מד"ר 2 2019 – פתרון ממ"ן 12

שאלה 1

א. נחשב פולינום אופייני ונקבל $\lambda^2(1-\lambda)$, כלומר הערכים העצמיים הם 1 בריבוי 1 ו- 0 בריבוי 2, ולכן מטריצת ג'ורדן המתאימה היא $J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

לכל $n\geq 2$ מתקיים $J^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ולכן $e^{tJ}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nJ^n}{n!}=I+tJ+\begin{pmatrix}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n}{n!}&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t&0&0\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}$. מתקיים $e^{tA}=Pe^{tJ}P^{-1}$ כאשר P היא המטריצה כך ש- $J=P^{-1}AP$, כלומר $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$.

ב. e^{tA} היא מטריצה יסודית עבור המערכת, ולכן הפתרון לבעיית ההתחלה הוא $x(t)=e^{tA}x_0$.

(לפי משפט 3.3.5 רואים כי e^{tA} אינה חסומה ב- $[0,\infty)$, ולכן יש לבדוק האם עבור ערכים מסוימים של x_0 אפשר לקבל פתרון חסום)

עבור $x_0=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ כך ש- $\alpha=0$ מתקיים $x(t)=Pe^{tJ}P^{-1}x_0=Pe^{tJ}\begin{pmatrix}0\\\beta+\gamma\\\gamma\end{pmatrix}$ ואז גם $e^{tJ}\begin{pmatrix}0\\\beta+\gamma\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\beta+\gamma\\\gamma\end{pmatrix}$. עבור $\gamma=0$ נקבל $e^{tJ}\begin{pmatrix}0\\\beta\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\beta\\0\end{pmatrix}$ ואז $x(t)=P\begin{pmatrix}0\\\beta\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\beta\\0\end{pmatrix}$ כלומר הפתרון קבוע ובפרט חסום. כלומר עבור $x_0=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ המקיים $\alpha=\gamma=0$, הפתרון לבעיית ההתחלה חסום לכל t.

עבור $x_0=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ נקבל $x(t)=\begin{pmatrix}0\\2+t\\-1\end{pmatrix}$ ועבור $x_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ נקבל $x(t)=\begin{pmatrix}e^t\\-2-t\\e^t+1\end{pmatrix}$ ופתרונות אלו אינם חסומים. מלינאריות, עבור $x_0=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ נקבל שהפתרון הוא $x(t)=\alpha\begin{pmatrix}e^t\\-2-t\\e^t+1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\2+t\\-1\end{pmatrix}$. כאשר $\alpha\neq 0$ הרכיב הראשון אינו חסום כאשר $t\geq 0$.

כאשר $\gamma\neq 0$ אז הרכיב השני הוא $(\gamma-\alpha)t+const$ והוא אינו חסום אלא אם כן $\gamma=\alpha$ אולם אז בהכרח גם $\alpha\neq 0$ ולכן הרכיב הראשון אינו חסום.

כלומר בסכ"ה קיבלנו כי הפתרון חסום בתחום $t\geq 0$ אםם $\alpha=\gamma=0$.

ג. עבור $t\leq 0$ הפונקציה e^t חסומה. לכן הפתרון $x(t)=\alpha\begin{pmatrix}e^t\\-2-t\\e^t+1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\2+t\\-1\end{pmatrix}$ חסום אםם הרכיב השני שלו חסום, כלומר אםם $\alpha=\gamma$.

ד. לפי וריאציה של פרמטרים: נסמן $g(t)=\begin{pmatrix}t\\0\\t\end{pmatrix}$, ונזכור כי $\left(e^{tA}\right)^{-1}=e^{-tA}$, ולכן הפתרון לבעיית ההתחלה הנתונה הוא $x(t)=\int_0^t e^{tA}e^{-sA}g(s)\,ds=\int_0^t e^{sA}g(t-s)\,ds$. נחשב ונקבל $x(t)=\left(\int_0^t e^s(t-s)\,ds\right)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\left(e^t-t-1\right)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

שאלה 2

א. e^{tA} מטריצה יסודית של המערכת $x'=Ax$. לכן מווריאציה של פרמטרים נקבל כי הפתרון הכללי למערכת $x'=Ax+g(t)$ הוא $x(t)=e^{tA}x(0)+\int_0^t e^{tA}e^{-sA}g(s)\,ds=e^{tA}x(0)+\int_0^t e^{sA}g(t-s)\,ds$

ב. נשים לב שאפשר להתייחס לפונקציה הקבועה A כפונקציה מחזורית עם מחזור T. לכן לפי האלטרנטיבה של פרדהולם, למערכת $x' = Ax + g(t)$ קיים פתרון עם מחזור T אסם מתקיים

$\int_0^T y^*(t) g(t) dt = 0$ לכל פתרון **מחזורי** של המערכת הצמודה $y' = -A^* y$.

אבל פתרונות המערכת הצמודה הם $e^{-A^* t}\xi$ (כאשר $\xi \in \mathbb{R}^n$ קבוע).

הערכים העצמיים של A^* הם הצמודים של הערכים העצמיים של A. לכן לכולם יש חלק ממשי שלילי. לכן לכל ערכים העצמיים של $-A^*$ יש חלק ממשי חיובי. כמסקנה ממשפט 3.3.6, הפתרון הכללי של $y' = -A^* y$ הוא מהצורה $y(t) = \sum_j p_j(t) e^{\lambda_j t}$ כאשר הסכום הוא על הע״ע λ_j ו-$p_j(t)$ וקטור שרכיביו פולינומים. כיוון שהחלק הממשי של כל λ_j חיובי, פתרונות אלו אינם מחזוריים.

כלומר התנאי של האלטרנטיבה של פרדהולם מתקיים באופן ריק, לכן קיים פתרון מחזורי, אותו נסמן φ^*.

נוכיח כי לכל שני פתרונות φ, ψ של המערכת מתקיים $\lim_{t\to\infty}(\varphi(t) - \psi(t)) = 0$. מכאן ינבע הדרוש עבור המקרה ש-$\psi = \varphi^*$ וכן ינבע שהפתרון המחזורי הוא יחיד (כי אם ההפרש בין פתרונות מחזוריים הוא $\varepsilon > 0$ בנקודה כלשהי t, אז הוא שווה ל-ε לכל $t + nT$ ולכן לא מתכנס לאפס באינסוף).

לפי הנוסחה של הפתרון הכללי שמצאנו בסעיף א, מתקיים $\varphi(t) - \psi(t) = e^{At}(\varphi(0) - \psi(0))$.

כיוון שכל הערכים העצמיים של A בעלי חלק ממשי שלילי, מתקיים $\lim_{t\to\infty} e^{tA} = 0$.

שאלה 3

פתרונות המשוואה $x' = Ax$ הם מהצורה $c_1 \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}$ כאשר $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ פתרון של $x' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} x$ ו-$\begin{pmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}$ פתרון של $x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x$.

נשתמש במה שידוע לנו על צורה של פתרונות של מערכות הומוגניות במקדמים קבועים במישור.

הערכים העצמיים של המערכת $x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x$ הם $\pm i$, לכן צורת הפתרונות היא ״מרכז״, וכולם חסומים. לכן נותר לבדוק מתי החלק השני של הפתרון חסום.

הערכים העצמיים של המערכת $x' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} x$ הם $a \pm ib$.

עבור $a = 0, b = 0$ כל הפתרונות קבועים ובפרט חסומים.

עבור $a = 0, b \neq 0$ הפתרונות הם מהצורה "מרכז".

עבור $a \neq 0, b \neq 0$ הפתרונות הם מהצורה "ספירלה", ואינם חסומים.

עבור $a \neq 0, b = 0$ המטריצה היא סקלרית – ערך עצמי אחד בריבוב 2, לכן הפתרונות הם מהצורה "צומת" ואינם חסומים.

לסיכום, הפתרונות חסומים על כל הישר אםם $a = 0$.

שאלה 4

א. הפתרון הכללי של המערכת הוא מהצורה $x(t) = \sum_{j=1}^{s} p_j(t) e^{\rho_j t}$ כאשר $\rho_1, \ldots, \rho_s$ הם המעריכים האופייניים של המערכת (במקרה זה $s \leq 2$) ו- $p_j(t)$ פונקציה וקטורית שרכיביה הם "פולינומים" במקדמים מחזוריים.

הפתרון הנתון הוא $e^t \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$, כלומר כדי להתאים לצורה של הפתרון הכללי, בהכרח אחד המעריכים האופייניים הוא 1, והכופל האופייני המתאים הוא e^{π}.

נמצא את שאר המעריכים האופייניים (אם יש). תהי $\Phi(t)$ מטריצה יסודית של המערכת ונניח בה"כ כי $\Phi(0) = I$ (אם זה אינו המצב נתבונן במטריצה $\Phi(t)\Phi^{-1}(0)$ שגם היא מטריצה יסודית). אנו יודעים כי במצב זה, הכופלים האופייניים של המערכת הם הערכים העצמיים של $\Phi(\pi)$. הדטרמיננטה של $\Phi(\pi)$ היא מכפלת הערכים העצמיים שלה. נסמן $W(t) = \det \Phi(t)$, זהו הוורנסקיאן של המערכת.

עבור מטריצה יסודית $\Phi(t)$ של מערכת לינארית הומוגנית במקדמים רציפים $x' = A(t)x$ אנו יודעים כי מתקיים $W(t) = W(0) \exp\left(\int_0^t \mathrm{tr} A(s)\, ds \right)$ (נוסחת ליוביל).

במערכת שלנו - $A(t) = \begin{pmatrix} -\sin 2t & \cos 2t - 1 \\ \cos 2t + 1 & \sin 2t \end{pmatrix}$, כלומר $\mathrm{tr}(A(t)) \equiv 0$ ולכן $W(t)$ קבוע. בפרט $W(\pi) = W(0) = \det I = 1$.

לסיכום: ידוע לנו כי e^{π} הוא כופל אופייני, כי יש לכל היותר שני כופלים אופייניים שונים, וכי מכפלתם היא 1, לכן הכופלים האופייניים של המערכת הם $e^{\pi}, e^{-\pi}$.

ב. תהי $\Phi(t)$ מטריצה יסודית של המערכת, ונסמן $W(t)=\det\Phi(t)$. לפי נוסחת ליוביל, $W(t)=W(1)\exp\left(\int_1^t \mathrm{tr}A(s)\,ds\right)$. אם האינטגרל בתוך הסוגריים אינו חסום, אז גם $W(t)$ לא חסומה.

פתרון של המשוואה הוא מהצורה $x(t)=\Phi(t)\xi$ כאשר ξ וקטור קבוע. אם כל הפתרונות חסומים ב-$[1,\infty)$, אז בפרט כל עמודות המטריצה חסומות ב-$[1,\infty)$ ולכן כל קואורדינטה של המטריצה חסומה שם. אולם אז גם $W(t)$ חסומה (סכום סופי של מכפלות סופיות של הקואורדינטות). לכן בהנחות השאלה, יש פתרון שאינו חסום.

שאלה 5

א. נגדיר פונקציה $f(t)=e^{at}\left[\cosh(\Delta t)I+\frac{\sinh(\Delta t)}{\Delta}\begin{pmatrix} d & b \\ b & -d\end{pmatrix}\right]$ (כלומר זוהי הפונקציה המתקבלת מהכפלת כל אחד מהפרמטרים a,b,c,d בביטוי הנתון בשאלה ב-t. נתבונן ב-$t\in[0,\infty)$).

נוכיח כי פונקציה זו מקיימת את בעיית ההתחלה $f'=Af$, $f(0)=I$ ומכך ינבע (מיחידות הפתרון) כי $f(t)=e^{tA}$ ובפרט $f(1) = e^A$ שזה בדיוק מה שצריך להוכיח.

נחשב: $f'(t)=e^{at}\left[af(t)+\Delta\sinh(\Delta t)I+\cosh(\Delta t)\begin{pmatrix} d & b \\ c & -d\end{pmatrix}\right]$

$$Af(t)=e^{at}\left[\cosh(\Delta t)\begin{pmatrix} a+d & b \\ c & a-d\end{pmatrix}+\frac{\sinh(\Delta t)}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta^2+ad & ab \\ ac & \Delta^2-ad\end{pmatrix}\right].$$

פתיחת סוגריים והשוואה מראה כי אכן מתקיימת המשוואה $f'=Af$, וכן מתקיים תנאי ההתחלה.

ב. עבור $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4\end{pmatrix}$, $a=3, d=-1$ כלומר $\Delta=2\sqrt{2}$ ועכשיו אפשר להציב ולחשב.

ג. אם A היא מטריצת ג'ורדן אז היא מהצורה $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ או מהצורה $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$.

במקרה הראשון $d=\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2)$ ולכן $\Delta=\frac{1}{2}|\lambda_1-\lambda_2|=|d|$. נציב ונקבל

$$e^A=e^a\left[\cosh(|d|)I+\frac{\sinh(|d|)}{|d|}\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -d\end{pmatrix}\right]=e^a\begin{pmatrix} \cosh(d)+\sinh(d) & 0 \\ 0 & \cosh(d)-\sinh(d)\end{pmatrix}=e^a\begin{pmatrix} e^d & 0 \\ 0 & e^{-d}\end{pmatrix}$$

(עשינו כאן שימוש בעובדה ש- $\cosh$ פונקציה זוגית ו- $\sinh$ פונקציה אי-זוגית). נשים לב שקיבלנו בדיוק את $\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$, שזו התוצאה הצפויה עבור מטריצה אלכסונית.

במקרה השני, $d=\Delta=0$ ונקבל $e^A=e^\lambda\left[I+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]=e^\lambda\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, וגם זו התוצאה הצפויה עבור בלוק ג'ורדן 2×2.

ד. נבדוק האם יתכן $e^A=\begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ עבור $\alpha,\beta>0$ ממשיים.. לפי הנוסחה שהוכחנו בסעיף א', הקואורדינטה ה-$(1,2)$ של e^A היא $e^a\dfrac{\sinh(\Delta)}{\Delta}b$ ולכן היא מתאפסת אסם $b=0$. באופן דומה גם $c=0$. כלומר נקבל ש- e^A אלכסונית אסם A עצמה אלכסונית. אבל אז כפי שראינו בסעיף ג', $e^A=\begin{pmatrix} e^{a+d} & 0 \\ 0 & e^{a-d} \end{pmatrix}$ כלומר על האלכסון מופיעים מספרים חיוביים בלבד. לכן לא קיימת מטריצה ממשית A המקיימת את הדרוש.

שאלה 6

א. השיוויון הראשון שמתבקשים להוכיח הוא פשוט שימוש בכלל שרשרת ובמשפט היסודי של החדו"א. אם נסמן $\Phi(t)=\exp\left(A\int_0^t a(s)ds\right)$ ונציב בשיוויון הנ"ל, נקבל $\frac{d}{dt}\Phi(t)=a(t)A\Phi(t)$ וזה בדיוק אומר שהמטריצה $\Phi(t)$ היא פתרון מטריציוני של המשוואה $x'=a(t)Ax$. כדי להסיק שזוהי מטריצה יסודית מספיק להוכיח כי היא הפיכה לכל t. אבל זה נכון לכל מטריצה מהצורה e^B.

ב. המטריצה $\Phi(t)$ שמצאנו בסעיף א' מקיימת $\Phi(0)=I$ ולכן הכופלים האופייניים של המערכת הם הערכים העצמיים של $\Phi(T)=\exp\left(A\int_0^T a(s)ds\right)$. הערכים העצמיים של מטריצה מהצורה e^B הם האקספוננטים של הערכים העצמיים של המטריצה B. לכן אם $\alpha=\int_0^T a(s)ds$, ו- λ_1,λ_2 הערכים העצמיים של A, אז המעריכים האופייניים של המערכת הם $\frac{1}{T}\alpha\lambda_1,\frac{1}{T}\alpha\lambda_2$ והכופלים האופייניים הם $e^{\alpha\lambda_1},e^{\alpha\lambda_2}$.

ג. הערכים העצמיים של $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ הם $0,4$. המחזור הוא $T=2\pi$. עבור $a(t)=\cos t$ נקבל $\alpha=0$ ולכן הכופל האופייני היחיד הוא 1 (ומעריך מתאים הוא 0). עבור $a(t)=3+\cos t$ נקבל $\alpha=6\pi$ ולכן המעריכים האופייניים הם $0,12$ והכופלים האופייניים הם $1,e^{24\pi}$.

ד. אם נכתוב $\Phi(t)=P(t)e^{tR}$ כאשר $P(t)$ מחזורית ו-R קבועה, אז אנו יודעים כי $R=\frac{1}{T}\log\left(\Phi^{-1}(0)\Phi(T)\right)$. במקרה שלנו $\Phi(0)=I$ ו-$\Phi(T)=\exp(\alpha A)$ ולכן $R=\frac{\alpha}{T}A=3A$.

במקרה הזה יש שני מעריכים אופייניים שונים והמערכת היא ממד 2, לכן נקבל כי הפתרון הכללי הוא מהצורה $P(t)\left[c_1q_1+c_2q_2e^{12t}\right]$ כאשר q_1,q_2 הם וקטורים עצמיים של R המתאימים לערכים העצמיים $0,12$ בהתאמה. כלומר, $q_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, q_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

נציב את תנאי ההתחלה $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=x(0)=P(0)\left[c_1q_1+c_2q_2\right]=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (השתמשנו כאן ב-$I=\Phi(0)=P(0)$) ונקבל $c_1=-\frac{1}{2}, c_2=\frac{1}{2}$.

עבור $t=2\pi n$ מתקיים $P(t)=P(0)=I$, כלומר נקבל $x(2\pi n)=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{24\pi n}$.