Практическое занятие 6. Кривые второго порядка

	Эллипс		Гипербола	
Определение	*Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 равна длине данного отрезка PQ, причем $PQ>F_1F_2$ $\gamma = \left\{M \mid MF_1 + MF_2 = PQ,\ PQ > F_1F_2\right\}$		*Гиперболой* называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 равна длине данного отрезка PQ, причем $PQ<F_1F_2$ $\gamma = \left\{M \mid \lvert MF_1 - MF_2\rvert = PQ, PQ < F_1F_2\right\}$	
Каноническое уравнение	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
	$a > b$, $a^2 - c^2 = b^2$, a *– большая полуось,* b *– малая полуось.*	$b > a$, $b^2 - c^2 = a^2$, b *– большая полуось,* a *– малая полуось.*	$c^2 = a^2 + b^2$ a *– действительная полуось,* b *– мнимая полуось*	$c^2 = a^2 + b^2$ b *– действительная полуось,* a *– мнимая полуось*
Фокусы	$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$.	$F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$	$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.	$F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$
Эксцентриси-тет	$\varepsilon = \frac{c}{a}$, $0 \le \varepsilon < 1$	$\varepsilon = \frac{c}{b}$, $0 \le \varepsilon < 1$	$\varepsilon = \frac{c}{a}$, $\varepsilon > 1$	$\varepsilon = \frac{c}{b}$, $\varepsilon > 1$
Свойства эксцентриси-тета	Если $\varepsilon = 0$, то эллипс является окружностью. Чем больше ε, тем больше эллипс вытянут вдоль оси абсцисс.		чем больше ε, тем больше гипербола вытянута вдоль своей мнимой оси.	
Вершины	$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$.		$A_1(-a,0)$, $A_2(a, 0)$	$B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$
Фокальные радиусы	$M_0F_1 = a + \frac{c}{a}x_0$ $M_0F_2 = a - \frac{c}{a}x_0$		$M_0F_1 = \left\lvert x_0\frac{c}{a} + a\right\rvert$ $M_0F_2 = \left\lvert x_0\frac{c}{a} - a\right\rvert$	
Директрисы	$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$	$y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$	$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$	$y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$
Директо-риальное свойство	$\frac{AF_1}{\rho(A,d)} = \varepsilon < 1$ (*A* принадлежит эллипсу)		$\frac{AF_1}{\rho(A,d)} = \varepsilon > 1$ (*A* принадлежит гиперболе)	
Уравнение в полярных координатах	$r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$, $p = \frac{b^2}{a}$		$r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$, $p = \frac{b^2}{a}$	
Касательная	$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$, $M(x_0, y_0)$ - точка касания		$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$, $M(x_0, y_0)$ - точка касания	
	Параметрические уравнения $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$		Асимптоты: $y = \pm\frac{b}{a}x$ Если $a = b$, гипербола называется равносторонней $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - *сопряженные гиперболы*	

	Парабола	
Определение	*Параболой* называется множество всех точек плоскости, расстояние каждой из которых до данной точки *F* равно расстоянию до данной прямой *d*, не проходящей через точку *F*. $\gamma = \left\{M \mid MF = \rho(M,d), F \notin d\right\}$ Точка *F* называется *фокусом* параболы, прямая *d* – *директрисой* параболы. $\rho(F,d)=p$ – *фокальный параметр*.	
Каноническое уравнение, координаты фокуса, уравнение директрисы	см. таблицу ниже	
Директориальное свойство $\frac{AF_1}{\rho(A,d)} = \varepsilon = 1$ (*A* принадлежит параболе)	***Уравнение в полярных координатах*** $r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$	***Касательная*** $yy_0 - p(x + x_0) = 0$, $M(x_0, y_0)$ - точка касания

Каноническое уравнение	Ось симметрии	Направление ветвей	Координаты фокуса	Уравнение директрисы
$y^2 = 2px$	Ox	$(x \ge 0)\rightarrow$	$\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$x = -\frac{p}{2}$
$y^2 = -2px$	Ox	$(x \le 0)\leftarrow$	$\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$	$x = \frac{p}{2}$
$x^2 = 2py$	Oy	$(y \ge 0)\uparrow$	$\left(0, \frac{p}{2}\right)$	$y = -\frac{p}{2}$
$y^2 = -2px$	Oy	$(y \le 0)\downarrow$	$\left(0, -\frac{p}{2}\right)$	$y = \frac{p}{2}$

Задачи

1. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти его полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения директрис. //5 и 3, (-4,0) и (4,0), 4/5, x=25/4, x=-25/4\\
2. Дана гипербола $9x^2 - 16y^2 = 144$. Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис. Сделайте чертеж. \\$\varepsilon = \frac{5}{4}, y = \pm\frac{3}{4}x$\\
3. Определить величину параметра и расположение относительно координатных осей следующих парабол: а. $y^2 = 6x$ б. $x^2 = 5y$ в. $y^2 = -4x$ г. $x^2 = -y$
4. Составить каноническое уравнение эллипса, расстояние между фокусами которого, лежащими на оси Ox, равно 24, а эксцентриситет равен $\frac{3}{4}$. Сделайте чертёж \\$\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{112} = 1$\\
5. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox, проходящей через точки $A(2,3)$ и $O(0,0)$. \\$y^2 = \frac{9}{2}x$⍰\\
6. Составить уравнение эллипса, если известно, что он проходит через точку $M(4,6)$, а фокусы его совпадают с фокусами гиперболы $x^2 - y^2 = 8$. \\$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$\\
7. Определить, какие линии заданы следующими уравнениями в полярных координатах, и написать канонические уравнения этих кривых в прямоугольной системе координат:

   а. $\rho = \frac{25}{13-12\cos\varphi}$ б. $\rho = \frac{1}{3-3\cos\varphi}$ в. $\rho = \frac{9}{4-5\cos\varphi}$ \\$\frac{x^2}{69} + \frac{y^2}{25} = 1,\ y^2 = \frac{2}{3}x,\ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ \\
8. Какая кривая определяется данным уравнением? Сделайте чертеж.

   а. $3x^2 + 4y^2 + 12x - 4y + 1 = 0$ б. $y^2 - 3x - 4y + 10 = 0$
9. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы в вершинах эллипса $6x^2 + 5y^2 = 30$ \\$-\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$\\
10. Гипербола проходит через точку $A(\sqrt{6}, 3)$ и касается прямой $9x + 2y - 15 = 0$. Составить уравнение этой гиперболы при условии, что ее оси совпадают. \\$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{45} = 1, \frac{3x^2}{10} - \frac{4y^2}{45} = 1$\\