Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский университет
ИТМО»

Факультет Программной инженерии и компьютерной техники

Отчёт по лабораторной работе №2

Методы оптимизации

Вариант № 9

Выполнил: студент группы P3214

Силинцев В.В.

Преподаватель: Селина Е.Г.

Санкт-Петербург 2025

Содержание

Цель работы

Изучить четыре метода нахождения экстремума: метод половинного деления, метод золотого сечения, метод хорд, метод Ньютона и реализовать их программно.

Задание

Решить задачу четырьмя методами: методом половинного деления, методом золотого сечения, методом хорд и методом Ньютона. По 5 шагов каждого метода выполнить вручную + написать программу по каждому методу на одном из языков программирования.

- Функция для нахождения экстремума: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-5x+x\ln x$.
- Интервал для поиска: $[a,b]=[1.5,2]$.
- Необходимая точность вычислений: $\varepsilon=0.02$ для ручных расчетов и $\varepsilon=0.0001$ для программных расчетов.

Ручные расчеты

Метод половинного деления

Алгоритм поиска экстремума:

- Берем две точки вблизи середины интервала $[a,b]$:
  $x_1 = \frac{(a+b-\varepsilon)}{2}$, $x_2 = \frac{(a+b+\varepsilon)}{2}$.
- Вычисляем $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$.
- Если $y_1 > y_2$, тогда присваивается $a = x_1$, иначе присваивается $b = x_2$.
- Если $b - a > 2\varepsilon$, тогда повторяем с п.1, иначе переходим к пункту 5.
- Вычисляем $x_m = \frac{(a+b)}{2}$, $y_m = f(x_m)$.

Поиск методом половинного деления (5 итераций):

Первая итерация:

1. Находим $x_1 = \frac{(1.5+2-0.02)}{2} = 1.74$ и $x_2 = \frac{(1.5+2+0.02)}{2} = 1.76$.
2. Вычисляем $y_1 = f(x_1) = \frac{1}{3}1.74^3 - 5 \cdot 1.74 + 1.74 \cdot \ln 1.74 \approx -5.98023$ и $y_2 = f(x_2) = \frac{1}{3}1.76^3 - 5 \cdot 1.76 + 1.76 \cdot \ln 1.76 \approx -5.98779$.
3. $y_1 > y_2$, тогда $a = x_1 = 1.74$.
4. $b - a = 0.5 > 2\varepsilon = 0.04$, тогда повторяем пункт 1.

Вторая итерация:

1. Находим $x_1 = \frac{(1.74+2-0.02)}{2} = 1.86$ и $x_2 = \frac{(1.74+2+0.02)}{2} = 1.88$.

2. Вычисляем $y_1 = f(x_1) = \frac{1}{3}1.86^3 - 5 \cdot 1.86 + 1.86 \cdot \ln 1.86 \approx -6.00078$ и $y_2 = f(x_2) = \frac{1}{3}1.88^3 - 5 \cdot 1.88 + 1.88 \cdot \ln 1.88 \approx -5.99832$.

3. $y_1 \le y_2$, тогда $b = x_2 = 1.88$.

4. $b - a = 0.26 > 2\varepsilon = 0.04$, тогда повторяем пункт 1.

Третья итерация:

1. Находим $x_1 = \frac{(1.74+1.88-0.02)}{2} = 1.8$ и $x_2 = \frac{(1.74+1.88+0.02)}{2} = 1.82$.

2. Вычисляем $y_1 = f(x_1) = \frac{1}{3}1.8^3 - 5 \cdot 1.8 + 1.8 \cdot \ln 1.8 \approx -5.99798$ и $y_2 = f(x_2) = \frac{1}{3}1.82^3 - 5 \cdot 1.82 + 1.82 \cdot \ln 1.82 \approx -6.00059$.

3. $y_1 > y_2$, тогда $a = x_1 = 1.8$.

4. $b - a = 0.14 > 2\varepsilon = 0.04$, тогда повторяем пункт 1.

Четвертая итерация:

1. Находим $x_1 = \frac{(1.8+1.88-0.02)}{2} = 1.83$ и $x_2 = \frac{(1.8+1.88+0.02)}{2} = 1.85$.

2. Вычисляем $y_1 = f(x_1) = \frac{1}{3}1.83^3 - 5 \cdot 1.83 + 1.83 \cdot \ln 1.83 \approx -6.00127$ и $y_2 = f(x_2) = \frac{1}{3}1.85^3 - 5 \cdot 1.85 + 1.85 \cdot \ln 1.85 \approx -6.00136$.

3. $y_1 > y_2$, тогда $a = x_1 = 1.83$.

4. $b - a = 0.08 > 2\varepsilon = 0.04$, тогда повторяем пункт 1.

Пятая итерация:

1. Находим $x_1 = \frac{(1.83+1.88-0.02)}{2} = 1.845$ и $x_2 = \frac{(1.83+1.88+0.02)}{2} = 1.865$.

2. Вычисляем $y_1 = f(x_1) = \frac{1}{3}1.845^3 - 5 \cdot 1.845 + 1.845 \cdot \ln 1.845 \approx -6.0015$ и $y_2 = f(x_2) = \frac{1}{3}1.865^3 - 5 \cdot 1.865 + 1.865 \cdot \ln 1.865 \approx -6.00032$.

3. $y_1 > y_2$, тогда $a = x_1 = 1.845$.

4. $b - a = 0.05 > 2\varepsilon = 0.04$.

5. Находим $x_m = \frac{(1.83+1.88)}{2} = 1.855$, $y_m = f(1.855) \approx -6.00112$. Заканчиваем поиск.

Таблица 1. Поиск методом половинного деления (5 итераций).

№ итерации	a	b	x_1	x_2	y_1	y_2	$b-a$
1	1.5	2	1.74	1.76	-5.98023	-5.98779	0.5
2	1.74	2	1.86	1.88	-6.00078	-5.99832	0.26
3	1.74	1.88	1.8	1.82	-5.99798	-6.00059	0.14
4	1.8	1.88	1.83	1.85	-6.00127	-6.00136	0.08
5	1.83	1.88	1.845	1.865	-6.0015	-6.00032	0.05

Метод золотого сечения

Алгоритм поиска экстремума:

- На первом шаге (итерации) точки вычисляются по формулам: $x_1 = a + 0.382(b-a)$, $x_2 = a + 0.618(b-a)$.
- Затем вычисляются значение функции в этих точках.
- Если $f(x_1) < f(x_2)$, то оставляем отрезок $[a, x_2]$. На второй итерации x_2 полагаем равным x_1, а x_1 вычисляем по формуле $x_1 = a + 0.382(x_2 - a)$. Значение функции вычисляется только в точке x_1, так как значение функции в x_2 уже было вычислено на предыдущем шаге.
- Если $f(x_1) \geq f(x_2)$, то оставляем отрезок $[x_1, b]$. На второй итерации x_1 полагаем равным x_2, а x_2 вычисляем по формуле $x_2 = a + 0.618(b - x_1)$. Значение функции вычисляется только в точке x_2, так как значение функции в x_1 уже было вычислено на предыдущем шаге.
- Вычисления продолжают до тех пор, пока длина интервала не станет меньше требуемой точности.

Поиск методом половинного деления (5 итераций):

Первая итерация:

1. Находим $x_1 = 1.5 + 0.382(2 - 1.5) = 1.691$ и $x_2 = 1.5 + 0.618(2 - 1.5) = 1.809$.
2. Вычисляем $f(x_1) = \frac{1}{3}1.691^3 - 5 \cdot 1.691 + 1.691 \cdot \ln 1.691 \approx -5.95489$ и $f(x_2) = \frac{1}{3}1.809^3 - 5 \cdot 1.809 + 1.809 \cdot \ln 1.809 \approx -5.999365$.
3. $f(x_1) \geq f(x_2)$, тогда $a = x_1 = 1.691$, $x_1 = x_2 = 1.809$, $x_2 = 1.691 + 0.618(2 - 1.809) \approx 1.809038$.

4. $b-a=0.5>\varepsilon=0.02$, тогда повторяем пункт 2.

Вторая итерация:

1. Вычисляем $f(x_1)=\frac{1}{3}1.809^3-5\cdot 1.809+1.809\cdot \ln 1.809\approx -5.999365$ и $f(x_2)=\frac{1}{3}1.809038^3-5\cdot 1.809038+1.809038\cdot \ln 1.809038\approx -5.999371$.
2. $f(x_1)\geq f(x_2)$, тогда $a=x_1=1.809$, $x_1=x_2=1.809038$, $x_2=1.809+0.618(2-1.809038)\approx 1.927015$.
3. $b-a=0.309>\varepsilon=0.02$, тогда повторяем пункт 1.

Третья итерация:

1. Вычисляем $f(x_1)=\frac{1}{3}1.809038^3-5\cdot 1.809038+1.809038\cdot \ln 1.809038\approx -5.999371$ и $f(x_2)=\frac{1}{3}1.927015^3-5\cdot 1.927015+1.927015\cdot \ln 1.927015\approx -5.985756$.
2. $f(x_1)<f(x_2)$, тогда $b=x_2=1.927015$, $x_2=x_1=1.809038$, $x_1=1.809+0.382(1.927015-1.809)=1.809015$.
3. $b-a=0.191>\varepsilon=0.02$, тогда повторяем пункт 1.

Четвертая итерация:

1. Вычисляем $f(x_1)=\frac{1}{3}1.809015^3-5\cdot 1.809015+1.809015\cdot \ln 1.809015\approx -5.999367$ и $f(x_2)=\frac{1}{3}1.809038^3-5\cdot 1.809038+1.809038\cdot \ln 1.809038\approx -5.999371$.
2. $f(x_1)\geq f(x_2)$, тогда $a=x_1=1.809015$, $x_1=x_2=1.809038$, $x_2=1.809015+0.618(1.927015-1.809038)\approx 1.881925$.
3. $b-a=0.118015>\varepsilon=0.02$, тогда повторяем пункт 1.

Пятая итерация:

1. Вычисляем $f(x_1)=\frac{1}{3}1.809038^3-5\cdot 1.809038+1.809038\cdot\ln 1.809038\approx -5.999371$ и $f(x_2)=\frac{1}{3}1.881925^3-5\cdot 1.881925+1.881925\cdot\ln 1.881925\approx -5.997992$.

2. $f(x_1)<f(x_2)$, тогда $b=x_2=1.881925$, $x_2=x_1=1.809038$, $x_1=1.809015+0.382(1.881925-1.809015)=1.836867$.

3. $b-a=0.118>\varepsilon=0.02$, заканчиваем поиск.

Таблица 2. Поиск методом золотого сечения (5 итераций).

№ итерации	a	b	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$
1	1.5	2	1.691	1.809	-5.95489	-5.999365
2	1.691	2	1.809	1.809038	-5.999365	-5.999371
3	1.809	2	1.809038	1.927015	-5.999371	-5.985756
4	1.809	1.927015	1.809015	1.809038	-5.999367	-5.999371
5	1.809015	1.927015	1.809038	1.881925	-5.999371	-5.997992

Метод хорд

Алгоритм поиска экстремума:

- Шаг 1. Находим $\tilde{x}$ по формуле $\tilde{x}=a-\frac{f'(a)}{f'(a)-f'(b)}(a-b)$. Вычисляем $f'(\tilde{x})$ и переходим к шагу 2.
- Шаг 2. Проверка на окончание поиска: если $|f'(\tilde{x})|\le\varepsilon$, то положить $x^*=\tilde{x}$, $f^*=f(\tilde{x})$, и завершить поиск, иначе перейти к шагу 3.
- Шаг 3. Переход к новому отрезку. Если $f'(\tilde{x})>0$, то положить $b=\tilde{x}$, $f'(b)=f'(\tilde{x})$, иначе положить $a=\tilde{x}$, $f'(a)=f'(\tilde{x})$. Перейти к шагу 1.

Поиск методом хорд (3 итерации):

Первая итерация:

1. Найдем производную $f'(x)=x^2-4+\ln x$.
2. Находим
$$\tilde{x}=a-\frac{f'(a)}{f'(a)-f'(b)}(a-b)=1.5-\frac{1.5^2-4+\ln 1.5}{(1.5^2-4+\ln 1.5)-(2^2-4+\ln 2)}\cdot(1.5-2)\approx 1.829918.$$
Вычисляем $f'(\tilde{x})=f'(1.829918)\approx-0.047130$.
3. $|f'(\tilde{x})|=0.047130>\varepsilon=0.02$, тогда продолжаем поиск.
4. $f'(\tilde{x})\le 0$, тогда $a=\tilde{x}$, $f'(a)=f'(\tilde{x})$. Повторяем пункт 2.

Вторая итерация:

1. Находим
$$\tilde{x}=a-\frac{f'(a)}{f'(a)-f'(b)}(a-b)=1.829918-\frac{-0.047130}{(-0.047130)-(2^2-4+\ln 2)}\cdot(1.829918-2).$$
$\tilde{x}\approx 1.840746$. Вычисляем $f'(\tilde{x})=f'(1.840746)\approx-0.001483$.
2. $|f'(\tilde{x})|=0.001483<\varepsilon=0.02$, продолжаем поиск для большей точности.

3. $f'(\tilde{x})\le 0$, тогда $a=\tilde{x}$, $f'(a)=f'(\tilde{x})$. Повторяем пункт 1.

Третья итерация:

1. Находим

$$\tilde{x}=a-\frac{f'(a)}{f'(a)-f'(b)}(a-b)=1.840746-\frac{-0.001483}{(-0.001483)-(2^2-4+\ln 2)}\cdot(1.840746-2).$$

$\tilde{x}\approx 1.841086$. Вычисляем $f'(\tilde{x})=f'(1.841086)\approx -0.000046$.

2. $|f'(\tilde{x})|=0.000046<\varepsilon=0.02$, завершаем поиск.

Таблица 3. Поиск методом хорд (3 итерации).

№ итерации	a	b	$\tilde{x}$	$f'(a)$	$f'(b)$	$f'(\tilde{x})$
1	1.5	2	1.829918	-1.344535	0.693147	-0.047130
2	1.829918	2	1.840746	-0.047130	0.693147	-0.001483
3	1.840746	2	1.841086	-0.001483	0.693147	-0.000046

Метод Ньютона

Алгоритм поиска экстремума:

- Выбираем начальное приближение $x_0 \in [a, b]$ к искомой точке x^*.
- Выберем в качестве следующего приближения к x^* точку $x_1 = x_0 - \dfrac{f'(x_0)}{f''(x_0)}$.
- Далее продолжаем находить приближения по формуле $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$.
- Продолжаем вычисления пока не будет выполнено $|f'(x_k)| \le \varepsilon$.

Поиск методом Ньютона (3 итерации):

Первая итерация:

1. Найдем производную $f'(x) = x^2 - 4 + \ln x$.
2. Найдем вторую производную $f''(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$.
3. Выберем начальное приближение $x_0 = 1.5$.
4. В качестве следуещего приближения возьмем $x_1 = x_0 - \dfrac{f'(x_0)}{f''(x_0)}$.

$$x_1 = 1.5 - \frac{1.5^2 - 4 + \ln 1.5}{2 \cdot 1.5 + \frac{1}{1.5}} \approx 1.867.$$

5. $|f'(x_0)| = 1.34 > \varepsilon = 0.02$, тогда продолжим поиск. Повторяем пункт 4.

Вторая итерация:

1. В качестве следуещего приближения возьмем $x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)}$.

$x_2 = 1.867 - \frac{1.867^2 - 4 + \ln 1.867}{2 \cdot 1.867 + \frac{1}{1.867}} \approx 1.841$.

2. $|f'(x_1)| = 0.11 > \varepsilon = 0.02$, тогда продолжим поиск. Повторяем пункт 1.

Третья итерация:

1. В качестве следуещего приближения возьмем $x_3 = x_2 - \frac{f'(x_2)}{f''(x_2)}$.

$x_3 = 1.841 - \frac{1.841^2 - 4 + \ln 1.841}{2 \cdot 1.841 + \frac{1}{1.841}} \approx 1.841$.

2. $|f'(x_1)| \approx 0.0 \leq \varepsilon = 0.02$, тогда завершаем поиск.

Таблица 4. Поиск методом Ньютона (3 итерации).

№ итерации, k	x_{k-1}	x_k	$f'(x_{k-1})$	$f''(x_{k-1})$
1	1.5	1.867	-1.34	3.667
2	1.867	1.841	0.11	4.269
3	1.841	1.841	0	4.226

Код программы

Полный исходный код приложения:

https://github.com/vvlaads/vvlaads/tree/master/Optimization%20methods/Lab2

Результат работы программы

```
Метод половинного деления
Найденное значение x:  1.8410767517089845
Значение функции в точке:  -6.001532556320019
Количество итераций:  13
---- ---- ---- ---- ---- ---- ---- ---- ---- ----
Метод золотого сечения
Найденное значение x:  1.9098442901907176
Значение функции в точке:  -5.99145505438714
Количество итераций:  45
---- ---- ---- ---- ---- ---- ---- ---- ---- ----
Метод хорд
Найденное значение x:  1.84108605690007
Значение функции в точке:  -6.00153255693550
Количество итераций:  3
---- ---- ---- ---- ---- ---- ---- ---- ---- ----
Метод Ньютона
Найденное значение x:  1.84109705845008
Значение функции в точке:  -6.00153255719121
Количество итераций:  4
```

Рисунок 1: Результат работы программы.

Заключение

В ходе этой работы я познакомился с методами поиска экстремума: методом половинного деления, методом золотого сечения, методом хорд и методом Ньютона. Я научился применять их на практике, а также реализовал их программно.

Наиболее быстрыми методами поиска оказались метод Ньютона и метод Хорд. Самым медленным оказался метод золотого сечения. Наиболее точным из методов оказался метод Ньютона.