Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет Программной инженерии и компьютерной техники

Отчёт по лабораторной работе №4

Методы оптимизации

Вариант № 9

Выполнил: студент группы P3214

Силинцев В.В.

Преподаватель: Селина Е.Г.

Санкт-Петербург 2025

# Содержание

## Цель работы

Изучить методы покоординатного спуска, градиентного спуска и наискорейшего спуска. Реализовать их программно.

## Задание

Найти экстремум функции методами покоординатного спуска, градиентного спуска и наискорейшего спуска. Три итерации каждого метода выполнить вручную + написать программу на одном из языков программирования. $\varepsilon=0.0001$.

- Функция для нахождения экстремума:
  $f(x_1, x_2)=7x_1^2+3x_2^2+0.5x_1x_2-3x_1-5x_2+2$.
- Начальная точка: $(2,-2)$.
- Необходимая точность вычислений: $\varepsilon=0.0001$.

## Ручные расчеты

### Метод покоординатного спуска

Алгоритм поиска экстремума:

- Выбираем начальную точку для поиска $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)^T$.
- Фиксируем значения $x_2^k, \ldots, x_n^k$ и проводим минимизацию по переменной $x_1$. Получаем $\left(x_1^{k+1} x_2^k, \ldots, x_n^k\right)^T$.
- Аналогично повторяем предыдущий пункт для всех $x_i$, используя уже полученные значения.
- Далее в качестве начальной точки берём полученную $\left(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1}\right)^T$ и переходим к пункту 1.
- Продолжаем данный алгоритм, пока не будет выполнено $\left|f\left(x^{k+1}\right) - f\left(x^k\right)\right| \le \varepsilon$ или $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| \le \varepsilon$.

Поиск методом покоординатного спуска (3 итерации):

Первая итерация:

1. Начальная точка $\left(x_1^0, x_2^0\right) = (2, -2)$.
2. Фиксируем $x_2^0 = -2$. Тогда $f\left(x_1, -2\right) = 7x_1^2 + 12 - x_1 - 3x_1 + 10 + 2 = 7x_1^2 - 4x_1 + 24$.
3. Для поиска минимума найдем производную $f'\left(x_1, -2\right) = 14x_1 - 4 = 0$. Тогда $x_1 = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \approx 0.286$.
4. Находим значения $f(2, -2) = 28 - 8 + 24 = 44$ и $f(0.286, -2) = 7 \cdot 0.286^2 - 4 \cdot 0.286 + 24 \approx 23.429$. Так как $f(0.286, -2) < f(2, -2)$, то фиксируем значение $x_1^1 = 0.286$. Тогда $f\left(0.286, x_2\right) = 7 \cdot 0.286^2 + 3x_2^2 + 0.5 \cdot 0.286x_2 - 3 \cdot 0.286 - 5x_2 + 2 = 3x_2^2 - 4.857x_2 + 1.715$.

5. Для поиска минимума найдем производную $f'(0.286, x_2)=6x_2-4.857=0$. Тогда $x_2 \approx 0.810$.

6. Находим значения $f(0.286,-2)=3\cdot -2^2-4.857\cdot -2+1.715 \approx 23.429$ и $f(0.286, 0.810)=3\cdot 0.810^2-4.857\cdot 0.810+1.715 \approx -0.251$. Так как $f(0.286, 0.810)<f(0.286,-2)$, то фиксируем значение $x_2^1=0.810$.

Вторая итерация:

1. Начальная точка $(x_1^1, x_2^1)=(0.286, 0.810)$.

2. Фиксируем $x_2^1=0.810$. Тогда $f(x_1, 0.810)=7x_1^2+3\cdot 0.810^2+0.5x_1\cdot 0.810-3x_1-5\cdot 0.810+2 \approx 7x_1^2-2.595x_1-0.082$.

3. Для поиска минимума найдем производную $f'(x_1, 0.810)=14x_1-2.595=0$. Тогда $x_1 \approx 0.185$.

4. Находим значения $f(0.286, 0.810) \approx -0.251$ и $f(0.185, 0.810)7\cdot 0.185^2-2.595\cdot 0.185-0.082 \approx -0.3222$. Так как $f(0.185, 0.810)<f(0.286, 0.810)$, то фиксируем значение $x_1^2=0.185$. Тогда $f(0.185, x_2)=7\cdot 0.185^2+3x_2^2+0.5\cdot 0.185x_2-3\cdot 0.185-5x_2+2 \approx 3x_2^2-4.908x_2+1.685$.

5. Для поиска минимума найдем производную $f'(0.185, x_2)=6x_2-4.908=0$. Тогда $x_2 \approx 0.818$.

6. Находим значения $f(0.185, 0.810) \approx -0.3222$ и $f(0.185, 0.818)=3\cdot 0.818^2-4.908\cdot 0.818+1.685 \approx -0.3223$. Так как $f(0.185, 0.818)<f(0.185, 0.810)$, то фиксируем значение $x_2^2=0.818$.

Третья итерация:

1. Начальная точка $(x_1^2, x_2^2)=(0.185, 0.818)$.

2. Фиксируем $x_2^2 = 0.818$. Тогда $f(x_1, 0.818) = 7x_1^2 + 3 \cdot 0.818^2 + 0.5x_1 \cdot 0.818 - 3x_1 - 5 \cdot 0.818 + 2 \approx 7x_1^2 - 2.591x_1 - 0.083$.

3. Для поиска минимума найдем производную $f'(x_1, 0.818) = 14x_1 - 2.591 = 0$. Тогда $x_1 \approx 0.1851$.

4. Находим значения $f(0.185, 0.818) \approx -0.3223$ и $f(0.1851, 0.818) = 7 \cdot 0.1851^2 - 2.591 \cdot 0.1851 - 0.083 \approx -0.3224$. Так как $f(0.1851, 0.818) < f(0.185, 0.818)$, то фиксируем значение $x_1^3 = 0.1851$. Тогда $f(0.1851, x_2) = 7 \cdot 0.1851^2 + 3x_2^2 + 0.5 \cdot 0.1851x_2 - 3 \cdot 0.1851 - 5x_2 + 2 \approx 3x_2^2 - 4.9075x_2 + 1.6845$.

5. Для поиска минимума найдем производную $f'(0.1851, x_2) = 6x_2 - 4.9075 = 0$. Тогда $x_2 \approx 0.8179$.

6. Находим значения $f(0.1851, 0.818) \approx -0.3223880$ и $f(0.1851, 0.8179) = 3 \cdot 0.8179^2 - 4.9075 \cdot 0.8179 + 1.6845 \approx -0.3223881$. Так как $f(0.1851, 0.8179) < f(0.1851, 0.818)$, то фиксируем значение $x_2^3 = 0.8179$.

Итоговые значения: $x_1 = 0.1851$, $x_2 = 0.8179$, $f(x_1, x_2) \approx -0.3223881$.

**Метод градиентного спуска**

Алгоритм поиска экстремума:

- Выбираем начальную точку для поиска $M_0\left(x^{(0)}\right)$, $x^{(0)}=\left\{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right\}$.
- Находим градиент функции в выбранной точке.
- Вычисляем $x^{(1)}=x^{(0)}-\alpha^{(1)}\cdot grad\, f\left(M_0\right)$.
- Если $f\left(x^{(k)}\right)>f\left(x^{(k-1)}\right)$, то уменьшаем шаг $\alpha^{(k)}$.
- Переходим к пункту 1.
- Продолжаем данный алгоритм, пока не будет выполнено $\left|f\left(x^{k+1}\right)-f\left(x^k\right)\right|\leq\varepsilon$.

Поиск методом градиентного спуска (3 итерации):

Первая итерация:

1. Начальная точка $\left(x_1^0, x_2^0\right)=(2,-2)$. В качестве шага возьмем $\alpha^{(0)}=0.1$.
2. Находим градиент функции $grad\, f\left(x_1, x_2\right)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1, x_2\right)\cdot\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1, x_2\right)\cdot\vec{j}$.

   Найдем производные: $\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1, x_2\right)=14x_1+0.5x_2-3$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1, x_2\right)=6x_2+0.5x_1-5$.

   Тогда $grad\, f\left(x_1, x_2\right)=\left(14x_1+0.5x_2-3\right)\cdot\vec{i}+\left(6x_2+0.5x_1-5\right)\cdot\vec{j}$. Найдем градиент функции в выбранной точке: $grad\, f(2,-2)=(14\cdot(2)+0.5\cdot(-2)-3)\cdot\vec{i}+(6\cdot(-2)+0.5\cdot(2)-5)\cdot\vec{j}=24\vec{i}+(-16)\vec{j}$.
3. Вычислим $x^{(1)}=(2-2.4)\vec{i}+(-2+1.6)\vec{j}=(-0.4)\vec{i}+(-0.4)\vec{j}$.
4. $f\left(x^{(0)}\right)=44$, $f\left(x^{(1)}\right)=6.88$, $f\left(x^{(1)}\right)<f\left(x^{(0)}\right)$.

Вторая итерация:

1. Начальная точка $\left(x_1^1, x_2^1\right)=(-0.4,-0.4)$. В качестве шага возьмем $\alpha^{(1)}=0.1$.

2. Найдем градиент функции в выбранной точке: $grad\, f(-0.4,-0.4)=(14\cdot(-0.4)+0.5\cdot(-0.4)-3)\cdot\vec{i}+(6\cdot(-0.4)+0.5\cdot(-0.4)-5)\cdot\vec{j}=$ $=(-8.8)\vec{i}+(-7.6)\vec{j}$.

3. Вычислим $x^{(2)}=(-0.4+0.88)\vec{i}+(-0.4+0.76)\vec{j}=(0.48)\vec{i}+(0.36)\vec{j}$.

4. $f\left(x^{(1)}\right)=6.88$, $f\left(x^{(2)}\right)=0.848$, $f\left(x^{(2)}\right)<f\left(x^{(1)}\right)$.

Третья итерация:

1. Начальная точка $\left(x_1^2, x_2^2\right)=(0.48,0.36)$. В качестве шага возьмем $\alpha^{(2)}=0.1$.

2. Найдем градиент функции в выбранной точке: $grad\, f(0.48,0.36)=(14\cdot(0.48)+0.5\cdot(0.36)-3)\cdot\vec{i}+(6\cdot(0.36)+0.5\cdot(0.48)-5)\cdot\vec{j}=$ $=(3.9)\vec{i}+(-2.6)\vec{j}$.

3. Вычислим $x^{(3)}=(0.48-0.39)\vec{i}+(0.36+0.26)\vec{j}=(0.09)\vec{i}+(0.62)\vec{j}$.

4. $f\left(x^{(2)}\right)=0.848$, $f\left(x^{(3)}\right)\approx-0.1322$, $f\left(x^{(3)}\right)<f\left(x^{(2)}\right)$.

Итоговые значения: $x_1=0.09$, $x_2=0.62$, $f\left(x_1, x_2\right)\approx-0.1322$.

**Метод наискорейшего спуска**

Алгоритм поиска экстремума:

- Выбираем начальную точку для поиска $M_0(x^{(0)})$, $x^{(0)}=\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\}$.
- Находим градиент функции в выбранной точке.
- Вычисляем $x^{(1)}=x^{(0)}-h_1 \cdot grad\, f\,(M_0)$.
- Находим такое $h_1$, при котором $f(x^{(1)})$ минимальна.
- Переходим к пункту 1.
- Продолжаем данный алгоритм, пока не будет выполнено $\|grad\, f\,(x^{(k)})\|<\varepsilon$.

Поиск методом наискорейшего спуска (3 итерации):

Первая итерация:

1. Начальная точка $(x_1^0, x_2^0)=(2,-2)$.
2. Находим градиент функции $grad\, f(x_1, x_2)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)\cdot\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\cdot\vec{j}$.

   Найдем производные: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)=14x_1+0.5x_2-3$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)=6x_2+0.5x_1-5$.

   Тогда $grad\, f(x_1, x_2)=(14x_1+0.5x_2-3)\cdot\vec{i}+(6x_2+0.5x_1-5)\cdot\vec{j}$. Найдем градиент функции в выбранной точке: $grad\, f(2,-2)=(14\cdot(2)+0.5\cdot(-2)-3)\cdot\vec{i}+(6\cdot(-2)+0.5\cdot(2)-5)\cdot\vec{j}=24\vec{i}+(-16)\vec{j}$.
3. Вычислим $x^{(1)}=(2-24h_1)\vec{i}+(-2+16h_1)\vec{j}$.
4. Найдем минимум функции

   $f(h_1)=7(2-24h_1)^2+3(-2+16h_1)^2+0.5(2-24h_1)(-2+16h_1)-3(2-24h_1)-5(-2+16h_1)+2=$

   $=4608h_1^2-832h_1+44$. Найдем производную: $f'(h_1)=9216h_1-832=0$. Тогда

$h_1 \approx 0.09$. Найдем вторую производную: $f''(h_1) = 9216 > 0$, следовательно $x^{(1)} = (2 - 24 \cdot 0.09)\vec{i} + (-2 + 16 \cdot 0.09)\vec{j} = (-0.16)\vec{i} + (-0.56)\vec{j}$ – точка минимума.

Вторая итерация:

1. Начальная точка $(x_1^1, x_2^1) = (-0.16, -0.56)$.

2. Найдем градиент функции в выбранной точке: $grad\, f(-0.16, -0.56) = (14 \cdot (-0.16) + 0.5 \cdot (-0.56) - 3) \cdot \vec{i} + (6 \cdot (-0.56) + 0.5 \cdot (-0.16) - 5) \cdot \vec{j} =$
$= (-5.52)\vec{i} + (-8.44)\vec{j}$.

3. Вычислим $x^{(2)} = (-0.16 + 5.52 h_2)\vec{i} + (-0.56 + 8.44 h_2)\vec{j}$.

4. Найдем минимум функции
$f(h_2) = 7(-0.16 + 5.52 h_2)^2 + 3(-0.56 + 8.44 h_2)^2 + 0.5(-0.16 + 5.52 h_2)(-0.56 + 8.44 h_2)$
$-3(-0.16 + 5.52 h_2) - 5(-0.56 + 8.44 h_2) + 2 = 450.288 h_2^2 - 101.704 h_2 + 6.4448$. Найдем производную: $f'(h_2) = 900.576 h_2 - 101.704 = 0$. Тогда $h_2 \approx 0{,}113$. Найдем вторую производную: $f''(h_2) = 900.576 > 0$, следовательно
$x^{(2)} = (-0.16 + 5.52 \cdot 0.113)\vec{i} + (-0.56 + 8.44 \cdot 0.113)\vec{j} \approx (0.4638)\vec{i} + (0.3937)\vec{j}$ – точка минимума.

Третья итерация:

1. Начальная точка $(x_1^2, x_2^2) = (0.4638, 0.3937)$.

2. Найдем градиент функции в выбранной точке: $grad\, f(0.4638, 0.3937) = (14 \cdot (0.4638) + 0.5 \cdot (0.3937) - 3) \cdot \vec{i} + (6 \cdot (0.3937) + 0.5 \cdot (0.4638) - 5) \cdot \vec{j} \approx$
$\approx (3.6901)\vec{i} + (-2.4059)\vec{j}$.

3. Вычислим $x^{(3)} = (0.4638 - 3.6901 h_3)\vec{i} + (0.3937 + 2.4059 h_3)\vec{j}$.

4. Найдем минимум функции $f(h_3) = 7(0.4638 - 3.6901 h_3)^2 + 3(0.3937 + 2.4059 h_3)^2$
$+0.5(0.4638 - 3.6901 h_3)(0.3937 + 2.4059 h_3) - 3(0.4638 - 3.6901 h_3)$

$-5(0.3937+2.4059h_3)+2=108.2428h_3^2-19.4009h_3+0.7021$. Найдем производную: $f'(h_3)=216.4856h_3-19.4009=0$. Тогда $h_3\approx 0.0896$. Найдем вторую производную: $f''(h_3)=216.4856>0$, следовательно $x^{(3)}=(0.4638-3.6901\cdot 0.0896)\vec{i}+(0.3937+2.4059\cdot 0.0896)\vec{j}\approx(0.1332)\vec{i}+(0.6093)\vec{j}$ – точка минимума.

Итоговые значения: $x_1=0.1332$, $x_2=0.6093$, $f(x_1,x_2)\approx -0.1676$.

## Код программы

Полный исходный код приложения:

https://github.com/vvlaads/vvlaads/tree/master/Optimization%20methods/Lab4

## Результат работы программы

```
Метод покоординатного спуска
Значение функции: -0.3223880543142217
Найденный вектор: 0.18509963111877437 0.8179268375396724
Количество итераций: 3
---- ---- ---- ---- ----
Метод градиентного спуска
Значение функции: -0.3223845578039164
Найденный вектор: 0.18466666015625 0.8170612109375
Количество итераций: 9
---- ---- ---- ---- ----
Метод наискорейшего спуска
Значение функции: -0.3223880595360171
Найденный вектор: 0.18507812936980497 0.817904996487789
Количество итераций: 15
---- ---- ---- ---- ----
```

Рисунок 1: Результат работы программы

## Заключение

В ходе этой работы я изучил методы покоординатного спуска, градиентного спуска и наискорейшего спуска и реализовал их программно..