Feuille de TD 4 : Théorème de Rolle et accroissements finis

Exercice 1. Racines d'un polynôme

Soit P un polynôme de degré n possédant n racines distincts. Démontrer que P' possède $n-1$ racines distincts.

Exercice 2. Accroissement d'une parabole

On rappelle que la formule des accroissements finis peut s'écrire sous la forme :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$$

avec $\theta \in]0,1[$. Calculer un tel θ pour $f(x) = ax^2+bx+c$ (pour $a \neq 0$). Donner une interprétation géomètrique de ce résultat.

Exercice 3. Extension du théorème de Rolle

Soit f une fonction définie et continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,\infty[$ et telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe x_0 dans $]a,\infty[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

Exercice 4. Accroissement finis

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x < y$:

$$x < \frac{y-x}{\ln y - \ln x} < y$$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^x < e < \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}$$

3. Par application du théorème des accroissements finis à la fonction $\ln$ sur $[n,n+1]$, montrer que :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Exercice 5. fonctions lipschitziennes

Soit I un sous-intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est k-lipschitzienne si $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$ pour tout x, y dans I. Dans chacun des cas suivants dire si f est lipschitzienne ou non.

$$I = [0,1], f(x) = \exp x \quad I = \mathbb{R}, f(x) = \sin x \quad I = \mathbb{R}, f(x) = \exp x \quad I = \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x}$$