Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет Программной инженерии и компьютерной техники

Отчёт по лабораторной работе №3

Методы оптимизации

Вариант № 9

Выполнил: студент группы P3214

Силинцев В.В.

Преподаватель: Селина Е.Г.

Санкт-Петербург 2025

Содержание

Цель работы

Изучить метод квадратичной аппроксимации и реализовать его программно.

Задание

Решить задачу методом квадратичной аппроксимации. Выполнить вручную 3-5 шагов. Написать программу по методу на одном из языков программирования.

- Функция для нахождения экстремума: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-5x+x\ln x$.
- Интервал для поиска: $[a,b]=[1.5,2]$.
- Необходимая точность вычислений: $\varepsilon=0.02$ для ручных расчетов и $\varepsilon=0.0001$ для программных расчетов.

Ручные расчеты

Алгоритм поиска экстремума:

- Шаг 1. Задать начальную (первую) точку x_1, величину шага по оси x $\Delta x > 0$, ε_1 и ε_2 – малые положительные значения, характеризующие точность.
- Шаг 2. Вычислить вторую точку: $x_2 = x_1 + \Delta x$.
- Шаг 3. Вычислить значения функции в точках $f(x_1)$и $f(x_2)$.
- Шаг 4. Сравнить точки $f(x_1)$и $f(x_2)$:
    - если $f(x_1) > f(x_2)$, положить $x_3 = x_1 + 2\Delta x$.
    - если $f(x_1) \le f(x_2)$, положить $x_3 = x_1 - \Delta x$.
- Шаг 5. Вычислить $f(x_3) = f_3$.
- Шаг 6. Найти $F_{min} = min\{f_1, f_2, f_3\}$, $x_{min} = x_i$.
- Шаг 7. По точкам x_1, x_2, x_3 вычислить точку минимума $\bar{x}$ квадратичного интерполяционного полинома: $\bar{x} = \frac{1}{2} \frac{(x_2^2 - x_3^2) f_1 + (x_3^2 - x_1^2) f_2 + (x_1^2 - x_2^2) f_3}{(x_2 - x_3) f_1 + (x_3 - x_1) f_2 + (x_1 - x_2) f_3}$ и величину функции $f(\bar{x})$. Если знаменатель в формуле для $\bar{x}$ на некоторой итерации обращается в ноль, то результатом итерации является прямая. В этом случае рекомендуется обозначить $x_1 = x_{min}$ и перейти к шагу 2.
- Шаг 8. Проверить выполнение условий окончания расчета: $\left| \frac{F_{min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})} \right| < \varepsilon_1$, $\left| \frac{x_{min} - \bar{x}}{\bar{x}} \right| < \varepsilon_2$.
    - если оба условия выполняются, закончить поиск $x^* = \bar{x}$.

- если хотя бы одно из условий не выполняется и $min\{x1, x2, x3\} \le \bar{x} \le max\{x1, x2, x3\}$, выбрать точку с наименьшим значением функции (x_{min} или $\bar{x}$) и две точки по обе стороны от нее. Обозначить эти точки в обычном порядке и перейти к шагу 6.
- если хотя бы одно из условий не выполняется и $\bar{x} > max\{x1, x2, x3\}$ или $\bar{x} < min\{x1, x2, x3\}$, то положить точку $x_1 = \bar{x}$ и перейти к шагу 2.

Поиск методом квадратичной аппроксимации (3 итерации):

Первая итерация:

1. Пусть $x_1 = a = 1.5$, $\Delta x = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = 0.02$.
2. Значение второй точки $x_2 = 1.5 + 1 = 2.5$.
3. Значения функции в точках x_1 и x_2: $f(x_1) = -5.766802$, $f(x_2) = -5.000940$.
4. $f(x_1) \le f(x_2)$, тогда $x_3 = 1.5 - 1 = 0.5$.
5. Вычислим $f(x_3) = -2.804907$.
6. Найдем $F_{min} = f_1 = -5.766802$, $x_{min} = x_1$.
7. Вычислим $\bar{x} = \frac{1}{2} \frac{(2.5^2 - 0.5^2) f_1 + (0.5^2 - 1.5^2) f_2 + (1.5^2 - 2.5^2) f_3}{(2.5 - 0.5) f_1 + (0.5 - 1.5) f_2 + (1.5 - 2.5) f_3} = 1.794551$, тогда $f(\bar{x}) = -5.996984$.
8. Проверим выполнение условий окончания расчета: $\left| \frac{F_{min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})} \right| = 0.038383 > \varepsilon_1 = 0.02$, $\left| \frac{x_{min} - \bar{x}}{\bar{x}} \right| = 0.164137 > \varepsilon_2 = 0.02$. Выполнено условие $min\{x1, x2, x3\} \le \bar{x} \le max\{x1, x2, x3\}$. В точке $\bar{x}$ значение функции меньше, чем в точке x_{min}, тогда обозначим $x_1 = x_1$, $x_3 = x_2$, $x_2 = \bar{x}$ и перейдем к шагу 6.

Вторая итерация:

1. Найдем $F_{min}=f_2=-5.996984$, $x_{min}=x_2$.

2. Вычислим $\bar{x}=\frac{1}{2}\frac{\left(1.794551^2-2.5^2\right)f_1+\left(2.5^2-1.5^2\right)f_2+\left(1.5^2-1.794551^2\right)f_3}{\left(1.794551-2.5\right)f_1+\left(2.5-1.5\right)f_2+\left(1.5-1.794551\right)f_3}=1.825416$,

   тогда $f\left(\bar{x}\right)=-6.001014$.

3. Проверим выполнение условий окончания расчета:

   $\left|\frac{F_{min}-f\left(\bar{x}\right)}{f\left(\bar{x}\right)}\right|=0.000672<\varepsilon_1=0.02$, $\left|\frac{x_{min}-\bar{x}}{\bar{x}}\right|=0.016908<\varepsilon_2=0.02$. Выполнено условие $min\{x1,x2,x3\}\le\bar{x}\le max\{x1,x2,x3\}$. В точке $\bar{x}$ значение функции меньше, чем в точке x_{min}, тогда обозначим $x_1=x_2$, $x_3=x_3$, $x_2=\bar{x}$ и перейдем к шагу 6.

Третья итерация:

1. Найдем $F_{min}=f_2=-6.001014$, $x_{min}=x_2$.

2. Вычислим

   $\bar{x}=\frac{1}{2}\frac{\left(1.825416^2-2.5^2\right)f_1+\left(2.5^2-1.794551^2\right)f_2+\left(1.794551^2-1.825416^2\right)f_3}{\left(1.825416-2.5\right)f_1+\left(2.5-1.794551\right)f_2+\left(1.794551-1.825416\right)f_3}=1.838536$,

   тогда $f\left(\bar{x}\right)=-6.001519$.

3. Проверим выполнение условий окончания расчета:

   $\left|\frac{F_{min}-f\left(\bar{x}\right)}{f\left(\bar{x}\right)}\right|=0.000084<\varepsilon_1=0.02$, $\left|\frac{x_{min}-\bar{x}}{\bar{x}}\right|=0.007136<\varepsilon_2=0.02$. Закончим поиск.

Код программы

Полный исходный код приложения:

https://github.com/vvlaads/vvlaads/tree/master/Optimization%20methods/Lab3

Результат работы программы

```
Метод квадратичной аппроксимации
Значение x:  1.841059695513168
Значение функции в точке:  -6.001532554241953
Количество итераций:  6
```

Рисунок 1: Результат работы программы

Заключение

В ходе этой работы я познакомился с методом квадратичной аппроксимации, научился применять его на практике, а также реализовал программно.