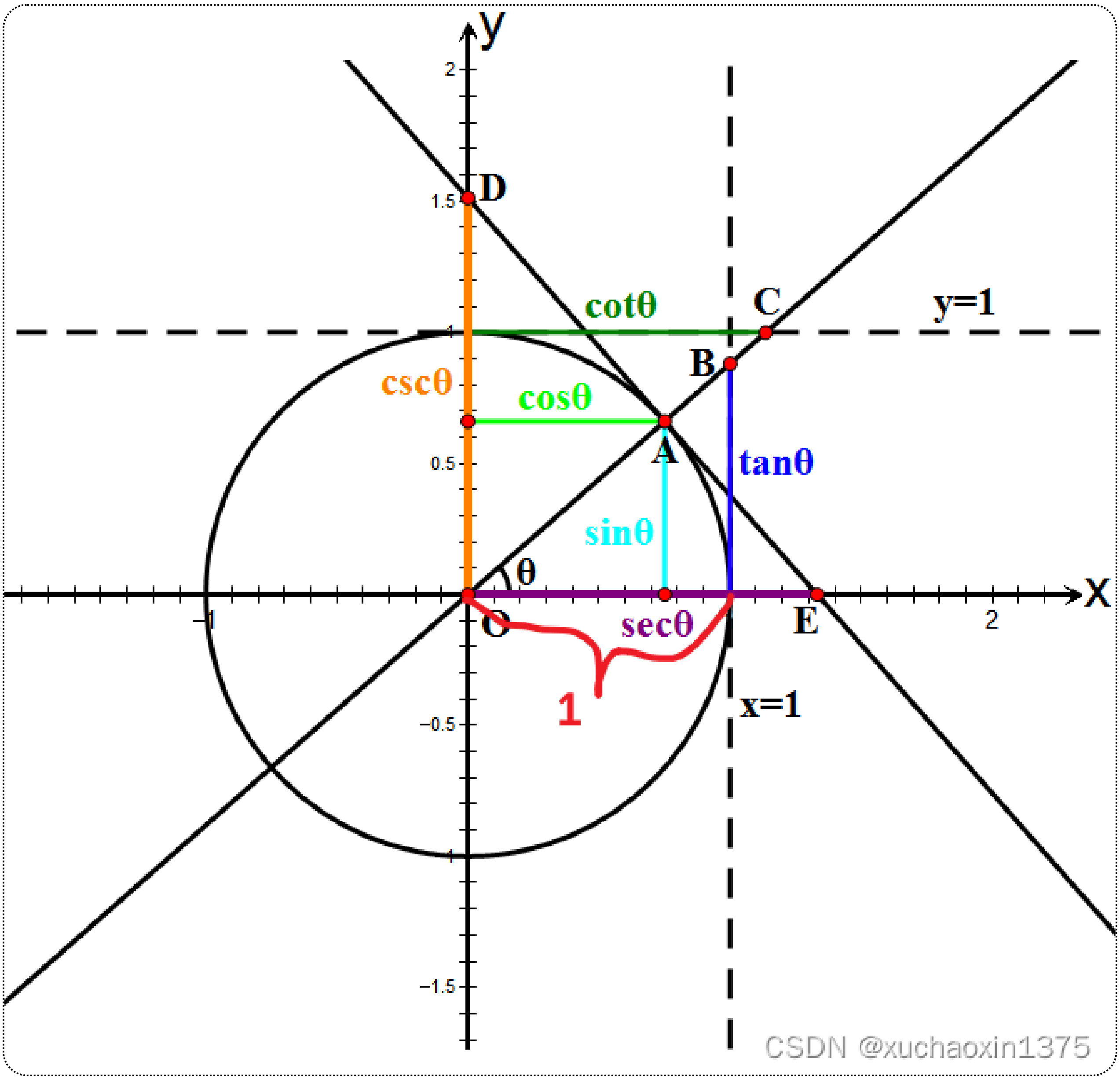
三角函数 h2



- 两脚和公式

Sum

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y,$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,$$
$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}.$$

Difference

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y,$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,$$
$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}.$$

$$tan(x+y)=\frac{sin(x+y)}{cos(x+y)}=\frac{sin(x)cos(y)+cos(x)sin(y)}{cos(x)cos(y)-sin(x)sin(y)}\xlongequal{分式同除以cos(x)cos(y)}\frac{tanx+tany}{1-tanxtany}$$

$$令y=x,得到倍角正切:tan(2x)=\frac{2tanx}{1-tan^2x}$$

倍角公式 h3

- $$\begin{aligned}sin2x&=2sinxcosx\\&=\frac{2sinxcosx}{sin^2+cos^2x}\xlongequal{分式上下同除以cos^2x}\frac{2tanx}{tan^2x+1}\\cos2x&=cos^2x-sin^2x=1-2sin^2x=2cos^2x-1\\&=\frac{cox^2x-sin^2x}{sin^2x+cos^2x}=\frac{1-tan^2x}{tan^2x+1}\\tan2x&=\frac{sin2x}{cos2x}=\frac{2sinxcosx}{cos^2x-sin^2x}=\frac{\frac{2sinxcosx}{cos^2x}}{\frac{cos^2x}{cos^2x}-\frac{sin^2x}{cos^2x}}=\frac{2tanx}{1-tan^2x}\end{aligned}$$

降幂(升角)公式 h3

> 积分公式的推导中使用的比较多

1. $sin^2x=\frac{1}{2}(1-cos2x)$
2. $cos^2x=\frac{1}{2}(1+cos2x)$
3. $2sin^2\frac{x}{2}=1-cosx$

4. $2cos^2\frac{x}{2}=1+cosx$

5. $sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1-cosx)$

6. $cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1+cosx)$

7. $sinxcosx=\frac{1}{2}sin2x$

8. $sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}sinx$

9.
$$\begin{aligned}
tan\frac{x}{2} &= \frac{sin(\frac{x}{2})}{cox(\frac{x}{2})} \\
&= 分式上下同时乘以sin(\frac{x}{2}) \\
&= \frac{\frac{1}{2}(1-cosx)}{\frac{1}{2}sinx} \\
&= \frac{1-cosx}{sinx} \\
&= cscx-cotx
\end{aligned}$$

降角升幂 h3

- $1-cosx=2sin^2\frac{x}{2}$
- $1+cosx=2cos^2\frac{x}{2}$

相关导数&积分 h3

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x+C$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x+C$
$\tan x$	$\sec^2 x=1+\tan^2 x$	$-\ln\|\cos x\|+C$
$\csc x$	$-\csc x\cot x$	$-\ln\|\csc x+\cot x\|+C$
$\sec x$	$\sec x\tan x$	$\ln\|\sec x+\tan x\|+C$
$\cot x$	$-\csc^2 x=-1-\cot^2 x$	$\ln\|\sin x\|+C$

阶乘 h2

$$
\begin{array}{ll}
0! = 1 & 4! = 24 \\
1! = 1 & 5! = 120 \\
2! = 2 & 6! = 720 \\
3! = 6 & 7! = 5040
\end{array}
$$

排列组合 h2

$$
\bigstar\ n\text{选}m\text{排列数}
$$

$$
\begin{aligned}
P_n^m &= n(n-1)\cdots(n-(m-1)) \\
&= n(n-1)\cdots(n-m+1) \\
&= \prod_{k=0}^{m-1}(n-k) \\
&= \frac{n!}{(n-m)!} \\
C_n^m &= \frac{1}{m!}\frac{n!}{(n-m)!}
\end{aligned}
$$

- 关于(连续逐项的)累加和累乘的总项数
  - $$\prod_{k=d}^{k=u} exp$$
    $$\sum_{k=d}^{k=u} exp$$
    $$\text{总项数为上界与下界之差}+1,\text{即}:$$
    $$items = d - u + 1$$
    某些情况下,我们首先知道的是$items$,以及$d\&u$中的一个,就可以利用上面等式进行计算
    注意,无论表达式exp是怎样的,上述等式总是成立

重要极限 h2

$$
\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} = 1
$$

$$
\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e
$$

- 更有用的推广形式:

$$\text{通常}\phi(x) \to 0\text{和}\begin{cases} x \to 0 \\ x \to \infty \end{cases}\text{中的一个等价}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x} = \lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{-(-x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1-\frac{1}{x})^{-x}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{-x}} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^{bx} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^{\frac{x}{a}ab} = \lim_{x\to\infty}\left((1+\frac{a}{x})^{\frac{x}{a}}\right)^{ab} = e^{ab}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^{bx+c} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^{bx}\cdot\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^{c} = e^{ab}\cdot 1^c = e^{ab}\cdot 1 = e^{ab}$$

- 更一般的:(对于1^∞型的极限)
  - > 有时,需要使用分离常数的技巧讲函数的形式转换为$(1+\alpha(x))^{\beta(x)}$的形式,例如: $(\frac{x+1}{x-3})^x$
  - 判断指定过程的极限时1^∞型的
  - 计算 $A = lim(\alpha(x)\beta(x))$
  - 得到结果$\lim f(x) = e^A$

$$\lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)} = e^A$$
$$= \lim(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}\alpha(x)\beta(x)}$$
$$= \lim(((1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}})^{\alpha(x)\beta(x)}$$
$$\text{记}A = \lim\alpha(x)\beta(x);$$
$$\text{则}\lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)} = e^A$$

> 上面的1^∞型极限都可以用e^A法来计算

- $$A_1 = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x}x = -1$$
  $$A_2 = \lim_{x\to\infty}\frac{a}{x}bx = ab$$
  $$A_3 = \lim_{x\to\infty}\frac{a}{x}(bx+c) = ab$$

对数函数的导数公式推导(导数定义极限法) h3

- $$f(x)=log_a x$$
$$f'(x)=(log_a x)'=\lim_{h\to 0}\frac{log_a(x+h)-log_a(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{log_a(\frac{x+h}{x})}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}log_a(x+hx)$$
$$=\lim_{h\to 0}log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}$$
$$记g(h)=log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}$$
$$(log_a x)'=\lim_{h\to 0}g(h);g(h)的自变量是h(g(h)将x看作常量)$$
$$第二重要极限的推广公式得到:A=\frac{h}{x}\frac{1}{h}=\frac{1}{x}$$
$$所以对于u=\phi(h)=(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}};$$
$$u_0=\lim_{h\to 0}u=e^{\frac{1}{x}}$$
$$又由复合函数的极限运算法则:\lim_{h\to 0}g(h)=\lim_{u\to u_0}log_a u=log_a u_0=log_a e^{\frac{1}{x}}$$
$$根据换底公式得到(log_a x)'=log_a e^{\frac{1}{x}}=\frac{\ln e^{\frac{1}{x}}}{\ln a}=\frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$$

等价无穷小 h2

- [math*证明常用等价无穷小&泰勒展开&案例&代换*xuchaoxin1375的博客-CSDN博客_等价无穷小替换公式证明]

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1,$$
$$(1+x)^a-1\sim ax,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad a^x-1\sim x\ln a,$$
$$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3,\quad \tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3,\quad x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2,$$
$$\arcsin x-x\sim\frac{1}{6}x^3,\quad x-\arctan x\sim\frac{1}{3}x^3.$$

代换原则 h3

- 总的来说,代换之后,不可以相互抵消(产生最高阶无穷小0)

(1) 乘除关系可以换

若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$,则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

(2) 加减关系在一定条件下可以换

若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$,且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1$,则 $\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$.

若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$,且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq -1$,则 $\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$.

微分导数 h2

1. 基本初等函数的导数公式

(1) $(C)' = 0$;

(2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$;

(3) $(a^x)' = a^x \ln a$;

(4) $(e^x)' = e^x$;

(5) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;

(6) $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$;

(7) $(\sin x)' = \cos x$;

(8) $(\cos x)' = -\sin x$;

(9) $(\tan x)' = \sec^2 x$;

(10) $(\cot x)' = -\csc^2 x$;

(11) $(\sec x)' = \sec x \tan x$;

(12) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$;

(13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(15) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

(16) $(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

高阶导数 h3

2. 常用的高阶导数公式

(1) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$;

(2) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$;

(3) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;

(4) $(uv)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$.

高阶导数的求法 [编辑]

一般来说，高阶导数的计算和导数一样，可以按照定义逐步求出。同时，高阶导数也有求导法则：

- $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(u \pm v) = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}u \pm \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}v$
- $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(Cu) = C\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}u$
- $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(u \cdot v) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k^n \dfrac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}u\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}v$（莱布尼兹公式）[2]:134

因此，可以利用已知的高阶导数求导法则，通过四则运算，变量代换等方法，求出n 阶导数。一些常见的有规律的高阶导数的公式如下

- $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^\alpha = x^{\alpha-n}\prod\limits_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)$
- $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\dfrac{1}{x} = (-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}$
- $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\ln x = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$

- $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}e^x = e^x$
- $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}a^x = a^x \cdot \ln^n a \, (a > 0)$

- $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\sin(kx+b) = k^n \sin\left(kx + b + \dfrac{n\pi}{2}\right)$
- $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\cos(kx+b) = k^n \cos\left(kx + b + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

$$\frac{d^n}{dx}x^a = a(a-1)\cdots(a-(n-1))x^{a-n}$$

$$= x^{(a-n)}\prod_{k=0}^{n-1}(a-k)$$

令$a=-1$,可以得到$\dfrac{1}{x}$的n阶导数公式

$$\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$$
$$\frac{d^n}{dx^n}x^{-1} = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}} = (-1)^n n!\cdot x^{-(n+1)}$$
$$\frac{d^n}{dx^n}\ln x = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}x^{-1} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\cdot x^{-n}$$
$$\frac{d^n}{dx^n}\ln(x+a) = (\ln(x+a))^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(x+a)^{-n}$$

$$\begin{aligned}
&y = \ln(x+a)\\
&y^{(1)} = \frac{1}{x+a} = (x+a)^{-1}\\
&y^{(2)} = (-1)(x+a)^{-2}\\
&y^{(3)} = (-1)(-2)(x+a)^{-3}\\
&\vdots\cdots\\
&y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(x+a)^n\\
&notation:\ p = n-1\\
&y^{(n)} = (-1)^p p!(x+a)^n
\end{aligned}$$

- [Markdown Navigation - Visual Studio Marketplace]()

泰勒(maclaurin)展开 h2

- 通常的,基于通用的taylor(maclaurin)通项公式,记忆不同函数的展开通项即可
  - 考察的项数通常不会超过4项,因此k=1,2,3,4带入即可得到展开式的前几项,并且表达能力强
- e^x
  - $$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k + o(x^k)$$
- $sinx$

- $$\begin{aligned} sinx &= \sum_{i=0}^{m}\frac{sin(i\frac{\pi}{2})}{i!}x^i \xlongequal{过滤掉值为恒为0的项,重新编号k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2k+1}) \quad \bigstar(k\in N^*) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+o(x^{2k-1}) \quad 变体(k\in N^+) \\ &令p=2k-1;q=2k,则: \\ sinx &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^p}{p!}+o(x^p) \end{aligned}$$

- $cosx$
  - $$结合任意函数的maclaurin通项,可以看出,sin(0+k\frac{\pi}{2})的取值周期为 \\ T=[0,1,0,-1];将系数0对应的项过滤掉,得到符号周期T=[1,-1], \\ 因此,从\sum_{k=0}n的过程中,有入下规律$$

$$cosx=\sum_{i=0}^{m}\frac{cos(i\frac{\pi}{2})}{i!}x^i \xlongequal{过滤掉值为恒为0的项,重新编号k} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2k}) \\ 令q=2k,则:cosx=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{x^q}{q!}+o(x^q)$$

① $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$;

② $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$;

③ $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})$;

④ $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$;

⑤ $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$;

⑥ $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+o(x^n)$;

⑦ $(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$;

⑧ $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$.

- 分母是相应的幂指数的阶乘

  $$\begin{cases} sinx\text{的展开是}1,3,5,\ldots\text{次幂} \\ cosx\text{的展开是}0,2,4,\ldots\text{次幂} \end{cases}$$
- 第7个其实就是二项式定理啦
- 第八个比较麻烦,$actranx$的高阶导数不那么好求(数学归纳法)
  - 它的通项和sinx的展开式十分相似,除了分母少了一个阶乘号,几乎一样

几个常用的泰勒公式

(1) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$.

(2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n-1})$.

(3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$.

(4) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$.

(5) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.

几个常用的泰勒公式（拉格朗日型余项）

(1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$；

(2) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\dfrac{\cos(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$；

(3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\dfrac{\cos(\theta x)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$；

(4) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + (-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$；

(5) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n +$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}.$$

（以上 θ 满足 $\theta \in (0,1)$）

定理（罗尔定理） 如果 $f(x)$ 满足以下条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 内可导，

(3) $f(a) = f(b)$，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi) = 0$.

定理（拉格朗日中值定理） 如果 $f(x)$ 满足以下条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 内可导，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

推论 如果在 (a,b) 内恒有 $f'(x) = 0$，则在 (a,b) 内 $f(x)$ 为常数.

定理（柯西中值定理） 如果 $f(x)$，$F(x)$ 满足以下条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 内可导，且 $F'(x)$ 在 (a,b) 内每一点处均不为零，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

定理（皮亚诺型余项泰勒公式）

如果 $f(x)$ 在点 x_0 有直至 n 阶的导数，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n],$$

常称 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$ 为**皮亚诺型余项**. 若 $x_0=0$，则得**麦克劳林公式**：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+o(x^n).$$

积分 h2

(1) $\int 0\mathrm{d}x=C$；

(2) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq -1)$；

(3) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$；

(4) $\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C \quad (a>0,a\neq 1)$；

(5) $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$；

(6) $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$；

(7) $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$；

(8) $\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$；

(9) $\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$；

(10) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$；

(11) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$；

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C$；

(13) $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C$；

(14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$；

(15) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$；

(16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$；

(17) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$；

(18) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$；

(19) $\int \sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$；

(20) $\int \csc x\mathrm{d}x=-\ln|\csc x+\cot x|+C$.

$$\int tanxdx=\ln|secx|+C$$

$$\int cotxdx=-\ln|cscx|+C=\ln|sinx|+C$$