第一章　复数与复函数

1.1　复数及其运算

第一周第一讲第一小节-> 第一周第二讲第一小节

数学史复数源于一元三次方程的求解。一元三次方程（x, y, z 是未知量）：

- 九章算术中有开立方操作，可以解决$x^3 = a$ 类型的方程。
- 唐代王孝通在《缉古算经》（《缉古算术》）中收录了$x^3 + ax^2 + bx = c$ 的数值解法，这方程源于实际问题。
- 1247 年，南宋秦久韶的《数学九章》给出了一般高次方程的数值解法。欧洲人 Paolo Ruffini 在 600 年后重新发现了这一方法。
- 11 世纪波斯数学家 Omar Khayyam（海亚姆）发现一元三次方程通常有 3 个根，并对一元三次方程进行了分类等工作，但没有导出求根公式。Khayyam 在天文、几何等方面也有贡献。
- 印度人等也对一元三次方程有所研究。
- 意大利 Ferro（费罗）、Tartaglia、Cardano.
- Bombelli 仔细研究了 Cardano 公式，发现其中不可避免地出现复数。Bombelli 创造了复数。

考虑

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0.$$

让$x = y - b/(3a)$, 方程化为

$$ay^3 + py + q = 0.$$

注意到

$$\begin{aligned}y^3+u^3+v^3-3yuv &= (y+u+v)(y^2+u^2+v^2-yu-yv-uv)\\ &= (y+u+v)(y+\omega u+\omega^2 v)(y+\omega^2 u+\omega v),\end{aligned}$$

其中$\omega=(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})/2$, $\omega=(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})/2$, 只需再用 Vièta 定理解关于$u,v$的方程组

$$u^3+v^3=q,-3uv=p$$

即可。最终结果为

$$y_1=u+v,y_2=\omega u+\omega^2 v,y_3=\omega^2 u+\omega v,$$

其中

$$u,v=\sqrt[3]{-q/2\pm\sqrt{\Delta}},\Delta=(q/2)^2+(p/3)^3.$$

Δ 称为一元三次方程的判别式：

- $\Delta>0$ 时，$y_1\in\mathbb{R}$, $y_{2,3}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.
- $\Delta<0$ 时，由$\overline{u}=v$ 知道$y_1\in\mathbb{R}$, 由$\overline{\omega u}=\omega^2 v$ 知道$y_2\in\mathbb{R}$, 同理$y_3\in\mathbb{R}$.
- $\Delta=0$ 时$u=v$, 有重根。

例（Bombelli）

$$x^3-15x-4=0.$$

试根：从$\pm1,\pm2,\pm4$ 中试出4 是根，多项式除法之后得到答案$4,-2\pm\sqrt{3}$.
求根公式：$p=-15,q=-4$, $\Delta=-121$, $u,v=\sqrt[3]{2\pm11\mathrm{i}}=2\pm i$, 之后得到根$4,-2\pm\sqrt{3}$.

例. 让$y=\cos20^\circ$, 三倍角公式导致$4y^3-3y=0.5$, 再让$z=2y$ 得到$z^3-3z-1=0$. $p=-3,q=-1$, $\Delta=-3/4$, $u,v=\sqrt[3]{0.5\pm\mathrm{i}0.5\sqrt{3}}$. 几何上看出$u,v=\cos20^\circ\pm\mathrm{i}\sin20^\circ$. z 的 3 个根为$z_1=2\cos20^\circ,z_2=2\cos140^\circ,z_3=2\cos260^\circ$.

问题：能否只在$\mathbb{R}$ 中运算得到上例中的三个根？
注意到$\cos140^\circ=-\cos40^\circ=-2(\cos20^\circ)^2+1$, $z_{2,3}$ 都是z_1 的多项式。取$F=\mathbb{Q},E=\mathbb{Q}[z_1]$, E 就是关于z 的多项式z^3-3z-1 的分裂域，$\mathrm{Gal}(E/F)=\mathbb{Z}_3$. 可能需要修改的 Galios 理论，根式扩张但不能含有单位根，只能对$\geqslant0$ 的数开方。不再深入。

不限于根式？

对于有三个实根的一元三次方程$y^3+py+q=0$, $\Delta=(q/2)^2+(p/3)^3<0$. 取$\lambda=\pm\sqrt{-4p/3}\in\mathbb{R}$, 作尺度变换$y=\lambda z$ 得到$4z^3-3z=-4q/\lambda^3:=\gamma$, 有$|\gamma|<1$. 令$\gamma=\cos\theta$, 得到$z=\cos(\theta+(2k\pi)/3), k=0,1,2$.

对一元四次方程进行变形，可以归结为一元三次方程问题。

一元五次方程可以用椭圆函数求解。

$$\arcsin x=\int_0^x(1-t^2)^{-1/2}dt$$

椭圆积分

$$\int P(x)^{-1/2}dx,$$

P 是三次或四次多项式。椭圆积分的反函数是椭圆函数，因此椭圆函数可以看作三角函数的推广。

更高次方程：引入代数函数。

1.2 复平面与 Riemann 球

第一周第二讲第一小节->

$\mathbb{C}$ 上的度量、拓扑同$\mathbb{R}^2$.

设$E\subseteq\mathbb{C}$. E 中的一条道路是指一个连续映射$\gamma\colon[0,1]\to E$. 称E 道路连通，如果$\forall p,q\in E$, 存在E 中的道路γ 满足$\gamma(0)=p,\gamma(1)=q$.

定理：对于$\mathbb{C}$ 中的开集，连通和道路连通等价。

定义：连通的开集叫作区域，区域的闭包（区域并上它的边界）叫作闭区域。

定理. 设$D\subseteq\mathbb{C}$ 是区域，$p,q\in D$, 那么存在分段线性道路$\gamma\colon[0,1]\to D$ 使得$\gamma(0)=p,\gamma(1)=q$. γ 分段线性是指，存在对区间$[0,1]$ 的分划$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=1$ 和常数$z_{i,0},z_{i,1},i=1,2,\ldots,n$ 使得$\gamma(t)=z_{i,0}+z_{i,1}t,\forall t\in[t_{i-1},t_i]$. **证明.** 取连续函数$\tilde\gamma\colon[0,1]\to D$ 满足$\tilde\gamma(0)=p,\tilde\gamma(1)=q$, 那么$\Gamma=\tilde\gamma([0,1])$ 是紧集，因此是闭集。因为闭集$\mathbb{C}\setminus D$ 与Γ 不相交，所以有$\varepsilon\coloneqq d(\mathbb{C}\setminus D,\Gamma)>0$. 设$\tilde\gamma(t)=\tilde x(t)+\mathrm{i}\tilde y(t)$, $\tilde x$, $\tilde y\in C([0,1],realset)$. 用一致连续性，存在$\delta>0$, 使得$t',t''\in[0,1]$ 时有$\tilde x(t')-\tilde x(t'')<\varepsilon$, $\tilde y(t')-\tilde y(t'')<\varepsilon$. 将$[0,1]$ 区间n 等分，其中$n^{-1}<\delta$, 并在第k 个小区间上用直线段连接$\tilde\gamma((k-1)/n)$ 和$\tilde\gamma(k/n)$ 得到$\gamma(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$. 现在对于$t\in[t_{k-1},t_k]$, 估

计

$$\begin{aligned}|x(t)-\tilde{x}(t)| &\leqslant |x(t)-\tilde{x}(t_k)|+|\tilde{x}(t_k)-\tilde{x}(t)|\\ &\leqslant |x(t_{k-1})-\tilde{x}(t_k)|+\varepsilon\\ &= |\tilde{x}(t_{k-1})-\tilde{x}(t_k)|+\varepsilon<2\varepsilon.\end{aligned}$$

同理$|y(t)-\tilde{y}(t)|<2\varepsilon$. 于是$|\gamma(t)-\tilde{\gamma}(t)|<C\varepsilon$. 调整常数让$|\gamma(t)-\tilde{\gamma}(t)|<\varepsilon$, 并由$\varepsilon$ 的定义知道折线落在D 中。

定义（可求长曲线）：设曲线$\gamma\colon [0,1]\to\mathbb{C}$. 对任意分划$P\colon 0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=1$, 定义$L(\gamma,P)\coloneqq\sum_{k=1}^{n}|\gamma(t_{k-1})-\gamma(t_k)|$. 若$L(\gamma)\coloneqq\sup\{L(\gamma,P)\colon P\text{是对}[0,1]\text{的分划}\}<+\infty$, 那么称$\gamma$ 是可求长的，长度是$L(\gamma)$.

若γ 分段光滑，那么γ 可求长，且$L(\gamma)=\int_0^1|\gamma'(t)|dt=\int_0^1\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$.

实分析：γ 可求长$\Leftrightarrow$ x,y 有界变差。

曲线积分要求曲线可求长。后面会比较关注边界是可求长曲线的区域。

定理. (Jordan) 设$\gamma\colon[0,1]\to\mathbb{C}$ 是简单（不自交）闭（起点和终点相同）曲线，即$\gamma(t_1)=\gamma(t_2)\Leftrightarrow\{t_1,t_2\}=\{0,1\}$, 那么$\mathbb{C}\setminus\gamma$ 有两个连通分支，这两个连通分支都是开集，其中一个是有界的，称为γ 所围的区域的内部$\operatorname{Int}\gamma$，另一个是无界的，称为γ 所围的区域的外部$\operatorname{Ext}\gamma$.