Домашнее задание 1.
Введение в алгебру логики

Балдин Виктор Б01-303

18 сентября 2023 г.

1. Доказать:
$$1 \oplus x_1 \oplus x_2 = (x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1)$$

Доказательство:

$$1 \oplus x_1 \oplus x2 = \neg(x1 \oplus x2) = x_1 \leftrightarrow x_2$$

$(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1) = (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_1) = \neg x_1 \wedge \neg x_2 \vee x_1 \wedge x_2 = x_1 \leftrightarrow x_2$

$\square$

2. (a) $x \wedge (y \to z) = (x \wedge y) \to (x \wedge z)$

   (b) $x \oplus (y \leftrightarrow z) = (x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z)$

Решение:

(a) $x \wedge (y \to z) = x \wedge (\neg y \vee z) = x \wedge \neg y \vee x \wedge z \neq \neg(x \wedge y) \vee x \wedge z = (x \wedge y) \to (x \wedge z)$ – *ложно*

(b) $f = x \oplus (y \leftrightarrow z) = 10010110$
$g = (x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z) = 10011001$
$f \neq g$ – *ложно*

3. (a) $1 \to 0 \neq 0 \to 1$ нет

   (b) $x \to (y \to z) = \neg x \vee (\neg y \vee z) = \neg x \vee \neg y \vee z = \neg(x \wedge y) \vee z \neq (x \to y) \to z = x \wedge \neg y \vee z$ нет

4. (a) y

   (b) z

   (c) $k(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to (x_1 \vee x_2)) \to x_3 = (\neg x_1 \vee x_1 \vee x_2) \to x_3 = (1 \vee x_2) \to x_3 = 1 \to x_3 = x_3$ – фиктивные переменные x_1, x_2

5. Данное выражение можно угадать, основываясь на соображениях симметрии:

$$MAJ(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_3) = 00010111$$

6. Доказать:

$$\bigvee(x_i \oplus x_j) = (x_1 \vee \ldots \vee x_n) \wedge (\neg x_1 \vee \ldots \vee \neg x_n)$$

   Доказательство:
   Случай 1. Пусть $\exists i, j : x_i \neq x_j$. Тогда $x_i \oplus x_j = 1 \Rightarrow \bigvee(x_i \oplus x_j) = 1$; $x_1 \vee \ldots \vee x_n = 1$; $\neg x_1 \vee \ldots \vee \neg x_n = 1$, т. к. для этого случая $\exists i, j : x_i = 1, x_j = 0$
   Случай 2. $\forall i, j : x_i = x_j \Rightarrow \bigvee(x_i \oplus x_j) = 0; (x_1 \vee \ldots \vee x_n) \wedge (\neg x_1 \vee \ldots \neg x_n) = x_1 \wedge \neg x_1 = 0$ □