Ćwiczenie nr 1
Układy dyskretne — zagadnienie dyskretyzacji

Dominik Sierociuk

OKNO, Modelowanie i Identyfikacja Systemów Dynamicznych

1 Układy dyskretne i dyskretyzacja

Stosowanie komputerów w sterowaniu czy przetwarzaniu sygnałów wymusza dyskretyzację sygnałów rzeczywistych.

Rozwój układów elektronicznych, a także powszechność użycia komputerów oraz mikrokontrolerów wymusiły powszechność stosowania techniki cyfrowej, w której wykorzystuje się ***sygnały dyskretne***. W związku z tym, że komputery coraz częściej wykorzystywane są do sterowania procesami ciągłymi, istnieje konieczność integracji techniki cyfrowej z obiektem (procesem) sterowania, który prawie zawsze ma charakter ciągły.

Przetwarzanie ciągłego sygnału analogowego $f(t)$ na sygnał cyfrowy polega na dyskretyzacji sygnału w czasie — jego ***próbkowaniu***, dyskretyzacji wartości sygnału — ***kwantowaniu***, oraz na ***kodowaniu*** uzyskanego sygnału dyskretnego. Tak jak do opisu ciągłych układów dynamicznych bardzo wygodnym narzędziem okazała się transformata Laplace'a, tak dla układów dyskretnych będzie to transformata $\mathcal{Z}$.

1.1 Przekształcenie $\mathcal{Z}$

Próbkowanie (idealne) sygnału ciągłego $f(t)$ za pomocą idealnego impulsatora może być rozumiane jako iloczym sygnału ciągłego i szeregu impulsów Diraca oddalonych od siebie w odstępie okresu próbkowania T:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT),$$

którego transformata Laplace'a jest

$$f^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-skT}. \tag{1}$$

Podstawiając w (1) $z = e^{sT}$ otrzymujemy

$$\boxed{F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k},}$$

co wyraża ***transformatę*** $\mathcal{Z}$ funkci $f(kT)$.

Przykład 1. Znaleźć transformatę $\mathcal{Z}$ funkcji liniowej $f(t) = e^{-at}$.

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT}z^{-k} = 1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2} + e^{-3aT}z^{-3} + \cdots) \\ &= \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-aT}}. \end{aligned}$$

Czyli

$$F(z) = \frac{z}{z-e^{-aT}}.$$

Przykład 2. Znaleźć transformatę $\mathcal{Z}$ funkcji przesuniętej w czasie $f(t+nT)$. Obliczmy

$$\mathcal{Z}\{f(t+nT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT+nT)z^{-k}.$$

Podstawiając nową zmienną

$$m = k+n$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} f(kT+nT)z^{-k} &= \sum_{m=n}^{\infty} f(mT)z^{n-m} = z^n \sum_{m=n}^{\infty} f(mT)z^{-m}\\ &= z^n \left(\sum_{m=0}^{\infty} f(mT)z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} f(mT)z^{-m}\right)\\ &= z^n F(z) - \sum_{m=0}^{n-1} f(mT)z^{n-m}.\end{aligned}$$

Przykładowo, dla $n=1$

$$\mathcal{Z}\{f(t+T)\} = zF(z) - z\sum_{m=0}^{0} f(mT)z^{-m} = zF(z) - zf(0).$$

1.2 Transmitancja dyskretna

Transmitancją dyskretną $G(z)$ jednowymiarowego układu dyskretnego nazywamy stosunek transformaty $\mathcal{Z}$ odpowiedzi $Y(z)$ do transformaty $\mathcal{Z}$ wymuszenia $U(z)$ tego układu przy zerowych warunkach początkowych

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}.$$

Transmitancję dyskretną można przedstawic w postaci ogólnej będącej ilorazem wielomianów wzgledem zmiennej z

$$G(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}. \tag{2}$$

W oparciu o transmitancję dyskretną $G(z)$ daną w postaci ogólnej przez (2) otrzymujemy następujące ***równanie różnicowe*** opisujące dynamikę układu dyskretnego

$$Y(z)\left(a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\right) = U(z)\left(b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0\right),$$

co w dziedzinie dyskretnej czasu odpowiada ***równaniu rekurencyjnemu***

$$a_n y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \cdots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = b_m u_{k+m} + b_{m-1}u_{k+m-1} + \cdots + b_1 u_{k+1} + b_0 u_k, \tag{3}$$

przy czym f_{k+j} oznacza wartość próbki sygnału f w chwili $(k+j)T$, tzn. $f_{k+j} = f((k+j)T)$. Z równania (3) można wyznaczyć wartość próbki sygnału y_{k+n}, tzn.

$$y_{k+n} = \frac{1}{a_n}\left(b_m u_{k+m} + b_{m-1}u_{k+m-1} + \cdots + b_1 u_{k+1} + b_0 u_k - a_{n-1}y_{k+n-1} - \cdots - a_1 y_{k+1} - a_0 y_k\right). \tag{4}$$

po przesunięciu w czasie o n próbek otrzymamy rekurencyjną relację na bieżącą próbkę

$$y_k = \frac{1}{a_n}\left(b_m u_{k+m-n} + b_{m-1}u_{k+m-n-1} + \cdots + b_1 u_{k-n+1} + b_0 u_{k-n} - a_{n-1}y_{k-1} - \cdots - a_1 y_{k-n+1} - a_0 y_{k-n}\right). \tag{5}$$

Zagadnienie otrzymania dyskretnego odpowiednika układu ciągłego nie jest zagadnieniem trywialnym. Istnieje wiele metod wyznaczenia transmitancji dyskretnej będącej przybliżeniem danej transmitancji ciągłej, można je podzielić na dwie grupy:

- Metody oparte na aproksymacji pochodnej
- Metody oparte na odpowiedniku odpowiedzi

1.2.1 Metody oparte na aproksymacji pochodnej

Różnica wprzód (forward) jest aproksymacją biorącą różnicę przyszłej i aktualnej próbki (stąd różnica wprzód). Równanie różnicowe aproksymacji dane jest następująco:

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \approx \Delta u_k = \frac{u_{k+1} - u_k}{T},$$

gdzie T jest oczywiście okresem próbkowania. Transformata $\mathcal{Z}$ tej aproksymacji dana jest natomiast następującą relacją:

$$\Delta U(z) = \frac{z-1}{T}.$$

Problemem jaki występuje przy tym typie dyskretyzacji jest zachowanie stabilności układu, stabilne układy ciągłe w rezultacie dyskretyzacji wprzód mogą dać niestabilne układy dyskretne.

Różnica wstecz jest aproksymacją biorącą pod uwagę różnicę aktualnej i przeszłej próbki (co wyjaśnia nazwę różnica wstecz), stąd jego równanie różnicowe określone jst w następujący sposób:

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \approx \Delta u = \frac{u_k - u_{k-1}}{T}.$$

Natomiast transformata $\mathcal{Z}$ tej aproksymacji dana jest poprzez następującą relację:

$$\Delta U(z) = \frac{z-1}{Tz}$$

Problem dyskretyzacji wstecz jest nieco dualne do dyskretyzacji wprzód gdyż, niestabilne układy ciągłe w rezultacie dyskretyzacji wstecz mogą dać stabilne układy dyskretne.

Tustina (metoda trapezów)

Metoda Tustina jest odpowiednikiem całkowania metodą trapezów. W przypadku całkowania równanie aproksymacyjne ma postać

$$c_{k+1} = c_k + \frac{T}{2}(u_k + u_{k+1}), \tag{6}$$

gdzie c_k jest wyznaczaną wartością całki, a u_k próbkami sygnału całkowanego. Postać transmitancyjną tej relacji jest następująca:

$$\frac{C(Z)}{U(z)} = \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1} = \frac{1}{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}, \tag{7}$$

biorąc pod uwagę to iż operacji całkowania w dziedzinie operatora Laplace'a odpowiada $1/s$, natomiast operacji różniczkowania s transformata $\mathcal{Z}$ tej aproksymacji finalnie określona jest jako:

$$\Delta U(z) = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}.$$

Niewątpliwą zaletą tej metody jest zachowanie stabilności układu ciągłego, gdyż struktura tej metody dyskretyzacji odpowiada przekształceniu biliniowemu $z = \frac{s+1}{s-1}$, które przekształca bieguny leżace w okręgu jednostkowym (obszar stabilności układów dyskretnych) na obszar lewej półpłaszczyzny zespolonej (obszar stabilności układu ciągłego). Natomiast wadą tej metody jest wprowadzenie nieliniowego przekształcenia skali częstotliwości układu ciągłego ω_c

$$\omega_d = \frac{2}{T}\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega_c T}{2} \tag{8}$$

Wadą natomiast wyżej omawianych metod jest to, że odpowiedź zdyskretyzowanego układu nie do końca odpowiada odpowiedzi układu ciągłego.

Przykład 3. Dany jest następujący układ inercyjny:

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \tag{9}$$

jego analityczna odpowiedź skokowa wyznaczona została w następujący sposób

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\frac{1}{s}\} = 1(t) - e^{-t}$$

co daje zdyskretyzowaną odpowiedź

$$y_k = 1 - e^{-kT}$$

Dla różnicy wprzód otrzymujemy następującą transmitancję odpowiednika dyskretnego

$$G_1(z) = \frac{1}{\frac{z-1}{T} + 1} = \frac{T}{z - 1 + T}$$

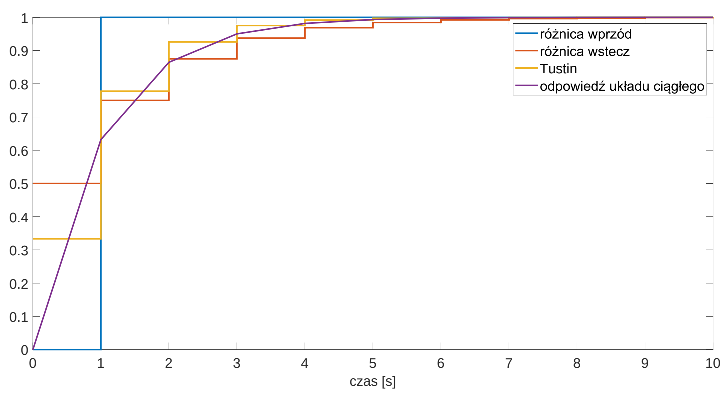
Dla różnicy wstecz otrzymujemy następującą transmitancję odpowiednika dyskretnego

$$G_2(z) = \frac{1}{\frac{z-1}{Tz} + 1} = \frac{Tz}{(T+1)z - 1}$$

Dla aproksymacji Tustina otrzymujemy następującą transmitancję odpowiednika dyskretnego

$$G_3(z) = \frac{1}{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} + 1} = \frac{T(z+1)}{(2+T)z + T - 2}$$

Wyniki porównania odpowiedzi skokowych tych z zastosowaniem trzech aproksymacji przedstawione są na rysunkach 1,2 oraz 3.



Rysunek 1: Porównanie odpowiedzi czasowych układu ciągłego i jego dyskretyzacji metodami aproksymacji pochodnej dla okresu próbkowania $T = 1$

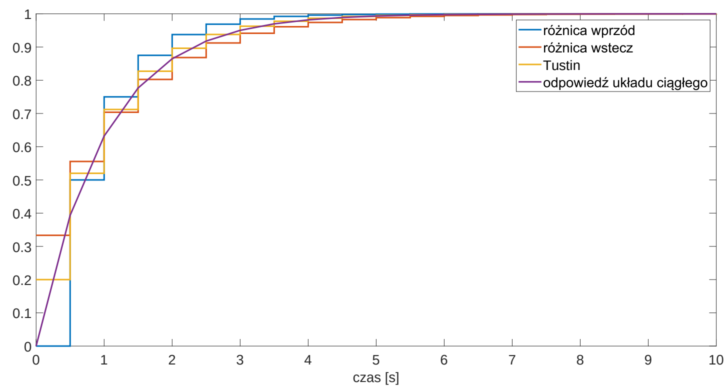
Jak można zauważyć na rysunkach 1,2 oraz 3 dokładność aproksymacji ściśle zależy od okresu próbkowania, ale nie osiągnęła idealnego nawet przy relatywnie krótkim okresie próbkowania. Dlatego, na potrzeby dokładnego modelowania (szczególnie przy dłuższych okresach próbkowania) potrzeba było wprowadzić inne metody otrzymywania dyskretnego odpowiednika.

1.2.2 Odpowiednik dykretny transmitancji ciągłej

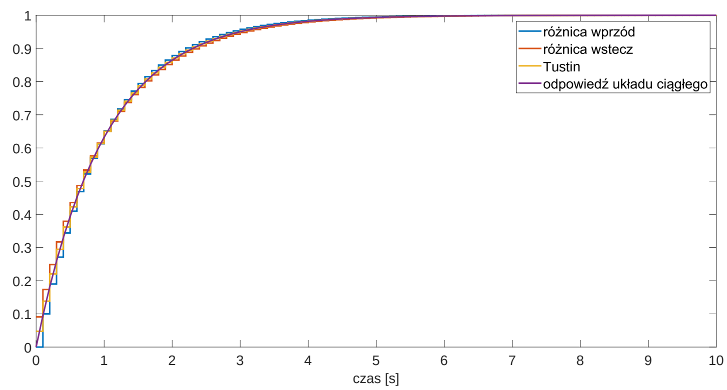
Przedstawiona poniżej metoda opiera sie na założeniu, że w chwilach próbkowania wartości odpowiedzi skokowej wyznaczonego układu dyskretnego maja być równe wartościom odpowiedzi skokowej układu ciągłego.

W zależności od tego jaki sygnał wymuszający przyjjmiemy, aby otrzymać odpowiedź układu ciągłego, otrzymamy inny dyskretny odpowiednik układu ciągłego. Możemy więc otrzymać bardzo wiele dyskretnych odpowiedników natomiast, w praktyce rozróżnia się przynajmniej trzy podstawowe:

Odpowiednik impulsowy, w którym za sygnał wymuszający został przyjęty impuls Dirac'a. Na początku wyznaczmy więc odpowiedź impulsową układu danego transmitancją $G(s)$ (pamiętając, że transformata Laplace'a impulsu Dirac'a jest równa 1).



Rysunek 2: Porównanie odpowiedzi czasowych układu ciągłego i jego dyskretyzacji metodami aproksymacji pochodnej dla okresu próbkowania $T = 0.5$



Rysunek 3: Porównanie odpowiedzi czasowych układu ciągłego i jego dyskretyzacji metodami aproksymacji pochodnej dla okresu próbkowania $T = 0.1$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \tag{10}$$

dyskretyzujemy odpowiedź z czasem próbkowania T

$$g_k = g(Tk) \tag{11}$$

wyznaczamy transformatę $\mathcal{Z}$ tej odpowiedzi, która jest także transmitancją dyskretną dyskretyzowanego układu

$$G(z) = \mathcal{Z}\{g_k\} \tag{12}$$

Odpowiednik skokowy (ZOH) będzie zaś odpowiednikiem, w którym za sygnał wymuszający został przyjęty skok jednostkowy. Na początku wyznaczmy więc odpowiedź na skok jednostkowy układu danego transmitancją $G(s)$ (pamiętając, że transformata Laplace'a skoku jednostkowego $1(t)$ jest równa $1/s$).

$$g_k = \left[\mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot \mathcal{L}\{1(t)\}\}\right]_{t=kT} = \left[\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\frac{1}{s}\}\right]_{t=kT},$$

Przy wyznaczaniu transmitancji dyskretnej musimy wziąć pod uwagę także transformatę $\mathcal{Z}$ dyskretnego sygnału wymuszającego.

$$\mathcal{Z}^{-1}\{G(z) \cdot \mathcal{Z}\{1_k\}\} = g_k,$$

co prowadzi do postaci

$$G(z)\frac{1}{1-z^{-1}} = \mathcal{Z}\left\{g_k\right\}$$

i końcowo do postaci

$$G(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{g_k\right\}.$$

Biorąc pod uwagę odwrotną transformatę $\mathcal{Z}$ członu $(1-z^{-1})$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
G(z)\frac{1}{1-z^{-1}} &= \mathcal{Z}\left\{\left[\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\frac{1}{s}\}\right]_{t=kT}\right\} \\
&= \mathcal{Z}\left\{\left[\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\}\right]_{t=kT}\right\} \\
&= \mathcal{Z}\left\{\left[\mathcal{L}^{-1}\{G_{\mathrm{ZOH}}\cdot G(s)\}\right]_{t=kT}\right\},
\end{aligned}$$

gdzie

$$G_{\mathrm{ZOH}} = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

jest transmitancją członu formującego będącego ***ekstrapolatorem zerowego rzędu*** (ang. *zero older hold (ZOH)*). Czyli ta metoda będzie jednoznaczna użyciem ekstrapolatora zerowego rzędu.

Odpowiednik z odpowiedzi liniowo-narastającej (FOH) będzie zaś odpowiednikiem, w którym za sygnał wymuszający został przyjęty sygnał liniowo-narastający. Na początku wyznaczmy więc odpowiedź na skok jednostkowy układu danego transmitancją $G(s)$ (pamiętając, że transformata Laplace'a skoku jednostkowego $t1(t)$ jest równa $1/s^2$).

$$g_k = \left[\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\cdot\mathcal{L}\{t1(t)\}\}\right]_{t=kT} = \left[\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\frac{1}{s^2}\}\right]_{t=kT},$$

Przy wyznaczaniu transmitancji dyskretnej musimy wziąć pod uwagę także transformatę $\mathcal{Z}$ dyskretnego sygnału wymuszającego.

$$\mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\cdot\mathcal{Z}\{kT\}\} = g_k,$$

co prowadzi do postaci

$$G(z)\frac{Tz}{(z-1)^2} = \mathcal{Z}\left\{g_k\right\}$$

i końcowo do postaci

$$G(z) = \frac{(z-1)^2}{Tz}\mathcal{Z}\left\{g_k\right\}.$$

Analogicznie jak dla metody ZOH, Biorąc pod uwagę odwrotną transformatę $\mathcal{Z}$ członu $\frac{(z-1)^2}{Tz}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
G(z) &= \mathcal{Z}\left\{\left[\mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{sT}-2+e^{-sT}}{Ts^2}G(s)\}\right]_{t=kT}\right\} \\
&= \mathcal{Z}\left\{\left[\mathcal{L}^{-1}\{G_{\mathrm{FOH}}\cdot G(s)\}\right]_{t=kT}\right\},
\end{aligned}$$

gdzie

$$G_{FOH}(s) = \frac{e^{sT}-2+e^{-sT}}{Ts^2}$$

jest transmitancją członu formującego będącego ***ekstrapolatorem pierwszego rzędu*** (ang. *first older hold (FOH)*). Czyli ta metoda będzie jednoznaczna użyciem ekstrapolatora pierwszego rzędu.

Przykład 4. Znaleźć odpowiednik skokowy dyskretny transmitancji ciągłej $G(s) = \frac{1}{s}$. Mamy

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\left[\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}\}\right]_{t=kT}\right\} \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{[t]_{t=kT}\right\} \\ &= \frac{z-1}{z}\frac{Tz}{(z-1)^2} \\ &= \frac{T}{z-1}. \end{aligned}$$

Przykład 5. Znaleźć odpowiednik impulsowy układu inercyjnego

Dany jest układ ciągły

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \tag{13}$$

jego odwrotna transformata Laplace'a (będąca odpowiedzią na impuls Dirac'a) jest równa:

$$g(t) = e^{-t} \tag{14}$$

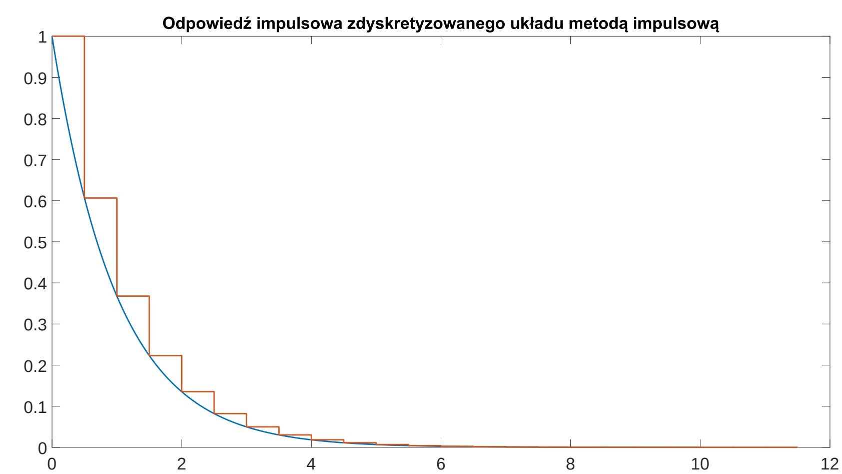
odpowiedź tę dyskretyzujemy z czasem próbkowania $T = 0.5$

$$g_k = e^{-0.5k} \tag{15}$$

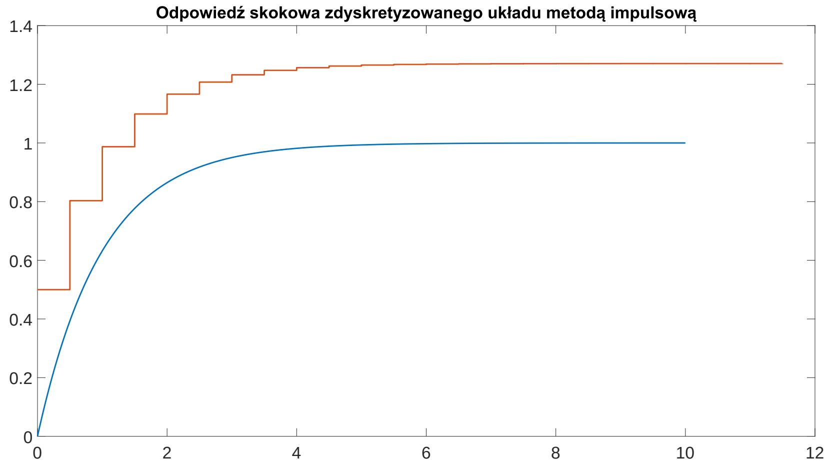
Transformata $\mathcal{Z}$ tego sygnału to

$$G(z) = \frac{0.5z}{z - 0.6065} \tag{16}$$

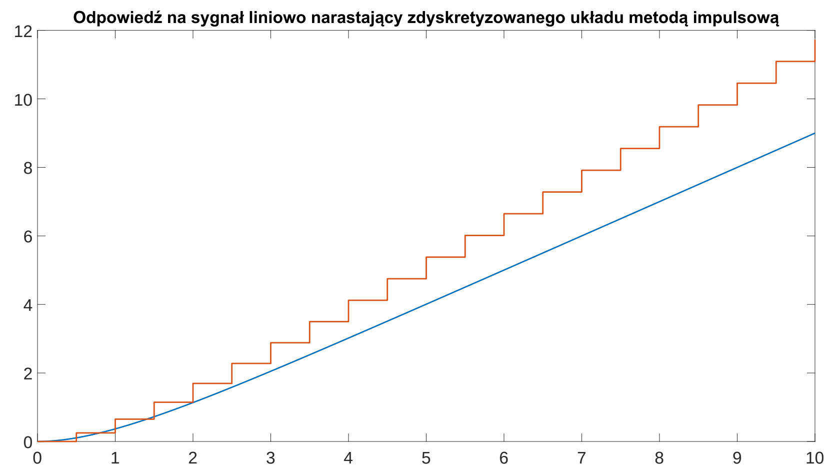
Na rysunkach 4,5 oraz 6 pokazane są odpowiedzi otrzymane dla różnych typów wymuszeń przy dyskretyzacji metodą odpowiednika impulsowego. Jak łatwo można zobaczyć, nawet dla takiego prostego układu jak człon inercyjny, dokładne wyniki otrzymane są tylko dla odpowiedzi na sygnał przy jakim była dokonywana dyskretyzacja. Dla innych typów wymuszeń, wyniki te różnią się już znacząco. Jak można zobaczyć na tym przykładzie, nie ma idealnej, jedynie dobrej metody dyskretyzacji. Dobór jednej z istniejących jest zależny w dużej mierze od aktualnych wymagań, na przykład charakteru sygnałów jakie będą wykorzystywane w danym układzie sterowania. Dla przykładu z procesie, w którym większość sygnałów będzie zadawana jako wartości stałe, będziemy się opierać bardziej na odpowiedniku skokowym. Natomiast w procesie, którego zadaniem będzie podążanie za sygnałem liniowo zmiennym (sterowanie położeniem obiektu przy zadanej stałej jego prędkości) bardziej adekwatnym będzie odpowiednik na wymuszenie liniowo-narastające.



Rysunek 4: Odpowiedź impulsowa zdyskretyzowanego układu metodą impulsową



Rysunek 5: Odpowiedź skokowa zdyskretyzowanego układu metodą impulsową



Rysunek 6: Odpowiedź na sygnał liniowo narastający zdyskretyzowanego układu metodą impulsową

1.2.3 Metoda odpowiednika biegunowo-zerowego

Ostatnią opisaną tutaj metodą będzie odpowiednik biegunowo-zerowy, który zakłada przekształcenie oddzielnie zer i biegunów układu ciągłego w odpowiadające im zera i bieguny układu dyskretnego. Dodatkowo odpowiednik jest wyznaczany w ten sposób aby zachować wzmocnienie statyczne układu. W skrócie procedurę możemy zapisać w postaci następujących punktów.

- Każdy rzeczywisty biegun układu ciągłego p (skończonej wartości) odpowiada biegunowi układu dyskretnego e^{-pT}
- Każdy biegun zespolony $p = a + jb$, odwzorowywany jest jako biegun układu dyskretnego w punkcie $re^{j\phi}$, gdzie $r = e^{pT}$, $\phi = bT$.
- Każde zero układu ciągłego (o skończonej wartości) jest odwzorowywane w taki sam sposób jak bieguny.
- Bieguny i zera w nieskończoności umieszczamy w punkcie -1 (dla przypadku jednego zera w nieskończoności możemy umieścić je w punkcie $z = \infty$

Niewątpliwą zaletą tej metody jest zachowanie wzmocnienia statycznego układu ciągłego w jego odpowiedniku dyskretnym.

1.3 Dyskretyzacja w Matlabie

W pakiecie Matlab znajduje się funkcja c2d, która znakomicie ułatwia proces dyskretyzacji układów ciągłych.

SYSD = c2d(SYSC,TS,METHOD) computes a discrete-time model SYSD with
sample time TS that approximates the continuous-time model SYSC.
The string METHOD selects the discretization method among the following:
'zoh' Zero-order hold on the inputs
'foh' Linear interpolation of inputs
'impulse' Impulse-invariant discretization
'tustin' Bilinear (Tustin) approximation.
'matched' Matched pole-zero method (for SISO systems only).
The default is 'zoh' when METHOD is omitted. The sample time TS should
be specified in the time units of SYSC (see "TimeUnit" property).

Jak można zobaczyć w opisie tej funkcji, jako pierwszy argument musimy podać transmitancję ukłądu ciągłego (obiekt transmitancyjny), drugi argument to okres próbkowania, natomiast trzeci argument jest opcjonalny i jest nim metoda dyskretyzacji (gdy brak używana jest metoda ZOH). Jak widać zaimplementowano w tej funkcji większość podanych wyżej metod: zoh – czyli metoda odpowiednika odpowiedzi skokowej, foh – czyli odpowiednik odpowiedzi liniowo-narastającej, impulse – czyli odpowiedzi impulsowej, tustin – czyli metody całkowania trapezami oraz mached – czyli metoda odpowiednika biegunowo-zerowego.

Wraz instrukcją do ćwiczenia dołączone są pliki przykładów w niej użytych, tworzą je następujące pliki:

dyskretyzacja1.slx — plik dla środowiska Simulink symulujący metody oparte na aproksymacji pochodnej (do uruchomienia potrzebna jest utworzenie w przestrzeni roboczej zmiennej T będącej okresem próbkowania np: $T = 1$.)

dyskretyzacja_wyniki1.m — plik dla środowiska Matlab tworzący wykresy otrzymanych wyników

przyklad_dyskretyzacja.m — plik dla środowiska Matlab porównujący wybrane odpowiedzi dla dyskretyzacji impulsowej

2 Plan ćwiczenia

- Przeprowadzić badanie dyskretyzacji układu będącego na granicy stabilności trzema metodami aproksymacji pochodnej. Układem może być na przykład $\frac{1}{s^2+1}$. Badanie przeprowadzić także dla różnych częstotliwości próbkowania.

- Przeprowadzić badanie dyskretyzacji układu oscylacyjnego trzema metodami aproksymacji pochodnej. Układem może być na przykład $\frac{1}{s^2+s+1}$. Badanie przeprowadzić dla różnych częstotliwości próbkowania, porównać odpowiedzi skokowe oraz charakterystyki częstotliwościowe. Dla wybranej metody przeprowadzić ręcznie obliczenia przynajmniej 5 kroków odpowiedzi na zadany sygnał wymuszający, w oparciu o otrzymane równanie różnicowe.

- Przeprowadzić badanie wybranych układów pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu metodami odpowiednika odpowiedzi impulsowej, skokowej i liniowo-narastającej. Przykładowe układy do badania to $\frac{1}{s+3}$, $\frac{s+1}{s^2+2s+3}$ oraz $\frac{s+2}{s^3+2s+s+1}$. Badanie przeprowadzić dla różnych typów sygnału wymuszającego oraz różnej częstotliwości próbkowania.

PS: w razie problemów z wyznaczeniem postaci analitycznych odpowiedzi układów ciągłych można użyć wyników symulacji numerycznych np. z Simulinka, tylko trzeba dobrać odpowiednią metodę numeryczną oraz krok całkowania.

2.1 Sprawozdanie

W sprawozdaniu z ćwiczenia przedstawić przede wszystkim wnioski jakie nasunęły się podcas przeprowadzania ćwiczenia, można je zilustrować szeregiem otrzymanych wyników.