۹۸۱۰۳۸۶۷ محمدابول ترابیان

Subject:
Date

بنام خدا

مینی پروژه پنجم

سوال ۱

الف)

$$B_k v(s) = \max_a \left[R(s,a) + \gamma_k \sum_{s' \in S} P(s'|s,a)\, v(s') \right]$$

برای حالت ثابت داریم:

$$\|B_k \dots B_1 v_1 - B_k \dots B_1 v_2\|_\infty \le \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k \|v_1 - v_2\|_\infty = \gamma^k \|v_1 - v_2\|_\infty$$

سپس برای ضریب تخفیف متغیر هم طبق راهنمایی داریم:

$$\|B_k v_1 - B_k v_2\|_\infty \le \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k \|v_1 - v_2\|_\infty \quad \boxed{I} \quad \forall v_1, v_2$$

* تخفیف داریم:

$$\gamma_k = 1 - \frac{1}{k+1} \quad \boxed{II}$$

$$\boxed{I}, \boxed{II} \Longrightarrow \|B_k v_1 - B_k v_2\|_\infty \le \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \dots \times \frac{\cancel{k}}{k+1} \|v_1 - v_2\|_\infty$$

$$\Longrightarrow \|B_k v_1 - B_k v_2\|_\infty \le \frac{1}{k+1} \|v_1 - v_2\|_\infty$$

می‌دانیم k تعداد بار پیمایش است، پس k مثبت.

$$\Longrightarrow \|B_k v_1 - B_k v_2\|_\infty \le \frac{k}{k+1} \|v_1 - v_2\|_\infty$$

$$\boxed{II} \Longrightarrow \boxed{\|B_k v_1 - B_k v_2\|_\infty \le \gamma_k \|v_1 - v_2\|_\infty \quad : \forall v_1, v_2}$$

PAPCO

سوال ۱ ب

در اثبات قسمت الف از این نقض استفاده کردیم. می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\prod_{k=1}^{k} \gamma_k \le \frac{1}{k+1}$$

$$\gamma_k = 1-\frac{1}{k+1} \Rightarrow \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_k \le \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^{k} \gamma_k \le \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \cdots \times \frac{\cancel{k}}{k+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\prod_{k=1}^{k} \gamma_k \le \frac{1}{k+1}}$$

سوال ۱ ج

در قسمت الف و ب دیدیم:

$$\forall v_1, v_2 : \|B_k v_1 - B_k v_2\|_\infty \le \gamma_k \|v_1 - v_2\|_\infty$$

و $\prod \gamma_k \le \frac{1}{k+1}$

$$\Rightarrow \|B_k \cdots B_1 v_1 - B_k \cdots B_1 v_2\|_\infty \le \frac{1}{k+1} \underbrace{\|v_1 - v_2\|_\infty}_{\text{ثابت}}$$

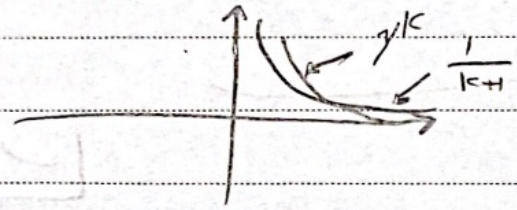
$$\xRightarrow[k\to\infty]{} \|B_k \cdots B_1 v_1 - B_k \cdots B_1 v_2\|_\infty \le \boxed{0}$$

همگرا ⇐

۹۸۱۰۳۸۹۷ محمد ابول‌نژادیان

Subject:
Date

سوال ۱ | د) در γ های کوچک، سرعت حالت ثابت بسیار بیشتر است، زیرا به صورت نمایی (γ^k) دارد همگرا می‌شود. ولی در حالتی که γ را می‌خواهیم متغیر بگیریم، $\frac{1}{k+1}$



با سرعتی کمتر همگرا می‌شود.

سوال ۲ | الف)

$$W_{i,j} = \begin{cases} weight(i \to j) & if\ (i \to j) \in E(G) \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

* در این شبکه Transition function به صورت زیر تعریف شده است:

$$T(v,u,w) = \begin{cases} \eta + \frac{1-\eta}{d_v} & w=u \\ \frac{1-\eta}{d_v} & o.w. \end{cases}$$

رابطه بلمن به طور کلی به صورت زیر است:

$$V^*(s) = \max_a \sum_{s'} T(s,a,s') \left[R(s,a,s') + \gamma V^*(s') \right]$$

با جایگذاری موارد داده شده، داریم:

$$V^*(v) = \max_u \sum_w P(w|v,u) \left[W_{v,w} + \gamma V^*(w) \right]$$

PAPCO

Subject:
Date

برای v_π هم داریم: (W وزن یال‌ها و v ماتریس گره‌ها)

$$v_\pi(s) = \sum_{w} P(w \mid v, \pi(s)) \left[W_{v,w} + \gamma\, v^{\pi}(w) \right]$$

سوال ۲ ب

$$[A \odot B]_{ij} = A_{ij} B_{ij}$$

$$\Rightarrow [\pi \odot W] :$$ حرکات به ازای پاداش‌هایی که برمی‌گردد

$$[I - \gamma\pi]\, v_\pi = (I - \gamma\pi) \sum_{w} T(w, v, \pi(s)) \left[W_{v,w} + \gamma\, v^{\pi}(w) \right]$$

$$= (I - \gamma\pi)\, \gamma \sum_{w} T(w, v, \pi(s))\, (W_{v,w})$$

$$= \pi_{v,w}\, W_{v,w} = \boxed{\pi \odot W}$$

سوال ۲ ج

$$\max_{\pi} \| [I - \gamma\pi]^{-1} [\pi \odot W] \|_2$$

$$\Rightarrow \forall (i \to j) \notin E(G) : \pi_{i,j} = 0$$

$$\forall i, j \in V(G) : \pi_{i,j} \geq 0 \,, \; \pi 1 = 1$$

$$\Rightarrow [I - \gamma\pi]^{-1} [\pi \odot W]\, 1 \geq 0$$

PAPCO