第一章　复数与复函数

1.1　复数及其运算

数学史复数源于一元三次方程的求解。一元三次方程（x, y, z 是未知量）：

- 九章算术中有开立方操作，可以解决$x^3 = a$ 类型的方程。
- 唐代王孝通在《缉古算经》（《缉古算术》）中收录了$x^3 + ax^2 + bx = c$ 的数值解法，这方程源于实际问题。
- 1247 年，南宋秦久韶的《数学九章》给出了一般高次方程的数值解法。欧洲人 Paolo Ruffini 在 600 年后重新发现了这一方法。
- 11 世纪波斯数学家 Omar Khayyam（海亚姆）发现一元三次方程通常有 3 个根，并对一元三次方程进行了分类等工作，但没有导出求根公式。Khayyam 在天文、几何等方面也有贡献。
- 印度人等也对一元三次方程有所研究。
- 意大利 Ferro（费罗）、Tartaglia、Cardano.
- Bombelli 仔细研究了 Cardano 公式，发现其中不可避免地出现复数。Bombelli 创造了复数。

考虑

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0.$$

让$x = y - b/(3a)$, 方程化为

$$ay^3 + py + q = 0.$$

注意到

$$\begin{aligned}y^3+u^3+v^3-3yuv &= (y+u+v)(y^2+u^2+v^2-yu-yv-uv)\\ &= (y+u+v)(y+\omega u+\omega^2 v)(y+\omega^2 u+\omega v),\end{aligned}$$

其中$\omega=(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})/2$, $\omega=(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})/2$, 只需再用 Vièta 定理解关于$u,v$ 的方程组

$$u^3+v^3=q, -3uv=p$$

即可。最终结果为

$$y_1=u+v, y_2=\omega u+\omega^2 v, y_3=\omega^2 u+\omega v,$$

其中

$$u,v=\sqrt[3]{-q/2\pm\sqrt{\Delta}}, \Delta=(q/2)^2+(p/3)^3.$$

Δ 称为一元三次方程的判别式：

- $\Delta>0$ 时，$y_1\in\mathbb{R}$, $y_{2,3}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.
- $\Delta<0$ 时，由$\overline{u}=v$ 知道$y_1\in\mathbb{R}$, 由$\overline{\omega u}=\omega^2 v$ 知道$y_2\in\mathbb{R}$, 同理$y_3\in\mathbb{R}$.
- $\Delta=0$ 时$u=v$, 有重根。

例（Bombelli）

$$x^3-15x-4=0.$$

试根：从$\pm1,\pm2,\pm4$ 中试出4 是根，多项式除法之后得到答案$4,-2\pm\sqrt{3}$.
求根公式：$p=-15, q=-4$, $\Delta=-121$, $u,v=\sqrt[3]{2\pm 11\mathrm{i}}=2\pm i$, 之后得到根$4,-2\pm\sqrt{3}$.

例. 让$y=\cos 20^\circ$, 三倍角公式导致$4y^3-3y=0.5$, 再让$z=2y$ 得到$z^3-3z-1=0$. $p=-3, q=-1$, $\Delta=-3/4$, $u,v=\sqrt[3]{0.5\pm\mathrm{i}0.5\sqrt{3}}$. 几何上看出$u,v=\cos 20^\circ\pm\mathrm{i}\sin 20^\circ$. z 的 3 个根为$z_1=2\cos 20^\circ, z_2=2\cos 140^\circ, z_3=2\cos 260^\circ$.

问题：能否只在$\mathbb{R}$ 中运算得到上例中的三个根？
注意到$\cos 140^\circ=-\cos 40^\circ=-2(\cos 20^\circ)^2+1$, $z_{2,3}$ 都是z_1 的多项式。取$F=\mathbb{Q}, E=\mathbb{Q}[z_1]$, E 就是关于z 的多项式z^3-3z-1 的分裂域，$\mathrm{Gal}(E/F)=\mathbb{Z}_3$. 可能需要修改的 Galios 理论，根式扩张但不能含有单位根，只能对$\geqslant 0$ 的数开方。不再深入。

不限于根式？

对于有三个实根的一元三次方程$y^3+py+q=0$, $\Delta=(q/2)^2+(p/3)^3<0$. 取$\lambda=\pm\sqrt{-4p/3}\in\mathbb{R}$, 作尺度变换$y=\lambda z$ 得到$4z^3-3z=-4q/\lambda^3:=\gamma$, 有$|\gamma|<1$. 令$\gamma=\cos\theta$, 得到$z=\cos(\theta+(2k\pi)/3), k=0,1,2.$

对一元四次方程进行变形，可以归结为一元三次方程问题。

一元五次方程可以用椭圆函数求解。

$$\arcsin x=\int_0^x(1-t^2)^{-1/2}dt$$

椭圆积分

$$\int P(x)^{-1/2}dx,$$

P 是三次或四次多项式。椭圆积分的反函数是椭圆函数，因此椭圆函数可以看作三角函数的推广。

更高次方程：引入代数函数。