מד"ר 2 2019 – פתרון ממ"ן 13

שאלה 1

א. נפריד למקרים. עבור $\mu = 0$ המשוואה היא $x' = -x^4$, זוהי משוואה בת הפרדה ופתרונה הוא

$x = \frac{1}{\sqrt[3]{3t+C}}$ כאשר $C = \frac{1}{\left(x(0)\right)^3}$, ופתרון שיווי משקל יחיד $x \equiv 0$.

פתרון שיווי המשקל אינו יציב, כיוון שעבור $C < 0$ הפתרון "מתפוצץ" כאשר $t \to -\frac{C}{3}$.

עבור $\mu \neq 0$ יש שני פתרונות ש"מ, $x \equiv 0$ ו- $x \equiv \sqrt[3]{\mu}$.

נסמן $f(x) = \mu x - x^4$, אז $\frac{df}{dx} = \mu - 4x^3$. כאשר $\mu > 0$ מתקיים $\frac{df}{dx}\left(\sqrt[3]{\mu}\right) = -3\mu < 0$, לכן הפתרון $x \equiv \sqrt[3]{\mu}$ יציב אסימפטוטית. כאשר $\mu < 0$ מתקיים $\frac{df}{dx}(0) = \mu < 0$ ולכן הפתרון $x \equiv 0$ יציב אסימפטוטית.

נבחן את המקרים האחרים.

כאשר $\mu > 0$, לכל $0 < x < \sqrt[3]{\mu}$ מתקיים $f(x) > 0$ ולכן כל פתרון עם תנאי התחלה בטווח $0 < x_0 < \sqrt[3]{\mu}$ הוא פונקציה מונוטונית עולה. כיוון ש-$f(x)$ גזירה ברציפות, פתרון כזה יכול להיות חסום רק אם הוא מתקרב אסימפטוטית לפתרון ש"מ. כלומר לכל פתרון כזה מתקיים $\lim_{t\to\infty} x(t) = \sqrt[3]{\mu}$ ולכן אינו קרוב כרצוננו לפתרון $x \equiv 0$. לכן הפתרון $x \equiv 0$ אינו יציב כלל כאשר $\mu > 0$.

משיקולים דומים, כאשר $\mu < 0$ הפתרון $x \equiv \sqrt[3]{\mu}$ אינו יציב, כיוון שכל פתרון עם תנאי התחלה המקיים $x_0 < \sqrt[3]{\mu}$ הוא מונוטוני יורד ובלתי חסום מלרע.

ב. הפולינום האופייני של המטריצה הוא $-(\lambda+1)^3$, כלומר יש ע"ע אחד והוא $\lambda = -1$. לכן פתרון האפס יציב אסימפטוטית.

שאלה 2

נבדוק יציבות הפתרונות בנקודה $(1,1)$:

א. המערכת הלינארית המתאימה היא $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$ והיא אינה יציבה אסימפטוטית (ע"ע $\lambda = \pm i$). לכן לא ניתן להסיק ממנה לגבי היציבות של פתרון המערכת המקורית.

נשים לב כי אם $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ פתרון של המשוואה אז $(x-1)x'+(y-1)y'=0$. לכן $\frac{d}{dt}\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)=0$, כלומר הגודל $(x-1)^2+(y-1)^2$ הוא קבוע. מכאן נובע כי הפתרון יציב אך לא יציב אסימפטוטית, כיוון שהמרחק של הפתרון מנקודת ש"מ הוא קבוע.

ב. המטריצה הווראיציונית:

$$D_f=\begin{pmatrix} (y^2-y)-(x^{10}+y^{10}-1)-10x^9(x-1) & x(2y-1)-10y^9(x-1) \\ y(1-2x)-10x^9(y-1) & (x-x^2)-(x^{10}+y^{10}-1)-10y^9(y-1) \end{pmatrix}$$

ובנקודה $(1,1)$ נקבל $D_f(1,1)=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. הע"ע הם $\lambda=-1\pm i$ ולשניהם יש חלק ממשי שלילי, לכן הלינאריזציה יציבה אסימפטוטית ולכן גם פתרון שיווי המשקל $(1,1)$ יציב אסימפטוטית.

שאלה 3

יהי $\varphi(t)$ פתרון של המשוואה עבור תנאי התחלה כלשהו $\varphi(t_1)=\xi$ (כאשר $t_1\ge t_0$). נסמן $g(t)=f(t,\varphi(t))$. מווריאציה של פרמטרים, מתקיים $\varphi(t)=\Phi(t)\Phi(t_1)^{-1}\xi+\int_{t_1}^{t}\Phi(t)\Phi(s)^{-1}g(s)\,ds$. לכן מתקיים $|\varphi(t)|\le\left|\Phi(t)\Phi(t_1)^{-1}\right||\xi|+\int_{t_1}^{t}\left|\Phi(t)\Phi(s)^{-1}\right||g(s)|\,ds$ ומהנתון שלכל $t_0\le s\le t<\infty$ מתקיים $\left|\Phi(t)\Phi(s)^{-1}\right|\le Ke^{-\alpha(t-s)}$ נקבל $|\varphi(t)|\le Ke^{-\alpha(t-t_1)}|\xi|+\int_{t_1}^{t}Ke^{-\alpha(t-s)}|g(s)|\,ds$.

לפי הנתון, לכל s מתקיים $|g(s)|=|f(s,\varphi(s))|\le\gamma|\varphi(s)|$ ולכן נקבל בסך הכל כי $e^{\alpha t}|\varphi(t)|\le Ke^{\alpha t_1}|\xi|+\int_{t_1}^{t}\left(K\gamma e^{\alpha s}\right)|\varphi(s)|\,ds=Ke^{\alpha t_1}|\xi|+\int_{t_1}^{t}K\gamma\left(e^{\alpha s}|\varphi(s)|\right)ds$.

נסמן $y(t)=e^{\alpha t}|\varphi(t)|$, $\lambda=Ke^{\alpha t_1}|\xi|$ ו- $\mu=K\gamma$ ונקבל מאי-שיוויון גרונוול כי $y(t)\le\lambda e^{\mu(t-t_1)}$ כלומר $e^{\alpha t}|\varphi(t)|\le Ke^{\alpha t_1}|\xi|e^{K\gamma(t-t_1)}$ ומכאן $|\varphi(t)|\le Ke^{-\alpha(t-t_1)}|\xi|e^{K\gamma(t-t_1)}=Ke^{-\beta(t-t_1)}|\xi|$ כאשר $\beta=\alpha-\gamma K$.

בפרט, הפתרון חסום בכל קטע סופי, ולכן קיים בכל קטע סופי $[t_1,b)$, ומכאן קיים ב- $[t_1,\infty)$. זה נכון לכל $t_1\ge t_0$ ולכן הפתרון קיים ב- (t_0,∞) ומקיים את אי-השיוויון הדרוש.

נשים לב כי $x \equiv 0$ פתרון שיווי משקל של המערכת, זאת מכיוון ש- $|f(t,0)| \le \gamma \cdot 0 = 0$ לכל t ולכן $0 = A(t)0 + f(t,0)$.

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שעבור $|\xi| < \delta$ מתקיים $K|\xi| < \varepsilon$. פתרון עם $\varphi(t_0) = \xi$ עבור ξ כנ"ל מקיים לכל $t \ge t_0$ כי $|\varphi(t)| \le Ke^{-\beta(t-t_0)}|\xi| \le \varepsilon e^{-\beta(t-t_0)} \le \varepsilon$ (וזאת מכיוון ש- $-\beta(t-t_0) \le 0$).

כלומר הפתרון $x \equiv 0$ יציב. בנוסף, $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$ לכל פתרון, לכן הפתרון יציב אסימפטוטית.

שאלה 4

א. בדקו בעצמכם ע"י הצבה.

ב. נסמן $f(x,y) = \begin{pmatrix} x - y - x\left(x^2 + \frac{1}{4}y^2\right) \\ 4x + y - y\left(x^2 + \frac{1}{4}y^2\right) \end{pmatrix}$, אז

$D_x f = \begin{pmatrix} 1 - \left(x^2 + \frac{1}{4}y^2\right) - 2x^2 & -1 - \frac{1}{2}xy \\ 4 - 2xy & 1 - \left(x^2 + \frac{1}{4}y^2\right) - \frac{1}{2}y^2 \end{pmatrix}$ והמטריצה הווריאציונית היא

$A(t) = D_x f(p(t)) = \begin{pmatrix} -2\cos^2(2t) & -1 - \frac{1}{2}\sin(4t) \\ 4 - 2\sin(4t) & -2\sin^2(2t) \end{pmatrix}$.

בדקו בעצמכם ע"י הצבה כי המטריצה הנתונה $\Phi(t)$ מקיימת את המשוואה $\Phi(t)' = A(t)\Phi(t)$.

כמו כן היא הפיכה, לכן זוהי מטריצה יסודית.

ג.
$$\Phi(t) = \left(e^{-2t}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(2t) & -\sin(2t) \\ \sin(2t) & 2\cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(2t) & -\sin(2t) \\ \sin(2t) & 2\cos(2t) \end{pmatrix} \exp\left(t \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

מעריכי פלוקה של המערכת הם $-2, 0$ וכופלי פלוקה הם $e^{-2\pi}, 1$ ($T = \pi$).

(אפשר להגיע לתוצאה זו גם באמצעות הנוסחה שמבטאת את הכופלים באמצעות ∇f, ראו עמ' 90 במדריך הלמידה).

ד. פרט לכופל האופייני 1, יש כופל אופייני אחד נוסף והוא $e^{-2\pi}$ והוא מקיים $|e^{-2\pi}| < 1$ ולכן לפי משפט 4.4.1 הפתרון $p(t)$ יציב מסלולית עם פאזה אסימפטוטית.

שאלה 5

א. נעביר תחילה את המערכת לקואורדינטות קטביות.

מכלל השרשרת נקבל $r'=\frac{x}{r}x'+\frac{y}{r}y'=\cos\theta x'+\sin\theta y'$, וכן $\theta'=-\frac{y}{r^2}x'+\frac{x}{r^2}y'$.

נציב $\begin{aligned}x'&=\mu x-y-x\left(x^2+y^2\right)=\mu r\cos\theta-r\sin\theta-r^3\cos\theta\\ y'&=x+\mu y-y\left(x^2+y^2\right)=r\cos\theta+\mu r\sin\theta-r^3\sin\theta\end{aligned}$ ונקבל את המערכת $\begin{aligned}r'&=\mu r-r^3\\ \theta'&=1\end{aligned}$

.

נשים לב כי אלו שתי משוואות סקלריות נפרדות. פתרון המשוואה עבור θ הוא $\theta(t)=\theta_0+t$.

המשוואה עבור r היא משוואה בת-הפרדה. יש לה שני פתרונות ש"מ, והם $r\equiv 0, r\equiv\sqrt{\mu}$.

הפתרון $r\equiv 0$ מתאים לפתרון $(x,y)\equiv(0,0)$ שהוא פתרון ש"מ של המערכת אך אינו מחזורי (למעט במובן חלש). הפתרון $r\equiv\sqrt{\mu}, \theta(t)=\theta_0+t$ הוא פתרון מחזורי עם מחזור 2π .

נראה כי אין פתרון מחזורי נוסף. כל פתרון אחר של המשוואה עבור r מקיים כי $r(t)$ פונקציה עולה ממש או יורדת ממש (עבור $0<r(t)<\sqrt{\mu}$ מתקיים כי $r'(t)>0$ ועבור $r(t)>\sqrt{\mu}$ מתקיים $r'(t)<0$, ומיחידות הפתרון לכל תנאי התחלה הנגזרת לא מתאפסת באף נקודה, לכן סימן הנגזרת קבוע לכל t). בפרט הפונקציה $r(t)$ אינה מחזורית באף מקרה אחר פרט לפתרונות עם r קבוע. (אפשר גם למצוא פתרון מפורש למשוואה)

ב. הקבוצה Σ היא תת-יריעה מממד $2-1=1$, ועלינו לבדוק כי הפונקציה $f=\begin{pmatrix}\mu x-y-xr^2\\ x+\mu y-yr^2\end{pmatrix}$ אינה משיקה לה באף נקודה. הנורמל לתת-היריעה נתון בקואורדיטות קטביות ע"י $\hat{\theta}$, ובקואורדינטות קרטזיות ע"י $\frac{1}{r}\begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix}$ בכל נקודה $(x,y)\in\Sigma$. מתקיים $\frac{1}{r}\begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix}\cdot f=r\neq 0$, כנדרש.

נמצא את העתקת פואנקרה המתאימה: נעבוד בקואורדינטות קטביות.

נסמן $p^*=\left(\sqrt{\mu},\theta_0\right)$. עבור נקודה $\xi=(r_1,\theta_0)$ שקרובה ל-p^* ונמצאת על Σ, יהי $\varphi(t,\xi)=\left(r(t,\xi),\theta(t,\xi)\right)$ הפתרון המתאים לבעיית ההתחלה עם התנאי $\varphi(0)=\xi$, ויהי $\tau(\xi)$ הזמן הראשון (הגדול מאפס) שבו $\varphi(t,\xi)\in\Sigma$, כלומר הזמן הראשון שבו $\theta(t,\xi)=\theta_0$. העתקת פואנקרה מוגדרת על ידי $P(\xi)=\varphi\left(\tau(\xi),\xi\right)=\left(r\left(\tau(\xi),\xi\right),\theta_0\right)$.

אבל אנו יודעים בדיוק איך נראה $\theta(t,\xi)$, כפי שמצאנו בסעיף הקודם: $\theta(t,\xi)=\theta(0,\xi)+t=\theta_0+t$, ולכן הזמן הראשון שבו $\theta(t,\xi)=\theta_0$ הוא $\tau(\xi)=2\pi$. לכן $P(\xi)=\left(r(2\pi,\xi),\theta_0\right)$.

כדי למצוא ביטוי מפורש להעתקת פואנקרה, נפתור את המשוואה עבור r בצורה מפורשת.

זוהי משוואת ברנולי. נכתוב אותה בצורה $r^{-3}r' = \mu r^{-2} - 1$ ונסמן $u = r^{-2}$. נקבל עבור u את המשוואה $u' = -2\mu u + 2$. נפתור ונקבל $r = \left(Ce^{-2\mu t} + \frac{1}{\mu}\right)^{-1/2}$ כאשר C קבוע. (אפשר לוותר על החלפת המשתנה, אולם קשה הרבה יותר לחלץ את r מהפונקציה הסתומה המתקבלת).'

בהצבת $t = 0$ נקבל $C = \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{\mu}$. אם כן, $r(2\pi, \xi) = \left[\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{\mu}\right)e^{-4\mu\pi} + \frac{1}{\mu}\right]^{-1/2}$.

ג. נחקור את יציבות המסלול המחזורי באמצעות לינאריזציה של העתקת פואנקרה.

עלינו לחשב את $DP\left(p^*\right)$. נשים לב שמכיוון ש-p^* נקודת שבת של העתקת ההפרשים, לא משנה באיזו מערכת קואורדינטות נחשב את $DP\left(p^*\right)$ כיוון שמכלל השרשרת נקבל שהמטריצות המתאימות עבור מערכות קואורדינטות שונות הן צמודות ולכן יש להן אותם ערכים עצמיים. נעבוד אם כן בקואורדינטות קטביות, ונמצא את $\frac{dr}{dr_1}\left(\sqrt{\mu}\right)$. נקבל

$$\left(-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{\mu}\right)e^{-4\mu\pi} + \frac{1}{\mu}\right]^{-3/2} e^{-4\mu\pi}\left(-2\right)\frac{1}{r_1^3}\right)\Big|_{r_1=\sqrt{\mu}} = e^{-4\mu\pi}.$$

כלומר כופל פלוקה (פרט ל-1) של המערכת המתקבלת מלינאריזציה סביב הפתרון המחזורי הוא $e^{-4\mu\pi}$ והוא קטן מ-1 בערכו המוחלט, לכן הפתרון יציב מסלולית עם פאזה אסימפטוטית.