву ① $\mathrm{grad}\,\tilde{z}(M) \perp$ эллипсу

$\Rightarrow\ ]\ \vec{n} = \mathrm{grad}\,\tilde{z}(M) = (4x, 2y)$

• $\mathrm{grad}\,\tilde{z}(M)\cdot\vec{n^0} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{grad}\,\tilde{z}(M)\cdot\vec{n} = 0$

$\measuredangle\ \mathrm{grad}\,\tilde{z}(M)\cdot\vec{n} = -\frac{y^2}{x^2}\cdot 4x + 2\frac{y}{x}\cdot 2y =$

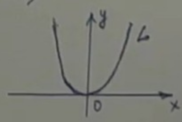
$= -4\frac{y^2}{x} + 4\frac{y^2}{x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial \ell}(M) = 0$ ●

п. 3. Касательная прямая и нормальная плоскость кривой

~ L – кривая на плоскости (ДПСК)

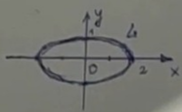
① $L: y = y(x)$ – явно

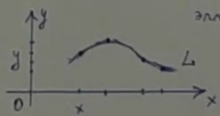
Пример: $y = x^2$ парабола



② $L: F(x, y) = 0$ – неявно

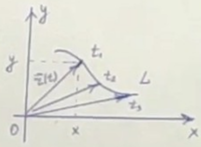
Пример: $\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$ эллипс





③ $L: \vec{r} = \vec{r}(t)$ векторно

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$ параметрически

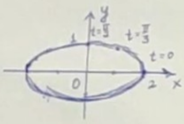


Пример:

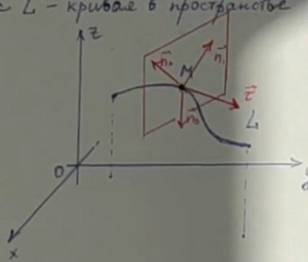
$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{2} = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$\Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ур-ие эллипса



~ L – кривая в пространстве (ДПСК)



$\vec{\tau} \perp \vec{n}$

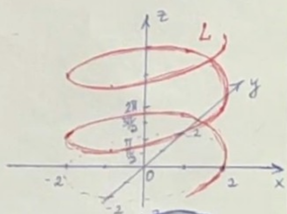
$\vec{\tau} \cdot \vec{n} = 0$

① $L: \vec{r} = \vec{r}(t)$ векторно

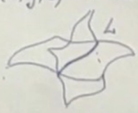
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$ параметрически

Пример:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$$

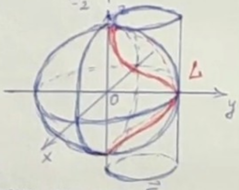


② $L: \begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = 0 \\ \Phi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ неявно (пересечение 2х пов-й)



Пример:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases}$$

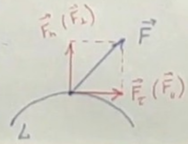


Опр. $\vec{\tau}$ – касат. вектор кривой (напр-н по касат-й)

$\vec{n}$ – нормальный вектор кривой (напр-н $\perp$ к касат-й)

Опр. Все векторы $\vec{n}$, $\perp$ к $\vec{\tau}$ в точке, лежат в пл-ти, кот. наз. нормальной плоскостью кривой в этой точке.

Опр.



$\vec{F}_\tau$ – тангенц. комп-та $\vec{F}$

$\vec{F}_n$ – нормальная комп-та $\vec{F}$

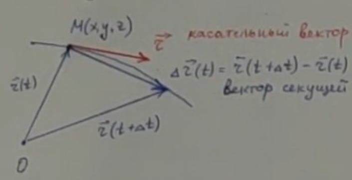
$$\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n$$

Уравнение касательной прямой и нормальной плоскости

① $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}; \frac{\Delta y}{\Delta t}; \frac{\Delta z}{\Delta t}\right) = \left(\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}; \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}; \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}\right) =$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt}\right) = x'(t)\cdot\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$



$\vec{\tau}$ касательный вектор

$\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ вектор секущей

$$\vec{\tau} = \vec{r}\,'(t)$$

$x(t), y(t), z(t)$ – дифф-мы

Ур-ие касат. прямой ℓ: в точке $M(x, y, z)$

$$\frac{X - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z - z}{\frac{dz}{dt}},$$

где X, Y, Z – коорд. переменной точки касат. прямой

Ур-ие норм. плоскости α: в точке $M(x, y, z)$

$$\frac{dx}{dt}(X - x) + \frac{dy}{dt}(Y - y) + \frac{dz}{dt}(Z - z) = 0,$$

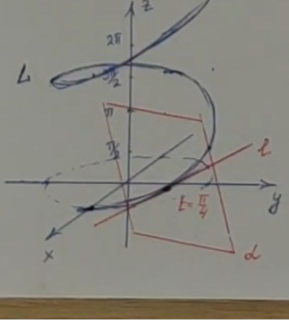
где X, Y, Z – коорд. переменной точки норм. плоскости

Пример:

L – винтовая линия:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$$

Написать ур-ия касат-й прямой ℓ и норм. пл-ти α к винтовой линии в произвольной точке и в точке при $t = \frac{\pi}{4}$.



○ $\frac{dx}{dt} = -\sin t \quad \frac{dy}{dt} = \cos t \quad \frac{dz}{dt} = 1$

$$\ell: \frac{X - \cos t}{-\sin t} = \frac{Y - \sin t}{\cos t} = \frac{Z - t}{1}, \quad \text{в } t = \tfrac{\pi}{4}: \frac{X - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{Y - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{Z - \frac{\pi}{4}}{1}$$

$$\alpha: -\sin t\,(X - \cos t) + \cos t\,(Y - \sin t) + (Z - t) = 0$$

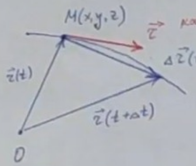
$$\text{в } t = \tfrac{\pi}{4}: \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(Y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(Z - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$-X + Y + \sqrt{2}\,Z = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}$$

Уравнение касательной прямой и нормальной плоскости

(1) $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $\quad \vec{\tau} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}; \dfrac{\Delta y}{\Delta t}; \dfrac{\Delta z}{\Delta t}\right) = \left(\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}; \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta t}; \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta t}\right) =$

$$= \left(\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt}\right) = x'(t)\cdot\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$



$\vec{\tau} = \vec{\tau}(t)$ $\qquad x(t), y(t), z(t)$ – дифф-мы

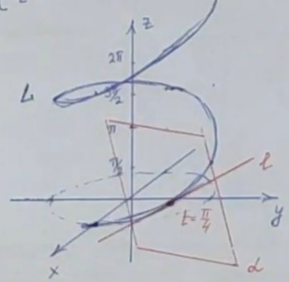
- Ур-ие касат. прямой ℓ в точке $M(x,y,z)$: $\quad \dfrac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{Y-y}{\frac{dy}{dt}} = \dfrac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}$, где X, Y, Z – коорд. переменной точки касат. прямой

- Ур-ие норм. плоскости α в точке $M(x,y,z)$: $\quad \dfrac{dx}{dt}(X-x) + \dfrac{dy}{dt}(Y-y) + \dfrac{dz}{dt}(Z-z) = 0$, где X, Y, Z – коорд. переменной точки норм. плоскости

Пример:

L - винтовая линия: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$

Написать ур-ия касат-й прямой ℓ и норм. пл-ти α к винтовой линии в произвольной точке и в точке при $t = \frac{\pi}{4}$.



○ $\dfrac{dx}{dt} = -\sin t \qquad \dfrac{dy}{dt} = \cos t \qquad \dfrac{dz}{dt} = 1$

$\ell: \dfrac{X-\cos t}{-\sin t} = \dfrac{Y - \sin t}{\cos t} = \dfrac{Z-t}{1}$, в $t=\frac{\pi}{4}$: $\dfrac{X-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{Y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{Z-\frac{\pi}{4}}{1}$

$\alpha: -\sin t\,(X-\cos t) + \cos t\,(Y-\sin t) + (Z-t) = 0$

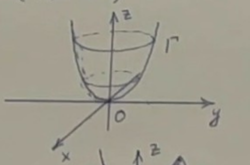
в $t=\frac{\pi}{4}$: $-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(X-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(Y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(Z-\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$-X + Y + \sqrt{2}\,Z = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}$$

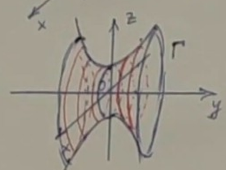
п 4 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

~ Г - поверхность в пространстве (в ДПСК)

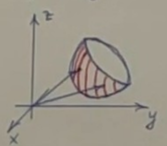
(1) Г: $z = f(x,y)$ – явно $\qquad$ Пример: $z = x^2 + y^2$ параболоид



(2) Г: $F(x,y,z) = 0$ – неявно $\qquad$ Пример: $x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$ однополостный гиперболоид



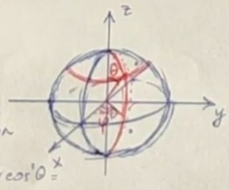
(3) Г: $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ – векторно



$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ – параметрически

Пример:

$\begin{cases} x = 2\cos\varphi\sin\theta \\ y = 2\sin\varphi\sin\theta \\ z = 2\cos\theta \end{cases}$ $\quad$ θ, φ – параметры, θ – зенитный угол, φ – азимутальный угол



$x^2+y^2+z^2 = 4\cos^2\varphi\sin^2\theta + 4\sin^2\varphi\sin^2\theta + 4\cos^2\theta =$

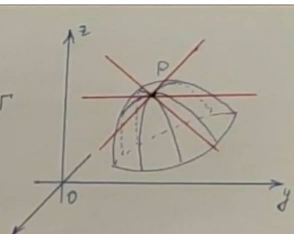
$= 4(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\sin^2\theta + 4\cos^2\theta =$

$= 4\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi = 4$

$x^2+y^2+z^2 = 4$ – сфера с ц. в $O(0;0;0)$ и радиусом 2.

Г: $F(x,y,z) = 0$ – пов-ть

$P(x,y,z)$ – точка на Г



Опр. Прямая линия наз. касательной к пов-ти в точке P, если она является касательной к какой-либо кривой, лежащей на пов-ти и проходящей через точку P.

Замечание: ∞ много различных касат. к пов-ти в точке.

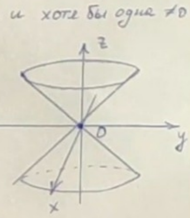
Опр.

$M(x,y,z)$ наз. особой точкой пов-ти, если в M все $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z} = 0$ или хотя бы одна $\nexists$

$M(x,y,z)$ наз. обыкновенной точкой пов-ти, если в M все $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}$ $\exists$ и непр. и хотя бы одна $\neq 0$

Пример: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ – конус

вершина конуса $O(0;0;0)$ – особая точка пов-ти



○ $F(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$

$\dfrac{\partial F}{\partial x}(0) = 2x|_0 = 0$

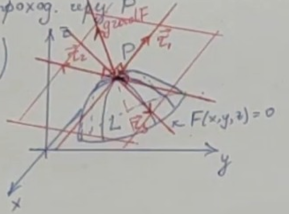
$\dfrac{\partial F}{\partial y}(0) = 2y|_0 = 0 \quad \Rightarrow O(0;0;0)$ – особая точка конуса

$\dfrac{\partial F}{\partial z}(0) = -2z|_0 = 0$

Теорема

В обыкновенной точке P все касат. прямые к данной пов-ти лежат в одной плоскости.

$\square$ $\measuredangle$ L - кривая на пов-ти, проход. через P



$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $\vec{\tau} = \left(\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt}\right)$ - касат. вектор

Подставим в ур-ие пов-ти:

$F(x(t), y(t), z(t)) = 0 \;\Big/ \frac{d}{dt}$

$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = 0$

$\hookrightarrow$ ск. произв.: $\mathrm{grad}F \cdot \vec{\tau} = 0$

Т.к. L - произв. $\Rightarrow$ все касат-е прямые $\perp \mathrm{grad}F(P)$
$\Rightarrow$ лежат в одной пл-ти $\blacksquare$

Опр. Плоскость, в кот. расположены все касат-е прямые к пов-ти в данной точке P, наз. касательной плоскостью к пов-ти в точке P.

Замечание:
В особых точках может не существ. касат. пл-ти.
Вспомним конус:
в $O(0,0,0)$ - особой точке - касат. к кривым не лежат в одной пл-ти (они сами образуют конич. пов-ть)

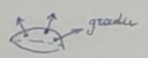
Опр. Прямая, проведённая через точку P пов-ти $\perp$ касат-й пл-ти, наз. нормалью к пов-ти в этой точке

Следствие

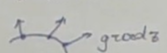
$\measuredangle$ $F(x,y,z)=0$ - пов-ть Γ как пов-ть уровня ф-ии $u(x,y,z)$

По теореме $\mathrm{grad}F \perp \vec{\tau}$, где $\vec{\tau}$ - любой касат. вектор

$\Rightarrow$ $\mathrm{grad}\,u$ в точке направлен по нормали к пов-ти уровня в данной точке



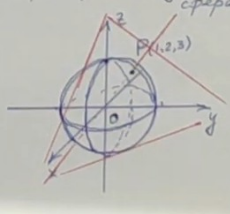
Вспомним: $\mathrm{grad}\,z$, где $z = z(x,y)$, в точке направлен $\perp$ к линии ур. ф-ии в этой точке



- Ур-ие касат. пл-ти к пов-ти в точке $P(x,y,z)$
$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0$$
Ур-ие нормали к пов-ти в точке $P(x,y,z)$
- $$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Упражнение: записать ур-ие для явно заданной пов-ти $z = z(x,y)$ / $y = y(x,z)$.

Пример: $x^2+y^2+z^2 = 14$ сфера $P(1,2,3)$ Ур-ие касат. пл-ти и нормали в P?



$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-14$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$ $\quad \frac{\partial F}{\partial x}(P) = 2$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$ $\quad \frac{\partial F}{\partial y}(P) = 4$

$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z$ $\quad \frac{\partial F}{\partial z}(P) = 6$

$\mathrm{grad}F(P) = (2,4,6)$

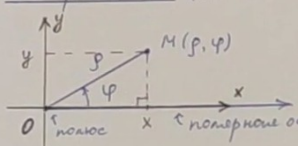
$\exists\, \vec{n} = \frac{1}{2}\mathrm{grad}F(P) = (1,2,3)$

Касат. пл-ть:
$(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0$
$x+2y+3z-14=0$

Нормаль:
$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$

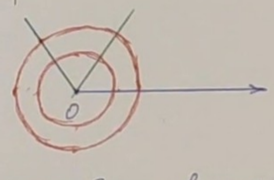
п.5 Криволинейные системы координат

~ **Полярная с.к.** (на плоскости)



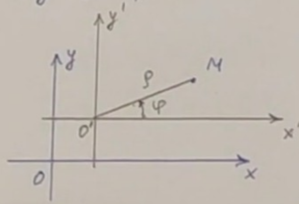
$\rho \geq 0$ $\quad$ ρ - полярный радиус
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $\quad$ φ - полярный угол
$(-\pi \leq \varphi \leq \pi)$

Коорд. линии:
ρ, φ_0 - конц. окр-ти с ц. в O
ρ_0, φ - лучи из O



$(x,y) \to (\rho, \varphi)$
$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$

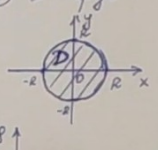
$(x,y) \to (x', y') \to (\rho, \varphi)$
$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$ $\begin{cases} x' = \rho\cos\varphi \\ y' = \rho\sin\varphi \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = \rho\cos\varphi \\ y - y_0 = \rho\sin\varphi \end{cases}$



Замечание: можно использовать и др. преобразование исх. СК., например, масштабирование:
$\begin{cases} ax = x' \\ cy = y' \end{cases}$ - "растяжение" вдоль оси Ox в a раз и вдоль оси Oy в c раз.
$a, c > 0$

Примеры: Перейти в полярную ск.

① D - круг: $x^2+y^2 \leq R^2$

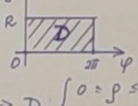


$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ $\quad \rho \geq 0$, $\; 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$x^2+y^2 \leq R^2$

$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi \leq R^2$

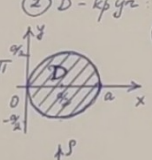
$\rho^2 \leq R^2$



$0 \leq \rho \leq R$, т.к. $\rho \geq 0$

$\Rightarrow D: \begin{cases} 0 \leq \rho \leq R \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

② D - круг: $x^2+y^2 \leq ax$, $a > 0$
$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}$



1) $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ $\quad \rho \geq 0$, $\; -\pi \leq \varphi \leq \pi$

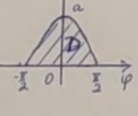
$x^2+y^2 \leq ax$

$\rho^2 \leq a\rho\cos\varphi \;/\; \rho > 0$

$0 \leq \rho \leq a\cos\varphi$

$\Rightarrow \cos\varphi \geq 0$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

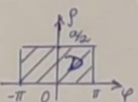


$\Rightarrow D: \begin{cases} 0 \leq \rho \leq a\cos\varphi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - \frac{a}{2} = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ $\quad \rho \geq 0$, $\; -\pi \leq \varphi \leq \pi$

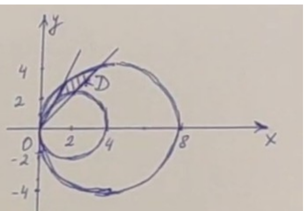
$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}$

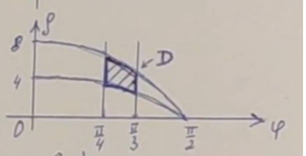
$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi \leq \frac{a^2}{4}$; $\quad \rho^2 \leq \frac{a^2}{4}$; $\quad 0 \leq \rho \leq \frac{a}{2}$ $\Rightarrow D: \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \frac{a}{2} \\ -\pi \leq \varphi \leq \pi \end{cases}$



③ Обл. D огр-на окр-ми $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=8x$ и прямыми $y=x$, $y=\sqrt{3}x$.

$(x-2)^2+y^2=4 \quad (x-4)^2+y^2=16$





$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi & \rho\geq 0 \\ y=\rho\sin\varphi & -\pi\leq\varphi\leq\pi \end{cases}$

$x^2+y^2=4x$
$\rho^2=4\rho\cos\varphi \; / : \rho>0$
$\underline{\rho=4\cos\varphi}$

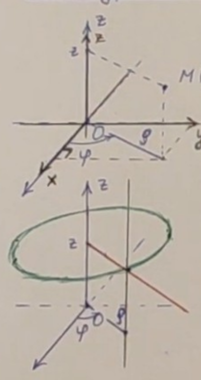
$x^2+y^2=8x$
$\underline{\rho=8\cos\varphi}$

$x=y$
$\rho\cos\varphi=\rho\sin\varphi$
$\mathrm{tg}\,\varphi=1$
$\left[\begin{array}{l} \varphi=\frac{\pi}{4} \\ \varphi=\frac{5\pi}{4} \end{array}\right.$ т.к. 1 четв.

$y=\sqrt{3}x$
$\underline{\varphi=\frac{\pi}{3}}$

$\Rightarrow D: \begin{cases} 4\cos\varphi\leq\rho\leq 8\cos\varphi \\ \frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{3} \end{cases}$

~ Цилиндрическая с.к. (в пространстве)



$\rho\geq 0$ ρ – полярный радиус

$0\leq\varphi\leq 2\pi$ $(-\pi\leq\varphi\leq\pi)$ φ – поляр. угол

$z\in\mathbb{R}$ z – аппликата

Координатные линии:

ρ, φ_0, z_0 – луч от Oz // поляр. пл-ти

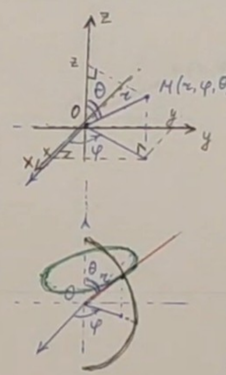
ρ_0, φ, z_0 – окр-ть с ц. на Oz и в поляр. пл-ти

ρ_0, φ_0, z – прямые // Oz

$(x,y,z)\to(\rho,\varphi,z)$

$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$

~ Сферическая с.к. (в простр-ве)



$r\geq 0$ r – радиальное расстояние

$0\leq\varphi\leq 2\pi$ $(-\pi\leq\varphi\leq\pi)$ φ – азимутальный угол

$0\leq\theta\leq\pi$ θ – зенитный угол

Координатные линии:

r, φ_0, θ_0 – луч из O

r_0, φ, θ_0 – окр-ть с ц. на Oz и в поляр. пл-ти

r_0, φ_0, θ – полуокр. с ц. в O и в пл-ти // Oz

$(x,y,z)\to(r,\varphi,\theta)$

$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$ или $\begin{cases} x=r\cos\varphi\sin\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\theta \end{cases}$

Замечание: перед переходом в крив. с.к. можно предварительно преобразовать исходную ДПСК, например, сдвигом или масштабир-м.

Примеры: Тело T описывается нер-ми $z\leq 1-\sqrt{x^2+y^2}$, $z\geq 0$.

④ Задать тело T в цилиндрич. и сферич. с.к., изобразить в "распрямленных" с.к.

$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi & \rho\geq 0 \\ y=\rho\sin\varphi & 0\leq\varphi\leq 2\pi \\ z=z & z\in\mathbb{R} \end{cases}$

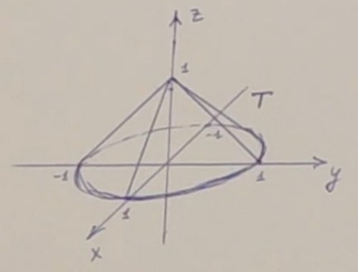
цилиндрич. с.к.

$0\leq z\leq 1-\sqrt{x^2+y^2}$

$\underline{0\leq z\leq 1-\rho}$

$\Rightarrow 0\leq 1-\rho$; $\underline{0\leq\rho\leq 1}$

$\Rightarrow T: \begin{cases} 0\leq z\leq 1-\rho \\ 0\leq\rho\leq 1 \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi \end{cases}$



$\begin{cases} x=r\cos\varphi\sin\theta & r\geq 0 \\ y=r\sin\varphi\sin\theta & 0\leq\varphi\leq 2\pi \\ z=r\cos\theta & 0\leq\theta\leq\pi \end{cases}$

сферич. с.к.

$0\overset{1)}{\leq} z\overset{2)}{\leq} 1-\sqrt{x^2+y^2}$

1) $z\geq 0$

$r\cos\theta\geq 0$; $\cos\theta\geq 0$; $\begin{cases} -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \\ 0\leq\theta\leq\pi \end{cases}$

$\Rightarrow 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

2) $z\leq 1-\sqrt{x^2+y^2}$

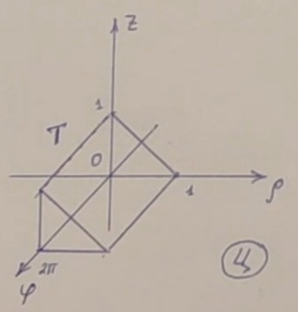
$r\cos\theta\leq 1-\sqrt{r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta}$

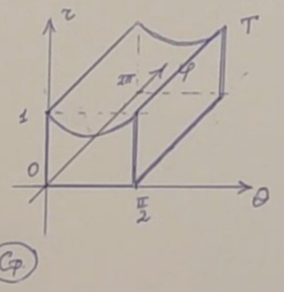
$r\cos\theta\leq 1-\sqrt{r^2\sin^2\theta}$, $\sin\theta\geq 0$, т.к. $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

$r\cos\theta\leq 1-r\sin\theta$ $\quad r\geq 0$

$r\leq\frac{1}{\underbrace{\sin\theta+\cos\theta}_{>0}}$

$\Rightarrow T: \begin{cases} 0\leq r\leq\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta} \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi \\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \end{cases}$





⑤ Тело T огр-но пов-ми:

1) $x^2 + 4y^2 = z - 1$ — элл. параболоид с верш. в $(0;0;1)$

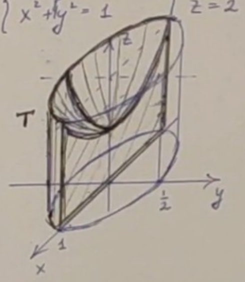
2) $x^2 + 4y^2 = 1$ — цилиндр с осью вдоль Oz

3) $z = 0$ — плоскость Oxy

4) $y = 0$ $(y \le 0)$ — плоскость Oxz

Линия пересечения параболоида и цилиндра

$$\begin{cases} x^2+4y^2 = z-1 \\ x^2+4y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+4y^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$ — эллипс в пл-ти // Oxy



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi & \rho \ge 0 \\ 2y = \rho\sin\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = z & z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2 + 4y^2 = \rho^2$

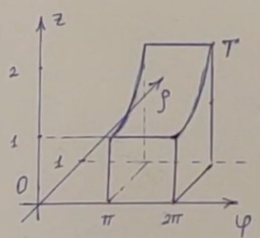
1) $\rho^2 = z - 1$; $z = 1 + \rho^2$

2) $\rho^2 = 1$; $\rho = 1$

3) $z = 0$

4) $\rho\sin\varphi = 0$ $(\rho\sin\varphi \le 0)$

~~$\varphi = 0$~~
~~$\varphi = \pi$~~ $(\pi \le \varphi \le 2\pi)$



$$\Rightarrow T: \begin{cases} 0 \le z \le 1 + \rho^2 \\ 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

⑥ Тело T задано нер-ми:

1) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z \le 2$ — шар с ц. в $A(-1;0;1)$ и рад. 2

$\hookrightarrow (x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 4$

2) $(x+1)^2 + y^2 \ge (z-1)^2$ — конус с верш. в A

3) $y - 1 \ge x$ — полупр-во с границей — пл-тью // Oz

4) $z \ge 1$ — полупр-во с границей — пл-тью // Oxy

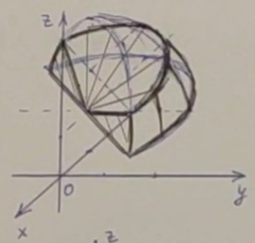
Линия пересечения границ — сферы и конуса:

$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4 \\ (x+1)^2 + y^2 = (z-1)^2 \end{cases}$$

$(z-1)^2 = 2$

$$\begin{cases} z = 1 + \sqrt{2} \quad (\text{т.к. } z \ge 1) \\ (x+1)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

— окр-ть с ц. $\cancel{(-1,0)}$ $(-1,0;1+\sqrt{2})$ и рад. $\sqrt{2}$ в пл-ти // Oxy



$$\begin{cases} x+1 = r\cos\varphi\sin\theta & r \ge 0 \\ y = r\sin\varphi\sin\theta & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z-1 = r\cos\theta & 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

1) $r^2 \le 4$; $0 \le r \le 2$

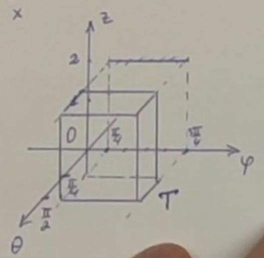
2) $r^2\sin^2\theta \ge r^2\cos^2\theta$; $tg^2\theta \ge 1$

$\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$

3) $r\sin\varphi\sin\theta \ge r\cos\varphi\sin\varphi$

$\sin\varphi \ge \cos\varphi$

$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4}$



4) $r\cos\theta \ge 0$

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$$T: \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

п. 6. Оператор Гамильтона

① $u(x,y,z)$ опр. и дифф. в обл. D — скал. поле в D.

$$\text{grad}\, u = \vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u = \nabla u$$

Опр. $\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ (символический вектор)

наз. оператором Гамильтона или набла-оператором (∇ – "набла")

- $\nabla u = \text{grad}\, u$ — умножение ∇ на скалярную ф-цию u.

② $\vec{F}(x,y,z) = \vec{i}P(x,y,z) + \vec{j}Q(x,y,z) + \vec{k}R(x,y,z)$ опр. и дифф. в D — вект. поле в D.

$$\nabla\cdot\vec{F} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\vec{i}P + \vec{j}Q + \vec{k}R\right) = \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q + \frac{\partial}{\partial z}R =$$

Опр. $\text{div}\,\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ наз. дивергенцией вект. поля $\vec{F}$

- $\nabla\cdot\vec{F} = \text{div}\,\vec{F}$ // Физич. смысл дивергенции будет рассм. позже

③ $$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} =$$

Опр. $\text{rot}\,\vec{F} = \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ наз. ротором или вихрем вект. поля $\vec{F}$

- $\nabla\times\vec{F} = \text{rot}\,\vec{F}$ // Физич. смысл ротора будет рассмотрен позже

④ **Опр.** Векторное поле $\vec F(x,y,z)$ наз. **потенциальным**, если $\vec F$ есть градиент некот. скалярной ф-ии $u(x,y,z)$:
$\exists\, u(x,y,z):\ \vec F = \operatorname{grad} u$, где u наз. **скалярным потенциалом** вект. поля $\vec F$ (просто **потенциалом**)

$$\Rightarrow \vec F = \operatorname{grad} u = \vec i\frac{\partial u}{\partial x} + \vec j\frac{\partial u}{\partial y} + \vec k\frac{\partial u}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y};\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z};\ \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial z};\ \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} = \frac{\partial R}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

$\Leftarrow$ $\operatorname{rot}\vec F = \vec 0$, т.е. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \vec 0$

- $\nabla\times(\nabla u) = \vec 0$

$(\nabla\times\nabla)u = \vec 0$, т.е. ∇ обл. св-м геом. вект. $(\vec a\times\vec a = 0)$

Опр. Если $\operatorname{rot}\vec F = \vec 0$, то вект. поле $\vec F$ наз. **безвихревым**. потенц. $\Rightarrow$ безвихр. $\Leftarrow$ (док-во позже)

⑤ **Опр.** Если $\operatorname{div}\vec F = 0$, то вект. поле $\vec F$ наз. **соленоидальным** или **трубчатым**.

Покажем, что вект. поле вихрей $\operatorname{rot}\vec F$ соленоидально, т.е. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec F) = 0$:

$$\square\ \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec F) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z} = 0 \ \blacksquare$$

- $\nabla\cdot(\nabla\times\vec F) = 0$

$\nabla\nabla\vec F = 0$, т.е. ∇ обладает св-м геом. вект. $(\vec a\vec a\vec b = 0)$

смеш. произв-е

⑥ $$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} =$$

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u$$

Опр. $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ наз. **оператором Лапласа**.

$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$

- $\nabla\cdot(\nabla u) = (\nabla\cdot\nabla)u = \Delta u$, т.е. $\Delta = \nabla^2$

Опр. Уравнение $\Delta u = 0$ или $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ (дифф. ур-ие в частн. произв.) наз. **ур-м. Лапласа**, а ф-ия, удовл-е ему, наз. **гармонической**.

Замечание: Потенциал $u(x,y,z)$ потенц-го и соленоид-го вект. поля $\vec F(x,y,z)$ явл. гармонической ф-ей.

$\square$ $\vec F$ потенциально $\Rightarrow \vec F = \operatorname{grad} u$
$\vec F$ соленоидально $\Rightarrow \operatorname{div}\vec F = 0$
$\Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = 0$, т.е. $\Delta u = 0 \Rightarrow u$ – гармонич.

Пример: Проверить вект. поле $\vec F = (4x + z - y)\vec i + (2y + x)\vec j + (x - 2z)\vec k$ на соленоидальность и потенциальность.

$\circ$ $P = 4x + z - y$ $\quad \frac{\partial P}{\partial x} = 4 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -1 \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 1$

$Q = -2y - x$ $\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -2 \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$

$R = x - 2z$ $\quad \frac{\partial R}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -2$

$\operatorname{div}\vec F = 4 + (-2) + (-2) = 0 \Rightarrow \vec F$ соленоидально

$\operatorname{rot}\vec F = \vec i(0-0) + \vec j(1-1) + \vec k(-1-(-1)) = \vec 0$

$\Rightarrow \vec F$ безвихревое

$\Rightarrow \vec F$ потенциальное

Т.к. $\vec F$ соленоид. и потенц., то потенц. и гармонический $\bullet$

(7) $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z) = \vec{i}\, a_x + \vec{j}\, a_y + \vec{k}\, a_z$ $\quad$ $\left.\begin{matrix} a_x, a_y, a_z \\ b_x, b_y, b_z \end{matrix}\right\}$ ф-ии x, y, z ; $f = f(x, y, z)$

$\vec{b} = \vec{b}(x, y, z) = \vec{i}\, b_x + \vec{j}\, b_y + \vec{k}\, b_z$

Опр. Производной вектора $\vec{a}$ по вектору $\vec{b}$ наз. вектор:

$$\frac{d\vec{a}}{d\vec{b}} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} b_x + \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} b_y + \frac{\partial \vec{a}}{\partial z} b_z = \vec{i}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_x}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_x}{\partial z} b_z\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_y}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_y}{\partial z} b_z\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial a_z}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_z}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_z}{\partial z} b_z\right)$$

$$\frac{d\vec{a}}{d\vec{b}} = \left(b_x \frac{\partial}{\partial x} + b_y \frac{\partial}{\partial y} + b_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{a} = (\vec{b} \cdot \nabla)\,\vec{a}$$

Упражнение: Док-ть следующие наиболее употребительные формулы:

1) $\operatorname{div} \vec{a} = \vec{i} \cdot \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial \vec{a}}{\partial z}$

2) $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{i} \times \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} + \vec{j} \times \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} + \vec{k} \times \frac{\partial \vec{a}}{\partial z}$

3) $\Delta \vec{a} = \vec{i}\, \Delta a_x + \vec{j}\, \Delta a_y + \vec{k}\, \Delta a_z$

4) $\operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times \operatorname{rot} \vec{b} + \vec{b} \times \operatorname{rot} \vec{a} + \frac{d\vec{a}}{d\vec{b}} + \frac{d\vec{b}}{d\vec{a}}$

5) $\operatorname{div}(f\vec{a}) = \vec{a} \cdot \operatorname{grad} f + f \operatorname{div} \vec{a}$

6) $\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}$

(6) 7) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$

(5) 8) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{a}) = 0$

9) $\operatorname{div}(\Delta \vec{a}) = \Delta(\operatorname{div} \vec{a})$

(4) 10) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$

11) $\operatorname{rot}(f\vec{a}) = \operatorname{grad} f \times \vec{a} + f \operatorname{rot} \vec{a}$

12) $\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \operatorname{div} \vec{b} - \vec{b} \operatorname{div} \vec{a} + \frac{d\vec{a}}{d\vec{b}} - \frac{d\vec{b}}{d\vec{a}}$

13) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{a}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}$