



École Nationale Supérieure de Génie Mathématique et Modélisation

THEME

Programmation Linéaire en Nombre Entier : méthode de Gomory

Présenté par : Léonel VODOOUNOU

Sous la supervision du : Dr Sanni M.

Année Académique 2024 - 2025

Plan

- 1 Introduction
- 2 Programmation Linéaire en Nombres Entiers
- 3 Méthode des Coupes de Gomory
- 4 Application Numérique
- 5 Analyse et discussion
- 6 Conclusion

Introduction

L'optimisation combinatoire nécessite souvent des solutions entières pour répondre à des problématiques réelles. Cependant, les méthodes classiques, basées sur la relaxation des contraintes d'intégralité, produisent des solutions fractionnaires inutilisables.

La méthode des coupes de Gomory, en ajoutant progressivement des contraintes appelées coupes, élimine ces solutions fractionnaires tout en conservant l'optimalité. Cette présentation examine ses bases, son fonctionnement, et son application, en répondant à la question : pourquoi et comment utiliser cette approche ?

Fondements de la PLNE

Un problème de Programmation Linéaire en Nombres Entiers (PLNE) est un problème de Programmation Linéaire (PL) où toutes ou une partie des variables doivent être entières, voire restreintes à 0 et 1. Ces variables sont soumises à des contraintes d'intégrité. Dans certains cas, les variables de décision sont naturellement entières, mais souvent, la modélisation nécessite l'introduction de variables booléennes, c'est-à-dire qui ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1.

La forme matricielle d'un programme linéaire en nombres entiers purs, noté (Pplne), s'écrit en trois lignes :

$$\max \quad c^T x$$

sous contraintes :

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}^+ \quad (\forall j = 1, \dots, n)$$

Fondements de la PLNE

On remarque que (Pplne) est du même type que celui d'un programme linéaire mais avec $x \in \mathbb{Z}_+^n$ (c'est-à-dire $x_j \in \mathbb{Z}^+$ pour tout $j = 1, \dots, n$). Par opposition, le problème obtenu à partir de (Pplne) en relaxant (en "oubliant") les contraintes d'intégrité est appelé la relaxation continue de (Pplne).

Dans certains cas, toutes les variables ne sont pas contraintes à être entières, mais seulement certaines d'entre elles. Dans ce cas, on parle de **programmation linéaire mixte**. Lorsque toutes les variables sont 0 ou 1, on parle de **programmation linéaire binaire**.

Principe des coupes de Gomory

Soit à résoudre le programme linéaire en nombres entiers (P) suivant :

$$\max \quad z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

Sous contraintes :

$$(P) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n \leq b_k, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_i \in \mathbb{N}, \quad \forall i. \end{cases}$$

Principe des coupes de Gomory

Les contraintes : $\forall i, x_i \in \mathbb{N}$, sont appelées contraintes d'intégrité. C'est la présence en plus de ces contraintes qui fait de (P) un programme linéaire en nombres entiers. Le programme linéaire sans ces contraintes est dit programme linéaire relaxé.

Le principe de la méthode des coupes de Gomory est d'introduire de nouvelles contraintes linéaires au problème pour réduire le domaine de réalisabilité du problème relaxé sans pour autant éliminer des points du domaine discret de réalisabilité du programme linéaire en nombres entiers (P) .

Description de la méthode des coupes de Gomory

Après avoir résolu le programme linéaire relaxé à l'aide de l'algorithme du simplexe, une solution optimale est obtenue. Si elle est entière, c'est la solution optimale du programme linéaire en nombres entiers (P). Sinon, la résolution de (P) n'est pas encore achevée. Soit x^* la solution optimale non entière, avec $x^* = (x_1^*, \dots, x_m^*, \dots, x_n^*)$.

Description de la méthode des coupes de Gomory

Sans perdre la généralité, supposons que les variables de base, à l'issue de la méthode du simplexe, soient les m premières variables, c'est-à-dire x_1, x_2, \dots, x_m , et que dans le tableau final, on ait, en faisant varier k de 1 à m , les équations de la forme :

$$x_k + \sum_{p=m+1}^{m+n} \bar{a}_{kp} x_p = \bar{b}_k.$$

La solution optimale x^* est donc telle que $x_k^* = \tilde{b}_k$ pour k variant de 1 à m et $x_l^* = 0$ pour $l \geq m+1$. Pour tout réel x , $\lfloor x \rfloor$ désignera le plus grand entier inférieur ou égal à x et $\{x\}$ désignera la partie décimale de x , alors

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}.$$

Description de la méthode des coupes de Gomory

Les coupes de Gomory se déduisent des équations du tableau final comme suit : Pour k , tel que $1 \leq k \leq m$,

$$x_k + \sum_{p=m+1}^{m+n} \tilde{a}_{kp} x_p = \tilde{b}_k.$$

$$\iff x_k + \sum_{p=m+1}^{m+n} \lfloor \tilde{a}_{kp} \rfloor x_p + \sum_{p=m+1}^{m+n} \{ \tilde{a}_{kp} \} x_p = \lfloor \tilde{b}_k \rfloor + \{ \tilde{b}_k \}.$$

Comme

$$\sum_{p=m+1}^{m+n} \{ \tilde{a}_{kp} \} x_p \leq \sum_{p=m+1}^{m+n} \tilde{a}_{kp} x_p,$$

Alors

$$x_k + \sum_{p=m+1}^{m+n} \lfloor \tilde{a}_{kp} \rfloor x_p \leq x_k + \sum_{p=m+1}^{m+n} \tilde{a}_{kp} x_p.$$

Description de la méthode des coupes de Gomory

Ou encore

$$x_k + \sum_{p=m+1}^{m+n} \lfloor \tilde{a}_{kp} \rfloor x_p \leq \tilde{b}_k$$

En tenant compte des contraintes d'intégrité et puisque $\lfloor \tilde{b}_k \rfloor \leq \tilde{b}_k$,
on a :

$$x_k + \sum_{p=m+1}^{m+n} \lfloor \tilde{a}_{kp} \rfloor x_p \leq \lfloor \tilde{b}_k \rfloor$$

Description de la méthode des coupes de Gomory

- Ainsi,

$$\sum_{p=m+1}^{m+n} \{\tilde{a}_{kp}\}x_p \geq \{\tilde{b}_k\}$$

- Cette dernière inégalité obtenue pour un certain k est appelée **coupe de Gomory**. En faisant varier k de 1 à m , il y a donc au plus m coupes de Gomory. Il faut par la suite résoudre à l'aide de la méthode du simplexe le nouveau programme linéaire obtenu en ajoutant au programme linéaire précédent ces coupes de Gomory. Ce mécanisme de rajout des coupes de Gomory ne s'arrête que lorsque la solution optimale obtenue est entière.

Remarque. On peut choisir la meilleure coupe à ajouter en utilisant comme critère le maximum des parties décimales des variables de base : $\{b_i^*\} = \max_i \{\{b_i\}\}$.

Exemple d'application

Le problème du sac à dos est un problème d'optimisation très étudié en raison de ses nombreuses applications dans le monde réel. Il modélise des situations de remplissage d'un sac à dos dont le poids maximal est limité, en choisissant tout ou partie d'objets ayant un poids et une valeur, de manière à maximiser la valeur totale sans dépasser le poids maximal. Le problème intervient fréquemment comme sous-problème dans des domaines comme la logistique (chargement d'avions ou de bateaux), l'économie (gestion de portefeuilles) ou l'industrie (découpe de matériaux).

Vu l'importance du problème du sac à dos, il semble pertinent de l'utiliser comme exemple d'application.

Exemple d'application

Enoncé du problème

Soit à remplir un sac ne pouvant supporter que 14kg, par un deux ou trois objets parmi les trois objets O_1 , O_2 , O_3 de poids respectifs 4 kg, 6 kg, 8 kg et de valeurs respectives 6, 8, 7, tout en maximisant la valeur totale des objets placés dans le sac. Soit x_i la variable égale au nombre d'objet O_i placé dans le sac, $1 \leq i \leq 3$.

Modélisation du problème

La fonction objectif à maximiser est :

$$z = 6x_1 + 8x_2 + 7x_3.$$

Les variables x_i doivent évidemment être des entiers, $\forall i, x_i \in \mathbb{N}$. Les contraintes du problème peuvent être représentées par le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \leq 14 \\ \forall i, x_i \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Modélisation du problème

Résoudre ce problème revient donc à résoudre le programme linéaire en nombres entiers (P) suivant :

$$(P) : \begin{cases} \max z = 6x_1 + 8x_2 + 7x_3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \leq 14 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ x_3 \leq 1 \\ \forall i, x_i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Résolution pas à pas

Soit d'abord à résoudre, par la méthode du simplexe, le programme linéaire relaxé :

$$\begin{cases} \max z = 6x_1 + 8x_2 + 7x_3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \leq 14 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ x_3 \leq 1 \\ \forall i, x_i \geq 0 \end{cases}$$

Sa forme standard :

$$\begin{cases} \max z = 6x_1 + 8x_2 + 7x_3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + x_4 = 14 \\ x_1 + x_5 = 1 \\ x_2 + x_6 = 1 \\ x_3 + x_7 = 1 \\ \forall i, x_i \geq 0 \end{cases}$$

Résolution pas à pas

Max	C_i	6	8	7	0	0	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	14	4	6	8	1	0	0	0
0	x_5	1	1	0	0	0	1	0	0
0	x_6	1	0	1	0	0	0	1	0
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1
	Z_i	0	0	0	0	0	0	0	0
		$C_i - Z_i$	6	8	7	0	0	0	0

Table 1 : Initialisation

Résolution pas à pas

Max	C_i	6	8	7	0	0	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	8	4	0	8	1	0	-6	0
0	x_5	1	1	0	0	0	1	0	0
8	x_2	1	0	1	0	0	0	1	0
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1
	Z_i	8	0	8	0	0	0	8	0
		$C_i - Z_i$	6	0	7	0	0	-8	0

Table 2 : Itération 1

Résolution pas à pas

Max	C_i	6	8	7	0	0	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	0	4	0	0	1	0	-6	-8
0	x_5	1	1	0	0	0	1	0	0
8	x_2	1	0	1	0	0	0	1	0
7	x_3	1	0	0	1	0	0	0	1
	Z_i	15	0	8	7	0	0	8	7
		$C_i - Z_i$	6	0	0	0	0	-8	-7

Table 3 : Itération 2

Résolution pas à pas

Max	C_i	6	8	7	0	0	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
6	x_1	0	1	0	0	$1/4$	0	$-3/2$	-2
0	x_5	1	0	0	0	$-1/4$	1	$3/2$	2
8	x_2	1	0	1	0	0	0	1	0
7	x_3	1	0	0	1	0	0	0	1
	Z_i	15	6	8	7	$3/2$	0	-1	-4
		$C_i - Z_i$	0	0	0	$-3/2$	0	1	4

Table 4 : Itération 3

Résolution pas à pas

Max	C_i	6	8	7	0	0	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
6	x_1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	x_7	1/2	0	0	0	-1/8	1/2	3/4	1
8	x_2	1	0	1	0	0	0	1	0
7	x_3	1/2	0	0	1	1/8	-1/2	-3/4	0
	Z_i	35/2	6	8	7	7/8	5/2	9/4	0
		$C_i - Z_i$	0	0	0	-7/8	-5/2	-9/4	0

Table 5 : Itération 4

Résolution pas à pas

D'après ce tableau final, qui sera noté T :

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = x_5 = x_6 = 0, \quad x_7 = \frac{1}{2}.$$

La solution optimale non entière du problème est donc :

$$x^* = \left(1, 1, \frac{1}{2}\right),$$

et la valeur maximale que peut avoir la fonction objectif z correspondant à cette solution optimale est donc :

$$z = \frac{35}{2} = 17,5.$$

Résolution pas à pas

Comme les deux variables non entières du tableau (x_7 et x_3) ont la même partie décimale, on peut choisir l'une des deux. Prenons la ligne de x_3 .

$$x_3 + \frac{1}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{3}{4}x_6 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{1}{8} \right\}x_4 + \left\{ \frac{-1}{2} \right\}x_5 + \left\{ \frac{-3}{4} \right\}x_6 \geq \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{4}x_6 \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{4}x_6 \leq -\frac{1}{2}$$

Résolution pas à pas

On trouve la coupe $-\frac{1}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{4}x_6 \leq -\frac{1}{2}$. Par l'introduction de variables d'écart, cette coupe est transformée en égalité :

$$\Rightarrow -\frac{1}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{4}x_6 + x_8 = -\frac{1}{2}$$

Il faut ensuite ajouter cette dernière égalité à T en considérant x_8 comme la variable de base dans la nouvelle ligne du tableau. Mais il faut remarquer que cette solution de base n'est pas réalisable puisque $x_8 = -\frac{1}{2} < 0$. Pour cela, il suffit de poursuivre la résolution avec **l'algorithme dual du simplex**.

Résolution pas à pas

Max	C_i	6	8	7	0	0	0	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
6	x_1	1	1	0	0	0	1	0	0	0
0	x_7	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	0
8	x_2	1	0	1	0	0	0	1	0	0
7	x_3	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	0	0
0	x_8	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	1
	Z_i	$\frac{35}{2}$	6	8	7	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{4}$	0	0
			$C_i - Z_i$	0	0	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{9}{4}$	0	0

Table 6 : Itération 5

Résolution pas à pas

Un petit rappel : Formulation du Dual Simplexe Method

- Si la fonction objectif est de type **minimisation**, la transformer en **maximisation**.
- Convertir toutes les contraintes de type \geq en \leq en multipliant par (-1) .
- Transformer chaque contrainte de type \leq en une contrainte $=$ en ajoutant une **variable d'écart** à chaque contrainte et en attribuant un coefficient nul dans la fonction objectif.

Résolution pas à pas

Un petit rappel : Condition de faisabilité du dual

- La variable sortante, x_B , est la variable de base ayant la valeur la plus négative (les égalités sont résolues arbitrairement).
- Si toutes les variables de base sont positives ou nulles ($x_B \geq 0$), l'algorithme se termine.
- Sinon, sélectionner le x_B le plus négatif ($x_B < 0$).

Résolution pas à pas

Un petit rappel : Condition d'optimalité du dual

- Si toutes les valeurs de $x_B \geq 0$, la solution courante est optimale.
Terminer le processus.
- Si $x_B < 0$, sélectionner le x_B **négatif minimum**, et cette ligne est appelée la **ligne clé**.
- Calculer le **ratio** : $\text{Ratio} = \frac{C_j - Z_j}{\text{Ligne clé}_j}$ avec Ligne clé_j < 0.
- Identifier le **ratio positif minimum**; la colonne correspondante est appelée la **colonne clé**.
- Construire le nouveau tableau de solution.

Résolution pas à pas

Max	C_i	6	8	7	0	0	0	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
6	x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	2
0	x_7	0	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1
8	x_2	1	0	1	0	0	0	1	0	0
7	x_3	1	0	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	-1
0	x_5	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	0	-2
	Z_i	15	6	8	7	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}$	0	5
		$C_i - Z_i$	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	-5

Table 6 : Itération 5

Résolution pas à pas

Tout les coûts réduits de la Table 6 étant négatifs, l'algorithme du simplexe s'arrête et puisque la solution optimale ici est entière, il n'y a plus besoin de poursuivre les coupes de Gomory. Ainsi, d'après ce tableau final, on trouve :

$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = x_6 = x_7 = x_8 = 0, \quad x_5 = 1$ et $z = 15$ est la valeur maximale des objets à placer dans le sac. L'optimum discret de notre problème est $(0, 1, 1)$, il faut choisir de placer dans le sac les objets O_2 et O_3 .

Analyse et discussion

La méthode des coupes de Gomory est une approche exacte pour résoudre les programmes linéaires en nombres entiers (PLNE). Voici une présentation de ses avantages et limitations :

Avantages

- **Méthode exacte** : Elle garantit la recherche de la solution optimale sans approximation.
- **Convergence garantie** : Lorsque les coefficients des contraintes et des variables sont rationnels, la méthode converge vers la solution optimale en un nombre fini d'itérations.
- **Base théorique solide** : Fondée sur des principes mathématiques robustes, elle est bien étayée théoriquement.

Analyse et discussion

Limitations

- **Temps de calcul** : La méthode peut être gourmande en temps de calcul, notamment pour des problèmes de grande taille.
- **Nombre d'itérations** : Elle peut nécessiter un nombre élevé d'itérations pour atteindre la solution optimale, ce qui peut être inefficace pour certains problèmes complexes.
- **Stabilité numérique** : Des problèmes de stabilité numérique peuvent survenir, en particulier lorsque les coefficients des contraintes sont de grande taille ou très petits.

En résumé, bien que la méthode des coupes de Gomory soit une approche exacte et théoriquement solide pour résoudre les PLNE, elle peut présenter des défis en termes de temps de calcul, d'efficacité et de stabilité numérique, en particulier pour des problèmes de grande envergure.

Conclusion

La méthode des coupes de Gomory constitue une avancée historique majeure dans l'optimisation linéaire en nombres entiers, offrant une approche systématique pour éliminer les solutions non entières et converger vers l'optimum. Bien qu'elle soit aujourd'hui moins utilisée que des méthodes modernes comme le Branch-and-Bound, elle demeure un outil pédagogique essentiel et une base théorique solide pour comprendre les algorithmes d'optimisation. Ses applications pratiques dans des domaines tels que la logistique, la planification ou encore les problèmes de découpe illustrent son importance et sa pertinence dans la résolution de problèmes complexes.

Références bibliographiques

-  Gomory, R.E. (1958). *Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs*. Bulletin of the American Mathematical Society, 64(5), 275-278.
-  Ramonjison, D. M. (2017). *Mémoire en vue de l'obtention du diplôme de Master, Parcours : Mathématiques Appliquées, Spécialité : Combinatoire et Optimisation*. Université d'Antananarivo, Domaine Sciences et Technologies, Mention Mathématiques et Informatique. Soutenu le 02 novembre 2017.
-  Mbaye, B., & Baldé, M. A. M. T. (2021-2022). *Cours Recherche Opérationnelle : Université Cheikh Anta Diop (UCAD) de Dakar, Faculté des Sciences Economiques et de Gestion (FASEG), Département de Mathématiques de la Décision (DMD), Master 1 Sciences Économiques et de Gestion*. Laboratoire de Mathématiques de la Décision et d'Analyse Numérique (LMDAN).
<http://lmdan.ucad.sn>