Een Petri-net oplossing voor het kool–geit–wolf probleem

Jan Van den Bussche

Geavanceerde Software Engineering

We geven hier een Petri net dat een oplossing biedt voor het kool–geit–wolf probleem (zie Oefening 2.1.3 in cursustekst Petrinetten).

We gebruiken volgende places (condities):

conditie	betekenis
bl	boer is links
br	boer is rechts
kl	kool is links
kr	kool is rechts
gl	geit is links
gr	geit is rechts
wl	wolf is links
wr	wolf is rechts

De initiële configuratie is duidelijk: $\{\mathrm{bl}, \mathrm{kl}, \mathrm{gl}, \mathrm{wl}\}$.

We gebruiken volgende transities (events):

event	betekenis
blr	boer (alleen) van links naar rechts
brl	boer (alleen) van rechts naar links
klr	boer met kool van links naar rechts
krl	boer met kool van rechts naar links
glr	boer met geit van links naar rechts
grl	boer met geit van rechts naar links
wlr	boer met wolf van links naar rechts
wrl	boer met wolf van rechts naar links

Zoals je ziet schrijven we hier de transities met vette letters om het verschil duidelijker te maken met de places.

Het belangrijkste is natuurlijk de verzameling pijlen. We moeten voor elk event specificeren welke de precondities zijn, en welke de postcondities. Dit is niet altijd even eenvoudig.

glr: Voor de geit is alles wel eenvoudig; het is immers nooit verboden de geit te verplaatsen, dit kan nooit tot een verboden situatie leiden. We hebben dus als pre- en post-condities:

$$\bullet\mathbf{glr} = \{\mathrm{bl}, \mathrm{gl}\}$$
$$\mathbf{glr}\bullet = \{\mathrm{br}, \mathrm{gr}\}$$

klr: Voor de kool is het ingewikkelder. We mogen de kool niet van links naar rechts verplaatsen als de geit en de wolf samen links achterblijven. Dit geeft dus twee mogelijkheden: geit rechts en wolf links, of geit links en wolf rechts. (Geit en wolf beiden rechts is onmogelijk; aangezien de boer zich nu links bevindt zouden we ons dan al in een verboden situatie bevinden, en we zijn net bezig een systeem op te stellen waarin zulke verboden situaties toch niet zullen voorkomen.) In een elementair Petri net kunnen we echter niet zomaar een disjunctie $(\mathrm{gr} \wedge \mathrm{wl}) \vee (\mathrm{gl} \wedge \mathrm{wr})$ postuleren als preconditie. De oplossing hiervoor is dat we *twee* transities gebruiken, eentje voor elke situatie. We splitsen **klr** dus op in twee transities, namelijk $\mathbf{klr}_1$ and $\mathbf{klr}_2$, met volgende pre- en post-condities:

$$\begin{aligned}
\bullet\mathbf{klr}_1 &= \{\mathrm{kl}, \mathrm{bl}, \mathrm{gr}, \mathrm{wl}\}\\
\mathbf{klr}_1\bullet &= \{\mathrm{kr}, \mathrm{br}, \mathrm{gr}, \mathrm{wl}\}\\
\bullet\mathbf{klr}_2 &= \{\mathrm{kl}, \mathrm{bl}, \mathrm{gl}, \mathrm{wr}\}\\
\mathbf{klr}_2\bullet &= \{\mathrm{kr}, \mathrm{br}, \mathrm{gl}, \mathrm{wr}\}
\end{aligned}$$

wlr: Het is duidelijk dat de wolf en de kool een symmetrische rol spelen. De analyse van de kool hierboven kan dus, mutatis mutandis, herhaald worden voor de wolf. We krijgen dus eveneens twee transities $\mathbf{wlr}_1$ and $\mathbf{wlr}_2$, met volgende pre- en post-condities:

$$\begin{aligned}
\bullet\mathbf{wlr}_1 &= \{\mathrm{wl}, \mathrm{bl}, \mathrm{gr}, \mathrm{kl}\}\\
\mathbf{wlr}_1\bullet &= \{\mathrm{wr}, \mathrm{br}, \mathrm{gr}, \mathrm{kl}\}\\
\bullet\mathbf{wlr}_2 &= \{\mathrm{wl}, \mathrm{bl}, \mathrm{gl}, \mathrm{kr}\}\\
\mathbf{wlr}_2\bullet &= \{\mathrm{wr}, \mathrm{br}, \mathrm{gl}, \mathrm{kr}\}
\end{aligned}$$

blr: Onze boer, tenslotte, mag enkel van links naar rechts, alleen, overvaren op voorwaarde dat noch geit en kool, noch geit en wolf zich links bevinden. Dit kan dus concreet slechts in twee situaties: $\{\mathrm{gl}, \mathrm{kr}, \mathrm{wr}\}$ en $\{\mathrm{gr}, \mathrm{kl}, \mathrm{wl}\}$. We krijgen dus opnieuw twee transities $\mathbf{blr}_1$ en $\mathbf{blr}_2$ met volgende pre- en post-condities:

$$\begin{aligned}
\bullet\mathbf{blr}_1 &= \{\mathrm{bl}, \mathrm{gl}, \mathrm{kr}, \mathrm{wr}\}\\
\mathbf{blr}_1\bullet &= \{\mathrm{br}, \mathrm{gl}, \mathrm{kr}, \mathrm{wr}\}\\
\bullet\mathbf{blr}_2 &= \{\mathrm{bl}, \mathrm{gr}, \mathrm{kl}, \mathrm{wl}\}\\
\mathbf{blr}_2\bullet &= \{\mathrm{br}, \mathrm{gr}, \mathrm{kl}, \mathrm{wl}\}
\end{aligned}$$

Voor de transities van rechts naar links is alles symmetrisch, zoals getoond in Tabel 1.

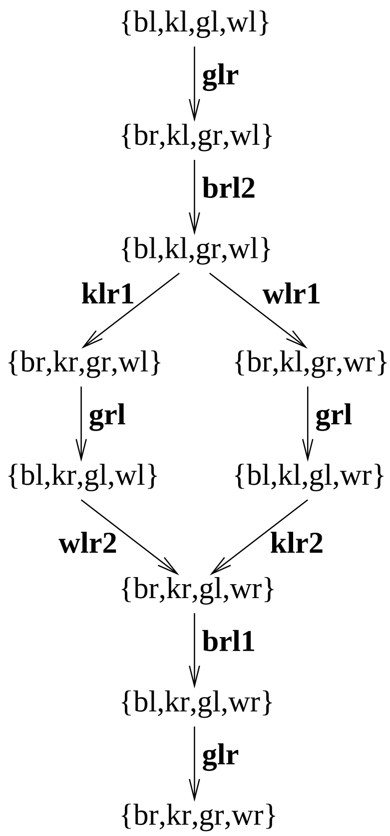
Je zou het uiteindelijke complete Petrinet grafisch kunnen tekenen, maar zulke figuur zou weinig extra inzicht bieden. Wel interessant is de configuratiegraaf van het systeem, omdat we hier alle mogelijke 'runs' van het systeem in kunnen observeren. Deze graaf wordt getoond in Figuur 1. We tonen telkens ofwel enkel de transitie van links naar rechts, ofwel deze van rechts naar links; wegens Tabel 1 is er voor elke transitie van links naar rechts ook een omgekeerde transitie van rechts naar links, en omgekeerd, maar deze omgekeerde pijlen tonen we dus niet om de figuur eenvoudig te houden. We zien in de graaf dat er twee mogelijke oplossingen zijn voor het kool–geit–wolf probleem, te weten:

Tabel 1: Transities van rechts naar links.

$$
\begin{gathered}
\bullet\mathbf{grl} = \mathbf{glr}\bullet \\
\bullet\mathbf{krl}_i = \mathbf{klr}_i\bullet \\
\bullet\mathbf{wrl}_i = \mathbf{wlr}_i\bullet \\
\bullet\mathbf{brl}_i = \mathbf{wlr}_i\bullet \\
\mathbf{grl}\bullet = \bullet\mathbf{glr} \\
\mathbf{krl}_i\bullet = \bullet\mathbf{klr}_i \\
\mathbf{wrl}_i\bullet = \bullet\mathbf{wlr}_i \\
\mathbf{brl}_i\bullet = \bullet\mathbf{blr}_i
\end{gathered}
$$

1. glr; brl; klr; grl; wlr; brl; glr
2. glr; brl; wlr; grl; klr; brl; glr

Deze oplossingen zijn af te lezen als paden van de beginconfiguratie $\{\mathrm{bl}, \mathrm{kl}, \mathrm{gl}, \mathrm{wl}\}$ naar de eindconfiguratie $\{\mathrm{br}, \mathrm{kr}, \mathrm{gr}, \mathrm{wr}\}$.



Figuur 1: Configuratiegraaf van ons systeem.