

**7.1** TRUE: a, d, e, f. FALSE: de rest.

Nota bij (e):  $3^n = 2^{O(n)}$  omdat  $3 = 2^c$  waarbij  $c = \log 3$ , en dus  $3^n = (2^c)^n = 2^{cn} = 2^{O(n)}$ .

**7.6** Te bewijzen: als  $A$  en  $B$  in  $P$  zitten, dan ook  $A \cup B$ ,  $A \cdot B$ , en  $\Sigma^* - A$ .

$A \cup B$ : op input  $x$ , test of  $x \in A$  of  $x \in B$ . Beide testen kunnen in polynomiale tijd, het geheel is dus een som van twee polynomen, wat terug polynomiaal is.

$A \cdot B$ : op input  $x = x_1 \dots x_n$ , test voor elke  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  of  $x_1 \dots x_i \in A$  en  $x_{i+1} \dots x_n \in B$ . Dit zijn  $O(n)$  testen, elke test is polynomiaal, het geheel is dus  $O(n) \times$  polynomiaal, dit is polynomiaal.

$\Sigma^* - A$ : op input  $x$ , test of  $x \in A$ , indien ja, reject, indien nee, aanvaard. Aangezien  $x \in A$  polynomiaal is, is dit polynomiaal.

**7.13** Volgend algoritme is een polynomiaal algoritme voor  $A^*$ . Op input  $y = y_1 \dots y_n$ , bouwen we een booleaanse tabel  $T[i, j]$  op voor  $1 \leq i \leq j \leq n$ , zodat  $T[i, j] = "y_i \dots y_j \in A^*"$ . Na afloop kan het antwoord dan afgelezen worden in  $T[1, n]$ . De opbouw verloopt als volgt:

1. Voor elke  $i$ ,  $T[i, i] := \text{true}$  als de 1-letter string  $y_i \in A$ , anders  $T[i, i] := \text{false}$ . Inderdaad, een 1-letter string kan enkel in  $A^*$  zitten als hij in  $A$  zit.
2. We weten nu voor elke substring van lengte 1 of hij in  $A^*$  zit. Nu gaan we dit bepalen voor elke substring van lengte 2: we gaan dus  $T[i, j]$  invullen voor alle  $(i, j)$  zodat  $j = i + 1$ . Daarna doen we het dan voor elke van lengte 3 (dus  $j = i + 2$ ), en zo voort, tot we aan  $T[1, n]$  zitten.
3. De algemene regel om  $T[i, j]$  in te vullen is als volgt. Zoals zopas uitgelegd zorgen we ervoor dat  $T[k + 1, j]$  reeds is ingevuld voor elke  $k \in \{i, \dots, j - 1\}$ . Merk nu op dat  $y_i \dots y_j \in A^*$  als en slechts als  $y_i \dots y_j \in A$ , of er een  $k \in \{i, \dots, j - 1\}$  bestaat zodat  $y_i \dots y_k \in A$  en  $y_{k+1} \dots y_j \in A^*$ . Dit laatste kunnen we simpelweg zien in  $T[k + 1, j]$ . Er zijn  $O(n)$  mogelijkheden voor  $k$ , en de testen in  $A$  zijn polynomiaal. Elke invulling is dus polynomiaal.
4. We vullen  $O(n^2)$  cellen van de tabel in, en  $O(n^2) \times$  polynomiaal is opnieuw polynomiaal.