Feuille de TD 10 : Révisions

Exercice 1. Développements limités

Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 5 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \arcsin(x)$
2. $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$
3. $f(x) = \frac{x^2}{\tan x}$
4. $f(x) = \arctan(x)$

Exercice 2. Fonctions réciproques

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^x(\sin x + \cos x) - 1$

1. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$.
2. Montrer, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange pour f entre 0 et un point x de $\mathbb{R}$, que pour tout $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$, on a : $|f(x) - (2x + x^2)| \leq |x|^3$
3. (a) Déterminer le plus grand intervalle I contenant 0 sur lequel f est croissante.
   (b) Déterminer l'image J de l'intervalle I par la fonction f.
   (c) Montrer que f est une bijection de I sur J.
4. Soit $g : J \to I$ l'application réciproque de f.
   (a) Calculer la dérivée de g au point 0.
   (b) On admet que g admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 que l'on note : $g(y) = a_1 y + a_2 y^2 + y^2 \epsilon(y)$. Calculer a_1, et vérifier que $a_2 = -\frac{1}{8}$.
   (c) Donner l'équation de la tangente au graphe Γ de g au point d'abscisse 0. Préciser la position de cette tangente par rapport à Γ.

Exercice 3. Equations différentielles

1. Calculer la dérivée de la fonction définie par : $\phi(x) = \ln(\cos(x))$ pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$
2. Trouver la solution générale sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ de l'équation différentielle :

$$y' + \tan(x)y = \tan(x)$$

Exercice 4. Calcul de limites

Calculer : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos(3x)}{1 - 2\sin(x)}$

Exercice 5. Fonctions à plusieurs variables

On considère la fonction de deux variables f définie par :

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 + \ln(2x - y)$$

1. Quel est le domaine de définition de f (faire une figure).

2. Calculer les dérivées partielles de f au point $(1, 1)$.
3. Ecrire l'équation du plan tangent à la suface d'équation $z = f(x, y)$ au point $(1, 1, 4)$.

Exercice 6. Etude de fonctions

Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = (1 - x)\ln(\frac{1+x}{1-x}),\ x \in] - 1, 1[$$

1. Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour $x \in] - 1, 1[$.
2. Etudier les variations de g' sur $] - 1, 1[$.
3. On note $J = g'(] - 1, 0[)$. Déterminer l'intervalle J.
4. Montrer que l'équation $g'(x) = 0$ possède une unique solution c et que l'on a $c \in]0, 1[$.
5. Montrer que la fonction g admet un maximum c.
6. Donner l'équation de la tangent au graphe Γ de g au point d'abscisse 0. Préciser la position de cette tangente par rapport à Γ.