

Praktikum 4 – Versuch 402: Quantelung von Energie

Jonas Wortmann^{1*} and Angelo Brade^{1*}

^{1*}Rheinische Friedrich–Wilhelms–Universität, Bonn.

*Corresponding author(s). E-mail(s): s02jwort@uni-bonn.de; s72abrad@uni-bonn.de;

1 Einleitung

Elektronen emittieren bzw. absorbieren beim Übergang zwischen Orbitalen Photonen mit einer diskreten Energie. Diese Energie ist gequantelt in Vielfache des PLANCK'schen Wirkungsquantums h . Um die Größe der Quantelung zu bestimmen wird der Photoeffekt und die Messung der BALMER–Serie von Hg verwendet.

2 Photoelektrische Bestimmung von h .

2.1 Theoretischer Hintergrund

Das FERMI–Niveau beschreibt das höchste Energieniveau in einem Atom im Grundzustand, welches aufgrund des PAULI–Prinzips noch besetzt werden darf. Die Austrittsarbeit ist die Arbeit die benötigt wird, um ein Elektron aus diesem Energieniveau zu heben und vom dem Atoms zu lösen. Für verschiedene Atome ist dieses Level, wegen ihrer unterschiedlichen Elektronanzahl, nicht gleich. Makroskopisch zeigt sich dies in unterschiedlichen Austrittsarbeiten für verschiedene Materialien, wie z.B. für die Anode und die Kathode im experimentellen Aufbau.

Solche Energieniveaus können mit dem Bänderschema verdeutlicht werden. Eine mögliche Anordnung ist in Abb. (1) gezeigt. Die gestrichelten Linien unten mit den schrägen Linien darunter geben die jeweiligen FERMI–Niveaus an. W_K und W_A geben die Austrittsarbeit an. Die alleinstehende gestrichelte Linie ist das Vakuumniveau.

Werden Anode und Kathode miteinander verbunden, so gleichen sich ihre FERMI–Niveaus aus und es entsteht eine Potentialdifferenz von U_{KA} zum Vakuumniveau zwischen Anode und Kathode. Wird eine Spannung zwischen Anode und Kathode aufgebaut, so verschieben sich die FERMI–Niveaus und es baut sich eine weitere Potentialdifferenz U_G auf.

Der Photoeffekt beschreibt folgendes Phänomen: Trifft ein Photon auf die Kathode, so lässt sich eine Gleichung zwischen der Energie des Photons und der Energie des Elektrons aufstellen, mit eU_0 der kinetischen Energie der Elektronen

$$\Leftrightarrow E_\gamma = h\nu = eU_0 - eU_{KA} + W_K = E_e \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \quad \quad = eU_0 - (W_K - W_A) + W_K \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \quad \quad = eU_0 + W_A. \quad (3)$$

Dem Photon ist es also bei einer ausgezeichneten Energie möglich das Elektron aus dem FERMI–Niveau zu heben.

2.2 Experimenteller Aufbau

Der experimentelle Aufbau ist in Abb. (2) zu sehen. Die Hg–Lampe diente als Lichtquelle. Mit der Blende und der Linse wurde die Intensität und Breite des Lichtstrahls so eingestellt, dass ein fokussierter Punkt auf der Photokathode zu sehen war. Dabei wurde darauf geachtet, dass der Lichtstrahl nicht die Anode berührte. Zur Vermeidung von Streulicht wurde über die Kathode–Anode–Anordnung eine Blende gestülpt, mit einem Rohrausschnitt, welcher auf das Filterrad

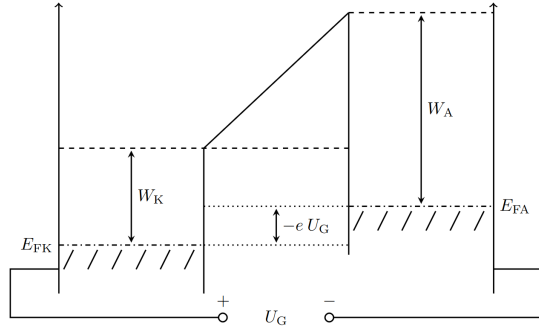


Abbildung 1 Bandenschema der Anode und Kathode bei anlegen einer äußeren Spannung.[1]

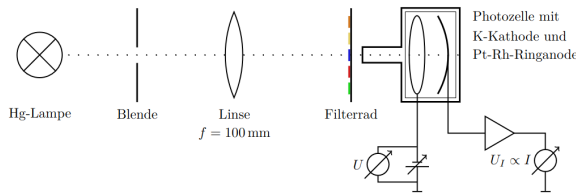


Abbildung 2 Experimenteller Aufbau zum Photoeffekt.

zeigte. Mit Hilfe des Filterrades wählte man verschiedene Wellenlängen zur Beobachtung aus.

Das Gegenfeld konnte mit einer separaten Spannung eingestellt und variiert werden. Da die Spannung, die für das Gegenfeld zur Verfügung stand, bis zu 12 V ausgeben kann, wurde diese mit einem Spannungsteiler auf $U' = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U = \frac{100 \Omega}{100 \Omega + 333 \Omega} 12 \text{ V} = 2.77 \text{ V}$ gedrosselt.

2.3 Durchführung & Auswertung

Die Messung des Photostroms und des Gegenfeldes erfolgte über zwei DMMs. Jede Messung wurde zwei mal durchgeführt und jeweils der Mittelwert verwendet, da die Intensität der Hg-Lampe schwankt.

Die Spannung des Gegenfeldes wurde für alle Interferenzfilter (305 nm, 365 nm, 436 nm, 546 nm und 578 nm) von der maximalen Spannung ($\approx 2.77 \text{ V}$) bis zur minimalen Spannung ($\approx 0.0006 \text{ V}$) variiert und der Photostrom gemessen. Der Anodenstrom I_0 , der von der Anode zu Kathode fließt, wenn die Gegenspannung maximal ist, wurde jeweils gesondert gemessen, um diesen in der Auswertung von der Messung zu subtrahieren.

λ	U_0
305 nm	-1.1806(93) V
365 nm	-1.509(17) V
436 nm	-0.951(11) V
546 nm	-0.2615(57) V
578 nm	-0.388(15) V

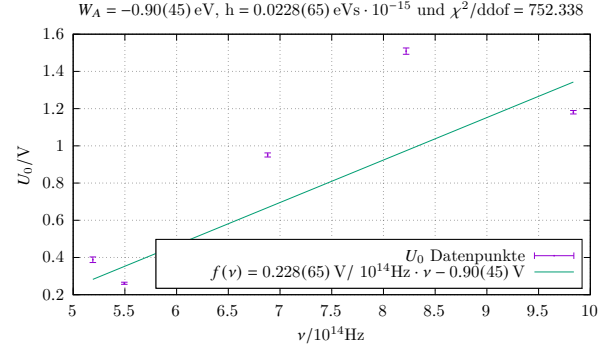


Abbildung 3 Gemessene Gegenspannung U_0 gegen die Frequenz der auf die Kathode treffenden Photonen. Der Achsenabschnitt ist W_A und die Steigung ist h .

Bis zu einer gewissen Gegenfeldspannung $U_G = U_0$ fließt kein Photostrom I ; ab U_0 fließt dieser mit einem quadratischen Zusammenhang zu U_G .

Für die Auswertung wird $\sqrt{I - I_0}$ – der Photostrom I abzüglich I_0 unter der Wurzel – gegen die Gegenfeldspannung U_G aufgetragen. Die Graphen finden sich im Appendix von Abb. (9) bis Abb. (13).

Ein Geradenfit wird für alle Messdaten, die im quadratischen Bereich liegen durchgeführt. Die Messpunkte, die kein quadratisches Verhalten zeigen, geben den Strom von der Anode zur Kathode an und werden nicht berücksichtigt. χ^2/ddof ist für alle Geraden viel kleiner als der ideale Wert 1. Diese Diskrepanz ist hier nicht zu kleiner Fehler sondern einer Überfittung der Geraden zuzuordnen. Die Nullstelle der Fitgeraden liefert genau den Wert der Gegenspannung, bei der kein Photostrom fließt.

Trägt man diese Werte gegen die jeweilige Frequenz des Lichts auf, so lässt sich ein Geradenfit durchführen, dessen Steigung genau gleich dem PLANCK'schen Wirkungsquantum ist. Dieser Plot ist in Abb. (3) zu sehen. χ^2/ddof ist viel größer als 1, weil sich die Fehler, durch die kleinen Messfehler, in der Fehlerfortpflanzung minimiert haben.

Es ergibt sich ein Wert von

$$h = 0.0228(20) \times 10^{-15} \text{ eVs.} \quad (4)$$

Der aktuelle CODATA Wert (letzter Zugriff: 2024-11-23) ist

$$h' \approx 4.136 \times 10^{-15} \text{ eVs.} \quad (5)$$

Die Abweichung des gemessenen Werts liegt bei ca. 100%.

3 Balmer–Serie

Mit Hilfe der BALMER–Serie wird die Gitterkonstante des verwendeten Reflexionsgitters berechnet und die Breite der Isotopieaufspaltung bestimmt. Es wird die RYDBERG–Konstante R und daraus das PLANCK’sche Wirkungsquantum h bestimmt.

3.1 Theoretischer Hintergrund: Gitterkonstante & Interferenz

Trifft ein einlaufender Strahl i kohärenten Lichts im Winkel φ_i auf ein Stufengitter wie in Abb. (4), so kommt es zu Interferenz zwischen allen im Winkel φ_f auslaufenden Strahlen f . Diese Interferenzmaxima kommen durch den Gangunterschied Δ zwischen dem einlaufende und auslaufenden Strahl zustande. Dieser berechnet sich separat für beide Strahlen zu $\Delta = \Delta_i + \Delta_f = g (\sin \varphi_i + \sin \varphi_f) = g (\sin \alpha + \sin \beta)$. Die Winkel α und β sind identisch mit den Winkeln α und β aus Abb. (4). g ist die Gitterkonstante.

Ein Interferenzmaximum entsteht durch eine Überlagerung von Wellen, die um Vielfache ihrer Wellenlänge, $n\lambda$, voneinander verschoben sind.

Die Interferenzmaxima verhalten sich also in Abhängigkeit der Wellenlänge wie

$$n\lambda = g (\sin \alpha + \sin \beta) = \Delta. \quad (6)$$

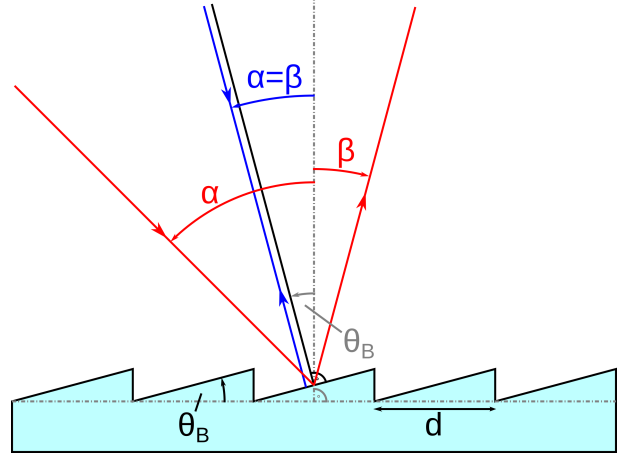


Abbildung 4 Schematische Darstellung des im Versuch verwendeten Gitters. Hier in der LITROW–Anordnung.[2]

3.2 Theoretischer Hintergrund: Spektrallinien

3.2.1 Energieniveaus & Spektrallinien

Diskrete Spektrallinien lassen sich aufgrund der Quantelung von Energie verstehen. Im Orbitalmodell ist es Elektronen möglich diese gequantelte Energie in Form eines Photons aufzunehmen und abzugeben. Dabei ändert es für jeden Übergang seinen Zustand (Energieniveau) beschrieben durch die Hauptquantenzahl n . Die Energie in Abhängigkeit des Niveaus ist beschrieben durch $E_n = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}$. Der Energieunterschied zwischen zwei Niveaus kann mit der RYDBERG–Formel für Wasserstoffähnliche Atome als

$$E_{n_<,n_>} = hcRZ^2 \left(\frac{1}{n_<^2} - \frac{1}{n_>^2} \right) = \frac{hc}{\lambda_{\text{vac}}} \quad (7)$$

geschrieben werden. Hier ist $n_<$ das niedrigere Niveau und $n_>$ das höhere Niveau, Z die Protonenzahl und R die RYDBERG–Konstante für das jeweilige Atom.

Für ausgezeichnete Übergänge wird eine Namenskonvention eingeführt. Alle Übergänge auf $n_< = 1$ werden LYMAN genannt; auf $n_< = 2$ BALMER; auf $n_< = 3$ PASCHEN; etc. . Diese Übergänge werden weiter verfeinert in $n_> = n_< + i$ mit $i = 1 \equiv \alpha$, $i = 2 \equiv \beta$, $i = 3 \equiv \gamma$, etc. . Diese Konvention ist in Abb. (5) dargestellt. Die BALMER Übergänge sind insofern besonders, als dass sie im sichtbaren Spektrum liegen.

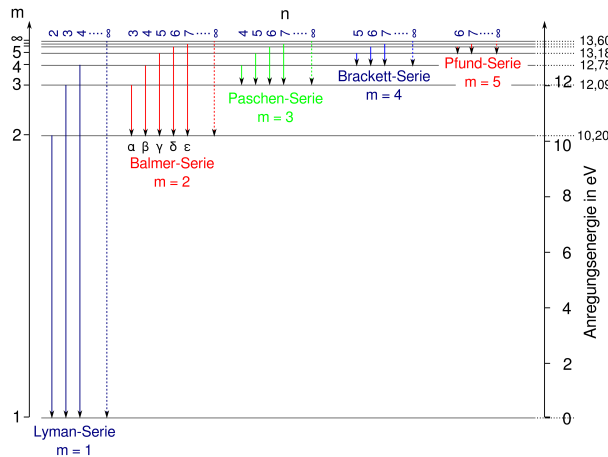


Abbildung 5 Energieniveaus des Wasserstoffs mit benannten Serien (Übergängen). [3]

3.2.2 Linienverbreiterung & Isotopieaufspaltung

Spektrallinien sind nicht exakt einer Wellenlänge zuzuordnen, da sie eine gewisse Linienbreite besitzen. Die natürliche Linienbreite Γ ist auf die quantenmechanische Unschärferelation $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ zurückzuführen. Sie verhält sich wie $\Gamma \tau = \hbar$, mit $\tau = \frac{1}{\lambda}$ der Lebensdauer des Zustands und λ der Zerfallskonstante.

Es kann zur Linienverbreiterung durch den DOPPLER-Effekt kommen. In Abhängigkeit davon, wie schnell sich die Atome im Gas bewegen, sind ihre Energieniveaus DOPPLER-verschoben was dazu führt, dass Photonen emittiert werden, die eine Verteilung um die theoretisch exakte Wellenlänge der Spektrallinie besitzen.

Isotope eines Elements besitzen aufgrund gleicher Protonenzahl aber verschiedener Neutronenzahl eine unterschiedliche Masse. Dieser Massenunterschied führt dazu, dass die Spektrallinien eines Elements von denen ihrer Isotope verschoben sind. Die Größe der Aufspaltung berechnet sich mit

$$\partial_\beta \lambda = \partial_\beta \frac{g}{n} (\sin \alpha + \sin \beta) \quad (8)$$

$$= \frac{g}{n} (\sin \alpha + \beta \cos \beta). \quad (9)$$

3.3 Experimenteller Aufbau

Der experimentelle Aufbau ist in Abb. (6) zu sehen. a ist die Gasentladungslampe (Hg-Lampe,

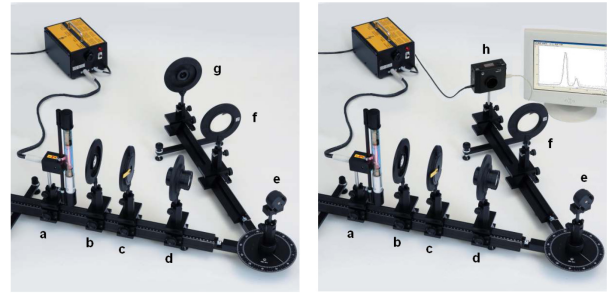


Abbildung 6 Der Aufbau zur Bestimmung der Gitterkonstanten, R , h und der Linienverbreiterung sowie Isotopieaufspaltung. [1]

oder BALMER-Lampe mit einem Anteil Deuterium); b der Abbildespalt um möglichst scharfe Linien zu erzeugen; c eine Linse die auf das Objektiv d fokussiert, um ein paralleles Strahlenbündel auf das Reflexionsgitter e zu richten; f eine Linse, die die auslaufenden parallelen Strahlen des Gitters auf das Objektiv g oder die CCD h fokussiert.

Alle optischen Bauteile werden so justiert, dass am Objektiv oder der CCD eine scharfe Spektrallinie zu erkennen ist.

3.4 Durchführung & Auswertung: Gitterkonstante

Der Strahlengang ist schematisch in Abb. (7) dargestellt. Für jede Spektrallinie der Hg-Lampe wurde der Gitterwinkel ω_G gemessen, unter dem die Spektrallinie genau mittig auf das Okular oder die CCD trifft. ω_B war für die gesamte Durchführung $130.0(5)^\circ$. Die Farbe der Linie wurde mit einer Spektraltabelle [1] verglichen und so die Wellenlänge λ bestimmt.

Die Gitterkonstante wird berechnet durch

$$n\lambda = g (\sin \alpha + \sin \beta) \quad (10)$$

$$\Leftrightarrow g = \frac{n\lambda}{\sin \alpha + \sin \beta}, \quad (11)$$

mit $\alpha = \omega_G$ und $\beta = \omega_B + \omega_G - 180^\circ$. Der Fehler auf g verhält sich aufgrund des Fehlers von ω_G und ω_B wie

$$\Delta g = \sqrt{(\partial_{\omega_G} g \Delta \omega_G)^2 + (\partial_{\omega_B} g \Delta \omega_B)^2}, \quad (12)$$

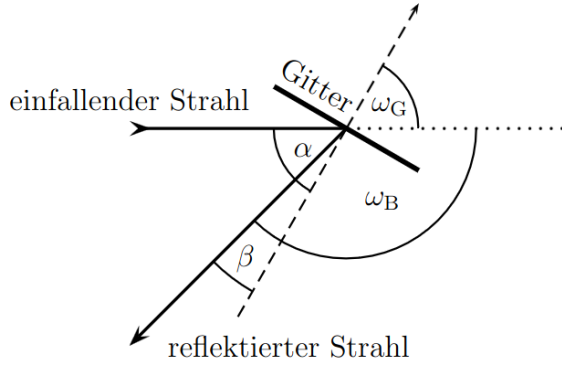


Abbildung 7 Schematische Darstellung der Reflexion am Stufengitter.[1]

mit

$$\partial_{\omega_G} g \Delta \omega_G = \frac{n \lambda \Delta \omega_G (\cos(\omega_G) - \cos(\omega_B + \omega_G))}{(\sin(\omega_G) - \sin(\omega_B + \omega_G))^2} \quad (13)$$

$$\partial_{\omega_B} g \Delta \omega_B = \frac{n \lambda \Delta \omega_B \cos(\omega_B + \omega_G)}{(\sin(\omega_G) - \sin(\omega_B + \omega_G))^2}. \quad (14)$$

Trägt man $\sin(\omega_G) + \sin(\omega_B + \omega_B - 180^\circ)$ gegen die Wellenlänge λ auf, so ergibt sich aus der Steigung der Fitgeraden die Gitterkonstante g . Dies ist in Abb. (8) dargestellt.

Der Wert von g ist damit

$$g = 4527(47) \text{ \AA}^{-1}. \quad (15)$$

Da kein Literaturwert angegeben ist findet kein Vergleich statt. Typische Werte für Reflexionsgitter sind allerdings in dieser Größenordnung angesiedelt.

Das relativ zu 1 große χ^2/ddof ist den kleinen Fehlern geschuldet. Die Fitgerade modelliert die Werte passend.

3.5 Durchführung & Auswertung: Spektrallinien

Die Hg-Lampe wurde gegen die BALMER-Lampe getauscht, um die Spektrallinien der BALMER-Serie zu vermessen; sonst bleibt der Aufbau identisch. Die Messung wurde mit Okular und CCD durchgeführt.

Die BALMER-Lampe besteht aus einem Gemisch von 10 Teile Wasserstoff auf 1 Teil Deuterium.

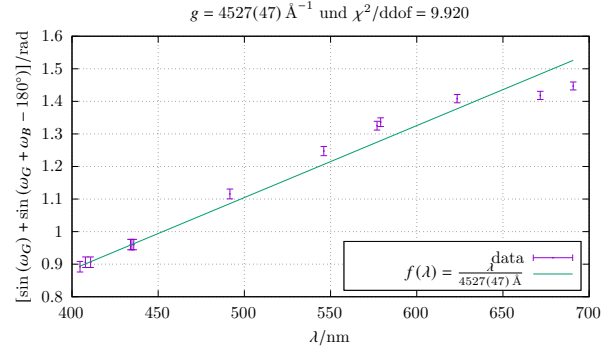


Abbildung 8 Der Gangunterschied geteilt durch die Gitterkonstante gegen die Wellenlänge aufgetragen ergibt aus der Steigung der Fitgeraden die Gitterkonstante.

4 Fazit

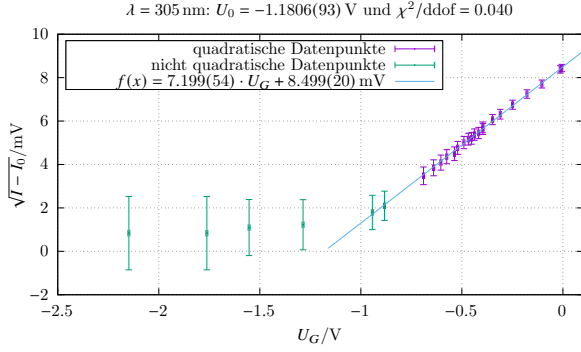


Abbildung 9 Photostrom abzüglich des Anodenstroms gegen Gegenspannung für $\lambda = 305$ nm. Fit nur an Messdaten quadratisch ab U_0 und in quadratischer Abhängigkeit.

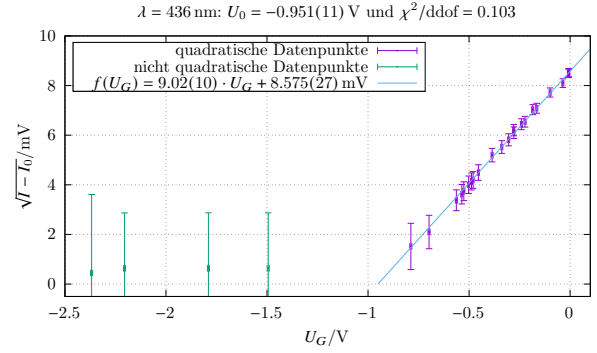


Abbildung 11 Photostrom abzüglich des Anodenstroms gegen Gegenspannung für $\lambda = 436$ nm. Fit nur an Messdaten quadratisch ab U_0 und in quadratischer Abhängigkeit.

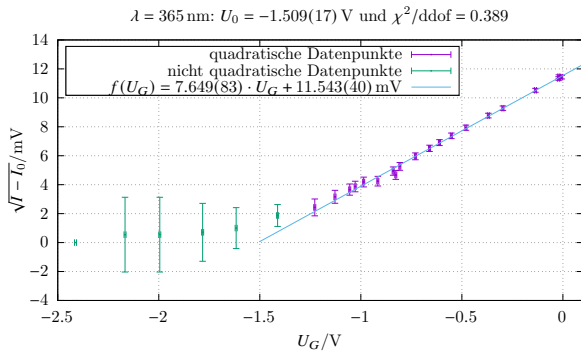


Abbildung 10 Photostrom abzüglich des Anodenstroms gegen Gegenspannung für $\lambda = 365$ nm. Fit nur an Messdaten quadratisch ab U_0 und in quadratischer Abhängigkeit.

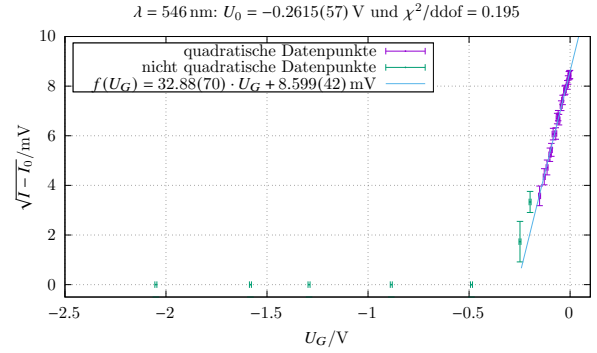


Abbildung 12 Photostrom abzüglich des Anodenstroms gegen Gegenspannung für $\lambda = 546$ nm. Fit nur an Messdaten quadratisch ab U_0 und in quadratischer Abhängigkeit.

5 Appendix

Literatur

- [1] Praktikumsleitung: P402 quantelung von energie. Universität Bonn (2016)
- [2] Blazegitter. <https://de.wikipedia.org/wiki/Blazegitter>. Letzter Zugriff: 2024-11-24
- [3] Lyman-Serie. <https://de.wikipedia.org/wiki/Lyman-Serie>. Letzter Zugriff: 2024-11-24

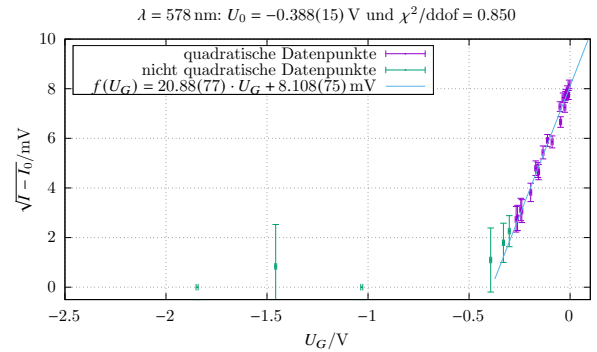


Abbildung 13 Photostrom abzüglich des Anodenstroms gegen Gegenspannung für $\lambda = 578$ nm. Fit nur an Messdaten quadratisch ab U_0 und in quadratischer Abhängigkeit.