期末篇：

代数小讲堂

基础知识部分

彭启航

一、线性空间

① 线性空间的定义 8条规则 核心：$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$ $k(l\alpha)=(kl)\alpha$

② 向量的线性关系：线性相关与线性无关

③ 极大无关组 ⟶ 秩、维数

期中讲座已讲，此处略，请明确其判则与意义

④ 线性同构（同构映射） a. 线性：$\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$ $\varphi(k\alpha)=k\varphi(\alpha)$ b. 双射

※ 同构是相当重要的思想，可以通过同构映射将问题等价转化 如 向量 ~ 坐标

⑤ 基变换与过渡矩阵 设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 与 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 是 n维线性空间 V 的两组基

$$\begin{cases} f_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n, \\ f_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n, \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

即 $(f_1,\cdots,f_n)=(e_1,\cdots,e_n)A$

A 可逆

同一向量在不同基下坐标向量的关系 $x=Ay$ x对应$\{e_1,\cdots,e_n\}$ y对应$\{f_1,\cdots,f_n\}$

⑥ 子空间：U是V的子空间 a. U.V均是线性空间 b. U是V的非空子集

运算：$V_1+V_2=\{v_1+v_2 \mid v_1\in V_1,\ v_2\in V_2\}$ $V_1\cap V_2=\{v \mid v\in V_1 且 v\in V_2\}$

⑦ 直和：$V_1,\cdots,V_k$是线性空间V的子空间，$\forall i\in\{1,2,\cdots,k\}$ 均满足

$V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}+\cdots+V_k)=0$

则记 $V_1+V_2+\cdots+V_k=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$

相关定理：

设 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 是线性空间 V 的子空间, $V_0 = V_1 + V_2 + \cdots + V_k$, 则下列命题等价:

(1) $V_0 = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$ 是直和;

(2) 对任意的 $2 \le i \le k$, 有

$$V_i \cap (V_1 + V_2 + \cdots + V_{i-1}) = 0;$$

(3) $\dim(V_1 + V_2 + \cdots + V_k) = \dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_k$;

(4) $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 的一组基可以拼成 V_0 的一组基;

(5) V_0 中的向量表示为 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 中的向量之和时其表示唯一.

⑧ 维数公式 $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$

二、线性映射

① def

定义 4.1.1 设 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 到 $\mathbb{K}$ 上线性空间 U 的映射，如果 φ 适合下列条件：

(1) $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta),\ \alpha,\beta\in V$;

(2) $\varphi(k\alpha)=k\varphi(\alpha),\ k\in\mathbb{K},\ \alpha\in V$,

则称 φ 是 $V\to U$ 的线性映射. V 到自身的线性映射称为 V 上的线性变换. 若 $\varphi: V\to U$ 作为映射是单的，则称 φ 是单线性映射；如 φ 作为映射是满的，则称 φ 是满线性映射. 若 φ 是双射，则称 φ 是线性同构，简称同构. 若 $V=U$，V 自身上的同构称为自同构.

证明某映射是线性时需要验证这两个条件

明确映射单满双的使用与证明

② $\mathcal{L}(V,U)$

命题 4.2.1 设 $\mathcal{L}(V,U)$ 是 $V\to U$ 的线性映射全体，则在上述线性映射的加法及数乘定义下，$\mathcal{L}(V,U)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. 特别，$V\to\mathbb{K}$ 上的所有线性函数全体构成一个线性空间.

基础问答：　$\dim\mathcal{L}(V,U)=$?

E_{ij}

③ 线性映射与矩阵

$$T:\ \mathcal{L}(V,U)\longrightarrow M_{m,n}(\mathbb{F})$$
$$\varphi\longmapsto A=T(\varphi)$$

$$\begin{tikzcd} \alpha\in V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\eta_1"] & U \ni \beta=\varphi(\alpha) \arrow[d, "\eta_2"] \\ \tilde{\alpha}\in\mathbb{K}_n \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}_m \ni \tilde{\beta}=A\tilde{\alpha} \end{tikzcd}$$

η_1,η_2 是线性同构

其中 V 与 U 分别是 n、m 维的线性空间

则 T 是线性同构，即 $\varphi(\alpha)=\beta \Leftrightarrow A\tilde{\alpha}=\tilde{\beta}$

这个命题意味着解题时几何方法与代数方法的等价性 $\Rightarrow\begin{cases}\text{几何} & \text{线性映射　基、维数公式等}\\ \text{代数} & \text{矩阵　熟悉、行列式等}\end{cases}$

另外 线性同构 T 还保持了乘法 即 $T(\psi\varphi)=T(\psi)T(\varphi)$

即 矩阵乘法的几何意义是线性映射的复合（有助于理解多元函数的微分）

④ 相似　（高代Ⅱ的核心）

当然，虽然 T 是线性同构，但是 φ 在不同基下的表示矩阵是不同的

定理 4.3.4 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，$\varphi\in\mathcal{L}(V)$，又设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 及 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 是 V 的两组基且从 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 到 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 的过渡矩阵为 P，若 φ 在基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 下的表示矩阵为 A，在基 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 下的表示矩阵为 B，则

$$B=P^{-1}AP.$$

$$(e_1,\cdots,e_n)\leftarrow(f_1,\cdots,f_n)$$
$$(g_1,\cdots,g_n)$$

借助该命题可知基的取法也会影响证明

⑤ 线性映射的像与核

设 $\varphi\in\mathcal{L}(V,U)$　$\dim V=n$　$\dim U=m$

则 $\mathrm{Im}\,\varphi=\{\varphi(\alpha)\mid\alpha\in V\}\subseteq U$　$\mathrm{Ker}\,\varphi=\{\alpha\in V\mid\varphi(\alpha)=0\}\subseteq V$

常用推论：设 φ 在给定基下的矩阵是 A

1) φ 满 $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Im}\varphi = \dim U$ $\Leftrightarrow$ $r(A) = m$

φ 单 $\Leftrightarrow$ $\ker\varphi = 0$ $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$

2) $\dim \mathrm{Im}\varphi = r(A)$ $\quad \dim \ker\varphi = n - r(A)$

3) 维数公式 $\boxed{\dim \ker\varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi = \dim V}$

以上推论必须 理解、会证、熟用

⑥ 不变子空间

def

定义 4.5.1 设 φ 是线性空间 V 上的线性变换, U 是 V 的子空间, 若 U 适合条件:

$$\varphi(U) \subseteq U,$$

则称 U 是 φ 的不变子空间 (或 φ-不变子空间). 这时把 φ 的定义域限制在 U 上, 则 φ 在 U 上定义了一个线性变换, 称为由 φ 诱导出的线性变换, 或称为 φ 在 U 上的限制, 记为 $\varphi|_U$.

线性空间 V 上任一线性变换 φ 至少有两个不变子空间: 零子空间及全空间 V. 因此我们把零子空间及全空间 V 称为平凡的 φ-不变子空间.

最常用的处理：

取 U 的一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_r\}$，扩充为 V 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_n\}$

则 φ 在这组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} A & \cancel{B} \\ 0 & C \end{pmatrix}$ $\quad \left|\begin{matrix} \vdots & \vdots \end{matrix}\right| = |A||C|$

这里 $A \in M_r(\mathbb{F})$ $\quad B \in M_{r,n-r}(\mathbb{F})$ $\quad C \in M_{n-r}(\mathbb{F})$

技巧：将线性映射限制在某些子空间下可以简化问题

三、多项式

① 一元多项式代数 $\mathbb{F}[x]$，下面设 $f(x)$、$g(x) \in \mathbb{F}[x]$

② 整除、 $g(x) \mid f(x) \Leftrightarrow \exists\, h(x)$ s.t. $f(x) = g(x)h(x)$

带余除法： $\exists$ 唯一 $q(x)$ $r(x)$ s.t. $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$

且 $\deg r(x) < \deg g(x)$

$\boxed{\text{辗转相除法}}$ & 计算题

③ 最大公因式

设 $f(x), g(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的多项式, 若 $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的公因子, 又若对 $f(x), g(x)$ 的任一公因子 $h(x)$, 都有 $h(x) \mid d(x)$, 则称 $d(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 的最大公因子, 记为 $d(x) = (f(x), g(x))$.

$$f(x)g(x) = m(x)d(x)$$

常用定理：

1) 设 $f(x), g(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的多项式, $d(x)$ 是它们的最大公因子, 则必存在 $\mathbb{F}$ 上的多项式 $u(x), v(x)$, 使 $f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x)$.

2) 设 $f(x), g(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的多项式, 则它们互素的充要条件是, 存在 $\mathbb{F}$ 上的多项式 $u(x), v(x)$, 使 $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$.

求解 $u(x)$、$v(x)$

计算题

互素多项式的性质也要理解到位

④ 因式分解　　常用定理

1) 不可约多项式

设 $p(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的不可约多项式且 $p(x) \mid f(x)g(x)$, 则 $p(x) \mid f(x)$ 或者 $p(x) \mid g(x)$.

2) 标准分解

在多项式 $f(x)$ 的不可约分解中, 若要求每个不可约因子都是首一多项式, 且相同的不可约因子合并在一起, 则

$$f(x) = cp_1(x)^{e_1}p_2(x)^{e_2}\cdots p_k(x)^{e_k},$$

其中 c 是 $\mathbb{F}$ 中的一个常数. 上述分解式称为 $f(x)$ 的标准分解.

3) $f(x)$ 没重因式 $\Leftrightarrow$ $(f(x), f'(x)) = 1$

⑤ 多项式函数

1) 余数定理 ☆

设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $b \in \mathbb{F}$, 则存在 $\mathbb{F}$ 上的多项式 $g(x)$, 使

$$f(x) = (x - b)g(x) + f(b).$$

特别, b 是 $f(x)$ 的根的充要条件是 $(x - b) \mid f(x)$.

2) $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 若 $\deg f(x) = n$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 中最多有 n 个根

⑥ 复系数多项式

1) 代数基本定理

每个次数大于 0 的复数域上的多项式至少有一个复数根 ✓

2) Vieta 定理 见课本

⑦ 实系数多项式

1) 若有虚根, 则必是成对的共轭虚根

2) 实数域上的不可约因式的次数不超过 2

⑧ 有理系数多项式 $\Leftrightarrow$ 整系数多项式

设有整系数多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 则有以下定理:

1) 有理数 q/p (p,q 互素) 是 $f(x)$ 的根的必要条件是 $p \mid a_n$, $q \mid a_0$

2) 若整系数多项式 $f(x)$ 在有理数域上可约, 则它在整数环上也可约,
即可分解为次数较低的整系数多项式之积

3) Eisenstein 判别法

若有素数 p, 满足 $p \mid a_i$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ 但 $p \nmid a_n$, $p^2 \nmid a_0$

则 $f(x)$ 在有理数域上不可约

⑨ 多元多项式

1) 对称多项式 $\sigma_1\ \sigma_2\ \cdots\ \sigma_n$ $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ 会考计算

2) Newton公式 略

⑩ 结式与判别式 略，理解会算即可

典型例题部分

一、基础计算 考试预计40分左右，务必拿下

① 辗转相除法

1. (12 分) 设 $f(x)=x^4+3x^3-2x+4$, $g(x)=x^3-x+6$. 求它们的最大公因式 $(f(x),g(x))$, 并求多项式 $u(x)$, $v(x)$ 使得

$$(f(x),g(x))=f(x)u(x)+g(x)v(x).$$

② 对称多项式 + 韦达定理

3. (12 分) 设 x_1,x_2,x_3 是三次方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的 3 个根, 将 $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ 表示为 p,q,r 的多项式.

③ 线性映射与矩阵 + 像与核的理解

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{R}^3$ 中的一组基. 设 φ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的一个线性变换, 满足

$$\varphi(\mathbf{v}_1)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \varphi(\mathbf{v}_2)=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix},\ \varphi(\mathbf{v}_3)=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

(1) 求 φ 在 $\mathbb{R}^3$ 的基 $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ 下的表示矩阵.

(2) 求 $\operatorname{Im}\varphi$ 和 $\operatorname{Ker}\varphi$ 的基和维数.

④ 爱森斯坦判别法应用

设 p 是一个素数. 证明多项式 $f(x)=x^p-px-1$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约.

二、进阶证明　考试大多是 线性空间与线性映射 的证明

① 像与核的关系（其实是一个比较常用的简单结论）

五、(12 分) 设 φ 是有限维线性空间 V 上的一个线性变换. 证明以下条件互相等价:

(1) $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Ker}\varphi^2$;

(2) $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Im}\varphi^2$;

(3) $\mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi = \{0\}$;

(4) $\mathrm{Ker}\varphi + \mathrm{Im}\varphi = V$.

② 一眼常见结论推论

6. (10 分) 设 ϕ 是 n 维向量空间 V 上的线性变换, 满足条件 $\phi^n = 0$, $\phi^{n-1} \neq 0$. 证明: $\dim \mathrm{Im}\, \phi = n - 1$.

③ 结合多项式互素的性质

七、(8 分) 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是两个首一多项式. 记 $d(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 的首一的最大公因式, $m(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 的首一的最小公倍式. 求证, 对于任意的矩阵 $A \in M_n(\mathbb{F})$, 均有

$$r(f(A)) + r(g(A)) = r(d(A)) + r(m(A)).$$

④ 一道极好的题，深度考察对线性映射的理解与应用

(10 分) 设 V_1, V_2, V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维向量空间. 设

$$\varphi_1 : V_1 \to V, \quad \varphi_2 : V \to V_2$$

是线性映射, 满足 $\varphi_2\varphi_1 = 0$. 证明: $\mathrm{Im}\,\varphi_1 = \mathrm{Ker}\,\varphi_2$ 当且仅当存在线性映射

$$\psi_1 : V \to V_1, \quad \psi_2 : V_2 \to V$$

使得

$$\varphi_1\psi_1 + \psi_2\varphi_2 = I_V.$$

$\Rightarrow$

祝大家期末顺利哈！

⑤ 互素多项式与线性映射结合

例 5.74 设 $f(x), g(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的互素多项式, φ 是 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 满足 $f(\varphi)g(\varphi) = \mathbf{0}$, 证明: $V = V_1 \oplus V_2$, 其中 $V_1 = \mathrm{Ker}\, f(\varphi)$, $V_2 = \mathrm{Ker}\, g(\varphi)$.