האוניברסיטה הפתוחה

20417

אלגוריתמים

חוברת הקורס אביב 2021ב

כתב: ד״ר אסף נוסבוים

פברואר 2021– סמסטר אביב – תשפ״א

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

אל הסטודנט

אני מקדם בברכה את הצטרפותך לקורס "**אלגוריתמים**".

בחוברת זו תמצא את לוח זמנים ופעילויות, תנאים לקבלת נקודות זכות ומטלות. תאריכי המפגשים בקורס יישלחו בהמשך. וודאו בבקשה שקראתם באתר הקורס את תאור המנהלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים. בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת: http://telem.openu.ac.il. מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library. ניתן לפנות אלי בשעות הקבלה הטלפונית (שתפורסם באתר החל מפתיחת הסמסטר 09-7781222), או במייל: assaf.nussbaum@gmail.com. לצורך בירורים אדמיניסטרטיביים נא לפנות לזמירה בטלפון: 09-7781220.

לתשומת לב הסטודנטים הלומדים בחו"ל:

למרות הריחוק הפיסי הגדול, נשתדל לשמור אתכם על קשרים הדוקים ולעמוד לרשותכם ככל האפשר.
הפרטים החיוניים על הקורס נכללים בחוברת הקורס וכן באתר הקורס.
מומלץ מאד להשתמש באתר הקורס ובכל אמצעי העזר שבו וכמובן לפנות אלינו במידת הצורך.

אני מאחל לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה ,

ד"ר אסף נוסבוים
מרכז הקורס

1.לוח זמנים ופעילויות (20417 /2021ב)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחייה	תאריך אחרון להגשת המטלה
1	05.03.2021-28.02.2021	פרקים 1,2		
2	12.03.2021-07.03.2021	פרק 3		
3	19.03.2021-14.03.2021	״		ממ״ן 11 19.03.2021
4	26.03.2021-21.03.2021	פרק 4		
5	02.04.2021-28.03.2021 (א-ו פסח)	״		
6	09.04.2021-04.04.2021 (ה יום הזכרון לשואה)			ממ״ן 12 09.04.2021
7	16.04.2021-11.04.2021 (ד יום הזיכרון, ה יום העצמאות)	פרק 5		
8	23.04.2021-18.04.2021	״		
9	30.04.2021-25.04.2021 (ו ל״ג בעומר)	״		ממ״ן 13 30.04.2021

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

לוח זמנים ופעילויות - המשך

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחייה	תאריך אחרון להגשת המטלה
10	07.05.2021-02.05.2021	פרק 6		
11	14.05.2021-09.05.2021	"		
12	21.05.2021-16.05.2021 (ב שבועות)	"		ממ"ן 14 21.05.2021
13	28.05.2021-23.05.2021	פרק 7		
14	04.06.2021-30.05.2021	"		
15	11.06.2021-06.06.2021	"		ממ"ן 15 11.06.2021

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

.

3. הנחיות כלליות להצגת אלגוריתמים כפתרון למטלה

א. חובה **<u>להוכיח נכונות</u>** בצורה מדויקת.

ב. חובה להציג ניתוח מדויק של **<u>זמן הריצה</u>**.

ג. חובה להציג את האלגוריתם היעיל ביותר שהצלחתם לפתח.

ד. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות **<u>הפעלה/תיקון</u>** של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה במקום לפתח אלגוריתם חדש לחלוטין.

ה. אסור לפתור תרגילים של פרק מוקדם באמצעות אלגוריתם שנלמד בפרק מאוחר. להלן פרוט הפרקים המתורגלים בכל מטלה:

ממ"ן	פרק בספר הלימוד
11	1,3 (שידוכים, קשירות בגרפים)
12	4 (חמדנות – בדגש על מסלולים/עצים מזעריים)
13	5 (הפרד ומשול – בדגש על התמרת פורייה)
14	6 (תכנון דינאמי)
15	7 (זרימה)

ניקוד המטלות

בקורס **<u>חובת הגשה</u>** של 3 מטלות מתוך 5. ככל שמוגשות יותר מטלות, כך עולה משקל המטלות בציון הסופי.

למען הלימוד, **<u>חשוב לפתור גם שאלות שאינכם מגישים</u>** לקבלת ציון.

לתשומת לבכם!

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן:

אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלות** בציון הנמוך ביותר, שציוניהן נמוכים מציון הבחינה (**עד שתי מטלות**), לא יילקחו בחשבון בעת שקלול הציון הסופי. זאת בתנאי שמטלות אלה **אינן חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו, מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

4. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

א. הגשת 3 מטלות לפחות.

ב. ציון של 60 לפחות בבחינת גמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: **20417, אלגוריתמים**

חומר הלימוד למטלה: **פרקים 1,3 בספר**

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 4%**

סמסטר: 2021ב **מועד הגשה: 19.3.2021**

יש להגיש **תשובות לשלוש** מבין השאלות 1,2,3,4

שאלה מס' 1 (33%)

<u>**בעיית השידוך היציב**</u>. פתרו את שאלה 1.6 בספר הקורס.

שאלה מס' 2 (33%)

<u>**הכוונת צלעות**</u>. הציגו אלגוריתם שמכריע, בהנתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, האם ניתן לכוון כל אחת מהצלעות, כך שבגרף המכוון שמתקבל, <u>**דרגת הכניסה**</u> של כל קדקוד תהיה <u>**גדולה מאפס**</u>. (לכל צלע $\{u,v\}\in E$ ניתן לבחור כיוון יחיד: (u,v) או לחלופין (v,u)). כשהתשובה חיובית, על האלגוריתם להחזיר הכוונה של הצלעות – המקיימת את הנדרש. נדרשת תשובה קצרה ומדויקת של <u>**עד 8 משפטים**</u>.

שאלה מס' 3 (33%)

<u>**מסלולים מזעריים דרך קדקודים מועדפים**</u>. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, צמד קדקודים $s\neq t\in V$, ותת-קבוצה של קדקודים מועדפים $U\subseteq V$, המקיימת $\varnothing\neq U\neq V$ וכן $s,t\notin U$.
לכל מסלול P בגרף נסמן ב- $\ell(P)$ את אורך המסלול (=מספר הצלעות במסלול), וב- $\#P(U)$ את מספרם של קדקודי U במסלול.

הציגו אלגוריתם למציאת מסלול מ- s ל- t, שמבקר ב- U <u>בדיוק פעמיים</u>, ושאורכו מזערי מבין כל המסלולים הללו. כלומר, האלגוריתם נדרש להחזיר מסלול מ- s ל- t כך ש- $\#P(U)=2$, וכך שאם ישנם מסלולים נוספים P' מ- s ל- t המקיימים $\#P'(U)=2$, אז $\ell(P')\geq\ell(P)$.

בשאלה זו מותרים מסלולים לא פשוטים, כלומר מותר למסלול לעבור דרך קדקוד מסוים, ואפילו דרך צלע מסוימת יותר מפעם אחת. למשל, נניח שהגרף הינו משולש מכוון $s\to t\to v\to s$ ללא שום קדקוד או צלע נוספת, ושהקבוצה המועדפת הינה $U=\{v\}$. אזי המסלול היחיד, ולכן גם המזערי, שמקיים $\#P(U)=2$ הינו המסלול הלא פשוט $s\to t\to v\to s\to t\to v\to s\to t$.

<u>הדרכה</u>: העזרו ברדוקציה לגרף אחר G'.

שאלה מס' 4 (33%)

__**בעיית הספיקות (2-SAT)**__. הגדרות: נוסחת __k-CNF__ היא נוסחה מהצורה $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_m$, כשלכל __פסוקית__ הצורה $\varphi_i = (z_{i,1} \vee z_{i,2} \vee ... \vee z_{i,k})$, וכל $z_{i,j}$ הינו אחד מהליטרלים $x_1,...,x_n,\neg x_1,...,\neg x_n$. למשל $\varphi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$ הינה נוסחת 2-CNF עם $k=2$ ליטרלים בכל פסוקית, $n=3$ משתנים, ו- $m=4$ פסוקיות. לעומתה, $\varphi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee \neg x_5)$ הינה נוסחת 3-CNF עם $k=3$ ליטרלים בכל פסוקית, $n=5$ משתנים, ו- $m=2$ פסוקיות. __השמה__ הינה פונקציה שמתאימה לכל משתנה x_i ערך "אמת" T או "שקר" F. בהינתן השמה מסוימת, אזי הליטרל x_i מסופק אם ההשמה מקיימת $x_i \leftarrow T$, והליטרל $\neg x_i$ מסופק אם $x_i \leftarrow F$. הפסוקית $\varphi_i = (z_{i,1} \vee z_{i,2} \vee ... \vee z_{i,k})$ מסופקת, אם __לפחות__ אחד מהליטרלים שבה $z_{i,1}, z_{i,2},...,z_{i,k}$ מסופק. הנוסחא כולה $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_m$ מסופקת, אם __כל__ הפסוקיות $\varphi_1,..,\varphi_m$ מסופקות. הנוסחא נקראת __ספיקה__, אם לפחות אחת מבין 2^n ההשמות האפשריות מספקת אותה.

הציגו אלגוריתם יעיל, שבהינתן נוסחה φ בצורת 2-CNF מוצא לה השמה מספקת, ואם אין השמה כזו - מדווח שהנוסחה איננה ספיקה. הדרכה: העזרו בגרף מכוון G שמותאם לנוסחה φ .

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: **20417, אלגוריתמים**
חומר הלימוד למטלה: **פרק 4 בספר**
מספר השאלות: **4** **משקל המטלה:** **4%**
סמסטר: **2021ב** **מועד הגשה:** **9.4.2021**

יש להגיש תשובות ל**שאלות 1,2,4 בלבד**. שאלה 3 היא לתרגול נוסף ואיננה להגשה

בכל השאלות בקורס אודות גרפים ממושקלים: **משקל=מחיר=אורך** של מסלול מוגדר כסכום משקלי הצלעות במסלול (ולא כמספרן של הצלעות במסלול). בהתאם לכך, **המרחק** מקדקוד א' לקדקוד ב' מוגדר כמשקל המזערי של מסלול מ-א' ל-ב' (או כאינסוף אם אין בכלל מסלול כזה).

שאלה מס' 1 (40%)

מסלולים כמעט מזעריים. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם משקלים חיוביים $w(e)>0$ לכל אחת מהצלעות $e\in E$ ועם קדקוד מקור s. נתון גם שלכל קדקוד v קיים מסלול $P_{s,v}$ מ- s ל- v בגרף. כרגיל, משקלו של מסלול מוגדר כסכום משקלי הצלעות $w(P)=\sum_{e\in P} w(e)$, ומסלול $P_{s,v}$ נקרא מזערי אם מתקיים $w(P_{s,v})\le w(P'_{s,v})$ עבור כל מסלול אחר $P'_{s,v}$. הגדרות חדשות: מסלול $P_{s,v}$ ייקרא **כמעט מזערי**, אם משקלו קטן ביותר מבין כל המסלולים הלא מזעריים מ- s ל- v. כלומר, אם $w_1<w_2<\ldots<w_k$ הינה רשימת כל המשקלים האפשריים של מסלולים מ- s ל- v, אז למסלול מזערי מתקיים $w(P_{s,v})=w_1$ ולמסלול כמעט מזערי מתקיים $w(P_{s,v})=w_2$. צלע $e=(u,v)\in E$ תיקרא **שימושית** אם היא צלע אחרונה באיזשהו מסלול מזערי $P_{s,v}$.

א. הוכיחו שאם כל הצלעות ב- $P_{s,v}$ שימושיות, אז $P_{s,v}$ מסלול מזערי.

ב. הוכיחו שאם יש צלע לא שימושית ב- $P_{s,v}$ (אחת או יותר), אז $P_{s,v}$ איננו מסלול מזערי.

ג. הוכיחו שאם $P_{s,v}$ מסלול כמעט מזערי אז מופיעה בו צלע לא שימושית אחת ויחידה.

ד. תהי $e=(u_1,u_2)$ הצלע הלא שימושית היחידה במסלול כמעט מזערי $P_{s,v}$. הוכיחו שהרישא של $P_{s,v}$ מ- s ל- u_1 מהווה מסלול מזערי, וגם שהסיפא של $P_{s,v}$ מ- u_2 ל- v מהווה מסלול מזערי. (המשך בעמוד הבא).

ה. הציגו בעזרת הסעיפים הקודמים אלגוריתם למציאת מסלול כמעט מזערי מקדקוד מקור נתון s לקדקוד יעד נתון t, "בזמן" $\Theta(|E|\cdot\log|V|)$. (בחישוב זמן הריצה מניחים שחיבור, חיסור והשוואה של משקלי צלעות – כולן פעולות אלמנטריות שמתבצעות בזמן $\Theta(1)$).

שאלה מס׳ 2 (40%)

__תיקון עץ פורש שהושמטה ממנו צלע__. נתון עץ פורש מזערי T של גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$ עם משקלים אי-שליליים $c(e)\geq 0$ לכל אחת מהצלעות $e\in E$. תהי $e^*\in T$ צלע בעץ, ויהי $G'=\left(V,E'\right)$ הגרף, המתקבל מ-G לאחר השמטתה של e^* (כלומר, $E'=E\setminus\{e^*\}$).
נתון כי G' קשיר. הציגו אלגוריתם שרץ "בזמן" $O(|E|)$ ומתקן את T, כך שיתקבל ממנו עץ פורש מזערי T' עבור G'. (הערות: (א) בדומה לאלגוריתמים חמדניים רבים **__עיקר הקושי__** (ולכן גם מרבית הניקוד) הוא **__בהוכחת הנכונות__** ולא בניסוח האלגוריתם. (ב) במסגרת ניתוח זמן הריצה, הניחו כי כל פעולה אלמנטרית על המשקלים, כמו חיבור או השוואה, מתבצעת בזמן $\Theta(1)$).

שאלה מס׳ 3 (לא להגשה)

__בעיית הספיקות (3-SAT) – כשלון החמדנות__. הפורמט של נוסחת 3-CNF הוגדר כזכור במסגרת ממ"ן 1. נביט באלגוריתם החמדן הבא למציאת השמה מספקת לנוסחת 3-CNF שרירותית φ.
האלגוריתם סורק את כל המשתנים $x_1,\ldots,x_n$ בזה אחר זה, ולכל משתנה x_i בוחר השמה, שממקסמת את מספר הפסוקיות המסופקות **__החדשות__**. (למשל, כשהאלגוריתם מטפל במשתנה x_2, בוחנים רק את הפסוקיות שטרם סופקו ע"י ההשמה שנקבעה כבר למשתנה x_1. אם ב-5 מהפסוקיות הללו מופיע הליטרל x_2, וב-6 מהפסוקיות הללו מופיע הליטרל $\neg x_2$, אז מציבים $x_2\leftarrow F$, משום שכך יסופקו 6 פסוקיות חדשות במקום 5). הציגו נוסחת 3-CNF עליה האלגוריתם החמדן נכשל: הנוסחא ספיקה, אבל האלגוריתם מפיק כפלט השמה לא מספקת.

שאלה מס׳ 4 (20%)

__קידוד הופמן__. עץ מושרש T נקרא בינארי לחלוטין אם לכל קדקוד שלו שאינו עלה יש שני בנים. הוכיחו כי לכל עץ מושרש בינרי לחלוטין T בעל n עלים, קיימת סדרת שכיחויות $f_1,f_2,\ldots,f_n$ כך שאחד מעצי הופמן של הסדרה הוא T. (הבהרה: כזכור, השורש אף פעם אינו נחשב לעלה בעצים מושרשים. לכן הטענה חלה עבור $n\geq 2$ בלבד).

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: **20417, אלגוריתמים**

חומר הלימוד למטלה: **פרק 5 בספר**

מספר השאלות: **4** **משקל המטלה:** **4%**

סמסטר: **2021ב** **מועד הגשה:** **30.4.2021**

יש להגיש תשובות ל**שאלה 1**, ו**לשתיים מבין** שלוש השאלות **2,3,4**.

שאלה מס׳ 1 (30%)

<u>הרצת FFT</u>. (בשאלה זו סעיף א׳ כן להגשה, **וסעיף ב׳ לא להגשה**). נביט בפולינום $p(x)=x^3+2x^2-3x-1$ שדרגתו קטנה מ-4. רישמו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) עבור:

(א) הרצת FFT מסדר 4 (הרצת $FFT(\cdot,\omega_4)$) על מקדמי הפולינום.

(ב) הרצת INVERSE-FFT (הרצת $FFT(\cdot,(\omega_4)^{-1})$) על הערכים שהתקבלו בסעיף א׳.

שאלה מס׳ 2 (35%)

<u>כפל מספרים שלמים בגישת FFT</u>: כפל מספרים שלמים הינה בעיה אלגוריתמית בעלת חשיבות מעשית עליונה. לשם פשטות להלן נניח ששני המספרים המוכפלים שווי אורך (לשניהם ייצוג בינארי של n ביטים), ושניהם חיוביים. בתרגיל זה יוצגו עיקר הרכיבים באחד האלגוריתמים היעילים ביותר המוכרים כיום לכפל שלמים: <u>זמן הריצה</u> שלו הוא <u>$\Theta(n\log^2 n)$</u> בלבד. כזכור, אלגוריתם הכפל של **Karatsuba** מבוסס על פיצול הספרות של כל קלט לשני בלוקים שווי גודל, ורץ בזמן $\Theta(n^{\log_2 3})$. הציגו אלגוריתם משופר, שמחלק כל קלט ל-(n/k) בלוקים בגודל k. היעזרו באלגוריתם ה-FFT לפתרון תתי-הבעיות המתקבלות. הניחו לשם פשטות (וללא הצדקה), כי ההכפלות שמתבצעות במהלך הקריאות הרקורסיביות אינן מגדילות את אורכם של המספרים, ולכן ניתן לממש הכפלות אלו בצורה תמימה תוך ביצוע $\Theta(k^2)$ פעולות על ביטים. בחרו לבסוף את גודלם של הבלוקים להיות $k=\log n$.

שאלה מס' 3 (35%)

<u>כפל מטריצות ריבועיות (Strassen)</u>. כזכור, כפל של שתי מטריצות ריבועיות A, B מסדר $n \times n$ (מעל שדה שרירותי) מניב מטריצה $C = A \times B$ אף היא מסדר $n \times n$, המוגדרת ע"י הכלל

$$C_{i,j} = \sum_{1 \le k \le n} A_{i,k} \times B_{k,j} .$$

לכן **<u>מימוש ישיר</u>** של כפל מטריצות כרוך ב- $\Theta(n^3)$ פעולות אריתמטיות בסיסיות מעל השדה הנדון (כפל/חיבור/חיסור), ובפרט ב- $\Theta(n^3)$ פעולות כפל. בתרגיל זה נוכיח כי ניתן להכפיל מטריצות ריבועיות באמצעות $\underline{\Theta(n^{\log_2 7}) = O(n^{2.81})}$ פעולות אריתמטיות בסיסיות בלבד. פרטי ההוכחה מובאים להלן. נניח בה"כ כי n זוגי. נפרק כל מטריצה ל-4 תתי-מטריצות מסדר $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} .$$

וודאו (לא להגשה) כי מהגדרת כפל מטריצות מתקיים:

$$\begin{aligned} r &= a \times e + b \times f \\ s &= a \times g + b \times h \\ t &= c \times e + d \times f \\ u &= c \times g + d \times h \end{aligned}$$

כעת נגדיר:

$$\begin{aligned} P_1 &= a \times (g - h) \\ P_2 &= (a + b) \times h \\ P_3 &= (c + d) \times e \\ P_4 &= d \times (f - e) \\ P_5 &= (a + d) \times (e + h) \\ P_6 &= (b - d) \times (f + h) \\ P_7 &= (a - c) \times (e + g) \end{aligned}$$

(ב) וודאו (**<u>לא להגשה</u>**) כי חישוב המטריצות $P_1, \ldots, P_7$, כרוך ב-7 פעולות כפל בלבד (וכן מספר מצומצם של פעולות חיבור/חיסור) של מטריצות מסדר $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$.

(ג) וודאו (**<u>לא להגשה</u>**) כי מתקיים:

$$\begin{aligned} s &= P_1 + P_2 \\ t &= P_3 + P_4 \\ r &= P_4 + P_5 + P_6 - P_2 \\ u &= P_1 + P_5 - P_3 - P_7 \end{aligned}$$

(ד) הוכיחו (כן להגשה) כי מספר הפעולות האלמנטריות של האלגוריתם הוא $\Theta(n^{\log_2 7})$ בלבד.

שאלה מס' 4 (35%)

<u>חישוב כל הנגזרות של פולינום בנקודה</u>. מקובל לסמן ב- $f^{(k)}(x)$ את הנגזרת מסדר k של הפונקציה $f(x)$. למשל, $f^{(1)}(x)=f'(x)$, $f^{(2)}(x)=f''(x)$, $f^{(3)}(x)=f'''(x)$ וכן $f^{(0)}(x)=f(x)$. נתונים מקדמי הפולינום $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ ונתונה נקודה מסוימת x_0. הציגו אלגוריתם לחישוב ערכי כל הנגזרות $f^{(0)}(x_0),\ldots,f^{(n)}(x_0)$ באותה נקודה x_0, תוך ביצוע $\Theta(n\log n)$ פעולות אריתמטיות בסיסיות בלבד. (פעולה בסיסית = חיבור, חיסור, כפל, חילוק או השוואה של מספרים). למשל לפולינום מדרגה $n=4$ יש לחשב את הערכים הבאים:

$$\begin{array}{llllll}
f^{(0)}(x_0)= & a_0 & +a_1\cdot x_0 & +a_2\cdot(x_0)^2 & +a_3\cdot(x_0)^3 & +a_4\cdot(x_0)^4 \\
f^{(1)}(x_0)= & & +a_1 & +2a_2\cdot x_0 & +3a_3\cdot(x_0)^2 & +4a_4\cdot(x_0)^3 \\
f^{(2)}(x_0)= & & & 2a_2 & +2\cdot 3a_3\cdot x_0 & +3\cdot 4a_4\cdot(x_0)^2 \\
f^{(3)}(x_0)= & & & & 2\cdot 3a_3 & +2\cdot 3\cdot 4a_4\cdot(x_0) \\
f^{(4)}(x_0)= & & & & & 2\cdot 3\cdot 4a_4
\end{array}$$

נדרשת תשובה של **<u>4-5 שורות בלבד</u>**. נדרשת תשובה ש**<u>מבוססת על FFT</u>**. בפרט, לא יינתן ניקוד על האלגוריתם הטריוויאלי שמחשב בנפרד כל אחד מבין $\Theta(n^2)$ המחוברים. העזרו בתשובתכם בצמצום הסטנדרטי של עצרות:

$$\frac{m!}{\ell!}=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(m-1)\cdot m}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(\ell-1)\cdot\ell}=(\ell+1)\cdot(\ell+2)\cdot\ldots\cdot(m-1)\cdot m\,.$$

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: **20417, אלגוריתמים**

חומר הלימוד למטלה: **פרק 6 בספר**

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 4%**

סמסטר: 2021ב **מועד הגשה: 21.5.2021**

יש להגיש תשובות ל**שלוש מבין ארבע** השאלות 1,2,3,4

שאלה מס' 1 (33%)

<u>מסלולים מזעריים בשריג עם מחירים על הקודקודים</u>. נתון שריג ריבועי מסדר $n \times n$ עם מחירים אי-שליליים על קדקודים: אברי השריג הם נקודות מהצורה (i,j) כאשר $1 \le i,j \le n$, ולכל איבר מותאם מחיר $c(i,j) \ge 0$. הקואורדינטה הראשונה i מייצגת מיקום אופקי (ימינה / שמאלה) בשריג. לכן השכבה השמאלית ביותר מורכבת מהנקודות בהן $i=1$, והשכבה הימנית ביותר מהנקודות בהן $i=n$. הקואורדינטה השנייה j מייצגת מיקום אנכי (מעלה / מטה). בשריג מותרת תנועה רק בצעדים מהצורה: $(i,j) \to (i+1, j-1)$, או $(i,j) \to (i+1, j)$ או $(i,j) \to (i+1, j+1)$, כלומר, "ימינה ולמטה" או "ימינה" או "ימינה ולמעלה". הציגו אלגוריתם למציאת מסלול במחיר מזערי מהשכבה השמאלית ביותר לימנית ביותר, כשמחיר מסלול מוגדר כסכום מחירי הנקודות במסלול. על האלגוריתם לבצע $\Theta(n^2)$ פעולות אלמנטריות בלבד, כשפעולות אריתמטיות על המחירים, כמו חיבור, חיסור והשוואה, נחשבות לפעולות אלמנטריות.

שאלה מס' 2 (33%)

<u>בניית מגדל יציב מתיבות</u>. נתונה רשימה של n תיבות מלבניות: לכל $1 \le i \le n$ נתון האורך $\ell(i)$, הרוחב $w(i)$ והגובה $h(i)$ של התיבה מספר i. כל הרוחבים שונים, כל האורכים שונים וכל הגבהים שונים. ברצוננו לבנות מגדל בגובה מרבי באמצעות הנחה של תיבות זו מעל זו. המגדל נחשב יציב כאשר תיבה j מונחת רק מעל תיבה i שמקיימת $w(j) < w(i)$ וגם $\ell(j) < \ell(i)$. (כלומר כשמימדי הבסיס של התיבה התחתונה גדולים מאלו של העליונה). הציגו אלגוריתם תכנון דינאמי לבניית מגדל יציב בגובה מרבי. האלגוריתם נדרש לרוץ בזמן $\Theta(n^2)$. (פעולות חיבור, חיסור והשוואה של מימדים $\ell(i)$, $w(i)$, $h(i)$ נחשבות פעולות אלמנטרית שמתבצעת בזמן $\Theta(1)$). נדרשת תשובה של עד **<u>6-7 שורות</u>** בלבד.

שאלה מס' 3 (33%)

<u>**אינטרפולציה באמצעות תכנון דינאמי**</u>: פולינום ממשי מדרגה קטנה מ-n הינו ביטוי מהצורה $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$. המשפט היסודי של האלגברה קובע כי פולינום שכזה נקבע ביחידות לפי ערכו ב-n מקורות. למשל, כל קו ישר (כלומר כל פולינום מדרגה קטנה מ-2) נקבע ביחידות ע"י 2 נקודות דרכן הוא עובר. באופן כללי, בהינתן n נקודות $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ עבורן $x_i\neq x_j$ לכל $i\neq j$, קיים פולינום אחד ויחיד $p(x)$ מדרגה קטנה מ-n המקיים $p(x_1)=y_1,\ldots,p(x_n)=y_n$. פולינום זה נקרא פולינום האינטרפולציה (של הנקודות הנתונות). בבעיית האינטרפולציה נתונות הנקודות $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ המקיימות $x_i\neq x_j$, ויש לחשב את המקדמים $a_0,\ldots,a_{n-1}$ של פולינום האינטרפולציה.

(א) לכל $i\leq j$ נסמן ב-$p_{i,j}$ את פולינום האינטרפולציה של הנקודות $(x_i,y_i),\ldots,(x_j,y_j)$.
<u>**רישמו 3 פולינומים**</u> פשוטים $q(x),r(x),s(x)$ מדרגה 0 או 1, עבורם מתקיים

$$p_{i,j+1}=\frac{q(x)p_{i,j}(x)-r(x)p_{i+1,j+1}(x)}{s(x)}$$

(ב) הציגו אלגוריתם תכנון דינאמי לבעיית האינטרפולציה, המבוסס על נוסחת הנסיגה מסעיף (א). לשם פשטות, החשיבו פעולות אריתמטיות על מספרים כפעולות אלמנטריות. נדרשת תשובה של <u>**3-4 שורות**</u> בלבד, שמבוססת על סעיף (א).

(ג) סעיף ג' <u>**לא להגשה**</u>. יהי $p(x)=x+2x^2+3x^3+4x^4$. הציבו ב-$p(x)$ את חמשת הערכים $-2,-1,0,1,2$, והריצו את אלגוריתם האינטרפולציה מהסעיף הקודם על חמש הנקודות שמתקבלות. וודאו שהאלגוריתם אכן מניב כפלט את מקדמיו של $p(x)$.

שאלה מס' 4 (33%)

<u>**יישומים של תכנון דינאמי**</u>. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם משקלים אי-שליליים $c(e)\geq 0$ לכל אחת מהצלעות $e\in E$, ונתון קדקוד מסוים $r\in V$. הביטו באלגוריתם הבא:

(i) מאתחלים מערך חד-מימדי A באמצעות הכלל: $A[v]=\begin{cases}0, & v=r\\ \infty, & v\neq r\end{cases}$.

(ii) לולאה חיצונית: חוזרים שוב ושוב על הפעולה הבאה.

(1ii) לולאה פנימית: סורקים את הצלעות בסדר לקסיקוגרפי. לכל $e=(u,v)\in E$ מבצעים:
אם $A[v]>A[u]+c(e)$ אז מעדכנים $A[v]\leftarrow A[u]+c(e)$.

2ii) אם בהרצה הנוכחית של כל הלולאה הפנימית לא בוצע אף עדכון, אז האלגוריתם מסיים.

שאלות:

(א) **<u>מה מחשב האלגוריתם?</u>** הציגו הוכחה מפורטת לטענתכם בשיטת האינדוקציה.

(ב) יהי $B(n)$ המספר המרבי של איטרציות שמתבצעות בלולאה **<u>החיצונית</u>** על גרפים בעלי n קדקודים. חשבו את $B(n)$, והציגו סדרת גרפים G_n עליהם מתבצעות בדיוק $B(n)$ איטרציות.

(ג) הציגו סדרת גרפים אחרת G'_n, עבורם נכנסים ללולאה החיצונית פעמיים בלבד, וזאת למרות **<u>שמספר הצלעות שלהם זהה</u>** לגרפים מהסעיף הקודם, כלומר $|E(G'_n)|=|E(G_n)|$ לכל n.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: **20417, אלגוריתמים**

חומר הלימוד למטלה: **פרק 7 בספר**

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 4%**

סמסטר: 2021ב **מועד הגשה: 11.6.2021**

יש להגיש תשובות לשלוש השאלות **1,2,3**. שאלה 4 לתרגול נוסף ולא להגשה.

בכל רשתות הזרימה בקורס **לא נכנסות צלעות למקור**, ו**לא יוצאות צלעות מהיעד**.

שאלה מס' 1 (33%)

<u>צלעות שמוסרות, נוספות מחדש, ושוב מוסרות מהרשת השיורית</u>. הציגו דוגמא פשוטה של רשת זרימה עם צלע e, שמקיימת את שתי התכונות הבאות: (א) במהלך הרצת **Edmonds-Karp** על הרשת ישנן שתי איטרציות שונות, שבהן תוספת הזרימה דרך e זהה לקיבולת השיורית של e. (ב) הצלע e מחברת בגרף המקורי בין שני קדקודים, שמרחקם מהמקור s שונה. שימו לב שהדוגמא באיור 7.6 בספר הקורס אינה עונה לדרישות השאלה. (הדוגמא מתארת הרצה של **Ford-Fulkerson** אבל לא של המימוש של **Edmonds-Karp**). נדרשת רשת זרימה גדולה יותר. נדרשת תשובה קצרה: **<u>ציור</u>** של הרשת, והסבר של **<u>2-3 שורות</u>** בלבד).

שאלה מס' 2 (33%)

<u>זרימה מזערית כשקיבולות חוסמות מלרע את הזרימה הנדרשת</u>. כרגיל נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם מקור ויעד $s \neq t \in V$ ועם קיבולת אי-שליליות $c(e)>0$ לכל צלע בגרף. (כאשר $e \notin E$ אז $c(e)$ אינה מוגדרת, ומובטח שלכל זוג קדקודים $u \neq v$, לכל היותר אחת מבין הצלעות (u,v), (v,u) נמצאת בגרף). כרגיל זרימה חוקית הינה פונקציה $f: E \to \mathbb{R}$, המקיימת את חוק שימור הזרימה $\sum_{(u,v)\in E} f(u,v) - \sum_{(v,w)\in E} f(v,w) = 0$ לכל קדקוד $v \neq s,t$. אלא שהפעם, כל <u>קיבולת חוסמת את הזרימה דווקא מלמטה</u>: כלומר f נדרשת לקיים $f(e) \geq c(e)$ לכל צלע $e \in E$ (במקום $f(e) \leq c(e)$). כל השאלות להלן מתייחסות לרשת המתוארת בפסקה האחרונה.

(א) הוכיחו שאם קיימת זרימה חוקית ברשת אז קיימת ברשת זרימה חוקית גדולה כרצוננו.

(ב) הציגו אלגוריתם למציאת זרימה <u>חוקית</u> (לאו דווקא מזערית) ברשת.

(ג) הציגו אלגוריתם למציאת זרימה <u>חוקית מזערית</u> ברשת.

שאלה מס' 3 (33%)

<u>תיקון זרימה מרבית נתונה</u>. נתונה רשת זרימה, כלומר גרף מכוון $G=(V,E)$ עם מקור ויעד $s \neq t \in V$, ועם <u>קיבולות שלמות</u> $c(e)>0$ לכל $e \in E$. נתונה זרימה מרבית f ברשת, שהתקבלה מהרצה של אלגוריתם Ford Fulkerson, ונתונה צלע מסוימת $e^* \in E$. הציגו אלגוריתמים <u>בסיבוכיות ליניארית</u> עבור כל אחת מהבעיות הבאות. (כדי לקצר את ניתוח היעילות, הניחו שבכל הצלעות הקיבולות קטנות ולכן חיבור/חיסור/השוואה של קיבולת/זרימה הינן פעולות אלמנטריות המתבצעות בזמן $\Theta(1)$).

(א) מציאת זרימה מרבית ברשת, המתקבלת <u>מהגדלת</u> הקיבולת של e^* ב-1.

(ב) מציאת זרימה מרבית ברשת, המתקבלת <u>מהקטנת</u> הקיבולת של e^* ב-1.

שאלה מס' 4 (לא להגשה)

<u>בעיית הספיקות</u>. הפורמט של נוסחת 3-CNF הוגדר כזכור במסגרת ממ"ן 1. נתונה נוסחת 3-CNF, שבה כל אחד מהמשתנים $x_1,\dots,x_n$ מופיע <u>בדיוק בשלוש</u> פסוקיות שונות, וכל פסוקית כוללת <u>בדיוק שלושה</u> משתנים שונים. הוכיחו כי הנוסחה ספיקה. הציגו עבור נוסחאות כאלו אלגוריתם למציאת השמה מספקת. הדרכה: העזרו במשפט **Hall**.