Лабораторная работа №4. (часть2)
Решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

Задача. Реализация явного и неявного методов Эйлера в Матлабе. Солверы ode23 и ode23s

Задача Коши в простейшем случае ставится для дифференциального уравнения первого порядка с начальным условием

$$y' = f(x,y) \quad x \in [a,b] \quad y(a) = y_a$$

Строится равномерная сетка ($x_0=a,\ x_n=b$) на отрезке $[a,b]$

Методы Рунге-Кутты 1 порядка – методы Эйлера

$$\text{явный - } y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i)$$

$$\text{неявный - } y_{i+1} = y_i + h_i f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

БАЗА (0) Явный метод Эйлера для заданного шага (числа разбиений)

– Создать функцию **`f(x,y)`** для правой части своего уравнения (по варианту)

– Создать цикл по всем узлам, в котором будет вычисляться массивы узлов и решений явным методом Эйлера

– Построить графики (№1) точного и вычисленного решений для 10 и для 1000 разбиений и соответствующие графики (№2) ошибки на отрезке

– Создав цикл по числу узлов (n=10,11…1000), построить график (№3) фактической ошибки и линию **y=h**

– Решить свое уравнение солвером ode23 с заданной точностью

```
opt=odeset('AbsTol',0.1,'RelTol',0.1)
ode23(f,[a,b],y0,opt)
```

дополнить графики новыми линиями (шаг вычислять как разность между соседними узлами)

МИНИМУМ (+1) Неявный метод Эйлера для заданного шага (числа разбиений)

– Выписать формулу неявного метода Эйлера для своего уравнения и выразить y_{i+1} явным образом. Создать функцию g(x,y,h) для полученной формулы

– Вычислив решение по неявному методу Эйлера с помощью полученной формулы дополнить графики №1 и №2 новыми линиями

– Дополнить график №3 фактической ошибки линией для неявного метода Эйлера

– Используя солвер ode23s (для жестких уравнений), дополнить графики новыми линиями

ДОСТАТОЧНО (+1) Решение «плохих» задач

– Решить данное уравнение явным и неявным методами Эйлера, солверами ode23 и ode23s

– Построить графики точного и вычисленного решений для 10 и для 1000 разбиений и соответствующие графики ошибок на отрезке

– Построить график фактической ошибки (опять с линией **y=h**)

а) Неустойчивая задача

$$y' = 5(y - x^2) \quad x \in [0,2] \quad y(0) = 0.08 \quad y_{\text{точное}}(x) = x^2 + 0.4x + 0.08$$

б) Жесткая задача

$$y' = -100y + 10 \quad x \in [0,1] \quad y(0) = 1 \quad y_{\text{точное}}(x) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10}e^{-100x}$$

Варианты

1. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sec x, \quad x \in [0,1.5], \quad y = \sin x + \cos x$

2. $x^2 y' + yx + 1 = 0, \quad x \in [1,3], \quad xy = 1 - \ln|x|$

3. $(2x+1)y' = 4x + 2y, \quad x \in [0,4], \quad y = (2x+1)\ln|2x+1| + 1$

4. $x(y' + y) = e^x, \quad x \in [1,3], \quad y = e^x(\ln|x| + 1)$

5. $y = x(y' - x\cos x), \quad x \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi], \quad y = x\sin x$

6. $y' = 2x(x^2 + y), \quad x \in [1,2], \quad y = e^{x^2} - x^2 - 1$

7. $(xy' - 1)\ln x = 2y, \quad x \in [1,3], \quad y = \ln^2 x - \ln x, \quad y'(1) = -1$

8. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}, \quad x \in [1,5], \quad y = x^2 e^{-x}$

9. $y' + 2y = y^2 e^x, \quad x \in [-1,1], \quad y = e^{-x}$

10. $(x+1)(y' + y^2) = -y, \quad x \in [1,5], \quad y(x+1)\ln|x+1| = 1$

11. $xy^2 y' = x^2 + y^3, \quad x \in [1.1,3], \quad y^3 = 3x^2(x-1)$

12. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y, \quad x \in [1,2], \quad y = x^4(\ln x + 1)^2$

13. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x, \quad x \in [1,2], \quad 2y^2 x^4 e^x = 1$

14. $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}, \quad x \in [1.1, 4.1], \quad y^2 = x^2 - 1$

15. $(x^2 + 1)y' - 2xy = (x^2 + 1)^2, \quad x \in [0,2], \quad y = x(x^2 + 1)$

МАКСИМУМ (+1) Решение систем ОДУ

– Для данного уравнения поставить задачу Коши с известным решением на левом конце промежутка. Свести задачу для уравнения 2ого порядка к задаче с системой уравнений 1ого порядка. Решить изученными методами и солверами, построить графики

Варианты

1. $x^2(x+1)y'' - y' - 2y = \dfrac{1}{x^2} \quad x \in [0.2,1] \quad y_{\text{точное}} = 1 + \dfrac{1}{x}$
2. $y'' + y'\cos x + y\sin x = 1 - \sin x \quad x \in [0, \dfrac{\pi}{2}] \quad y_{\text{точное}} = \sin x$
3. $y'' - y'\sin x + y\cos x = 1 - \cos x \quad x \in [0, \dfrac{\pi}{2}] \quad y_{\text{точное}} = \cos x$
4. $y'' + (1 + \sin^2 x)y' + y\cos^2 x = 3e^x \quad x \in [0,1] \quad y_{\text{точное}} = e^x$
5. $xy'' + 2y' - 2xy = -e^x \quad x \in [0.2,1] \quad y_{\text{точное}} = \dfrac{e^x}{x}$
6. $y'' + xy' - y\dfrac{2}{\cos^2 x} = \dfrac{x}{\cos^2 x} \quad x \in [0,1] \quad y_{\text{точное}} = \operatorname{tg} x$
7. $(e^x + 1)y'' - y' - ye^x = e^x \quad x \in [0,1] \quad y_{\text{точное}} = e^x - 1$
8. $y'' - y'\operatorname{tg} x + 3y = \sin x \quad x \in [0, \dfrac{\pi}{2}] \quad y_{\text{точное}} = \sin x$
9. $y'' + 4xy' + y(4x^2 + 3) = e^{-x^2} \quad x \in [0,1] \quad y_{\text{точное}} = e^{-x^2}$
10. $2x(x+2)y'' + (2-x)y' + 2y = \sqrt{x} \quad x \in [1,2] \quad y_{\text{точное}} = \sqrt{x}$
11. $(x^2+6)xy'' - 4(x^2+3)y' + 7xy = x^4 \quad x \in [0,1] \quad y_{\text{точное}} = x^3$
12. $(2x^2 + x)y'' + 2(x+1)y' - y = \dfrac{1}{x} \quad x \in [0.2,1] \quad y_{\text{точное}} = \dfrac{1}{x}$
13. $xy'' - (2x+1)y' + (x+2)y = x^2e^x \quad x \in [0,1] \quad y_{\text{точное}} = x^2e^x$
14. $xy'' - (2x+1)y' + 3y = e^{2x} \quad x \in [0,1] \quad y_{\text{точное}} = e^{2x}$
15. $xy'' + y' + 2y = \ln x \quad x \in [1,2] \quad y_{\text{точное}} = \ln x$