Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа №6
Работа с системой компьютерной вёрстки $\TeX$
Вариант: 92

Выполнил:
Студент группы P3108
Петров Вячеслав Маркович
Принял:
Балакшин Павел валерьевич
Кандидат технических наук, ординарный доцент факультета ПИиКТ

Санкт-Петербург
2023

С. Овчинников, И. Шарыгин

Решение неравенств с модулем

В этой заметке излагается приём, который, в некотором смысле, "автоматически" сводит решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, к решению *систем* и *совокупностей* неравенств, где переменные уже свободны от знака модуля.

Пусть даны несколько неравенств - скажем, для простоты, два неравенства с о д н о й (и той же) переменной:

$$\mathrm{f(x)} > 0, \qquad (1)$$
$$\mathrm{g(x)} > 0. \qquad (2)$$

Обозначим множество решений неравенства (1) через A, неравенства (2) - через B.

Если требуется, найти множество чисел, которые одновременно удовлетворяют неравенству (1) и неравенству (2), то есть найти п е р е с е ч е н и е C $= A \cap B$ множеств A и B, то неравенства (1), (2) соединяют фигурной скобкой

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

и называют *системой* неравенств ("Алгебра и начала анализа 10 п. 123).

Если же требуется найти множество чисел, удовлетворяющих неравенсту (1) **или** неравенству (2), то есть объединение D=$A \cup B$ множеств A и B, то неравенства (1), (2) соединяют квадратной скобкой

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{array}\right.$$

и называют *совокупностью* неравенств *).

Повторим ещё раз: когда ищут переечение - говорят "система"; когда ищут объединение - говорят "совокупность". В таблице

Система	Совокупность
пересечение	объединение
и	или

сведены три пары соответствующих друг другу понятий **).

При решении задач, как мы сейчас увидим, часто приходится рассматривать комбинации систем и совокупностей; чтобы избегать в таких случаях ошибок, следует аккуратно пользоваться введёнными выше обозначениями.

* * *

Обычный приём решения неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, - "раскрытие" модуля - состоит в следующем. Исходя из определения модуля

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

множество допустимых значений переменной разбивают на непересекающиеся подмножества, на каждом из которых все функции, содержащиеся под знаком модуля, сохраняют знак. После этого решение искохной залачи сводится к решению с о в о к у п н о с т и с и с т е м неравенств.

Пусть, например, требуется решить неравенство

$$|x-1| + |x-2| > 3 + x$$

*) Абсолютно аналогично определяется термины "система уравнений"("Алгебра и начала анализа 10 п. 122).

**) Таблицу можно было бы продолжить парой терминов "конъюнкция - дизъюнкция"; об этих терминах см., например, "Квант 1971, № 4, с. 15, или 1947, № 12, с. 14, или 1975, № 1, с. 29.

Разобьём числовую ось на непересекающиеся промежутки $|-\infty\ ;\ 1|$, $|1;\ 2|$ и $|2;\ +\infty|$. На каждом из этих промежутков выражения $x-1$ и $x-2$ сохраняют знак. "Раскрывая" модули, приходим к следущей совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 1 \\ -(x-1)-(x-2) > 3+x, \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \leqslant x < 2 \\ (x-1)-(x-2) > 3+x, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 2 \\ (x-1)+(x-2) > 3+x, \end{cases} \end{array}\right.$$

Множеством решений верхней системы является пересечение $|-\infty\ ;\ 1| \cap |-\infty\ ;\ 0|$, то есть промежуток $|-\infty\ ;\ 0|$; средняя система решений не имеет; наконец множество решений нижней системы есть пересечение $|2;\ +\infty| \cap |6;\ +\infty|$, то есть промежуток $|6;\ +\infty|$. Объединяя (совокупность!) полученные множества получим о т в е т:

$|-\infty\ ;\ 0| \cup |6;\ +\infty|$

При таком способе решения часто приходится рассматривать много случаев, а порой и подслучаев. Кроме того, иногда раскрытие модуля сопряжено с техническими трудностями (см. ниже пример 4).

* *
*

В основе обещанного выше приема лежит простая т е о р е м а:

$$1)\ \ |f(x)| \leqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant g(x), \\ f(x) \geqslant -g(x); \end{cases}$$

$$2)\ \ |f(x)| \geqslant g(x) \Leftrightarrow \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\tfrac{|1|}{|2|}\right| \sqrt{\left[\begin{array}{c} f(x) \geqslant g(x), \\ f(x) \leqslant -g(x). \end{array}\right.}$$

Она легко доказывается "раскрытием" модуля. Пусть, например, x_0 является решением неравенства $|f(x)| \leqslant g(x)$, то есть

$$|f(x_0)| \leqslant g(x_0). \qquad (3)$$

Тогда $g(x_0) \geqslant 0$. Если $f(x_0) \geqslant 0$, то $|f(x_0)| = f(x_0)$ и неравенство (3) принимает вид