

# Praktikum 4 – Versuch 425: Elektronisches Rauschen

Jonas Wortmann<sup>1\*</sup> and Angelo Brade<sup>1\*</sup>

<sup>1\*</sup>Rheinische Friedrich–Wilhelms–Universität, Bonn.

\*Corresponding author(s). E-mail(s): [s02jwort@uni-bonn.de](mailto:s02jwort@uni-bonn.de); [s72abrad@uni-bonn.de](mailto:s72abrad@uni-bonn.de);

## 1 Einleitung

In jedem elektrischen Schaltkreis ist ein elektronisches Rauschen vorhanden. Dieses Rauschen setzt sich z.B. aus dem JOHNSON–Rauschen und dem Schrotrauschen zusammen, wobei auch Randbeiträge, wie dem Rauschen von Verstärkern, berücksichtigt werden. Das JOHNSON–Rauschen ist temperaturabhängig, daraus lässt sich die BOLTZMANN–Konstante bestimmen. Das Schrotrauschen wird durch die Quantelung der Elementarladung hervorgerufen. Die Größe der Elementarladung lässt sich damit bestimmen.

## 2 Bandbreite

### 2.1 Theoretischer Hintergrund

<sup>1</sup>Die Bandbreite gibt die Breite eines Frequenzbands an. Da das elektronische Rauschen von der Bandbreite abhängig ist, wird diese mit einem Bandpass vorgegeben. Ein Frequenzband einer bestimmten Breite kann mit einem Hoch- und Tiefpass in Serie (auch Bandpass) erzeugt werden. Die im Versuch verwendete Anordnung ist in Abb. (1) gezeigt.

Die effektive Bandbreite wird mit der Verstärkung

$$G(f) = \frac{V_{\text{output}}^{\text{RMS}}}{V_{\text{input}}^{\text{RMS}}} \quad (1)$$

<sup>1</sup>Die relative Abweichung des Fehlers vom Messwert und die Abweichung vom Literaturwert in  $\sigma$  wird immer hinter dem Messwert wie  $[\cdot\%, \cdot\sigma]$  angegeben.

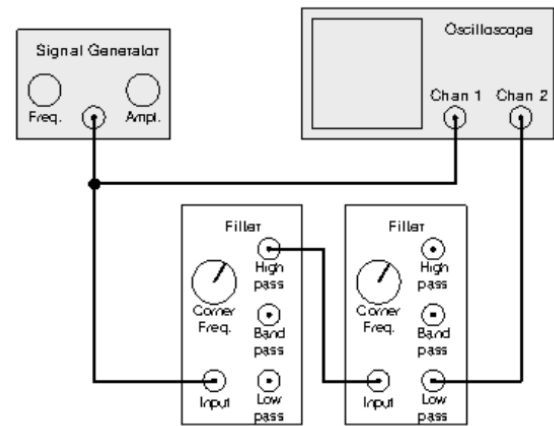


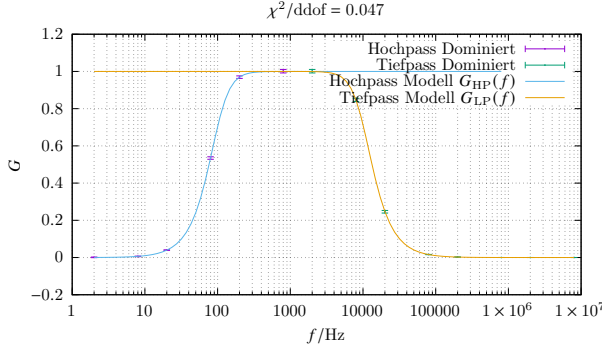
Abbildung 1 Schaltplan des Bandpass.[1]

bestimmt

$$\Delta f_{\text{eff}} = \int_0^\infty df G^2(f) = \int_0^\infty df G_{\text{LP}}^2(f) G_{\text{HP}}^2(f), \quad (2)$$

mit der Tiefpassverstärkung  $G_{\text{LP}}(f) = (1 + (f/f_l)^4)^{-1/2}$  und der Hochpassverstärkung  $G_{\text{HP}}(f) = (f/f_h)^2 (1 + (f/f_h)^4)^{-1/2}$ .  $f_h$  und  $f_l$  sind die eingestellten Grenzfrequenzen von Hoch- und Tiefpass. Das analytische Ergebnis des Integrals ist

$$\Delta f_{\text{eff}} = \frac{f_l^4 \pi (f_h - f_l)}{2^{3/2} (f_h^4 - f_l^4)}. \quad (3)$$



**Abbildung 2** Gemessene Verstärkung  $G = \frac{U_{\text{RMS}}}{U_{0, \text{RMS}}}$  im Bandpass.

Parameter	Wert(Fehler)
$f_l$	10 104(56) Hz
$f_h$	100.50(17) Hz

**Tabelle 1**

Frequenzabhängigkeit modelliert mit  $G_{\text{LP}}(f) = [1 + (f/f_l)^4]^{-1/2}$  und  $G_{\text{HP}}(f) = (f/f_h)^2 [1 + (f/f_h)^4]^{-1/2}$

## 2.2 Durchführung & Auswertung

Die Bandbreite wird für  $f_h = 100 \text{ Hz}$  und  $f_l = 10 \text{ kHz}$  bestimmt. Mit dem Frequenzgenerator werden, für eine konstante Eingangsspannung, verschiedene Frequenzen von 2 Hz bis 8 MHz eingestellt und die Ausgangsspannung gemessen. Es ergeben sich die Werte aus Tab. 6. Daraus bestimmt sich jeweils die Grenzfrequenz und damit die Bandbreite.

Abb. (2) zeigt die Verstärkung gegen die eingestellte Frequenz. Es ist gut zu erkennen, dass die Verstärkung um die eingestellten Frequenzen von 100 Hz und 10 kHz zwei Wendepunkte aufweist. Aus Abb. (2) lassen sich auch die Grenzfrequenzen von Hoch- und Tiefpass bestimmen. Für die Anpassungen werden die respektiven Gleichungen zur Verstärkung verwendet. Diese sind in Tab. (2.2) eingetragen. Da  $\chi^2/\text{ddof} = 0.047$  deutlich unter dem optimalen Wert von 1 liegt, kann davon ausgegangen werden, dass die Messunsicherheit zu groß eingeschätzt wurde. Sie stimmen mit den eingestellten Frequenzen überein und die resultierende Bandbreite ist die Differenz zwischen den Grenzfrequenzen.

Die Bandbreite berechnet sich dann zu

$$\Delta f_{\text{eff}} \approx 11\,109(60) \text{ Hz}[1\%]. \quad (4)$$

Der errechnete Wert und dessen Unsicherheit liegen in dem erwarteten Bereich von etwa 10 kHz.

## 3 Johnson-Rauschen

### 3.1 Theoretischer Hintergrund

Das JOHNSON-Rauschen, auch thermisches Rauschen, entsteht durch thermodynamische Fluktuationen der Elektronen im Leitungsband. Dies geschieht, im Vergleich zum Schrotrauschen, ohne, dass eine Spannung angelegt ist. Elektronen bewegen sich im thermischen Gleichgewicht ungeordnet aufgrund ihrer thermischen Energie wodurch sie kurze Spannungs- bzw. Strompulse erzeugen. Mit Hilfe von sensitiven Messgeräten kann dieses Rauschen untersucht werden.

Der formale Zusammenhang der mittleren quadratischen Rauschspannung in einem Widerstand  $R$  ist

$$\overline{V_J^2} = 4k_B T R \Delta f_{\text{eff}}, \quad (5)$$

mit der Temperatur  $T$  und der Bandbreite  $\Delta f_{\text{eff}}$ .

### 3.2 Durchführung & Auswertung: Beobachtung des JOHNSON-Rauschens

Das JOHNSON-Rauschen wird im Vorverstärkerschaltkreis aus Abb. (4) beobachtet. Diese Schaltung befand sich in der LLE-Box Abb. (5), welche entsprechend verkabelt werden musste. Zur Beobachtung wurden folgende Werte eingestellt

$$R_{\text{in}} = 100 \text{ k}\Omega, R_f = 1 \text{ k}\Omega. \quad (6)$$

Die LLE-Box wurde dann mit der HLE-Box Abb. (6) verbunden. Die Einstellung der HLE-Box war

$$f_h = 0.1 \text{ kHz}, f_l = 100 \text{ kHz}, \text{Gain} = 300, \text{AC}. \quad (7)$$

Das Rauschen ließ sich dann auf dem Oszillographen beobachten Abb. (3). Es ist klar zu erkennen, dass das Rauschen starken Fluktuationen unterliegt und ungeordnet ist. Im Mittel bleibt es allerdings konstant.

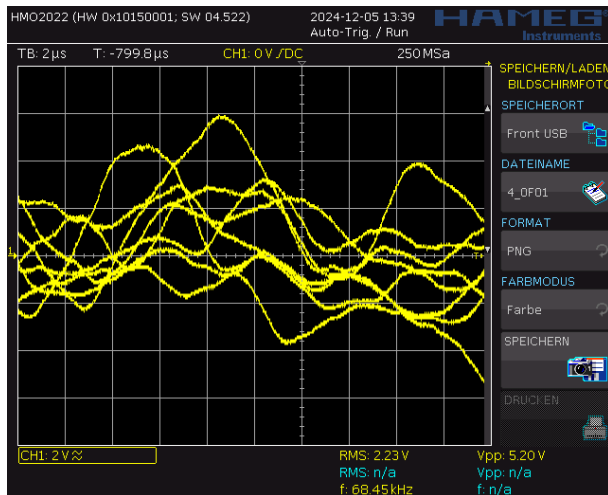


Abbildung 3 Oszillogramm des JOHNSON-Rauschen.

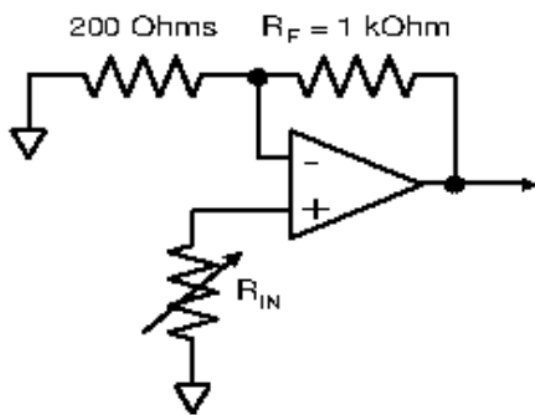


Abbildung 4 Vorverstärkerschaltkreis zur Beobachtung des JOHNSON-Rauschens.[1]

### 3.3 Durchführung & Auswertung: Messung des JOHNSON-Rauschens

Zur Messung der mittleren Spannung des Rauschens wird die Schaltung aus Abb. (7) verwendet. Die Einstellungen waren zusätzlich

$$\text{Multiplikator : } A \times A, \text{Zeitkonst.} = 1 \text{ s.} \quad (8)$$

Durch den Multiplikator ist das Ausgangssignal der HLE-Box

$$V_{\text{out}} = \frac{\overline{(V_{\text{in}}(t))^2}}{10 \text{ V}}. \quad (9)$$

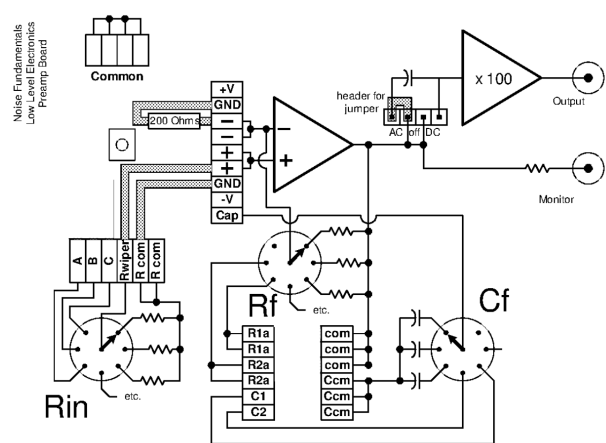


Abbildung 5 Die LLE-Box zur Messung und Beobachtung des JOHNSON-Rauschens.[1]

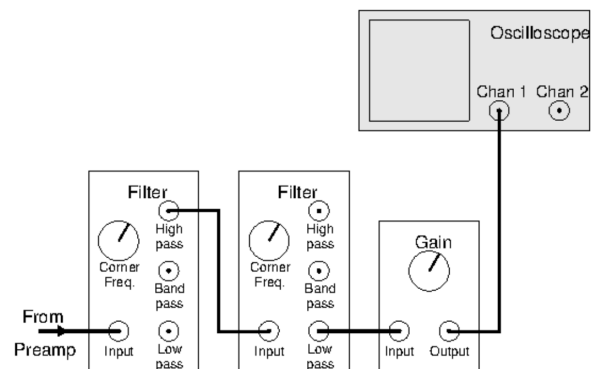
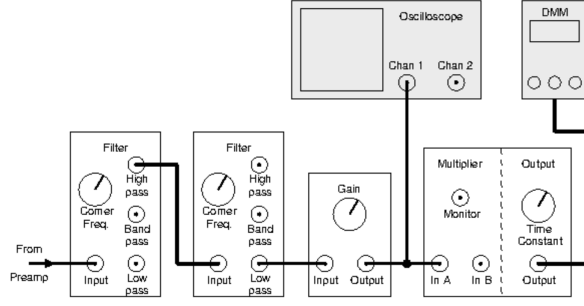


Abbildung 6 HLE-Box zur Messung und Beobachtung des JOHNSON-Rauschens.[1]

Dieses Signal wird dann über die Zeitkonstante von 1 s gemittelt.

Um zu überprüfen, ob der Multiplier wie erwartet funktioniert, kann der Output der HLE-Box gegen den Multiplier aufgetragen werden. Es ergibt sich Abb. (8). Der quadratische Zusammenhang mit Verschiebung ist klar zu erkennen. Dieser entsteht aufgrund der Verstärkung und Quadrierung des Multipliers nach Formel (9). Erst nach dem Multiplier wird das Signal zeitlich gemittelt.

Da das Ausgangssignal nur in einem kleinen Bereich – zwischen 0.6 V und 1.2 V – stabil und linear zum Eingangsrauschen ist, wird das DMM mit Hilfe der Verstärkung in diesem Bereich gehalten. Der Zusammenhang zwischen der am DMM



**Abbildung 7** HLE-Box zur Messung des JOHNSON-Rauschens.[1]

abgelesenen Spannung ist modelliert durch

$$V_{\text{meter}} = \overline{V_J^2(t) + V_N^2(t)} \frac{(600G_2)^2}{10V}, \quad (10)$$

wobei das Rauschen in die beiden Anteile  $V_J$  und  $V_N$  aufgeteilt werden muss.  $V_J$  ist das JOHNSON-Rauschen und  $V_N$  ist der Anteil des Rauschens, der innerhalb der Verstärker entsteht. Eine Korrelation zwischen diesen beiden Rauschtypen gibt es nicht, da sie auf unterschiedlichen Phänomenen beruhen. Das JOHNSON-Rauschen ist abhängig von der Temperatur und dem Widerstand, das Verstärkerrauschen nicht. Diese Tatsache erlaubt daher die Bestimmung von  $V_J$  über die Variation des Widerstands  $R_{\text{in}}$  (da  $V_J = V_J(R_{\text{in}})$  und  $V_N \neq V_N(R_{\text{in}})$ ). Das JOHNSON-Rauschen kann zusätzlich über die Variation der Bandbreite erfolgen, da es von der Verstärkung  $G_2$  abhängt.

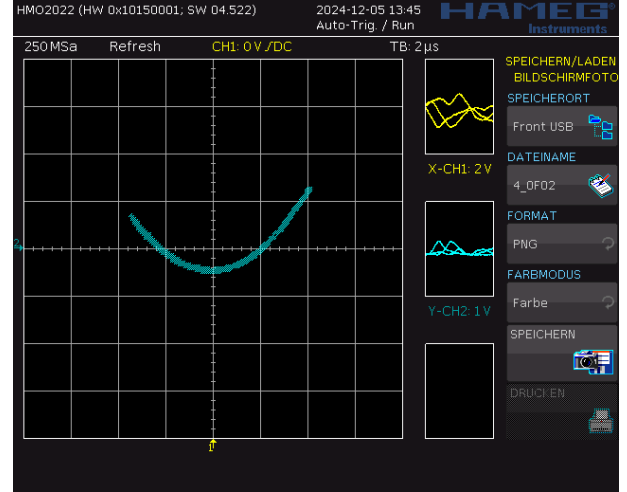
### 3.3.1 Variation des Widerstands

Wird der Widerstand variiert, um so das JOHNSON-Rauschen zu bestimmen, ergeben sich Abb. (9) mit Tab. (3.3.1). Die ursprünglichen Messwerte sind in Tab. (8).

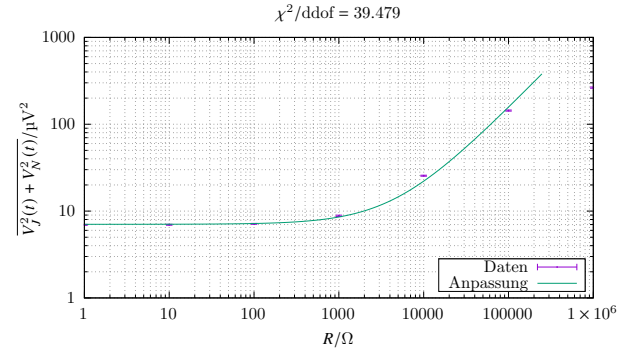
Da  $\chi^2/\text{ddof} = 39.749$ , kann davon ausgegangen werden, dass in diesem Fall die Messunsicherheit unterschätzt wurde.

Der Messpunkt für den größten Widerstand bei  $1\text{ M}\Omega$  folgt offensichtlich nicht dem linearen Verhalten der restlichen Datenpunkte, insofern wird dieser Punkt für die Anpassung ausgelassen.

Es lässt sich an der Darstellung der Residuen Abb. (10) erkennen, dass sie mit größer werdendem Widerstand steigen, was bedeutet, dass das lineare Verhalten für große Widerstände nicht



**Abbildung 8** Output der HLE-Box (Kanal 1) gegen Multiplier (Kanal 2).



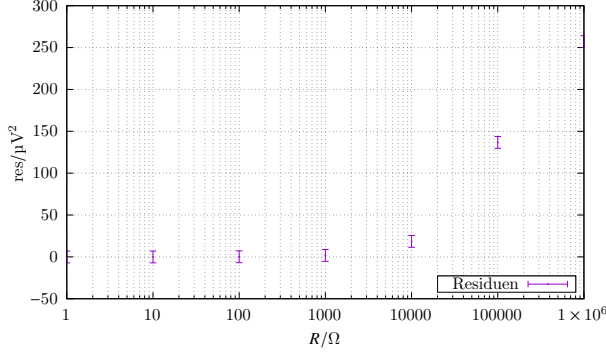
**Abbildung 9** Widerstandsabhängigkeit mit  $V_J^2(t) + V_N^2(t) = V_{\text{meter}} \frac{10V}{(600 \cdot G_2)^2}$

Parameter	Wert(Fehler)
m	$1.51(11) \times 10^{-15} \text{ V}^2/\Omega$
b	$7.04(29) \times 10^{-12} \text{ V}^2$

**Tabelle 2** Widerstandsabhängigkeit modelliert mit  $V_J^2(t) + V_N^2(t)(R_{\text{in}}) = m \cdot R + b$

passend ist. Dies ist besonders für die letzten drei Werte ersichtlich, da dessen Messunsicherheit nicht mehr die x-Achse schneiden, also nicht mit dem Funktional übereinstimmen.

Aufgrund der Nyquist-Formel können wir das gesammte und auch insbesondere das Johnson



**Abbildung 10** Die Residuen zur Widerstandsabhängigkeit;  $\text{res} = \overline{u^2} - \hat{u}^2$ .

Rauschen folgendermaßen identifizieren:

$$\overline{V_J^2 + V_N^2} = 4k_B^R RT \Delta f_{\text{eff}} + \overline{V_N^2}. \quad (11)$$

Aus der Anpassung geht hervor

$$\overline{V_J^2 + V_N^2} = mR + b, \quad (12)$$

sodass

$$k_B^R = \frac{m}{4T \Delta f_{\text{eff}}} \quad \overline{V_N^2} = b. \quad (13)$$

Die Temperatur war  $T = 293.95(50)$  K und die Bandbreite  $\Delta f_{\text{eff}} \approx 11\,109(60)$  Hz. Damit ist die BOLTZMANN-Konstante

$$k_B^R = 11.53(9) \times 10^{-23} \text{ J/K} [1\%, 112.7\sigma] \quad (14)$$

$$k_B^{\text{lit}} = 1.380 \times 10^{-23} \text{ J/K} \quad (15)$$

Der Literaturwert ist entnommen von CODATA[2]. Die Abweichung dieses Werts von der Literatur ist sehr groß, da aber der relative Fehler sehr klein ist, deutet dies auf einen systematischen Fehler und nicht auf statistische Unsicherheiten hin. Eine Ursache waren überraschenderweise Gräusche – wie Dialog oder das Tippen auf der Tastatur – die dazu geführt haben, dass sich die gemessenen Spannungen änderten. Da dieses Phänomen nicht erwartet war, ist davon auszugehen, dass es weitere Ursachen gibt, deren Ursprung nicht klar ist.

Für unsere Durchführung ist somit die Nyquist-Formel nicht mit der Messung kompatibel.

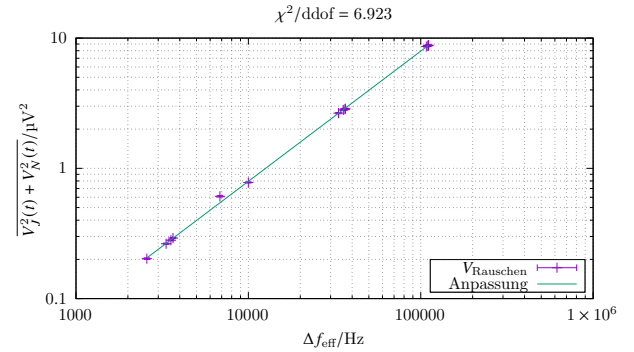
### 3.3.2 Variation der Bandbreite

Dieses Verfahren ist analog zur Variation des Widerstands. Für den Widerstand wird der größtmögliche Widerstand verwendet, bei dem das Rauschen noch lineares Verhalten zeigt:  $R_{\text{in}} = 1 \text{ k}\Omega$ . Dies bewirkt, dass das Gesamtrauschen vom JOHNSON-Rauschen dominiert wird.

Wird die Bandbreite variiert, um so das JOHNSON-Rauschen zu bestimmen, ergeben sich Abb. (11) mit Tab. (3). Die ursprünglichen Messenwerte sind Tab. (7) zu entnehmen.

Da  $\chi^2/\text{ddof} = 6.923$ , wurden die Messunsicherheiten leicht überschätzt, sind aber noch im guten Rahmen, sodass sie als repräsentativ angesehen werden können.

Es lässt sich erkennen, dass das JOHNSON-Rauschen linear mit der Bandbreite steigt. Mit Zunahme der Bandbreite werden immer mehr Frequenzen hindurchgelassen. Da allerdings das Rauschen linear steigt, muss jede Frequenz einen gleichen Beitrag leisten. Anders gesagt, ist die Verstärkung unabhängig von der Frequenz. Das JOHNSON-Rauschen ist also weißes Rauschen. Gleichzeitig lässt sich die Linearität der Nyquist-Formel bestätigen.



**Abbildung 11** Bandbreitenabhängigkeit mit  $V_J^2(t) + V_N^2(t) = V_{\text{meter}} \frac{10 \text{ V}}{(600 \cdot G_2)^2}$  und  $\Delta f_{\text{eff}} = \frac{f_L^4 \pi (f_L - f_h)}{2^{3/2} (f_L^4 - f_h^4)}$

Es ist

$$\overline{V_J^2 + V_N^2} = 4k_B^f TR_{\text{in}} \Delta f_{\text{eff}} + \overline{V_N^2}. \quad (16)$$

Aus der Anpassung geht hervor

$$\overline{V_J^2 + V_N^2} = m \Delta f_{\text{eff}} + b, \quad (17)$$

Parameter	Wert(Fehler)
m	$7.943(69) \times 10^{-17} \text{ V}^2/\text{Hz}$
b	$7.5(45) \times 10^{-15} \text{ V}^2$

**Tabelle 3** Bandbreitenabhängigkeit modelliert mit  $V_J^2(t) + V_N^2(t) (\Delta f_{\text{eff}}) = m \cdot \Delta f_{\text{eff}} + b$

sodass

$$k_B^f = \frac{m}{4TR_{\text{in}}} \quad \overline{V_N^2} = b. \quad (18)$$

Der Widerstand lag bei  $R_{\text{in}} = 1 \text{ k}\Omega$ . Damit ist die BOLTZMANN-Konstante

$$k_B^f = 6.756(60) \times 10^{-23} \text{ J/K} [1\%, 89.6\sigma] \quad (19)$$

$$k_B^{\text{lit}} = 1.380 \times 10^{-23} \text{ J/K} \quad (20)$$

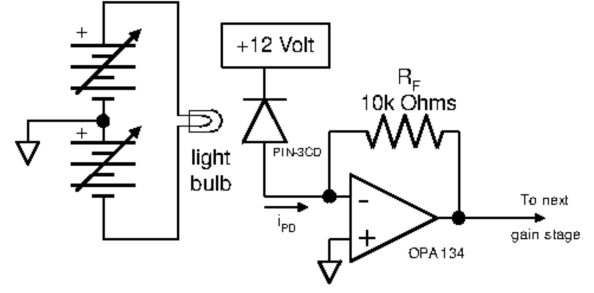
Der Literaturwert ist entnommen von CODATA[2]. Hier ist die Abweichung von der Literatur nicht so groß wie bei der Variation des Widerstands, es sind allerdings die selben Begründungen für die Abweichung.

Beide Verfahren liefern Werte, die sehr stark von der Literatur abweichen;  $k_B^f$  ist näher an der Literatur als  $k_B^R$ . Grund für den Unterschied zwischen  $k_B^f$  und  $k_B^R$  könnte sein, dass das JOHNSON-Rauschen weißes Rauschen ist – daher unabhängig von der Frequenz – aber abhängig von der Temperatur. Das bedeutet, dass die Variation der Frequenz selbst keinen Einfluss hat, die Temperatur im Widerstand allerdings schon. Deshalb ist die Abweichung bei der Frequenz geringer, da eine nicht unerhebliche Abweichung durch die Temperatur im Widerstand zustande kommen kann. Die absolute Abweichung beider Verfahren von der Literatur sind dann auf systematische Fehler zurückzuführen. Diese wurden schon zuvor diskutiert.

## 4 Schrotrauschen

### 4.1 Theoretischer Hintergrund

Da die elektrische Ladung in  $e$  gequantelt ist, wird bei dem Übergang von Elektronen über eine Potentialbarriere (z.B. zwischen zwei Bauteilen, Photodiode, etc.) stets eine Ladung von genau einem  $e$  transferiert. Da die eingehende Ladung pro Zeit also nicht kontinuierlich ist, kommt es zu nicht stetigen Ausschlägen der Spannung,



**Abbildung 12** Schaltung für die LLE-Box zur Beobachtung und Messung des Schrotrauschens.[1]

die über dieses Potential gemessen wird. Diese Spannung wird als Schrotrauschen auf sensitiven Messgeräten wahrgenommen.

Formal ist das mittlere Rauschstromquadrat nach Schottky's Formel:

$$\overline{\delta i^2} = 2ei_{\text{dc}}\Delta f_{\text{eff}}, \quad (21)$$

mit  $i_{\text{dc}}$  der angelegten Stromstärke. Da in der verwendeten Anordnung kein Hochpass verbaut ist, ist

$$\Delta f_{\text{eff}} = \int_0^\infty df G_{\text{LP}}^2 \underbrace{G_{\text{HP}}^2}_{=1} = \frac{\pi f_1}{2^{3/2}}. \quad (22)$$

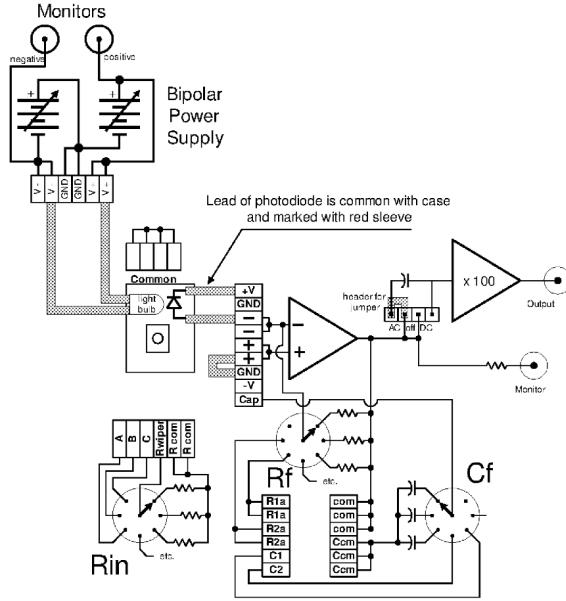
### 4.2 Durchführung & Auswertung: Beobachtung des Schrotrauschens

Das Schrotrauschen wurde innerhalb Abb. (12) bei einer Photodiode beobachtet. Dafür wurde dieser Schaltkreis in Abb. (13) zusammengesteckt. Die Elektronen aus der Photodiode wurden von einer Glühlampe herausgelöst, damit diese möglichst unkorreliert sind, um kein gleichmäßiges Rauschen zu erhalten.

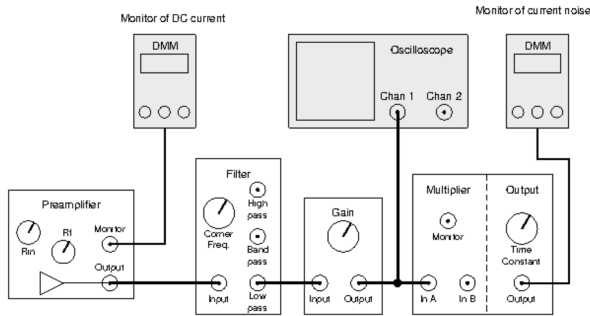
Beobachtet wurde der Rauschstrom bzw. die Rauschspannung mit Abb. (14). Damit dies sichtbar war, wurde die Einstellung  $f_1 = 100 \text{ kHz}$  für die HLE-Box getroffen. Es ergab sich ein ähnliches Bild zum JOHNSON-Rauschen.

### 4.3 Durchführung & Auswertung: Messung des Schrotrauschens

Um den linearen Bereich der Messgeräte zu verwenden, wurde der Gain für jeden Messpunkt so



**Abbildung 13** LLE-Box zur Beobachtung und Messung des Schrotrauschens.[1]



**Abbildung 14** Schaltplan zur Messung des Schrotrauschens.[1]

eingestellt, dass die Werte auf dem DMM zwischen 0.6 V und 1.2 V lagen. Der Widerstand in der LLE-Box betrug  $R_f = 10 \text{ k}\Omega$ . Da der Strom, den der OpAmp zieht, vernachlässigbar klein ist, fließt  $i_{dc}$  vollständig durch  $R_f$ , wodurch

$$V_{\text{monitor}} = -R_f i_{dc}. \quad (23)$$

Das Schrotrauschen im Schaltkreis war dann gegeben durch

$$\overline{\delta i^2} = \frac{\overline{V_{\text{meter}}(t)} 10 \text{ V}}{(100 G_2 R_f)^2}, \quad (24)$$

mit  $\overline{V_{\text{meter}}(t)}$  dem auf dem DMM abgelesenen Wert und  $G_2$  dem Gain der HLE-Box.

#### 4.3.1 Untergrundbeiträge

Das gemessene Rauschen entsteht nicht ausschließlich durch das Schrotrauschen.

Das JOHNSON-Rauschen im  $R_f$  Widerstand liefert einen Beitrag. Um diesen zu berechnen wurde die Ausgabe von  $\overline{V_{\text{meter}}(t)}$  bei ausgeschalteter Lampe gemessen. Diese liegt bei

$$V_{\text{meter}}^J = 1.075(5) \text{ V}[1\%] \quad G_2 = 6000. \quad (25)$$

Der Operationsverstärker hat eine gewisse Offset-Spannung bei ausgeschalteter Lampe für  $i_{dc} = 0 \text{ V}$ . Diese beträgt

$$V_{\text{monitor}}^{\text{OpAmp}} = -0.4(1) \text{ mV}[25\%]. \quad (26)$$

Das Aus- und Einstecken des DMMs ist eine mögliche Quelle für ein weiteres Rauschen, allerdings zeigte dies keinen Effekt an  $V_{\text{monitor}}$ .

Diese Beiträge werden in den folgenden Berechnungen berücksichtigt.

#### 4.3.2 Abhängigkeit $i_{dc}$

Für unterschiedliche Spannungen der Glühlampe stellte sich ein unterschiedlich starkes Rauschen ein, da dieses linear von  $i_{dc}$  abhängt. Die Messwerte sind Tab. (10) zu entnehmen.  $\overline{\delta i^2}$  gegen  $i_{dc}$  ist in Abb. (15) dargestellt. Die Parameter der Anpassung sind in Tab. (4) eingetragen.

Da  $\chi^2/\text{ddof} = 1.648$ , sind die Messunsicherheiten sehr gut eingeschätzt worden.

Es ist  $R_f = 10 \text{ k}\Omega$  und  $\Delta f_{\text{eff}} = 111\,051 \text{ Hz}$ . Der lineare Zusammenhang lässt sich klar erkennen.  $\Delta f_{\text{eff}}$  hat keine Messunsicherheit, da der eingestellte Wert  $f_l = 100 \text{ kHz}$  verwendet wurde, um mit  $\Delta f_{\text{eff}} = \frac{f_l \pi}{2^{3/2}}$  die effektive Bandbreite zu berechnen. Die Elementarladung bestimmt sich über den Geradenfit

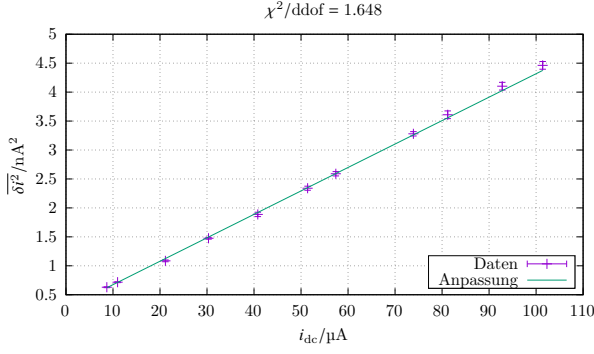
$$e^{i_{dc}} = \frac{m}{2\Delta f_{\text{eff}}}. \quad (27)$$

Damit

$$e^{i_{dc}} = 1.823(17) \times 10^{-19} \text{ C}[1\%, 12.9\sigma] \quad (28)$$

$$e^{\text{lit}} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}. \quad (29)$$





**Abbildung 15** Stromabhängigkeit mit  $\overline{\delta i^2} = \frac{V_{\text{meter}} 10 \text{ V}}{(100 G_2 R_f)^2}$  und  $i_{\text{dc}} = -\frac{V_{\text{monitor}}}{R_f}$

Parameter	Wert(Fehler)
m	$4.049(38) \times 10^{-14} \text{ A}^2/\text{A}$
b	$2.690(87) \times 10^{-19} \text{ A}^2$

**Tabelle 4** Stromabhängigkeit modelliert mit  $\overline{\delta i^2}(i_{\text{dc}}) = m \cdot i_{\text{dc}} + b$

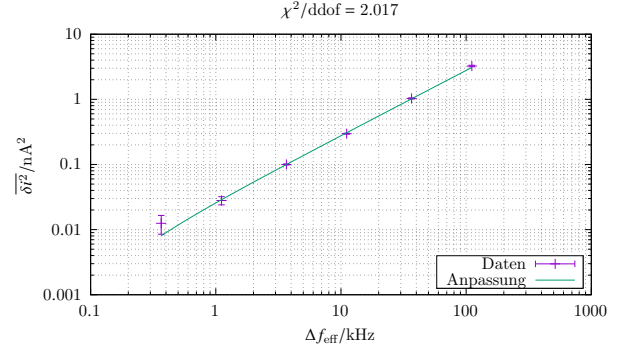
Der Literaturwert ist CODATA[3] entnommen. Die Abweichung von dem Literaturwert ist groß und der relative Fehler sehr klein. Das bedeutet, dass kein statistischer Fehler sondern ein systematischer Fehler für diese große Abweichung gesorgt hat. Auch hier gilt die selbe Begründung wie bei der Bestimmung von  $k_B$ .

#### 4.3.3 Abhängigkeit $\Delta f_{\text{eff}}$

Für  $i_{\text{dc}} = \text{const.}$  wurde durch Variation der Bandbreite die Weißheit des Rauschens überprüft. Die Weißheit gibt an, wie sich das Rauschen bei unterschiedlichen Frequenzen verhält. Es ist weiß, wenn es frequenzunabhängig ist.  $\overline{\Delta i^2}$  ist gegen  $\Delta f_{\text{eff}}$  in Abb. (16) aufgetragen. Die Messwerte sind Tab. (9) zu entnehmen. Die Parameter für den Fit sind in Tab. (5) eingetragen.

Da  $\chi^2/\text{ddof} = 2.017$ , sind die Messunsicherheiten ebenfalls repräsentativ.

Wie erwartet ist zu erkennen, dass der Rauschstrom linear mit der Bandbreite steigt. Das bedeutet, dass das für die Vergrößerung der Bandbreite immer eine konstante Rauschspannung addiert wird. Das Rauschen ist also nur abhängig von der Bandbreite und unabhängig von der Frequenz selbst. Dieses Verhalten war zu erwarten, weil das Schrotrauschen weißes Rauschen ist.



**Abbildung 16** Frequenzabhängigkeit mit  $\overline{\delta i^2} = \frac{V_{\text{meter}} 10 \text{ V}}{(100 G_2 R_f)^2}$  und  $\Delta f_{\text{eff}} = \frac{f_1 \pi}{2^{3/2}}$

Parameter	Wert(Fehler)
m	$2.784(56) \times 10^{-23} \text{ A}^2/\text{Hz}$
b	$-2.2(30) \times 10^{-21} \text{ A}^2$

**Tabelle 5** Frequenzabhängigkeit modelliert mit  $\overline{\delta i^2}(f) = m \cdot f + b$

Die Elementarladung bestimmt sich über den Geradenfit

$$e^{\Delta f_{\text{eff}}} = \frac{m}{2i_{\text{dc}}}. \quad (30)$$

Damit

$$e^{\Delta f_{\text{eff}}} = 1.958(39) \times 10^{-19} \text{ C} [2\%, 10\sigma] \quad (31)$$

$$e^{\text{lit}} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (32)$$

Der Literaturwert ist CODATA[3] entnommen. Die Abweichung von dem Literaturwert ist auch für dieses Verfahren groß und die relative Fehler klein. Dieser Wert unterscheidet sich nicht stark von  $e^{i_{\text{dc}}}$ ; da der relative Fehler größer ist, ist die Abweichung kleiner. Hier gilt die selbe Diskussion.

#### 4.3.4 Vergleich $i_{\text{dc}}$ und $\Delta f_{\text{eff}}$

Vergleicht man die berechneten Elementarladungen so liegt die Abweichung bei

$$e^{i_{\text{dc}}} = 1.823(17) \times 10^{-19} \text{ C} [1\%, 12.9\sigma] \quad (33)$$

$$e^{\Delta f_{\text{eff}}} = 1.958(39) \times 10^{-19} \text{ C} [2\%, 9.1\sigma] \quad (34)$$

$$|e^{i_{\text{dc}}} - e^{\Delta f_{\text{eff}}}| = 0.135(43) \times 10^{-19} \text{ C}. \quad (35)$$



## 5 Fazit

Ein Bandpass liefert eine Bandbreite von

$$\Delta f_{\text{eff}} = \int_0^\infty df G_{\text{HP}}^2(f) G_{\text{LP}}^2(f) = \frac{f_1^4 \pi (f_h - f_l)}{2^{3/2} (f_h^4 - f_l^4)}. \quad (36)$$

Dieser Formel stimmt gut mit der gemessenen Bandbreite überein und konnte für diesen Versuch verwendet werden.

Das JOHNSON-Rauschen, oder thermisches Rauschen, beschreibt das Rauschen in einem Widerstand  $R$  bei Temperatur  $T$  für eine gewissen Bandbreite  $\Delta f_{\text{eff}}$

$$\overline{V_J^2} = 4k_B T R \Delta f_{\text{eff}}. \quad (37)$$

Hieraus lässt sich, mit Variation des Widerstands oder der Bandbreite, die BOLTZMANN-Konstante bestimmen, zu

$$k_B^R = 11.53(9) \times 10^{-23} \text{ J/K} [1\%, 112.7\sigma] \quad (38)$$

$$k_B^f = 6.756(60) \times 10^{-23} \text{ J/K} [1\%, 89.6\sigma]. \quad (39)$$

Die Abweichung von der Literatur sind bei sehr kleinem relativem Fehler sehr groß, was auf systematische Fehler hinweist, wie die Änderung der gemessenen Spannung bei einer Geräuschkulisse(!).

Das Schrotrauschen entsteht durch die Quantelung der Elementarladung in  $e$ . Wenn Ladungsträger eine Potentialbarriere überwinden, dann ist die transferierte Ladung nicht kontinuierlich, was zu Strom- und Spannungsimpulsen führt. Das Rauschen hängt also von der Ladung  $e$ , dem angelegten Gleichstrom  $i_{\text{dc}}$  und der Bandbreite  $\Delta f_{\text{eff}}$  ab, wie

$$\overline{\delta i^2} = 2ei_{\text{dc}}\Delta f_{\text{eff}}. \quad (40)$$

Da hier nur ein Tiefpass verwendet worden ist, ist  $\Delta f_{\text{eff}} = \frac{\pi f_l}{2^{3/2}}$ . Die Elementarladung kann dann über Variation von  $i_{\text{dc}}$  oder  $\Delta f_{\text{eff}}$  berechnet werden, zu

$$e^{i_{\text{dc}}} = 1.823(17) \times 10^{-19} \text{ C} [1\%, 12.9\sigma] \quad (41)$$

$$e^{\Delta f_{\text{eff}}} = 1.958(39) \times 10^{-19} \text{ C} [2\%, 10\sigma]. \quad (42)$$

Die Abweichung von der Literatur ist zwar signifikant kleiner als bei der BOLTZMANN-Konstante, allerdings nicht im erwarteten Intervall. Da hier

auch die statistischen Fehler sehr gering sind, muss es sich hier um die selben systematischen Fehler, wie bei der BOLTZMANN-Konstante handeln.

Beide Rauschtypen sind weißes Rauschen, was mit einem linearen Zusammenhang zwischen der Rauschspannung und der Bandbreite gezeigt wurde.

## 6 Appendix

$f$ [Hz]	$U_0$ [V]	$\Delta U_0$ [V]	$U$ [V]	$\Delta U$ [V]
2	5.95	0.01	$6 \times 10^{-3}$	$10 \times 10^{-3}$
8	7.35	0.01	$45 \times 10^{-3}$	$10 \times 10^{-3}$
$2 \times 10^1$	7.40	0.01	$295 \times 10^{-3}$	$10 \times 10^{-3}$
$8 \times 10^1$	7.50	0.01	4.01	0.05
$2 \times 10^2$	7.50	0.01	7.27	0.05
$8 \times 10^2$	7.50	0.05	7.51	0.05
$2 \times 10^3$	7.50	0.05	7.51	0.05
$8 \times 10^3$	7.47	0.05	6.33	0.05
$2 \times 10^4$	7.44	0.05	1.83	0.05
$8 \times 10^4$	7.45	0.05	$119 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$
$2 \times 10^5$	7.45	0.05	$20 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-3}$
$8 \times 10^5$	7.45	0.05	$1.5 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$
$2 \times 10^6$	7.40	0.04	$1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$
$8 \times 10^6$	7.70	0.10	$1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$

**Tabelle 6** Messdaten zur Vermessung der Bandbreite (2.2).

$f_l$ [Hz]	$f_h$ [Hz]	$G_2$	$V_{\text{meter}}$ [V]	$\Delta V_{\text{meter}}$ [V]	$f_l$ [Hz]	$G_2$	$V_{\text{meter}}$ [V]	$\Delta V_{\text{meter}}$ [Hz]
$3.3 \times 10^3$	$1 \times 10^1$	$1 \times 10^4$	1.05	$10 \times 10^{-3}$	330	$10 \times 10^3$	0.125	0.040
$3.3 \times 10^3$	$1 \times 10^2$	$1 \times 10^4$	1.01	$1 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^3$	$10 \times 10^3$	0.28	0.04
$3.3 \times 10^3$	$3 \times 10^2$	$1 \times 10^4$	0.95	$1 \times 10^{-2}$	$3.3 \times 10^3$	$10 \times 10^3$	1.0	0.02
$3.3 \times 10^3$	$1 \times 10^3$	$1 \times 10^4$	0.73	$1 \times 10^{-2}$	$10 \times 10^3$	$6 \times 10^3$	1.07	0.02
$10 \times 10^3$	$1 \times 10^3$	$6 \times 10^3$	1.01	$1 \times 10^{-2}$	$33 \times 10^3$	$3 \times 10^3$	0.93	0.02
$10 \times 10^3$	$4 \times 10^3$	$6 \times 10^3$	0.79	$1 \times 10^{-2}$	$100 \times 10^3$	$1.5 \times 10^3$	0.731	0.02
$33 \times 10^3$	100	$3 \times 10^3$	0.93	$1 \times 10^{-2}$	<b>Tabelle 9</b> Messdaten zur Vermessung des Schrottrauschens in Abhängigkeit von $\Delta f_{\text{eff}}$ .			
$33 \times 10^3$	300	$3 \times 10^3$	0.92	$1 \times 10^{-2}$				
$33 \times 10^3$	$1 \times 10^3$	$3 \times 10^3$	0.91	$1 \times 10^{-2}$				
$33 \times 10^3$	$3 \times 10^3$	$3 \times 10^3$	0.86	$1 \times 10^{-2}$				
$100 \times 10^3$	100	$2 \times 10^3$	1.27	$1 \times 10^{-2}$				
$100 \times 10^3$	300	$2 \times 10^3$	1.26	$1 \times 10^{-2}$				
$100 \times 10^3$	$1 \times 10^3$	$2 \times 10^3$	1.26	$1 \times 10^{-2}$				
$100 \times 10^3$	$3 \times 10^3$	$2 \times 10^3$	1.24	$1 \times 10^{-2}$				

**Tabelle 7** Messdaten zur Vermessung des JOHNSON-Rauschens mit der Variation der Bandbreite.

### Literatur

- [1] Praktikumsleitung: P425 elektronisches rauschen. Universität Bonn (2016)
- [2] CODATA Boltzmann Konstante. <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?k> (2022)
- [3] CODATA Elementarladung. <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?e> (2022)

$R_{\text{in}} [\Omega]$	$G_2$	$V_{\text{meter}} [\text{V}]$	$\Delta V_{\text{meter}} [\text{V}]$
1	$2 \times 10^3$	1	$12 \times 10^{-3}$
$1 \times 10^1$	$2 \times 10^3$	1.002	$12 \times 10^{-3}$
$1 \times 10^2$	$2 \times 10^3$	1.027	$12 \times 10^{-3}$
$1 \times 10^3$	$1.5 \times 10^3$	0.714	$13 \times 10^{-3}$
$1 \times 10^4$	$1 \times 10^3$	0.920	$12 \times 10^{-3}$
$1 \times 10^5$	$4 \times 10^2$	0.828	$12 \times 10^{-3}$
$1 \times 10^6$	$3 \times 10^2$	0.856	$14 \times 10^{-3}$

**Tabelle 8** Messdaten zur Vermessung des JOHNSON-Rauschens mit der Variation des Widerstands.

$i_{\text{dc}} [\text{V}]$	$G_2$	$I [\text{A}]$	$\Delta I [\text{V}]$
$-86.9 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^3$	1.008	0.012
$-109.8 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^3$	1.147	0.012
$-211.5 \times 10^{-3}$	$3 \times 10^3$	0.977	0.014
$-303.2 \times 10^{-3}$	$3 \times 10^3$	1.328	0.014
$-408 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^3$	0.755	0.015
$-514 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^3$	0.936	0.014
$-574 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^3$	1.036	0.015
$-739 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^3$	1.312	0.015
$-812 \times 10^{-3}$	$1.5 \times 10^3$	0.812	0.015
$-928 \times 10^{-3}$	$1.5 \times 10^3$	0.923	0.015
$-1014 \times 10^{-3}$	$1.5 \times 10^3$	1.004	0.015

**Tabelle 10** Messdaten zur Vermessung des Schrottrauschens in Abhängigkeit von  $i_{\text{dc}}$ .