PUZZLE is NP-compleet

Voor de definitie van het PUZZLE probleem zie Problem 7.26. Dit probleem is duidelijk in NP (de oplossing is het certificaat). Om aan te tonen dat het NP-compleet is reduceren we 3SAT naar PUZZLE.

Zij ϕ een input voor 3SAT. Voor elke variabele die voorkomt in ϕ maken we een kaart. Elke kaart heeft m rijen, waar m het aantal clauses is in ϕ. Voor elke clause is er dus een rij.

We knippen gaatjes als volgt. Neem de kaart voor variabele x. Voor elke clause c zijn er drie mogelijkheden:[1]

1. x komt positief voor in c. Dan knippen we in de rij voor c rechts.
2. x komt negatief voor in c. Dan knippen we in de rij voor c links.
3. x komt niet voor in c. Dan knippen we in de rij voor c zowel links als rechts.

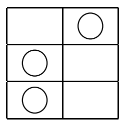
Dit doen we dus voor alle variabelen. We nemen dan ook nog een extra controlekaart, die volledig geknipt is in de linkerkolom, en nergens geknipt is in de rechterkolom.

Voorbeeld. Voor onze familiaire formule

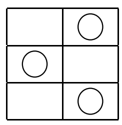
$$\phi = (x_1 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_2)$$

krijgen we volgende kaarten:

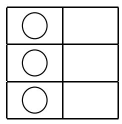
- De kaart voor x_1:



- De kaart voor x_2:



- De controlekaart:



[1] Clauses waar eenzelfde variabele zowel positief als negatief voorkomt zijn redundant en moeten we dus niet beschouwen in deze discussie.

Als ϕ satisfiable is, dan hebben de kaarten een oplossing. Inderdaad, zij α een waarheidstoekenning die ϕ waar maakt (ϕ is satisfiable). We leggen nu de kaarten als volgt: (voor elke kaart moeten we specificeren of we ze laten of omdraaien)

- Als $\alpha(x) = 1$, laat de kaart voor x dan.
- Als $\alpha(x) = 0$, draai de kaart voor x dan om.

De controlekaart tenslotte laten we ook zoals ze is. Dit is een oplossing voor PUZZLE. Inderdaad, de rechterkolom is bedekt door de controlekaart. We moeten dus enkel kijken naar de linkerkolom. Neem een willekeurige clause c. Omdat c waar wordt gemaakt door α, moeten minstens één van volgende twee situaties zich voordoen:

- Er is een variabele x die positief voorkomt in c, en $\alpha(x) = 1$. In dat geval hebben we de kaart voor x gelaten en bedekt die dus het linkervakje van de rij voor c.
- Er is een variabele x die negatief voorkomt in c, en $\alpha(x) = 0$. In dat geval hebben we de kaart voor x omgedraaid en is dus opnieuw het linkervakje van de rij voor c bedekt.

We concluderen dus dat alle vakjes bedekt zijn, zoals gewenst.

Als de kaarten een oplossing hebben, dan is ϕ satisfiable. Neem een oplossing van de puzzle. We mogen onderstellen dat de controlekaart niet is omgedraaid (indien dit wel zo is draaien we de hele stapel om, dit is nog steeds een oplossing en dan ligt de controlekaart terug goed.) We kijken nu naar onze oplossing en kijken hoe elke kaart is gelegd:

- Als de kaart voor variabele x is gelaten, stel dan $\alpha(x) := 1$.
- Als de kaart voor variabele x is omgedraaid, stel dan $\alpha(x) := 0$.

Op deze manier definiëren we een waarheidstoekenning α. Als we kunnen inzien dat ϕ waar wordt onder α hebben we aangetoond dat ϕ satisfiable is zoals gewenst. Bekijk dus een willekeurige clause c van ϕ. Zoals alle vakjes, is ook het linkervakje in de rij voor c bedekt door onze oplossing. Er is dus een kaart die dit vakje bedekt; zij x de variabele van deze kaart. Dan zijn er in principe drie mogelijkheden:

- x komt niet voor in c. Dit is echter onmogelijk omdat de kaart voor x dan twee gaten heeft in de rij voor c en dus onmogelijk het linkervakje kan bedekken.

- x komt positief voor in c. Dan hebben we x gelaten, want als we ze hadden omgedraaid zou het linkervakje niet bedekt zijn. Dus is $\alpha(x) = 1$, en dus maakt α inderdaad c waar.

- x komt negatief voor in c. Dan hebben we x omgedraaid, want als we ze hadden gelaten zou het linkervakje niet bedekt zijn. Dus is $\alpha(x) = 0$, en dus maakt α inderdaad c waar.

Elke clause c wordt dus waar gemaakt door α, zoals gewenst.