Aanvullende oefeningen

1. Oefening 7.33 in het boek.

2. Vind de fout in volgende foutieve redenering. Onderstel dat P = NP. Dan zit SAT in P. Dus, voor een bepaalde k, zit SAT in TIME($O(n^k)$). Omdat elke taal in NP polynomiaal reduceerbaar is naar SAT, zit dan heel NP binnen TIME($O(n^k)$).

3. Zij $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ zo dat $f(n) \geq \log n$, en dat $f(n)$ berekenbaar is uit 1^n in space $O(f(n))$. Toon aan dat NSPACE($f(n)$) $\subseteq$ TIME($2^{O(f)}$). Hint: veralgemeen het bewijs dat NL $\subseteq$ P.

4. Een verzameling knopen V van een ongerichte graaf G noemen we *onafhankelijk* als er tussen geen enkele twee knopen in V een boog is. Toon aan dat volgend probleem NP-compleet is: gegeven een ongerichte graaf G en een natuurlijk getal k, beslis of G een onafhankelijke verzameling van minstens k knopen heeft.

5. Een booleaanse formule is in *disjunctieve normaalvorm (DNF)* als ze een disjunctie is van conjuncties van literals. We noemen een booleaanse formule *altijd waar* als ze waar is onder eender welke waarheidstoekenning. Toon aan dat volgend probleem NP-compleet is: gegeven een booleaanse formule in DNF, beslis of ze *niet* altijd waar is.

6. Toon aan dat volgend probleem NP-compleet is: gegeven een booleaanse formule, beslis of ze minstens 3 satisfying assignments heeft.

7. Toon de NP-compleetheid aan van het probleem van *0-1 Programming*, dat gedefiniëerd is als volgt: De input is een stelsel lineaire vergelijkingen. Elke vergelijking is van de vorm

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

waarbij $a_1, \ldots, a_n$ en b natuurlijke getallen zijn, en $x_1, \ldots, x_n$ variabelen. Het probleem bestaat erin te beslissen of er een oplossing voor dit stelsel bestaat waarin elke variabele 0 of 1 is.

Voorbeelden van zulke stelsels zijn

$$\begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ y + 5z &= 6 \end{aligned}$$

(dit heeft geen 0-1-oplossing) en

$$\begin{aligned}
&x + y = 1\\
&y + z + w = 2\\
&x + 8w = 0
\end{aligned}$$

(dit heeft wel een 0-1-oplossing, namelijk $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$, $w = 0$).

8. Geef een efficiënte reductie van *3SAT* naar het probleem van Integer Linear Programming, dat gedefiniëerd is als volgt. Gegeven een stelsel ongelijkheden tussen lineaire veeltermen over meerdere veranderlijken, met gehele coëfficiënten. Bestaat er een oplossing bestaande uit gehele getallen?

Voorbeelden van zulke stelsels zijn

$$\begin{aligned}
&x \leq 2\\
&y \leq 2\\
&x + y \geq 6
\end{aligned}$$

(dit heeft geen oplossing) en

$$\begin{aligned}
&x + y - 3z \geq 0\\
&z \geq 10
\end{aligned}$$

(dit heeft wel een gehele oplossing, b.v., $x = 20$, $y = 20$, $z = 10$).

9. Toon aan dat volgend probleem NP-compleet is: gegeven een drietal $\langle G, s, t\rangle$, waarbij G een gerichte graaf is, en s en t *verschillende* knopen, beslis of er een Hamiltoniaans pad in G bestaat van s naar t.

10. Een *Hamiltonian cycle* in een gerichte graaf G is een pad in G dat vertrekt in een knoop s, en ook terug eindigt in s, zodat alle overige knopen precies 1 keer voorkomen op het pad. Beschouw nu het beslissingsprobleem *HAMCYCLE*: gegeven $\langle G, s\rangle$, is er een Hamiltonian cycle in G vertrekkend in s? Toon de NP-compleetheid aan van *HAMCYCLE*.

11. In het befaamde Traveling Salesman probleem beschouwen we grafen waar de bogen allemaal een *lengte* hebben, waar we natuurlijke getallen voor nemen. Het probleem is dan als volgt: gegeven $\langle G, s, b\rangle$, waar b een bijkomend getal is, is er een Hamiltonian cycle in G vertrekkend in s, van totale lengte hoogstens b? Toon de NP-compleetheid aan van het Traveling Salesman probleem.

12. Toon de NP-compleetheid aan van het volgende beslissingsprobleem *SET-COVER*. Gegeven $\langle U, S_1, \ldots, S_m, k\rangle$, waarbij U een eindige verzameling getallen is, elke S_i een deel van U, en $k \leq m$ een natuurlijk getal. Kunnen we uit de S_i's er k uitkiezen zodat hun unie reeds volledig U is?