מד"ר 2 2019 – פתרון ממ"ן 15

שאלה 1

א. נסמן $p_1(t)=p_2(t)=1$, $q_1(t)=1$ ו- $q_2(t)=t$. נתבונן במשוואות $\left(p_i(t)u'\right)'+q_i(t)u=0$, אז משוואה 1 היא המשוואה $u''+u=0$ ומשוואה 2 היא משוואת Airy. משוואה 2 שולטת על משוואה 1 בכל קטע סגור החלקי ל- $[1,\infty)$.

לכן לפי מסקנה 7.1.1, לכל פתרון לא טריוויאלי u_2 של משוואת Airy יש לפחות שורש אחד בין כל שני שורשים של $u_1=\cos x$ שנמצאים בקטע $[1,\infty)$. כיוון של- $u_1=\cos x$ יש סדרה אינסופית של שורשים ששואפת לאינסוף, נקבל שגם ל- u_2 יש סדרה כזו.

נסמן כעת $p_3(t)=1$, $q_3(t)=0$ ונשים לב כי בכל קטע סגור החלקי ל- $(-\infty,0]$ המשוואה (3) $u''=0$ שולטת על משוואת Airy. נניח כעת כי u_2 פתרון לא-טריוויאלי של משוואת Airy שיש לו שני שורשים אי-חיוביים $t_1<t_2\le 0$. אז לכל פתרון לא-טריוויאלי של $u''=0$ יש שורש בין שני השורשים הללו. אבל הפתרונות של המשוואה $u''=0$ הם כל הפונקציות הלינאריות, ולא לכולן יש שורש בקטע $[t_1,t_2]$. לכן לכל פתרון לא-טריוויאלי של משוואת Airy יש שורש אי-חיובי אחד לכל היותר.

ב. יהי u פתרון לא-טריווילי של המשוואה. יהיו $t_1<t_2<\ldots$ שורשי המשוואה. לפי סעיף א', אחד מביניהם לכל היותר הוא אי-חיובי, ולכן לכל k , $t_{k+1}>0$. כמו כן הסדרה שואפת לאינסוף לפי סעיף א'.

נתבונן במשוואה (4) $u''+t_{k+1}u=0$. משוואה זו נשלטת ממש על ידי משוואת Airy בקטע $[t_{k+1},t_{k+2}]$ ושולטת עליה ממש בקטע $[t_k,t_{k+1}]$. יהי v פתרון לא-טריוויאלי של משוואה 4. המרחק בין שורשים עוקבים של v הוא $\frac{\pi}{\sqrt{t_{k+1}}}$. אנו יכולים לבחור את v כך ש- t_{k+1} שורש שלו.

לפי מסקנה 7.1.1, כיוון ש-4 שולטת ממש על משוואת Airy בקטע $[t_k,t_{k+1}]$, יש בקטע הפתוח המתאים שורש של v, נסמנו s . גם t_{k+1} שורש של v והמרחק בין שורשים עוקבים הוא $\frac{\pi}{\sqrt{t_{k+1}}}$, ולכן $t_{k+1}-t_k\ge t_{k+1}-s=\frac{\pi}{\sqrt{t_{k+1}}}$. כמו כן לפי אותה מסקנה, אם בקטע $[t_{k+1},t_{k+2}]$ יש שני שורשים של v , אז ביניהם יש שורש של u . אבל אין שורשים של u בקטע זה, לכן יש לכל היותר שורש אחד של v

. לכן אורך הקטע $\left[t_{k+1},t_{k+2}\right]$ אינו עולה על $\frac{\pi}{\sqrt{t_{k+1}}}$. כיוון ש-$t_{k+1}\to\infty$, נקבל ש-$\left(t_{k+2}-t_{k+1}\right)\to 0$.

כמו כן, נקבל $t_{k+1}-t_k\ge\frac{\pi}{\sqrt{t_{k+1}}}\ge t_{k+2}-t_{k+1}$, כלומר המרחק בין השורשים הוא סדרה יורדת, כנדרש.

שאלה 2

נבחר u_1,u_2 פתרונות של הבעיה ההומוגנית $u''-u=0$ המקיימים את תנאי השפה השמאלי והימני בהתאמה, למשל $u_1\left(x\right)=\sinh x, u_2\left(x\right)=\sinh\left(1-x\right)$.

כמו בדוגמה הכללית 7.3.3 בספר, פונקציית גרין של הבעיה היא

$$g\left(x,\xi\right)=\begin{cases}Au_1\left(x\right)u_2\left(\xi\right) & a\le x<\xi\le b\\ Au_1\left(\xi\right)u_2\left(x\right) & a\le\xi<x\le b\end{cases}$$

כאשר

$$A=\left[W\left(u_1,u_2\right)\left(\xi\right)\right]^{-1}=\left[-\sinh\left(\xi\right)\cosh\left(1-\xi\right)-\sinh\left(1-\xi\right)\cosh\left(\xi\right)\right]^{-1}=-\frac{1}{\sinh 1}.$$

פתרון הבעיה הנתונה בשאלה הוא אם כן $u\left(x\right)=\int_0^1 g\left(x,\xi\right)\xi^2 d\xi$, כלומר

$$u\left(x\right)=-\frac{1}{\sinh 1}\left[\sinh\left(1-x\right)\int_0^x\sinh\left(\xi\right)\xi^2 d\xi+\sinh\left(x\right)\int_x^1\sinh\left(1-\xi\right)\xi^2 d\xi\right].$$

נבצע אינטגרציה בחלקים ונקבל: $u\left(x\right)=-x^2-2+\frac{2}{\sinh 1}\sinh\left(1-x\right)+\frac{3}{\sinh 1}\sinh\left(x\right)$.

שאלה 3

ניעזר במשפט 7.3.1, שנותן תנאי מספיק לכך שלבעיית שפה לא-לינארית קיים פתרון יחיד.

כיוון ש-g רציפה ב-$\left[0,1\right]$, הפונקציה $\left|g\left(x\right)\right|$ מקבלת מקסימום בקטע, נסמן אותו K ונשים לב כי $K<8$.

נסמן $f\left(x,y\right)=g\left(x\right)\sin y$, נשים לב כי לכל $x\in\left[0,1\right]$ ולכל y_1,y_2 מתקיים $\left|f\left(x,y_1\right)-f\left(x,y_2\right)\right|=\left|g\left(x\right)\right|\left|\sin y_1-\sin y_2\right|\le K\left|\sin y_1-\sin y_2\right|\le K\left|y_1-y_2\right|$, כאשר אי-השיוויון האחרון נובע מכך שפונקציית הסינוס מקיימת תנאי ליפשיץ עם קבוע 1 ב-$\mathbb{R}$. כלומר f מקיימת תנאי ליפשיץ עם קבוע K ביחס למשתנה y.

כמו כן מתקיים $K\cdot\frac{\left(1-0\right)^2}{8}<1$. לכן לפי משפט 7.3.1 קיים לבעיה פתרון יחיד.

שאלה 4

לכל $t\in(a,b)$ מתקיים $\frac{\lambda}{a^{2018}}<\frac{\lambda}{t^{2018}}<\frac{\lambda}{b^{2018}}<0$ ולכן המשוואה הנתונה בשאלה שולטת על המשוואה (1) $u''+\frac{\lambda}{b^{2018}}u=0$ בקטע. הפונקציה $u=\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{b^{1009}}t\right)$ היא פתרון של המשוואה (1).

המרחק בין שני שורשים עוקבים של u הוא $\frac{\pi b^{1009}}{\sqrt{\lambda}}$. נבחר λ כך שיתקיים $\frac{\pi b^{1009}}{\sqrt{\lambda}}<\frac{b-a}{2}$ ואז יהיו בקטע (a,b) לפחות שני שורשים של המשוואה (1), ביניהם חייב להיות שורש של המשוואה הנתונה.

שאלה 5

נתבונן בפונקציית הארגומנט $\varphi_i(t,\lambda)$ המתאימה לפתרון $u_i(t,\lambda)$ של הבעיה ה- i ($i=1,2$) עם הפרמטר λ, כלומר $\varphi_i(t,\lambda)=\tan^{-1}\left(\frac{u_i(t)}{p_i(t)u_i'(t)}\right)$.

כידוע, $\varphi_i(t,\lambda)$ מקיימת את המשוואה $\varphi_i'(t,\lambda)=\frac{1}{p_i}\cos^2\varphi_i(t,\lambda)+(q_i+\lambda)\sin^2\varphi_i(t,\lambda)$.

לפי ההנחה, עבור λ קבוע המשוואה (2) שולטת על משוואה (1) בקטע $[a,b]$, ולכן, כפי שרואים בהוכחת משפט ההשוואה הראשון, מתקיים $\varphi_1(t,\lambda)\le\varphi_2(t,\lambda)$.

את תנאי השפה אפשר לתרגם לדרישה ש- $\varphi_i(b,\lambda)=\beta_i$ (מודולו π), ולמעשה עבור הע"ע λ_n מתקיים $\varphi_1(b,\lambda_n)=\beta_1+n\pi$ ועבור μ_n מתקיים $\varphi_2(b,\mu_n)=\beta_2+n\pi$.

מההנחה $0\le\beta_2\le\beta_1<\pi$ נקבל כי $\varphi_2(b,\mu_n)=\beta_2+n\pi\le\beta_1+n\pi=\varphi_1(b,\lambda_n)$.

מצד שני כפי שראינו, $\varphi_1(b,\lambda_n)\le\varphi_2(b,\lambda_n)$. נקבל $\varphi_2(b,\mu_n)\le\varphi_2(b,\lambda_n)$. כיוון שפונקציית הארגומנט היא פונקציה עולה של λ, נקבל כי $\mu_n\le\lambda_n$.

אם מתקיים א"ש ממש במקום אחד לפחות, אז $\varphi_1(t,\lambda)<\varphi_2(t,\lambda)$ [כי אז בסימוני הוכחת משפט ההשוואה, $f_1(t,\varphi_1)<f_1(t,\varphi_1)$ או $\varphi_1(a,\lambda)<\varphi_2(a,\lambda)$ ולכן נוכל להסיק א"ש חזק ממשפט 2.6.1]. לכן יש גם א"ש חזק $\varphi_2(b,\mu_n)<\varphi_2(b,\lambda_n)$ ומכאן $\mu_n<\lambda_n$.