

Задача формата ЕГЭ, претендующая на номер 27

Сложный уровень

(автор: Кардашевский Илья Николаевич)
<https://vk.com/id321975104>

Условие:

Нолику стало ужасно скучно на уроке информатики, ведь учитель по теме «Системы счисления» давал лишь муторные сложения, вычитания и переводы из одной системы в другую... Чтобы чем-то занять своего брата, Симка придумала следующую задачу: назовём натуральное число n «вайбовым», если его можно разложить в сумму различных целых неотрицательных степеней натурального числа k .

Более формально:

$$n = k^{a_1} + k^{a_2} + k^{a_3} + \dots + k^{a_m}$$

(при чем для любых $1 \leq i, j \leq m$ выполняется условие $a_i \neq a_j$)

Например, для $k = 3$ число $n = 6669$ — «вайбовое», так как $6669 = 3^3 + 3^4 + 3^8$

Для заданных натуральных n и k ($n \geq k$ и $n \leq 10^{20}$, $k \leq 10^{20}$) требуется найти сумму степеней в разложении минимального «вайбового» числа m , которое не меньше n .

Решение:

Алгоритм решения из предыдущего случая, к сожалению, не подойдет для таких ограничений, поэтому придумаем оптимизацию: вместо того, чтобы перебирать все числа начиная с n и проверять подходят ли они нам, мы будем из k -ичного представления числа n , путем замены и добавления разрядов получать подходящее число.

Для начала вспомним замечание: ...представление содержит только 0 и 1. Как можно изменить или добавить несколько разрядов в числе так, чтобы оно стало не меньше и в нём были только 0 и 1?

Для этого найдем самый старший разряд больший 1. Очевидно от него нам надо избавиться, но также понятно, что для этого придется как-то менять заряды старше его (либо добавлять еще один). То есть нужно сделать первый нулевой разряд старше найденного равным 1 (либо опять же добавить к записи 1). Тогда оставшиеся разряды младше мы сделаем равными 0. Действительно, во-первых, мы избавляемся от разрядов со значением превышающим 1, во-вторых, благодаря такому трюку, мы делаем число больше исходного и при этом минимальным. Для полученной записи считаем ответ.

Благодаря такой оптимизации решение работает за $O(\log_k n)$

Код решения:

```
def solve(n : int, k : int) -> int:
    arr = [] # массив для перевода в k-ичную систему
    while n:
        arr.append(n % k)
        n //= k
    arr.append(0) # добавляем незначащий разряд

    m = len(arr) # длина разложения
    for i in range(m - 1, -1, -1): # ищем старший разряд > 1
        if arr[i] > 1:
            for j in range(i + 1, m):
                if arr[j] == 0: # меняем первый нулевой разряд
                    arr[j] = 1
                    for l in range(0, j):
                        arr[l] = 0 # остальные до него обнуляем
                    break
            break

    ans = 0
    for index, bit in enumerate(arr): # перебираем степени
        if bit == 1:
            ans += index # добавляем степень к ответу

    return ans

n, k = map(int, input().split())
print(solve(n, k))
```

Этапы решения:

- 1) В решении будет фигурировать одна функция solve, которая и будет строить ответ для нашей задачи.
- 2) Заведем массив arr, в который будем добавлять разряды из разложения числа n в k-ичную систему счисления.
- 3) В конце добавим один незначащий 0, для того чтобы в случае неподходящего самого старшего ненулевого разряда, мы могли увеличить число, обратившись к незначащему 0.
- 4) Далее в цикле мы итерируемся переменной i с конца разложения, то есть ищем старший неподходящий разряд. Как только мы его находим, далее мы ищем нулевой разряд старше него через цикл с j в пределах [i + 1; m - 1].
- 5) Если мы находим нулевой разряд (а из старших ему неподходящих нет), мы меняем его на 1, а все разряды младше него меняем на 0 (это мы делаем при помощи цикла по переменной l в пределах [0; j - 1]).
- 6) Обязательно выходим из всех циклов, так как нам требовалось найти первые такие разряды, а не все.
- 7) Переменная ans — ответ на нашу задачу. Через цикл enumerate(arr) мы суммируем все подходящие степени и выводим ответ.