בחינת גמר - "משוואות דיפרנציאליות רגילות 2" - 20599

סמסטר 2017ב

מועד 91 - 24.8.2017

מבנה הבחינה: בבחינה **שש** שאלות. עליכם לענות על **חמש** מתוכן.
משקל כל שאלה 20 נקודות.

כל חומר עזר מותר בשימוש.

ענו על חמש מתוך שש השאלות הבאות:

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $\Phi(t)$ מטריצה יסודית של המערכת מסדר $n\times n$, $x' = A(t)x$, ונניח שמתקיים:

$$\left|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\right| \le M$$

לכל $0 \le s \le t$. תהי $B(t)$ פונקציה מטריציונית מסדר $n\times n$ רציפה ב- $[0,\infty)$, כך שהאינטגרל $\int_0^\infty |B(t)|dt$ הוא סופי. הוכיחו כי כל פתרון של $x' = \left(A(t)+B(t)\right)x$ חסום ב- $[0,\infty)$.

פתרון

נרשום כך:

$$x' = A(t)x + f(x,t)$$

כך ש $f(x,t) = B(t)x$

לפי וריאציית הקבועים נקבל

$$\varphi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_1)\varphi(t_1) + \int_{t_1}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\, f\left(s,\varphi(s)\right)ds$$

$$|\varphi(t)| \le \left|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_1)\right|\left|\varphi(t_1)\right| + \int_{t_1}^{t}\left|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\right|\left|B(S)\varphi(s)\right|ds$$

$$|\varphi(t)| \le M\left|\varphi(t_1)\right| + \int_{t_1}^{t} M\,|B(s)||\varphi(s)|ds$$

מאי שוויון גרונוול נקבל

$$|\varphi(t)| \le M\left|\varphi(t_1)\right| e^{M\int_{t_1}^{t}|B(s)|ds} < \infty$$

בפרט התנאי אומר שהפתרון חסום לכל $t \ge t_1 \ge 0$. לכן הוא מוגדר עבור כל קטע סופי ולכן מוגדר על כל הישר (מסקנה 2.3.2).

שאלה 2 (20 נקודות)

נתבונן במשוואה $\dot{x} = f(x)$, כאשר $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ גזירה ברציפות, ותהי $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ גזירה ברציפות, כך שלכל $x \in \mathbb{R}^2$,

$$gradV(x) \cdot f(x) \le 0$$

הוכיחו כי אם φ הוא פתרון של המשוואה, אז V קבועה על $\omega(\varphi)$.

פתרון

יהי $\varphi(t, x_0)$ פתרון כלשהו של המשוואה.

נסמן $g(t) = V(\varphi(t))$. מהנתון נובע ש- $g'(t) \le 0$. לכן g יורדת (במובן הרחב) ולכן קיים $\lim_{t\to\infty} g(t) = L$ סופי או אינסופי.

אם $p \in \omega(\varphi)$ אז קיימת סדרה t_n עולה ל- ∞ כך ש- $\varphi(t_n) \underset{n\to\infty}{\to} p$. מרציפות V, גם $g(t_n) = g(\varphi(t_n)) \underset{n\to\infty}{\to} g(p)$. מצד שני $g(t_n) \underset{n\to\infty}{\to} L$.

לכן $g(p) = L$, וזה נכון לכל $p \in \omega(\varphi)$. ומכאן המסקנה הדרושה.

שאלה 3 (20 נקודות)

א. הוכיחו כי למשוואה

$$\ddot{x} + (2x^2 + \dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

יש פתרון מחזורי (לא קבוע).

ב. ודאו כי $(\sin t, \cos t)$ הוא פתרון מחזורי של המערכת

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -(x^2 + y^2 - 1)y - x$$

מצאו את הכופלים האופייניים של המערכת הלינארית המתאימה וחיקרו את היציבות המסלולית של הפתרון הזה.

פתרון

א. נעבור למערכת

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = (1 - 2x^2 - y^2)y - x \end{cases}$$

נעבור לקואורדינאטות קוטבית ונקבל

$$rr' = xx' + yy' = -(2x^2 + y^2 - 1)y^2$$

נקבל את אי השוויונות הבאים:

$$2x^2 + y^2 - 1 \le 2(x^2 + y^2) - 1 = 2r^2 - 1$$
$$2x^2 + y^2 - 1 \ge (x^2 + y^2) - 1 = r^2 - 1$$

עבור $r < \frac{1}{2}$ נקבל ש $2x^2 + y^2 - 1 < -\frac{1}{2}$

כלומר $rr' \geq \frac{1}{2}y^2 \geq 0$ ולכן הנגזרת אי-שלשלית ביחס למרחק.

עבור $r > 2$ נקבל ש $2x^2 + y^2 - 1 > 3$

כלומר $rr' \leq -3y^2 \leq 0$ ולכן הנגזרת אי-חיובית ביחס למרחק.

לכן כל פתרון שמתחיל בנקודה כלשהי בטבעת $\frac{1}{2} < r < 2$ נשאר בטבעת זו.

וזהו תחום שבו הפתרונות שעוברים דרכו נשארים בתוכו.

כמו כן, נקודת שיווי משקל היחידה היא הראשית. ולכן בטבעת זו אין נקודות שיווי משקל.

ממשפט פואנקרה בנדיקסון נקבל שקיים למערכת פתרון מחזורי, כלומר למשוואה יש פתרון מחזורי.

ב. הצבה ישירה מראה שזהו פתרון בעל מחזור 2π.

נעבור למערכת $x' = A(t)x$ כאשר $A(t) = D_x f(p(t))$ שהיא כמובן מטריצה מחזורית.

נחשב

$$D_x f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2xy - 1 & -x^2 - 3y^2 + 1 \end{pmatrix}$$

נציב ונקבל

$$A(t) = D_x f(p(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\sin t\cos t - 1 & -\cos^2 t - 3\sin^2 t + 1 \end{pmatrix}.$$

וקבלנו ש

$$tr(A(t)) = -\cos^2 t - 3\sin^2 t + 1 = -2\sin^2 t$$

אנו בעצם מחפשים את כופלי פלוקה, מכיוון שאחד מהם הוא תמיד $\mu_1 = 1$

נקבל ש $\mu_2 = e^{\int_0^{2\pi} -2\sin^2 s ds} = e^{-2\pi} < 1$ ולכן המערכת הליניארית יציבה אסימפטוטית ולכן המערכת המקורית יציבה מסלולית עם פאזה אסימפטוטית.

שאלה 4 (20 נקודות)

נתבונן במערכת

$$x' = -x^3 + 2y^2 e^{y^2}$$
$$y' = -2xy$$

העזרו בפונקציה מהצורה $V = x^2 + h(y)$ כדי להראות כי פתרון האפס של המערכת יציב אסימפטוטית.

אין להראות יציבות אסימפטוטית בדרך אחרת.

פתרון

נחפש פונקציה $V(x) = x^2 + h(y)$ שמקיימת $\dot{V}(x) \leq 0$

נחשב

$$\dot{V}(x)=2xx'+h'(y)y'=-2x^4+2xy^2e^{y^2}-2xyh'(y)$$

מתבקש לדרוש $\begin{aligned} h'(y)&=ye^{y^2} \\ h(y)&=\frac{1}{2}e^{y^2}\end{aligned}$

נקבל את הפונקציה $V(x)=x^2+\frac{1}{2}e^{y^2}$

המקיימת

$$\dot{V}(x)=2xx'+h'(y)=-2x^4\le 0$$

V פונקצית ליאפונוב שרציפה בסגור של התחום

כמו כן אם $\varphi(t)$ הוא פתרון של המערכת, אז מכיוון ש- $\frac{d}{dt}V(\varphi(t))\le 0$, אז $V(\varphi(t))\le V(\varphi(0))$, כלומר

$\begin{aligned} x^2+\frac{1}{2}e^{y^2}&\le K \\ x^2+\frac{1}{2}y^2&\le K\end{aligned}$ כלומר $\varphi(t)$ חסום. כמו כן $S=\left\{(x,y)\middle|\dot{V}(x,y)=-2x^4=0\right\}$ = ציר y

כל פתרון שמתחיל על ציר ה-y מקיים בנקודת ההתחלה (אם אינה בראשית הצירים) $x'=2y^2e^{y^2}>0$, ולכן הקבוצה השמורה שחלקית ל- S כוללת רק את ראשית הצירים. מכאן ומעקרון האינווריאנטיות של לה סאל נובעת במסקנה.

שאלה 5 (20 נקודות)

נתבונן במשוואה $ku''+g(t)u=0$, כאשר k קבוע חיובי ו- $g(t)$ רציפה.

א. הראו כי אם למשוואה יש פתרון לא טריוויאלי שיש לו לפחות $n+1$ שורשים בקטע (a,b), אז

$$\sup_{(a,b)} g(t)>\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2 k$$

ב. הראו כי אם

$$\inf_{(a,b)} g(t)>\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2 k$$

אז לכל פתרון לא טריויאלי של המשוואה יש לפחות n שורשים בקטע (a,b).

פתרון

א. נסמן ב- φ את פתרון המשוואה הנתונה שלו יש לפחות $n+1$ שורשים

ונתבונן במשוואה $u''+\frac{g(t)}{k}u=0\quad(*)$

כמובן φ הוא גם פתרון של משוואה זו.

נניח כי $k \ \sup_{(a,b)} g(t) \le \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$

שזה שקול לכך ש $\sup_{(a,b)} \frac{g(t)}{k} \le \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$

אז המשוואה $u'' + \left(\frac{\pi n}{b-a}\right)^2 u = 0$ (**) שולטת על משוואה (*).

$u = \sin\left(\frac{\pi n}{b-a}(t-a)\right)$ הוא פתרון של משוואה זו . הוא מתאפס רק $n-1$ פעמים בקטע הפתוח (a,b) . אך מכיוון ש- (**) שולטת על (*) הוא צריך להתאפס לפ]חות n פעמים בקטע זה בסתירה לכך שלמשוואה (*) הנשלטת יש *n+1* שורשים.

ב. אם מתקיים $k \ \inf_{(a,b)} g(t) > \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$

ששקול לכך ש $\inf_{(a,b)} \frac{g(t)}{k} > \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$

אז המשוואה $u'' + \left(\frac{\pi n}{b-a}\right)^2 u = 0$ (**) נשלטת על ידי משוואה (*).

למשוואה זו קיים הפתרון $u = \sin\left(\frac{\pi n}{b-a} t\right)$, הוא מתאפס $n+1$ פעמים בקטע הסגור $[a,b]$, ולכן לכל פתרון של המשוואה הנתונה יש לפחות n שורשים בקטע (a,b) .
ולכן גם למשוואה הנתונה.

שאלה 6 (20 נקודות)

נתונה המשוואה $z^2 w'' + 4zw' + (2+z^2)w = 0$

א. הראו ש-0 היא נקודה סינגולרית רגולרית של המשוואה. מצאו את משוואת האינדקס ואת שורשיה.

ב. מצאו פתרון טורי אחד סביב 0.

ג. מצאו בעזרת שיטת פרובניוס או בדרך אחרת, פתרון שני, בלתי תלוי לינארית בפתרון שמצאתם בסעיף הקודם.

פתרון

א. נחלק את המשוואה ונקבל

$$w'' + \frac{4}{z}w' + \left(\frac{2}{z^2}+1\right)w = 0$$

קבלנו $p(z) = \frac{4}{z}, \quad q(z) = \frac{2}{z^2} + 1$

כלומר $z=0$ נקודה סינגולרית רגולרית, נחשב

$$\lim_{z\to 0} zp(z) = 4 = p_0$$
$$\lim_{z\to 0} z^2 q(z) = 2 = q_0$$

ולכן משוואת האינדקס היא :

$$r(r-1)+4r+2=0$$
$$r^2+3r+2=0$$

וקבלנו $r_1=-1, r_2=-2$,

לכן יש לנו שני פתרונות בת״ל והם :

$$w_1(z) = z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n-1}$$
$$w_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n-2} + Cw_1(z)\ln|z|$$

ב. נמצא את הפתרון הכללי $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r}$

נחשב נגזרות

$$w_1'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n z^{n+r-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} (n+r+1)a_{n+1} z^{n+r}$$
$$w_1''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n z^{n+r-2} = \sum_{n=-1}^{\infty} (n+r+1)(n+r)a_{n+1} z^{n+r-1}$$

נציב במד״ר המקורית $z^2w'' + 4zw' + (2+z^2)w = 0$

נקבל

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)(n+r)a_{n+1}z^{n+r+1} + \sum_{n=-1}^{\infty}4(n+r+1)a_{n+1}z^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty}2a_n z^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{n+r+2} = 0$$

נסדר בעזרת הזזת אינדקס והוצאת איברים, נקבל

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)(n+r)a_{n+1}z^{n+r+1} + \sum_{n=-1}^{\infty}4(n+r+1)a_{n+1}z^{n+r+1} + \sum_{n=-1}^{\infty}2a_{n+1}z^{n+r+1} + \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}z^{n+r+1} = 0$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+2)(n+r+3)a_{n+1}z^{n+r+1} + \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}z^{n+r+1} = 0$$

עבור $r_1=-1$ נקבל כמובן

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+1}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}z^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+1}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}z^n=0$$

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+1}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}z^n=0$$

לכן $a_1=0$, ולכל $n\geq 1$:

$$a_{n+1}=-\frac{1}{(n+1)(n+2)}a_{n-1}$$

מכאן, לכל $k\geq 0$, $a_{2k+1}=0$

$$a_{n+1}=-\frac{1}{(n+1)(n+2)}a_{n-1}$$
$$a_2=-\frac{1}{2\cdot 3}a_0,\quad a_4=-\frac{1}{4\cdot 5}a_2=(-1)^2\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a_0=(-1)^2\frac{1}{5!}a_0,\ldots,a_{2k}=(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}a_0$$

ואם ניקח $a_0=1$, נקבל

$$w_1(z)=z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{n-1}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}z^{2k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}z^{2k-1}=\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}z^{2k+1}$$

קל לראות ש- $\boxed{w_1(z)=\frac{\sin z}{z^2}}$

את הפתרון השני אפשר למצוא בשיטת פרובניוס או בשיטת הורדת סדר. נפעל בעזרת הורדת סדר.

נרשום

$$w=w_1y,\quad w'=w_1y'+w_1'y,\quad w''=w_1y''+2w_1'y'+w_1''y$$

נציב במשוואה

$$z^2(w_1y''+2w_1'y'+w_1''y)+4z(w_1y'+w_1'y)+(2+z^2)w_1y=0$$
$$z^2w_1y''+(2z^2w_1'+4zw_1)y'+(z^2w_1''+4zw_1'+(2+z^2)w_1)y=0$$
$$z^2w_1y''+(2z^2w_1'+4zw_1)y'=0$$
$$y''+(2\frac{w_1'}{w_1}+\frac{4}{z})y'=0$$
$$\frac{y''}{y'}=-2\frac{w_1'}{w_1}-\frac{4}{z}$$
$$\ln|y'|=-2\ln|w_1|-4\ln|z|+const$$

נבחר את הקבוע להיות 0, ונקבל

$$y' = \frac{1}{w_1^2 z^4} = \frac{1}{\sin^2 z}$$

$$y = -\cot z$$

$$w = w_1 y = -\frac{\sin z}{z^2}\cot z = -\frac{\cos z}{z^2}$$

וקיבלנו פתרון שני $\boxed{w_2(z) = \frac{\cos z}{z^2}}$