

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский университет
ИТМО»

Факультет Программной инженерии и компьютерной техники

Отчёт по лабораторной работе №3

Методы оптимизации

Вариант № 9

Выполнил: студент группы Р3214

Силинцев В.В.

Преподаватель: Селина Е.Г.

Санкт-Петербург 2025

Содержание

| | |
|---------------------------------|----|
| Цель работы..... | 3 |
| Задание..... | 4 |
| Ручные расчеты..... | 5 |
| Код программы..... | 8 |
| Результат работы программы..... | 9 |
| Заключение..... | 10 |

Цель работы

Изучить метод квадратичной аппроксимации и реализовать его программно.

Задание

Решить задачу методом квадратичной аппроксимации. Выполнить вручную 3-5 шагов. Написать программу по методу на одном из языков программирования.

- Функция для нахождения экстремума: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + x \ln x$.
- Интервал для поиска: $[a, b] = [1.5, 2]$.
- Необходимая точность вычислений: $\varepsilon = 0.02$ для ручных расчетов и $\varepsilon = 0.0001$ для программных расчетов.

Ручные расчеты

Алгоритм поиска экстремума:

- Шаг 1. Задать начальную (первую) точку x_1 , величину шага по оси x $\Delta x > 0$, ε_1 и ε_2 – малые положительные значения, характеризующие точность.
- Шаг 2. Вычислить вторую точку: $x_2 = x_1 + \Delta x$.
- Шаг 3. Вычислить значения функции в точках $f(x_1)$ и $f(x_2)$.
- Шаг 4. Сравнить точки $f(x_1)$ и $f(x_2)$:
 - если $f(x_1) > f(x_2)$, положить $x_3 = x_1 + 2\Delta x$.
 - если $f(x_1) \leq f(x_2)$, положить $x_3 = x_1 - \Delta x$.
- Шаг 5. Вычислить $f(x_3) = f_3$.
- Шаг 6. Найти $F_{\min} = \min\{f_1, f_2, f_3\}$, $x_{\min} = x_i$.
- Шаг 7. По точкам x_1, x_2, x_3 вычислить точку минимума \bar{x} квадратичного интерполяционного полинома: $\bar{x} = \frac{1}{2} \frac{(x_2^2 - x_3^2)f_1 + (x_3^2 - x_1^2)f_2 + (x_1^2 - x_2^2)f_3}{(x_2 - x_3)f_1 + (x_3 - x_1)f_2 + (x_1 - x_2)f_3}$ и величину функции $f(\bar{x})$. Если знаменатель в формуле для \bar{x} на некоторой итерации обращается в ноль, то результатом итерации является прямая. В этом случае рекомендуется обозначить $x_1 = x_{\min}$ и перейти к шагу 2.
- Шаг 8. Проверить выполнение условий окончания расчета:
$$\left| \frac{F_{\min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})} \right| < \varepsilon_1, \quad \left| \frac{x_{\min} - \bar{x}}{\bar{x}} \right| < \varepsilon_2.$$
 - если оба условия выполняются, закончить поиск $x^* = \bar{x}$.

- если хотя бы одно из условий не выполняется и $\bar{x} \in [x_1; x_3]$, выбрать наименьшую точку (x_{min} или \bar{x}) и две точки по обе стороны от нее. Обозначить эти точки в обычном порядке и перейти к шагу 6.
- если хотя бы одно из условий не выполняется и $\bar{x} \notin [x_1; x_3]$, то положить точку $x_1 = \bar{x}$ и перейти к шагу 2.

Поиск методом квадратичной аппроксимации (3 итерации):

Первая итерация:

1. Пусть $x_1 = a = 1.5$, $\Delta x = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = 0.02$.
2. Значение второй точки $x_2 = 1.5 + 1 = 2.5$.
3. Значения функции в точках x_1 и x_2 : $f(x_1) = -5.766802$, $f(x_2) = -5.000940$.
4. $f(x_1) \leq f(x_2)$, тогда $x_3 = 1.5 - 1$.
5. Вычислим $f(x_3) = -2.804907$.
6. Найдём $F_{min} = f_1 = -5.766802$, $x_{min} = x_1$.
7. Вычислим $\bar{x} = \frac{1}{2} \frac{(2.5^2 - 0.5^2)f_1 + (0.5^2 - 1.5^2)f_2 + (1.5^2 - 2.5^2)f_3}{(2.5 - 0.5)f_1 + (0.5 - 1.5)f_2 + (1.5 - 2.5)f_3} = 1.794551$, тогда $f(\bar{x}) = -5.996984$.
8. Проверим выполнение условий окончания расчета: $\left| \frac{F_{min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})} \right| = 0.038383$,
 $\left| \frac{x_{min} - \bar{x}}{\bar{x}} \right| = 0.164137$. $\bar{x} \notin [x_1; x_3]$, тогда $x_1 = \bar{x}$ и переходим к шагу 2.

Вторая итерация:

1. $x_2 = 1.794551 + 1 = 2.794551$.
2. Значения функции в точках x_1 и x_2 : $f(x_1) = -5.996984$, $f(x_2) = -3.826176$.
3. $f(x_1) \leq f(x_2)$, тогда $x_3 = 1.794551 - 1 = 0.794551$.
4. Вычислим $f(x_3) = -3.988283$.
5. Найдем $F_{min} = f_1 = -5.996984$, $x_{min} = x_1$.
6. Вычислим $\bar{x} = 1.775158$, тогда $f(\bar{x}) = -5.992428$.
7. Проверим выполнение условий окончания расчета: $\left| \frac{F_{min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})} \right| = 0.00076$,
 $\left| \frac{x_{min} - \bar{x}}{\bar{x}} \right| = 0.010925$. $\bar{x} \notin [x_1; x_3]$, тогда $x_1 = \bar{x}$ и переходим к шагу 2.

Третья итерация:

1. $x_2 = 1.775158 + 1 = 2.775158$.
2. Значения функции в точках x_1 и x_2 : $f(x_1) = -5.992428$, $f(x_2) = -3.918868$.
3. $f(x_1) \leq f(x_2)$, тогда $x_3 = 1.775158 - 1 = 0.775158$.
4. Вычислим $f(x_3) = -3.917959$.
5. Найдем $F_{min} = f_1 = -5.992428$, $x_{min} = x_1$.
6. Вычислим $\bar{x} = 1.775268$, тогда $f(\bar{x}) = -5.992458$.
7. Проверим выполнение условий окончания расчета: $\left| \frac{F_{min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})} \right| = 0.000005$,
 $\left| \frac{x_{min} - \bar{x}}{\bar{x}} \right| = 0.000062$. Завершаем поиск.

Код программы

Полный исходный код приложения:

<https://github.com/vvlaads/vvlaads/tree/master/Optimization%20methods/>

Lab3

Результат работы программы

```
Метод квадратичной аппроксимации  
Значение x: 1.7752680050650933  
Значение функции в точке: -5.992458165289007  
Количество итераций: 3
```

Рисунок 1: Результат работы программы

Заключение

В ходе этой работы я познакомился с методом квадратичной аппроксимации, научился применять его на практике, а также реализовал программно.