Praktikum 4 – Versuch 425: Elektronisches Rauschen

Jonas Wortmann[1*] and Angelo Brade[1*]

[1*]Rheinische Friedrich–Wilhelms–Universität, Bonn.

*Corresponding author(s). E-mail(s): s02jwort@uni-bonn.de; s72abrad@uni-bonn.de;

1 Einleitung

In jedem elektrischen Schaltkreis ist ein elektronisches Rauschen vorhanden. Dieses Rauschen setzt sich aus dem JOHNSON–Rauschen und dem Schrotrauschen zusammen. Das JOHNSON–Rauschen ist temperaturabhängig, daraus lässt sich die BOLTZMANN–Konstante bestimmen. Das Schrotrauschen wird durch die Quantelung der Elementarladung hervorgerufen. Die Größe der Elementarladung lässt sich damit bestimmen.

2 Bandbreite

2.1 *Theoretischer Hintergrund*

[1]Die Bandbreite gibt die Breite eines Frequenzsbands an. Da das elektronische Rauschen von der Bandbreite abhängig ist, wird diese mit einem Bandpass vorgegeben. Ein Frequenzband einer bestimmten Breite kann mit einem Hoch– und Tiefpass in Serie (auch Bandpass) erzeugt werden. Die im Versuch verwendete Anordnung ist in Abb. (1) gezeigt.

Die effektive Bandbreite wird mit der Verstärkung

$$G(f) = \frac{V_{\text{output}}^{\text{RMS}}}{V_{\text{input}}^{\text{RMS}}} \tag{1}$$

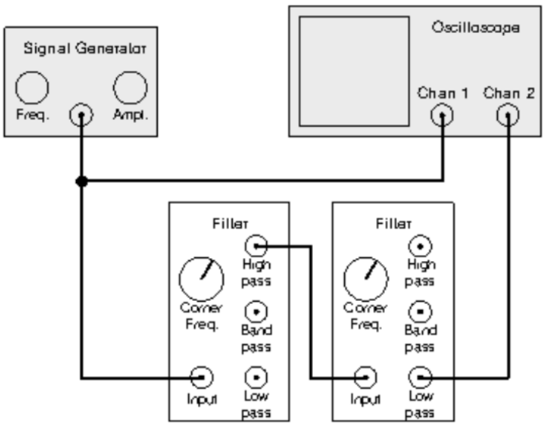

Abbildung 1 Schaltplan des Bandpass.[1]

bestimmt

$$\Delta f_{\text{eff}} = \int_0^\infty \mathrm{d}f\, G^2(f) = \int_0^\infty \mathrm{d}f\, G_{\text{LP}}^2(f) G_{\text{HP}}^2(f), \tag{2}$$

mit der Tiefpassverstärkung $G_{\text{LP}}(f) = \left(1 + (f/f_{\text{l}})^4\right)^{-1/2}$ und der Hochpassverstärkung $G_{\text{HP}}(f) = (f/f_{\text{h}})^2 \left(1 + (f/f_{\text{h}})^4\right)^{-1/2}$. f_{h} und f_{l} sind die eingestellten Grenzfrequenzen von Hoch– und Tiefpass. Das analytische Ergebnis des Integrals ist

$$\Delta f_{\text{eff}} = \frac{f_{\text{l}}^4 \pi \left(f_{\text{h}} - f_{\text{l}}\right)}{2^{3/2}\left(f_{\text{h}}^4 - f_{\text{l}}^4\right)}. \tag{3}$$

[1]Die Abweichung der Messwerte von der Literatur wird immer in [·] hinter dem Messwert angegeben.

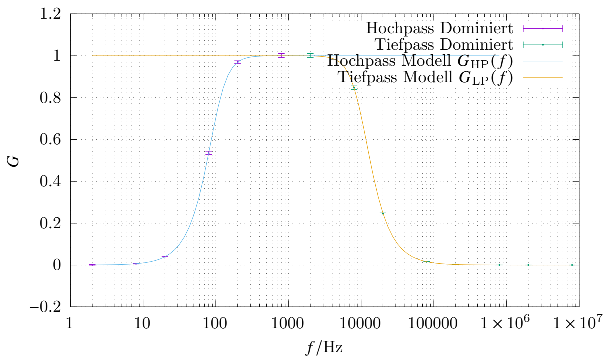

Abbildung 2 Gemessene Verstärkung $G = \frac{U_{\mathrm{RMS}}}{U_{0,\ \mathrm{RMS}}}$ im Bandpass.

2.2 *Durchführung & Auswertung*

Die Bandbreite wird für $f_{\mathrm{h}} = 1\,\mathrm{kHz}$ und $f_{\mathrm{l}} = 10\,\mathrm{kHz}$ bestimmt. Mit dem Frequenzgenerator werden, für eine konstante Eingangsspannung, verschiedene Frequenzen von 2 Hz bis 8 MHz eingestellt und die Ausgangsspannung gemessen. Daraus bestimmt sich jeweils die Verstärkung und damit die Bandbreite.

Abb. (2) zeigt die Verstärkung gegen die eingestellte Frequenz. Die Bandbreite berechnet sich dann zu

$$\Delta f_{\mathrm{eff}} \approx 9997\,\mathrm{Hz}. \tag{4}$$

3 Johnson–Rauschen

3.1 *Theoretischer Hintergrund*

Das Johnson–Rauschen[2] entsteht durch thermodynamische Fluktuationen der Elektronen im Leitungsband. Dies geschieht, im Vergleich zum Schrotrauschen, ohne, dass eine Spannung angelegt ist. Elektronen bewegen sich im thermischen Gleichgewicht ungeordnet aufgrund ihrer thermischen Energie wodurch sie kurze Spannungs– bzw. Strompulse erzeugen. Mit Hilfe von sensitiven Messgeräten kann dieses Rauschen untersucht werden.

Der formale Zusammenhang der mittleren quadratischen Rauschspannung in einem Widerstand

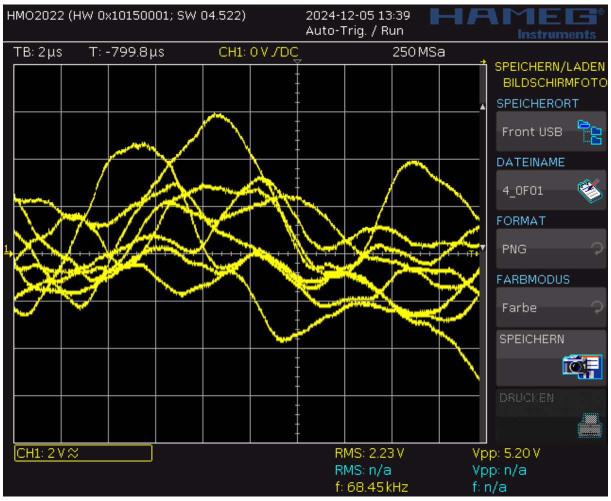

Abbildung 3 Oszillogramm des Johnson–Rauschen.

R ist

$$\overline{V_{\mathrm{J}}^2} = 4 k_{\mathrm{B}} T R \Delta f_{\mathrm{eff}}, \tag{5}$$

mit der Temperatur T und der Bandbreite Δf_{eff}.

3.2 *Durchführung & Auswertung: Beobachtung des* Johnson*–Rauschens*

Das Johnson–Rauschen wird im Vorverstärkerschaltkreis aus Abb. (4) beobachtet. Diese Schaltung befand sich in der LLE–Box Abb. (5), welche entsprechend verkabelt werden musste. Zur Beobachtung wurden folgende Werte eingestellt

$$R_{\mathrm{in}} = 100\,\mathrm{k\Omega}, R_{\mathrm{f}} = 1\,\mathrm{k\Omega}. \tag{6}$$

Die LLE–Box wurde dann mit der HLE–Box Abb. (6) verbunden. Die Einstellung der HLE–Box war

$$f_{\mathrm{h}} = 0{,}1\,\mathrm{kHz}, f_{\mathrm{l}} = 100\,\mathrm{kHz}, \mathrm{Gain} = 300, \mathrm{AC}. \tag{7}$$

Das Rauschen ließ sich dann auf dem Oszillographen beobachten Abb. (3). Es ist klar zu erkennen, dass das Rauschen starken Fluktuationen unterliegt und ungeordnet ist. Im Mittel bleibt es allerdings konstant.

3.3 *Durchführung & Auswertung: Messung des* Johnson*–Rauschens*

Zur Messung der mittleren Spannung des Rauschens wird die Schaltung aus Abb. (7) verwendet.

[2] auch thermisches Rauschen

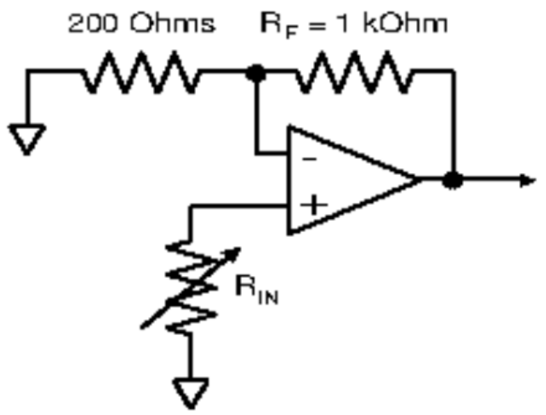

Abbildung 4 Vorverstärkerschaltkreis zur Beobachtung des Johnson–Rauschens.[1]

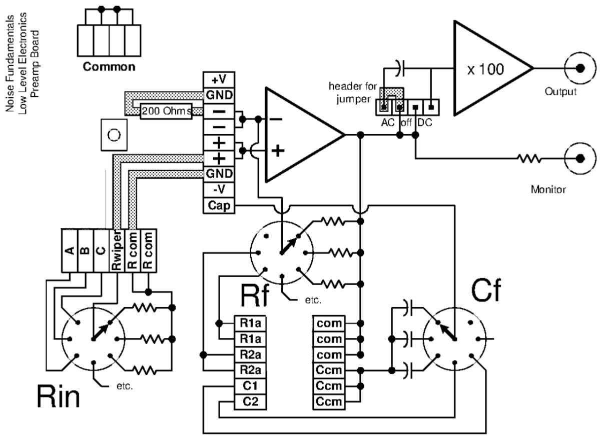

Abbildung 5 Die LLE–Box zur Messung und Beobachtung des Johnson–Rauschens.[1]

Die Einstellungen waren zusätzlich

$$\text{Multiplier : A} \times \text{A, Zeitkonst.} = 1\,\text{s}. \tag{8}$$

Durch den Multiplier ist das Ausgangssignal der HLE–Box

$$V_\text{out} = \frac{\overline{(V_\text{in}(t))^2}}{10\,\text{V}}. \tag{9}$$

Dieses Signal wird dann über die Zeitkonstante von 1 s gemittelt.

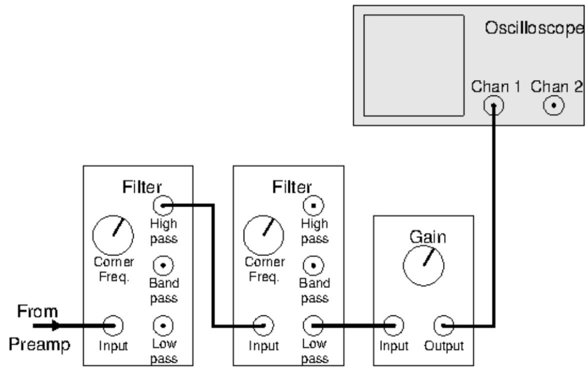

Abbildung 6 HLE–Box zur Messung und Beobachtung des Johnson–Rauschens.[1]

Um zu überprüfen, ob der Multiplier wie erwartet funktioniert, kann der Output der HLE–Box gegen den Multiplier aufgetragen werden. Es ergibt sich Abb. (8). Der quadratische Zusammenhang mit Verschiebung ist klar zu erkennen.

Da das Ausgangssignal nur in einem kleinen Bereich – zwischen 0,6 V und 1,2 V – stabil und linear zum Eingangsrauschen ist, wird das DMM mit Hilfe der Verstärkung in diesem Bereich gehalten. Der Zusammenhang zwischen der am DMM abgelesenen Spannung ist modelliert durch

$$V_\text{meter} = \overline{V_\text{J}^2(t) + V_\text{N}^2(t)}\,\frac{(600G_2)^2}{10\,\text{V}}, \tag{10}$$

wobei das Rauschen in die beiden Anteile V_J und V_N aufgeteilt werden muss. V_J ist das Johnson–Rauschen und V_N ist der Anteil des Rauschens, der innerhalb der Verstärker entsteht. Eine Korrelation zwischen diesen beiden Rauschtypen gibt es nicht, da sie in unterschiedlichen Bauteilen beobachtet werden. Diese Tatsache erlaubt daher die Bestimmung von V_J über die Variation des Widerstands R_in, da $V_\text{J} = V_\text{J}(R_\text{in})$ und $V_\text{N} \neq V_\text{N}(R_\text{in})$. Das Johnson–Rauschen kann zusätzlich über die Variation der Bandbreite erfolgen, da es von der Verstärkung G_2 abhängt.

3.3.1 *Variation des Widerstands*

Wird der Widerstand variiert, um so das Johnson–Rauschen zu bestimmen, ergeben sich Abb. (9) mit Tab. (3.3.1).

Es ist

$$\overline{V_\text{J}^2 + V_\text{N}^2} = 4k_B^R RT\Delta f_\text{eff} + \overline{V_\text{N}^2}. \tag{11}$$

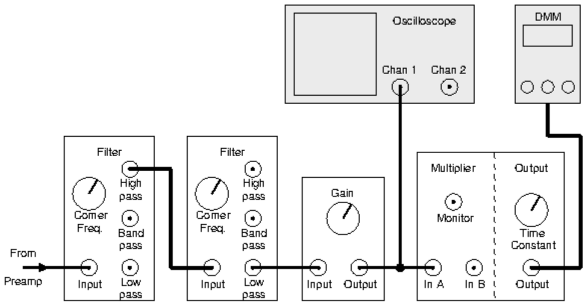

Abbildung 7 HLE–Box zur Messung des JOHNSON–Rauschens.[1]

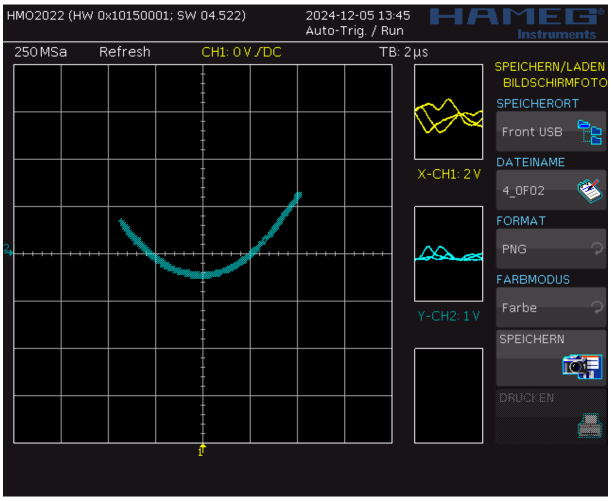

Abbildung 8 Output der HLE–Box (Kanal 1) gegen Multiplier (Kanal 2).

Parameter	Wert(Fehler)
m	$1{,}51(11)\cdot 10^{-15}$
b	$7{,}04(29)\cdot 10^{-12}$

Tabelle 1 Widerstandsabhängigkeit modelliert mit $V_J^2(t)+V_N^2(t)(R_{\text{in}}) = m\cdot R + b$

Aus der Anpassung geht hervor

$$\overline{V_{\mathrm{J}}^2}+\overline{V_{\mathrm{N}}^2} = mR + b, \tag{12}$$

sodass

$$k_B^R = \frac{m}{4T\Delta f_{\text{eff}}} \qquad \overline{V_{\mathrm{N}}^2} = b. \tag{13}$$

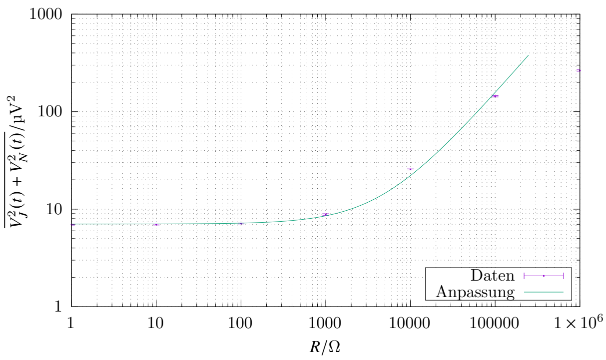

Abbildung 9 Widerstandsabhängigkeit mit $\overline{V_J^2(t)+V_N^2(t)} = V_{\text{meter}}\frac{10\,\mathrm{V}}{(600\cdot G_2)^2}$

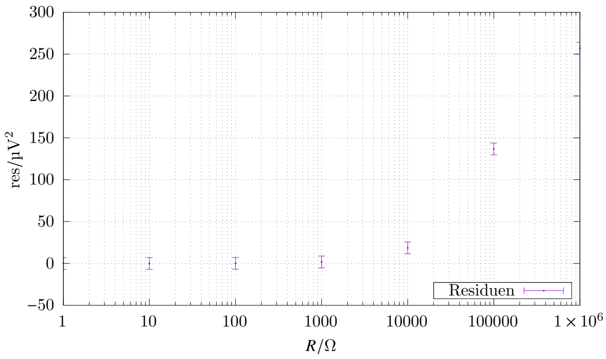

Abbildung 10 $\text{res} = \overline{u^2} - \hat{\overline{u^2}}$

Die Temperatur war $T = 252{,}3(2)\,\mathrm{K}$ und die Bandbreite $\Delta f_{\text{eff}} \approx 11\,109(60)\,\mathrm{Hz}$. Damit ist die BOLTZMANN–Konstante

$$k_B^R = 11{,}53(9)\cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}[836\%] \tag{14}$$

$$k_B^{\text{lit}} = 1{,}380\cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \tag{15}$$

Der Literaturwert ist entnommen von CODATA[2]. DISKUSSION (+ RESIDUEN)

3.3.2 *Variation der Bandbreite*

Dieses Verfahren ist analog zur Variation des Widerstands. Wird die Bandbreite Variiert, um so das JOHNSON–Rauschen zu bestimmen, ergeben sich Abb. (**??**) mit Tab. (**??**).

Es ist

$$\overline{V_{\mathrm{J}}^2}+\overline{V_{\mathrm{N}}^2} = 4k_B^f T R_{\text{in}}\Delta f_{\text{eff}} + \overline{V_{\mathrm{N}}^2}. \tag{16}$$

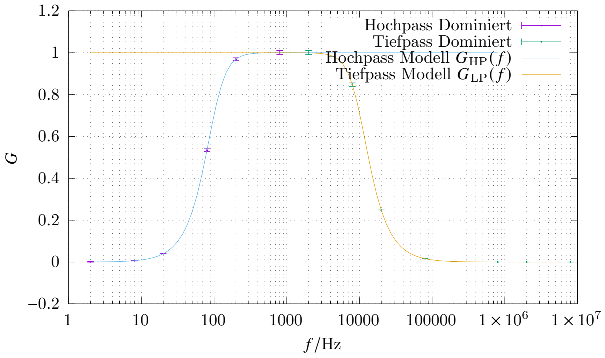

Abbildung 11 $G = \frac{U_{\mathrm{RMS}}}{U_{0,\ \mathrm{RMS}}}$

Parameter	Wert(Fehler)
f_l	10 104(56)
f_h	100,50(17)

Tabelle 2 Frequenzabhängigkeit modelliert mit $G_{\mathrm{LP}}(f) = \left[1 + (f/f_l)^4\right]^{-1/2}$ und $G_{\mathrm{HP}}(f) = (f/f_h)^2 \left[1 + (f/f_h)^4\right]^{-1/2}$

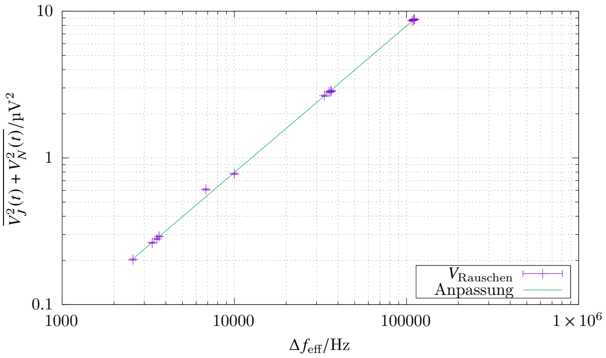

Abbildung 12 Bandbreitenabhängkeit mit $\overline{V_J^2(t) + V_N^2(t)} = V_{\mathrm{meter}} \frac{10\,\mathrm{V}}{(600 \cdot G_2)^2}$ und $\Delta f_{\mathrm{eff}} = \frac{f_l^4 \pi (f_l - f_h)}{2^{3/2}(f_l^4 - f_h^4)}$

Parameter	Wert(Fehler)
m	$7{,}943(69) \cdot 10^{-17}$
b	$7{,}5(45) \cdot 10^{-15}$

Tabelle 3 Bandbreitenabhängigkeit modelliert mit $\overline{V_J^2(t) + V_N^2(t)}(\Delta f_{\mathrm{eff}}) = m \cdot \Delta f_{\mathrm{eff}} + b$

Aus der Anpassung geht hervor

$$\overline{V_{\mathrm{J}}^2 + V_{\mathrm{N}}^2} = m \Delta f_{\mathrm{eff}} + b, \tag{17}$$

sodass

$$k_B^f = \frac{m}{4TR_{\mathrm{in}}} \qquad \overline{V_{\mathrm{N}}^2} = b. \tag{18}$$

Der Widerstand lag bei $R_{\mathrm{in}} = 1\,\mathrm{k\Omega}$. Damit ist die BOLTZMANN–Konstante

$$k_B^f = 6{,}756(60) \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}[390\%] \tag{19}$$

$$k_B^{\mathrm{lit}} = 1{,}380 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \tag{20}$$

Der Literaturwert ist entnommen von CODATA[2]. DISKUSSION

3.3.3 *Vergleich Widerstand & Bandbreite*

Vergleicht man die beiden BOLTZMANN–Konstanten so liegt die Abweichung bei

$$k_B^R = 11{,}53(9) \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}[836\%] \tag{21}$$

$$k_B^f = 6{,}756(60) \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}[390\%] \tag{22}$$

$$|k_B^f - k_B^R| = 4{,}774(900) \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \tag{23}$$

DISKUSSION

4 Schrotrauschen

4.1 *Theoretischer Hintergrund*

Da die elektrische Ladung in e gequantelt ist, wird bei dem Übergang von Elektronen über eine Potentialbarriere (z.B. zwischen zwei Bauteilen, Photodiode, etc.) stets eine Ladung von genau einem e transferiert. Da die eingehende Ladung pro Zeit also nicht kontinuierlich ist, kommt es zu nicht stetigen Ausschlägen der Spannung, die über dieses Potential gemessen wird. Diese Spannung wird als Schrotrauschen auf sensitiven Messgeräten wahrgenommen.

Formal ist das mittlere Rauschstromquadrat

$$\overline{i^2} = 2ei_{\mathrm{dc}}\Delta f_{\mathrm{eff}}, \tag{24}$$

mit i_{dc} der angelegten Stromstärke.

4.2 *Durchführung & Auswertung: Beobachtung des Schrotrauschens*

Das Schrotrauschen wurde innerhalb Abb. (13) bei einer Photodiode beobachtet. Dafür wurde dieser Schaltkreis in Abb. (14) zusammengesteckt. Die

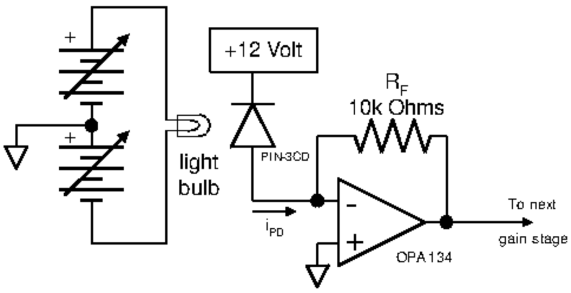

Abbildung 13 Schaltung für die LLE–Box zur Beobachtung und Messung des Schrotrauschens.[1]

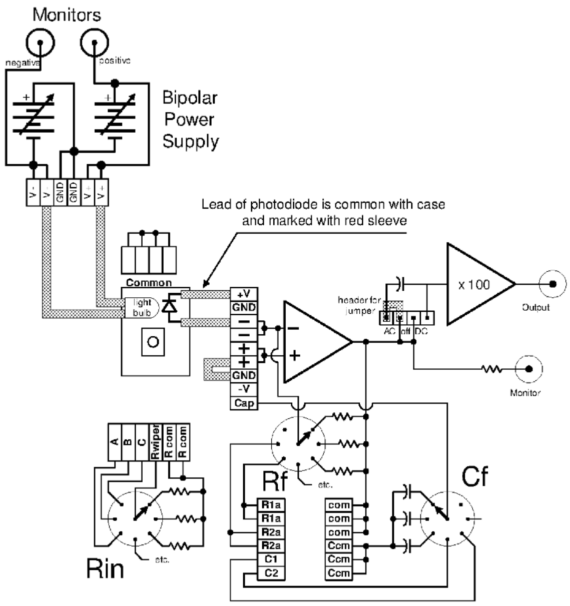

Abbildung 14 LLE–Box zur Beobachtung und Messung des Schrotrauschens.[1]

Elektronen aus der Photodiode wurden von einer Glühlampe herausgelöst, damit diese möglichst unkorreliert sind, um kein gleichmäßiges Rauschen zu erhalten.

Beobachtet wurde der Rauschstrom bzw. die Rauschspannung mit Abb. (15). Damit dies sichtbar war, wurde die Einstellung $f_1 = 100\,\text{kHz}$ für die HLE–Box getroffen. Es ergab sich ein ähnliches Bild zum JOHNSON–Rauschen.

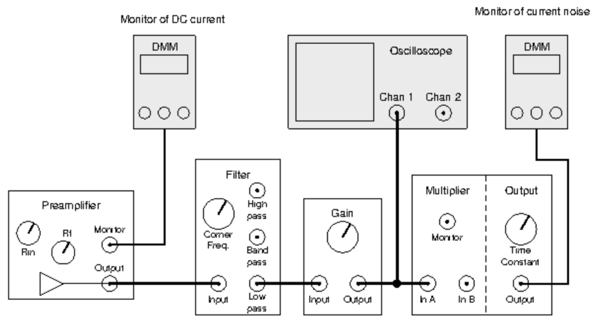

Abbildung 15 Schaltplan zur Messung des Schrotrauschens.[1]

4.3 *Durchführung & Auswertung: Messung des Schrotrauschens*

Um den linearen Bereich der Messgeräte zu verwenden, wurde der Gain für jeden Messpunkt so eingestellt, dass die Werte auf dem DMM zwischen 0,6 V und 1,2 V lagen. Der Widerstand in der LLE–Box betrug $R_f = 10\,\text{k}\Omega$. Da der Strom, den der OpAmp zieht, vernachlässigbar klein ist, fließt i_{dc} vollständig durch R_f, wodurch

$$V_{\text{monitor}} = -R_f i_{\text{dc}}. \tag{25}$$

Das Schrotrauschen im Schaltkreis war dann gegeben durch

$$\overline{\delta i^2} = \frac{\overline{V_{\text{meter}}(t)}10\,\text{V}}{(100 G_2 R_f)^2}, \tag{26}$$

mit $\overline{V_{\text{meter}}(t)}$ dem auf dem DMM abgelesenen Wert und G_2 dem Gain der HLE–Box.

4.3.1 *Untergrundbeiträge*

Das gemessene Rauschen entsteht nicht ausschließlich durch das Schrotrauschen.

Das JOHNSON–Rauschen im R_f Widerstand liefert einen Beitrag. Um diesen zu berechnen wurde die Ausgabe von $\overline{V_{\text{meter}}(t)}$ bei ausgeschalteter Lampe gemessen. Diese liegt bei

$$V^{\text{J}}_{\text{meter}} = 1{,}075(5)\,\text{V} \qquad G_2 = 6000. \tag{27}$$

Der Operationsverstärker hat eine gewisse Offset–Spannung bei ausgeschalteter Lampe für $i_{\text{dc}} = 0\,\text{V}$.

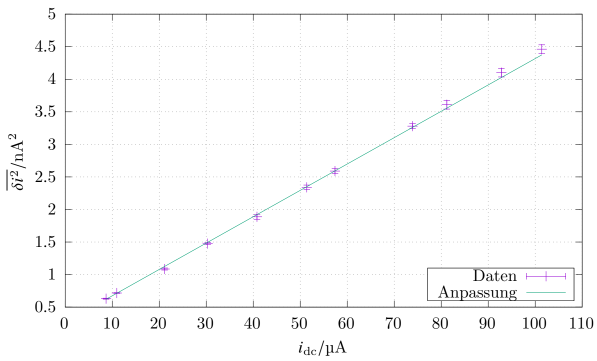

Abbildung 16 Stromabhängigkeit mit $\overline{\delta i^2} = \frac{V_{\mathrm{meter}} 10\,\mathrm{V}}{(100 G_2 R_f)^2}$ und $i_{\mathrm{dc}} = -\frac{V_{\mathrm{monitor}}}{R_f}$

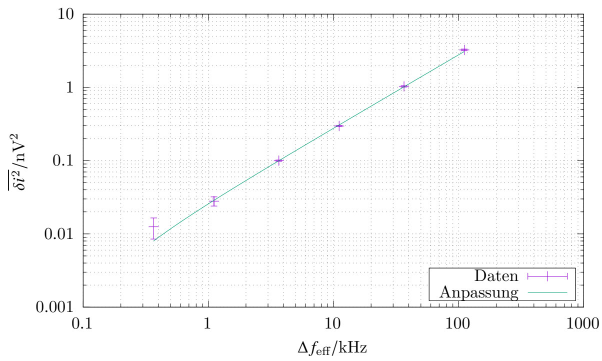

Abbildung 17 Frequenzabhängigkeit mit $\overline{\delta i^2} = \frac{V_{\mathrm{meter}} 10\,\mathrm{V}}{(100 G_2 R_f)^2}$ und $\Delta f_{\mathrm{eff}} = \frac{f_l \pi}{2^{3/2}}$

Parameter	Wert(Fehler)
m	$4{,}049(38) \cdot 10^{-14}$
b	$2{,}690(87) \cdot 10^{-19}$

Tabelle 4 Stromabhängigkeit modelliert mit $\overline{\delta i^2}(i_{\mathrm{dc}}) = m \cdot i_{\mathrm{dc}} + b$

Parameter	Wert(Fehler)
m	$2{,}784(56) \cdot 10^{-23}$
b	$-2{,}2(30) \cdot 10^{-21}$

Tabelle 5 Frequenzabhängigkeit modelliert mit $\overline{\delta i^2}(f) = m \cdot f + b$

Diese beträgt

$$V_{\mathrm{monitor}}^{\mathrm{OpAmp}} = -0{,}4(1)\,\mathrm{mV}. \tag{28}$$

Das Aus– und Einstecken des DMMs ist eine mögliche Quelle für ein weiteres Rauschen, allerdings zeigte dies keinen Effekt an V_{monitor}.

Diese Beiträge werden in den folgenden Berechnungen berücksichtigt.

4.3.2 *Abhängigkeit i_{dc}*

Für unterschiedliche Spannungen der Glühlampe stellte sich ein unterschiedlich starkes Rauschen ein, da dieses linear von i_{dc} abhängt. $\overline{\delta i^2}$ gegen i_{dc} ist in Abb. (16) dargestellt. Die Parameter der Anpassung sind in Tab. (4) eingetragen. Es ist $R_f = 10\,\mathrm{k\Omega}$. Der lineare Zusammenhang lässt sich klar erkennen.

4.3.3 *Abhängigkeit Δf_{eff}*

Für $i_{\mathrm{dc}} = \mathrm{const.}$ wurde durch Variation der Bandbreite die Weißheit des Rauschens überprüft. Die Weißheit gibt an, wie sich das Rauschen bei unterschiedlichen Frequenzen verhält. Es ist weiß, wenn es frequenzunabhängig ist. $\overline{\Delta i^2}$ ist gegen Δf_{eff} in Abb. (17) aufgetragen. Die Parameter für den Fit sind in Tab. (5) eingetragen. Es ist zu erkennen,

Parameter	Wert(Fehler)
f_l	10 104(56)
f_h	100,50(17)

Tabelle 6 Frequenzabhängigkeit modelliert mit $G_{\mathrm{LP}}(f) = \left[1 + (f/f_l)^4\right]^{-1/2}$ und $G_{\mathrm{HP}}(f) = (f/f_h)^2 \left[1 + (f/f_h)^4\right]^{-1/2}$

dass der Rauschstrom linear mit der Frequenz des Tiefpasses steigt.

4.3.4 *Elementarladung*

Literatur

[1] Praktikumsleitung: P425 elektronisches rauschen. Universität Bonn (2016)

[2] CODATA Boltzmann Konstante. https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?k (2022)