

Beschouw volgend probleem (Problem 7.25 uit het boek):

$$U = \{\langle M, w, 1^\ell \rangle \mid M \text{ is een niet-deterministische TM die } w \text{ aanvaardt binnen } \ell \text{ stappen}\}$$

Deze U zit in NP; een niet-deterministisch polynomiale-tijd algoritme voor U is het volgende: “Op input $\langle M, x, 1^\ell \rangle$, simuleer M op x (niet-deterministisch), maar breek af als we meer dan ℓ stappen hebben gedaan. Aanvaard indien de gekozen run aanvaardt.”

U is NP-compleet. Om dit in te zien, neem een willekeurig probleem A in NP. Dan is er een niet-deterministisch polynomiale-tijd algoritme voor A . Schrijf dit algoritme als een Turing machine M . Deze machine doet op een input x hoogstens n^k stappen, waar n de lengte is van x .

Beschouw nu volgende functie $f(x) := \langle M, x, 1^{n^k} \rangle$, waarbij n de lengte van x is. Deze functie is duidelijk efficiënt berekenbaar. Immers, M is een constante string, namelijk de source code van M ; x is gewoon de input kopiëren; en n^k eentjes schrijven is duidelijk polynomiaal. We tonen nu aan dat deze f een correcte reductie is van A naar U .

- Als $x \in A$, dan wordt x dus aanvaard door M , en aangezien M hoogstens n^k stappen maakt, is dus $f(x) \in U$.
- Als $f(x) \in U$, dan wordt x dus aanvaard door M in hoogstens n^k stappen. Aangezien M nooit meer stappen doet dan dat, wordt x dus aanvaard door M tout court, en is dus $x \in A$.

Beschouw nu volgende variante van U :

$$U = \{\langle M, w, 1^\ell \rangle \mid M \text{ is een deterministische TM die } w \text{ aanvaardt binnen } \ell \text{ space}\}$$

Dit probleem zit in PSPACE, is zelfs PSPACE-compleet. Om dit in te zien volstaat het in bovenstaande redenering ‘tijd’ of ‘stappen’ door ‘space’ te veranderen, en ‘niet-deterministisch’ door ‘deterministisch’.

Of beschouw volgende variante:

$$U = \{\langle M, w, 1^\ell \rangle \mid M \text{ is een deterministische TM die } w \text{ aanvaardt binnen } 2^\ell \text{ stappen}\}$$

Dit probleem is dan EXPTIME-compleet. Vervang in de redenering gewoon overall ‘niet-deterministisch’ in ‘deterministisch’, en ‘... stappen’ (of tijd) in ‘ 2^{\dots} stappen’ (of tijd).

Op analoge wijze kan je complete problemen verkrijgen voor NEXPTIME of EXPSPACE.