Лабораторная работа №2. (часть 1)
Программирование степенного метода для поиска собственных чисел

Задача. Запрограммировать степенной метод, найти максимальное и минимальное собственные числа (с.ч.).

БАЗА (0) Создание матрицы. Нужно создать матрицу с известными с.ч.

Построение основано на свойстве подобного преобразования, которое не изменяет с.ч. матрицы.

1 способ. При помощи **невырожденной матрицы** *B*. Если есть диагональная матрица *D* (с с.ч. на диагонали), то у матрицы $A=B^{-1}DB$ будут те же самые с.ч. Матрица *A* в общем случае не будет симметричной. Положительная определенность зависит от знаков элементов диагональной матрицы *D*

2 способ. При помощи **ортогональной матрицы** *Q*. Если есть диагональная матрица *D* (с с.ч. на диагонали), то у матрицы $A=Q^TDQ$ будут те же самые с.ч. Особенность матрицы *A* в том, что она будет **симметричной**.

Ортогональная матрица *Q* создается или ортогональным разложением любой невырожденной матрицы или на основе произвольного вектора *w* преобразованием Хаусхолдера $Q=E\text{-}2ww^T/||w||$

3 способ. Создание **несимметричной** матрицы при помощи **ортогональной** матрицы *Q*. Если есть треугольная (верхняя или нижняя) матрица *B* (с с.ч. на диагонали), то у матрицы $A=Q^TBQ$ будут те же самые с.ч. и матрица при этом получится несимметричной

МИНИМУМ (+1) Степенной метод для поиска максимального с.ч. без нормировки

Применяется для матриц имеющих простую структуру. Основан на определяющем соотношении $Ax = \lambda x$. Одновременно происходит поиск с.ч. и собственного вектора (с.в.).

$x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$, тогда $\lambda^{(k+1)} = x_i^{(k+1)} / x_i^{(k)}$

Можно рассматривать отношения не произвольных компонент векторов, а, например, максимальных, что соответствует бесконечной норме. Тогда в неравенстве для достижения заданной точности можно взять разность с.ч. на двух итерациях.

НЕ ДОСТАТОЧНО (+1) Степенной метод для поиска максимального с.ч. с нормировкой

Т.к. фактически на каждой итерации вычисляется степень матрицы, то значения вектора быстро нарастают или убывают. Для исключения аварийных ситуаций необходима нормировка вектора на каждой итерации или периодически

ДОСТАТОЧНО (+1) Для поиска минимального с.ч. степенным методом можно применить сдвиг

Если матрицу *A* (*A*>0) сдвинуть на число μ ($C=A-\mu E$) большее, чем максимальное с.ч. (например, любая из ||A||), то с помощью алгоритма найдется максимальное с.ч. λ (<0) новой матрицы. Тогда число λ+μ будет минимальным с.ч. матрицы *A*.

МАКСИМУМ (+1) Метод Якоби для решения полной проблемы с.ч.

Применяется для симметричных матриц потому, что они имеют ортогональный базис из с.в. Основан на свойстве подобных преобразований сохранять спектр матрицы. Подобные преобразования осуществляются с помощью матриц вращения, что на каждом шаге позволяет пересчитывать только две строки и два столбца. В качестве условия останова можно использовать как неравенство $\sum_{i>j} a_{i,j}^2 < \mathcal{E}$, так и $\max(a_{i,j}^2, j = 1,..,n, i > j) < \mathcal{E}$, что показывает квадратичную сходимость метода. С.в. можно вычислить как произведение всех матриц вращения.

Элемент, который зануляется на текущей итерации называется ключевым. Есть несколько стратегий выбора ключевого элемента.

1 способ. Ключевой элемент – максимальный по модулю из поддиагональных элементов

2 способ. Ключевой элемент выбирается в некотором смысле оптимальным образом. Ключевой элемент стоит в строке с максимальной второй нормой и является максимальным в своей строке (по модулю)