

Oplossingen 13 juni 2002

Theoretische Informatica II

1 Herinnering

Een polynomiale reductie van een probleem A naar een probleem B is een functie f die willekeurige inputs voor probleem A omzet naar inputs voor probleem B , zodat

- f efficiënt berekenbaar is, en
- voor elke mogelijke input w geldt dat

$$w \in A \quad \Leftrightarrow \quad f(w) \in B.$$

In dat geval schrijven we $A \leq_P B$. We maken nu drie oefeningen op polynomiale reducties.

2 UHAMPATH \leq_P LPATH

Beschouw volgende functie f :

1. Input: Een willekeurige input $\langle G, s, t \rangle$ voor UHAMPATH.
2. Zij n het aantal knopen in G .
3. Output: $\langle G, s, t, n - 1 \rangle$.

Deze f is duidelijk efficiënt berekenbaar. We moeten aantonen:

$$\langle G, s, t \rangle \in \text{UHAMPATH} \quad \Leftrightarrow \quad \langle G, s, t, n - 1 \rangle \in \text{LPATH}.$$

$\boxed{\Rightarrow}$: Gegeven $\langle G, s, t \rangle \in \text{UHAMPATH}$, d.w.z., er bestaat een Hamiltoniaans pad van s naar t in G . Noem dit pad p . Gevraagd $\langle G, s, t, n - 1 \rangle \in \text{LPATH}$, d.w.z., er bestaat een simpel pad van s naar t in G van lengte minstens $n - 1$. Neem hiervoor p . Inderdaad:

- p is simpel want Hamiltoniaanse paden zijn simpel.
- p heeft lengte minstens $n - 1$ want p doet alle n knopen aan.

\Leftarrow : Gegeven $\langle G, s, t, n-1 \rangle \in \text{LPATH}$, d.w.z., er bestaat een simpel pad van s naar t in G van lengte minstens $n-1$. Noem dit pad p . Gevraagd $\langle G, s, t \rangle \in \text{UHAMPATH}$, d.w.z., er bestaat een Hamiltoniaans pad van s naar t in G . Neem hiervoor p . Inderdaad, omdat p simpel is doet hij met elke stap een nieuwe knoop aan. Omdat hij lengte minstens $n-1$ heeft doet hij dus $n-1$ knopen aan. Tensamen met de startknoop s zijn dit er dus n , allemaal dus. Dus is p inderdaad Hamiltoniaans.

3 $\text{SAT} \leq_P \text{DOUBLE-SAT}$

Beschouw volgende functie f :

1. Input: Een willekeurige input ϕ voor SAT.
2. Neem een variabele die niet voorkomt in ϕ , noem hem u .
3. Output: De formule $\phi \wedge (u \vee \neg u)$, dus $f(\phi) := (\phi \wedge (u \vee \neg u))$.

Deze f is duidelijk efficiënt berekenbaar. We moeten aantonen:

$$\phi \in \text{SAT} \iff f(\phi) \in \text{DOUBLE-SAT}.$$

\Rightarrow : Gegeven: $\phi \in \text{SAT}$, d.w.z., er bestaat een waarheidstoekenning op de variabelen in ϕ waaronder ϕ waar wordt. Noem deze toekenning α . Gevraagd: $f(\phi) \in \text{DOUBLE-SAT}$, d.w.z., er bestaan twee verschillende waarheidstoekenningen waaronder $\phi \wedge (u \vee \neg u)$ waar wordt. Neem als eerste waarheidstoekenning α die we uitbreiden naar u door u op 1 te zetten. Neem als tweede toekenning α die we uitbreiden naar u door u op 0 te zetten.

\Leftarrow : Gegeven: $f(\phi) \in \text{DOUBLE-SAT}$, d.w.z., er bestaan twee verschillende waarheidstoekenningen waaronder $\phi \wedge (u \vee \neg u)$ waar wordt. Noem deze α_1 en α_2 . Gevraagd: $\phi \in \text{SAT}$, d.w.z., er bestaat een waarheidstoekenning waaronder ϕ waar wordt. Neem hiervoor b.v. α_1 (je kan ook α_2 nemen) waar je de waarde van u gewoon negeert (u komt toch niet voor in ϕ). Als $\phi \wedge (u \vee \neg u)$ waar is onder α_1 , is zeker ϕ waar onder α_1 (want het is een AND).

4 $\text{CLIQUE} \leq_P \text{HALF-CLIQUE}$

Beschouw volgende functie f :

1. Input: Een willekeurige input $\langle G, k \rangle$ voor CLIQUE.
2. Zij n het aantal knopen in G . We construeren een graaf H als volgt:
 - Als $k = n/2$ dan is H gewoon G .
 - Als $k < n/2$ dan is H bekomen uit G door een clique van $n-2k$ nieuwe knopen toe te voegen aan G , en alle knopen uit deze clique ook nog eens te verbinden met alle knopen uit G .

- Als $k > n/2$ dan is H bekomen uit G door $2k - n$ nieuwe knopen toe te voegen, zonder enige verbindingen.

3. Output: H , dus $f(G, k) := H$.

Deze f is duidelijk efficiënt berekenbaar. We moeten aantonen:

$$\langle G, k \rangle \in \text{CLIQUE} \quad \Leftrightarrow \quad f(G, k) \in \text{HALF-CLIQUE}.$$

\Rightarrow : Stel $\langle G, k \rangle \in \text{CLIQUE}$. Dus G bezit een clique van k knopen. Noem deze clique C . We moeten aantonen dat H een clique bezit van de helft van n knopen. We beschouwen de verschillende gevallen.

- Als $k = n/2$ dan is H gelijk aan G en heeft H dus een $n/2$ -clique zoals gewenst.
- Als $k < n/2$ dan heeft H $n + (n - 2k) = 2(n - k)$ knopen. De helft hiervan is $n - k$. We zoeken dus een clique van $n - k$ knopen. Deze vinden we ook: we hebben reeds C van k knopen, en voegen daarbij de extra clique van $n - 2k$ toegevoegde knopen uit H . Totaal $k + (n - 2k) = n - k$ knopen zoals gewenst.
- Als $k > n/2$ dan heeft H $n + (2k - n) = 2k$ knopen. De helft hiervan is k . We zoeken dus een clique van k knopen. Deze hebben we, namelijk C .

\Leftarrow : Stel $H \in \text{HALF-CLIQUE}$. Dus H bezit een clique bestaande uit minstens de helft van n knopen. We moeten aantonen dat G dan een clique van k knopen bezit. We beschouwen weer de verschillende gevallen.

- Als $k = n/2$ dan is G gelijk aan H . H , en dus G , heeft een clique bestaande uit minstens $n/2$ knopen, en dus heeft G zeker een clique van k knopen want $k = n/2$.
- Als $k < n/2$ dan heeft H $2(n - k)$ knopen (zie hierboven). H heeft dus een clique van minstens $n - k$ knopen. Hoogstens $n - 2k$ daarvan komen uit het stuk dat we toevoegden, omdat dit stuk slechts zo groot was. Dus minstens k moeten komen uit de originele G . Dus heeft G minstens een k -clique.
- Als $k > n/2$ dan heeft H $2k$ knopen (zie hierboven). H heeft dus een clique van minstens k knopen. Deze kunnen echter niet komen uit het stuk dat we toevoegden, dit waren immers knopen zonder verbindingen. De clique moet dus volledig uit G komen.