Xây dựng và Tối ưu Danh mục Đầu tư thông qua Mô hình Trung bình - Phương sai của Harry Markowiz

Đội thi: ú

Vũ Gia Nam[1], Nông Như Uyên[2]

[1]Trường Công nghệ Thông tin và Truyền thông, Đại học Bách Khoa Hà Nội
vgnam112358@gmail.com

[2]Khoa Toán - Tin, Đại học Bách Khoa Hà Nội
uyen.nongnhu@gmail.com

Tóm tắt nội dung

Bài toán xây dựng một chiến lược đầu tư hiệu quả cho số vốn 100,000 TMH trong thị trường mô phỏng "Toán Mô Hình", với 4 kênh đầu tư: tiết kiệm ngân hàng, kim loại quý Lam Tinh (Nexus), tiền ảo, và cổ phiếu công ty địa phương. Mục tiêu là tối đa hóa lợi nhuận kỳ vọng trong 1 năm, đồng thời kiểm soát mức độ dao động và rủi ro. Báo cáo này trình bày: (1) Mô hình toán học tối ưu hóa phân bổ vốn; Các phương án đầu tư tối ưu từ dữ liệu thực tế; kiểm thử mô hình trong các kịch bản giả định để đánh giá độ bền vững; đánh giá rủi ro dựa trên mức sụt giảm lớn nhất; so sánh các phương án đầu tư từ góc nhìn hiệu quả và an toàn. Nhóm sử dụng các mô hình toán học tối ưu hóa danh mục đầu tư, chủ yếu dựa trên lý thuyết Mean-Variance (Markowitz) và mô hình Bayesian. Năm phương án phân bổ vốn được xây dựng, bao gồm: Min Volatility, Max Sharpe Ratio, Efficient (15% volatility), Quadratic Constraint, và Bayesian Inference. (2) Ưu điểm của mô hình: linh hoạt, có nền tảng lý thuyết vững chắc; dễ triển khai và mở rộng sang các tiêu chí rủi ro khác (như CVaR, drawdown). Đặc biệt, các phương án Quadratic và Bayesian cho thấy sự cân bằng tốt giữa hiệu suất và khả năng chống chịu rủi ro trong nhiều tình huống giả định. (4) Nhược điểm: giả định thị trường tĩnh (lợi suất và rủi ro không đổi theo thời gian), chưa phản ánh được tính phi tuyến hoặc thay đổi cấu trúc thị trường. (5) Hướng phát triển: có thể mở rộng mô hình với các yếu tố động như GARCH, Black-Litterman, hoặc tích hợp học máy để dự báo lợi suất. Mở rộng không gian tài sản, thời gian đầu tư linh hoạt hơn, và tối ưu hóa trực tiếp theo drawdown cũng là những hướng đi tiềm năng.

Mục lục

1 Giới thiệu

1.1 Vấn đề

Trong thị trường tài chính hiện nay, xây dựng danh mục đầu tư tốt chính là nền tảng của sự thành công cho bất kỳ nhà đầu tư nào. Là một nhà đầu tư cá nhân, bạn cần phải biết cách phân bổ tài sản một cách tốt nhất để phù hợp với mục tiêu đầu tư và chiến lược của mình. Nói cách khác, danh mục đầu tư của bạn cần đáp ứng nhu cầu vốn trong tương lai và phải giúp bạn cảm thấy an toàn. [**5**]

1.2 Bài toán

Mục tiêu: Tối đa hóa lợi nhuận sau 1 năm từ 100,000 TMH thông qua các kênh đầu tư.

Các kênh đầu tư:

- *Gửi tiết kiệm ngân hàng:* Lãi suất cố định 7.5%/năm.
- *Kim loại quý Lam Tinh (Nexus):* Giá mua/bán thay đổi mỗi ngày. Dữ liệu: $\{P_t\}, \{S_t\}$ với $t = 1 \ldots 390$.
- *Giao dịch tiền ảo:* Biến động mạnh. Dữ liệu: $\{C_t\}_{t=1}^{390}$.
- *Cổ phiếu công ty địa phương:* Giá biến động hàng ngày. Dữ liệu: $\{G_t\}_{t=1}^{390}$.

Yêu cầu:

1. *Tối ưu lợi nhuận:* Tối đa hóa số tiền sau 1 năm và giảm dao động tổng thể (ổn định)
2. *Đánh giá tính bền vững của mô hình:* Kiểm tra độ nhạy khi có thay đổi, chẳng hạn như khi lãi suất ngân hàng giảm 2%, giá Lam Tinh biến động mạnh, ...
3. *Quản trị rủi ro:* Tính mức sụt giảm mạnh nhất có thể xảy ra, so sánh với các mô hình đầu tư khác, ...

2 Mô hình toán học

2.1 Một số khái niệm quan trọng

Định nghĩa 1. *Lợi suất (Return)* là đại lượng đo lường tỷ lệ thay đổi giá trị của một tài sản tài chính trong một khoảng thời gian. Nó phản ánh mức độ sinh lời (hoặc thua lỗ) của khoản đầu tư. Có hai cách tính lợi suất phổ biến là lợi suất đơn giản và lợi suất logarithm. [3]

Lợi suất đơn giản (simple return) là tỷ lệ thay đổi tương đối của giá tài sản so với kỳ trước, được tính theo công thức:

$$r_{i,t} = \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}}$$

Lợi suất logaritm (log return), được tính như sau:

$$r_{i,t} = \ln\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}}\right)$$

trong đó $P_{i,t}$ là giá của tài sản i tại thời điểm t.
Gỉa sử có T quan sát trong quá khứ. Khi đó, ta ước lượng lợi suất kỳ vọng của mỗi tài sản bằng trung bình mẫu của chuỗi lợi suất hàng ngày:

$$\mu_i \approx \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{i,t}$$

Để ước lượng lợi suất kỳ vọng trong năm, lấy lợi suất kỳ vọng của tháng nhân với số phiên giao dich là D:

$$\mu_i^{year} = D \times \mu_i$$

Định nghĩa 2. *Độ biến động (Votality)* là chỉ số đo lường mức độ dao động giá của một tài sản trong một khoảng thời gian cụ thể [**7**]. Độ biến động được xác định bởi độ lệch chuẩn của lợi suất trong khoảng thời gian ấy.

Trong khuôn khổ bài viết này, độ biến động được tính theo dữ liệu lịch sử lợi suất hằng ngày, sau đó quy đổi về độ biến động hàng năm theo công thức:

$$\sigma = \sigma_{\text{daily}} \times \sqrt{D}$$

Định nghĩa 3. *Hệ số Sharpe (Sharpe Ratio)* là một thước đo xem lợi nhuận thu được là bao nhiêu trên một đơn vị rủi ro khi đầu tư vào một tài sản hay đầu tư theo một chiến lược kinh doanh [**6**]. Nó được định nghĩa là:

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{\mathbb{E}[R] - R_f}{\sigma}$$

trong đó:

- $\mathbb{E}[R]$: Lợi suất kỳ vọng của danh mục đầu tư trong một khoảng thời gian.
- R_f: Lợi suất phi rủi ro (risk-free rate) là mức lợi suất mà nhà đầu tư có thể nhận được từ một khoản đầu tư không có rủi ro.
- σ: Độ biến động của lợi suất danh mục đầu tư.

2.2 Các giả định khách quan

Các giả sử dưới đây là quan trọng và cần thiết trong quá trình xây dựng mô hình tối ưu danh mục đầu tư:

Giả thuyết 1. *Nhà đầu tư thận trọng:* Nhà đầu tư nên cân bằng giữa kỳ vọng lợi nhuận và phương sai. Nếu chỉ dùng quy tắc "tối đa hóa lợi nhuận kỳ vọng" mà không xét đến rủi ro thì sẽ dẫn đến kết luận không cần đa dạng hóa, tức là chỉ chọn một vài tài sản tốt nhất. Nhà đầu tư chỉ đầu tư vào các tài sản bằng tiền mặt có sẵn, không vay mượn để đầu tư hoặc đặt cược rằng tài sản sẽ giảm giá. [**1**, **4**]

Giả thuyết 2. *Phân phối chuẩn của lợi suất:* Nếu một nhà đầu tư ra quyết định chỉ dựa vào kỳ vọng và phương sai, thì điều đó chỉ có ý nghĩa khi phân phối lợi nhuận là chuẩn. [**1**, **4**]

2.3 Xây dựng mô hình

Với số vốn đầu tư là 100,000 TMH và bốn kênh đầu tư là gửi ngân hàng, Tinh Lam, tiền ảo, cổ phiếu; ta giả định rằng tỉ lệ vốn phân bổ cho các kênh đầu tư lần lượt là w_1, w_2, w_3, w_4; trong đó w_1, w_2, w_3, w_4 là các số thực không âm và $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1$.

Xét vector $\mathbf{w} = (w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4)^\top$, nhóm chúng tôi tạm gọi $\mathbf{w}$ là **vector phân bổ vốn**. Đồng thời giả định rằng $R(\mathbf{w})$ là một phân phối xác suất phản ánh lợi suất với cùng một chiến lược $\mathbf{w}$ trong thời gian một năm. Mục tiêu của chúng ta là tối đa hóa lợi nhuận, đồng thời không cho phép độ biến động giá quá lớn.

Nhóm chúng tôi đề xuất một vài chiến lược phân bổ vốn như sau. Mỗi một chiến lược trong đó được mô hình hóa bởi một hàm mục tiêu:

- *Tối thiểu hóa độ biến động:*

$$\min_{\mathbf{w}} Var[R(\mathbf{w})]$$

- *Tối đa hóa kỳ vọng lợi suất với giới hạn độ biến động:*

$$\max_{\mathbf{w}} \mathbb{E}[R(\mathbf{w})] \quad \text{s.t.} \quad \text{Var}[R(\mathbf{w})] \leq \sigma^2_{\max}$$

  Nhóm chúng tôi lựa chọn độ biến động tối đa là 15%.

- *Tối đa hóa hệ số Sharpe:*

$$\max_{\mathbf{w}} \frac{E[R(\mathbf{w})] - R_f}{\sqrt{Var[R(\mathbf{w}]}}$$

- *Cân bằng giữa lợi suất và độ biến động:*

$$\max_{\mathbf{w}} \mathbb{E}[R(\mathbf{w})] - \lambda \cdot \text{Var}[R(\mathbf{w})]$$

  Nhóm chúng tôi chọn $\lambda = 10$, nghĩa là mô hình tương đối thận trọng với rủi do.

Trong đó:

- $\mathbb{E}[R(\mathbf{w})]$ là lợi nhuận kỳ vọng khi đầu tư theo chiến lược $\mathbf{w}$ trong thời gian một năm
- $\text{Var}[R(\mathbf{w})]$ là phương sai của lợi nhuận tương ứng một năm
- $\lambda \geq 0$ là hệ số rủi ro (risk aversion), hệ số này càng lớn thì ít có khả năng chấp nhận rủi ro, còn nếu hệ số này bằng 0 thì bất chấp rủi ro để tối đa hóa lợi suất.
- $\sigma_{\max}$ là độ biến động lớn nhất do nhà đầu tư lựa chọn.

2.4 Bài toán tổng quát

2.4.1 Mô hình trung bình–phương sai của Markowitz

Với các khái niệm và định nghĩa được trình bày ở **Định nghĩa 1**, ta định nghĩa được vector lợi suất kì vọng của các kênh đầu tư như sau:

$$\mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4)^\top$$

Do đó ta có thể ước lượng $\mathbb{E}[R(\mathbf{w})]$ như sau:

$$\mathbb{E}[R(\mathbf{w})] \approx \sum_{t=1}^{4} w_t \mu_t = \mathbf{w}^\top \mu \tag{2.1}$$

Ta có chuỗi biến đổi sau

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[R(w)] &\approx \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{4} w_i w_j \,\mathrm{Cov}[r_i, r_j] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1} 4n w_i w_j \Sigma_{ij} \\
&= w^\top \Sigma w
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Trong đó: Σ là ma trận hiệp phương sai của các lợi suất, với phần tử $\Sigma_{ij} = \mathrm{Cov}[r_i, r_j]$.

Để ý rằng các chuỗi biến đổi và ký hiệu cũng sẽ tương tự ở trên với N kênh đầu tư khác nhau. Từ các phương trình (2.1) và (2.2), ta cần tối ưu một trong các hàm mục tiêu sau với các ràng buộc:

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_N), \quad w_i \geq 0 \ \forall i, \quad \sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

Hàm mục tiêu 1:

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w}$$

Hàm mục tiêu 2:

$$\max_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^\top \mu \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w} \leq \sigma_{\max}^2$$

Hàm mục tiêu 3:

$$\max_{\mathbf{w}} \frac{\mathbf{w}^\top \mu}{\sqrt{\mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w}}}$$

Hàm mục tiêu 4:

$$\max_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^\top \mu - \lambda \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w}$$

trong đó

- $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$: vector trọng số phân bổ tài sản.
- $\mu \in \mathbb{R}^N$: vector kỳ vọng lợi suất của các tài sản.
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{N \times N}$: ma trận hiệp phương sai của lợi suất tài sản.
- $\lambda \geq 0$: hệ số rủi ro (risk aversion).

2.4.2 Mở rộng với lý thuyết xác suất Bayes

Dưới đây, chúng tôi trình bày một phương pháp tiếp cận theo hướng Bayes dựa trên **giả thuyết 2**. Thay vì giả định rằng các tham số như kỳ vọng lợi suất hay ma trận hiệp phương sai là cố định và được ước lượng trực tiếp từ dữ liệu, phương pháp Bayes coi các tham số này là biến ngẫu nhiên có phân phối xác suất.

Nhắc lại định lý Bayes:

$$p(\theta \mid \mathscr{D}) = \frac{p(\mathscr{D} \mid \theta) \cdot p(\theta)}{p(\mathscr{D})}$$

trong đó

- θ: tham số chưa biết (ví dụ: lợi suất kỳ vọng μ, ma trận hiệp phương sai Σ)
- $\mathscr{D}$: dữ liệu quan sát được
- $p(\theta \mid \mathscr{D})$: phân phối hậu nghiệm (posterior)
- $p(\mathscr{D} \mid \theta)$: hàm khả dĩ (likelihood)
- $p(\theta)$: phân phối tiên nghiệm (prior)
- $p(\mathscr{D})$: hằng số chuẩn hóa (thường bỏ qua khi so sánh)

Mục tiêu của chúng ta là đi tìm phân phối hậu nghiệm

$$p(\mu, \Sigma \mid \mathscr{D})$$

dựa vào định lý Bayes

Với **giả thuyết 2** đã nêu ở trên, lợi suất là một phân phối chuẩn đa biến của vector lợi suất kỳ vọng và ma trận hiệp phương sai.
Dưới đây là hàm khả dĩ. Hàm khả dĩ được cho bởi công thức (4.194) trong [**2**]:

$$p(\mathscr{D} \mid \mu, \Sigma) = (2\pi)^{-\frac{N\mathscr{D}}{2}} |\Sigma|^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (r_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (r_i - \mu) \right)$$

trong đó

- r_i là lợi suất trung bình của danh mục đầu tư thứ i
- S_r là ma trận hiệp phương sai mẫu

Phân phối tiên nghiệm được xác định như sau. Phân phối tiên nghiệm được cho bởi công thức (4.198) trong [**2**].

$$\mathrm{NIW}(\mu, \Sigma \mid m_0, \kappa_0, \nu_0, S_0) = \mathscr{N}(\mu \mid m_0, \tfrac{1}{\kappa_0}\Sigma) \times \mathscr{IW}(\Sigma \mid S_0, \nu_0)$$

trong đó:

- D: Số chiều (số tài sản trong danh mục).
- m_0: Trung bình tiên nghiệm (prior mean) cho vector lợi suất kỳ vọng μ, thể hiện niềm tin ban đầu về kỳ vọng lợi suất của các tài sản.

- κ_0: Độ tin cậy vào dữ liệu ban đầu, càng lớn thì càng tin tưởng vào dữ liệu, càng nhỏ thì càng không chắc chắn về dữ liệu.

- S_0: Ma trận scale (scale matrix) tiên nghiệm, điều chỉnh kỳ vọng và độ phân tán của ma trận hiệp phương sai Σ.

- ν_0: Bậc tự do của phân phối nghịch đảo Wishart. Cần $\nu_0 > D - 1$ để kỳ vọng tồn tại.

- $\mathcal{N}(\mu \mid m_0, \frac{1}{\kappa_0}\Sigma)$: Phân phối chuẩn đa biến có phương sai phụ thuộc Σ.

- $\mathcal{IW}(\Sigma \mid S_0, \nu_0)$: Phân phối nghịch đảo Wishart — tiên nghiệm chuẩn cho ma trận hiệp phương sai.

- Γ_D: Hàm gamma đa biến.

Phân phối hậu nghiệm của θ và Σ được xác định như sau. Phân phối này được cho bởi công thức (4.290) trong [**2**].

$$p(\mu, \Sigma) \mid \mathcal{D}) = \mathrm{NIW}(\mu, \Sigma \mid m_T, \kappa_T, \nu_T, S_T)$$

Công thức cập nhật các tham số được trích trong [**2**]:

$$\begin{aligned}
m_T &= \frac{\kappa_0 m_0 + T\bar{x}}{\kappa_0 + T} = m_0 + \frac{T}{\kappa_0 + T}(\bar{x} - m_0) \\
\kappa_T &= \kappa_0 + T \\
\nu_T &= \nu_0 + T \\
S_T &= S_0 + S_r + \frac{\kappa_0 T}{\kappa_0 + T}(barx - m_0)(\bar{x} - m_0)^\top
\end{aligned}$$

Từ đây, ta có các ước lượng điểm cho μ và Σ, được trích trong [**2**]

$$\begin{aligned}
\hat{\mu} &= \mathbb{E}[\mu|\mathcal{D}] = \mu_T = \frac{\kappa_0 \mu_0 + T\bar{r}}{\kappa_0 + T} \\
\hat{\Sigma} &= \mathbb{E}[\Sigma|\mathcal{D}] = \frac{S_T}{\nu_T - d - 1}
\end{aligned}$$

2.5 Các bước tính toán cụ thể

Dưới đây chúng tôi xin trình bày các bước để giải quyết bài toán cuộc thi đưa ra:

1. *Tiền xử lý dữ liệu:* Những giá trị trống trong bộ dữ liệu do Nexus và cổ phiếu không giao dịch vào hai ngày cuối tuần được xử lý bằng cách điền vào đó giá cổ phiếu của các ngày trước đó.

2. *Tính toán ma trận lợi suất hàng ngày*: ma trận lợi suất hàng ngày được tính toán dựa trên lợi suất logarithm. Lợi suất hàng ngày của lãi suất ngân hàng là $r = \frac{ln(1+0.075)}{365}$. giá bán Nexus hàng ngày được dùng làm đại diện để tính lợi suất hàng ngày của Nexus.

3. *Tính vector lợi suất kỳ vọng mẫu và ma trận hiệp phương sai của lợi suất giữa các tài sản mẫu:* dựa trên ma trận lợi suất hàng ngày tính được ở trên.

4. *Ước lượng các ma trận dựa trên lý thuyết xác suất Bayes:* bằng các công thức (2.8), (2.9).

5. *Tối ưu các hàm mục tiêu:* sử dụng ngôn ngữ lập trình Python với thư viện PyPortfolio để tối ưu các hàm mục tiêu trên. Đối với ba hàm mục tiêu đầu tiên chỉ sử dụng vector lợi suất kỳ vọng mẫu và ma trận hiệp phương sai mẫu. Riêng hàm mục tiêu cuối vừa sử dụng vector lợi suất kỳ vọng mẫu, ma trận hiệp phương sai mẫu, vừa sử dụng vector lợi suất kỳ vọng, ma trận hiệp phương sai ước lượng từ Bayes.

3 Kết quả và mô phỏng

Lưu ý Các mô hình được đặt tên ngắn gọn để thuận tiện cho việc trình bày kết quả. Cụ thể:

- *Min Votality Portfolio*: tối thiểu hóa độ biến động.
- *Efficient Portfolio (≤15%)*: tối đa hóa lợi suất với độ biến động không quá 15%.
- *Max Sharpe*: tối đa hóa tỷ lệ Sharpe.
- *Quadratic Portfolio*: mô hình cân bằng giữa lợi suất và độ biến động.
- *Bayesian Portfolio*: mô hình cân bằng giữa lợi suất và độ biến động kết hợp công thức xác suất Bayes.

Dưới đây là cấu hình chúng tôi sử dụng trong ước lượng vector kỳ vọng và ma trận bằng công thức Bayes:

$$\begin{aligned}
&\mu_0 = \mathbf{0}_n && \text{(vector kỳ vọng prior)}\\
&\kappa_0 = 0.01 && \text{(độ tin cậy vào prior của } \mu_0\text{)}\\
&\nu_0 = T+2 && \text{(bậc tự do cho phân phối Inverse-Wishart, cần } \nu_0 > n-1\text{)}\\
&S_0 = 0.001\cdot \mathbf{I}_n && \text{(ma trận tỉ lệ nhỏ, phản ánh không chắc chắn ban đầu)}
\end{aligned}$$

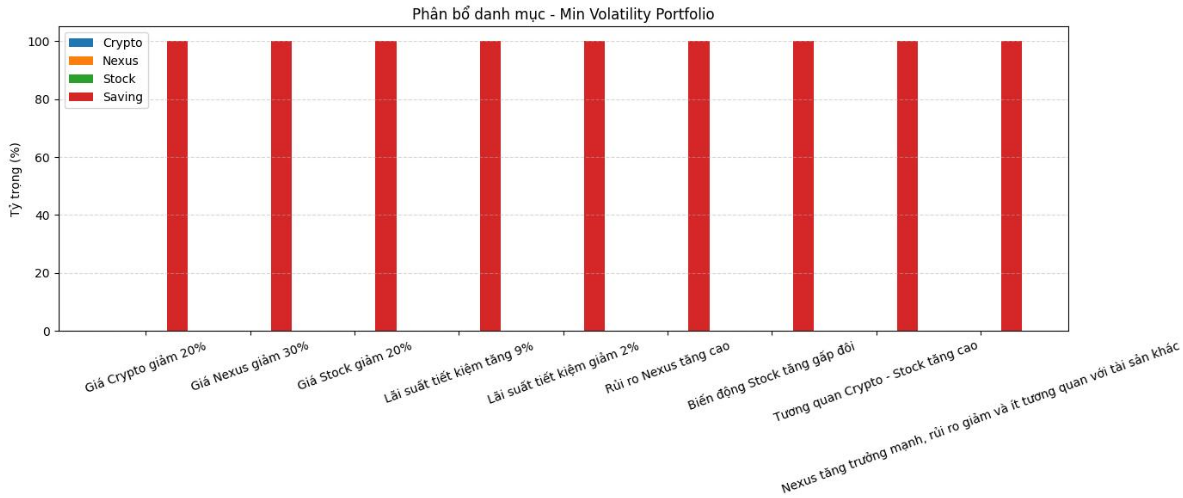
Bảng dưới đây mô tả kết quả nhận được sau khi chạy code Python cho các hàm mục tiêu:

Bảng 1: So sánh các phương án phân bổ danh mục

Phương án	**Crypto**	**Nexus**	**Stock**	**Saving**	**Return (%)**	**Volatility (%)**	**Sharpe**
Min Volatility Portfolio	0.0%	0.0%	0.0%	100.0%	7.50%	0.00%	2500.00
Efficient Portfolio (≤15%)	12.68%	0.0%	20.73%	66.59%	16.72%	15.00%	0.78
Max Sharpe Ratio Portfolio	0.0%	0.0%	0.0%	100.0%	7.50%	0.00%	2499.95
Quadratic Portfolio	2.6%	0.0%	4.25%	93.16%	9.39%	3.07%	1.43
Bayesian Portfolio	2.07%	0.0%	4.11%	93.82%	9.11%	2.63%	1.56

Kết luận chung:

- Chiến lược *Min Volatility* và *Max Sharpe* đều dẫn đến phân bổ hoàn toàn vào gửi tiết kiệm . Điều này phản ánh đặc điểm nổi bật của gửi tiết kiệm: lợi suất cố định, rủi ro thấp.
- *Efficient Portfolio (≤ 15%)* tạo ra lợi suất kỳ vọng cao hơn gấp đôi gửi tiết kiệm, dù vẫn giữ rủi ro trong giới hạn cho phép. Tuy nhiên, danh mục nhạy cảm với biến động giả định của thị trường.
- *Quadratic Portfolio* và *Bayesian Portfolio* đều đạt hiệu quả tốt trong nhiều kịch bản, giúp nhà đầu tư vừa nâng cao lợi suất vừa kiểm soát rủi ro. Trong đó, Bayesian Portfolio cho thấy khả năng hồi quy kỳ vọng tốt hơn trong các tình huống bất định hoặc khi biến động tăng cao.



Hình 1: Tính bền vững của mô hình tối thiểu hóa độ biến động

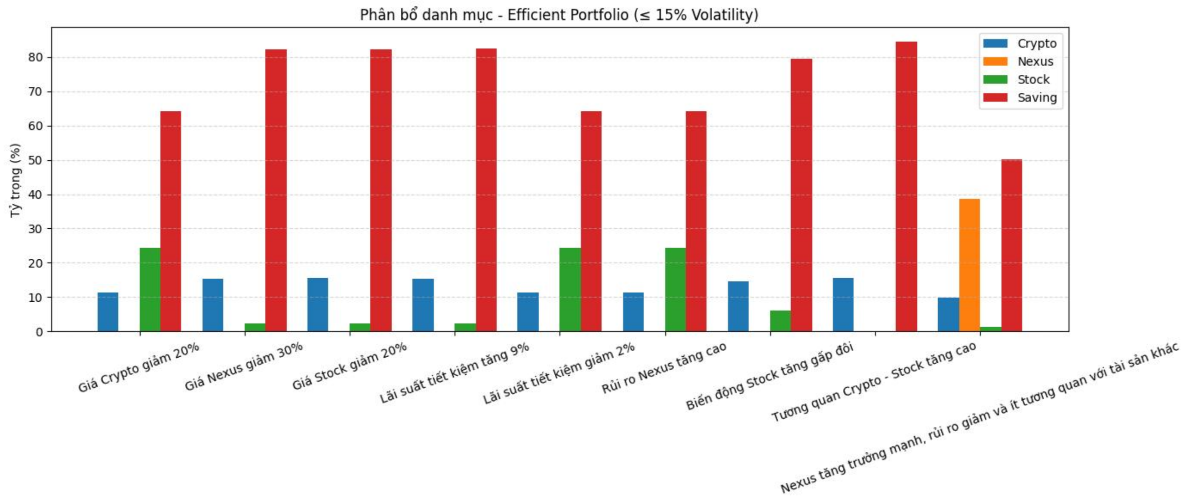
4 Tính bền vững của các mô hình

Nhóm chúng tôi đã thử nghiệm 8 kịch bản khác nhau cho các mô hình trên:

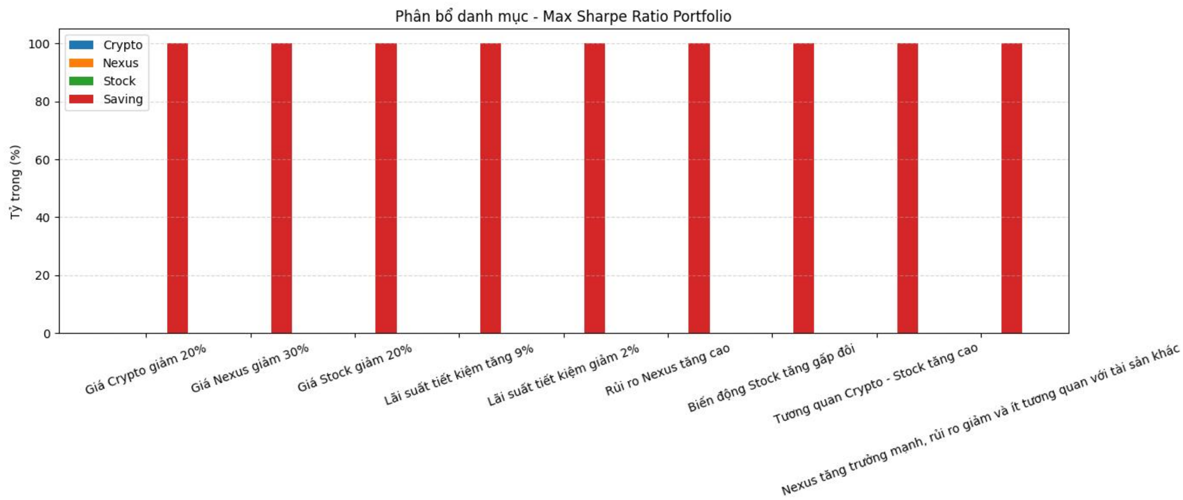
- giá tiền ảo giảm 20%
- giá Nexus giảm 30%
- giá cổ phiếu giảm 20%
- Lãi suất ngân hàng tăng 9%
- Lãi suất ngân hàng giảm 2%
- Độ biến động cổ phiếu tăng gấp đôi
- Tương quan giữa tiền ảo và cổ phiếu tăng
- Nexus tăng trưởng 20%, rủi do giảm 50% và ít tương quan với các tài sản khác

Dựa trên 8 kịch bản giả định khác nhau, chúng tôi phân tích phản ứng của 5 mô hình phân bổ danh mục:

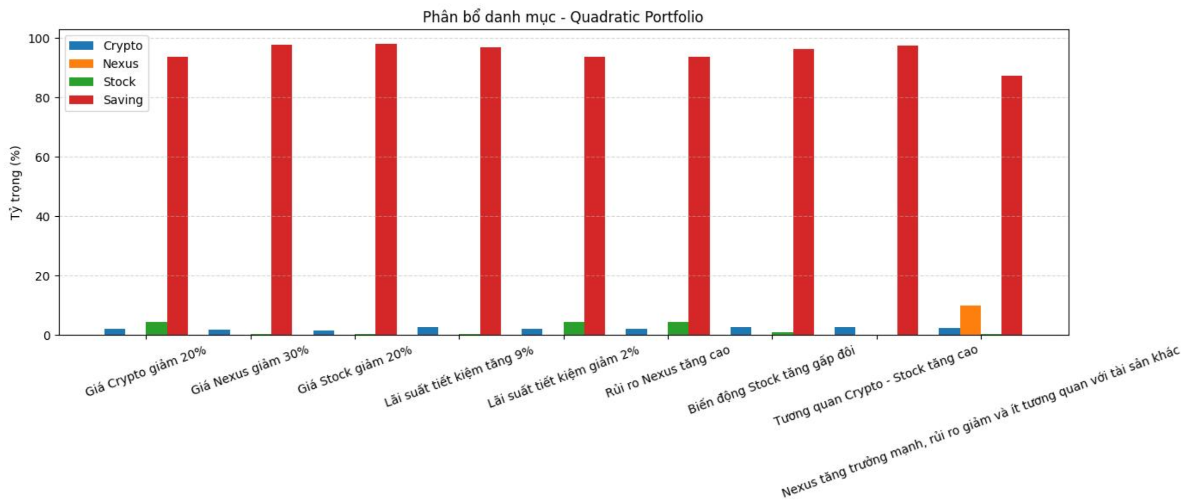
- *Min Volatility Portfolio:* Đây là mô hình cực kỳ an toàn, luôn phân bổ 100% vào gửi tiết kiệm, bất kể biến động từ thị trường. Mô hình này phù hợp cho nhà đầu tư an toàn tuyệt đối, nhưng không tận dụng được cơ hội sinh lời từ các tài sản rủi ro. (Hình 1)
- *Efficient Portfolio ($\leq$ 15% Volatility):* Mô hình này có phản ứng linh hoạt hơn với từng kịch bản. Ví dụ, khi Nexus có triển vọng tăng trưởng mạnh và rủi ro thấp, mô hình tăng phân bổ vào Nexus lên gần 40%. Trong các kịch bản rủi ro cao như biến động cổ phiếu hoặc tương quan tiền ảo - cổ phiếu tăng, danh mục này giảm mạnh tỷ trọng tài sản rủi ro, chuyển về gửi tiết kiệm. (Hình 2)



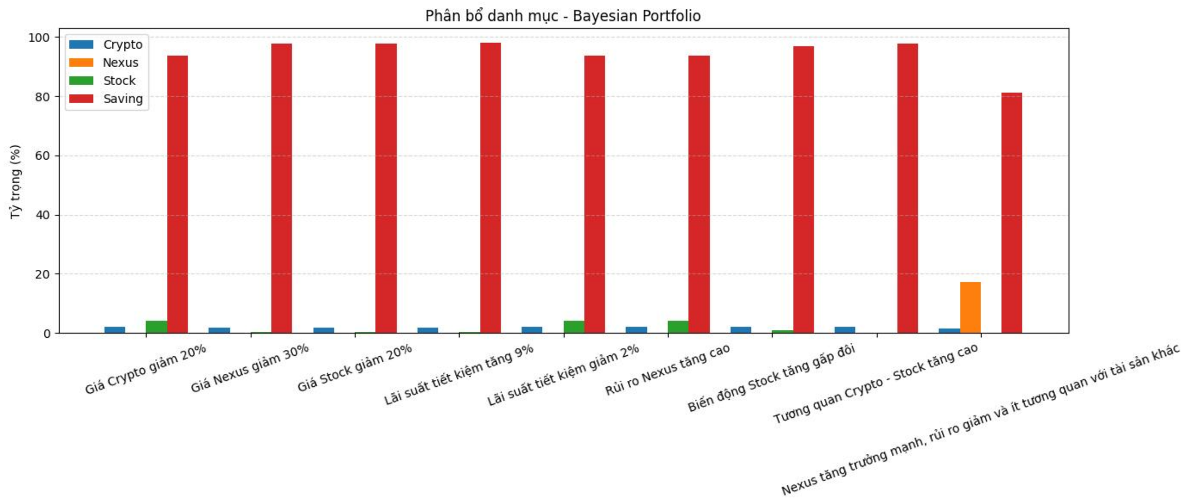
Hình 2: Tính bền vững của mô hình tối đa hóa lợi suất với giới hạn độ biến động không quá 15%



Hình 3: Tính bền vững của mô hình tối đa hóa tỉ lệ Sharpe



Hình 4: Tính bền vững của mô hình cân bằng lợi suất và độ biến động



Hình 5: Tính bền vững của mô hình cân bằng lợi suất và độ biến động kết hợp lý thuyết Bayes

Hình 6: Mức sụt giảm vốn theo thời gian

- *Max Sharpe Ratio Portfolio:* Kết quả tương tự như Min Volatility. Mô hình này tìm kiếm danh mục có tỷ lệ Sharpe cao nhất, tuy nhiên trong các kịch bản thử nghiệm, nó vẫn chọn phân bổ hoàn toàn vào gửi tiết kiệm do lựa chọn này có lợi suất vượt trội so với rủi ro. Về lý thuyết với lựa chọn này tỷ lệ Sharpe là dương vô cùng.(Hình 3)
- *Quadratic Portfolio:* Danh mục này thể hiện sự phân bổ đều đặn hơn giữa các tài sản, với tỷ trọng nhỏ nhưng không bằng 0 cho Crypto và Stock. (Hình 4)
- *Bayesian Portfolio:* Ngay cả trong các kịch bản bất lợi, danh mục vẫn giữ tỷ trọng nhỏ cho tiền ảo hoặc Nexus. Đặc biệt, khi Nexus có triển vọng tích cực, mô hình này tăng tỷ trọng Nexus lên hơn 17%, nhưng vẫn duy trì độ đa dạng trong danh mục. Sự khác biệt so với Quadratic Portfolio tương đối nhỏ do sự lựa chọn các tham số trong phân phối Normal-Inverse-Wishart thể hiện sự tin tưởng cao vào dữ liệu, cũng như cho thấy nhà đầu tư không có niềm tin ban đầu. (Hình 5)

5 Khả năng quản trị rủi ro của các mô hình

Nhóm chúng tôi đánh giá khả năng quản lý rủi do của các mô hình nêu trên dựa trên *mức sụt giảm vốn (Drawdown)* và *giá trị tài sản ròng (Net Value Asset)* khi đầu tư theo chiến lược có được từ các mô hình trên.

Danh mục đầu tư	**Lợi suất sau 1 năm**	**Mức sụt giảm lớn nhất**
Min Volatility Portfolio	7.50%	0.00%
Efficient Portfolio ($\leq$ 15% Volatility)	10.94%	-14.30%
Max Sharpe Ratio Portfolio	7.50%	0.00%
Quadratic Portfolio	8.20%	-1.71%
Bayesian Portfolio	8.00%	-1.40%

Bảng 2: So sánh lợi suất sau một năm và mức sụt giảm lớn nhất (Max Drawdown) của các danh mục đầu tư

Hình 7: giá trị tài sản ròng theo thời gian

- *Min Volatility Portfolio* thể hiện khả năng quản trị rủi ro vượt trội. NAV tăng trưởng đều, không có drawdown trong suốt thời gian đầu tư. Điều này cho thấy danh mục gần như không bị ảnh hưởng bởi biến động thị trường - một đặc điểm phù hợp cho nhà đầu tư đề cao sự an toàn vốn.
- *Max Sharpe Portfolio* dù được thiết kế để tối đa hóa tỉ lệ Sharpe, nhưng trong thực tế biểu hiện lại rất giống với Min Volatility, với mức drawdown bằng 0 và tăng trưởng ổn định. Điều này cho thấy trong giai đoạn nghiên cứu, việc tối ưu Sharpe vô tình cũng đồng nghĩa với tối thiểu hóa rủi ro.
- *Efficient Portfolio ($\leq$ 15% Volatility)* tuy đạt lợi suất cao nhất, nhưng lại có mức drawdown rất lớn, lên đến 14%. Điều này phản ánh rõ ràng rằng mô hình tuy đặt mục tiêu giới hạn độ biến động tổng thể, nhưng không kiểm soát tốt các đợt sụt giảm mạnh ngắn hạn.
- *Quadratic Portfolio* và *Bayesian Portfolio* thể hiện mức độ kiểm soát rủi ro tốt hơn Efficient Portfolio, với drawdown chỉ khoảng 1.5%. Điều này cho thấy hai mô hình này cân bằng giữa lợi suất và rủi ro một cách hiệu quả hơn..

6 Kết luận

6.1 Ưu điểm của mô hình

Mô hình trung bình – phương sai do Harry Markowitz đề xuất vào năm 1952 đã đặt nền móng cho Lý thuyết Danh mục Đầu tư Hiện đại (Modern Portfolio Theory). Một trong những ưu điểm của mô hình là biến bài toán tối ưu danh mục đầu tư thành bài toán tối ưu hàm số, từ đây có thể dùng nhiều phương pháp khác nhau để giải quyết. Ngoài ra, mô hình cung cấp một khuôn khổ định lượng rõ ràng và minh bạch, giúp các quyết định phân bổ tài sản trở nên có thể giải thích và dễ dàng kiểm chứng.

6.2 Nhược điểm của mô hình

Mặc dù có giá trị lý thuyết to lớn, mô hình Markowitz cũng bộc lộ nhiều hạn chế trong thực tiễn ứng dụng. Trước hết, mô hình giả định lợi suất tài sản tuân theo phân phối chuẩn, trong khi thực tế thị trường tài chính thường xuất hiện các sự kiện cực đoan với tần suất cao hơn dự báo (hiện tượng fat tails). Ngoài ra, mô hình không tính đến các yếu tố thực tế như chi phí giao dịch, thuế, tính thanh khoản hay giới hạn bán khống. Một điểm hạn chế khác là việc sử dụng làm thước đo rủi ro – điều này coi cả biến động tăng và giảm là rủi ro như nhau, trong khi nhà đầu tư thực tế chỉ lo ngại về tổn thất.

6.3 Hướng phát triển mô hình

Thay vì sử dụng phương sai, có thể sử dụng các thước đo rủi ro thay thế như *Value at Risk (VaR)* và đặc biệt là *Conditional Value at Risk (CVaR)* vì chúng tập trung vào rủi ro đuôi – phần tổn thất mà nhà đầu tư thực sự quan tâm.

Giới hạn phân bổ theo kênh tài sản: Để tránh hiện tượng cực đoan, mô hình có thể bổ sung các ràng buộc như: mỗi kênh không vượt quá 50% danh mục, hoặc mỗi kênh phải có tỷ trọng tối thiểu để đảm bảo đa dạng hóa.

Chúng ta có thể quy về bài toán tối ưu đa mục tiêu: tối đa hóa kỳ vọng và tối thiểu hóa độ biến động đồng thời. Khi đó sẽ nhận được tập lời giải hiệu quả là Pareto Front. Mỗi lời giải trong đó sẽ là một giải pháp tốt cho vấn đề của chúng ta.

References

[1] H. Markowitz, “Portfolio selection,” *J. Finance*, vol. 7, no. 1, pp. 77–91, 1952.

[2] K. P. Murphy, *Machine Learning: A Probabilistic Perspective*. Cambridge, MA: MIT Press, 2012.

[3] J. Y. Campbell, A. W. Lo, and A. C. MacKinlay, *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1997.

[4] Portfolio Geek, “Paper Review: Portfolio Selection by Harry Markowitz,” 2023. [Online]. Available: `https://portfolio-geek.com/posts/papers-reviews/portfolio_selection`. [Accessed: July 20, 2025].

[5] VPBank, “Phân bổ danh mục đầu tư thế nào cho hiệu quả?” [Online]. Available: `https://www.vpbanks.com.vn/kienthucdautu/phÕãn-bòệẸ-danh-mòệâc-ỎÈòểấu-tÔặ-thòểỉ-nÕào-cho-hiòệẤu-quòểả%3f`. [Accessed: July 21, 2025].

[6] Wikipedia, “Hệ số Sharpe,” 2025. [Online]. Available: `https://vi.wikipedia.org/wiki/HòệẤ_sòệÈ_Sharpe`. [Accessed: July 25, 2025].

[7] Coin98, “Volatility là gì? Toàn tập về độ biến động trong đầu tư,” 2023. [Online]. Available: `https://coin98.net/volatility`. [Accessed: July 23, 2025].