ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20585

מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חוברת הקורס - אביב 2021ב

כתב: אלעזר בירנבוים

פברואר 2021 - סמסטר אביב - תשפ"א

תוכן העניינים

אל הסטודנטים,

אני מקדם את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות".

בחוברת זו תמצאו את לוח הזמנים של הקורס, תנאים לקבלת נקודות זכות ומטלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים.
בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס.
פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת:
http://telem.openu.ac.il
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

שעות הייעוץ בקורס מתקיימות בימי ראשון בשעות 18:00-20:00 בטלפון 04-6850321.
אבקש מאוד לא להתקשר לטלפון הזה בשעות לא סבירות ובשבתות.
ניתן לפנות גם בדואר אלקטרוני: elazar@openu.ac.il

אני מאחל לכם הצלחה בלימודים.

לתשומת לב הסטודנטים הלומדים בחו"ל:
למרות הריחוק הפיסי הגדול, נשתדל לשמור אתכם על קשרים הדוקים ולעמוד לרשותכם ככל האפשר. הפרטים החיוניים על הקורס נכללים בחוברת הקורס וכן באתר הקורס. מומלץ מאד להשתמש באתר הקורס ובכל אמצעי העזר שבו, וכמובן, לפנות אלינו במידת הצורך.

בברכה,

אלעזר בירנבוים

מרכז ההוראה

1. **לוח זמנים ופעילויות** (20585 / 2021ב)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
1	05.03.2021-28.02.2021	פרק 1 במדריך הלמידה		
2	12.03.2021-07.03.2021	פרק 1 פרק 2	מפגש ראשון	ממ"ן 11 12.03.2021
3	19.03.2021-14.03.2021	פרק 2		
4	26.03.2021-21.03.2021	פרק 3	מפגש שני	
5	02.04.2021-28.03.2021 (א-ו פסח)	פרק 3		
6	09.04.2021-04.04.2021 (ה יום הזיכרון לשואה)	פרק 4	מפגש שלישי	ממ"ן 12 09.04.2021
7	16.04.2021-11.04.2021 (ד יום הזיכרון, ה יום העצמאות)	פרק 4		
8	23.04.2021-18.04.2021	פרק 4	מפגש רביעי	
9	30.04.2021-25.04.2021 (ו ל"ג בעומר)	פרק 4		

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

.

לוח זמנים ופעילויות – המשך

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ״ן (למנחה)
10	07.05.2021-02.05.2021	פרק 5	מפגש חמישי	ממ״ן 13 07.05.2021
11	14.05.2021-09.05.2021	פרק 5		
12	21.05.2021-16.05.2021 (ב שבועות)	פרק 6		ממ״ן 14 21.05.2021
13	28.05.2021-23.05.2021	פרק 6	מפגש שישי	
14	04.06.2021-30.05.2021	פרק 7		
15	11.06.2021-06.06.2021	פרק 7	מפגש שביעי	ממ״ן 15 11.06.2021

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

2. תיאור המטלות

קראו היטב עמודים אלו לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס - הבנה מעמיקה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. המטלות תיבדקנה על-ידי המנחה ותוחזרנה בצירוף הערות המתייחסות לתשובות.

המטלות מלוות את יחידות הלימוד בקורס. להלן פירוט המטלות, היחידות שאליהן מתייחסת כל מטלה ומשקלה היחסי. בחלק מהמטלות תופענה גם שאלות המתייחסות ליחידות שכבר נלמדו.

ממ״ן 11 - פרק 1 במדריך - 6 נקודות
ממ״ן 12 - פרקים 2, 3 - 6 נקודות
ממ״ן 13 - פרק 4 - 8 נקודות
ממ״ן 14 - פרק 5 - 4 נקודות
ממ״ן 15 - פרקים 6, 7 - 6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל של 24 נקודות לפחות.
שימו לב שחובה להגיש את ממ״ן 13.

ללא צבירת 24 נקודות בהגשת מטלות לא ניתן יהיה לגשת לבחינת הגמר

למען הסר ספק, יודגש שחל איסור על הכנה משותפת והעתקה של מטלות או חלקי מטלות.
(הנושא מפורט בתקנון משמעת לסטודנטים - נספח 1 של ידיעון האו״פ).

לתשומת לבכם!
כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן: אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלה** בציון הנמוך ביותר, שציונה נמוך מציון הבחינה, לא תילקח בחשבון בעת שקלול הציון הסופי. זאת בתנאי שמטלה זו **אינה חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס.
סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע בטלפון שמספרו 09-7782222, או יעדכנו בעצמם באתר שאילתא http://www.openu.ac.il/sheilta
קורסים ⇦ ציוני מטלות ובחינות ⇦ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.
יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות

שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של ציוני המטלות והבחינה יהיה נמוך מ-60).

<u>כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.</u>

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל כולל של 24 נקודות לפחות.

ב. ציון של לפחות 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 3 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2021ב **מועד אחרון להגשה:** 12 מרץ 21

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (14%)

אפשר להציע אלגוריתם נוסף להכרעת השפה A של דוגמה 3.7:

בכל שלב מוחקים את המחצית הימנית של ה-0-ים שעדיין רשומים על הסרט.

ממשיכים בתהליך הזה עד שמגיעים למספר 0-ים אי-זוגי גדול מ-1 ואז דוחים, או עד שמגיעים ל-0 יחיד ואז מקבלים.

הציגו **תיאור מלא** של מכונת טיורינג שמממשת את האלגוריתם הזה (כמו איור 3.8 בספר).

אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$.

למכונה יהיו **לא יותר מעשרה מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

הסבירו היטב את פעולת המכונה, ולמה היא אכן מכריעה את השפה A.

שאלה 2 (14%)

בנו מכונת טיורינג, שכאשר היא מקבלת כקלט מילה w מעל האלפבית $\{0, 1\}$, היא מסיימת במצב q_{accept}, ועל הסרט רשומה המילה w ואחריה 0-ים כמספר ה-0-ים ב-w.

למשל, אם w=0110010, אזי בסיום הריצה תהיה כתובה על הסרט המילה 01100100000.

אלפבית הקלט הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$.

למכונה יהיו **לא יותר מעשרה מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

תארו את המכונה באיור (אפשר לוותר על הציור של q_{reject} וכל הקשתות שנכנסות אליו וכן על מעברים בלתי אפשריים).

הסבירו היטב את פעולת המכונה, ולמה היא אכן מבצעת את הנדרש.

זכרו לטפל נכון גם במקרה ש-w היא **המילה הריקה**.

שימו לב לכך שאלפבית הסרט הוא $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$.

שאלה 3 (10%)

א. מהי **השפה** שהמכונה שבניתם בתשובה לשאלה 2 **מזהה**?

ב. מהי **הפונקציה** שהמכונה שבניתם **מחשבת**?

שאלה 4 (18%. סעיף א - 6%, סעיף ב - 12%)

נגדיר מודל חישובי חדש : מכונת טיורינג עם סרט אחד ועם כמה ראשים קוראים-כותבים.

למכונה כזו יש סרט יחיד, אבל ייתכן שיש לה יותר מראש קורא-כותב אחד.

אם יש למכונה k ראשים, הם ממוספרים מ-1 עד k. הראשים השונים נעים על הסרט באופן בלתי תלוי זה בזה. ייתכן שכמה ראשים יעמדו בו-זמנית על אותו מקום בסרט.

פונקצית המעברים δ של מכונה עם k ראשים מוגדרת כך : $\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{\mathrm{L, R, S}\}^k$.

כאשר המכונה נמצאת במצב q_i, והראשים עומדים על הסמלים $a_1, a_2, ..., a_k$ בסרט, פונקצית המעברים מגדירה לאיזה מצב q_j עוברים, אלו אותיות מודפסות, ומהי התנועה של כל ראש.

אם לפי פונקצית המעברים, כמה ראשים מדפיסים סמלים שונים באותו מקום בסרט, יודפס הסמל של הראש שמספרו קטן ביותר.

א. הסבירו כיצד מכונה עם שני ראשים יכולה להכריע את השפה של תרגיל 3.8 סעיף b (עמוד 188 בספר) במעבר אחד על הקלט (כלומר, כל ראש יעבור פעם אחת על הקלט).

ב. הסבירו **בפירוט** כיצד מכונת טיורינג רגילה (עם ראש יחיד) יכולה לחקות את פעולתה של מכונה עם k ראשים.

שאלה 5 (18%)

מספר טבעי n נקרא **פריק** (composite) אם הוא לא ראשוני. (כלומר, אם הוא שווה ל-1, או שיש לו מחלקים שונים מ-1 וממנו עצמו).

א. תארו מכונת טיורינג **לא דטרמיניסטית** להכרעת השפה F הבאה :

$$F = \{a^n \mid n \geq 1;\ n \text{ is composite}\}$$

רמת הפירוט של תיאור פעולת המכונה צריכה להיות דומה למכונה M_3 מדוגמה 3.11 בספר.

המכונה צריכה להשתמש באי-דטרמיניזם באופן שיקל על החישובים (לעומת מכונה דטרמיניסטית לאותה המשימה).

שימו לב שהמכונה שאתם מתארים **מכריעה** את השפה, ולא רק מזהה אותה.

ב. נניח שנחליף במכונה שהצעתם את התפקידים של המצבים q_{accept} ו-q_{reject}.

מהי השפה שמכריעה המכונה שתתקבל? **הצדיקו היטב** את תשובתכם.

שאלה 6 (14%)

בנו מונה (enumerator) לשפה A של דוגמה 3.7.

האלפבית Σ של סרט הפלט יהיה $\{0\}$; האלפבית Γ של סרט העבודה יהיה $\{0, x, \sqcup\}$.

למונה יהיו **לא יותר משמונה מצבים** (כולל q_{print} ו-q_{halt}).

תארו את המונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{halt} וכל הקשתות שנכנסות אליו. אפשר לוותר על הציור של מעברים בלתי אפשריים).
להגדרה פורמלית של מונה, עיינו במדריך הלמידה.

הסבירו היטב את פעולת המונה ולמה הוא אכן מונה את השפה A.

שאלה 7 (12%)

בעיה 3.12 בספר במהדורה הבינלאומית (עמוד 189), שהיא בעיה 3.19 במהדורה הרגילה (עמוד 190).

הדרכה: אפשר להיעזר בטענה של בעיה 3.13 בספר במהדורה הבינלאומית, שהיא בעיה 3.18 במהדורה הרגילה. (טענה זו מוכחת במדריך הלמידה בתרגיל 1.10).

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4 ו-5 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2021ב **מועד אחרון להגשה:** 9 אפר' 21

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (12%)

נתון התיאור של המכונה M הבאה:

M = "On input <G>, where G is a CFG:

1. Go through all possible w's in the standard string order.
2. For each w check whether $\langle G, w\rangle \in A_{\text{CFG}}$.
3. If for some w it is found that $\langle G, w\rangle \in A_{\text{CFG}}$, accept."

א. מהי השפה שהמכונה M **מכריעה**? **הצדיקו** את תשובתכם.

ב. מהי השפה שהמכונה M **מזהה**? **הצדיקו** את תשובתכם.

שאלה 2 (10%)

נסמן על-ידי $\mathbb{N}_0$ את קבוצת המספרים הטבעיים עם 0: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

הוכיחו שהפונקציה g הבאה היא **התאמה** (correspondence) של $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ו-$\mathbb{N}_0$:

$$g(n, m) = 2^n(2m + 1) - 1$$

(להגדרת התאמה עיינו בספר בהגדרה 4.12).

שאלה 3 (14%)

הוכיחו שהשפה G הבאה היא **מזוהה-טיורינג אך איננה כריעה**:

$G = \{\langle M, x\rangle \mid M$ is a TM that accepts x; when M terminates its running on x its tape contains a word longer than $x\}$

(מילה $<M, x>$ שייכת ל-G אם M היא תיאור של מכונת טיורינג, x היא מילה, M מקבלת את x, וכאשר M מסיימת את ריצתה על x (במצב q_{accept}) כתובה על הסרט של M מילה יותר ארוכה מ-x).

הוכחת האי-כריעות של השפה תיעשה **באמצעות שיטת האלכסון**.

הדרכה : הניחו בשלילה ש-G כריעה. אז יש מכונה H שמכריעה אותה. בנו מכונה D שתפעל הפוך מכל מכונה M שהיא.

(אל תשכחו להוכיח ש-G מזוהה-טיורינג).

שאלה 4 (14%)

בעיה 5.25 בספר במהדורה הבינלאומית (עמוד 241), שהיא בעיה 5.9 במהדורה הרגילה (עמוד 239).
הראו שאם T כריעה, אז אפשר לבנות מכונה להכרעת השפה A_{TM}.

שאלה 5 (12%)

במשפט 5.10 הוכח, שהשפה E_{LBA} איננה כריעה.

א. האם E_{LBA} היא שפה **מזוהה-טיורינג**? **הוכיחו** את תשובתכם.

ב. האם השפה **המשלימה** (השפה $\overline{E_{LBA}}$) היא שפה **מזוהה-טיורינג**? **הוכיחו** את תשובתכם.

שאלה 6 (18%)

ביחס לכל שפה שלהלן, קִבעו האם אפשר להוכיח שהיא לא כריעה **בעזרת משפט Rice** (ראו בעיה 5.16 בספר במהדורה הבינלאומית, שהיא בעיה 5.28 במהדורה הרגילה). אם קבעתם שכן, כתבו את ההוכחה. אם קבעתם שלא, **הסבירו היטב** למה לא.

א. $A = \{<M> \mid M \text{ is a TM and } |L(M)|<50\}$

(A היא שפת התיאורים של מכונות טיורינג, שמקבלות פחות מ-50 מילים).

ב. $B = \{<M> \mid M \text{ is a TM and } M \text{ accepts every word } w \text{ within 1,000 steps}\}$

(B היא שפת התיאורים של מכונות טיורינג, שמקבלות כל מילה w בתוך 1,000 צעדים).

ג. $DECIDABLE_{TM} = \{<M> \mid M \text{ is a TM and } L(M) \text{ is a decidable language}\}$

(זוהי שפת התיאורים של מכונות טיורינג, שהשפה שהן מזהות היא שפה כריעה).

שאלה 7 (20%)

השפה ALL_{TM} מוגדרת בבעיה 5.18 (סעיף **c**) בספר במהדורה הבינלאומית (עמוד 240), שהיא בעיה 5.30 במהדורה הרגילה (עמוד 241).

א. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- ALL_{TM} (הראו : $A_{TM} \leq_m ALL_{TM}$).

ב. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $\overline{ALL_{TM}}$ (הראו : $A_{TM} \leq_m \overline{ALL_{TM}}$. ראו הדרכה בעמוד הבא.).

הדרכה : אם מכונת טיורינג M לא מקבלת קלט w, אז לכל מספר של צעדים שמריצים את M על w, לא מגיעים למצב המקבל.

מכונת טיורינג R יכולה להתייחס לקלט שלה כאל מספר הצעדים שיש להריץ מכונה אחרת S. (למשל, אם הקלט של R הוא v, אז R תריץ את S $|v|$ צעדים).

ג. האם יש רדוקצית מיפוי של ALL_{TM} ל- A_{TM}? (האם $ALL_{TM} \leq_m A_{TM}$?) **הוכיחו** את תשובתכם.

ד. האם יש רדוקצית מיפוי של $\overline{ALL_{TM}}$ ל- A_{TM}? (האם $\overline{ALL_{TM}} \leq_m A_{TM}$?) **הוכיחו** את תשובתכם.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 בספר

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 8 **משקל המטלה:** 8 נקודות

סמסטר: 2021ב **מועד אחרון להגשה:** 7 מאי 21

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (18%)

שפה A נקראת **co-finite** אם השפה המשלימה שלה ($\bar{A}$) היא שפה **סופית**.

א. הוכיחו : אם A היא שפה co-finite, אז A שייכת ל-TIME(1) (במכונה עם סרט אחד).

ב. תנו דוגמה לשפה **אינסופית** B, שגם המשלימה שלה ($\bar{B}$) היא שפה **אינסופית**, ו-B שייכת ל-TIME(1) (במכונה עם סרט אחד).

ג. תנו דוגמה לשפה **רגולרית** C, שלא שייכת ל-TIME(1). **הוכיחו** ש-C לא שייכת ל-TIME(1).

שאלה 2 (14%. כל סעיף 7%)

הוכיחו שהשפות הבאות שייכות למחלקה P :

א. A_{NFA} (ראו משפט 4.2 בספר).

ב. $C = \{<G, w> \mid G \text{ is a CFG in Chomsky normal form and } w \text{ has more than one parse tree in } G\}$

$<G, w>$ שייכת ל-C אם G הוא דקדוק חסר הקשר בצורה הנורמלית של חומסקי, $w \in L(G)$, ויש יותר מאופן אחד לגזור את w בדקדוק G.

שאלה 3 (8%)

נעיין בשפה הבאה:

$$STEPS_{TM} = \{<M, w, t> \mid M \text{ is a deterministic TM that accepts } w \text{ within } t \text{ steps}\}$$

מילה $<M, w, t>$ שייכת לשפה, אם M היא מכונת טיורינג דטרמיניסטית, w היא מילה ו-t הוא מספר טבעי, ו-M מקבלת את w ב-t צעדי ריצה או פחות.

פרופסור מלומד הציע את ההוכחה הבאה לכך שהשפה $STEPS_{TM}$ **שייכת ל-P**:

נבנה מכונה מכריעה לשפה שזמן הריצה שלה פולינומיאלי:

"על קלט $<M, w, t>$ כאשר M היא מכונת טיורינג, w מילה ו-t מספר טבעי:

1. הרץ את M t צעדים על w. אם M קיבלה את w קבל. אחרת, דחה."

האם ההוכחה של הפרופסור המלומד טובה? **הצדיקו היטב** את תשובתכם.

שאלה 4 (15%. סעיף א - 10%; סעיף ב - 5%)

א. הציגו **מאמת** (verifier) לשפה A_{TM}.

הדרכה: זִכְרו שמאמת **תמיד עוצר** (ומקבל, אם האימות c שכנע אותו שמילת הקלט שייכת לשפה, ודוחה, אם c לא שכנע אותו שמילת הקלט שייכת לשפה).

ב. הוכיחו: **אין** ל-A_{TM} מאמת, שזמן הריצה שלו פולינומיאלי בגודל הקלט.

שאלה 5 (10%)

האם, לפי הידע שבידנו, השפה B הבאה שייכת **למחלקה NP**? הסבירו את תשובתכם.

$$B = \{<n, m> \mid m \text{ הוא מספר המחלקים של } n\}$$

דוגמאות למילים בשפה: $<1, 1>$, $<2, 2>$, $<3, 2>$, $<4, 3>$, $<6, 4>$, $<8, 4>$, $<20, 6>$

הניחו ש-n ו-m מיוצגים בבינארי.

שאלה 6 (5%)

עיינו בפסוק ϕ_{move} בהוכחת משפט Cook-Levin.

יהי q מצב במכונה השונה מן המצב המקבל ומן המצב הדוחה ($q \neq q_{accept}$, $q \neq q_{reject}$).

האם ייתכן חלון **חוקי** שבו q הוא הסמל האמצעי גם בשורה הראשונה וגם בשורה השנייה של החלון? **הוכיחו** את תשובתכם.

שאלה 7 (12%)

בעיה 7.39 בספר המהדורה הבינלאומית (עמודים 326-327), שהיא בעיה 7.28 במהדורה הרגילה (עמוד 325).

שאלה 8 (18%)

בעיית הקבוצה הבלתי תלויה (*INDEPENDENT-SET*) מוגדרת בעמוד 78 במדריך הלמידה.

א. הוכיחו: בגרפים שבהם דרגת כל צומת ≤ 2 הבעיה **שייכת ל-P**.

(דרגת צומת = מספר הקשתות שנוגעות בצומת).

עליכם לתאר אלגוריתם, בעל זמן ריצה פולינומיאלי, המקבל כקלט מספר טבעי k וגרף לא מכוון G, שדרגת כל צומת שלו ≤ 2, ובודק האם יש ב-G קבוצה בלתי תלויה בגודל k.

ב. הוכיחו: בגרפים שבהם דרגת כל צומת ≤ 3 הבעיה היא **NP-שלמה**.

הדרכה: רדוקציה פולינומיאלית של $3SAT$:

יהיו הפסוקיות של הנוסחה $C_1, ..., C_m$ (בכל פסוקית שלושה ליטרלים).

לכל משתנה v בנוסחה, נסמן על-ידי k_v את מספר הפסוקיות שבהן הוא מופיע.

לכל משתנה v בונים מעגל בגודל $2k_v$ שבו מופיעים הקדקודים $T_{v,\,i}$ ו- $F_{v,\,i}$ לסירוגין, כאשר i עובר על מספרי הפסוקיות שבהן מופיע המשתנה v.

(למשל, אם המשתנה v מופיע בפסוקיות השנייה, החמישית והשמינית, אז בונים את המעגל $(T_{v,2} - F_{v,2} - T_{v,5} - F_{v,5} - T_{v,8} - F_{v,8} - T_{v,2})$.

לכל פסוקית $(l_1 \vee l_2 \vee l_3)$ בנוסחה (l_i הוא ליטרל) בונים משולש.

מחברים בקשת כל ליטרל l של הפסוקית ה-i לקדקוד המתאים לפסוקית ה-i במעגל של המשתנה של l: אם הליטרל l הוא v, מחברים אותו ל-$T_{v,\,i}$; אם הליטרל l הוא $\neg v$, מחברים אותו ל- $F_{v,\,i}$.

הראו שהרדוקציה המוצעת יכולה להתבצע בזמן פולנומיאלי בגודל הקלט.

הראו שדרגת כל צומת בגרף שנבנה על-ידי הרדוקציה ≤ 3.

הראו שהנוסחה ספיקה, אם, ורק אם, יש בגרף שנבנה על-ידי הרדוקציה קבוצה בלתי תלויה בגודל n (שאותו עליכם לקבוע).

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 8 בספר

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2021ב **מועד אחרון להגשה:** 21 מאי 21

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

נגדיר: $HC = \{<G> \mid G$ is an undirected graph that has a Hamiltonian circuit$\}$

(זוהי שפת הגרפים הלא מכוונים שיש להם מעגל המילטון).

הוכיחו שהשפה HC שייכת ל-SPACE(n).

הציגו אלגוריתם להכרעת השפה, הסבירו היטב כיצד הוא ימומש, והוכיחו, שהמקום הדרוש הוא $O(n)$.

שאלה 2 (10%)

נתונה השפה $\#SAT$

$\#SAT = \{<\phi, k> \mid \phi$ is a Boolean formula with **at least** k different satisfying assignments$\}$

א. האם אפשר להוכיח ששפה זו שייכת ל- SPACE(n)?
אם עניתם שכן, כתבו את ההוכחה. אם עניתם שלא, הסבירו למה לא.

ב. האם התשובה לסעיף א תשתנה, אם נחליף בהגדרת השפה את המילים "at least" במילים "at most"? הסבירו את תשובתכם.

ג. האם התשובה תשתנה, אם נחליף את המילים "at least" במילה "exactly"?
הסבירו את תשובתכם.

שאלה 3 (20%)

א. הוכיחו: $EQ_{DFA} \in$ SPACE(n^2). (השפה EQ_{DFA} מוגדרת לפני משפט 4.5 בספר)

ב. הוכיחו: $EQ_{NFA} \in$ SPACE(n^2). ($EQ_{NFA} = \{<A, B> \mid A$ and B are NFAs and $L(A)=L(B)\}$)

שאלה 4 (25%)

בעיה 8.11 בספר במהדורה הבינלאומית (עמוד 358), שהיא בעיה 8.22 במהדורה הרגילה (עמוד 359).

לכל אחת מן השפות, הסבירו היטב את אופן פעולתה של מכונה, שמשתמשת במקום לוגריתמי בגודל הקלט, ומכריעה את השפה.

שאלה 5 (15%)

הוכיחו : $VERTEX\text{-}COVER \leq_L CLIQUE$.

($VERTEX\text{-}COVER$ הוגדרה לפני משפט 7.44 ; $CLIQUE$ הוגדרה לפני משפט 7.24).

עליכם לתאר את הרדוקציה, להוכיח שהיא תקפה, ולהוכיח בפירוט שהיא יכולה להתבצע במקום לוגריתמי.

שאלה 6 (20%)

בעיה 8.18 בספר במהדורה הבינלאומית (עמוד 359), שהיא בעיה 8.29 במהדורה הרגילה (עמוד 360).

הדרכה : הראו : $A_{NFA} \in NL$ ו- $PATH \leq_L A_{NFA}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: סעיפים 9.1, 10.1 ו-10.2 בספר

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2021ב **מועד אחרון להגשה:** 11 יוני 21

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20%)

נגדיר סוג חדש של רדוקציה: **רדוקציה במקום** לוג-לוגריתמי. לשם כך נגדיר **מתמר מקום לוג-לוגריתמי**: מתמר כזה זהה למתמר מקום לוגריתמי (הגדרה 8.21 בספר), פרט לכך שסרט העבודה שלו יכול להכיל $O(\log(\log n))$ סמלים ולא $O(\log n)$ סמלים.

נאמר ששפה A **ניתנת לרדוקציה במקום לוג-לוגריתמי** לשפה B, ונסמן $A \leq_{\text{LL}} B$, אם קיים מתמר מקום לוג-לוגריתמי המיישם רדוקצית מיפוי של A ל-B.

שפה C תיקרא **P-שלמה ביחס לרדוקציה במקום לוג-לוגריתמי**, אם

- C שייכת למחלקה P.
- לכל שפה A ב-P יש רדוקציה במקום לוג-לוגריתמי ל-C. ($A \leq_{\text{LL}} C$).

הוכיחו: **לא קיימת** שפה P-שלמה ביחס לרדוקציה במקום לוג-לוגריתמי.

הדרכה: כמה קונפיגורציות שונות יכולות להיות למתמר לוג-לוגריתמי על מילה באורך n?
השתמשו במשפטי היררכיה.

שאלה 2 (20%)

לִמדו את הדיון על בעיית הסוכן הנוסע במדריך הלמידה.
הניחו שמחירי הקשתות בבעיית הסוכן הנוסע הם **חיוביים**.

א. הוכיחו שעלות המסלול של הסוכן הנוסע שמוצא אלגוריתם הקירוב לבעיית הסוכן הנוסע המטרית **קטנה** מפעמיים עלות המסלול האופטימלי.

הדרכה: אם מורידים קשת אחת ממעגל המילטוני, מקבלים עץ פורש של הגרף.

ב. כזכור, הוכח שאלגוריתם זה הוא בעל יחס קירוב ≤ 2.

הוכיחו שיחס הקירוב 2 הוא **הדוק** ביחס לאלגוריתם (כלומר, אי אפשר להצביע על חסם קטן יותר).

הדרכה: לכל n אי-זוגי גדול מ-5, התבוננו בגרף מלא בעל n צמתים, $x_1, x_2, ..., x_n$, שהמחירים של הקשתות שלו הם כדלקמן: המחיר של כל קשת שנוגעת ב-x_1 הוא 1; המחיר של כל הקשתות מהצורה (x_i, x_{i+1}) הוא 1; המחיר של כל שאר הקשתות הוא 2.

הוכיחו שבגרף זה מתקיים אי-שוויון המשולש.

הוכיחו שהקירוב שהאלגוריתם משיג על גרף כזה הוא $2-2/n$.

הסיקו את התוצאה הנדרשת.

שאלה 3 (20%)

הוכיחו: $NP \neq SPACE(n)$.

שאלה 4 (20% סעיף א - 5%; סעיף ב - 15%)

תזכורת: **כיסוי בצמתים** (vertex cover) בגרף לא מכוון $G=(V, E)$ הוא קבוצת צמתים U, כך שלכל קשת ב-E יש לפחות קצה אחד ב-U.

נגדיר את הפונקציה הבאה:

$f(G, v) =$ גודל הכיסוי בצמתים המינימלי ש-v שייך אליו

הקלט לפונקציה הוא גרף לא מכוון G וצומת v של G.

הפונקציה מחזירה מספר טבעי. המספר שהיא מחזירה הוא הגודל של הכיסוי בצמתים הקטן ביותר ב-G ש-v שייך אליו.

א. הוכיחו: אם אפשר לחשב את הפונקציה f בזמן פולינומיאלי, אז P=NP.

ב. הוכיחו: אם אפשר לקרב את הפונקציה f בקבוע חיבורי 5 בזמן פולינומיאלי, אז P=NP.
עליכם להוכיח, שאם אפשר לחשב בזמן פולינומיאלי פונקציה $g(G, v)$, ומובטח ש-

$$f(G, v)-5 \le g(G, v) \le f(G, v)+5,$$

אז P=NP.

שאלה 5 (20%)

א. הוכיחו: אם P=NP, אז יש אלגוריתם **בעל זמן ריצה פולינומיאלי** לבעיה הבאה:

הקלט: נוסחה בוליאנית ϕ.

הפלט: השמה מספקת של ϕ אם ϕ ספיקה. אם ϕ לא ספיקה, יוחזר "לא".

(האלגוריתם מקבל כקלט נוסחה בוליאנית ϕ. אם אין ל-ϕ השמה מספקת, מוחזר "לא". אם יש ל-ϕ השמה מספקת, מוחזרת אחת ההשמות המספקות של ϕ. כלומר, מוחזרת הצבה של 0-ים ו-1-ים למשתנים של ϕ כך שהערך של ϕ בהצבה הזו הוא 1).

הדרכה: אם P=NP, אז יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי ל-SAT.

אפשר לקרוא לאלגוריתם הזה כמה פעמים כדי למצוא הצבה למשתנים של ϕ שתספק את ϕ.

ב. בעיה 10.11 בספר במהדורה הבינלאומית (עמוד 439), שהיא בעיה 10.19 במהדורה הרגילה (עמוד 440).

הדרכה: התאימו את מה שהראיתם בסעיף א.