بنام خدا

تمرین چهارم بخش اول

سوال ۱) هر Bayes' Net متشکل از گراف و مقادیر CPT آنهاست. الف

گراف : (Coin) ⟶ (Ball)

(۱) $P(Coin)$:

head	r
tail	$1-r$

(۲) $P(Ball \mid Coin)$:

Ball	Coin	P
white	head	p_1
red	head	p_2
blue	head	p_3
green	head	p_4
white	tail	q_1
red	tail	q_2
blue	tail	q_3
green	tail	q_4

ب ۱ سه تولی هم رنگ بی کانند سفید، قرمز، آبی یا سبز باشند.

$$P(w,w,w \mid H,T,T) + P(r,r,r \mid H,T,T)$$
$$+ P(b,b,b \mid H,T,T) + P(g,g,g \mid H,T,T)$$

$$= \frac{P(w,w,w,H,T,T)}{P(H,T,T)} + \frac{P(r,r,r,H,T,T)}{P(H,T,T)}$$

$$+ \frac{P(b,b,b,H,T,T)}{P(H,T,T)} + \frac{P(g,g,g,H,T,T)}{P(H,T,T)}$$

بیزینت ↓

$$= \frac{P(b \mid H)\ P(b \mid T)\ P(b \mid T)\ P(H)\ P(T)\ P(T)}{P(H)\ P(T)\ P(T)}$$

$$+ \frac{P(g \mid H)\ P(g \mid T)\ P(g \mid T)\ P(H)\ P(T)\ P(T)}{P(H)\ P(T)\ P(T)}$$

$$+ \frac{P(r \mid H)\ P(r \mid T)\ P(r \mid T)\ P(H)\ P(T)\ P(T)}{P(H)\ P(T)\ P(T)}$$

$$+ \frac{P(w \mid H)\ P(w \mid T)\ P(w \mid T)\ P(H)\ P(T)\ P(T)}{P(H)\ P(T)\ P(T)}$$

براساس جداول CPT

$$= P_{1} \times q_{1} \times q_{1} + P_{2} \times q_{2} \times q_{2} + P_{3} \times q_{3} \times q_{3} + P_{4} \times q_{4} \times q_{4}$$

ج) اگر notation به صورت ریاضی به شکل روبرو است؟ $P(H|r)$

$$\Longrightarrow P(H|r) = \frac{P(H,r)}{P(r)}$$

و چون ما $P(r)$ را نمی دانیم، براساس marginalize out Coin کنیم.

$$\frac{P(H,r)}{P(r)} = \frac{P(H) \times P(r|H)}{\sum_{Coin} P(r, Coin)}$$

$$= \frac{P(H) \times P(r|H)}{P(r,H) + P(r,T)} = \frac{P(H) \times P(r|H)}{P(H) \times P(r|H) + P(T) \times P(r|T)}$$

براساس CPT

$$= \frac{r \times p_2}{r \times p_2 + (1-r) \times q_2} = \boxed{\frac{r \times p_2}{p_2 \times r + q_2 - r \times q_2}}$$