מד"ר 2 201 – פתרון ממ"ן 14

שאלה 1

א. נעבור למערכת מסדר ראשון: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y \\ -y-\cos x \end{pmatrix} =: f\left(x,y\right)$. נקודות ש"מ הן אלו עבורן $\cos x = 0$, כלומר $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ (וכמובן $y = 0$).

נבצע לינאריזציה: $D_f\left(x,y\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin x & -1 \end{pmatrix}$. המטריצה הווריאציונית המתאימה סביב נקודת ש"מ $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k, 0\right)$ היא $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \left(-1\right)^k & -1 \end{pmatrix}$, שהע"ע שלה הם $\frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}$ עבור k זוגי ו- $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ עבור k אי-זוגי.

כלומר עבור k זוגי כל הע"ע עם חלק ממשי שוני מאפס ויש ע"ע עם חלק ממש חיובי ולכן הפתרון אינו יציב (לפי המסקנה ממשפט 5.2.3) ועבור k אי-זוגי החלק הממשי של כל הע"ע שלילי ולכן הפתרון יציב אסימפטוטית (לפי אותה מסקנה וכן זה כבר ידוע לנו מפרק 4).

ב. נסמן $f\left(x,y\right) = \begin{pmatrix} 1-xy \\ x-y^3 \end{pmatrix}$. נמצא נקודות ש"מ:

נכפול את המשוואה השניה ב- y ונציב בה את המשוואה הראשונה, ונקבל $1 = xy = y^4$, כלומר יש שתי נקודות, $\left(1,1\right), \left(-1,-1\right)$.

$D_f\left(x,y\right) = \begin{pmatrix} -y & -x \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}$.

בנקודה $\left(1,1\right)$ המטריצה הווריאציונית היא $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. הע"ע היחיד הוא -2 ולכן יש יציבות אסימפטוטית.

בנקודה $\left(-1,-1\right)$ המטריצה הווריאציונית היא $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. הע"ע הם $1 \pm \sqrt{5}$, כלומר כל הע"ע עם חלק ממשי שונה מאפס ויש ע"ע עם חלק ממשי חיובי ולכן הפתרון אינו יציב.

שאלה 2

א. נסמן $f=\begin{pmatrix}\alpha x+xy\\ -\beta y+x^2\end{pmatrix}$ $D_f\left(x,y\right)=\begin{pmatrix}\alpha+y & x\\ 2x & -\beta\end{pmatrix}$. המטריצה הווריאציונית בנקודה $\left(0,0\right)$

היא $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & -\beta\end{pmatrix}$. הע"ע הם $\alpha,-\beta$ שהם, לפי הנתון, ממשיים, שונים מאפס ואחד מהם חיובי. לכן

לפי המסקנה ממשפט 5.2.3, פתרון האפס אינו יציב.

ב. נחפש פונקציה מתאימה עבור המערכת מהצורה $V=x^2+cy^2$. לכל c מתקיים כי בכל סביבה נקודה של הראשית יש נקודות בהן V חיובית. למעשה, עבור $c>0$ V חיובית לחלוטין, ועבור $c<0$ היא חיובית בדיוק בנקודות בהן $\left|y\right|<\sqrt{-c}\left|x\right|$. כמו כן V גזירה ברציפות. נחשב את $\dot{V}$:

$\nabla V=\begin{pmatrix}2x\\ 2cy\end{pmatrix}$, לכן $\dot{V}=\nabla V\cdot f=2x\left(\alpha x+xy\right)+2cy\left(-\beta y+x^2\right)$. נשים לב כי עבור $c=-1$ מקבלים $\dot{V}=\alpha x^2+\beta y^2$ וזוהי פונקציה חיובית לחלוטין, ובפרט חיובית בכל הנקודות בסביבה הנקובה של הראשית שבהן V חיובית. לכן לפי משפט 5.2.2 (אי-יציבות) פתרון האפס של המערכת אינו יציב.

שאלה 3

נסמן $h\left(x,y\right)=\begin{pmatrix}xf\left(x,y\right)\\ yg\left(x,y\right)\end{pmatrix}$, אז h גזירה ברציפות במישור, ולכן בכל נקודה יש פתרון יחיד.

לכל נקודה $\left(x_0,0\right)$ על ציר x, נתבונן במשוואה הסקלרית $x'=xf\left(x,0\right)$ עם תנאי התחלה $x\left(0\right)=x_0$, אז קיים לבעיית התחלה זו פתרון, נסמנו $u\left(t\right)$. נשים לב כי $\begin{pmatrix}u\left(t\right)\\ 0\end{pmatrix}$ פתרון של המערכת הנתונה בשאלה. מיחידות הפתרון, זהו הפתרון היחיד. כלומר, המסלול של כל נקודה על ציר x מוכל בציר x לכן ציר x הוא קבוצה שמורה ביחס למערכת. באופן דומה מראים כי ציר y הוא קבוצה שמורה.

מיחידות הפתרון לכל תנאי התחלה נובע כי כל רביע (פתוח) במישור הוא קבוצה שמורה, כיוון שממשפט ערך הביניים נובע שמסלול (רציף) שעובר מרביע לרביע חייב לחתוך את אחד הצירים, אולם כפי שראינו לעיל מסלול שחותך את אחד הצירים חייב להיות מוכל בציר. לכן מסלול שעובר בנקודה באחד הרביעים מוכל כולו באותו רביע.

שאלה 4

א. מהנתונים נובע כי לכל $x\neq 0$ מתקיים כי $\int_0^x g(s)ds>0$ (עבור $x>0$ זהו אינטגרל של פונקציה חיובית ממש, ועבור $x<0$ זהו אינטגרל על קטע "הפוך" של פונקציה שלילית ממש). לכן הפונקציה V חיובית לחלוטין בסביבה של הראשית.

$\nabla V=\begin{pmatrix} g(x) \\ y \end{pmatrix}$ ולכן $\dot{V}=g(x)y+y\left(-h(x,y)y-g(x)\right)=-y^2h(x,y)$. נתון כי h חיובית ממש, ולכן $\dot{V}$ שלילית למחצה בסביבת הראשית, כלומר פונקציית ליאפונוב.

קבוצת הנקודות בהן $\dot{V}=0$ היא ציר y. הקבוצה השמורה המקסימלית ביחס לזרימה המוכלת בציר y (נסמן M) מכילה את הראשית בלבד. (הסבר: לכל $x\neq 0$, בנקודה $(x,0)$ מתקיים $y'=-g(x)\neq 0$ ולכן המסלול יוצא מציר y. הראשית היא נקודת ש"מ, כיוון שמרציפות נובע כי $g(0)=0$).

כמו כן מהנתון נובע כי $\lim_{|(x,y)|\to\pm\infty} V(x,y)=\infty$. לכן לפי מסקנה 5.2.6 הנובעת מעקרון האיונוריאנטיות של לסל, כל פתרון של המערכת הוא חסום ושואף ל- M ולכן הראשית היא פתרון יציב אסימפטוטית גלובלית.

ב. נסמן $f(x,y)=\begin{pmatrix} y \\ -h(x,y)y-g(x) \end{pmatrix}$, אז $D_f(x,y)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -y\frac{\partial h}{\partial x}-g'(x) & -h-y\frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix}$,

כלומר המטריצה הווריאציונית בראשית היא $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(0) & -h(0,0) \end{pmatrix}$. הע"ע של מטריצה זו $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-h(0,0)\pm\sqrt{\left(h(0,0)\right)^2-4g'(0)}\right)$. מהנתונים נובע כי בהכרח $g'(0)\geq 0$, ולכן למעט במקרה שבו $g'(0)=0$ נקבל כי החלק הממשי של כל הע"ע הוא שלילי ונוכל להסיק יציבות אסימפטוטית. [במקרה שבו הביטוי בתוך השורש שלילי החלק הממשי הוא $-\frac{1}{2}h(0,0)<0$, במקרה שבו הוא חיובי נשים לב כי הוא קטן בערכו המוחלט מ- $h(0,0)$ ולכן יש שני ע"ע שליליים].

אולם במקרה שבו $g'(0)=0$ נקבל כי 0 הוא ע"ע של המטריצה, ולא נוכל להסיק מסקנות מלינאריזציה. דוגמה למקרה כזה - $g(x)=x^3$, h פונקציה חיובית גזירה ברציפות כלשהי.

שאלה 5

א. זוהי מערכת אוטונומית במישור. לזרימה של מערכת זו אין נקודות שבת פרט לראשית כיוון שלפי הנתון $f\left(x\right)\neq 0$ לכל $x\neq 0$. מכך ש- $x\cdot f\left(x\right)>0$ בסביבה מנוקבת של הראשית נובע כי הראשית אינה שייכת לקבוצת נקודות הגבול של אף מסלול שאינו פתרון טריוויאלי (זאת מכיוון ש- $\frac{d}{dt}\left|x\right|^2=\left(x\cdot x\right)'=2x\cdot x'=2x\cdot f\left(x\right)>0$ ולכן הערך המוחלט של x אינו יכול לקטון בסביבה של הראשית).

לכן לפי משפט פואנקרה-בנדיקסון, אם $\varphi\left(t\right)$ פתרון חסום ולא טריוויאלי בקטע $\left[0,\infty\right)$, אז או שהוא מחזורי או ש-$\omega\left(\varphi\right)$ הוא מסלול מחזורי. כלומר בכל מקרה אם קיים מסלול חסום ולא טריוויאלי אז קיים מסלול מחזורי בסתירה לנתון.

ב. נמצא נקודות ש"מ: יש לפתור את המערכת $\begin{cases} x\left(1-x^2-4y^2\right)=y\left(a+x\right) \\ y\left(1-x^2-4y^2\right)=-x\left(a+x\right) \end{cases}$.

קל לראות כי $\left(0,0\right)$ פתרון. כמו כן כאשר שני הביטויים בסוגריים בשני האגפים מתאפסים יתכן פתרון, אבל אז $x=-a$ ומכיוון ש-$\left|a\right|>1$ הביטוי $1-x^2-4y^2$ לא יכול להתאפס . כאשר אף אחד מהביטויים הללו לא מתאפס אפשר לחלק את המשוואות זו בזו ולקבל $\frac{x}{y}=-\frac{y}{x}$ כלומר $x^2=-y^2$ וזה יתכן רק כאשר שני האגפים שווים לאפס. כלומר נקודת שיווי המשקל היחידה היא $\left(0,0\right)$.

נשים לב כי מתקיים $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}f\left(x,y\right)=\left(x^2+y^2\right)\left(1-x^2-4y^2\right)$. בסביבה נקובה של הראשית (פנים האליפסה $1-x^2-4y^2=0$) מתקיים כי הביטוי חיובי ממש. לכן כפי שראינו בסעיף א', לכל פתרון לא-טריוויאלי φ מתקיים כי $\omega\left(\varphi\right)$ אינה מכילה נקודות ש"מ.

מחוץ לאליפסה $1-x^2-4y^2=0$ מתקיים כי $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}f\left(x,y\right)<0$. כפי שראינו בסעיף א, ביטוי זה הוא הנגזרת של המרחק מהראשית. לכן פתרונות של המערכת הם חסומים, כיוון שאם המסלול עובר בנקודה מחוץ לאליפסה, החל מאותה נקודה המרחק מהראשית יכול רק לקטון (וכמובן שאם המסלול נמצא בתוך האליפסה הוא חסום ממילא).

יהי φ פתרון לא-טריוויאלי של המערכת . ראינו שהוא חסום וכי $\omega\left(\varphi\right)$ אינה מכילה נקודות ש"מ, לפי משפט פואנקרה בנדיקסון, או שהוא מחזורי או ש-$\omega\left(\varphi\right)$ מסלול מחזורי, כלומר בכל מקרה קיים פתרון מחזורי.

שאלה 6

א. בדומה לשאלה 5, נפתור את המערכת $\begin{cases} y = x\left(4-x^2-y^2\right) \\ x = -y\left(4-x^2-y^2\right) \end{cases}$. הראשית היא נקודת ש"מ. אם $4-x^2-y^2=0$ אז הצבה במשוואות נותנת $x=y=0$ וזו סתירה. אם $4-x^2-y^2 \neq 0$ וגם $x \neq 0, y \neq 0$ נחלק את המשוואות זו בזו ונקבל $\frac{x}{y}=-\frac{y}{x}$. לכן הראשית היא נקודת ש"מ יחידה.

לינאריזציה: המטריצה הווריאציונית היא $\begin{pmatrix} \left(4-x^2-y^2\right)-2x^2 & -1-2xy \\ 1-2xy & \left(4-x^2-y^2\right)-2y^2 \end{pmatrix}\Big|_{(0,0)}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ והע"ע הם $4\pm i$. לכן פתרון האפס אינו יציב. (מסקנה ממשפט 5.2.3).

ב. מתקיים $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'=\left(x^2+y^2\right)\left(4-x^2-y^2\right)$, וזה חיובי עבור כל נקודה בעיגול הנקוב $0<x^2+y^2<4$. על המעגל $x^2+y^2=4$ זה מתאפס, ומחוץ למעגל זה שלילי. כפי שראינו בשאלה הקודמת, ביטוי זה הוא (עד כדי סקלר חיובי) הנגזרת של המרחק מהראשית. לכן המרחק מהראשית של $\varphi(t)$ שואף ל- 2 כאשר $t\to\infty$ עבור כל פתרון לא-טריוויאלי שמתחיל בעיגול הנקוב. מכאן $\omega(\varphi)\subseteq\left\{x^2+y^2=4\right\}$.

במעבר לקואורדינטות קטביות נקבל $\theta'=1$ ולכן יש שיוויון ממש.