Oplossingen 17 mei 2001

Theoretische Informatica II

1 Herinnering

Een polynomiale reductie van een probleem A naar een probleem B is een functie f die willekeurige inputs voor probleem A omzet naar inputs voor probleem B, zodat

- f efficiënt berekenbaar is, en
- voor elke mogelijke input w geldt dat

$$w \in A \quad \Leftrightarrow \quad f(w) \in B.$$

In dat geval schrijven we $A \leq_{\mathrm{P}} B$. We maken nu drie oefeningen op polynomiale reducties.

2 UHAMPATH $\leq_{\mathrm{P}}$ LPATH

Beschouw volgende functie f:

1. Input: Een willekeurige input $\langle G, s, t \rangle$ voor UHAMPATH.
2. Zij n het aantal knopen in G.
3. Output: $\langle G, s, t, n-1 \rangle$.

Deze f is duidelijk efficiënt berekenbaar. We moeten aantonen:

$$\langle G, s, t \rangle \in \text{UHAMPATH} \quad \Leftrightarrow \quad \langle G, s, t, n-1 \rangle \in \text{LPATH}.$$

$\boxed{\Rightarrow:}$ Gegeven $\langle G, s, t \rangle \in$ UHAMPATH, d.w.z., er bestaat een Hamiltoniaans pad van s naar t in G. Noem dit pad p. Gevraagd $\langle G, s, t, n-1 \rangle \in$ LPATH, d.w.z., er bestaat een simpel pad van s naar t in G van lengte minstens $n-1$. Neem hiervoor p. Inderdaad:

- p is simpel want Hamiltoniaanse paden zijn simpel.
- p heeft lengte minstens $n-1$ want p doet alle n knopen aan.

$\boxed{\Leftarrow:}$ Gegeven $\langle G, s, t, n-1\rangle \in$ LPATH, d.w.z., er bestaat een simpel pad van s naar t in G van lengte minstens $n-1$. Noem dit pad p. Gevraagd $\langle G, s, t\rangle \in$ UHAMPATH, d.w.z., er bestaat een Hamiltoniaans pad van s naar t in G. Neem hiervoor p. Inderdaad, omdat p simpel is doet hij met elke stap een nieuwe knoop aan. Omdat hij lengte minstens $n-1$ heeft doen hij dus $n-1$ knopen aan. Tesamen met de startknoop s zijn dit er dus n, allemaal dus. Dus is p inderdaad Hamiltoniaans.

3 SAT $\leq_{\mathrm{P}}$ DOUBLE-SAT

Beschouw volgende functie f:

1. Input: Een willekeurige input ϕ voor SAT.
2. Neem een variabele die niet voorkomt in ϕ, noem hem u.
3. Output: De formule $\phi \wedge (u \vee \neg u)$, dus $f(\phi) := (\phi \wedge (u \vee \neg u))$.

Deze f is duidelijk efficiënt berekenbaar. We moeten aantonen:

$$\phi \in \text{SAT} \quad \Leftrightarrow \quad f(\phi) \in \text{DOUBLE-SAT}.$$

$\boxed{\Rightarrow:}$ Gegeven: $\phi \in$ SAT, d.w.z., er bestaat een waarheidstoekenning op de variabelen in ϕ waaronder ϕ waar wordt. Noem deze toekenning α. Gevraagd: $f(\phi) \in$ DOUBLE-SAT, d.w.z, er bestaan twee verschillende waarheidstoekenningen waaronder $\phi \wedge (u \vee \neg u)$ waar wordt. Neem als eerste waarheidstoekenning α die we uitbreiden naar u door u op 1 te zetten. Neem als tweede toekenning α die we uitbreiden naar u door u op 0 te zetten.

$\boxed{\Leftarrow:}$ Gegeven: $f(\phi) \in$ DOUBLE-SAT, d.w.z., er bestaan twee verschillende waarheidstoekenningen waaronder $\phi \wedge (u \vee \neg u)$ waar wordt. Noem deze α_1 en α_2. Gevraagd: $\phi \in$ SAT, d.w.z., er bestaat een waarheidstoekenning waaronder ϕ waar wordt. Neem hiervoor b.v. α_1 (je kan ook α_2 nemen) waar je de waarde van u gewoon negeert (u komt toch niet voor in ϕ). Als $\phi \wedge (u \vee \neg u)$ waar is onder α_1, is zeker ϕ waar onder α_1 (want het is een AND).

4 CLIQUE $\leq_{\mathrm{P}}$ HALF-CLIQUE

Beschouw volgende functie f:

1. Input: Een willekeurige input $\langle G, k\rangle$ voor CLIQUE.
2. Zij n het aantal knopen in G. We construeren een graaf H als volgt:
   - Als $k = n/2$ dan is H gewoon G.
   - Als $k < n/2$ dan is H bekomen uit G door een clique van $n-2k$ nieuwe knopen toe te voegen aan G, en alle knopen uit deze clique ook nog eens te verbinden met alle knopen uit G.

- Als $k > n/2$ dan is H bekomen uit G door $2k - n$ nieuwe knopen toe te voegen, zonder enige verbindingen.

3. Output: H, dus $f(G, k) := H$.

Deze f is duidelijk efficiënt berekenbaar. We moeten aantonen:

$$\langle G, k\rangle \in \text{CLIQUE} \quad \Leftrightarrow \quad f(G, k) \in \text{HALF-CLIQUE}.$$

$\boxed{\Rightarrow:}$ Stel $\langle G, k\rangle \in$ CLIQUE. Dus G bezit een clique van k knopen. Noem deze clique C. We moeten aantonen dat H een clique bezit van de helft van z'n knopen. We beschouwen de verschillende gevallen.

- Als $k = n/2$ dan is H gelijk aan G en heeft H dus een $n/2$-clique zoals gewenst.
- Als $k < n/2$ dan heeft H $n + (n - 2k) = 2(n - k)$ knopen. De helft hiervan is $n - k$. We zoeken dus een clique van $n - k$ knopen. Deze vinden we ook: we hebben reeds C van k knopen, en voegen daarbij de extra clique van $n - 2k$ toegevoegde knopen uit H. Totaal $k + (n - 2k) = n - k$ knopen zoals gewenst.
- Als $k > n/2$ dan heeft H $n + (2k - n) = 2k$ knopen. De helft hiervan is k. We zoeken dus een clique van k knopen. Deze hebben we, namelijk C.

$\boxed{\Leftarrow:}$ Stel $H \in$ HALF-CLIQUE. Dus H bezit een clique bestaande uit minstens de helft van z'n knopen. We moeten aantonen dat G dan een clique van k knopen bezit. We beschouwen weer de verschillende gevallen.

- Als $k = n/2$ dan is G gelijk aan H. H, en dus G, heeft een clique bestaande uit minstens $n/2$ knopen, en dus heeft G zeker een clique van k knopen want $k = n/2$.
- Als $k < n/2$ dan heeft H $2(n - k)$ knopen (zie hierboven). H heeft dus een clique van minstens $n - k$ knopen. Hoogstens $n - 2k$ daarvan komen uit het stuk dat we toevoegden, omdat dit stuk slechts zo groot was. Dus minstens k moeten komen uit de originele G. Dus heeft G minstens een k-clique.
- Als $k > n/2$ dan heeft H $2k$ knopen (zie hierboven). H heeft dus een clique van minstens k knopen. Deze kunnen echter niet komen uit het stuk dat we toevoegden, dit waren immers knopen zonder verbindingen. De clique moet dus volledig uit G komen.