Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого

Физико-Механический институт

Отчёт по лабораторной работе №4

«Решение систем линейных алгебраических уравнений прямыми методами»

Вариант Б

Выполнил студент гр. 5030102/10003:	Безлепский А.Д.	____________
Преподаватель:	Добрецова С.Б.	____________
Работа принята:	Дата	____________

Санкт-Петербург

2023

1. Создать случайную СЛАУ заданной размерности с заданным числом обусловленности

Зададим случайный вектор-столбец длины **4**:

$$\mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} 0.680 \\ 0.032 \\ 0.585 \\ 0.610 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Нормируем $\mathbf{w_0}$ в соответствии с евклидовой нормой:

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{w}_0}{||\mathbf{w}_0||_2} = \frac{\begin{pmatrix} 0.680 \\ 0.032 \\ 0.585 \\ 0.610 \end{pmatrix}}{\sqrt{0.680^2 + 0.032^2 + 0.585^2 + 0.610^2}} = \begin{pmatrix} 0.627 \\ 0.030 \\ 0.539 \\ 0.562 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Солгасно формуле преобразования Хаусхолдера

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} - \mathbf{2ww}^T \tag{3}$$

получим матрицу $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0.627 \\ 0.030 \\ 0.539 \\ 0.562 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.627 \\ 0.030 \\ 0.539 \\ 0.562 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0.214 & -0.037 & -0.676 & -0.704 \\ -0.037 & 0.998 & -0.032 & -0.033 \\ -0.676 & -0.032 & 0.419 & -0.606 \\ -0.704 & -0.033 & -0.606 & 0.369 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Её число обусловленности заведомо известно и равно длине $\mathbf{w}$:

$$\texttt{cond(Q)} == 4 \tag{5}$$

2. Решить СЛАУ методом LU-разложения с выбором главного элемента

Зададим случайный вектор неизвестных $\mathbf{x}$ и вычислим вектор правой части $\mathbf{b}$ уравнения $\mathbf{Qx} = \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} 0.214 & -0.037 & -0.676 & -0.704 \\ -0.037 & 0.998 & -0.032 & -0.033 \\ -0.676 & -0.032 & 0.419 & -0.606 \\ -0.704 & -0.033 & -0.606 & 0.369 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.132 \\ 0.443 \\ 0.488 \\ 0.957 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.992 \\ 0.390 \\ -0.478 \\ -0.050 \end{pmatrix} \tag{6}$$

LU-разложение с выбором главного (опорного) элемента это т.н. LUP-разложение, где исходная невырожденная (квадратная с ненулевым определителем) матрица $\mathbf{Q}$ представляется в виде:

$$\mathbf{PQ} = \mathbf{LU} \tag{7}$$

Здесь матрица $\mathbf{L}$ – нижнетреугольная с единицами на главной диагонали, $\mathbf{U}$ – верхнетреугольная общего вида, а $\mathbf{P}$ – «матрица перестановок», получаемая из единичной матрицы путём перестановки строк или столбцов. $\mathbf{P}$ соответствует вектору перестановок $\mathbf{p}$, в соответствии с которым нужно поменять местами строки $\mathbf{LU}$, чтобы получить $\mathbf{Q}$.

I. Алгоритм LUP-разложения:

0. Инициализируем вектор $\mathbf{p}_0$ числами натурального ряда:

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. В первом столбце $\mathbf{M}_0 = \mathbf{Q}$ найдём элемент с наибольшим модулем:

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} 0.214 & -0.037 & -0.676 & -0.704 \\ -0.037 & 0.998 & -0.032 & -0.033 \\ -0.676 & -0.032 & 0.419 & -0.606 \\ \mathbf{-0.704} & -0.033 & -0.606 & 0.369 \end{pmatrix}$$

2. Переставим строку с опорным элементом так, чтобы он оказался на главной диагонали, отразив соответствующую перестановку в векторе перестановок:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{-0.704} & \mathbf{-0.033} & \mathbf{-0.606} & \mathbf{0.369} \\ -0.037 & 0.998 & -0.032 & -0.033 \\ -0.676 & -0.032 & 0.419 & -0.606 \\ \mathit{0.214} & \mathit{-0.037} & \mathit{-0.676} & \mathit{-0.704} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ 2 \\ 3 \\ \mathit{1} \end{pmatrix}$$

3. Все элементы первого столбца лежащие под опорным элементом (ниже 1-й строки) разделим на него:

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{-0.704} & -0.033 & -0.606 & 0.369 \\ \frac{\mathit{-0.037}}{\mathit{-0.704}} & 0.998 & -0.0319 & -0.033 \\ \frac{\mathit{-0.676}}{\mathit{-0.704}} & -0.032 & 0.419 & -0.606 \\ \frac{\mathit{0.214}}{\mathit{-0.704}} & -0.037 & -0.676 & -0.704 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-0.704} & -0.033 & -0.606 & 0.369 \\ \mathit{0.053} & 0.998 & -0.0319 & -0.033 \\ \mathit{0.960} & -0.032 & 0.419 & -0.606 \\ \mathit{-0.304} & -0.037 & -0.676 & -0.704 \end{pmatrix}$$

4. Далее из элементов каждого следующего столбца, лежащих ниже опорной (1-й) строки вычтем произведение соответствующего элемента первого столбца и первой строки:

$$\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} -0.704 & \mathbf{-0.033} & \mathbf{-0.606} & \mathbf{0.369} \\ \mathit{0.053} & 0.998 - (-0.033 \cdot 0.053) & -0.0319 - (-0.606 \cdot 0.053) & -0.033 - (0.369 \cdot 0.053) \\ \mathit{0.960} & -0.032 - (-0.033 \cdot 0.960) & 0.419 - (-0.606 \cdot 0.960) & -0.606 - (0.369 \cdot 0.960) \\ \mathit{-0.304} & -0.037 - (-0.033 \cdot (-0.304)) & -0.676 - (-0.606 \cdot (-0.304)) & -0.704 - (0.369 \cdot (-0.304)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0.704 & -0.033 & -0.606 & 0.369 \\ 0.053 & 1 & 0 & -0.053 \\ 0.959 & 0 & 1 & -0.959 \\ -0.304 & -0.047 & -0.860 & -0.592 \end{pmatrix}$$

5. Далее переходим ко второму столбцу, повторяя пп. 1-4. В нашем случае, элемент с наибольшим модулем уже находится на главной диагонали, так что сразу переходим к шагу вычитания:

$$\mathbf{M}_4 = \begin{pmatrix} -0.704 & -0.033 & -0.606 & 0.369 \\ 0.053 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{-0.053} \\ 0.959 & \mathit{0} & 1-(0\cdot 0) & -0.959-(-0.053\cdot 0) \\ -0.304 & \mathit{-0.047} & -0.860-(-0.047\cdot 0) & -0.592-(-0.047\cdot(-0.053)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.704 & -0.033 & -0.606 & 0.369 \\ 0.053 & 1 & 0 & -0.053 \\ 0.959 & 0 & 1 & -0.959 \\ -0.304 & -0.047 & -0.860 & -0.595 \end{pmatrix}$$

6. Теперь к третьему столбцу (также, сразу шаг вычитания):

$$\mathbf{M}_5 = \begin{pmatrix} -0.704 & -0.033 & -0.606 & 0.369 \\ 0.053 & 1 & 0 & -0.053 \\ 0.959 & 0 & 1 & \mathbf{-0.959} \\ -0.304 & -0.047 & \mathit{-0.860} & -0.595-(-0.959\cdot(-0.860)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.704 & -0.033 & -0.606 & 0.369 \\ 0.053 & 1 & 0 & -0.053 \\ 0.959 & 0 & 1 & -0.959 \\ -0.304 & -0.047 & -0.860 & -1.420 \end{pmatrix}$$

7. По четвёртому (последнему) столбцу никаких операций проводить не нужно, т.к. элемент с наибольшим модулем уже оказался на главной диагонали, а других элементов ниже и правее него в матрице не осталось. Полученная же матрица $\mathbf{M}_5 = \mathbf{M}$ вкупе с вектором перестановок $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}$ являются компактным представлением LUP-разложения матрицы $\mathbf{Q}$. По-отдельности матрицы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{U}$ можно получить пользуясь соотношением:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} - \mathbf{E} + \mathbf{U} \tag{8}$$

То есть:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.053 & 1 & 0 & 0 \\ 0.959 & 0 & 1 & 0 \\ -0.304 & -0.047 & -0.860 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} -0.704 & -0.033 & -0.606 & 0.369 \\ 0 & 1 & 0 & -0.053 \\ 0 & 0 & 1 & -0.959 \\ 0 & 0 & 0 & -1.420 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

II. Решение СЛАУ с помощью полученного разложения:

1. Прямая подстановка – решение уравнения $\mathbf{Ly} = \mathbf{Pb} = \mathbf{b}_p$ относительно $\mathbf{y}$:

$$(\mathbf{L}|\mathbf{b}_p) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -0.050 \\ 0.053 & 1 & 0 & 0 & 0.390 \\ 0.959 & 0 & 1 & 0 & -0.478 \\ -0.304 & -0.047 & -0.860 & 1 & -0.992 \end{array}\right) \Longrightarrow \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -0.050 \\ 0.392 \\ -0.430 \\ -1.359 \end{pmatrix};$$

2. Обратная подстановка – решение уравнения $\mathbf{U}\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y}$

$$(\mathbf{U}|\widetilde{\mathbf{x}}) = \left(\begin{array}{cccc|c} -0.704 & -0.033 & -0.606 & 0.369 & -0.050 \\ 0 & 1 & 0 & -0.053 & 0.392 \\ 0 & 0 & 1 & -0.959 & -0.430 \\ 0 & 0 & 0 & -1.420 & -1.359 \end{array}\right) \Longrightarrow \widetilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0.132 \\ 0.443 \\ 0.488 \\ 0.957 \end{pmatrix};$$

3. Рассчитаем вектор невязки по формуле:

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Q}\widetilde{\mathbf{x}} \tag{10}$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -0.992 \\ 0.390 \\ -0.478 \\ -0.050 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.214 & -0.037 & -0.676 & -0.704 \\ -0.037 & 0.998 & -0.032 & -0.033 \\ -0.676 & -0.032 & 0.419 & -0.606 \\ -0.704 & -0.033 & -0.606 & 0.369 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.132 \\ 0.443 \\ 0.488 \\ 0.957 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11.102 \\ -5.551 \\ -5.551 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-17}$$

$$||\mathbf{r}||_2 = 1.360 \cdot 10^{-16}$$

3. Воспользоваться запрограммированным методом и операцией Matlab «\» на тестовых матрицах с нулевым определителем

I. Результат работы алгоритма на C++:

```
    -> Проверка матрцы A: <-
1     2     3
4     5     6
7     8     9
    -> Расчитать число обусловленности не удалось!
    -> LU-разложение:
L:              |  U:
1      0     0  |  7     8     9
0.571  1     0  |  0     0.857 1.714
0.143  0.5   1  |  0     0     1.110e-16
    -> Вектор перестановок:
[2, 0, 1]
    -> Вычислим вектор неизвестных, основываясь на LU-разложении:
[6.33828e+16, -1.26766e+17, 6.33828e+16]
    -> Вектор невязки найденного решения:
[-3.89447, 55.5759, -3.92036]
    -> 2-норма вектора невязки:
55.85

    -> Проверка матрцы B: <-
1e+08   2e+08   3e+08
4e+08   5e+08   6e+08
7e+08   8e+08   9e+08
    -> Число обусловленности:
2.83006e+17
    -> Для решения системы нужно произвести LU-разложение матрицы:
     ! Невозможно диагонализовать матрицу! Нулевой элемент на диагонали. Пропуск шага.
    -> LU-разложение:
L:               |  U:
1       0     0  |  7e+08  8e+08     9e+08
0.571   1     0  |  0      8.571e+07 1.714e+08
0.143   0.5   1  |  0      0         0
    -> Вектор перестановок:
[2, 0, 1]
    -> Вычислим вектор неизвестных, основываясь на LU-разложении:
[-nan, -inf, inf]
    -> Вектор невязки найденного решения:
[-nan, -nan, -nan]
    -> 2-норма вектора невязки:
-nan
```

II. Результат работы программы Matlab:

```
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
> In LAB_0_4__3 (line 19)
1     2     3
4     5     6
7     8     9
Det(A): 6.6613e-16
Cond(A): 1.143944118188076e+17
||rA||: 4.3504
```

```
Warning: Matrix is singular to working precision.
> In LAB_0_4__3 (line 26)
100000000   200000000   300000000
400000000   500000000   600000000
700000000   800000000   900000000
Det(B): 0
Cond(B): 2.556914355281162e+16
||rB||: NaN
```

III. Комментарий:

Различия в результатах обусловлены различием во внутренней реализации алгоритмов решения СЛАУ. В самодельном алгоритме на C++ расчёт числа обусловленности проходит через вычисление определителя наивным рекурсивным алгоритмом с факториальной сложностью, а расчёт обратной матрицы невозможен, если определитель в точности равен нулю. В случае с матрицей **B** в расчётах нарастает неточность, связанная с округлениями чисел с плавающей точкой, поэтому определитель всё же отличен от нуля. В реализации же пакета Matlab определители считаются, скорее всего, эффективным алгоритмом перемножения диагональных элементов матрцы **U** из **LU**-разложения. В обеих случаях решения, предоставленные программами формально неверны, т.к. определители обоих матриц должны быть равны нулю в точности, что означает неопределённость чисел обусловленности и наличие нетривиальных решений СЛАУ (или их полное отсутствие).

4. В MatLab Решить СЛАУ с матрицами Гильберта

Матрицы Гильберта – особый класс квадратных матриц, использующийся для проверки алгоритмов и оценки численной стабильности. Они представляют собой модель системы линейных уравнений с плохой обусловленностью. Элементы матрицы задаются формулой:

$$H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, i, j = 1, 2, 3, ..., n \tag{11}$$

Ожидается, что решение прямыми методами СЛАУ с матрицами Гильберта будет иметь большую погрешность из-за их плохой обусловленности. Результат выполнения скрипта:

```
Размер матрицы: 5
Число обусловленности: 476607.2502
Норма фактической ошибки: 3.0881e-13
Норма невязки: 1.2469e-13

Размер матрицы: 10
Число обусловленности: 16024909625167.58
Норма фактической ошибки: 0.00013871
Норма невязки: 3.7693e-05

Размер матрицы: 15
Число обусловленности: 3.378778714747708e+17
Норма фактической ошибки: 3.298
Норма невязки: 1.0649
```

Налицо стремительный рост числа обусловленности и нормы невязки решения для случайного вектора правой части по причинам, упомянутым выше, что согласуется с ожиданиями.

5. Построить график временных затрат решения СЛАУ для операции Matlab «\» в зависимости от размера матрицы

Рис.1 График зависимости времени решения СЛАУ от размера случайной матрицы. Число обусловленности = 10.

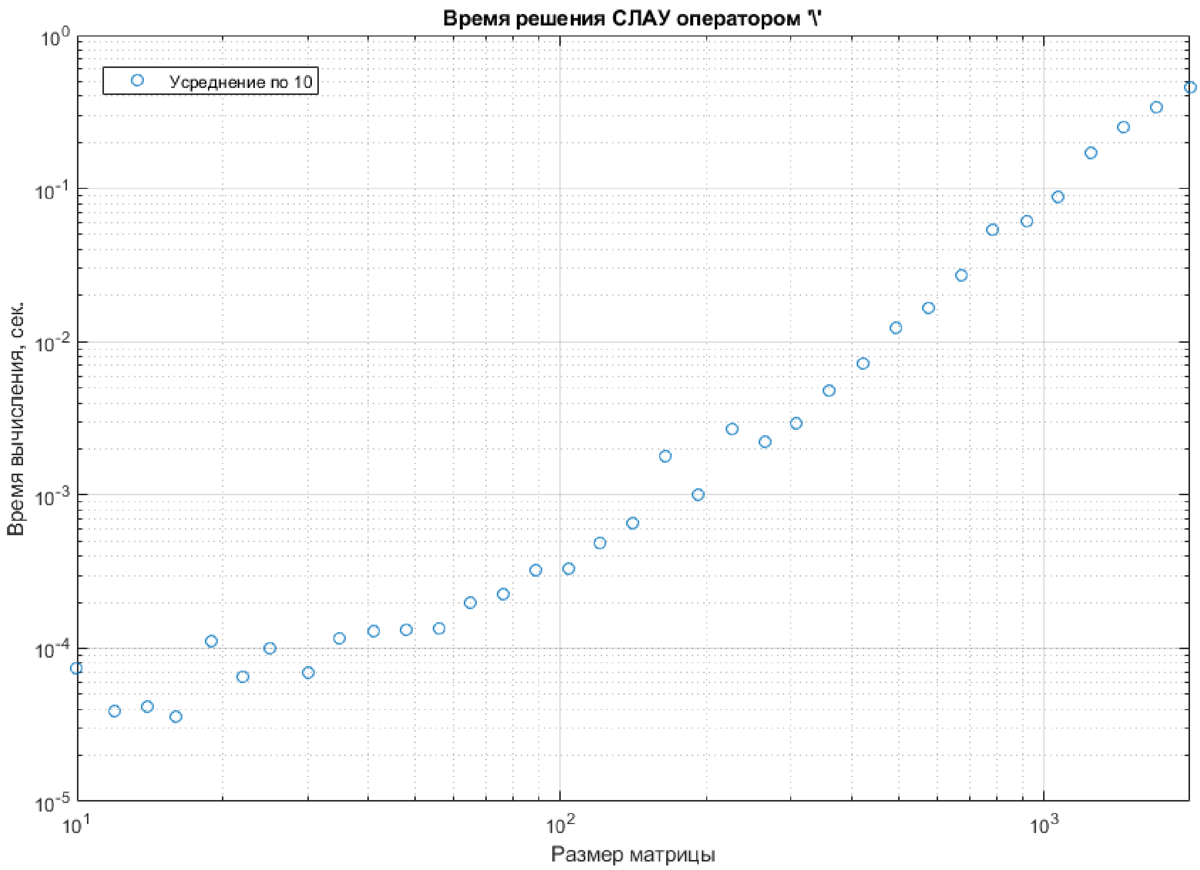

Рис.2 Подгонка кривой степенной зависимости в интерактивном режиме.