Лабораторная работа №4. (часть1)
Решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

Задача. Реализовать метод Рунге-Кутты 2ого порядка. Решить задачу Коши для различных значений точности с использованием адаптивного шага. Построить графики ошибки и числа итераций от заданной точности

Задача Коши в простейшем случае ставится для дифференциального уравнения первого порядка с начальным условием

$$y' = f(x, y) \quad x \in [a, b] \quad y(a) = y_a$$

Строится равномерная сетка ($x_0=a,\ x_n=b$) на отрезке $[a,b]$

Методы Рунге-Кутты 2 порядка

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_i + h_i, \tilde{y}_{i+1})\right], \quad \text{метод Эйлера – Коши (Хойна)}$$

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2} f(x_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i + \frac{h_i}{2}, \tilde{y}_{i+1}), \quad \text{модифицированный метод Эйлера (средней точки)}$$

БАЗА (0) Запрограммировать метод для фиксированного шага. Построить графики решения и ошибки на отрезке и график ошибки от шага

– Построить равномерную сетку на отрезке

– Для каждого узла сетки вычислить значение решения по формуле метода

– Построить графики (№1) точного и приближенного решений и графики ошибки на отрезке для двух значений шага (0,1 и 0,05)

– В цикле меняя значение шага от 0,1 до 1e-8 (8 значений), вычислить норму ошибки

– Построить зависимость (№2) ошибки от шага. На график нанести линию $\mathbf{h^2}$ (почему?)

МИНИМУМ (+1) Применение правила Рунге для достижения заданной точности

– Изменить цикл по шагу на цикл по точности. Шаг выбирать по правилу Рунге двойного просчета

– Построить зависимость ошибки (№3) и числа разбиений (№4) от заданной точности

ДОСТАТОЧНО (+1) Адаптивный выбор шага для заданной точности

Алгоритм действий для получения значения решения в следующей точке x_{i+1}:

1. Вычислить y_{i+1} с помощью y_i с шагом $h=x_{i+1}-x_i$
2. Вычислить y_{i+1} с помощью y_i с шагом $h/2$ (от точки x_i необходимо сделать два шага до точки x_{i+1})
3. Вычислить поправку $\frac{y_{i+1}^{h} - y_{i+1}^{h/2}}{2^k - 1}$ (здесь **k** – порядок метода) и сравнить ее с точностью
4. Если точность больше поправки, то повторить действия начиная с п.2., уменьшив шаг в 2 раза.
5. Если поправка меньше точности, то перейти к следующей точке.

– Нанести на графики №3 и №4 полученные значения ошибок и числа разбиений для метода с адаптивным выбором шага

МАКСИМУМ (+1) Релизация метода Рунге-Кутты 3его или 4 порядков

Схемы методов Рунге-Кутты 3его и 4ого порядков

Во всех схемах $k_1 = f(x_i, y_i)$

Схемы 3его порядка		Схемы 4ого порядка	
1/2	1/3	1/2	1/3
$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$ $k_2 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{hk_1}{2})$ $k_3 = f(x_{i+1}, y_i - hk_1 + 2hk_2)$	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3)$ $k_2 = f(x_{i+\frac{1}{3}}, y_i + \frac{hk_1}{3})$ $k_3 = f(x_{i+\frac{2}{3}}, y_i + \frac{2hk_2}{3})$	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $k_2 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{hk_1}{2})$ $k_3 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{hk_2}{2})$ $k_4 = f(x_{i+1}, y_i + hk_3)$	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$ $k_2 = f(x_{i+\frac{1}{3}}, y_i + \frac{hk_1}{3})$ $k_3 = f(x_{i+\frac{2}{3}}, y_i - \frac{hk_1}{3} + hk_2)$ $k_4 = f(x_{i+1}, y_i + hk_1 - hk_2 + hk_3)$

– Построить графики №1 - №4 для одной из схем (по варианту)

Варианты

1. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sec x, \quad x \in [0, 1.5], \quad y = \sin x + \cos x$

2. $x^2 y' + yx + 1 = 0, \quad x \in [1, 3], \quad xy = 1 - \ln|x|$

3. $(2x+1)y' = 4x + 2y, \quad x \in [0, 4], \quad y = (2x+1)\ln|2x+1| + 1$

4. $x(y' + y) = e^x, \quad x \in [1, 3], \quad y = e^x(\ln|x| + 1)$

5. $y = x(y' - x\cos x), \quad x \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi], \quad y = x\sin x$

6. $y' = 2x(x^2 + y), \quad x \in [1, 2], \quad y = e^{x^2} - x^2 - 1$

7. $(xy' - 1)\ln x = 2y, \quad x \in [1, 3], \quad y = \ln^2 x - \ln x, \quad y'(1) = -1$

8. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}, \quad x \in [1, 5], \quad y = x^2 e^{-x}$

9. $y' + 2y = y^2 e^x, \quad x \in [-1, 1], \quad y = e^{-x}$

10. $(x+1)(y' + y^2) = -y, \quad x \in [1, 5], \quad y(x+1)\ln|x+1| = 1$

11. $xy^2 y' = x^2 + y^3, \quad x \in [1.1, 3], \quad y^3 = 3x^2(x-1)$

12. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y, \quad x \in [1, 2], \quad y = x^4(\ln x + 1)^2$

13. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x, \quad x \in [1, 2], \quad 2y^2 x^4 e^x = 1$

14. $2y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2 - 1}, \quad x \in [1.1, 4.1], \quad y^2 = x^2 - 1$

15. $(x^2+1)y' - 2xy = (x^2+1)^2, \quad x \in [0, 2], \quad y = x(x^2+1)$