Домашнее задание 1. Введение в алгебру логики

Балдин Виктор Б01-303

18 сентября 2023 г.

1. Доказать:
$$1 \oplus x_1 \oplus x_2 = (x_1 \to x_2) \land (x_2 \to x_1)$$
Доказательство:
$$1 \oplus x_1 \oplus x2 = \neg(x1 \oplus x2) = x_1 \leftrightarrow x_2$$
$$(x_1 \to x_2) \land (x_2 \to x_1) = (\neg x_1 \lor x_2) \land (\neg x_2 \lor x_1) = \neg x_1 \land \neg x_2 \lor x_1 \land x_2 = x_1 \leftrightarrow x_2$$
$\square$

2. (a) $x \land (y \to z) = (x \land y) \to (x \land z)$

   (b) $x \oplus (y \leftrightarrow z) = (x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z)$

   Решение:

   (a) $x \land (y \to z) = x \land (\neg y \lor z) = x \land \neg y \lor x \land z \neq \neg(x \land y) \lor x \land z = (x \land y) \to (x \land z)$ – *ложно*

   (b) $f = x \oplus (y \leftrightarrow z) = 10010110$
   $g = (x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z) = 10011001$
   $f \neq g$ – *ложно*

3. (a) $1 \to 0 \neq 0 \to 1$ нет

   (b) $x \to (y \to z) = \neg x \lor (\neg y \lor z) = \neg x \lor \neg y \lor z = \neg(x \land y) \lor z \neq (x \to y) \to z = x \land \neg y \lor z$ нет

4. (a) y

   (b) z

   (c) $k(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to (x_1 \vee x_2)) \to x_3 = (\neg x_1 \vee x_1 \vee x_2) \to x_3 = (1 \vee x_2) \to x_3 = 1 \to x_3 = x_3$ – фиктивные переменные x_1, x_2

5. Данное выражение можно угадать, основываясь на соображениях симметрии:

$$MAJ(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_3) = 00010111$$

6. Доказать:

$$\bigvee (x_i \oplus x_j) = (x_1 \vee \ldots \vee x_n) \wedge (\neg x_1 \vee \ldots \vee \neg x_n)$$

Доказательство:
Случай 1. Пусть $\exists i, j : x_i \neq x_j$. Тогда $x_i \oplus x_j = 1 \Rightarrow \bigvee (x_i \oplus x_j) = 1$; $x_1 \vee \ldots \vee x_n = 1$; $\neg x_1 \vee \ldots \vee \neg x_n = 1$, т. к. для этого случая $\exists i, j : x_i = 1, x_j = 0$
Случай 2. $\forall i, j : x_i = x_j \Rightarrow \bigvee (x_i \oplus x_j) = 0; (x_1 \vee \ldots \vee x_n) \wedge (\neg x_1 \vee \ldots \neg x_n) = x_1 \wedge \neg x_1 = 0$ $\square$

7. Например $f(x, y) = \neg(x \wedge y)$. Выражения для операций через f (достаточно всего 2-х, для отрицания и дизъюнкции, например):

$$f(x, x) = \neg(x \wedge x) = \neg x$$

$$f(f(x, x), f(y, y)) = \neg(\neg x \wedge \neg y) = x \vee y$$