מד״ר 2 2019 – פתרון ממ״ן 16

שאלה 1

משוואת צ'בישב: $\left(1-x^2\right)y''-xy'+\alpha^2 y=0$.

א. הנקודה $x=0$ היא נקודה רגולרית של המשוואה, ולכן קיימים שני פתרונות בת"ל מהצורה $y\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. נציב במשוואה:

$\left(1-x^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_n n\left(n-1\right)x^{n-2}-x\sum_{n=0}^{\infty}a_n n x^{n-1}+\alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$. נסדר:

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n n\left(n-1\right)x^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n n\left(n-1\right)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_n n x^n+\alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$, שינוי אינדקס במחובר הראשון, ונשים לב ששני האיברים הראשונים של הטור מתאפסים:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}\left(n+2\right)\left(n+1\right)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_n n\left(n-1\right)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_n n x^n+\alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0 .$$

השוואת מקדמים לטור האפס:

לכל $n\ge 0$, $a_{n+2}\left(n+2\right)\left(n+1\right)-a_n n\left(n-1\right)-a_n n+\alpha^2 a_n=0$ כלומר $a_{n+2}=\dfrac{n^2-\alpha^2}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)}a_n$. שני פתרונות בת"ל מתקבלים מבחירת $a_0=1,a_1=0$ (נקבל טור חזקות זוגיות בלבד) ובחירת $a_0=0,a_1=1$ (נקבל טור חזקות אי-זוגיות בלבד).

ב. כאשר $\alpha=n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+2}=0$ ובאינדוקציה גם $a_{n+2k}=0$ לכל $k\ge 1$.

עבור n זוגי, נקבל שהפתרון המתאים ל- $a_0=1,a_1=0$ הוא פולינום מעלה n, כיוון שכל המקדמים a_m עבור $m>n$ מתאפסים, והמקדם a_n אינו מתאפס כיוון ש- $a_0\ne 0$ ורואים באינדוקציה כי אם $a_k\ne 0$ אז a_{k+2} מתאפס אמם $k^2-\alpha^2=0$, וזה קורה בפעם הראשונה (והיחידה) ב- $k=n=\alpha$.

באופן דומה עבור n אי-זוגי, טור החזקות האי-זוגיות הוא פולינום ממעלה n .

ג. נסמן $x=\cos t$, אז מכלל השרשרת נקבל כי $\ddot{y}=\sin^2 t\cdot y''-\cos t\cdot y'$ (כאשר $\ddot{y}$ מסמן נגזרת שניה לפי המשתנה t). ההצבה $x=\cos t$ במשוואה נותנת $\left(1-\cos^2 t\right)y''-\cos t\cdot y'+\alpha^2 y=0$, כלומר $\ddot{y}+\alpha^2 y=0$ וידוע שאחד הפתרונות של משוואה זו הוא $y\left(t\right)=\cos\left(nt\right)$ (כאשר $\alpha=n$).

בחזרה למשתנה x נקבל $y\left(x\right)=\cos\left(n\cdot\arccos x\right)$.

נשים לב כי תנאי ההתחלה שפתרון זה מקיים הוא $y'(0)=0$, $y(0)=(-1)^{n/2}$ כאשר n זוגי ו-$y(0)=0, y'(0)=(-1)^{n-1/2}n$.

כלומר במקרה ש-n זוגי, פתרון זה מקיים את אותו תנאי התחלה כמו הפתרון הטורי עם $a_0=(-1)^{n/2}, a_1=0$ שהוא פולינום, ולכן גם $y(x)$ פולינום והוא כפולה סקלרית כלשהי של הפולינום T_n. נשים לב שמתקיים $\cos(n\arccos 1)=1$ ולכן הפתרון $y(x)=\cos(n\cdot\arccos x)$ שווה ל-$T_n(x)$.

במקרה ש-n אי-זוגי, הפתרון מקיים את אותו תנאי התחלה כמו הפתרון הטורי עם $a_0=0, a_1=(-1)^{n-1/2}n$, כלומר גם במקרה זה נקבל כי הוא כפולה סקלרית של פולינום צ'בישב $T_n(x)$, ומכך ש-$\cos(n\arccos 1)=1$ נקבל שהסקלר הוא 1.

ד. עבור $n=0$ פולינום צ'בישב המתאים הוא ממעלה אפס, ומתנאי הנרמול נקבל כי $T_0(x)=1$.

עבור $n=1$ זהו פולינום ממעלה 1, ונשים לב כי בכל פולינום כזה מופיעות חזקות זוגיות או אי-זוגיות בלבד. כלומר $T_1(x)$ הוא כפולה של x ומהנרמול נקבל $T_1(x)=x$.

נשתמש בנוסחה הטריגונומטרית $\cos((n+1)\beta)=2\cos(n\beta)\cos\beta-\cos((n-1)\beta)$ עבור $\beta=\arccos x$ ונקבל

$$T_{n+1}(x)=2\cos(n\arccos x)x-\cos((n-1)\arccos x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x).$$

נקבל $T_2=2xT_1-T_0=2x^2-1$, $T_3=2xT_2-T_1=4x^3-3x$ ו-$T_4=2xT_3-T_2=8x^4-8x^2+1$.

שאלה 2

א. נכתוב את המשוואה בצורה קנונית: $y''+\frac{3x-1}{x(x-1)}y'+\frac{1}{x(x-1)}y=0$. ל-$p,q$ יש קוטב מסדר 1 ב-$x=0$ ולכן הנקודה $x=0$ היא נקודה סינגולרית-רגולרית.

$p_0=\lim_{x\to 0}x\frac{3x-1}{x(x-1)}=1$, $q_0=\lim_{x\to 0}x^2\frac{1}{x(x-1)}=0$ ולכן משוואת האינדקס היא $r(r-1)-r=0$

כלומר $r^2=0$ ו-0 הוא שורש כפול של המשוואה.

ב. לפי משפט פרובניוס יש למשוואה פתרון אחד בצורה $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+0}$. הצבה:

$(x^2-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}+(3x+1)\sum_{n-0}^{\infty}a_nnx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$. נסדר:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$. הזזת אינדקס:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)nx^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

השוואת מקדמים לטור האפס: לכל $n \geq 0$,

$a_n\left[n(n-1)+3n+1\right]+a_{n+1}\left[-n(n+1)-(n+1)\right]=0$ כלומר $(n+1)^2 a_n-(n+1)^2 a_{n+1}=0$

אפשר לחלק ב- $(n+1)^2 \neq 0$ ולקבל $a_{n+1}=a_n$, כלומר, אם נבחר $a_0=1$ נקבל את הטור

$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}$ (נשים לב שרדיוס ההתכנסות מתאים לצפוי).

ג. הורדת סדר: נסמן $u(x)=v(x)y(x)$ כאשר $y(x)$ הוא הפתרון שמצאנו בסעיף א'. נציב במשוואה ונקבל $(x^2-x)y(x)v''(x)+\left(2(x^2-x)y'(x)+(3x-1)y(x)\right)v'(x)=0$. נציב $y(x)=\frac{1}{1-x}$ ונקבל $-xv''-v'=0$. זוהי משוואה בת הפרדה עבור v' ופתרונה הוא $v'(x)=\frac{C}{x}$ כלומר $v(x)=C\ln x+D$. כלומר אפשר לבחור $C=1, D=0$ ולקבל $u(x)=\ln x\cdot y(x)$. (D תורם כפולה של הפתרון $y(x)$ ולכן אפשר לבחור אותו כרצוננו).

לפי משפט פרובניוס, צורתו של הפתרון השני צריכה להיות $u(x)=y(x)\ln x+\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$, והיא אכן כזו (כל מקדמי הטור הם אפס).

שאלה 3

א. נכתוב בצורה קנונית: $w''+w'-\frac{2}{z^2}w=0$. הנקודה $x=0$ היא נקודה סינגולרית, והפונקציות $zp(z)=z, z^2q(z)=-2$ אנליטיות בנקודה זו, לכן זוהי נקודה סינגולרית-רגולרית.

ב. משוואת האינדקס היא $r(r-1)-2=0$ והשורשים שלה הם $r_1=2, r_2=-1$ ולכן לפי משפט פרובניוס קיים פתרון מהצורה $w_1(z)=z^2\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. נציב במשוואה:

$z^2\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+2)(n+1)z^n + z^2\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+2)z^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+2} = 0$. נסדר:

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+2)(n+1)z^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+2)z^{n+3} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+2} = 0$. הזזת אינדקס:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+2)(n+1) z^{n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} (n+1) z^{n+2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+2} = 0$$

השוואת מקדמים: עבור $n=0$, $c_0 \cdot 2 \cdot 1 - 2c_0 = 0$, כלומר אין מגבלה על c_0.

עבור $n \ge 1$: $c_n (n+2)(n+1) + c_{n-1}(n+1) - 2c_n = 0$ כלומר $c_n = -\frac{n+1}{n(n+3)} c_{n-1}$. באינדוקציה

נקבל $c_n = (-1)^n (n+1) \frac{3!}{(n+3)!} c_0$ (החלק של $\frac{n+1}{n}$ הוא מכפלה טלסקופית).

הפתרון הוא $w_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \frac{6}{(n+3)!} z^{n+2}$.

ג. צורת הפתרון השני צריכה להיות $w_2(z) = Cw_1(z)\ln z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n-1}$ כאשר $b_0 \neq 0$ ו- C הוא קבוע כלשהו שיכול להיות גם אפס (לכן אין סתירה אם אין ביטוי לוגריתמי). נוכיח כי אכן קיים פתרון עם $C=0$, כלומר ללא פונקציה לוגריתמית, על ידי כך שננסה להציב $w_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n-1}$ ונראה כי קיים פתרון.

הצבה: $z^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n (n-1)(n-2) z^{n-3} + z^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n (n-1) z^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n-1} = 0$. נסדר:

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (n-1)(n-2) z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (n-1) z^{n} - 2\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n-1} = 0$. הזזת אינדקס:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (n-1)(n-2) z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} (n-2) z^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n-1} = 0$$

השוואת מקדמים:

עבור $n=0$: $b_0(-2)(-1) - 2b_0 = 0$ כלומר אין מגבלה על b_0.

עבור $n \ge 1$: $b_n (n-1)(n-2) + b_{n-1}(n-2) - b_n = 0$ כלומר $n(n-3)b_n + (n-2)b_{n-1} = 0$.

לכל $n \neq 3$ נקבל $b_n = -\frac{n-2}{n(n-3)} b_{n-1}$. עבור $n=3$ נקבל $b_2 = 0$ ואפשר לבחור את b_3 ללא הגבלה.

נשים לב כי נוסחת הנסיגה עבור b_n היא אותה נוסחה עבור c_{n-3}. כלומר בבחירת $b_3 = c_0$ נקבל $z^{-1}\sum_{n=3}^{\infty} b_n z^n = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ולכן התרומה של b_3 היא כפולה בסקלר של הפתרון $w_1(z)$, ואפשר לבחור את b_3 שרירותית, כולל הבחירה $b_3 = 0$. נישאר עם $b_0, b_1 = -\frac{1}{2} b_0, b_2 = 0$ והפתרון $w_2(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2}$.

שאלה 4

א. נפתור את השאלה בהנחה שהנתון צריך להיות $q_0=\lim_{z\to 0} z^2 q(z)\neq 0$ (ולא רק $q(0)\neq 0$).

לפי ההנחה, הפונקציות $zp(z), z^2q(z)$ אנליטיות ב-$z=0$.

הנגזרת של פונקציה אנליטית היא פונקציה אנליטית. לכן $(zp)'=p+zp'$ אנליטית ב-$z=0$, לכן גם $z(zp)'=zp+z^2p'$ אנליטית, לכן גם ההפרש $z^2p'=z(zp)'-zp$ פונקציה אנליטית ב-$z=0$.

בדומה, $z(z^2q)'=2z^2q+z^3q'$ אנליטית, לכן גם z^3q' אנליטית, לכן גם המנה $\frac{zq'}{q}=\frac{z^3q'}{z^2q}$ (לשים לב שהמכנה לא מתאפס ב-$z=0$).

בסכ"ה נקבל כי $z\left(p-\frac{q'}{q}\right)$ ו-$z^2\left(p'-p\frac{q'}{q}+q\right)$ אנליטיות ב-$z=0$, כלומר $z=0$ נקודה רגולרית או סינגולרית-רגולרית של המשוואה (**).

ב. אם $y(z)$ פתרון של המשוואה (*), אז מגזירת שני אגפי המשוואה נקבל $y^{(3)}=-py''-(p'+q)y'-q'y$. נציב y' באגף שמאל של (**) ונקבל:

$$y^{(3)}+\left(p-\frac{q'}{q}\right)y''+\left(p'-\frac{pq'}{q}+q\right)y'=-py''-(p'+q)y'-q'y+\left(p-\frac{q'}{q}\right)y''+\left(p'-\frac{pq'}{q}+q\right)y'=$$

$$=-\frac{q'}{q}y''-\frac{pq'}{q}y'-q'y=-\frac{q'}{q}\left(y''+py'+qy\right)=0$$

כאשר השיוויון האחרון הוא פשוט המשוואה (*).

הנגזרות של פתרונות בלתי תלויים הן בלתי תלויות, אלא אם כן הפתרונות נבדלים בקבוע. אם הפתרונות היו נבדלים בקבוע, אז פונקציה קבועה (שאינה אפס) היתה פתרון של המשוואה (*), אבל אז היינו מקבלים $q(z)\equiv 0$ בסתירה לנתון.

שאלה 5

א. עבור מד"ר לינארית מסדר שני במקדמים קבועים מתקיים $p(z)\equiv\bar{p}, q(z)\equiv\bar{q}$ ולכן במשוואה המתאימה עבור ξ נקבל $P(\xi)=\frac{2}{\xi}-\frac{1}{\xi^2}\bar{p}$, $Q(\xi)=\frac{1}{\xi^4}\bar{q}$. לכן הנקודה $\xi=0$ היא נקודה סינגולרית (לא רגולרית) של המשוואה $Y''+PY'+QY=0$, לכן ∞ נקודה סינגולרית של המשוואה $y''+\bar{p}y'+\bar{q}y=0$.

ב. כדי ש-∞ תהיה נקודה רגולרית צריך להתקיים ש-$P(\xi),Q(\xi)$ אנליטיות ב-0.

כדי ש- $Q(\xi)=\frac{1}{\xi^4}q\left(\frac{1}{\xi}\right)$ תהיה אנליטית ב- $\xi=0$, לפונקציה $q\left(\frac{1}{\xi}\right)$ צריך להיות שורש מסדר 4 ב- $\xi=0$. כלומר ל- $q(z)$ צריך להיות שורש מסדר 4 לפחות ב- ∞, לכן q היא מהצורה $q(z)=\sum_{n=4}^{\infty}c_n z^{-n}$.

כדי ש- $P(\xi)=\frac{2}{\xi}-\frac{1}{\xi^2}p\left(\frac{1}{\xi}\right)$ תהיה אנליטית, לפונקציה $p\left(\frac{1}{\xi}\right)$ צריך להיות שורש מסדר 1 ב- $\xi=0$, והמקדם של ξ^1 צריך להיות בדיוק 2, כלומר $p(z)=2z^{-1}+\sum_{n=2}^{\infty}d_n z^{-n}$.

ג. משוואת בסל: $x^2y''+xy'+\left(x^2-\alpha^2\right)y=0$, כלומר $p(x)=\frac{1}{x}$, $q(x)=1-\frac{\alpha^2}{x^2}$.

נחשב את מקדמי המשוואה בהחלפת משתנה: $P(\xi)=\frac{2}{\xi}-\frac{1}{\xi^2}p\left(\frac{1}{\xi}\right)=\frac{2}{\xi}-\frac{1}{\xi^2}\cdot\xi=\frac{1}{\xi}$,

$Q(\xi)=\frac{1}{\xi^4}q\left(\frac{1}{\xi}\right)=\frac{1}{\xi^4}\left(1-\alpha^2\xi^2\right)$.

הפונקציה $\xi P(\xi)=1$ אנליטית ב- $\xi=0$, אבל $\xi^2Q(\xi)=\frac{1}{\xi^2}\left(1-\alpha^2\xi^2\right)$ אינה אנליטית ב- $\xi=0$ ולכן ∞ נקודה סינגולרית לא רגולרית של משוואת בסל.

ד. אם $z=0$ נקודה סינגולרית רגולרית, אז יש פונקציות אנליטיות $f(z),g(z)$ כך ש- $p(z)=\frac{1}{z}f(z)$, $q(z)=\frac{1}{z^2}g(z)$.

אם ∞ נקודה סינגולרית רגולרית, אז ניתן לראות (בדומה לסעיף ב) כי ל- $p(z)$ יש שורש מסדר 1 לפחות ב- ∞, כלומר ל- $p\left(\frac{1}{z}\right)=zf\left(\frac{1}{z}\right)$ יש שורש מסדר 1 לפחות ב- $z=0$. לכן $\frac{1}{z}p\left(\frac{1}{z}\right)=f\left(\frac{1}{z}\right)$ אנליטית ב- $z=0$.

בפרט, הפונקציה $f\left(\frac{1}{z}\right)$ חסומה בעיגול נקוב ברדיוס $R>0$ סביב $z=0$ ויש לה גבול ב- $z=0$. לכן $f(z)$ חסומה מחוץ לעיגול ברדיוס $\frac{1}{R}$. כמו כן ראינו כי $f(z)$ אנליטית ב- $z=0$ ולכן היא חסומה בעיגול הסגור ברדיוס $\frac{1}{R}$. כלומר $f(z)$ פונקציה חסומה.

כיוון שלמשוואה יש רק שתי נקודות סינגולריות, ב-$0,\infty$, הפונקציה $p(z)=\frac{1}{z}f(z)$ אנליטית בכל $z\neq 0$ ולכן גם $f(z)$ אנליטית בכל $z\neq 0$. ראינו לעיל שהיא אנליטית גם ב-$z=0$, כלומר זוהי פונקציה שלמה.

לפי משפט ליוביל, f היא פונקציה קבועה.

באופן דומה עבור g: ל-$q\left(\frac{1}{z}\right)=z^2g\left(\frac{1}{z}\right)$ יש שורש מסדר 2 לפחות ב-$z=0$ ולכן $g\left(\frac{1}{z}\right)$ אנליטית ב-$z=0$. נמשיך כמו קודם ונקבל כי g שלמה וחסומה ולכן קבועה.

קיבלנו כי $p=\frac{\alpha}{z},q=\frac{\beta}{z^2}$ עבור α,β קבועים, לכן המשוואה היא משוואת אוילר.