Домашнее задание 2. Множества

Балдин Виктор Б01-303

26 сентября 2023 г.

0. $A = \{n | \exists k \in \mathbb{N} : n = k^2\} \neq \{1, 4, 9\}$

1. $(A \setminus B) \cap ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \stackrel{?}{=} A \setminus B$

   Доказательство. Перейдем к булевой алгебре:
   $(A \wedge \neg B) \wedge (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B) = (A \wedge \neg B \wedge A \vee A \wedge \neg B \wedge B) \wedge (\neg A \vee \neg B) =$
   $(A \wedge \neg B \vee 0) \wedge (\neg A \vee \neg B) = A \wedge \neg B$ $\square$

2. $((A \setminus B) \cup (A \setminus C)) \cap (A \setminus (B \cap C)) \stackrel{?}{=} A \setminus (B \cup C)$

   Доказательство. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$
   $(A \setminus (B \cap C)) \cap A \setminus (B \cap C) = A \setminus (B \cap C) \neq A \setminus (B \cup C)$ – неверно $\square$

3. *Доказательство.* Перейдем к булевой алгебре:
   $(A \wedge B) \wedge \neg C = A \wedge \neg C \wedge B \neq A \wedge \neg C \wedge B \wedge \neg C$ $\square$

4. *Доказательство.* Перейдем к булевой алгебре:
   $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge \neg B) = A \wedge B \vee B \wedge \neg A \vee B = B$ $\square$

5. $((x \in A) \to (x \in P)) \wedge ((x \in Q) \to (x \in A)) = (A \subseteq P) \wedge (Q \subseteq A)$
   Отрезок A максимальной длины совпадает с $A_{max} = P = [10, 40]$; $A_{min} = Q = [20, 30]$.

6. Перейдем к характеристическим функциям данных множеств:

$$\begin{cases} X_A X_X = X_B X_X \\ X_A X_Y = X_B X_Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (X_A - X_B) X_X = 0 \\ (X_A - X_B) X_Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \tag{1}$$

$$(X_A - X_B)(X_X - X_Y) = 0 \tag{2}$$

Предположим, что нужное нам условие не выполняется:

$$X_A + X_{Y\setminus X} - X_A X_{Y\setminus X} \neq X_B + X_{Y\setminus X} - X_B X_{Y\setminus X}$$

$$(X_A - X_B)(1 - X_X(1 - X_Y)) \neq 0$$

$$\begin{cases} X_A \neq X_B \\ X_X \neq X_Y \end{cases} \tag{3}$$

Противоречие условию (2) $\Rightarrow$ изначальное утверждение верно.

7. $A_1 \supseteq \cdots \supseteq A_n, A_1 \setminus A_4 = A_6 \setminus A_9$
   $A_2 \setminus A_7 \stackrel{?}{=} A_3 \setminus A_8$

   Доказательство. Перейдем к алгебре логики:

$$\begin{cases} A_n \to \cdots \to A_1 \\ A_1 \wedge \neg A_4 = A_6 \wedge \neg A_9 \end{cases} \tag{4}$$

   До некоторого номера k в последовательности A_n будут только 1, а после – только 0 (случай, когда для всех i $A_i = 0$ очевиден). Отсюда 2-е уравнение системы выполняется либо при $4 \leq k \leq 6$, либо при $k \geq 9$, тогда либо $A_2 = A_3 = 1, A_7 = A_8 = 0$ либо $A_2 = A_3 = A_7 = A_8$. $\square$

8. В булевой алгебре:

$$(A \oplus B \leftrightarrow C \oplus D) \to (A \wedge B \to C) = 1$$

   Это неверно при $A = B = 1, C = D = 0$.