ממן 11 שאלה 1

א) תהיינה $B, C, D \subseteq A$.

- סימטריות: נראה כי $d(B,C)=d(C,B)$

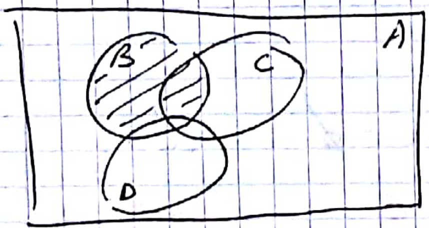
ידוע כי הפעולות $\cup$ ו- $\cap$ ביחס לקבוצות B, C
קומוטטיביות:

$$d(B,C) = |(B\cup C)-(B\cap C)|$$
$$= |(C\cup B)-(C\cap B)| = d(C,B)$$

⇐ d סימטרית.

- אי שוויון המשולש:

תחילה נראה כי $B-D \subseteq (B-C)\cup(C-D)$



יהי $x\in B-D$,
⇐ $x\in B$, $x\notin D$.

אפשרות אחת: $x\in C$, אז כי $x\notin D$
ונקבל $x\in C-D$

אפשרות שנייה: $x\notin C$ ואז כי $x\in B$
ונקבל $x\in B-C$

כלומר בכל אופן $x\in(B-C)\cup(C-D)$,

⇐ $B-D \subseteq (B-C)\cup(C-D)$

באותו אופן בדיוק מקבלים כי $D-B \subseteq (D-C)\cup(C-B)$

כעת, לפי מה שהראנו:

$$(B-D)\cup(D-B) \subseteq [(B-C)\cup(C-D)]\cup[(D-C)\cup(C-B)]$$
$$= [(B-C)\cup(C-B)]\cup[(C-D)\cup(D-C)]$$

⇐ $|(B-D)\cup(D-B)| \le |(B-C)\cup(C-B)| + |(C-D)\cup(D-C)|$

⇐ $d(B,D) \le d(B,C)+d(C,D)$

המשך ממן 11 שאלה 1

- אי שליליות: ברור כי מספר איברים בקבוצה תמיד אי שלילי.

- [redacted]: $d(B,C)=0 \iff B=C$:

נניח כי $B=C$.

אז $d(B,C)=d(B,B)$

$$=|(B-B)\cup(B-B)|=|\emptyset|=0$$

מצד שני

נניח כי $d(B,C)=0$

$\Rightarrow$ $|(B-C)\cup(C-B)|=0$

$\Rightarrow$ $(B-C)\cup(C-B)=\emptyset$

$\Rightarrow$ $B-C=\emptyset$ וגם $C-B=\emptyset$

$\Rightarrow$ $B=C$.

$\Rightarrow$ $d(B,C)=0 \iff B=C$

$\Rightarrow$ d מטריקה על $P(A)$.

ב) ~~$x,y\in X$~~ יהי $\langle X,d\rangle$

להוכיח כי לכל $x,y\in X$:

$$2d(x,y)=d(x,y)+d(y,x)$$

עפ"י המשולש $\geq d(x,x)$

$$=0$$

לכן

כי $2>0$ $\Rightarrow d(x,y)\geq 0$.

ממן 11 שאלה 2

סעיף א) תחילה נראה כי $\sqrt{d}$ אכן מטריקה.

$\sqrt{t}\geq 0$ לכל $t\in\mathbb{R}$ אי שלילי.

⇐ $\sqrt{d}(x,y)=\sqrt{d(x,y)}\geq 0$ עבור $x,y\in X$ - אי שלילי.

כי d מטריקה, $d(y,x)=d(x,y)$

$$\sqrt{d(y,x)}=\sqrt{d(x,y)}$$

וסימטריות: $\sqrt{d}(y,x)=\sqrt{d}(x,y)$.

בנוסף, אם $x=y$ אז $d(x,y)=0$ ⇐ $\sqrt{d}(x,y)=0$

אם $x\neq y$ אז $d(x,y)\neq 0$ ⇐ $\sqrt{d}(x,y)\neq 0$.

⇐ $\sqrt{d}(x,y)=0 \iff x=y$.

נבחן את א"ש המשולש: יהיו $x,y,z\in X$.

d מטריקה ולכן:

$$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$$

⇐ $\sqrt{d(x,z)}\leq\sqrt{d(x,y)+d(y,z)}$

(*) נימוק בהמשך $\leq\sqrt{d(x,y)}+\sqrt{d(y,z)}$

⇐ $\sqrt{d}(x,z)\leq\sqrt{d}(x,y)+\sqrt{d}(y,z)$

(*) נוכיח כי לכל $a,b\geq 0$ מתקיים

$$\sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

הרי $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+2\sqrt{ab}+b\geq a+b$

ולכן $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq\sqrt{a+b}$ כנדרש.

סה"כ קיבלנו כי $\sqrt{d}$ אכן מטריקה לפי הגדרה.

נראה כעת כי זו שקולה ל- d.

יהי $0<\varepsilon\leq 1$ ו- $x\in X$ כלשהו.

$$D_{\sqrt{d}}(x,\varepsilon)\supseteq D_d(x,\varepsilon)$$

כי אם עבור $y\in X$ מתקיים ש- $\sqrt{d}(x,y)<\varepsilon$

אז $d(x,y)<\varepsilon^2<\varepsilon<1$. ⇐

⇓

המשך ממ"ן 11 שאלה 2

בנוסף.. $D_d(x,\varepsilon) \supseteq D_{\sqrt{d}}(x,\sqrt{\varepsilon})$

שכן לכל $y \in D_{\sqrt{d}}(x,\sqrt{\varepsilon})$ מתקיים

$$\sqrt{d}(x,y) \le \sqrt{\varepsilon}$$

$$\Downarrow$$

$$y \in D_d(x,\varepsilon) \Leftarrow d(x,y) \le \varepsilon$$

ולמעשה הראינו כי מתקיים ~~ב~~ ב' בשאלה 36 עמ' 41 בדרך אגב.

$\Leftarrow$ d ו-$\sqrt{d}$ שקולות על X.

נסתכל על $\langle \mathbb{R}, d \rangle$ כאשר

$d(x,y) = \sqrt{(x-y)^2}$ - כמובן זו מטריקה.

אז $d^2(x,y) = (x-y)^2$

יהיו הנקודות $a=0$, $b=2$, $c=4$ ב-$\mathbb{R}$,

לפי א"ש המשולש בהמה צריך להתקיים:

$$d^2(a,c) \le d^2(a,b) + d^2(b,c)$$

כלומר

$$16 \le 4+4 = 8$$

וזוהי סתירה לכך ש-d^2 מטריקה.

הגשת מטלה 11 שאלה 2

1. א) כיוון ראשון: $f:X\to\mathbb{R}$ חח"ע. יהיו $x,y,z\in X$.

- $d(x,y)\ge 0$ מאחר שמדובר על ערך המוחלט.
- $|f(x)-f(y)| = |f(y)-f(x)| \Leftarrow d(x,y)=d(y,x)$.
- $d(x,z)=|f(x)-f(z)|\le|f(x)-f(y)|+|f(y)-f(z)|$
  $= d(x,y)+d(y,z)$
- אם $x=y$ אז $f(x)=f(y)$ (כי f פונקציה),
  $\Leftarrow$ $|f(x)-f(y)|=|f(x)-f(x)|=d(x,y)=0$

אם $x\neq y$ אז $f(x)\neq f(y)$ כי f חח"ע.
$\Leftarrow$ $|f(x)-f(y)|\neq 0 = d(x,y)$

$\Leftarrow$ $d(x,y)$ מטריקה.

כיוון שני: $d(x,y)$ מטריקה.

נניח בשלילה כי f אינה חח"ע.

קיימים $x,y\in X$ כך ש- $x\neq y$ ו- $f(x)=f(y)$.

$\Leftarrow$ $d(x,y)=|f(x)-f(y)|=0$

וזוהי סתירה לכך ש- $d(x,y)$ מטריקה.

$\Leftarrow$ f חח"ע.

$\Leftarrow$ f חח"ע $\Leftrightarrow$ $d(x,y)$ מטריקה.

ב. נראה כי f עצמה מגדירה איזומטריה.

נסמן כמו בספר $X'=\mathbb{R}$ ו- d' את המטריקה על המרחק הרגיל ב-$\mathbb{R}$ כלומר $d'(x,y)=|x-y|$.

אז עבור $x,y\in X$:

$$d'(f(x),f(y))=|f(x)-f(y)|$$

וזה הרי אומר ש-

$$d'(f(x),f(y))=d(x,y)$$

$\Leftarrow$ f מגדירה איזומטריה בין $\mathbb{R}$ ל-X.

$\Leftarrow$ $\langle\mathbb{R},d'\rangle$ ו- $\langle X,d\rangle$ איזומטריים.

ממן 11 שאלה 3 . יהיו $x,y,z \in \mathbb{R}$.

א. - $d(x,y) \geq 0$ ברור (ערך מוחלט).

-
$$d(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right| = \left|-\left(\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{y}{1+|y|} - \frac{x}{1+|x|}\right| = d(y,x)$$

$\Leftarrow$ $d(x,y) = d(y,x)$.

-
$$d(x,z) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{z}{1+|z|}\right| = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} + \frac{y}{1+|y|} - \frac{z}{1+|z|}\right|$$

$$\leq \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right| + \left|\frac{y}{1+|y|} - \frac{z}{1+|z|}\right| = d(x,y) + d(y,z)$$

- אם $x=y$ אז

$$d(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{x}{1+|x|}\right| = 0$$

אם $x \neq y$ אז

$$d(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right| \neq 0$$

$\Leftarrow$ $\langle \mathbb{R}, d \rangle$ מרחב מטרי.

ב. יהיו $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ו- $c \in \mathbb{R}$ קבועים כלשהם.

$$D(c,\varepsilon) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{c}{1+|c|}\right| < \varepsilon \right\}$$

נגדיר $\frac{x}{1+|x|} - \frac{c}{1+|c|} = f(x)$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & x \geq 0 \\ \frac{1}{(1-x)^2} & x < 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$0 < f'(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$

ולכן $f(x)$ עולה ב-$\mathbb{R}$

$\Downarrow$

Scanned by CamScanner

המשך ממ"ן 11 שאלה 3

- נמצא את $\Delta(0, 1/2)$.

אז $\varepsilon = 1/2$, $c = 0$.

$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

וגם סימטרית סביב 0. ($f(0) = 0$).

$|f(\pm 1)| = 1/2$. כיוון שראינו ש-f עולה ב-$\mathbb{R}$, נסיק כי $|f(x)|$ עולה ב-$[0,\infty)$ ויורדת ב-$(-\infty, 0]$

⇐ לכל $x \in (-1,1)$ $|f(x)| < 1/2$

לכל $x \notin (-1,1)$ $|f(x)| \geq 1/2$.

⇐ $\boxed{\Delta(0, 1/2) = (-1,1)}$

- נמצא את $\Delta(2,1)$

אז $\varepsilon = 1$, $c = 2$

$\Delta(2,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| < 1\}$

$|f(x)| < 1 \iff \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{4}{3}\right| < 1$

⇐ $-\frac{2}{3} < \frac{x}{1+|x|} < \frac{4}{3}$

⇐ הרי $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} = 1 < 4/3$

אז לכל $x \in (-2, \infty)$ מתקיים ש- $-\frac{2}{3} < \frac{x}{1+|x|} < \frac{4}{3}$.

השתמשנו בידע שרכשנו קודם על $\frac{x}{1+|x|}$

⇐ $\boxed{\Delta(2,1) = (-2, \infty)}$

- נמצא את $\Delta(1,2)$.

באופן דומה נבדוק מ... $\left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{1}{2}\right| < 2$

אז $-3/2 < \frac{x}{1+|x|} < 5/2$ וזה מתקבל בכל $\mathbb{R}$.

⇐ $\Delta(1,2) = \mathbb{R}$.

המשך ממן 11 שאלה 3

א) תהי A קבוצה חסומה ב- $\langle \mathbb{R}, d \rangle$.

אזי לכל A :

יהיו $x,y \in A$ אז :

$$d(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right| \le \left|\frac{x}{1+|x|}\right| + \left|\frac{y}{1+|y|}\right| < 1+1 = 2$$

הראינו קודם כי $\left|\frac{x}{1+|x|}\right| < 1$

$\Rightarrow \operatorname{diam} A < 2$.

אני לא רואה קבוצה אפשרית, כך שהיא A חסומה וקוטרה הוא 2.

ב) נראה כי הפונקציה $f : \mathbb{R} \to (-1,1)$ המוגדרת ע"י $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ היא איזומטריה.

הראינו כבר כי f עולה ממש ב- $\mathbb{R}$ ולכן היא חח"ע.

בנוסף $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$

$\Rightarrow$ f היא על $(-1,1)$.

בנוסף, לכל $x,y \in \mathbb{R}$:

$$d_f(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right| = |f(x) - f(y)| = d(f(x), f(y))$$

המטריקה כפי שהוגדרה.

המטריקה של המרחק הרגיל

$\Rightarrow$ f עומדת בקריטריונים של איזומטריה. $\Rightarrow \langle \mathbb{R}, d \rangle \sim (-1,1)$

ממן 11 שאלה 4ב

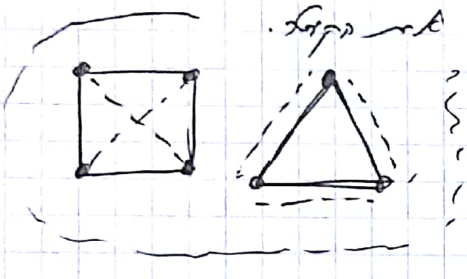
א) יהיו הריבוע S והמשולש שווה הצלעות T במישור.

נסמן ב- S' ו- T' את קבוצת הקודקודים בהתאמה.

מגיאומטריה אנו יודעים שאם:

- $x,y\in S$ ו- $d(x,y)=diam S$ $\Leftarrow$ $x,y\in S'$.
- $x,y\in T$ ו- $d(x,y)=diam T$ $\Leftarrow$ $x,y\in T'$.

כלומר רק קודקודים משיגים את הקוטר.



נניח בשלילה כי S ו- T איזומטרים.

$\Leftarrow$ קיימת איזומטריה $f:T\to S$.

נוכיח בהמשך כי $f(T')=S'$, אך זוהי סתירה שכן f חח"ע ועל, ו- $|T'|=3\neq 4=|S'|$.

$\Leftarrow$ לא קיימת כזו f, ולכן S ו- T אינם איזומטרים, וסיימנו.

נשאר להראות כי $f(T')=S'$. נניח בשלילה $f(T')\neq S'$.

יהיו $x,y\in T'$ אז $d(x,y)=diam T$

אבל מהנחת השלילה נוכל להניח כי $f(x)\notin S'$

וכנ"ל $f(y)\notin S'$.

יש שוויון

ולכן $d(f(x),f(y))<diam S$.

כי f איזומטריה אז $diam T<diam S$ (*).

מצד שני, יהיו $x,y\in T$ כך ש- $f(x),f(y)\in S'$

וכך ש- $d(f(x),f(y))=diam S$ (קודקודים מנוגדים).

$\Leftarrow$ $d(x,y)=diam S$ (f איזומטריה)

אבל $d(x,y)\le diam T$ ($x,y\in T$).

$\Leftarrow$ $diam S\le diam T$ וזו סתירה ל- (*)

$\Leftarrow$ $f(T')=S'$ מהות השלילה.

~~סס~~. ב) קיימת נקודה x כלשהי כך שלכל $\varepsilon>0$:

קיימת $a\in A$ ו- $b\in B$ כך ש-

$a,b\in D(x,\varepsilon)$

הרי $d(a,b)\leq \operatorname{diam} D(x,\varepsilon)$

אז: $d(a,b)\leq \varepsilon$

לכל ε.

$\Leftarrow$ $\inf\{d(a,b)\mid a\in A, b\in B\}=0$

$\Leftarrow$ $d(A,B)=0$.

ממן 11 שאלה 5

א) המשלים של קבוצת ~~הפונקציות~~ הסדרות העולות במובן החלש ב- ℓ_2 הוא קבוצת הסדרות היורדות ממש ב- ℓ_2, נסמן קבוצה זו ב- A.

נוכיח את הטענה בכך שנראה ש- A פתוחה.

תהי $a\in A$, a - יורדת ממש.

- $a\in\ell_2$ ← $\sum a_i^2<\infty$.

כי a יורדת ממש נסיק כי $a^2=(a_i^2)_{i=1}^{\infty}$ יורדת ממש.

כי $\sum a_i^2<\infty$ נסיק כי a^2 סדרה מתאפסת.

ולכן a סדרה מתאפסת.

$\Leftarrow$ A קבוצת הסדרות כך ש-:

- יורדות ממש
- מתכנסות לאפס
- סכום הריבועים מתכנס.

יהי $\varepsilon>0$.

נסתכל ב- $D(a,\varepsilon)$.

ונגדיר את הסדרה b ע"י

$$b=\begin{cases} b_1=a_1+\varepsilon/2 \\ b_n=a_n & \text{לכל } n>1 \end{cases}$$

ברור כי $b\neq a$ ו- $b\in A$.

$b\in A$ כי הרישא לא משפיעה על התכנסות הסדרה או סכום הריבועים שלה, ו- b יורדת ממש שכן $b_1>a_1>a_n=b_n$ עבור $n>1$, ו- a_n יורדת ממש.

בנוסף

$$d(a,b)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+0}$$

$$=\sqrt{(a_1-a_1-\varepsilon/2)^2}=\varepsilon/2$$

$\Leftarrow$ $b\in D(a,\varepsilon)$ ולכן A פתוחה.

$\Leftarrow$ A^c סגורה.

"המשך "מיון" שאלה 5

ב) תהי a נקודה ב-l_1.

אז $a_i \in \mathbb{R}$ לכל סופי.

ו: $\sum |a_i| < \infty$.

מכאן a היא סדרה אפסה ולכן

כמעט לכל n $a_n^2 < |a_n|$.

בנוסף, לכל n $|a_n| > 0$ וגם $a_n^2 > 0$.

לכן, נקבל ממבחן ההשוואה כי

$\sum a_n^2 < \infty$.

$\Leftarrow$ a נמצאת גם במטולה של l_2.

$\Leftarrow$ l_1 הינו תת קבוצה של l_2.

עם זאת, נראה כי l_1 אינו תת מרחב של l_2. כן שנראה כי קיימות נקודות $a,b \in l_1$ כך ש: $d_{l_1}(a,b) \neq d_{l_2}(a,b)$

נבחר את הנקודות

$a = (1,1,0,0,\dots)$

$b = (0,0,\dots)$.

ברור כי $a,b \in l_1$.

עם זאת:

$d_{l_1}(a,b) = 2$

$d_{l_2}(a,b) = \sqrt{2}$

כי $2 \neq \sqrt{2}$ אז נקבל כי l_1 אינו תת מרחב של l_2 ממיון שהמטריקה המושרית על l_1 אינה זהה.

המשך ממן 11 שאלה 5

ב) סימון

$A=\{f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid \forall x: f(x)\in[2,3)\}$

אז

$A^c=\{f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid \exists x: f(x)\notin[2,3)\}$

תהי $h\in\partial A$.

אז $h\in C(I)$ משמע כי h רציפה.

בנוסף $d(h,A)=0$ וגם $d(h,A^c)=0$.

- כי $d(h,A)=0$ אז $x\in[0,1]$: $h(x)\in[2,3]$

- כי $d(h,A^c)=0$ אז $x\in[0,1]$: $h(x)\in(-\infty,2]\cup[3,\infty)$

=> נקבל כי לכל $x\in[0,1]$: $h(x)\in\{2,3\}$.

כלומר, ∂A היא קבוצת הפונקציות הרציפות הקבועות ב-$[0,1]$ שמקבלות את הערך 2 או 3 שם.