

Feuille de TD 2 : continuité**Exercice 1. Prolongement par continuité**

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur \mathbb{R} ?

1. $f_1(x) = \frac{\sin x}{x}$
2. $f_2(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
3. $f_3(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$
4. $f_4(x) = \frac{|x|}{x}$
5. $f_5(x) = \frac{\exp(x)}{1+\exp\left(\frac{1}{x}\right)}$

Exercice 2. Continuité à gauche et à droite

Déterminer les paramètres a et b pour que les fonctions suivantes soient continues :

$$f(x) = \begin{cases} 5, & x < -2 \\ ax + b, & -2 \leq x < 1 \\ \ln(x), & x \geq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2ax + ax^2, & x \geq 1 \\ \cos(\pi x), & x < 1 \end{cases}.$$

Exercice 3. TDI

1. Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I, f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.
2. Quelles sont les applications continues $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = 1 - x^2$?
3. Même question avec $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = x^2$
4. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f possède un point fixe, *i.e.* il existe x dans $[0, 1]$ tel que $f(x) = x$.
5. Une fonction qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires est-elle nécessairement continue ?

Exercice 4. Continuité et bornes

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?