בחינת גמר - "משוואות דיפרנציאליות רגילות 2" - 20599

סמסטר 2018א

מועד 91 - 11.7.2018

מבנה הבחינה: בבחינה **שש** שאלות. עליכם לענות על **חמש** מתוכן.
משקל כל שאלה 20 נקודות.

כל חומר עזר מותר בשימוש.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ונתבונן בבעיית ההתחלה $x' = Ax, \ \ x(0) = x_0$

- מצאו מטריצת ז'ורדן של A, וחשבו בעזרתה את e^{At}. (מותר לרשום כמכפלת מטריצות.)
- מצאו את כל הוקטורים x_0 שעבורם כל פתרונות בעיית ההתחלה חסומים עבור $t \geq 0$, ומצאו את כל הפתרונות המתאימים למקרים אלה.
- מצאו את כל הוקטורים x_0 שעבורם כל פתרונות בעיית ההתחלה חסומים עבור $t \leq 0$.

פתרון

נמצא ע"ע וו"ע,

נחשב דטרמיננטה

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)$$

והערכים העצמיים הם: $\lambda = 1$ בריבוי אלגברי 1 ו $\lambda = 0$ בריבוי אלגברי 2.

נמצא וו"ע, עבור $\lambda = 1$ **:**

נפתור את המערכת ההומוגנית $(I-A)\underline{u} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ניקח למשל $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, כלומר $\boxed{\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$ יכול להיות הוו"ע.

עבור $\lambda = 0$ **:**

נפתור את המערכת ההומוגנית $A\underline{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ניקח למשל $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$, כלומר $\underline{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ או כל כפולה שלו יהיה וו״ע.

קבלנו עד כה 2 פתרונות למערכת

וו״ע מוכלל נוסף הוא פתרון של $A\underline{w} = \underline{v}$, כלומר

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 0 & -1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

נבחר פתרון שרירותי שמקיים מערכת זו $\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$.

צורת ז׳ורדן של A היא: $J = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

P היא $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ וכן $P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}$

מתקיים: $A = PJP^{-1}$ ולכן מתקיים: $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$

מכיוון ש $e^{Jt} = \begin{pmatrix}e^t & 0 & 0\\0 & 1 & t\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, נקבל ש

$$\boxed{e^{At} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t & 0 & 0\\0 & 1 & t\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}}$$

<u>נרשום את הפתרון הכללי באופן הבא:</u>

יש שני וקטורים שונים לע״ע השונים ווקטור נוסף מהצורה $\underline{x}(t) = e^{0t}(t\underline{v} + \underline{w})$

והפתרון הכללי של המערכת הוא:

$$\underline{x}(t) = C_1e^t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}0\\t\\-1\end{pmatrix}$$

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix}e^t & 0 & 0\\0 & 1 & t\\e^t & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}$$

עבור תנאי ההתחלה כלשהו ב $x=0$ מקבלים

$$\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_1-C_3\end{pmatrix}$$

תנאי ההתחלה ב $x=0$ עבורו מתקיים שכל הפתרונות חסומים עבור $t\geq 0$ הוא ש $C_1=C_3=0$.

כלומר $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}C_2=\begin{pmatrix}0\\C_2\\0\end{pmatrix}=\underline{x}(0)$, כלומר כל תנאי התחלה שהוא כפולה של הווקטור $\underline{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

תנאי ההתחלה ב $x=0$ עבורו מתקיים שכל הפתרונות חסומים עבור $t\leq 0$ הוא ש $C_3=0$.

כלומר $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_1\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, כלומר כל תנאי התחלה שהוא צרוף ליניארי של הווקטורים $\underline{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ו- $\underline{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתבונן במערכת מסדר $n\times n$, $x'=A(t)x$, כאשר $A(t)$ רציפה, ונניח ש- $\int_1^\infty trA(s)ds=\infty$, כלומר $\lim_{t\to\infty}\int_1^t trA(s)ds=\infty$. הוכיחו כי יש למערכת פתרון שאינו חסום בקטע $t\geq 1$. רמז: התבוננו במטריצה יסודית של המערכת.

פתרון

ניקח מטריצה יסודית כלשהי $\Phi(t)$ ונניח שכל פתרונות המערכת חסומים. מכיוון שכל פתרון של המערכת הוא מהצורה $x(t)=\Phi(t)\cdot\underline{c}$ נקבל שבפרט כל אחד מרכיבי המטריצה היא פונקציה חסומה.

מנוסחת ליוביל-אבל נקבל ש

$$\det\Phi(t)=\det\Phi(1)\cdot e^{\int_1^t A(s)ds}$$

כלומר

$$\lim_{t\to\infty}\det\Phi(t)=\det\Phi(1)\cdot e^{\int_1^\infty A(s)ds}=\infty$$

וזו סתירה להנחה. ולכן קיים פתרון שאינו חסום.

שאלה 3 (20 נקודות)

א. נתבונן במשוואה $\dot{x} = f(x)$ במישור, כאשר $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ גזירה ברציפות, $f(0)=0$. נניח כי $x \cdot f(x) > 0$ בסביבה מנוקבת של 0 , ו- $f(x) \neq 0$ לכל $x \neq 0$.

הוכיחו כי אם למערכת אין מסלול מחזורי, אז כל הפתרונות הלא טריוויאליים שלה אינם חסומים ב- $[0,\infty)$.

ב. $e^t(\cos t - \sin t, \cos t + \sin t)$ הוא פתרון של המערכת

$$\dot{x} = (-\sin 2t)x + (\cos 2t - 1)y$$
$$\dot{y} = (\cos 2t + 1)x + (\sin 2t)y$$

אין צורך לבדוק זאת.

מצאו את הכופלים האופייניים של המערכת.

פתרון

א. יהי $\varphi(t)$ פתרון של המערכת שאינו טריוויאלי ונניח שהפתרון חסום.

מהנתון(0,0) היא נקודות שיווי משקל.

נתבונן ב- $\omega(\varphi)$:

נחשב

$$r' = 2x_1x_1' + 2x_2x_2' = 2x \cdot f(x) > 0$$

בסביבה מנוקבת של 0. קבלנו שהפתרון בורח מהראשית בסביבה זו (רדיוס עולה). ולכן $(0,0) \notin \omega(\varphi)$.

בנוסף כל פתרון קבוע יקיים $\dot{x} = f(c) = 0$ ונתון ש $f(x) \neq 0$ לכל x. ולכן $(0,0)$ נקודת שיווי משקל יחידה.

מכיוון ש $\omega(\varphi)$ אינו מכיל נקודות שיווי משקל והוא חסום נקבל ממשפט פואנקרה בנדיקסון ש-$\omega(\varphi)$ הוא פתרון מחזורי של המערכת ובסתירה לנתון שאין למערכת מסלול מחזורי.

ב. ניקח מטריצה יסודית $\Phi(t)$ המקיימת $\Phi(0) = I$ מכיוון ש

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\sin 2t & \cos 2t - 1 \\ \cos 2t + 1 & \sin 2t \end{pmatrix}$$

מטריצה מחזורית בעלת מחזור π. הרי שהכופלים האופייניים הם הע״ע של $\Phi(\pi)$

מכיוון שמתקיים $x(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^t$ כלומר $x(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{\pi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (-e^{\pi})$

ובנוסף $x(t) = \Phi(t) \cdot x(0)$ הרי ש $x(\pi) = \Phi(\pi) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

לכן $\Phi(\pi) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (-e^{\pi})$

כלומר כופל אופייני אחד הוא : $\mu_1 = -e^{\pi}$

נשתמש כעת בליוביל

$$\mu_1\mu_2 = \det \Phi(\pi) = \det \Phi(0) \cdot e^{\int_0^{\pi} 0 ds} = 1$$

ולכן כופל אופייני שני הוא : $\mu_2 = -e^{-\pi}$

שאלה 4 (20 נקודות)

נתבונן במשוואה $u''+u'+g(u)=0$, כאשר g גזירה ברציפות, $ug(u)>0$ לכל $u\neq 0$, וקיים הגבול $\lim_{u\to 0}\frac{g(u)}{u}=b$ והוא סופי. על ידי ההצבה $x=u,\ y=u'$ נעבור למערכת השקולה:

$$x' = y$$
$$y' = -y - g(x)$$

העזרו בפונקציה $V=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x g(s)ds$ כדי להראות כי פתרון האפס של המערכת יציב אסימפטוטית. אין להראות יציבות אסימפטוטית בדרך אחרת.

פתרון

ניקח את הפונקציה $V(x)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x g(s)\,ds$ שמקיימת $V(0)=0$ ומתקיים $\dot V(x)=yy'+g(x)x'$

לכן

$$\dot V(x)=y\big(-y-g(x)\big)+g(x)y=-y^2\leq 0$$

והיא פונקצית ליאפונוב שרציפה בסגור של התחום, אפשר לקחת למשל $\Omega=\mathbb{R}^n$.

<u>הקבוצה S</u>

היא הקבוצה כל הנקודות שבה $S=\{(x,y)\in\Omega|\dot V=0\}=\{(x,0)|y\in\mathbb{R}\}$

<u>הקבוצה M</u>

הקבוצה השמורה המקסימלית שב-S. נמצא אותה: מהנתונים $g(x)\neq 0$ לכל $x\neq 0$. נבחר נקודת התחלה לבעיה ששייכת ל- S נסמן אותה ב $(x_0,0)$ נקבל $\begin{cases}x'=0\\ y'=-g(x)\neq 0\end{cases}$

כלומר, לכל נקודת התחלה $x_0\neq 0$ נקבל ש $y'\neq 0$ ולכן המסלול עוזב את S ולכן אינו בקבוצה M. לכן רק $(0,0)\in M$

קבלנו שמתקיימים כל תנאי משפט 5.2.4 עקרון האינווריאנטיות של לה-סאל ולכן כל מסלול של פתרון שמתחיל ב $p\in\Omega$ הוא חסום ולכן $\omega(p)\subseteq M=\{(0,0\}$ ומקבלים מהמשפט ש $dist\big(\varphi(t,p),M\big)\underset{t\to\infty}{\to}0$ כלומר $|\varphi(t)|\to 0$ כאשר $t\to\infty$ ויש יציבות אסימפטוטית.

שאלה 5 (20 נקודות)

נתבונן במשוואה

$$u''+\frac{\lambda}{t^{2018}}u=0$$

הוכיחו כי לכל קטע $(a,b)\subset(0,\infty)$ יש λ שעבורו לכל פתרון של המשוואה יש שורש בקטע (a,b).

פתרון

לכל $\boldsymbol{t\in(a,b)}$ מתקיים

$$\frac{\lambda}{b^{2018}}<\frac{\lambda}{t^{2018}}<\frac{\lambda}{a^{2018}}$$

ולכן המשוואה הנתונה שולטת על המשוואה

$$u'' + \frac{\lambda}{b^{2018}} u = 0$$

פתרון משוואה אפשרי הוא

$$u = \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{b^{2018}}} \cdot t\right)$$

נחפש λ כך שבקטע $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ יהיו 2 פתרונות למשוואה ואז ממשפט שטרום נקבל שיש לפחות פתרון אחד למשוואה השולטת.

פתרון המשוואה הנתונה הוא:

$$\sqrt{\frac{\lambda}{b^{2018}}} \cdot t = \pi k \,, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

כלומר

$$t = \frac{\pi b^{1009}}{\sqrt{\lambda}} k$$

ניקח אורך מחזור שקטן מחצי הקטע $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ונקבל

$$\frac{\pi b^{1009}}{\sqrt{\lambda}} < \frac{b-a}{2}$$

כלומר נבחר

$$\lambda > \frac{4\pi^2 b^{2018}}{(b-a)^2}$$

ונקבל שלמשוואה הנשלטת יש שני פתרונות בקטע ולמשוואה שלנו השולטת יש לפחות פתרון אחד בקטע.

שאלה 6 (20 נקודות)

נתונה המשוואה $zw'' + w' + w = 0$

א. ודאו ש-0 היא נקודה סינגולרית רגולרית של המשוואה. מצאו את משוואת האינדקס ואת שורשיה.

ב. מצאו פתרון טורי אחד סביב 0. הציגו נוסחה מפורשת של מקדמי הטור.

ג. מצאו בעזרת שיטת פרובניוס פתרון שני, בלתי תלוי לינארית בפתרון שמצאתם בסעיף הקודם. לפתרון זה מצאו נוסחת רקורסיה עבור מקדמי הטור.

<u>פתרון</u>

נחלק את המשוואה ונקבל

$$w'' + w' + \frac{1}{z} w = 0$$

קבלנו $p(z) = \frac{1}{z}, \quad q(z) = \frac{1}{z}$

כלומר $z=0$ נקודה סינגולארית, נחשב

$$\lim_{z\to 0} zp(z) = \lim_{z\to 0} 1 = 1 = p_0$$
$$\lim_{z\to 0} z^2 q(z) = \lim_{z\to 0} z = 0 = q_0$$

ולכן משוואת האינדקס היא:

$$r(r-1) + r = 0$$

וקבלנו $r_1 = r_2 = 0$,

לכן יש לנו שני פתרונות בת״ל והם:

$$w_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
$$w_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n + w_1(z) \ln|z|$$

נמצא את הפתרון הכללי $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

נחשב נגזרות

$$w_1'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$
$$w_1''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

נציב במד״ר המקורית $zw'' + w' + w = 0$

נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

נסדר בעזרת הזזת אינדקס והוצאת איברים, נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[n(n-1)a_n + na_n + a_{n-1} \right] z^{n-1} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[n^2 a_n + a_{n-1} \right] z^{n-1} = 0$$

עבור $n \geq 1$ נקבל את נוסחת הרקורסיה

$$a_n = -\frac{1}{n^2} a_{n-1}$$

נבחר $a_0 = 1$ ונקבל

$$a_1 = -\frac{1}{1^2}$$

$$a_2 = \frac{1}{1^2 2^2}$$

$$\vdots$$

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{(n!)^2}$$

ונקבל פתרון ראשון

$$\boxed{w_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} z^n}$$

נחפש פתרון שני מהצורה $w_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n + w_1(z) \ln|z|$

נטפל רק בביטוי $w = w_1(z) \ln|z|$

נגזור ונקבל

$$w' = w_1' \ln|z| + \frac{1}{z} w_1 \quad , \quad w'' = w_1'' \ln|z| + \frac{2}{z} w_1' - \frac{1}{z^2} w_1$$

נציב במד״ר לחשב רק את התרומה של הביטוי עם הln ונקבל

$$z\left(w_1''\ln|z| + \frac{2}{z}w_1' - \frac{1}{z^2}w_1 \right) + w_1'\ln|z| + \frac{1}{z}w_1 + w_1\ln|z|$$

$$zw_1''\ln|z| + 2w_1' - \frac{1}{z}w_1 + w_1'\ln|z| + \frac{1}{z}w_1 + w_1\ln|z|$$

$$zw_1''\ln|z| + 2w_1' + w_1'\ln|z| + w_1\ln|z|$$

$$\ln|z|\left(\underbrace{zw'' + w_1' + w_1}_{=0} \right) + 2w_1'$$

$$\boxed{2w_1'}$$

הפיתוח זהה לפתרון הראשון ולכן הפתרון הנוסף הוא

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^2 b_n + b_{n-1}\right]z^{n-1} + 2w_1' = 0$$

כלומר

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^2 b_n + b_{n-1}\right]z^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n \frac{1}{(n!)^2} z^{n-1} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^2 b_n + b_{n-1}\right]z^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n \frac{1}{(n!)^2} z^{n-1} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^2 b_n + b_{n-1} + 2n(-1)^n \frac{1}{(n!)^2}\right]z^{n-1} = 0$$

עבור $n \geq 1$ נקבל את נוסחת הרקורסיה

$$n^2 b_n + b_{n-1} + 2n(-1)^n \frac{1}{(n!)^2} = 0$$

ומקדמי הפתרון השני

$$w_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n + w_1(z)\ln|z|$$

הם :

$$\boxed{b_n = -\frac{1}{n^2}b_{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{2}{n(n!)^2}}$$