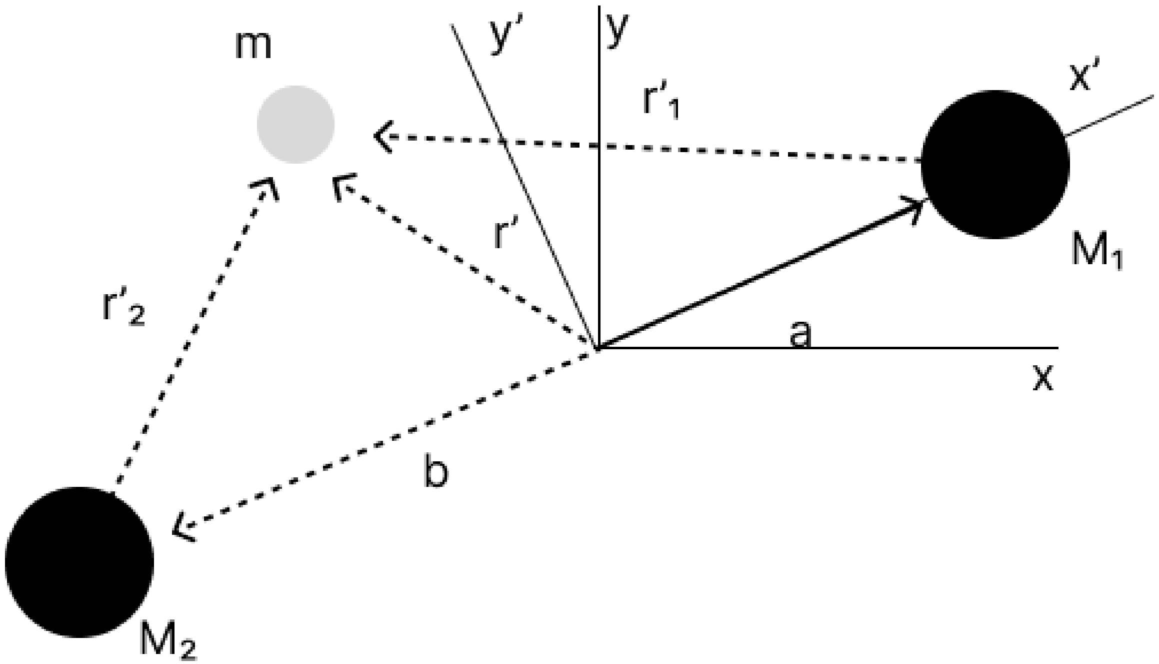
제한적 3입자계 문제

3507 설채환

1. 제한적 3입자계 문제

- 3입자계 문제는 3입자가 3차원 공간에서 중력을 받으며 운동하는 상황을 다루는 문제이다.
- 2차 미분 방정식 9개를 풀어야 하는 문제로 일반적인 해를 구하기 힘들다.
- 단순화시킨 경우에는 풀이가 가능하다. 이러한 특별한 경우를 제한적 3입자계 문제라고 한다.
- 3개의 입자 중 특별히 무거운 주체 입자 2개와 제 3입자 1개로 이루어졌다고 가정
- 질량중심을 중심으로 동일 평면에서 원운동을 한다고 가정

2. 제한적 3입자계의 운동방정식



$$r_1' = \sqrt{(x' - a)^2 + y'^2} \qquad r_2' = \sqrt{(x' + b)^2 + y'^2}$$

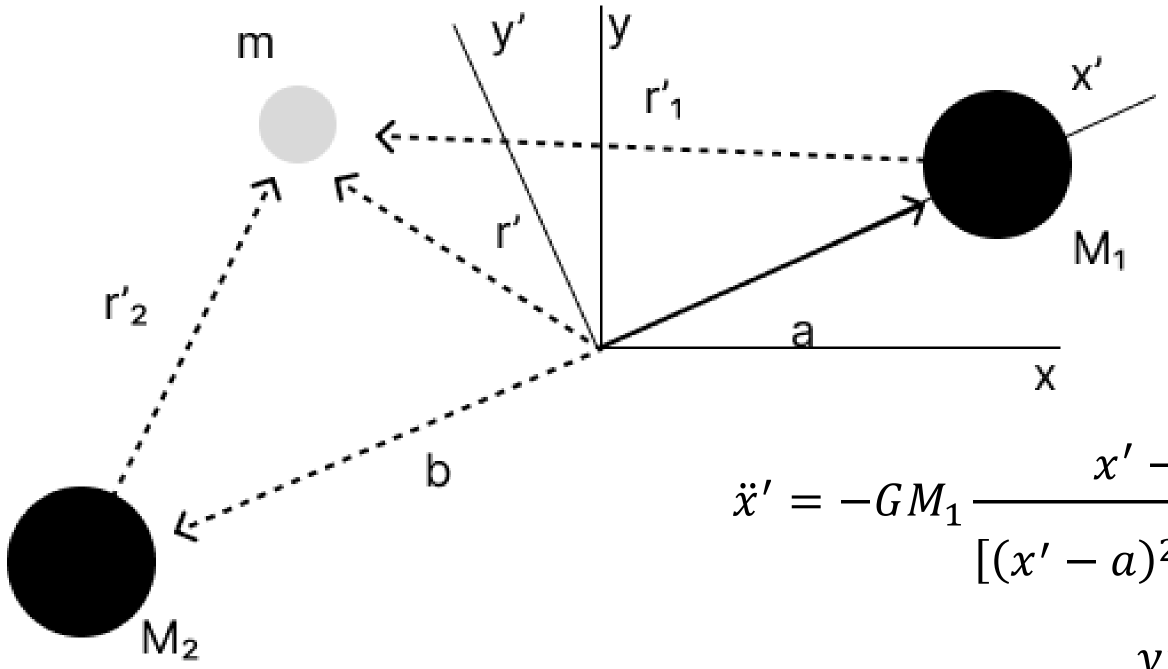
$$\vec{F} = -m\frac{GM_1}{{r_1}'^2}\left(\frac{\overrightarrow{{r_1}'}}{{r_1}'}\right) - m\frac{GM_2}{{r_2}'^2}\left(\frac{\overrightarrow{{r_2}'}}{{r_2}'}\right)$$

(‘좌표계는 질량 중심에 고정, 등속 회전)

$$\overrightarrow{F'} = m\overrightarrow{a'} = \vec{F} - 2m\vec{w} \times \overrightarrow{v'} - m\vec{w} \times (\vec{w} \times \overrightarrow{r'})$$

$$\overrightarrow{a'} = \frac{\vec{F}}{m} - 2\vec{w} \times \overrightarrow{v'} - \vec{w} \times (\vec{w} \times \overrightarrow{r'}) \cdots (1)$$

2. 제한적 3입자계의 운동방정식



$$2\vec{w}\times\vec{v'} = 2w\widehat{k'}\times\left(\dot{x}'\widehat{i'}+\dot{y}'\widehat{j'}\right) = -2w\dot{y}'\widehat{i'}+2w\dot{x}'\widehat{j'}$$

$$\vec{w}\times\left(\vec{w}\times\vec{r'}\right) = w\widehat{k'}\times\left[w\widehat{k'}\times\left(\dot{x}'\widehat{i'}+\dot{y}'\widehat{j'}\right)\right]$$
$$= -w^2x'\widehat{i'} - w^2\,y'\widehat{j'}$$

두 식을 (1)에 대입하면

$$\ddot{x}' = -GM_1\frac{x'-a}{\left[(x'-a)^2+y'^2\right]^{\frac{3}{2}}} - GM_2\frac{x'+b}{\left[(x'+b)^2+y'^2\right]^{\frac{3}{2}}} + w^2x' + 2w\dot{y}' \cdots (2)$$

$$\ddot{y}' = -GM_1\frac{y'}{\left[(x'-a)^2+y'^2\right]^{\frac{3}{2}}} - GM_2\frac{y'}{\left[(x'+b)^2+y'^2\right]^{\frac{3}{2}}} + w^2y' - 2w\dot{x}' \cdots (3)$$

3. 유효 퍼텐셜

$$\Phi(r') = \frac{l^2}{2r'^2} + V(r'), l = r'^2\dot{\theta} \qquad \Phi(r') = -\frac{GM_1}{|\vec{r}' - \vec{a}|} - \frac{GM_2}{\left|\vec{r}' - \vec{b}\right|} - \frac{1}{2}w^2\overrightarrow{r'}^2$$

$$\Phi(x', y') = -\frac{GM_1}{\sqrt{(x' - a)^2 + y'^2}} - \frac{GM_2}{\sqrt{(x' + b)^2 + y'^2}} - \frac{1}{2}w^2(x'^2 + y'^2)$$

단위를 바꾸어서 식을 단순화시켜보자.

$\alpha = \frac{a}{a+b} \qquad G(M_1 + M_2) = 1 \qquad w = 1$ (지구-태양에서 시간 단위를 1년, 거리를 AU, 질량 단위를 태양질량으로 하는 것과 동일한 과정)

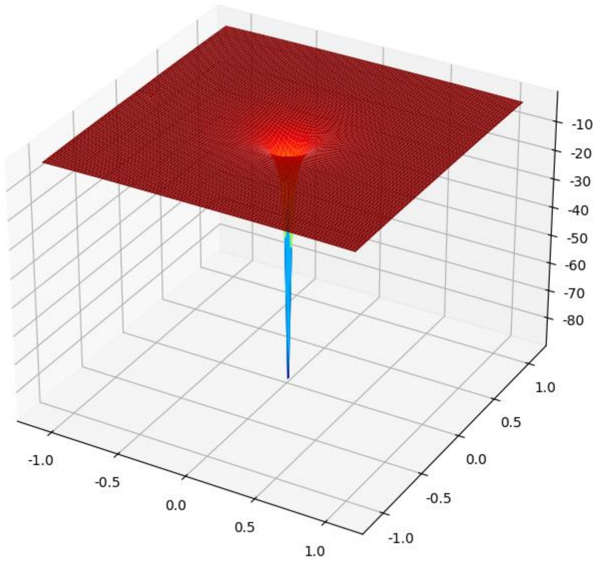
$$\frac{GM_1}{G(M_1 + M_2)} = \frac{b}{a+b} = 1 - \alpha \qquad \frac{GM_2}{G(M_1 + M_2)} = \frac{a}{a+b} = \alpha$$

3. 유효 퍼텐셜

$$\Phi(x', y') = -\frac{1-\alpha}{\sqrt{(x'-\alpha)^2 + y'^2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{(x'+1-\alpha)^2 + y'^2}} - \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)$$

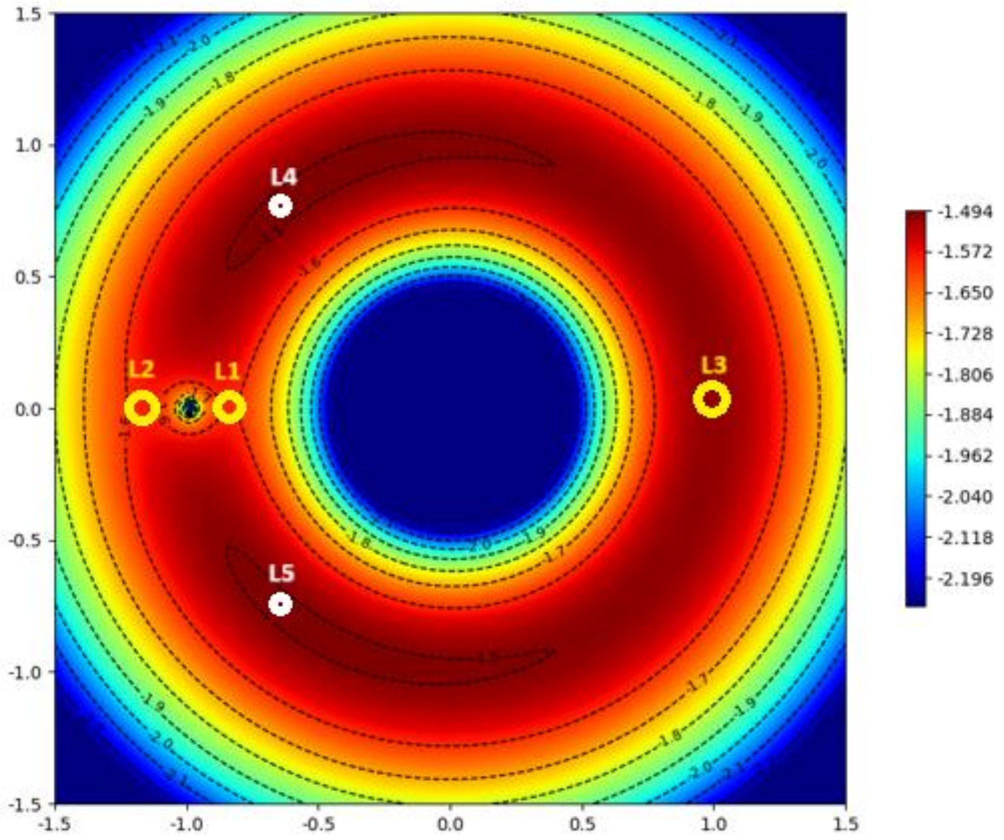
(지구-달의 계)

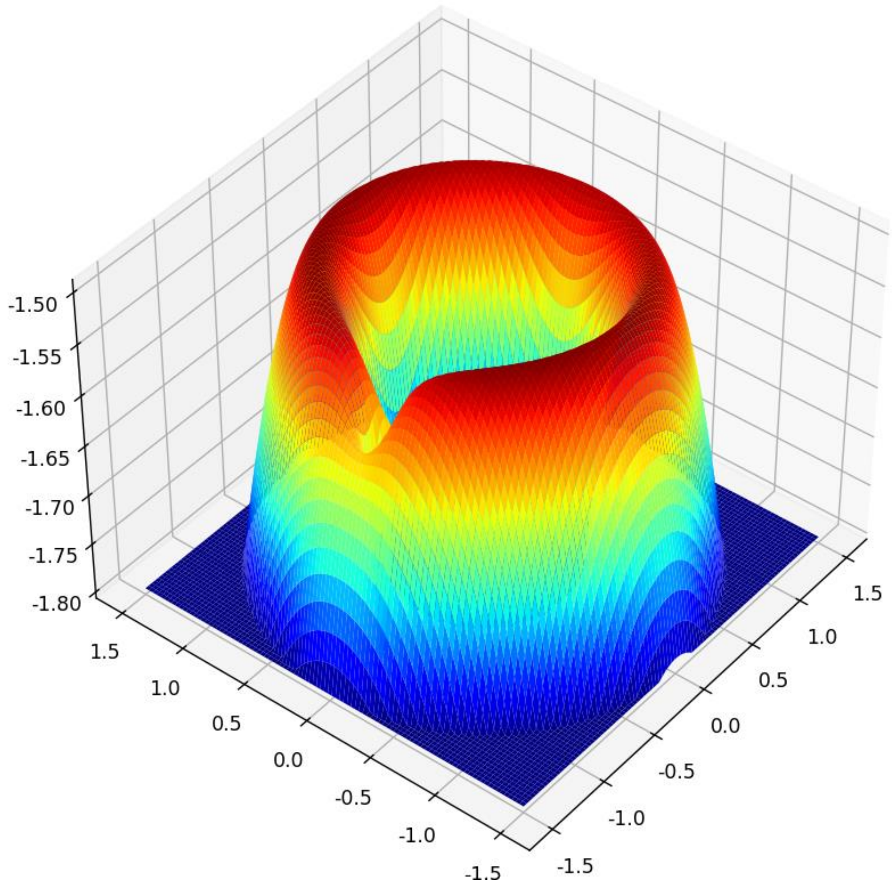
$M_e = 5.972 \times 10^{24} Kg \quad M_m = 7.36 \times 10^{22} \mathrm{Kg} \quad r = 385000 km \qquad \therefore \alpha = \frac{M_m}{M_e + M_m} = 0.012174$



지구 부분의 퍼텐셜이 너무 낮음
➔ 최솟값을 제한

3. 유효 퍼텐셜





L4, L5는 다른 점들에 비해 더 안정적이라, 태양-목성 계의 L4, L5에는 소행성이 많이 있다.

https://github.com/seolmango/threeParticle

4. 트로이 소행성(태양-목성 계)

$r_1' = \sqrt{(x'-\alpha)^2 + y'^2}$ $r_2' = \sqrt{(x'+1-\alpha)^2 + y'^2}$

(2)와 (3)에 대입하여 정리하면

$$\ddot{x}' = -(1-\alpha)\frac{x'-\alpha}{{r_1}'^3} - \alpha\frac{x'+1-\alpha}{{r_2}'^3} + x' + 2\dot{y}' \cdots (4)$$

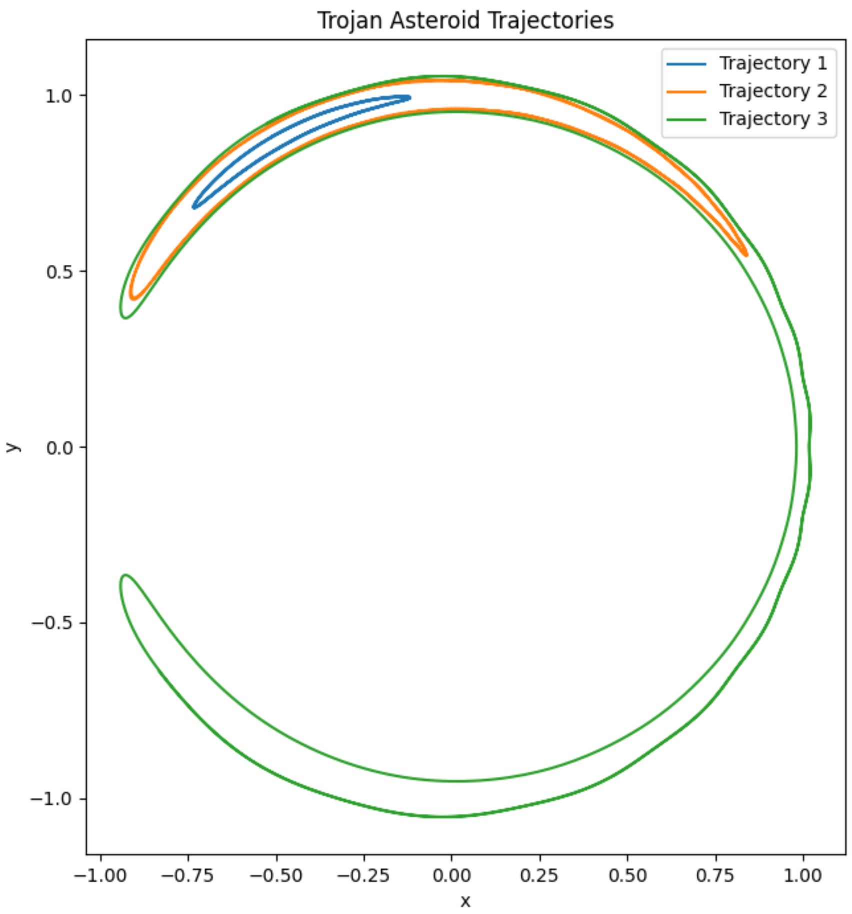
$$\ddot{y}' = -(1-\alpha)\frac{y'}{{r_1}'^3} - \alpha\frac{y'}{{r_2}'^3} + y' - 2\dot{x}' \cdots (5)$$

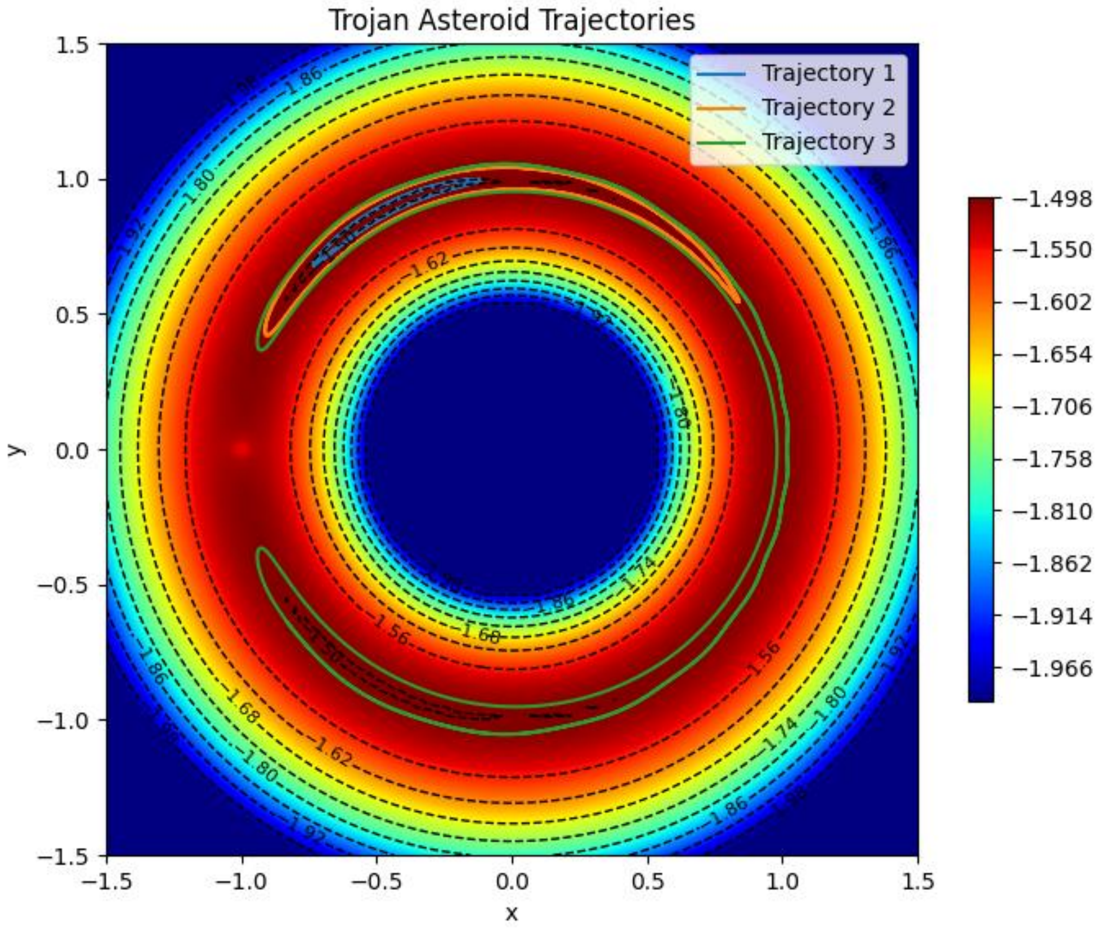
$M_s = 1.9889 \times 10^{30} Kg$ $M_j = 1.899 \times 10^{27}\mathrm{Kg}$

$$\therefore \alpha = \frac{M_j}{M_s + M_j} = 0.000954$$

	궤도 1	궤도 2	궤도 3	궤도 4	궤도 5
${x'}_0$	-0.509	-0.524	-0.524	-0.509	-0.532
${y'}_0$	0.883	0.909	0.920	0.883	0.920
${\dot{x}'}_0$	0.0259	0.0647	0.0780	-0.0259	0.0780
${\dot{y}'}_0$	0.0149	0.0367	0.0430	-0.0149	0.0430

4. 트로이 소행성(태양-목성 계)

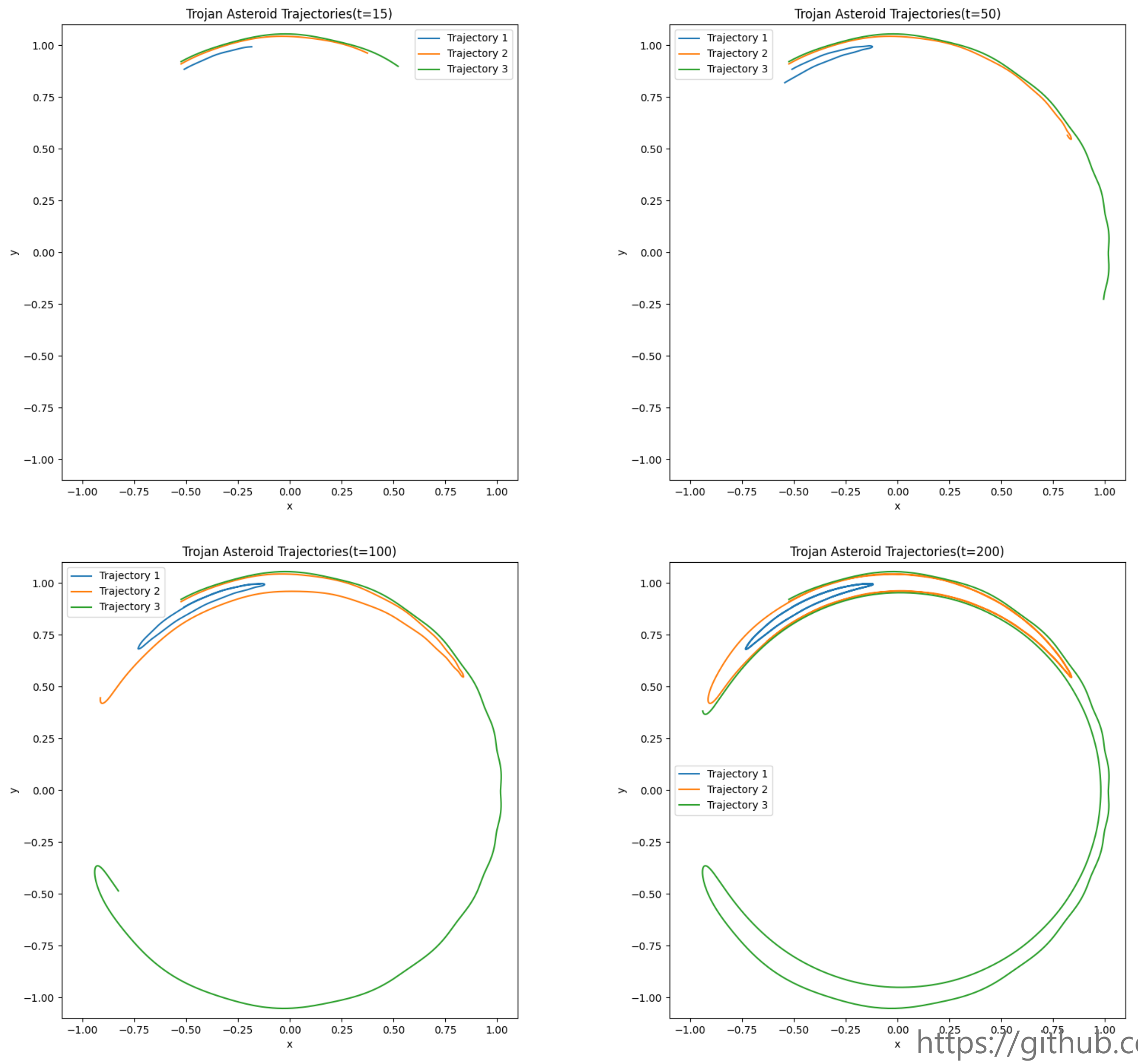




L4, L5 주위를 맴도는 운동 ➔ 궤도1~3

https://github.com/seolmango/threeParticle

4. 트로이 소행성(태양-목성 계)



1. 퍼텐셜 등고선을 따라 운동

➔ 전향력은 방향만 바꾸고, 속력을 변화시키지 못하기 때문에, 운동에너지가 일정하기 때문이다.

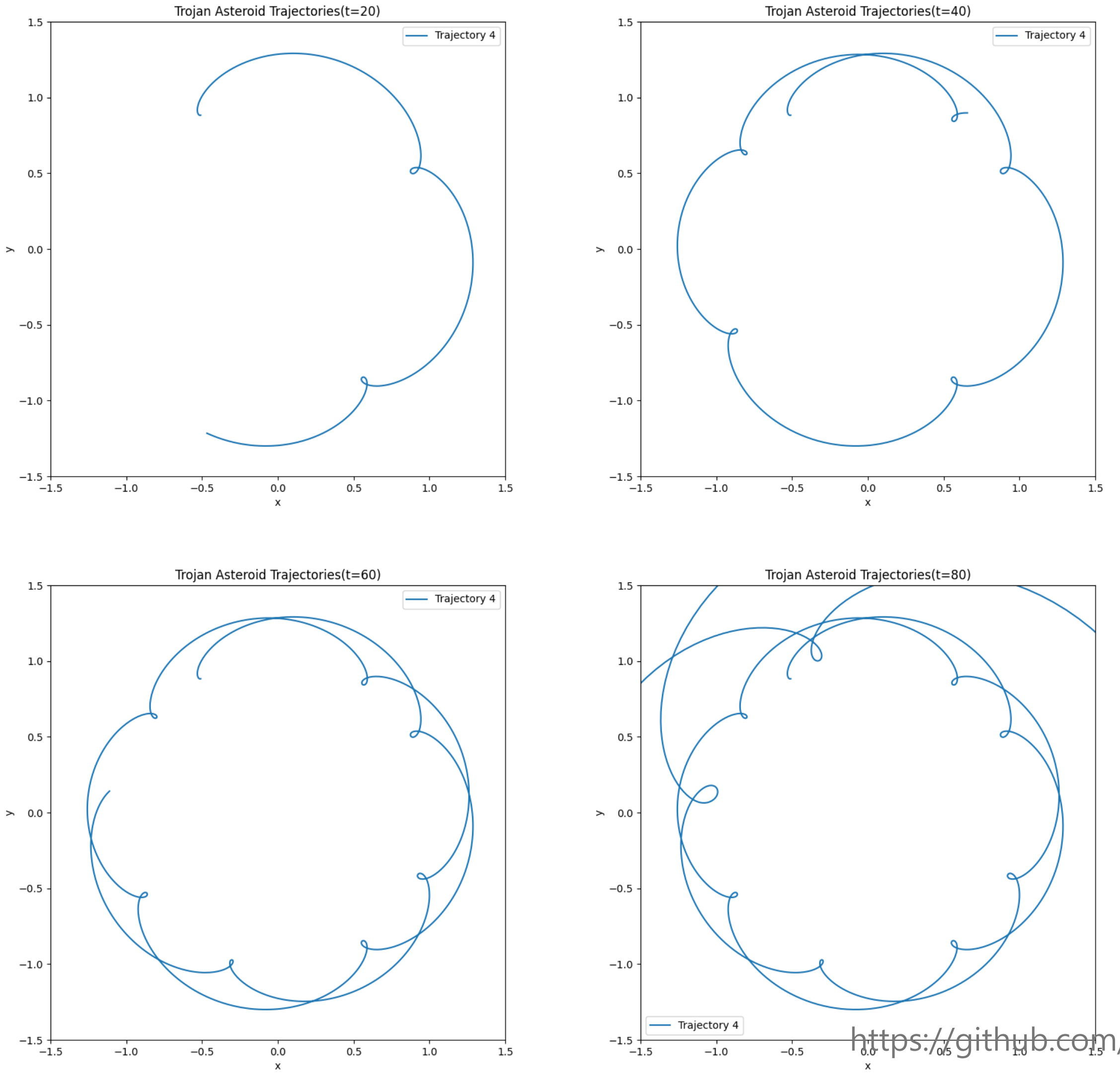
2. 시계 방향으로 회전

➔ 전향력에 의해 주체 입자의 회전 방향과 반대로 도는 경우에 안쪽으로 힘이 작용하게 됨

➔ 즉, 주체 입자와 반대로 돌아야 더 안정함.

https://github.com/seolmango/threeParticle

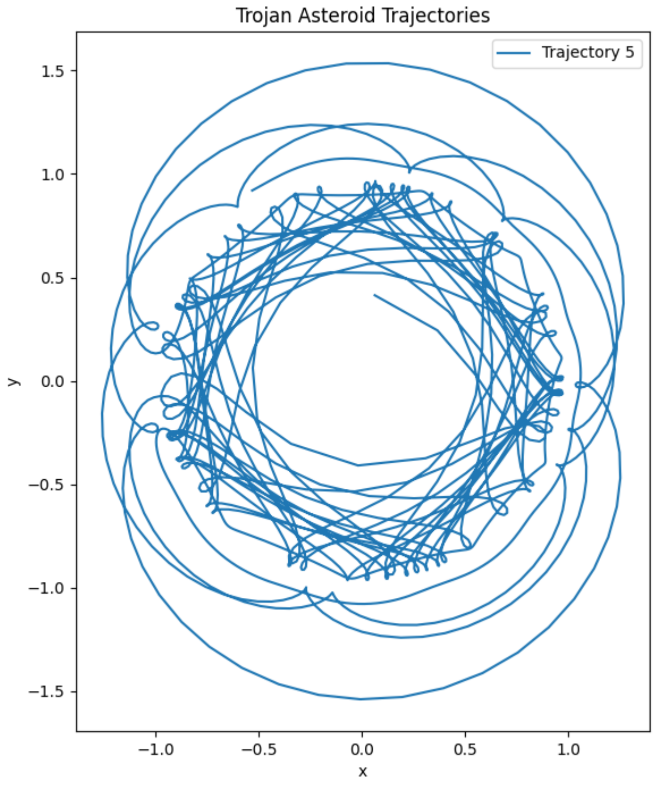
4. 트로이 소행성(태양-목성 계)



궤도 4는 궤도 1과 초기 속도만 다른 궤도
➔ 몇 번 고리 모양으로 돌다가 결국 완전히 날아감

https://github.com/seolmango/threeParticle

4. 트로이 소행성(태양-목성 계)



궤도 5는 궤도 3과 초기 위치만 조금 다른 궤도
➔ 완전히 다른 궤도를 돌게 됨