18 juni 2002

1. Toon de NP-compleetheid aan van volgend probleem SET-INTERSECTION:

- Gegeven:
  - een getal n;
  - een aantal deelverzamelingen $S_1, \ldots, S_m$ van $\{1, \ldots, n\}$;
  - een getal k.
- Gevraagd: bestaat er een deelverzameling V van $\{1, \ldots, n\}$ zodat:
  - $\#V = k$;
  - voor elke S_i geldt dat $S_i \cap V \neq \emptyset$.

(Hint: VERTEX-COVER.)

Oplossing We tonen eerst aan dat SET-INTERSECTION in NP zit. Hiertoe geven we een polynomiale verifier, we noemen hem Jef. Jef werkt als volgt:

1. Input: $\langle n, S_1, \ldots, S_m, k, c\rangle$
2. Check dat c een deelverzameling is van $\{1, \ldots, n\}$.
3. Check dat de kardinaliteit van c gelijk is aan k.
4. Check dat voor elke S_i geldt dat $S_i \cap V \neq \emptyset$.
5. Als al deze checks lukken, aanvaard; anders reject.

Alle checks kunnen efficiënt geïmplementeerd worden, dus Jef is polynomiaal. Het spreekt voor zich dat $\langle n, S_1, \ldots, S_m, k\rangle \in$ SET-INTERSECTION als en slechts als er een c is zodat Jef de input $\langle n, S_1, \ldots, S_m, k, c\rangle$ aanvaardt. In één zin: *"De gezochte V is het certificaat."*

Nu tonen we aan dat VERTEX-COVER $\leq_{\mathrm{P}}$ SET-INTERSECTION. De reductie is de volgende:

1. Input: $\langle G, k\rangle$.
2. Zij n het aantal knopen van G. Nummer de knopen van 1 tot n.

3. Een edge tussen knopen k_1 en k_2 kunnen we bekijken als het paartje $\{k_1, k_2\}$.

4. Als er dus m edges zijn geeft dit m deelverzamelingen van $\{1, \ldots, n\}$: $S_1, \ldots, S_m$. (Al deze deelverzamelingen hebben slechts twee elementen.)

5. Output: $\langle n, S_1, \ldots, S_m, k\rangle$

Deze reductie is duidelijk efficiënt berekenbaar.

Als $\langle G, k\rangle$ een vertex cover V van k elementen heeft, geldt voor elke $i = 1, \ldots, m$ dat edge nummer i incident is met minstens 1 knoop uit V, wat dus impliceert dat elke edge bekeken als paartje een niet-lege doorsnede heeft met V. Dus voldoet de geconstrueerde $\langle n, S_1, \ldots, S_m, k\rangle$ aan SET-INTERSECTION.

Omgekeerd, als de geconstrueerde $\langle n, S_1, \ldots, S_m, k\rangle$ voldoet aan SET-INTERSECTION is er dus een deel $V \subseteq \{1, \ldots, n\}$ van k elementen zodat elke S_i een niet-lege doorsnede heeft met V. Elke S_i is een edge, en dus is elke edge incident met minstens 1 knoop uit V. Dus is V een vertex-cover, hij heeft k elementen, dus is $\langle G, k\rangle$ in VERTEX-COVER.

2. Toon de NP-compleetheid aan van het volgend probleem HAMCYCLE:

- Gegeven: een graaf G en een knoop s
- Gevraagd: bestaat er een pad in G dat vertrekt in s, terug eindigt in s, en alle andere knopen precies 1 keer aandoet?

(Hint: HAMPATH.)

Oplossing In NP: het gezochte pad is het certificaat.

We reduceren HAMPATH polynomiaal naar HAMCYCLE als volgt:

1. Input: $\langle G, s, t\rangle$.

2. Output: $\langle G', s'\rangle$, waarbij G' bekomen is door het volgende toe te voegen aan G:

   (a) een nieuwe knoop s';

   (b) een pijl $s' \to s$;

(c) een pijl $t \to s'$.

Deze reductie is gemakkelijk efficiënt te implementeren.

Als $\langle G, s, t\rangle \in$ HAMPATH dan is er een Hamiltoniaans pad in G van s naar t, dit is dus een pad dat vertrekt in s, eindigt in t, en elke andere knoop precies 1 keer aandoet. Noem dit pad p. Beschouw nu het pad p' in G' dat vertrekt in s', dan naar s springt, dan heel p volgt, dus uitkomt in t, en tenslotte terug naar s' springt. Dit pad p' toont duidelijk aan dat $\langle G', s'\rangle \in$ HAMCYCLE.

Omgekeerd, onderstel dat $\langle G', s'\rangle \in$ HAMCYCLE, dus er is een pad p' in G' dat vertrekt in s', terug eindigt in s', en alle andere knopen van G' precies 1 keer aandoet. De enige pijl waarmee we kunnen vertrekken uit s' is die naar s. De enige pijl waarmee we kunnen teruggaan naar s' is die vanuit t. Dus alle andere knopen worden aangedaan in het gedeelte van p' tussen s en t. Dit gedeelte tussen s en t is dus een Hamiltoniaans pad in G en dus is $\langle G, s, t\rangle \in$ HAMPATH.