Практическое занятие. Векторы. Линейная независимость. Базис. Система координат.

Теоретические сведения

Понятие вектора

Определение. Отрезок AB, в котором указан порядок задания его концов, называется *связанным вектором* (или направленным отрезком).

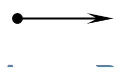


Рис. 1

Замечание. $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ различны (рис. 1).

Определение. Направленный отрезок, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым*.

Пример. Вектор $\overline{AA}$ является нулевым.

Определение. Длиной связанного вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

Обозначение: $\left|\overline{AB}\right|$.

Пример. $\left|\overline{AA}\right| = 0$.

Определение. Связанные векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ называются *противоположными*.

Определение. Два связанных вектора называются *равными*, если они одинаково направлены и имеют равные длины.

Определение. Класс эквивалентности множества связанных векторов по отношению равенства связанных векторов называется *свободным вектором*.

Определение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если существует прямая, которой они параллельны.

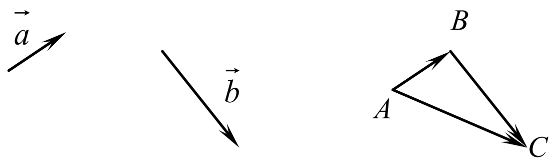
Обозначение: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Нулевой вектор коллинеарен любому.

Сложение и вычитание векторов

Введем операцию сложения векторов.

Определение. *Суммой векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что если $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{BC} = \vec{b}$, $\overline{AC} = \vec{c}$ (рис. 2).

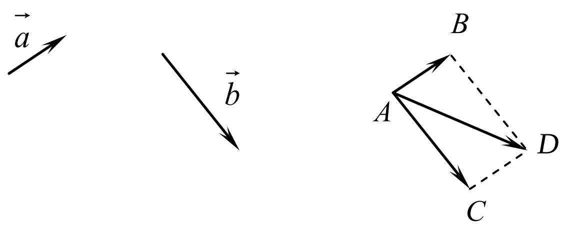


$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

Рис. 2

Замечание. Для нахождения суммы неколлинеарных векторов, согласно определению, строят треугольник, поэтому говорят, что используют *правило треугольника*.

Замечание. Если слагаемые векторы неколлинеарны, то для построения их суммы можно использовать правило параллелограмма (рис. 3).



$$\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD}$$
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

Рис. 3

Теорема 1 (свойства сложения векторов). Для произвольных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ справедливы следующие равенства.

1. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. **2.** $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$.	**3.** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность сложения векторов). **4.** $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ (ассоциативность сложения векторов).

Замечание. Сумму n векторов ($n > 2$) можно определить с помощью *правила многоугольника* (рис. 4).

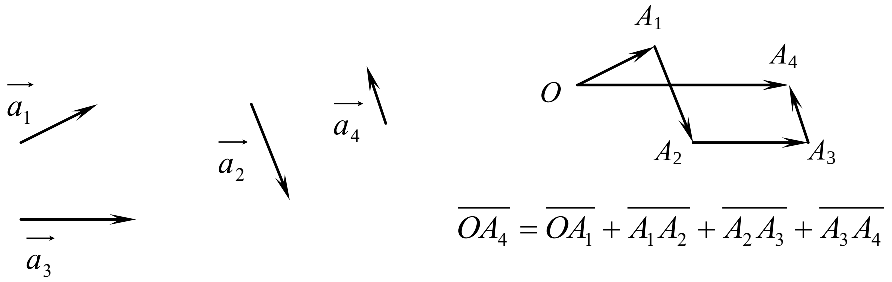


Рис. 4

Определение. *Разностью векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется такой $\vec{x}$, что $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$.

Запись: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{x}$.

По правилу треугольника $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, поэтому $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Утверждение 1. $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$.

Утверждение 2. $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$.

Умножение вектора на число

Определение. *Произведением вектора* $\vec{a}$ *на действительное число* α называется такой вектор $\vec{b}$, что:

1) $\left|\vec{b}\right| = \left|\alpha\right|\left|\vec{a}\right|$;

2) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\alpha \ge 0$;
$\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $\alpha < 0$.

Запись: $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.

Теорема (свойства умножения вектора на число).

Для любых действительных чисел α, β и векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ верны следующие равенства.

1. $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$.	**5.** $\alpha\left(\beta\vec{a}\right) = \left(\alpha\beta\right)\vec{a}$ *ассоциативность умножения относительно скалярного множителя.*
2. $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$. **3.** $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.	**6.** $\alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ *дистрибутивность умножения вектора на действительное число относительно сложения векторов.*
4. $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.	**7.** $\left(\alpha + \beta\right) \cdot \vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ *дистрибутивность умножения вектора на действительное число относительно сложения действительных чисел.*

Коллинеарность и компланарность векторов

Теорема 1 (критерий коллинеарности векторов). $\boxed{\vec{a} \| \vec{b}, \vec{a} \ne \vec{0} \Leftrightarrow \left(\exists! \alpha \in R\right) \vec{b} = \alpha\vec{a}}$.

Определение. Вектор $\vec{a}$ называется *параллельным некоторой плоскости*, если он параллелен некоторой прямой, лежащей в этой плоскости.

Определение. Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются *компланарными*, если они параллельны одной и той же плоскости.

Замечание. Очевидно, что

1) если среди векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ какие-либо два вектора коллинеарны, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны;

2) если, по крайней мере, один из векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ нулевой, то эти векторы компланарны.
Обоснуйте эти утверждения.

Теорема 2 (о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам).

$$\boxed{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ компланарны, } \vec{a} \nparallel \vec{b} \Rightarrow (\exists!\ \alpha, \beta \in R)\ \vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}}.$$

Линейная зависимость векторов

Определение. *Линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ называется вектор

$$\vec{p} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_m\vec{a}_m, \text{ где } \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in R.$$

Определение. Линейная комбинация $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_m\vec{a}_m$ называется *тривиальной*, если $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$.

Ясно, что тривиальная линейная комбинация равна $\vec{0}$.

Определение. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ называется *линейно зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная $\vec{0}$, т. е. существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in R$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, такие, что $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_m\vec{a}_m = \vec{0}$.

Пример (рис. 5).

$\vec{a}_1 + \dfrac{1}{2}\vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно зависимы.

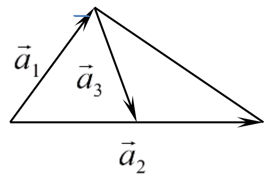


Рис. 5

Определение. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ называется *линейно независимой*, если только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна $\vec{0}$, т. е.

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_m\vec{a}_m = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0.$$

Теорема (критерий линейной зависимости двух векторов). $\boxed{\vec{a}, \vec{b} \text{ линейно зависимы} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}}$

Следствие. Система векторов, содержащая коллинеарные векторы, является линейно зависимой.

Теорема (критерий линейной зависимости трех векторов**).** Система трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависима $\Leftrightarrow$ когда эти векторы компланарны.

Следствие. Система векторов, содержащая тройку компланарных векторов, является линейно зависимой.

Координаты вектора относительно данного базиса

Множество всех векторов пространства с введенными ранее операциями сложения и умножения на число назовем векторным пространством *V*.

Определение. *Базисом векторного пространства* называется упорядоченная система векторов, которая удовлетворяет условиям:

1) система линейно независима;
2) любой вектор пространства является линейной комбинацией данной системы векторов.

Обозначение: $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$.

Определение. Число векторов базиса называется *размерностью векторного пространства*.

Пример.

1) $n = 1$: V_1 – множество векторов, параллельных прямой, $e = (\vec{e}_1)$;

2) $n = 2$: V_2 – множество векторов, параллельных плоскости, $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$;

3) $n = 3$: V_3 – множество векторов пространства, $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Теорема (о разложении вектора по трем некомпланарным векторам).

$$\boxed{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \text{ не компланарны} \Rightarrow (\forall \vec{a})(\exists! \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R)\ \vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3}.$$

Следствие. Система трех некомпланарных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ образует базис векторного пространства *V* (включающего все векторы трехмерного пространства).

Определение. Если задан базис $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ пространства V_3, то коэффициенты α_1, α_2, α_3 линейного разложения вектора $\vec{a}$ по векторам базиса $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$ называется координатами вектора $\vec{a}$ в базисе *e*.

Обозначение: $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Теорема. Если в базисе $e=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ вектор $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$, то $\vec{c}=(\lambda a_1+\mu b_1,\lambda a_2+\mu b_2,\lambda a_3+\mu b_3)$.

Задача. В базисе $e=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ заданы векторы $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$. Найти координаты векторов: 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $\lambda\vec{a}(\lambda\in R)$.

Теорема (критерий коллинеарности векторов на плоскости в координатах)**.** Векторы $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, заданные в базисе $e=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны ($b_1=\lambda a_1, b_2=\lambda a_2, b_3=\lambda a_3$).

Теорема (критерий линейной зависимости векторов). Векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ пространства V_n линейно зависимы тогда и только тогда, когда определитель, строками которого являются координаты данных векторов, равен нулю.

Теорема (критерий коллинеарности векторов на плоскости в координатах). Векторы $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$, заданные координатами в некотором базисе $e=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, коллинеарны тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0$.

Теорема (критерий компланарности векторов в координатах). Векторы $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3),\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$, заданные координатами в некотором базисе $e=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, компланарны тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$.

Ортонормированный базис. Длина вектора

Определение. *Углом между ненулевыми векторами* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется угол AOB, где O – произвольная точка, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ (рис. 6).

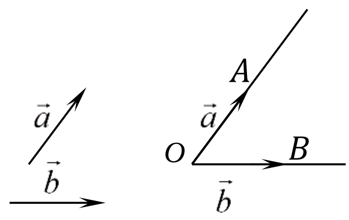


Рис. 6

Замечание.

1. Так как два угла, стороны которых сонаправлены, равны, то угол между векторами не зависит от выбора точки O.

2. $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\widehat{AOB},\quad 0\le\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)\le\pi$.

3. $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}\Leftrightarrow\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=0\quad\left(\vec{a}\ne 0,\vec{b}\ne 0\right)$.

4. $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}\Leftrightarrow\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\pi$.

Определение. Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными*, если $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

Замечание. $(\forall\vec{a})\vec{0}\perp\vec{a}$.

Определение. Базис $e=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ называется *ортонормированным*, если

1) $\vec{i}\perp\vec{j},\vec{j}\perp\vec{k},\vec{i}\perp\vec{k}$;

2) $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$(рис. 7).

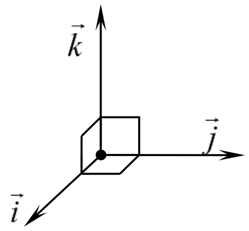


Рис. 7

Теорема. Длина вектора $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, заданного координатами в ортонормированном базисе $e=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, вычисляется по формуле $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

Аффинная система координат на плоскости. Деление отрезка в данном отношении

Определение. *Аффинной системой координат* на плоскости называется тройка, состоящая из точки O и базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ (рис. 8).

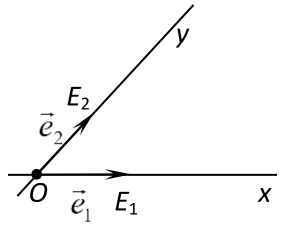


Рис. 8

Обозначение: $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ или $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

O – начало координат, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – координатные векторы, Ox – ось абсцисс, Oy – ось ординат.

Определение. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M в системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ (рис. 9).

Определение. *Координатами* точки M в системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ называются координаты ее радиус-вектора в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

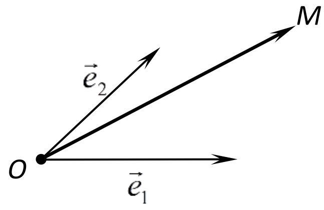


Рис. 9

$\boxed{M(x,y)_{O\vec{e}_1\vec{e}_2} \overset{def}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2}$.

Замечание. Таким образом, каждой точке плоскости ставится в соответствие единственная пара действительных чисел, и обратно, каждой паре действительных чисел ставится в соответствие единственная точка плоскости.

Рассмотрим простейшие задачи аналитической геометрии.

1. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ $\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)}$.

2. Определение. Говорят, что точка M *делит направленный отрезок AB в отношении* $\lambda, (\lambda \neq -1)$, если $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$.

Запись: $(AB, M) = \lambda$ *– простое отношение трех точек.*

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. $(AB, M) = \lambda$, $\lambda \neq -1$. $M(x, y)$. $\boxed{x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}}$.

Если M – середина AB, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $M(x, y)$, то $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

3. ΔABC $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$. $M\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ – центр тяжести ΔABC.

Прямоугольная декартова система координат. Расстояние между двумя точками

Определение. Аффинная система координат $O\vec{i}\vec{j}$ называется *прямоугольной декартовой системой координат*, если базис $(\vec{i}, \vec{j})$ является ортонормированным, т. е. $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ и $\vec{i} \perp \vec{j}$.

В ПДСК $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ $\boxed{|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$.

Полярная система координат

Кроме аффинной системы координат, используют другие системы координат. На плоскости часто используется полярная система координат.

Определение. Пара, состоящая из точки O и вектора $\vec{i}$ на ориентированной плоскости, называется *полярной системой координат*.

Через точку O проведем ось OP (рис. 10). Зададим на ней положительное направление, определяемое вектором $\vec{i}$.

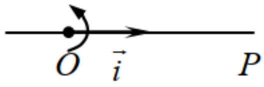


Рис. 10

Точка O называется *полюсом*, прямая OP – *полярной осью*.

Пусть M – произвольная точка плоскости (рис. 11).

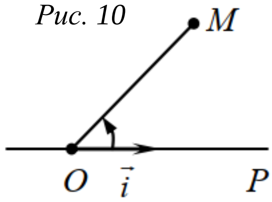


Рис. 11

Обозначим: $\rho = |OM|$, $\varphi = \left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}\right)$.

Если $M = O$, то $\rho = 0$, угол φ неопределен.

Числа ρ и φ однозначно определяют положение точки M на плоскости и называются *полярными координатами точки M* в полярной системе координат $O\vec{i}$. ρ – *полярный радиус* точки M ($\rho \geq 0$). φ – *полярный угол* точки M ($0 \leq \varphi < 2\pi$).

Пишут: $M(\rho, \varphi)$.

Установим связь между декартовыми и полярными координатами точки M.

Выберем на плоскости ПДСК $O\vec{i}\vec{j}$, началом которой служит полюс O (рис. 12), первым координатным вектором – вектор $\vec{i}$ и $\left(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 12). В этом случае ПДСК и полярная система координат называются согласованными.

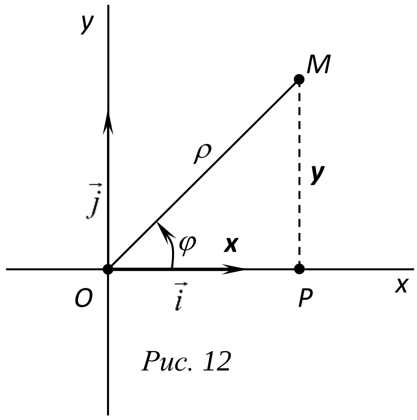


Рис. 12

(x, y) – декартовы координаты точки M.

(ρ, φ) – полярные координаты M.

Из ΔOMP (рис. 12) имеем:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}.$$

Обратный переход:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \; \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \; \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \; tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

(если $\rho = 0$, то φ не определен)

Замечание.

1. Иногда изменение полярного угла ограничивают условием $-\pi \leq \varphi < \pi$.

2. Иногда удобно использовать так называемую обобщенную систему полярных координат. Ее особенность в том, что значения полярных координат не ограничиваются, т.е. $\rho, \varphi \in R$.

Задачи

1. (К-191) Дана пирамида $SABC$. В базисе $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ найти координаты вектора $\overrightarrow{SM}$, где M – центр тяжести основания ABC.
2. (К-205) Доказать, что точки $A(-3;\ -7;\ -5)$, $B(0;\ -1;\ -2)$, $C(2;\ 3;\ 0)$ лежат на одной прямой, причем точка B расположена между A и C.
3. Доказать, что четырехугольник с вершинами $A(2;\ 1;\ -4)$, $B(1;\ 3;\ 5)$, $C(7;\ 2;\ 3)$, $D(8;\ 0;\ -6)$ является параллелограммом.
4. Даны радиус-векторы точек $\vec{r}_A = (1;\ 2;\ 3)$, $\vec{r}_B = (3;\ 2;\ 1)$, $\vec{r}_C = (1;\ 4;\ 1)$. Показать, что треугольник ABC – равносторонний.
5. Найти проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат, если $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, $A(0;\ 0;\ 1)$, $B(3;\ 2;\ 1)$, $C(4;\ 6;\ 5)$, $D(1;\ 6;\ 3)$.
6. Нормировать вектор $\vec{a} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 12\vec{k}$.
7. (К-793) Даны три вектора $\vec{p} = (3;\ -2;\ 1)$, $\vec{q} = (-1;\ 1;\ -2)$, $\vec{r} = (2;\ 1;\ -3)$. Доказать, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{c} = (11;\ -6;\ 5)$ по векторам базиса $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.
8. Точки заданы полярными координатами $A\left(3;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $B(2; \pi)$, $C\left(3;\ -\frac{\pi}{4}\right)$.
   - **а.** Построить эти точки в полярной системе координат.
   - **б.** Определить координаты точек, симметричных данным точкам относительно полярной оси, построить их.
   - **в.** Определить координаты точек, симметричных данным точкам относительно полюса, построить их.
9. На прямой AB отмечены точки M_1, M_2, M_3, M_4 (рис.) так, что $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3B = BM_4$. Найти, в каком отношении точки M_1, M_2, M_3, M_4 делят отрезок AB.

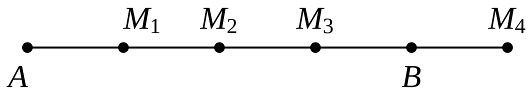


Рис.

10. (К-743) Даны вершины треугольника $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(2;\ -1;\ 3)$, $C(-4;\ 7;\ 5)$. Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.
11. Полюс полярной системы координат совпадает с началом координат прямоугольной декартовой системы координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс.
    - **а.** В полярной системе координат даны точки $M_1\left(6;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $M_2(5; 0)$, $M_3\left(10; -\frac{\pi}{3}\right)$. Определить декартовы координаты этих точек.
    - **б.** В прямоугольной декартовой системе координат даны точки $M_4(0; 5)$, $M_5(\sqrt{3}; 1)$, $M_6(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. Определить полярные координаты этих точек.

----

12. В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{B'D}$, $\overrightarrow{QA}$, где Q – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$.
13. Даны радиус-векторы точек $\vec{r}_A = (3; -1;\ 2)$, $\vec{r}_B = (1;\ 2; -1)$, $\vec{r}_C = (-1;\ 1;\ -3)$, $\vec{r}_D = (3;\ -5;\ 3)$. Доказать, что $ABCD$ – трапеция. Найти длины параллельных сторон.
14. (К-794) Даны векторы $\vec{a} = (2;\ 1;\ 0)$, $\vec{b} = (1;\ -1;\ 2)$, $\vec{c} = (2;\ 2;\ -1)$, $\vec{d} = (3;\ 7;\ -7)$. Определить разложение каждого из этих векторов, принимая в качестве базиса три остальных, предварительно доказав, что они образуют базис.