

Contents

1	QCD	1
1.1	Mesonen	1
1.2	Pion 2-Punkt-Funktion	2

1 QCD

Wir schauen uns zunächst 2-Punkt-Funktionen für Teilchen in der Quantenchromodynamik (kur QCD) an.

In der QCD sind die elementaren Materieteilchen die **Quarks**. Es gibt 6 Arten davon, genannt “flavor”, nämlich up, down, charm, strange, top und bottom. Dazu gibt es zu jedem Quark ein Antiquark, bei dem einige Eigenschaften des Quarks genau entgegengesetzt sind. Z.B.: Up-Quark u hat elektrische Ladung $+2/3$ mal die Elementarladung (= minus Elektronladung = Protonladung) und Anti-Up-Quark \bar{u} hat elektrische Ladung $-2/3$.

Uns interessieren hier zunächst nur die leichtesten Quarks, nämlich **up** und **down-Quark**.

Eine entscheidende Eigenschaft der QCD ist, dass Quarks nicht als freie Teilchen beobachtet werden können. Sie existieren nur gebunden in zusammengesetzten Elementarteilchen, den *Hadronen*.

Wichtige Beispiele sind das Proton (aus uud , zwei up und ein down Quark, Gesamtladung $2 \cdot (+\frac{2}{3}) + (-\frac{1}{3}) = +1$) und das Neutron (aus u, d, d Gesamtladung $(+\frac{2}{3}) + 2 \cdot (-\frac{1}{3}) = 0$, elektrisch neutral). Das sind die Bausteine der Atomkerne. Proton und Neutron sind im Zoo der Elementarteilchen vergleichsweise schwer, sie sind Beispiele für *Baryonen*, die immer aus 3 Quarks aufgebaut sind.

1.1 Mesonen

Eine zweite große Klasse von Elementarteilchen sind die *Mesonen*, die immer aus einem Quark und einem Antiquark aufgebaut sind. Uns interessiert zunächst das **Pion** π .

Das Pion ist ein sehr wichtiges Teilchen in der QCD:

- Es ist das leichteste Meson überhaupt.
- Mit dem Pion “steuern” wir die Masse von up und down Quark. Beide haben die gleiche Masse.

Es gilt landläufig: Je leichter up und down Quark, desto mehr kostet die Simulation.

Wir betrachten hier eine Simulation, bei der das Pion ziemlich die gleiche Masse hat, wie im Experiment beobachtet. (Genaus auch das Proton und das Neutron.) Damit haben dann auch up und down Quark ungefähr die gleiche Masse wie aus dem Experiment abgeleitet.

Es gibt drei Pionen, die sich in den Quark-Bestandteilen und damit u.a. der elektrischen Ladung unterscheiden:

- π^+ aus up und anti-down Quark; wir schreiben kurz $\pi^+ \sim \bar{d} u$
- π^0 eine Kombination aus up mit anti-up und down mit anti-down, kurz $\pi^0 \sim (\bar{u} u - \bar{d} d) / \sqrt{2}$
- π^- aus down und anti-up Quark; kurz $\pi^- \sim \bar{u} d$

1.2 Pion 2-Punkt-Funktion

Wir berechnen zunächst die **Pion-Pion 2-Punkt-Funktion**. In der QCD beschreiben wir das Pion durch ein Feld $\pi(x)$ mit $x = (t, \vec{x})$. Diese Feld $\pi(x)$ ist vergleichbar mit der Wellenfunktion eines Teilchens in der Quantenmechanik.

Die 2-Punkt-Funktion ist definiert durch

$$C_{\pi-\pi}^{2pt}(t_f - t_i; \vec{p}) = \sum_{\vec{x}} \langle \pi^+(t_f, \vec{x}) \pi^{+\dagger}(t_i, \vec{y}) \rangle e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}. \quad (1)$$

Diese 2-Punkt-Funktion beschreibt die Entwicklung des Pion-Zustandes auf dem Gitter von seiner Erzeugung bei (Euklidischer) Zeit t_i (“initial”) zur Zeit der Vernichtung t_f (“final”).

Dabei ist die zu π^+ adjungierte Funktion gerade π^- , also schreiben wir auch

$$C_{\pi-\pi}^{2pt}(t_f - t_i; \vec{p}) = \sum_{\vec{x}} \langle \pi^+(t_f, \vec{x}) \pi^-(t_i, \vec{y}) \rangle e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}. \quad (2)$$

Durch 3-dimensionale Fourier-Transformation geben wir dem Pion den (3er-) Impulsvektor \vec{p} .

Wir können das Pion-Feld durch die elementaren up und down (Ani-)Quark-Felder $u(x)$ und $d(x)$ ausdrücken:

$$\pi^+(x) = \sum_{a=0}^2 \sum_{\alpha, \beta=0}^3 \bar{d}_\alpha^a(x) (\gamma_5)_{\alpha\beta} u_\beta^a(x). \quad (3)$$

Die Indizes der Quark-Felder (und Anti-Quark-Felder) sind dabei

- $x = (t, \vec{x})$ Raum-Zeit-Punkt
- $a = 0, 1, 2$ Color-/Farb-Index (rot, grün, blau) (**Farbindex neu in QCD!**)
- $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ Spinor-Indizes.
Spinoren lernt ihr in QM beim Elektron kennen. Das Elektron hat auch eine Spin-Wellenfunktion. Es existiert in zwei Zuständen Spin “up” und “down” (diese haben aber nichts mit den Quark-Flavors up und down zu tun zu tun).

Für ist das momentan einfach lineare Algebra: ein Quark-Feld ist ein Vektor der Länge $T \times L^3$ [Raumzeit – Volumen] $\times 3$ [color] $\times 4$ [spin].

γ_5 ist eine 4×4 -Matrix im Raum der Spin-Indizes. Sie legt fest, dass sich das Pion unter Drehungen des Raumes wie ein Skalar verhält, also

$$\vec{x}' = D \vec{x} \Rightarrow \pi(t, \vec{x}') = \pi(t, D^{-1} \vec{x}') = \pi(t, \vec{x}). \quad (4)$$

(Vergleicht das mal mit dem Verhalten des elektrischen Feldes oder magnetischen Feldes unter Drehungen des Raumes. Das sind Vektor-Felder!)

Es gibt insgesamt 16 solche Matrizen wie γ_5 . Wir benutzen später auch noch andere. Die Nummer der γ -Matrix benutzen wir zur Kennzeichnung der Daten.

Welche Daten? Am Beispiel der Datei `twop_light.0500.t00x16y34z53.aff`.

Diese ist für

- Konfiguration Nr. 500;
- $t_i = 0$ und $\vec{y} = (16, 34, 53)$ in Gl. (2).
Die initial Zeit t_i und den Punkt \vec{y} legen wir jeweils fest. Beide sind zufällig gewählt.
Die einzelnen Dateien
`twop_light.0500.t00x16y34z53.aff`
`twop_light.0500.t106x59y08z69.aff`
...
unterscheiden sich nur in der Wahl dieses Raumzeitpunktes.

Ihr habt das bei der Creutz-Freedman-Simulation genauso gemacht $\langle x(t_f) x(t_i) \rangle$. Aber ihr konntet sehr einfach über alle t_i mitteln.

Wir haben hier die Entsprechung

Creutz-Freedman	p2gg
1 dimensional	1+3 dimensional
$x(t)$	$\pi(t, \vec{x})$
t_i	(t_i, \vec{y})
$\langle x(t_f) x(t_i) \rangle$	$\langle \pi(t_f, \vec{x}) \pi(t_i, \vec{y}) \rangle$

Das AFF-Dateiformat funktioniert wie ein Verzeichnisbaum. Mit binary tool `lhpc-aff ls` kann man schrittweise den Inhalt anschauen (ohne Daten auszugeben)

```
[petschlies1@judac03 500]$ lhpc-aff ls twop_light.0500.t00x16y34z53.aff
/: void[0]
  void[0]      hvp
  void[0]      local-local
```

und dann immer den Zweigen nach

```
[petschlies1@judac03 500]$ lhpc-aff ls twop_light.0500.t00x16y34z53.aff /local-local/
/local-local: void[0]
  void[0]      u-gf-d-gi
  void[0]      d-gf-u-gi
  void[0]      u-gf-u-gi
```

```
[petschlies1@judac03 500]$ lhpc-aff ls twop_light.0500.t00x16y34z53.aff /local-local/u-gf-d-gi/
/local-local/u-gf-d-gi: void[0]
  void[0]      t00x16y34z53
```

...

```
[petschlies1@judac03 500]$ lhpc-aff ls twop_light.0500.t00x16y34z53.aff /local-local/u-gf-d-gi/t00x16y34z53/gf05/gi05/px0py0pz0:
/local-local/u-gf-d-gi/t00x16y34z53/gf05/gi05/px0py0pz0: complex[160]
```

Der letzte Pfad ist genau der Datensatz, den wir jetzt brauchen. `t00x16y34z53` ist der initial Punkt, `px0py0pz0` bedeutet $\vec{p} = (0, 0, 0)$ und `gf05/gi05` bedeutet γ_5 in beiden Feldern bei t_i und t_f .

`u-gf-d-gi` gitb die Quark-Flavor Zusammensetzung der 2-Punkt-Funktion an.

`complex[160]` gibt an, dass hinter diesem Pfad ein Datensatz von 160 komplexen Zahlen gespeichert ist. Das ist die Zeitabhängigkeit der Pion-Pion 2-Punkt-Funktion bei Impuls $\vec{p} = 0$ für die *Zeit-Differenzen* $0 \leq t_f - t_i \leq T - 1$ mit $T = 160$.

In einfaches Textformat auslesen könnt ihr den Datensatz mit

```
[petschlies1@judac03 500]$ lhpc-aff cat -cR twop_light.0500.t00x16y34z53.aff /local-local/u-gf-d-gi/t00x16y34z53/gf05/gi05/px0py0pz0
# complex[160] /local-local/u-gf-d-gi/t00x16y34z53/gf05/gi05/px0py0pz0
-1.4060058721240927e+00 -2.3585078686749289e-19
-2.8644576868854210e-01  2.1044715479208025e-19
-1.5325155191613374e-01 -2.9744502351932908e-20
...
```

Spalte 1 Realteil, Spalte 2 Imaginärteil. Wir benötigen nur den Realteil.

Es gibt auch ein Python-Interface für AFF. Können wir uns anschauen. Aber geht erstmal diese Schritte.

Erster Schritt: Auslesen der 200 $C_{\pi-\pi}(t, \vec{p} = 0)$, Mittelung und graphische Darstellung dieses Korrelators.

Wenn das funktioniert, ist der Rest für die anderen Konfigurationen nur Wiederholung.

Danach kommt der Exponential-Fit an die Daten. Et voilà: Damit könnt ihr den Pion-Korrelator analysieren.