

Евклидово пространство

Содержание

§1	Метрическое и нормированное пространства	1
§2	Евклидово пространство	2
§3	Неравенство Шварца	3

§1. Метрическое и нормированное пространства

Определение. Метрическим пространством M называется некоторое множество, на котором определено отображение $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами:

M1. $\rho(x, y) \geq 0, \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$

M2. $\rho(x, y) = \rho(y, x);$

M3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$

Замечание. Отображение ρ называется **расстоянием** (или метрикой).

Пример 1.1. Приведем несколько примеров:

(а) M - произвольное, $\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y, \\ 0 & x = y; \end{cases}$

(б) $M = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|;$

(в) $M = \mathbb{R}^n, \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi^i - \eta^i)^2};$

(г) $M = C[a, b], \rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|;$

Определение. Нормированным пространством называется линейное пространство $X(\mathbb{R})$, наделенное отображением $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, обладающим следующими свойствами:

N1. $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \alpha \in \mathbb{R};$

N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Пример 1.2. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, тогда

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |\xi^i|^p}, \quad \|x\|_m = \max_{i=1 \dots n} |\xi^i|$$

Лемма 1.1. Любое нормированное пространство может быть метризовано:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Доказательство. Действительно, аксиома **M1** следует из **N1**, точно также **M2** следует из **N2**:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\| = \rho(y, x).$$

Для доказательства **M3** положим в **N3**

$$x = a - b, \quad y = b - c, \quad \Rightarrow \quad x + y = a - c,$$

которые после подстановки сразу дают необходимое неравенство. \square

§2. Евклидово пространство

Определение. Линейное пространство X над \mathbb{C} называется **комплексным евклидовым пространством**, если на нем задана *метрическая форма* $g(x, y) = \langle x, y \rangle$ со следующими свойствами:

E1. $\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \alpha \langle x, y_1 \rangle + \beta \langle x, y_2 \rangle$ - линейность по второму аргументу;

E2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ - эрмитовость;

E3. $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Замечание. Из аксиом **E1** и **E2**, в частности, следует

$$\langle \alpha x, y \rangle = \overline{\langle y, \alpha x \rangle} = \overline{\alpha \cdot \langle y, x \rangle} = \overline{\alpha} \cdot \langle x, y \rangle.$$

То есть, из первого аргумента множитель выносится с сопряжением.

Замечание. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис евклидова пространства X . Пусть также $x, y \in X$, так что

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n \eta^j e_j.$$

Рассмотрим скалярное произведение $\langle x, y \rangle$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^n \bar{\xi}^i \eta^j \langle e_i, e_j \rangle = \bar{\xi}^i \eta^j g_{ij}.$$

Определение. Совокупность чисел $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ называется **метрическим тензором**, а соответствующая матрица $G = \|g_{ij}\|$ - **матрицей Грама**:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \dots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \dots & \langle e_2, e_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \langle e_n, e_2 \rangle & \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Замечание. Свойства матрицы Грама:

(а) $G_{ji} = \overline{G_{ij}}$;

(б) $G_{ii} > 0 \quad \forall i = 1 \dots n$;

(в) $\overline{\xi^i} \xi^j g_{ij} \geq 0, \quad \overline{\xi^i} \xi^j g_{ij} = 0 \Leftrightarrow \xi^i = 0, \quad \forall i.$

Пример 2.1. Пример нарушения аксиомы **ЕЗ** - пространство МИнковского.

Пусть $X = \mathbb{R}^4$, $x = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)^T$ и

$$\langle x, y \rangle = \xi^0 \eta^0 - \xi^1 \eta^1 - \xi^2 \eta^2 - \xi^3 \eta^3.$$

Рассмотрим вектор $x = (1 \quad 1/\sqrt{3} \quad 1/\sqrt{3} \quad 1/\sqrt{3})^T$, тогда

$$\langle x, x \rangle = 1 - 1/3 - 1/3 - 1/3 = 0,$$

и значит x - нулевой вектор ($x \neq 0$, но $g(x, x) = 0$).

§3. Неравенство Шварца

Лемма 3.1. *Евклидово пространство может быть нормировано:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Доказательство. Проверка первых двух аксиом нормы проводится непосредственно:

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle x, x \rangle} &\geq 0, \\ \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} &= \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle}. \end{aligned}$$

Проверка последней аксиомы сводится к проверке утверждения

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle,$$

которое составляет утверждение теоремы о *неравенстве Шварца*.

□

Теорема 3.1. *(Неравенство Шварца) Имеет место следующее соотношение между скалярным произведением и порождаемой им нормой*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Доказательство. Рассмотрим билинейную форму, с параметром λ :

$$\begin{aligned} \|\lambda x + y\|^2 &= \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = \\ &= \langle \lambda x, \lambda x \rangle + \langle \lambda x, y \rangle + \langle y, \lambda x \rangle + \langle y, y \rangle = \\ &= |\lambda|^2 \|x\|^2 + \lambda (\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle) + \|y\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

(а) Пусть $X = X(\mathbb{R})$, тогда $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ и выражение преобразуется в

$$|\lambda|^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \geq 0.$$

Тогда $D = 4|\langle x, y \rangle|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$ и теорема доказана.

(б) Пусть $X = X(\mathbb{C})$, тогда $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ и рассмотрим

$$\langle x, y \rangle = e^{i\varphi} |\langle x, y \rangle|, \quad \varphi = \arg \langle x, y \rangle.$$

Определим вектор $z = e^{-i\varphi}x$, тогда

$$\langle z, y \rangle = e^{-i\varphi} \langle x, y \rangle = r = |\langle x, y \rangle| \in \mathbb{R},$$

$$\langle z, z \rangle = e^{-i\varphi} \langle x, e^{-i\varphi}x \rangle = \langle x, x \rangle.$$

Далее применим результат первого доказательства

□

Лемма 3.2. *Неравенство Шварца обращается в точное равенство тогда и только тогда, когда x и y - линейно зависимые векторы.*

Доказательство. Пусть $y = \alpha x$, тогда

$$|\langle x, \alpha x \rangle| \leq \|x\| \|\alpha x\|, \quad \Rightarrow \quad |\alpha| \|x\|^2 \leq |\bar{\alpha}| \|x\|^2, \quad |\bar{\alpha}| = |\alpha|.$$

Пусть $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$, тогда

$$\begin{aligned} D/4 = |\langle x, y \rangle|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 = 0 & \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 : \quad \|\lambda x + y\|^2 = 0, \\ & \Leftrightarrow \lambda x + y = 0. \end{aligned}$$

□