1. Geef een satisfiable booleaanse formule in 3CNF met ten minste vier verschillende variabelen, zet ze om in een graaf volgens de reductie van 3SAT naar CLIQUE, en verifiëer dat de graaf inderdaad een clique heeft van de vereiste grootte.

2. Doe hetzelfde voor een niet-satisfiable formule, en verifiëer dat er geen clique is van de vereiste grootte.

3. Het bewijs van de stelling van Cook-Levin beschrijft, voor elke gegeven niet-deterministische Turing machine N, een constructie die een string w omzet in een booleaanse formule ϕ. Deze constructie is zo dat ϕ satisfiable is als en slechts als w aanvaard wordt door N.

Voer de constructie uit op $w = \texttt{aaba}$, in het geval dat N volgende zeer eenvoudige Turing machine is:

- N heeft slechts twee toestanden, q_0 en q_1. De begintoestand is q_0, en de aanvaardende toestand is q_1.
- De enige mogelijke transities zijn de volgende twee:

  $$(q_0, \texttt{a}) \to (q_0, \texttt{b}, \mathrm{R})$$
  $$(q_0, \texttt{b}) \to (q_1, \texttt{b}, \mathrm{R})$$

  Dus, als N in toestand q_0 een $\texttt{a}$ ziet, herschrijft hij de $\texttt{a}$ in een $\texttt{b}$ en gaat naar rechts; als N in toestand q_0 een $\texttt{b}$ ziet, gaat hij over in toestand q_1 en gaat naar rechts. In eender welke andere situatie zal N stoppen omdat er geen mogelijke transitie is.

Is de formule ϕ die je bekomt satisfiable?

4. Het bewijs van de stelling van Cook-Levin dat we gezien hebben gaat uit van de definitie van NP in termen van niet-deterministische Turing machines. Pas het bewijs aan zodat het uitgaat van de definitie van NP in termen van verifiers.

Oplossing 4: We nemen een willekeurige taal A in NP en tonen aan dat A polynomiaal kan gereduceerd worden naar SAT. Zij V een polynomiale verifier voor A. We kunnen hem implementeren als een single-tape turing machine die op een input w, c loopt in tijd n^k voor een of andere vaste k, waarbij n de lengte is van w.

De berekening van V op een input w, c kan nog steeds beschreven worden in een berekeningstabel. Nu $w \in A$ als en slechts als er een c is zodat de input w, c aanvaard wordt door V. Dit betekent dat we in de formule ϕ_{start}

enkel moeten specificeren dat de eerste rij bestaat uit de begintoestand en de input w, maar dat we vrij laten welke c er daar extra bijkomt:

$$\begin{aligned}\phi_{\text{start}} = x_{1,1,\#} &\wedge x_{1,2,q_0} \wedge \\ &x_{1,3,w_1} \wedge x_{1,4,w_2} \wedge \cdots \wedge x_{1,n+2,w_n} \wedge \\ &x_{1,n+3,\sqcup} \wedge x_{1,n^k,\#}\end{aligned}$$

We onderstellen dat w en c in de input gescheiden van elkaar zijn door een blanko, vandaar dat $x_{1,n+3,\sqcup}$ waar moet zijn. De formule zegt niets over de cellen in de eerste rij in posities tussen $n+3$ en n^k, daar kan dus een willekeurig certificaat komen te staan.

De rest van de formule ϕ blijft helemaal hetzelfde. Zoals gewenst is dan ϕ satisfiable als we de tabel zo kunnen invullen dat hij een aanvaardende berekening van V op een input w, c voorstelt, waarbij c volledig vrij is.