

# Praktikum 4 – Versuch 402: Quantelung von Energie

Jonas Wortmann<sup>1\*</sup> and Angelo Brade<sup>1\*</sup>

<sup>1\*</sup>Rheinische Friedrich–Wilhelms–Universität, Bonn.

\*Corresponding author(s). E-mail(s): [s02jwort@uni-bonn.de](mailto:s02jwort@uni-bonn.de); [s72abrad@uni-bonn.de](mailto:s72abrad@uni-bonn.de);

## 1 Einleitung

Elektronen emittieren bzw. absorbieren beim Übergang zwischen Orbitalen Photonen mit einer diskreten Energie. Diese Energie ist gequantelt in Vielfache des PLANCK'schen Wirkungsquantums  $h$ . Um die Größe der Quantelung zu bestimmen wird der Photoeffekt und die Messung der BALMER-Serie von Wasserstoff verwendet.

## 2 Photoelektrische Bestimmung von $h$ .

### 2.1 Theoretischer Hintergrund

Das FERMI-Niveau beschreibt das höchste Energieniveau in einem Atom im Grundzustand, welches aufgrund des PAULI-Prinzips noch besetzt werden darf. Die Austrittsarbeit ist die Arbeit die benötigt wird, um ein Elektron aus diesem Energieniveau zu heben und vom dem Atoms zu lösen. Für verschiedene Atome ist dieses Level, wegen ihrer unterschiedlichen Elektronanzahl, nicht gleich. Makroskopisch zeigt sich dies in unterschiedlichen Austrittsarbeiten für verschiedene Materialien, wie z.B. für die Anode und die Kathode im experimentellen Aufbau.

Solche Energieniveaus können mit dem Bänderschema verdeutlicht werden. Eine mögliche Anordnung ist in Abb. (1) gezeigt. Die gestrichelten-gepunkteten Linien geben die jeweiligen FERMI-Niveaus an.  $W_K$  und  $W_A$  geben die Austrittsarbeit an. Die alleinstehende gestrichelte Linie ist das Vakuumniveau.

Werden Anode und Kathode miteinander verbunden, so gleichen sich ihre FERMI-Niveaus aus

und es entsteht eine Potentialdifferenz von  $U_{KA}$  zum Vakuumsniveau zwischen Anode und Kathode. Wird eine Spannung zwischen Anode und Kathode aufgebaut, so verschieben sich die FERMI-Niveaus und es baut sich eine weitere Potentialdifferenz  $U_G$  auf. Der Photoeffekt beschreibt folgendes Phänomen: Trifft ein Photon auf die Kathode, so lässt sich eine Gleichung zwischen der Energie des Photons und der Energie des Elektrons aufstellen, mit  $eU_0$  der kinetischen Energie der Elektronen

$$\Leftrightarrow E_\gamma = h\nu = eU_0 - eU_{KA} + W_K = E_e \quad (1)$$

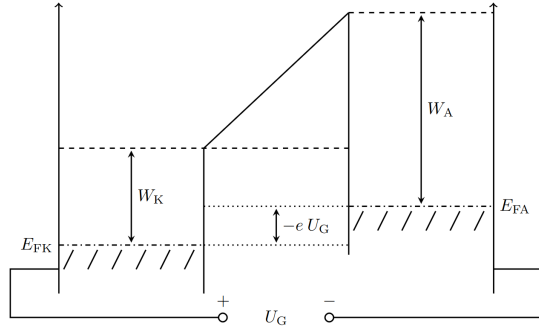
$$\Leftrightarrow \quad \quad \quad = eU_0 - (W_K - W_A) + W_K \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \quad \quad = eU_0 + W_A. \quad (3)$$

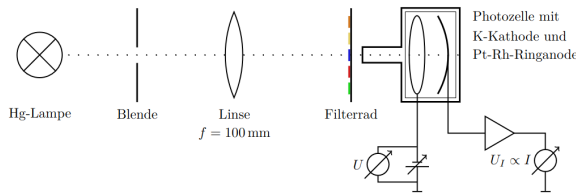
Dem Photon ist es also ab einer ausgezeichneten Energie möglich das Elektron aus dem FERMI-Niveau zu heben und aus der Kathode zu lösen.

### 2.2 Experimenteller Aufbau

Der experimentelle Aufbau ist in Abb. (2) zu sehen. Die Hg-Lampe diente als Lichtquelle. Mit der Blende und der Linse wurde die Intensität und Breite des Lichtstrahls so eingestellt, dass ein fokussierter Punkt auf der Photokathode zu sehen war. Dabei wurde darauf geachtet, dass der Lichtstrahl nicht die Anode berührte. Zur Vermeidung von Streulicht wurde über die Kathode–Anode–Anordnung eine Blende gestülpt, mit einem Rohrausschnitt, welcher auf das Filterrad zeigte. Mit Hilfe des Filterrades wählte man verschiedene Wellenlängen zur Beobachtung aus.



**Abbildung 1** Bänderschema der Anode und Kathode bei anlegen einer äußeren Spannung.[? ]



**Abbildung 2** Experimenteller Aufbau zum Photoeffekt.

Das Gegenfeld konnte mit einer separaten Spannung eingestellt und variiert werden. Da die Spannung, die für das Gegenfeld zur Verfügung stand, bis zu 12 V ausgeben kann, wurde diese mit einem Spannungsteiler auf  $U' = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U = \frac{100 \Omega}{100 \Omega + 333 \Omega} 12 \text{ V} = 2,77 \text{ V}$  reduziert.

### 2.3 Durchführung & Auswertung

Die Messung des Photostroms und des Gegenfeldes erfolgte über zwei DMMs. Jede Messung wurde zwei mal durchgeführt, da die Intensität der Hg-Lampe schwankt. Beide Messreihen zusammen werden als ein Datensatz behandelt. Es wird nicht explizit der Mittelwert gebildet, da der Geradenfit bereits den gesamten Datensatz mittelt.

Die Spannung des Gegenfeldes wurde für alle Interferenzfilter (305 nm, 365 nm, 436 nm, 546 nm und 578 nm) von der maximalen Spannung ( $\approx 2,77 \text{ V}$ ) bis zur minimalen Spannung ( $\approx 0,0006 \text{ V}$ ) variiert und der Photostrom gemessen. Der Anodenstrom  $I_0$ , der von der Anode zu Kathode fließt, wenn die Gegenspannung maximal ist, wurde jeweils gesondert gemessen, um diesen in der Auswertung von der Messung zu subtrahieren. Bis

zu einer gewissen Gegenfeldspannung  $U_G = U_0$  fließt kein Photostrom  $I$ ; ab  $U_0$  fließt dieser mit einem quadratischen Zusammenhang zu  $U_G$ .

Für die Auswertung wird  $\sqrt{I - I_0}$  – der Photostrom  $I$  abzüglich  $I_0$  unter der Wurzel – gegen die Gegenfeldspannung  $U_G$  aufgetragen. Die Graphen finden sich im Appendix von Abb. (10) bis Abb. (14). Ein Geradenfit wird für alle Messdaten, die im quadratischen Bereich liegen durchgeführt. Die Messpunkte, die kein quadratisches Verhalten zeigen, geben den Strom von der Anode zur Kathode an und werden nicht berücksichtigt.  $\chi^2/\text{ddof}$  ist für alle Geraden viel kleiner als der ideale Wert 1. Diese Diskrepanz ist hier nicht zu großer Fehler sondern einer Überfittung der Geraden zuzuordnen. Die Nullstelle der Fitgeraden liefert genau den Wert der Gegenspannung, bei der kein Photostrom fließt.

| $\lambda$ | $U_0$         |
|-----------|---------------|
| 305 nm    | -1,1806(93) V |
| 365 nm    | -1,509(17) V  |
| 436 nm    | -0,951(11) V  |
| 546 nm    | -0,2615(57) V |
| 578 nm    | -0,388(15) V  |

Trägt man diese Werte gegen die jeweilige Frequenz des Lichts auf, so lässt sich ein Geradenfit durchführen, dessen Steigung gleich dem PLANCK'schen Wirkungsquantum und dessen Achsenabschnitt gleich der Austrittsarbeit aus der Kathode ist. Dieser Plot ist in Abb. (3) zu sehen.  $\chi^2/\text{ddof}$  ist viel größer als 1, weil sich die Fehler, durch die kleinen Messfehler, in der Fehlerfortpflanzung minimiert haben.

Gemessene Gegenspannung  $U_0$  gegen die Frequenz der auf die Kathode treffenden Photonen. Der Achsenabschnitt ist  $W_A$  und die Steigung ist  $h$ .

Es ergibt sich ein Wert von

$$h = 4,46(64) \cdot 10^{-15} \text{ eVs}[8\%]. \quad (4)$$

Der aktuelle CODATA[? ] Wert ist

$$h_{\text{CODATA}} \approx 4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}. \quad (5)$$

Die Abweichung des gemessenen Werts liegt bei ca. 8% und ist hier und im folgenden in Klammern [•] angegeben. Dieser Wert liegt unter 10%

Abweichung, was aufgrund der passenden Geradenfits und guten Messwerte erwartet war.

Die Austrittsarbeit wurde bestimmt zu

$$W_A = -2,15(38) \text{ eV} [60\%]. \quad (6)$$

Aus [?] lässt sich entnehmen, dass die Anode aus Platin besteht, welche eine Austrittsarbeit von

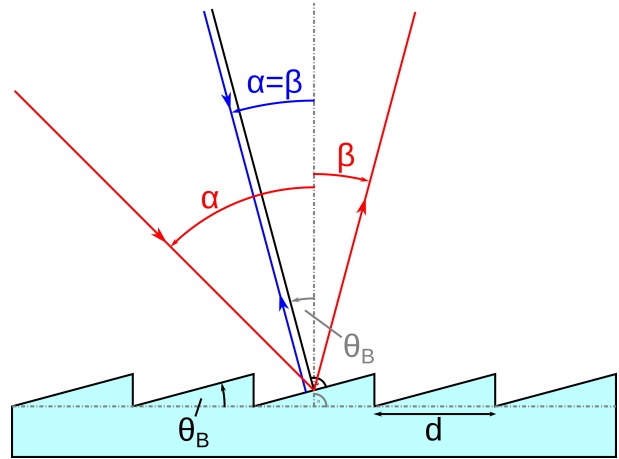
$$W_{\text{lit.}} = -5,32 \text{ eV} \quad (7)$$

bestitzt. Der Wert ist [?] entnommen. Die Abweichung liegt bei 60%. Dies war nicht erwartet, da die Abweichung von  $h$  vom Literaturwert sehr gering ist. Es ist allerdings nicht klar, ob die Anode vollständig aus Platin besteht, oder ein Gemisch aus Platin und anderen Materialien ist bzw. noch eine Legierung besitzt. Wäre das der Fall, dann wäre die Abweichung verständlich.

Die Intensität des Lichtstrahl hat in der Theorie keine Auswirkung auf die kinetische Energie der Elektronen, daher auch auf die Gegenspannung, da die Energie der Photonen nur abhängig von der Wellenlänge ist. Die Erwartung ist also keine Abweichung der Gegenspannung.

Zur Kontrolle wurde für die Wellenlänge 365 nm eine Messung mit höherer Intensität durchgeführt. Das Ergebnis ist in Abb. (4) zu sehen. Es ergibt sich eine Gegenspannung von  $U_0^h = -1,87(10) \text{ V}$ . Die Gegenspannung bei niedriger Intensität liegt bei  $U_0^n = -1,509(17) \text{ V}$ . Das entspricht einer Abweichung von  $U_0^h$  von  $U_0^n$  von ca. 24%. Diese Abweichung entspricht nicht der Erwartung. Eine Abweichung ist hier allerdings keine Anfechtung der Theorie, sondern eine ungenaue Messung. Die Fitgerade für die Datenpunkte bei hoher Intensität hat eine Güte von  $\chi^2/\text{dof} \approx 21$ , was für einen passenden Geradenfit zu hoch ist. Die Fehler der Messdaten wurden hier zu klein gewählt, was zu Abweichungen der Nullstelle der Geraden geführt hat.

Photostrom abzüglich des Anodenstroms gegen Gegenspannung für  $\lambda = 365 \text{ nm}$ . Fit nur an Messdaten quadratisch ab  $U_0$  und in quadratischer Abhängigkeit. Höhere Intensität als bei allen anderen Plots zum Photostrom.



**Abbildung 3** Schematische Darstellung des im Versuch verwendeten Gitters. Hier in der LITROW-Anordnung.[?]

### 3 Balmer-Serie

Mit Hilfe der BALMER-Serie wird die Gitterkonstante des verwendeten Reflexionsgitters berechnet und die Breite der Isotopieaufspaltung bestimmt. Es wird die RYDBERG-Konstante  $R$  und daraus das PLANCK'sche Wirkungsquantum  $h$  bestimmt.

#### 3.1 Theoretischer Hintergrund: Gitterkonstante & Interferenz

Trifft ein einlaufender Strahl  $i$  kohärenten Lichts im Winkel  $\varphi_i$  auf ein Stufengitter wie in Abb. (5), so kommt es zu Interferenz zwischen allen im Winkel  $\varphi_f$  auslaufenden Strahlen  $f$ . Diese Interferenzmaxima kommen durch den Gangunterschied  $\Delta$  zwischen dem einlaufenden und auslaufenden Strahl zustande. Dieser berechnet sich separat für beide Strahlen zu  $\Delta = \Delta_i + \Delta_f = g (\sin \varphi_i + \sin \varphi_f) = g (\sin \alpha + \sin \beta)$ . Die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  sind identisch mit den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  aus Abb. (5).  $g$  ist die Gitterkonstante.

Ein Interferenzmaximum entsteht durch eine Überlagerung von Wellen, die um Vielfache ihrer Wellenlänge,  $n\lambda$ , voneinander verschoben sind.

Die Interferenzmaxima verhalten sich also in Abhängigkeit der Wellenlänge wie

$$n\lambda = g (\sin \alpha + \sin \beta) = \Delta. \quad (8)$$

### 3.2 Theoretischer Hintergrund: Spektrallinien

#### 3.2.1 Energieniveaus & Spektrallinien

Diskrete Spektrallinien lassen sich aufgrund der Quantelung von Energie verstehen. Im Orbitalmodell ist es Elektronen möglich diese gequantelte Energie in Form eines Photons aufzunehmen und abzugeben. Dabei ändert es für jeden Übergang seinen Zustand beschrieben durch die Hauptquantenzahl  $n$ . Die Energie in Abhängigkeit des Niveaus ist beschrieben durch  $E_n = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2}$ . Der Energieunterschied zwischen zwei Niveaus kann mit der RYDBERG-Formel für Wasserstoffähnliche Atome als

$$E_{n_<,n_>} = hcRZ^2 \left( \frac{1}{n_<^2} - \frac{1}{n_>^2} \right) = \frac{hc}{\lambda_{\text{vac}}} \quad (9)$$

geschrieben werden. Hier ist  $n_<$  das niedrigere Niveau und  $n_>$  das höhere Niveau,  $Z$  die Protonenzahl und  $R$  die RYDBERG-Konstante für das jeweilige Atom.

Für Wasserstoff lässt sich aus Leybold Didactic [?] folgende Formel entnehmen (diese wird für die Auswertung verwendet):

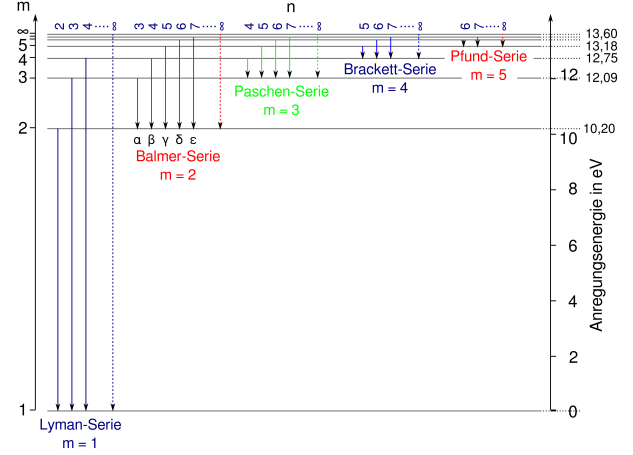
$$R_H = \frac{\mu}{m_e} R_\infty = \frac{\mu}{m_e} \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3 c}, \quad (10)$$

mit  $R_H$  der spezifischen RYDBERG-Konstante für Wasserstoff und  $\mu = \frac{m_e m_K}{m_e + m_K}$  der reduzierten Masse. Der Zusammenhang mit der Energie ist

$$E_{n_<,n_>} = hcR_\infty \left( \frac{1}{n_<^2} - \frac{1}{n_>^2} \right) = h\nu, \quad (11)$$

mit  $\nu$  der Wellenlänge des emittierten Photons aus Wasserstoff.

Für ausgezeichnete Übergänge wird eine Namenskonvention eingeführt. Alle Übergänge auf  $n_< = 1$  werden LYMAN genannt; auf  $n_< = 2$  BALMER; auf  $n_< = 3$  PASCHEN; etc. . Diese Übergänge werden weiter verfeinert in  $n_> = n_< + i$  mit  $i = 1 \equiv \alpha$ ,  $i = 2 \equiv \beta$ ,  $i = 3 \equiv \gamma$ , etc. . Diese Konvention ist in Abb. (6) dargestellt. Die BALMER Übergänge sind insofern ausgezeichnet, als dass sie im sichtbaren Spektrum liegen.



**Abbildung 4** Energieniveaus des Wasserstoffs mit benannten Serien (Übergängen).[?] ]

#### 3.2.2 Linienverbreiterung & Isotopieaufspaltung

Spektrallinien sind nicht exakt einer Wellenlänge zuzuordnen, da sie eine gewisse Linienbreite besitzen. Die natürliche Linienbreite  $\Gamma$  ist auf die quantenmechanische Unschärferelation  $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$  zurückzuführen. Sie verhält sich wie  $\Gamma \tau = \hbar$ , mit  $\tau = \frac{1}{\lambda}$  der Lebensdauer des Zustands und  $\lambda$  der Zerfallskonstante.

Es kann zur Linienverbreiterung durch den DOPPLER-Effekt kommen. In Abhängigkeit davon, wie schnell sich die Atome im Gas bewegen, sind ihre Energieniveaus DOPPLER-verschoben was dazu führt, dass Photonen emittiert werden, die eine Verteilung um die theoretisch exakte Wellenlänge der Spektrallinie besitzen.

Isotope eines Elements besitzen aufgrund gleicher Protonenzahl aber verschiedener Neutronenzahl eine unterschiedliche Masse. Dieser Massenunterschied führt dazu, dass die Spektrallinien eines Elements von denen ihrer Isotope verschoben sind. Die Größe der Aufspaltung berechnet sich mit

$$\partial_\beta \lambda = \partial_\beta \frac{g}{n} (\sin \alpha + \sin \beta) \quad (12)$$

$$= \frac{g}{n} \beta \cos \beta. \quad (13)$$

Näherungsweise gilt dann die Formel

$$\Delta \lambda = \frac{g}{n} \Delta \beta \cos \beta, \quad (14)$$



**Abbildung 5** Der Aufbau zur Bestimmung der Gitterkonstanten,  $R$ ,  $h$  und der Linienverbreiterung sowie Isotopieaufspaltung.[?] ]

mit  $\Delta\beta = \frac{d}{f}$ , wobei  $d$  der Abstand der Linien und  $f$  die Brennweite des Okulars ist.

### 3.3 Experimenteller Aufbau

Der experimentelle Aufbau ist in Abb. (7) zu sehen. a ist die Gasentladungslampe (Hg-Lampe, oder BALMER-Lampe mit einem Anteil Deuterium); b der Abbildespalz um möglichst scharfe Linien zu erzeugen; c eine Linse die auf das Objektiv d fokussiert, um ein paralleles Strahlenbündel auf das Reflexionsgitter e zu richten; f eine Linse, die die auslaufenden parallelen Strahlen des Gitters auf das Objektiv g oder die CCD h fokussiert.

Alle optischen Bauteile werden so justiert, dass am Objektiv oder der CCD eine scharfe Spektrallinie zu erkennen ist.

### 3.4 Durchführung & Auswertung: Gitterkonstante

Der Strahlengang ist schematisch in Abb. (8) dargestellt. Für jede Spektrallinie der Hg-Lampe wurde der Gitterwinkel  $\omega_G$  gemessen, unter dem die Spektrallinie genau mittig auf das Okular oder die CCD trifft.  $\omega_B$  war für die gesamte Durchführung  $130,0(5)^\circ$ . Die Farbe der Linie wurde mit einer Spektraltabelle [?] verglichen und so die Wellenlänge  $\lambda$  bestimmt.

Die Gitterkonstante wird berechnet durch

$$n\lambda = g (\sin \alpha + \sin \beta) \quad (15)$$

$$\Leftrightarrow g = \frac{n\lambda}{\sin \alpha + \sin \beta}, \quad (16)$$

mit  $\alpha = \omega_G$  und  $\beta = \omega_B + \omega_G - 180^\circ$ . Trägt man  $\sin(\omega_G) + \sin(\omega_B + \omega_G - 180^\circ)$  gegen die Wellenlänge  $\lambda$  auf, so ergibt sich aus der Steigung der Fitgeraden die Gitterkonstante  $g$ . Dies ist in Abb. (9) dargestellt.

Der Wert von  $g$  ist damit

$$g = 4527(47) \text{ \AA} [9\%]. \quad (17)$$

Der Literaturwert ist angegeben in [?] und liegt bei

$$g_{\text{lit.}} = 4170 \text{ \AA}. \quad (18)$$

Die Abweichung liegt bei 9%, also noch im akzeptablen Fehlerbereich. Die Fitgerade modelliert die Werte passend.

Das Auflösungsvermögen  $A$  des Gitter berechnet sich aus dem RAYLEIGH-Kriterium

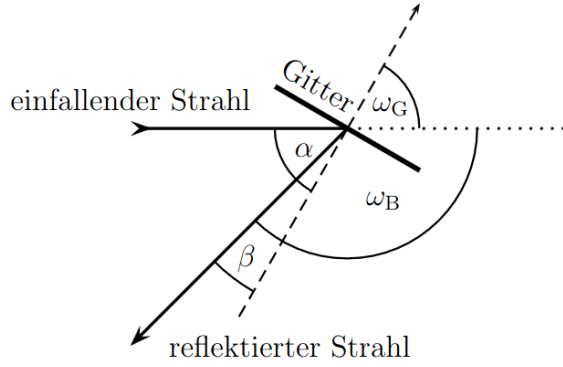
$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = nN \Leftrightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{nN}, \quad (19)$$

mit  $\Delta\lambda$  dem minimalen Wellenlängenintervall zweier spektraler Komponenten und  $N$  der Anzahl ausgeleuchteter Linien. Die Ordnung der Maxima ist bei  $n = 1$ . Die Abmessung von  $l^2 = 25 \text{ mm} \times 25 \text{ mm}$  ergeben mit der Gitterkonstante  $g = 4527(47) \text{ \AA}$  die Anzahl ausgeleuchteter Linien zu  $N = \frac{l}{g} \approx 55225(574)$ . Damit liegt der kleinste noch auflösbare Wellenlängenunterschied für  $\lambda = 400 \text{ nm}$  bei  $\Delta\lambda \approx 7,24(8) \text{ pm}$  und für  $\lambda = 700 \text{ nm}$  bei  $\Delta\lambda \approx 12,68(1) \text{ pm}$ . Die Auflösung des Gitters ist also für die Isotopieaufspaltung völlig ausreichend.

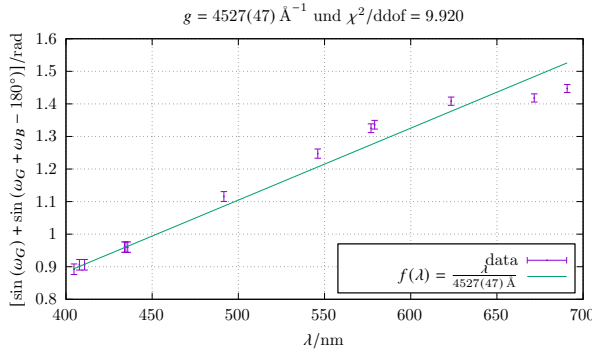
### 3.5 Durchführung & Auswertung: Spektrallinien

Die Hg-Lampe wurde gegen die BALMER-Lampe getauscht, um die Spektrallinien und die Isotopieaufspaltung der BALMER-Serie zu vermessen; sonst bleibt der Aufbau identisch. Die Messung wurde mit Okular und CCD durchgeführt. Die BALMER-Lampe besteht aus einem Gemisch von 10 Teilen Wasser zu 1 Teil deuteriertem Wasser.

Für jede Isotopieaufspaltung wurde die Distanz  $d$  zwischen den Linien gemessen, um so den Wellenlängenunterschied bestimmen zu können.



**Abbildung 6** Schematische Darstellung der Reflexion am Stufengitter.[?] ]



**Abbildung 7** Der Gangunterschied geteilt durch die Gitterkonstante gegen die Wellenlänge aufgetragen ergibt aus der Steigung der Fitgeraden die Gitterkonstante.

### 3.5.1 Okular

Die Wellenlängen wurden analog zu Kapitel (3.4) berechnet mit

$$\lambda = g (\sin(\omega_G) + \sin(\omega_B + \omega_G - 180^\circ)) \quad (20)$$

$$\Delta\lambda = \sqrt{((\partial_{\omega_G}\lambda)\Delta\omega_G)^2 + ((\partial_{\omega_B}\lambda)\Delta\omega_B)^2 + ((\partial_g\lambda)\Delta g)^2}, \quad (21)$$

mit

$$(\partial_{\omega_G}\lambda)\Delta\omega_G = g (\cos \omega_G + \cos(\omega_B + \omega_G - 180^\circ)) \Delta\omega_G \quad (22)$$

$$(\partial_{\omega_B}\lambda)\Delta\omega_B = g (\cos(\omega_B + \omega_G - 180^\circ)) \Delta\omega_B \quad (23)$$

$$(\partial_g\lambda)\Delta g = (\sin(\omega_G) + \sin(\omega_B + \omega_G - 180^\circ)) \Delta g \quad (24)$$

Die gemessenen BALMER-Linien sind in Tab. (1) eingetragen. Die Messung des Winkels erfolgte durch Ablesen der Stellung des Gitters an einer Winkelskala, wenn die Linie genau im Nullpunkt der Skala des Okulars ist.

| Farbe  | $\lambda_{\text{lit.}}$ | $\lambda$         | $\omega_G$ |
|--------|-------------------------|-------------------|------------|
| Rot    | 656 nm                  | 740,5(88) nm[13%] | 89,5(5)°   |
| Türkis | 485 nm                  | 564,6(87) nm[14%] | 68,5(5)°   |
| Blau   | 433 nm                  | 510,6(86) nm[15%] | 63,5(5)°   |

**Tabelle 1**  $\omega_B = 130^\circ$ . Messung der BALMER-Linien und Linienabstand mit dem Okular. Literaturwerte aus [?] mit Abweichung in Klammern [•].

Die Abweichung der beobachteten Wellenlängen unterscheiden sich nur geringfügig, liegen allerdings alle über 10%. Diese Abweichung war nicht zu erwarten, da die Linien auf dem Okular äußerst scharf waren. Zudem stimmen die berechneten Wellenlängen nicht mit den beobachteten Farben überein (740 nm liegt z.B. im Infrarotbereich). Da alle Wellenlängen einheitlich über dem Literaturwert liegen, muss es sich hier um einen systematischen Fehler handeln. Wahrscheinlich wurde der Winkel falsch abgelesen, da es keine sichtbaren Fehler im Aufbau oder bei den optischen Elementen gab.

Die Formel zur Wellenlängendifferenz der Isotopieaufspaltung ist

$$\Delta\lambda = \frac{g}{n} \Delta\beta \cos \beta \quad (25)$$

$$\Delta(\Delta\lambda) = \sqrt{\left(\frac{g}{n} \cos \beta \Delta(\Delta\beta)\right)^2 + \left(-\frac{g}{n} \Delta\beta \sin \beta \Delta(\beta)\right)^2}, \quad (26)$$

mit  $\Delta(\bullet)$  dem Fehler und  $\Delta\bullet$  der Differenz. Es ist  $\Delta(\beta) = \frac{\Delta(d)}{f}$ . Daraus ergeben sich die Wellenlängendifferenzen dargestellt in Tab. (2)

| Farbe  | $\Delta\lambda_{\text{lit.}}$ | $\Delta\lambda$    | $d$        |
|--------|-------------------------------|--------------------|------------|
| Rot    | 0,179 nm                      | 0,274(69) nm[153%] | 0,20(5) mm |
| Türkis | 0,132 nm                      | 0,168(84) nm[27%]  | 0,10(5) mm |
| Blau   | 0,118 nm                      | 0,086(86) nm[27%]  | 0,05(5) mm |

**Tabelle 2** Die Wellenlängendifferenz der Isotopieaufspaltung. Literaturwerte aus [?] mit Abweichung in Klammern [•].



Der Fehler der blauen Aufspaltung ist besonders groß, weil der Linienabstand eine Größe von einem Skalenteil hatte. Die sehr großen Abweichungen von Rot und vor Allem Türkis waren nicht zu erwarten. Die rote und türkisfarbene Linie konnte sehr präzise aufgelöst werden, sodass Fehler nicht durch Unschärfe kommen konnten. Die Möglichkeiten einer solch geringen Aufspaltung waren durch das Okular und die Skalenteile von 0,01 mm begrenzt, was ein Grund für diese Abweichungen sein könnte. Die Abweichung der blauen Linie ist zu groß, als dass die Skala im Okular hier eine Rolle spielen könnte. Da die blaue Linie eine geringe Intensität hatte, ist die Möglichkeit einer präzisen Messung schwierig gewesen, was zu diesem großen Fehler und auch zu der großen Abweichung geführt hat.

### 3.5.2 CCD

Für die Messung mit der CCD wurde das Okular durch eine CCD-Kamera ausgetauscht. Die Datenerhebung erfolgte über einen PC. Die Messung sind in Abb. (15) bis Abb. (21) zu sehen.

Der Fit der Daten wurde mit zwei GAUSS-Kurven der Form

$$f(x) = b_1 \exp\left(-\frac{(x - c_1)^2}{a_1}\right) + b_2 \exp\left(-\frac{(x - c_2)^2}{a_2}\right) + g \quad (27)$$

durchgeführt. Die Parameter, die sich aus dem Fit ergeben haben sind in einer Tabelle unter jedem Plot im Appendix zu finden. Die Wellenlängen berechnen sich analog zum Okular. Die Nulllage ist die Nulllinie der CCD, die auf dem PC zu beobachten war. Es ergaben sich die Wellenlängen aus Tab. (4).

| Farbe          | $\lambda_{\text{lit.}}$ | $\lambda$        | $\omega_G$ |
|----------------|-------------------------|------------------|------------|
| Rot            | 656 nm                  | 695,7(86) nm[6%] | 83,0(5)°   |
| Türkis         | 485 nm                  | 499,1(77) nm[3%] | 62,5(5)°   |
| Violet Schwach | 434 nm                  | 440,5(75) nm[2%] | 57,5(5)°   |
| Violet Stark   | 410 nm                  | 434,5(75) nm[6%] | 57,0(5)°   |

**Tabelle 3**  $\omega_B = 130^\circ$ . Wellenlängen der BALMER-Serie berechnet mit Hilfe der CCD. Literaturwerte aus [?] mit Abweichung in Klammern [•].

Zu erkennen ist, dass die Abweichung aller Wellenlängen unter 10% liegt. Dieses Ergebnis ist

im Vergleich zum Okular viel besser, was daran liegt, dass mit der CCD eine viel größere Auflösung für die Nulllage erreicht werden kann.

Die Isotopieaufspaltung berechnet sich aus dem Abstand der Maxima der GAUSS-Kurven, der Winkeldifferenz.

| Farbe          | $\Delta\lambda_{\text{lit.}}$ | $\Delta\lambda$     |
|----------------|-------------------------------|---------------------|
| Rot            | 0,179 nm                      | 0,215(70) nm[20%]   |
| Türkis         | 0,132 nm                      | 0,283(319) nm[114%] |
| Violet schwach | 0,118 nm                      | 0,271(291) nm[130%] |
| Violet stark   | 0,112 nm                      | 0,286(273) nm[155%] |

**Tabelle 4** Isotopieaufspaltung berechnet mit Hilfe der CCD. Literaturwerte aus [?] mit Abweichung in Klammern [•].

Die Abweichung sind, für die Präzision mit der die Wellenlängen der BALMER-Serie gemessen worden sind, unerwartet. Die Abweichung steigen mit kleiner werdender Wellenlänge, da für diese Wellenlängen die Intensitäten geringer und die Linien breiter wurden, wodurch die Bestimmung des Maximums erschwert worden ist. Eine Steigerung war also zu erwarten, allerdings nicht in dieser Größenordnung. Der Abweichung für die rote Linie ist im Vergleich noch akzeptabel.

Neben den vier BALMER-Linien waren noch andere schwache Linien sichtbar. Diese Linien stammen nicht aus der BALMER-Serie von Wasserstoff, sondern kommen von Sauerstoff aus dem Wassermolekül. Die Intensität ist deutlich geringer, da die Energieniveaus, die mit der angelegten Spannung angeregt werden können, nicht im optischen Wellenlängenbereich emittieren.

### 3.5.3 Durchführung & Auswertung: RYDBERG-Konstante

Die RYDBERG-Konstante bestimmt sich aus der Energiedifferenz der BALMER- $\alpha$ ,  $-\beta$ ,  $-\gamma$  und  $-\delta$  Übergänge. Die gemessene Wellenlänge ist mit der Energie über  $E = h\frac{c}{\lambda}$  verknüpft. Man berechnet für jede Wellenlänge die RYDBERG-Konstante mit

$$R_\infty = \frac{\frac{c}{\lambda}}{\frac{1}{n_<^2} - \frac{1}{n_>^2}} = \frac{\frac{c}{\lambda} n_<^2 n_>^2}{n_>^2 - n_<^2}. \quad (28)$$

Das PLACK'sche Wirkungsquantum wird dann über die RYDBERG-Konstante bestimmt, mit

$$h = \sqrt[3]{\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 R_\infty c}}. \quad (29)$$

Die spezifische RYDBERG-Konstante für Wasserstoff liegt dann mit der reduzierten Masse  $\mu = \frac{m_e m_K}{m_e + m_K} \approx m_e$ , da  $m_e \ll m_K$ , bei

$$R_\infty = \frac{m_e}{\mu} R_H. \quad (30)$$

Es ergeben sich folgende Größen

$$R_\infty = 0,923(47) \cdot 10^{-7} \text{ 1/m} [16\%] \quad (31)$$

$$R_H = 0,923(47) \cdot 10^{-7} \text{ 1/m} \quad (32)$$

$$h_R = 7,01(35) \cdot 10^{-34} \text{ J/Hz} [6\%] \approx 4,38 \cdot 10^{-15} \text{ eVs} \quad (33)$$

In Klammern ist die Abweichung vom CODATA[?] Wert

$$R_{\infty, \text{CODATA}} \approx 1,0973 \cdot 10^{-7} \text{ 1/m} \quad (34)$$

$$h_{\text{CODATA}} \approx 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J/Hz.} \quad (35)$$

Der Wert der RYDBERG-Konstante ist über den 10% Toleranz. Grund hierfür sind die großen Abweichungen von der Literatur der gemessenen Wellenlängen. Obwohl die Abweichung nicht unerheblich ist, liegt sie bei dem PLANCK'schen Wirkungsquantum nur bei 6%. Vergleicht man diesen Wert mit dem aus Kapitel (2) zum Photoeffekt, so weicht dieser Wert um nur 2% ab. Dies spricht für sehr konsistente Messergebnisse innerhalb der Fehlergrenzen.

Dopplerverbreiterung

| $\lambda$ | $\delta\lambda_{H, \text{Gauß.}}$              | $\delta\lambda_{H, \text{Dopp.}}$ |
|-----------|--|-----------------------------------|
| 656 nm    | $0,000\,271(1220000) \cdot 10^{-8} \text{ nm}$ | $1,48 \cdot 10^{-11} \text{ nm}$  |
| 485 nm    | $0,001\,008(1090000) \cdot 10^{-8} \text{ nm}$ | $1,09 \cdot 10^{-11} \text{ nm}$  |
| 434 nm    | $0,001\,015(1059000) \cdot 10^{-8} \text{ nm}$ | $9,89 \cdot 10^{-12} \text{ nm}$  |
| 410 nm    | $0,001\,259(1055000) \cdot 10^{-8} \text{ nm}$ | $9,25 \cdot 10^{-12} \text{ nm}$  |

| $\lambda$ | $\delta\lambda_{D, \text{Gauß.}}$              | $\delta\lambda_{D, \text{Dopp.}}$ |
|-----------|--|-----------------------------------|
| 656 nm    | $0,000\,118(1220000) \cdot 10^{-8} \text{ nm}$ | $1,05 \cdot 10^{-11} \text{ nm}$  |
| 485 nm    | $0,002\,318(1090000) \cdot 10^{-8} \text{ nm}$ | $7,73 \cdot 10^{-12} \text{ nm}$  |
| 434 nm    | $0,001\,614(1059000) \cdot 10^{-8} \text{ nm}$ | $6,92 \cdot 10^{-12} \text{ nm}$  |
| 410 nm    | $0,002\,374(1055000) \cdot 10^{-8} \text{ nm}$ | $6,54 \cdot 10^{-12} \text{ nm}$  |

## 4 Fazit

Das PLACK'sche Wirkungsquantum  $h$  wurde mit Hilfe des Photoeffekt bestimmt, indem für verschiedene Frequenzen der Photonen die Gegenspannung bestimmt wurde. Trägt man die Gegenspannung gegen die Frequenz der Photonen auf, so ergibt sich das Wirkungsquantum zu

$$h = 4,46(64) \cdot 10^{-15} \text{ eVs} [8\%]. \quad (36)$$

Dieser Wert ist eine gute Messung mit einer geringen Abweichung von der Literatur. Vergleicht man diesen Wert mit dem aus der RYDBERG-Konstante bestimmten

$$h_R = 4,38(22) \text{ eVs}, \quad (37)$$

so weichen diese Werte nur 2% voneinander ab. Dies spricht für sehr konsistente Messungen.

Die Austrittsarbeit aus der Anode ergab sich zu

$$W_A = -2,15(38) \text{ eV} [60\%], \quad (38)$$

mit einer sehr großen Abweichung zum Literaturwert, allerdings ist hier nicht sicher, ob das Kathodenmaterial reines Platin ist.

Mit Hilfe von Spektroskopie konnten die BALMER-Linien von Wasserstoff bestimmt werden. Diese sind systematisch größer als die Literaturwerte und haben deshalb alle eine Abweichung zwischen 13% und 15%. Obwohl diese Abweichung noch akzeptabel sind, ist es die berechnete Isotopieaufspaltung – mit Okular und CCD – nicht. Dort sind Abweichungen von bis zu 150% und 630% zu finden.

Die Gitterkonstante des verwendeten Reflexionsgitters wurde bestimmt zu  $g = 4527(47) \text{ Å}$  mit einer Auflösung von  $\Delta\lambda \in [7,24(8) \text{ pm}, 12,68(1) \text{ pm}]$  für das optische Spektrum. Dieser Wert war für den Versuch völlig ausreichend.

Die berechnete RYDBERG-Konstante liegt bei

$$R_\infty = 0,923(47) \cdot 10^{-7} \text{ 1/m} [16\%]. \quad (39)$$

Dieser Wert hat eine akzeptable Abweichung von der Literatur, vor dem Hintergrund, dass die gemessenen Wellenlängen systematische Abweichungen haben.



## 5 Appendix

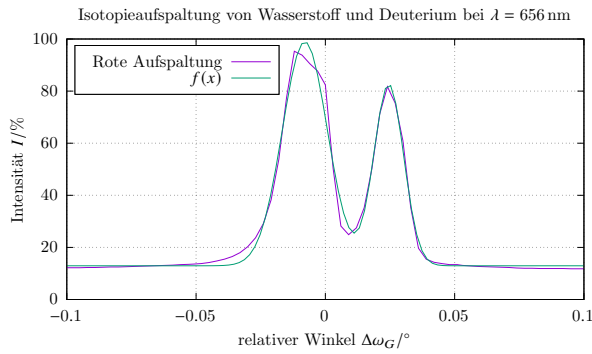
Photostrom abzüglich des Anodenstroms gegen Gegenspannung für  $\lambda = 305$  nm. Fit nur an Messdaten quadratisch ab  $U_0$  und in quadratischer Abhängigkeit.

Photostrom abzüglich des Anodenstroms gegen Gegenspannung für  $\lambda = 365$  nm. Fit nur an Messdaten quadratisch ab  $U_0$  und in quadratischer Abhängigkeit.

Photostrom abzüglich des Anodenstroms gegen Gegenspannung für  $\lambda = 436$  nm. Fit nur an Messdaten quadratisch ab  $U_0$  und in quadratischer Abhängigkeit.

Photostrom abzüglich des Anodenstroms gegen Gegenspannung für  $\lambda = 546$  nm. Fit nur an Messdaten quadratisch ab  $U_0$  und in quadratischer Abhängigkeit.

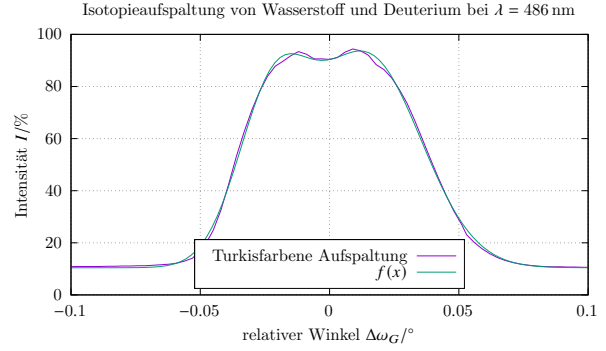
Photostrom abzüglich des Anodenstroms gegen Gegenspannung für  $\lambda = 578$  nm. Fit nur an Messdaten quadratisch ab  $U_0$  und in quadratischer Abhängigkeit.



**Abbildung 8** Rote Isotopieaufspaltung der BALMER-Lampe gemessen mit der CCD.

| Final set of parameters |               | Asymptotic Standard Error |           |
|-------------------------|---------------|---------------------------|-----------|
| =====                   |               | =====                     |           |
| a1                      | = 0.000151622 | +/- 6.615e-06             | (4.363%)  |
| a2                      | = 6.64506e-05 | +/- 4.308e-06             | (6.482%)  |
| b1                      | = 86.0246     | +/- 1.566                 | (1.82%)   |
| b2                      | = 69.6583     | +/- 1.9                   | (2.728%)  |
| c1                      | = -0.00793274 | +/- 0.0001789             | (2.255%)  |
| c2                      | = 0.024522    | +/- 0.0001806             | (0.7363%) |
| g                       | = 12.952      | +/- 0.4253                | (3.283%)  |

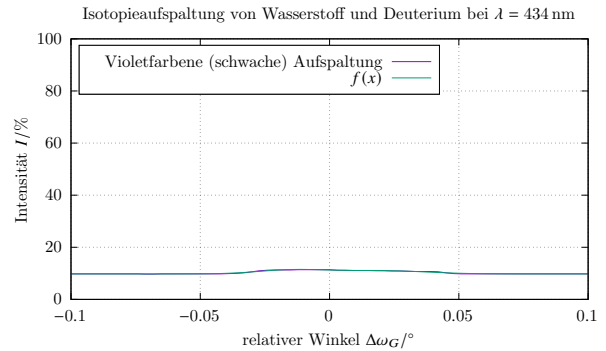
**Abbildung 9** Fitparameter der roten Isotopieaufspaltung.



**Abbildung 10** Türkisfarbene Isotopieaufspaltung der BALMER-Lampe gemessen mit der CCD.

| Final set of parameters |               | Asymptotic Standard Error |           |
|-------------------------|---------------|---------------------------|-----------|
| =====                   |               | =====                     |           |
| a1                      | = 0.00037684  | +/- 1.412e-05             | (3.748%)  |
| a2                      | = 0.000866756 | +/- 3.02e-05              | (3.485%)  |
| b1                      | = 60.2033     | +/- 1.705                 | (2.833%)  |
| b2                      | = 81.103      | +/- 0.6758                | (0.8332%) |
| c1                      | = -0.0221723  | +/- 0.0003721             | (1.678%)  |
| c2                      | = 0.0145317   | +/- 0.0005143             | (3.539%)  |
| g                       | = 10.4321     | +/- 0.2294                | (2.199%)  |

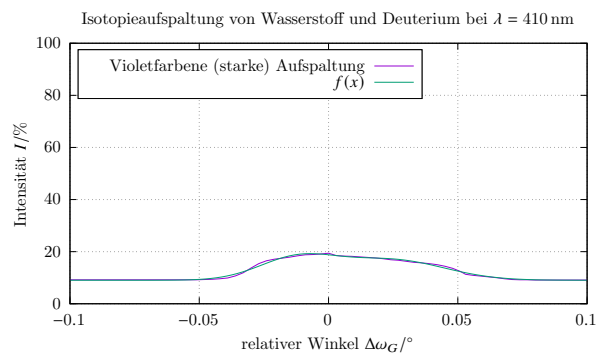
**Abbildung 11** Fitparameter der türkisfarbenen Isotopieaufspaltung.



**Abbildung 12** Schwache violettfarbene Isotopieaufspaltung der BALMER-Lampe gemessen mit der CCD.

| Final set of parameters |               | Asymptotic Standard Error |           |
|-------------------------|---------------|---------------------------|-----------|
| =====                   |               | =====                     |           |
| a1                      | = 0.000356871 | +/- 5.044e-05             | (14.13%)  |
| a2                      | = 0.000567907 | +/- 0.0001165             | (20.51%)  |
| b1                      | = 1.57063     | +/- 0.1163                | (7.402%)  |
| b2                      | = 1.24137     | +/- 0.06557               | (5.282%)  |
| c1                      | = -0.0139823  | +/- 0.001482              | (10.6%)   |
| c2                      | = 0.0206595   | +/- 0.002473              | (11.97%)  |
| g                       | = 9.76432     | +/- 0.01896               | (0.1942%) |

**Abbildung 13** Fitparameter der schwachen violettfarbenen Isotopieaufspaltung.



**Abbildung 14** Starke violetterfarbene Isotopieaufspaltung der BALMER-Lampe gemessen mit der CCD.

| Final set of parameters |               | Asymptotic Standard Error |           |
|-------------------------|---------------|---------------------------|-----------|
| =====                   |               | =====                     |           |
| a1                      | = 0.000440252 | +/- 4.418e-05             | (10.03%)  |
| a2                      | = 0.000830301 | +/- 0.0001136             | (13.68%)  |
| b1                      | = 8.29024     | +/- 0.6861                | (8.276%)  |
| b2                      | = 7.8513      | +/- 0.3149                | (4.011%)  |
| c1                      | = -0.0122508  | +/- 0.001249              | (10.19%)  |
| c2                      | = 0.0241685   | +/- 0.002183              | (9.033%)  |
| g                       | = 9.02198     | +/- 0.07787               | (0.8631%) |

**Abbildung 15** Fitparameter der starken violetterfarbenen Isotopieaufspaltung.

## Literatur