

Feuille de TD 3 : dérivation**Exercice 1. Ensemble de dérivabilité**

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ $f_1(0) = 0$
2. $f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ $f_2(0) = 0$
3. $f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$ si $x \neq 1$ $f_3(1) = 1$

Exercice 2. Calcul de tangente

Ecrire l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 0$ des fonctions

1. $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$
2. $g(x) = \tan(x)$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$
3. $h(x) = \exp(4x)$, $x \in \mathbb{R}$

Exercice 3. Dérivabilité

Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ sinon}$$

soit dérivable sur \mathbb{R}_+^*

Exercice 4. Dérivabilité et dérivation

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes (éventuellement de leur prolongement) et donner leurs dérivées :

$$x \rightarrow x(\ln x - 1), \quad x \rightarrow \frac{x}{\ln x}, \quad x \rightarrow \sqrt{x}, \quad x \rightarrow \sqrt{|x|}, \quad x \rightarrow \ln(1 + |x|)$$

Exercice 5. Dérivabilité et continuité

Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 6. Dérivés successives

Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions f, g, h définies par :

$$f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \sin^2 x \quad ; \quad h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

Exercice 7. Extrema

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1 - k)^3 x^2 + (1 + k)x^3$ où k est un nombre réel. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'origine est un extremum local de f .

Exercice 8. Extrema et points d'inflexion

Quel est le lieu des points d'inflexion (puis des extrémums relatifs) de f_λ quand λ décrit \mathbb{R} , où :

$$f_\lambda : x \rightarrow \lambda e^x + x^2.$$