מד״ר 2 2019 – פתרון ממ״ן 11

שאלה 1

א. סדרת הפונקציות $\left\{\cos\frac{x}{n}\right\}_n$ רציפה במידה אחידה. יהי $\varepsilon>0$, אז מרציפות הפונקציה $\cos x$ במ"ש ב- $\mathbb{R}$ נובע כי קיים $\delta>0$ כך שלכל $a,b\in\mathbb{R}$ המקיימים $|a-b|<\delta$ מתקיים $|\cos a-\cos b|<\varepsilon$. אז לכל $n\geq 1$ ולכל $x,y\in\mathbb{R}$, אם $|x-y|<\delta$ אז $\left|\frac{x}{n}-\frac{y}{n}\right|=\frac{1}{n}|x-y|\leq|x-y|<\delta$ ולכן $\left|\cos\frac{x}{n}-\cos\frac{y}{n}\right|<\varepsilon$.

סדרת הפונקציות $\{\cos nx\}_n$ אינה רציפה במידה אחידה.

נבחר $\varepsilon=1$, לכל $\delta>0$ קיים n כך ש- $\frac{\pi}{n}<\delta$ ואז עבור $x=0, y=\frac{\pi}{n}$ מתקיים $|x-y|<\delta$ אבל $|\cos nx-\cos ny|=|\cos 0-\cos\pi|=2>\varepsilon$.

ב. תהי $\{f_n\}$ סדרת פונקציות רציפה במידה אחידה בקטע סגור $[a,b]$, המתכנסת נקודתית לפונקציה f בקטע זה.

נוכיח תחילה כי f רציפה בקטע. יהי $x_0\in[a,b]$. יהי $\varepsilon>0$ ויהי $\delta>0$ כך שלכל n, לכל $|x-y|<\delta$ מתקיים $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon/2$. לכל y כך ש- $|x_0-y|<\delta$ מתקיים לכל n כי

$$\begin{aligned}|f(y)-f(x_0)|&\leq|f(y)-f_n(y)|+|f_n(y)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|<\\&<\varepsilon/2+|f(y)-f_n(y)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|\end{aligned}$$

זה נכון לכל n ולכן זה נכון גם בגבול $n\to\infty$, אבל $\lim_{n\to\infty}|f_n(x_0)-f(x_0)|+|f_n(y)-f(y)|=0$ ולכן נקבל $|f(y)-f(x_0)|\leq\varepsilon/2<\varepsilon$. לכן f רציפה ב- x_0, לכל $x_0\in[a,b]$. כיוון שהקטע סגור, הרציפות היא במ"ש.

נניח בשלילה שההתכנסות אינה במ"ש. אז קיים $\varepsilon>0$ וקיימת סדרת טבעיים $(n_k)_k$ עולה ממש כך שלכל k קיימת נקודה $x_k\in[a,b]$ כך ש- $|f_{n_k}(x_k)-f(x_k)|\geq\varepsilon$.

ממשפט בולצאנו-ויירשטראס נובע כי לסדרה (x_k) יש תת-סדרה מתכנסת $x_{k_j}\to x_0\in[a,b]$.

מהתכנסות נקודתית קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים $|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon/3$.

מרציפות במידה אחידה קיים $\delta'>0$ כך שלכל n ולכל $x,y\in[a,b]$ כך ש- $|x-y|<\delta'$ מתקיים $\left|f_n(x)-f_n(y)\right|<\varepsilon/3$. כמו כן קיים $\delta''>0$ כך שלכל $|x-y|<\delta''$ מתקיים $\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon/3$. נבחר $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$.

קיים J כך שלכל $j>J$ מתקיים $\left|x_{k_j}-x_0\right|<\delta$ וכן $n_{k_j}>N$. עבור j כנ"ל מתקיים

$$\varepsilon\le\left|f_{n_{k_j}}\left(x_{k_j}\right)-f\left(x_{k_j}\right)\right|\le\left|f_{n_{k_j}}\left(x_{k_j}\right)-f_{n_{k_j}}\left(x_0\right)\right|+\left|f_{n_{k_j}}\left(x_0\right)-f\left(x_0\right)\right|+\left|f\left(x_0\right)-f\left(x_{n_{k_j}}\right)\right|<\varepsilon$$

, סתירה.

שאלה 2

א. כיוון ש- F גזירה ברציפות וכן $\frac{\partial F}{\partial y}(t_0,x_0,y_0)\ne0$, לפי משפט הפונקציה הסתומה קיימת פונקציה $f(t,x)$ המוגדרת בסביבה של (t_0,x_0) ומקיימת $y=f(t,x)$ אמם $F(t,x,y)=0$. הפונקציה f גזירה ברציפות בסביבה של (t_0,x_0).

נוכל אם כן לנסח מחדש את בעיית ההתחלה כבעיה $(*)\begin{cases}x'=f(t,x)\\x(t_0)=x_0\end{cases}$ (נשים לב כי התנאי $x'(t_0)=y_0$ מתקיים אוטומטית בכל מקרה שבו מתקיימים התנאים (*) כיוון ש- $F(t_0,x_0,y_0)=0$ ולכן $f(t_0,x_0)=y_0$).

אז לפי משפט 2.2.3, לבעיה (*) יש פתרון יחיד בסביבה של t_0, כנדרש.

ב. נסמן $F(t,x,y)=y^2-2y+4x-4t+1$, ו- $(t_0,x_0,y_0)=(0,0,1)$. F גזירה ברציפות בנקודה (t_0,x_0,y_0) אך $\frac{\partial F}{\partial y}(t_0,x_0,y_0)=0$. בעיית ההתחלה $\begin{matrix}F(t,x,x')=0\\x(t_0)=x_0,x'(t_0)=y_0\end{matrix}$ היא הבעיה $(x')^2-2x'+4x=4t-1$ עם תנאי התחלה $x(0)=0,x'(0)=1$.

נפתור את המשוואה: $(x'-1)^2-1+4x=4t-1$, כלומר $(x'-1)^2=-4(x-t)$. (קל לראות כי הפונקציה $x(t)=t$ היא פתרון של בעיית ההתחלה). נחליף משתנה ונתבונן בפונקציה $u=x-t$, ונקבל בעיית התחלה $\begin{matrix}(u')^2=-4u\\u(0)=0,u'(0)=0\end{matrix}$ כלומר $\begin{matrix}u'=\pm2\sqrt{-u}\\u(0)=0,u'(0)=0\end{matrix}$. קיבלנו שתי משוואות בנות הפרדה, עם פתרון קבוע $u\equiv0$ (שזהו הפתרון $x=t$ שמצאנו קודם), ופתרון נוסף $u=-t^2$, כלומר $x(t)=-t^2+t$. כלומר הפתרון לבעיית ההתחלה אינו יחיד.

שאלה 3

בעיית ההתחלה היא $\ddot{x}=-\dot{x}-x^{2019}-\cos x$ עם תנאי התחלה ב-0, וזה שקול לבעיה הווקטורית מסדר ראשון $(*)\ y'=f(t,y)$ כאשר $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ היא הפונקציה $f(t,y_1,y_2)=\begin{pmatrix} y_2 \\ -y_2-y_1^{2019}-\cos y_1\end{pmatrix}$, עם תנאי התחלה ב-0. נשים לב כי f מוגדרת ורציפה בכל $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$.

לכן לפי משפט 2.3.1 קיים ל-(*) פתרון בלתי ניתן להמשכה ימינה, ולפי מסקנה 2.3.2, אם $y(t)$ הוא הפתרון הנ"ל והוא מקיים ש- y פונקציה חסומה, אז y מוגדרת בכל הקטע $[0,\infty)$. לכן מספיק להוכיח כי y פונקציה חסומה (זה שקול לכך שהרכיבים y_1,y_2 הם פונקציות חסומות, או בסימונים של המשוואה המקורית - $x(t),\dot{x}(t)$ פונקציות חסומות).

מספיק להוכיח כי הפונקציה $|y(t)|$ חסומה, ולמעשה מספיק להראות כי $|y(t)|^2$ חסומה.

$$\frac{d}{dt}|y(t)|^2=\frac{d}{dt}\left(y_1^2+y_2^2\right)=2\dot{y}_1y_1+2\dot{y}_2y_2=2y_1y_2+2y_2\dot{y}_2=2y_2\left(y_1-y_2-y_1^{2019}-\cos y_1\right)$$

ולכן מהמשפט היסודי של החדו"א, $|y(t)|^2=2\int y_2\left(-y_2+y_1-y_1^{2019}-\cos y_1\right)dt$. אבל נזכור כי $y_2=\frac{dy_1}{dt}$ ולכן מחילוף משתנה נקבל כי

$$|y(t)|^2=2\int\left(y_1-y_1^{2019}-\cos y_1\right)dy_1-2\int y_2^2dt=y_1^2-\frac{2}{2020}y_1^{2020}-2\sin y_1+C-2\int_0^t y_2^2dt$$

(כאשר C קבוע כלשהו).

מתקיים $\int_0^t y_2^2dt\geq 0$ ולכן $|y(t)|^2\leq y_1^2-\frac{2}{2020}y_1^{2020}+2+C=y_1^2\left(1-\frac{1}{1010}y_1^{2018}\right)+2+C$.

נראה כי הפונקציה $y_1^2\left(1-\frac{1}{1010}y_1^{2018}\right)$ חסומה. עבור y_1 כך ש- $1-\frac{1}{1010}y_1^{2018}\leq 0$ הפונקציה חסומה ע"י 0, ועבור y_1 כך ש- $1-\frac{1}{1010}y_1^{2018}\geq 0$ מתקיים $|y_1|\leq\sqrt[2018]{1010}$ ולכן $y_1^2\leq\sqrt[1009]{1010}$ ו- $1-\frac{1}{1010}y_1^{2018}\leq 1$ ולכן בסכ"ה $y_1^2\left(1-\frac{1}{1010}y_1^{2018}\right)\leq\sqrt[1009]{1010}$.

קיבלנו כי $|y(t)|^2$ פונקציה חסומה, כנדרש.

שאלה 4

נניח כי $x(t)$ פתרון של המערכת $x'(t)=\left(A(t)+B(t)\right)x(t)$. נסמן $f(t)=B(t)x(t)$ ונתבונן במערכת המשוואות הלינארית והאי-הומוגנית $x'(t)=A(t)x(t)+f(t)$, ש-$x(t)$ הוא כמובן פתרון גם שלה. לפי ווריאציה של פרמטרים, $x(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(0)x(0)+\int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)f(s)ds$.

לכן מתקיים לכל $t\geq 0$:

$$|x(t)|\leq\left|\Phi(t)\Phi^{-1}(0)\right||x(0)|+\int_0^t\left|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\right||f(s)|ds\leq M|x(0)|+M\int_0^t|f(s)|ds$$

מתקיים $\int_0^t|f(s)|ds=\int_0^t|B(s)x(s)|ds\leq\int_0^t|B(s)||x(s)|ds$, כלומר בסכ"ה $|x(t)|\leq M|x(0)|+\int_0^t M|B(s)||x(s)|ds$ ולכן לפי א"ש גרונוול, $|x(t)|\leq M|x(0)|\exp\left(\int_0^t M|B(s)|ds\right)$, וזהו מספר סופי וחסום מכיוון ש- $\int_0^t M|B(s)|ds\leq\int_0^\infty M|B(s)|ds<\infty$.

שאלה 5

א. עבור t קבוע, מאי-השוויון $\left(h(t)-x\right)f(t,x)\geq 0$ נובע כי לכל $x<h(t)$ מתקיים $f(t,x)\geq 0$ ולכל $x>h(t)$ מתקיים $f(t,x)\leq 0$ ולכן מרציפות f (ביחס למשתנה x) נובע כי עבור $x=h(t)$ מתקיים בהכרח $f(t,h(t))=0$.

ב. נתון כי $h(t)$ גזירה ועולה ולכן $h'(t)\geq 0$, לכן יחד עם סעיף א' נקבל כי $h'(t)\geq f(t,h(t))$. מתקיים גם $h(\tau)=\varphi(\tau)$ וכן מכך ש-$f\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ נובע כי φ הוא פתרון יחיד של $\varphi'=f(t,\varphi)$ בקטע (a,b).כלומר מתקיימים כל תנאי משפט 2.6.1 (א"ש דיפאנציאליים) ולכן ניתן להסיק כי לכל $t\geq\tau$ מתקיים $\varphi(t)\leq h(t)$.

ג. כיוון שתחום ההגדרה של f הוא כל $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, אז עבור פתרון שאינו ניתן להמשכה φ המוגדר בקטע (a,b) מתקיים כי $b=\infty$ או ש-$b<\infty$ ו- $\lim_{t\to b^-}|\varphi(t)|=\infty$ (מסקנה 2.3.1). נראה כי האפשרות השניה לא תתכן.

לכל $t \ge \tau$ מתקיים $\varphi(t) \le h(t)$ ולכן מכך ש- $\left(h(t)-\varphi(t)\right) f\left(t,\varphi(t)\right) \ge 0$ נובע $\varphi'(t) = f\left(t,\varphi(t)\right) \ge 0$. כלומר $\varphi(t)$ פונקציה עולה ב-(τ,b), ולכן אם $\lim_{t\to b^-}\left|\varphi(t)\right| = \infty$ אז גם $\lim_{t\to b^-}\varphi(t) = \infty$. אבל אז גם $\lim_{t\to b^-} h(t) = \infty$ וזה לא אפשרי כאשר $b < \infty$ כי נתון ש-h רציפה.

שאלה 6

א. נסמן $f(t,x) = x^2 - x\cos t$. הנגזרת f_x קיימת ורציפה בכל $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. לכן לפי משפט הגזירות ביחס לתנאי ההתחלה (2.5.2) הפתרון לבעיית ההתחלה $x' = f(t,x)$, $x(\tau) = a$ קיים ויחיד עבור (τ,a) בסביבת $(0,0)$ (נסמן פתרון זה ב-$\varphi(t,\tau,a)$), והנגזרת $\frac{d}{da}\varphi(t,\tau,a)|_{(t,0,0)}$ מקיימת את בעיית ההתחלה $\frac{dY}{dt} = f_x\left(t,\varphi(t,0,0)\right)Y$, $Y(0)=1$.

כלומר הנגזרת של פתרון בעיית ההתחלה ביחס ל-a, מחושבת ב-$a=0$, מקיימת את בעיית ההתחלה $Y' = \left(2\varphi(t,0,0) - \cos t\right)Y$, $Y(0)=1$.

אבל נשים לב כי הפונקציה הקבועה אפס היא פתרון של בעיית התחלה עבור $\tau = 0, a = 0$ ומיחידות הפתרון, מתקיים $\varphi(t,0,0) = 0$ לכל t. לכן מתקיים $Y' = -\cos tY$, $Y(0)=1$. זוהי משוואה בת הפרדה שפתרונה הוא $Y(t) = e^{-\sin t}$.

ב. נסמן $f\left(t,\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},a\right) = \begin{pmatrix}x(a-x)\\x\end{pmatrix}$ (נסמן $z = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$) ונתבונן בבעיית ההתחלה $z' = f(t,z,a)$, $z(0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (*). f גזירה ברציפות ב-$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$ לפי כל המשתנים. לפי משפט הגזירות לפי פרמטרים (משפט 2.5.1), לבעיית ההתחלה (*) קיים ויחיד פתרון $\varphi(t,a)$, והנגזרת $\frac{d}{da}\varphi(t,a)|_{a=1}$ קיימת ומקיימת את בעיית ההתחלה $u' = D_z f\left(t,\varphi(t,1),1\right)u + f_a\left(t,\varphi(t,1),1\right)$, $u(1) = 0$ (**).

נמצא את $\varphi(t,1)$: זהו פתרון בעיית ההתחלה $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}x(1-x)\\x\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. נתבונן תחילה במשוואה עבור הרכיב x, שאינה מערבת את y ולכן ניתן להתייחס אליה כמשוואה סקלרית. זוהי משוואה בת הפרדה ופתרונה הוא הפתרון הקבוע $x=1$. מכאן אפשר לעבור למשוואה עבור הרכיב השני ולקבל $y(t) = t$. כלומר $\varphi(t,1) = \begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}$.

נבטא את בעיית ההתחלה (**) בפירוש: $D_z f = \begin{pmatrix} a-2x & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f_a = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ ובהצבת $\left(t,\varphi(t,1),1\right) = \left(t, \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, 1\right)$ נקבל $u' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ופתרונה של בעיית ההתחלה זו הוא $u(t) = \begin{pmatrix} 1-e^{1-t} \\ e^{1-t}+t-2 \end{pmatrix}$.