Teoria Sterowania (639B-ARAUT-MEP-TSTUZ)
Modelowanie układów dynamicznych w środowisku Matlab

(opracował: M.T., ostatnia modyfikacja: 1 października 2024)

1 Wstęp

1.1 Wykresy funkcji w środowisku Matlab. Funkcje anonimowe.

Przykład 1. Chcemy wykonać wykres (w środowisku Matlab) oraz wyznaczyć (numerycznie) wartość całki oznaczonej, w granicach od -4 do 4 z funkcji

$$f(t) = \mathrm{e}^{-t^2} \sin^2(5t). \tag{1}$$

Ponadto, chcemy wykonać wykres (w granicach od -4 do 4) z funkcji

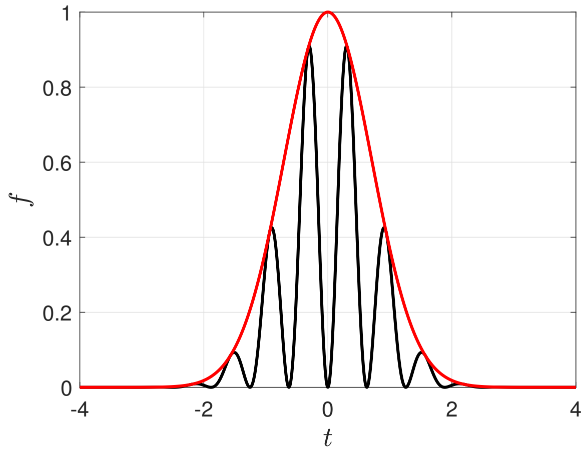
$$f_{\mathrm{env}}(t) = \mathrm{e}^{-t^2}. \tag{2}$$

Wykresy funkcji (1) oraz (2) przedstawia Rys. 1 . Wykresy te można wykonać korzystając z jednego z następujących skryptów (Listing 1 i Listing 2). W obydwu listingach jest również wyznaczana wartość całki oznaczonej

$$\int_{-4}^{4} \mathrm{e}^{-t^2} \sin^2(5t)\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Listing 1.

```
clear
close all
clc
nfontslatex = 18;
nfonts = 14;

f_scalar = @(t) exp(-t^2)*(sin(5*t))^2;
f = @(t) arrayfun(f_scalar,t);
I_1 = integral(f,-4,4);
disp(I_1)
I_2 = integral(@(t) arrayfun(f_scalar,t),-4,4);
disp(I_2)

f_envelope_scalar = @(t) exp(-t^2);

t = linspace(-4,4,1e+3);

figure
plot(t,f(t),'-k','LineWidth',2.0)
hold on
plot(t,arrayfun(f_envelope_scalar,t), ...
   '-r','LineWidth',2.0)

grid on
set(gca,'FontSize',nfonts)
xlabel('$t$','Interpreter','Latex', ...
   'FontSize',nfontslatex)
ylabel('$f$','Interpreter','Latex', ...
   'FontSize',nfontslatex)
print('../Figures/functionPlot01A.eps', ...
   '-depsc','-r600')
print('../Figures/functionPlot01A.jpg', ...
   '-djpeg','-r600')
print('../Figures/functionPlot01A.pdf', ...
   '-dpdf','-r600')
```



Rysunek 1: Wartości zmiennych x_1, x_2 w funkcji czasu t. [Przykład 4]

Listing 2.

```
clear, close all, clc
nfontslatex = 18;
nfonts = 14;

f = @(t) exp(-t.^2).*(sin(5*t)).^2;
I = integral(f,-4,4);
disp(I)

f_envelope = @(t) exp(-t.^2);

t = linspace(-4,4,1e+3);

figure
plot(t,f(t),'-k','LineWidth',2.0)
hold on
plot(t,f_envelope(t),'-r','LineWidth',2.0)

grid on
set(gca,'FontSize',nfonts)
xlabel('$t$','Interpreter','Latex', ...
   'FontSize',nfontslatex)
ylabel('$f$','Interpreter','Latex', ...
   'FontSize',nfontslatex)
print('../Figures/functionPlot01A.eps', ...
   '-depsc','-r600')
print('../Figures/functionPlot01A.jpg', ...
   '-djpeg','-r600')
print('../Figures/functionPlot01A.pdf', ...
   '-dpdf','-r600')
```

Wynik: wartość rozpatrywanej całki wynosi $\mathrm{I} = 0.8862$.

1.2 Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych w śrdowisku Matlab

Informacje o rozwiązywaniu równań różniczkowych zwyczajnych w środowisku Matlab:
`https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html`
Ogólny schemat numerycznego całkowania równań różniczkowych

$$\dot{x} = f[t, x(t)] \tag{4}$$

na przedziale $[t_{\rm init}, t_{\rm final}]$ i z warunkiem początkowym

$$x(0) = x_{\rm init} \tag{5}$$

ma postać:

for $t = 0 : T : t_{\rm f} - T$
  znajdź aproksymację $I(t) \approx \int_t^{t+T} f[t, x(t)]{\rm d}t$
  $x(t + T) = x(t) + I(t)$
end

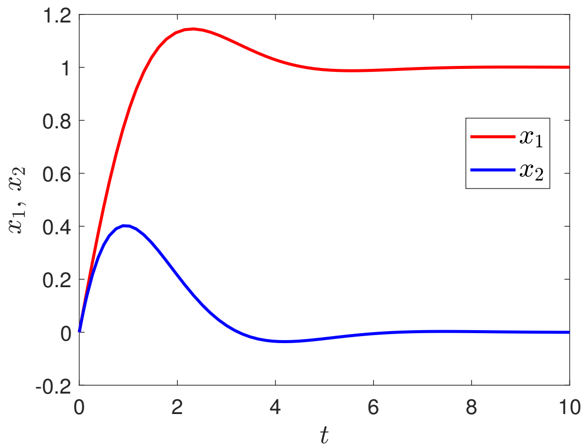
Istnieje wiele schematów krokowych całkowania numerycznego, w dalszym ciągu będziemy korzystać z dostępnej w środowisku Matlab procedury `ode45`.

Przykład 2. Zakładając zerowe warunki początkowe, na przedziale czasu $[0, 10]$, wykonać symulację układu dynamicznego $\dot{x} = Ax + Bu$, gdzie

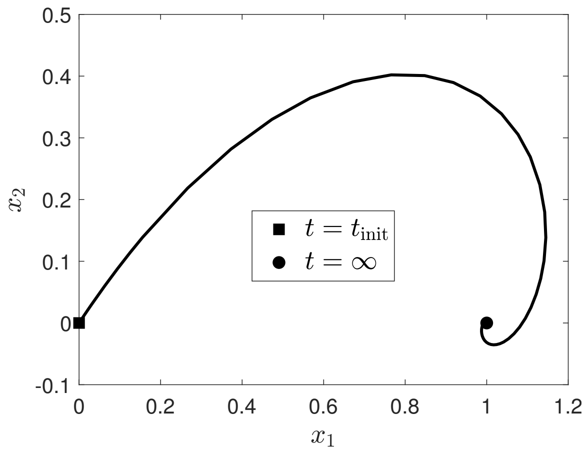
$$A = \begin{bmatrix} -1.0 & 1.0 \\ -1.0 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Symulację wykonać dla wymuszenia w postaci a) skoku jednostkowego $u(t) = 1$, b) $u(t) = \sin(t)$. Korzystając z funkcji `eig` sprawdzić czy układ jest stabilny. Dla wymuszenia z podpunktu a) powtórzyć symulację dla przedziału $[0, 1.0]$ i warunków początkowych

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$



Rysunek 2: Wartości zmiennych stanu x_1, x_2 w funkcji czasu. [Przykład 2]



Rysunek 3: Trajektoria stanu dla wymuszenia w postaci skoku jednostkowego. Symbolem ■ zaznaczono początek trajektori ($t = t_{\rm init}$), symbolem • zaznaczono koniec trajektori ($t = \infty$, tzn. punkt stacjonarny) [Przykład 2]

Listing 3.
```
clear
close all
clc
nfontslatex = 18;
nfonts = 14;

A = [-1, 1; -1, -0.5];
eig(A)
B = [1; 1];
% u = @(t) sin(t);
u = @(t) 1;
f = @(t,x) A*x+B*u(t);
tInit = 0.0;
tFinal = 10.0;
xInit = [0; 0];
options = odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',1e-12);
[t,X] = ode45(f,[tInit,tFinal],xInit,options);

figure
plot(t,X(:,1),'-r','LineWidth',2.0)
hold on
plot(t,X(:,2),'-b','LineWidth',2.0)
set(gca,'FontSize',nfonts)
xlabel('$t$','Interpreter','Latex', ...
'FontSize',nfontslatex)
ylabel('$x_{1},\,x_{2}$', ....
'Interpreter','Latex', ...
'FontSize',nfontslatex)
legend({'$x_{1}$','$x_{2}$'}, ...
'Interpreter','Latex', ...
'FontSize',nfontslatex,'Location','Best')

figure
plot(xInit(1),xInit(2),'sk', ...
'MarkerSize',10,'MarkerFaceColor','k')
hold on
xStationary = -A\B;
plot(xStationary(1),xStationary(2),'ok', ...
'MarkerSize',8,'MarkerFaceColor','k')
plot(X(:,1),X(:,2),'-k','LineWidth',2.0)
set(gca,'FontSize',nfonts)
xlabel('$x_{1}$','Interpreter','Latex', ...
'FontSize',nfontslatex)
ylabel('$x_{2}$','Interpreter','Latex', ...
'FontSize',nfontslatex)
legend({'$t=t_{{\rm init}}$','$t=\infty$'}, ...
'Interpreter','Latex', ...
'FontSize',nfontslatex,'Location','Best')
```

Przykład 3. Rozpatrujemy szeregowy obwód RLC opisany równaniami

$$u = iR + L\frac{\rm d}{{\rm d}t}i + v_{\rm c}, \tag{8a}$$

$$i = C\frac{\rm d}{{\rm d}t}v_{\rm c}, \tag{8b}$$

gdzie u onacza napięcie źródła, i oznacza natężenie prądu płynącego w obwodzie, zaś $v_{\rm c}$ oznacza napięcie na kondensatorze. Równania te możemy przekształcić do równoważnej postaci

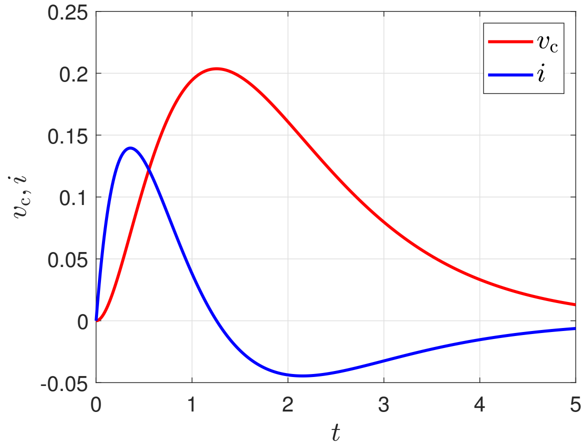
$$\frac{\rm d}{{\rm d}t}v_{\rm c} = i/C, \tag{9a}$$

$$\frac{\rm d}{{\rm d}t}i = -(R/L)i - (1/L)v_{\rm c} + (1/L)u. \tag{9b}$$

Załóżmy, że $R = 3$, $L = 1$, $C = 1/2$ oraz $u(t) = \mathrm{e}^{-2t}$. Wówczas ścisłe rozwiązanie, przy założeniu zerowych warunków początkowych, wyraża się wzorem

$$v_c(t) = 2\mathrm{e}^{-t} - 2(1+t)\mathrm{e}^{-2t}, \tag{10a}$$
$$i(t) = -\mathrm{e}^{-t} + (1+2t)\mathrm{e}^{-2t}. \tag{10b}$$

Rozpatrywane równania meżna oczywiście rozwiązać numerycznie.



Rysunek 4: Wykres napięcia v_c na kondensatorze i natężenia prądu i w obwodzie z Przykładu 3].

Przykład 4. Dane jest tzw. równanie van der Pola

$$\ddot{y} - \mu(1-y^2)\dot{y} + y = 0, \tag{11}$$

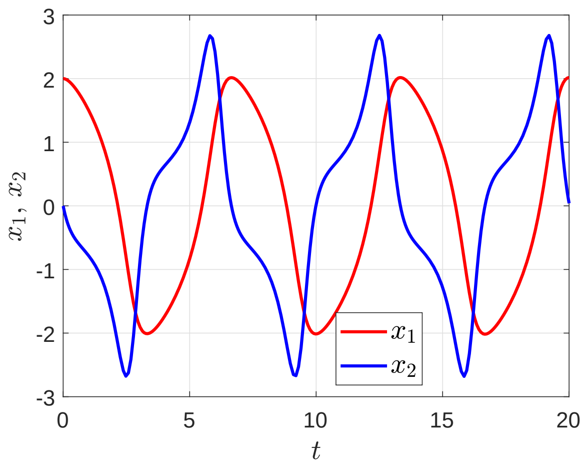
gdzie $\mu > 0$ jest parametrem. Chcemy wyznaczyć rozwiązanie tego równania na przedziale $[0, 20]$, dla warunków początkowych $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 0$. Jest to równanie drugiego rzędu, aby skorzystać z procedury `ode45` należy przekształcić je do układu równań pierwszego rzędu. Możemy to zrobić przyjmując oznaczenia $x_1 = y$, $x_2 = \dot{x}_1$. Wówczas mamy

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{12a}$$
$$\dot{x}_2 = \mu(1-x_1^2)x_2 - x_1, \tag{12b}$$

czyli postać (4) gdzie

$$f(t, x(t)) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \mu(1-x_1^2)x_2 - x_1 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Zauważmy, że w rozpatrywanym przypadku funkcja $f(t, x(t))$ nie zależy w sposób jawny od zmiennej niezależnej t (która często oznacza czas). Poszukiwane rozwiązanie można wyznaczyć za pomocą kodu z Listingu 4. Wykres otrzymanego rozwiązania przedstawia Rys. 5



Rysunek 5: Wartości zmiennych x_1, x_2 w funkcji czasu t. [Przykład 4]

Listing 4.
```
clear
close all
clc
nfontslatex = 18;
nfonts = 14;

m = 1.0;
f = @(t,x) [x(2); m*(1-x(1)^2)*x(2)-x(1)];
tInit = 0.0;
tFinal = 20.0;
xInit = [2; 0];
options = odeset('RelTol',1e-14,'AbsTol',1e-14);
[t,X] = ode45(f,[tInit,tFinal],xInit,options);

figure
plot(t,X(:,1),'r','LineWidth',2.0)
hold on
grid on
plot(t,X(:,2),'b','LineWidth',2.0)
set(gca,'FontSize',nfonts)
xlabel('$t$','Interpreter','Latex', ...
   'FontSize',nfontslatex)
ylabel('$x_{1},\,x_{2}$', ...
   'Interpreter','Latex','FontSize',nfontslatex)
legend({'$x_{1}$','$x_{2}$'}, ....
   'Interpreter','Latex', ...
   'FontSize',nfontslatex,'Location','Best')
print('VDP.eps','-depsc','-r600')
print('VDP.jpg','-djpeg','-r600')
print('VDP.pdf','-dpdf','-r600')
```

Rozpatrzmy modyfikację układu równań (12)

$$\dot{x}_1 = x_2 + \sin(t), \tag{14a}$$
$$\dot{x}_2 = \mu(1-x_1^2)x_2 - x_1 + 2\cos(t), \tag{14b}$$

czyli postać (4) gdzie

$$f(t, x(t)) = \begin{bmatrix} x_2 + \sin(t) \\ \mu(1-x_1^2)x_2 - x_1 + 2\cos(t) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

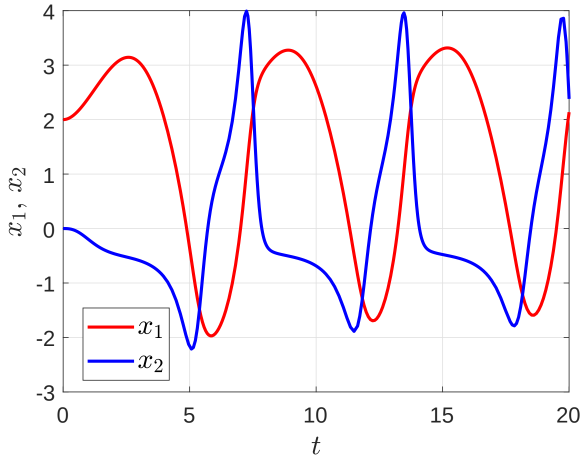
Zauważmy, że w tym przypadku funkcja $f(t, x(t))$ zależy w sposób jawny od zmiennej niezależnej t. Aby wyznaczyć rozwiązanie układu (14) wystarczy zmodyfikować dotychczasowy kod, w szczególności wiersz w którym zdefiniowano funkcję $f(t, x(t))$, zamiast

```
f = @(t,x) [x(2); m*(1-x(1)^2)*x(2)-x(1)];
```

wpisać

```
f = @(t,x) [x(2); m*(1-x(1)^2)*x(2)-x(1)] + ...
[sin(t);2*cos(t)];
```

Wykres otrzymanego rozwiązania przedstawia Rys. 6



Rysunek 6: Wartości zmiennych x_1, x_2 w funkcji czasu t. [Przykład 4]

Zadanie 1. Powtórzyć wyniki z Przykładu 4.

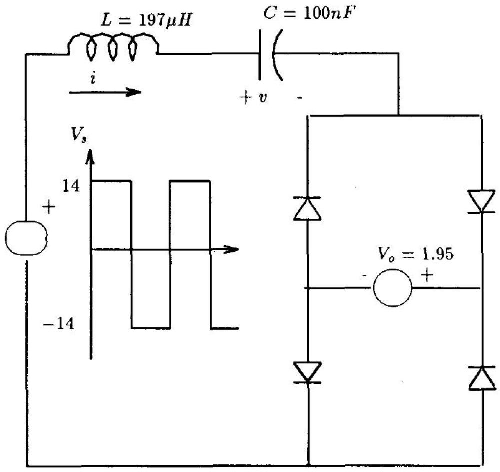
Zadanie 2. Wyznaczyć numerycznie na przedziale $[0, 5]$ rozwiązanie układu z Przykładu 3 (Rys. 4).

Zadanie 3. Układ z Rys. 7 (szeregowy przekształtnik rezonansowy z obciążeniem napięciowym, ang. *DC-DC series resonant converter with voltage source load*) [1] jest opisany równaniami

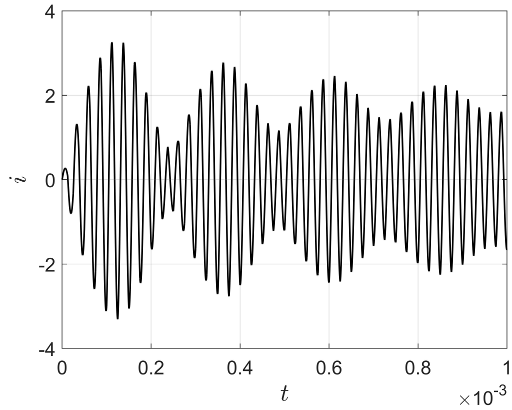
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i = \frac{1}{L}\left[-v - V_0\mathrm{sgn}(i) + V_\mathrm{s}\mathrm{sgn}(\sin(\omega_\mathrm{s}t))\right], \tag{16a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v = \frac{1}{C}i \tag{16b}$$

Wyznacz przebiegi natężenia prądu dławika i oraz napięcia v na kondensatorze w przedziale czasowym $[0, 0.003]$, częstotliwość przełączania $f_\mathrm{s} = 40$ kHz.



Rysunek 7: Szeregowy przekształtnik rezonansowy z obciążeniem napięciowym [1].



Rysunek 8: Przebieg natężenia prądu i w szeregowym przekształtniku rezonansowym z obciążeniem napięciowym [1].

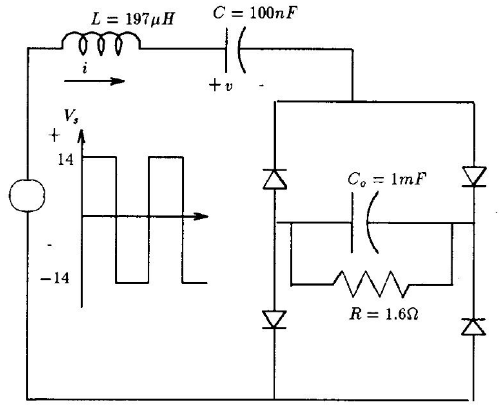
Zadanie 4. Układ z Rys. 9 (szeregowy przekształtnik rezonansowy z obciążeniem pojemnościowym, ang. *DC-DC series resonant converter with capacitor load*) [1] jest opisany równaniami

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i = \frac{1}{L}\left[-v - v_0\mathrm{sgn}(i) + V_\mathrm{s}\mathrm{sgn}(\sin(\omega_\mathrm{s}t))\right], \tag{17a}$$

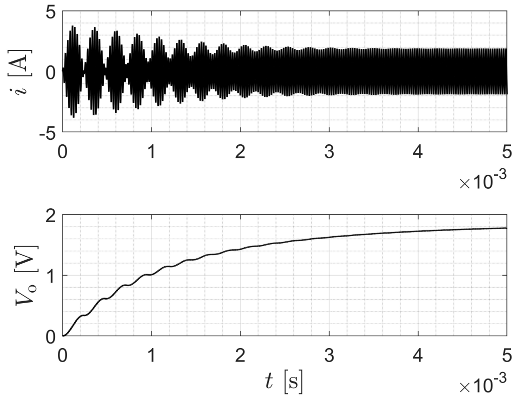
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v = \frac{1}{C}i \tag{17b}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_0 = \frac{1}{C_0}\left[\mathrm{abs}(i) - \frac{v_0}{R}\right] \tag{17c}$$

Wyznacz przebiegi natężenia prądu dławika i oraz napięcia v na kondensatorze w przedziale czasowym $[0, 0.003]$, częstotliwość przełączania $f_\mathrm{s} = 40$ kHz.



Rysunek 9: Szeregowy przekształtnik rezonansowy z obciążeniem pojemnościowym [1].



Rysunek 10: Przebiegi natężenia prądu idławika i napięcia v_0 na kondensatorze C_0 w szeregowym przekształtniku rezonansowym z obciążeniem napięciowym [1].

Zadanie 5. Układ z Rys. 11 (przekształtnik *buck-boost*) [1] jest opisany równaniem

$$\dot{x} = Ax + uBx + bu + f, \tag{18}$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-(R_1+R_2)}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C(R+R_3)} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{-R_3(2R+R_3)}{L(R+R_3)} + \frac{R_1+R_2}{L} & \frac{R+2R_3}{L(R+R_3)} \\ \frac{-R}{C(R+R_3)} & 0 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{R_3 R I_{\mathrm{out}}}{L(R+R_3)} - \frac{V_{\mathrm{in}}}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad f = \begin{bmatrix} \frac{V_{\mathrm{in}}}{L} \\ \frac{R I_{\mathrm{out}}}{C(R+R_3)} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Można rozpatrywać wersję uproszczoną w której pomija się rezystancje cewki, kondensatora i przełączania, wówczas kładziemy $R_1 = R_2 = R_3 = 0$. Funkcja przełączania u jest funkcją okresową, w rozpatrywanym przykładzie, przyjmujemy, że jej wartość jest zero dla pierwszej połowy okresu i jeden dla drugiej połowy, co matematycznie możemy wyrazić wzorem

$$u(t) = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{sgn}(\sin(\omega_s t))), \tag{22}$$

w środowisku Matlab możemy ją zdefiniować

```
u = @(t) (1-sign(sin(ws*t)))/2;
```

lub

```
u = @(t) (sin(ws*t) < 0);
```

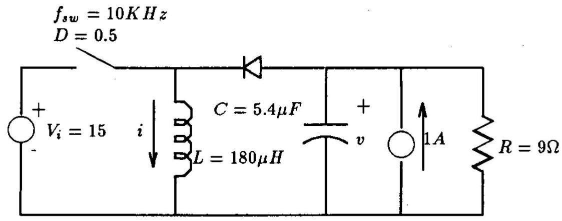
Zauważmy, że układ (18) możemy traktować jako niestacjonarny układ liniowy opisany równaniem

$$\dot{x} = \tilde{A}(t)x + \tilde{u}(t), \tag{23}$$

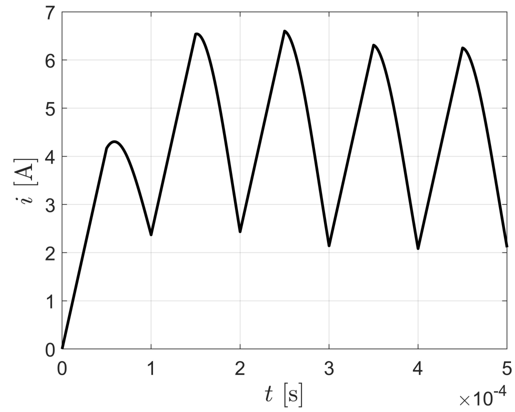
gdzie

$$\tilde{A}(t) = A + Bu(t), \qquad \tilde{u}(t) = bu(t) + f. \tag{24}$$

Zauważmy, że (23) jest układem liniowym o współczynnikach okresowych (periodycznych), ponieważ $\tilde{A}(t)$ jest funkcją okresową. Wyznacz przebiegi natężenia prądu dławika i oraz napięcia v na kondensatorze w przedziale czasowym $[0, 0.003]$, częstotliwość przełączania $f_s = 40$ kHz.



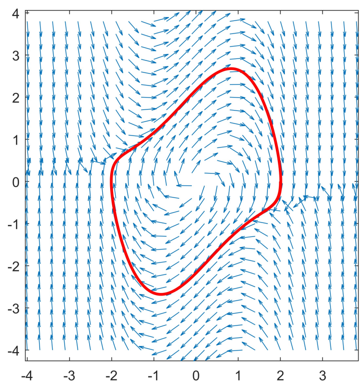
Rysunek 11: szeregowy przekształtnik rezonansowy z obciążeniem pojemnościowym [1].



Rysunek 12: szeregowy przekształtnik rezonansowy z obciążeniem napięciowym [1].

2 Portrety fazowe

Przykład 5. Portrety fazowe można generować wykorzystując funkcję `quiver`. Przykładowe użycie funkcji `quiver`, dla układu van der Pola, zawiera poniższy Listing 5.



Rysunek 13: Portret fazowy dla układu van der Pola

Listing 5.
```
% van der Pol equation
clear
close all
clc
nfontslatex = 18;
nfonts = 14;

m = 1.0;
f = @(t,x) [x(2); m*(1-x(1)^2)*x(2)-x(1)];
f1 = @(x1,x2) x2;
f2 = @(x1,x2) m*(1-x1^2)*x2-x1;
x1_min = -4.0;
x1_max = 4.0;
x2_min = -4.0;
x2_max = 4.0;
stepSize = 0.3;
[X1,X2] = meshgrid(x1_min:stepSize:x1_max, ...
x2_min:stepSize:x2_max);
Y1 = arrayfun(f1,X1,X2);
Y2 = arrayfun(f2,X1,X2);
Y1_n = Y1./sqrt(Y1.^2+Y2.^2);
Y2_n = Y2./sqrt(Y1.^2+Y2.^2);

figure
quiver(X1,X2,Y1_n,Y2_n)
daspect([1 1 1])
hold on
tInit = 0.0;
tFinal = 20.0;
xInit = [2; 0];
options = odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',1e-12);
[t,X] = ode45(f,[tInit,tFinal],xInit,options);
plot(X(:,1),X(:,2),'r','LineWidth',2.0)
axis('tight')
```

Zadanie 6. Powtórzyć wyniki z Przykładu 5, w szczególności wygenerować Rys. 13. Rysunek ten przedstawia trajektorię wektora stanu (zaznaczoną kolorem niebieskim) odpowiadającą warunkom początkowym

$$x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Trajektoria ta jest dosyć szczególną trajektorią, ponieważ jest tzw. cyklem granicznym. Należy wyznaczyć kilka trajektori dla różnych warunków początkowych i umieścić ich wykresy je na tym samym rysunku.

Literatura

[1] S.R Sanders, J.M Noworolski, X.Z Liu, and G.C Verghese. Generalized averaging method for power conversion circuits. *IEEE transactions on power electronics*, 6(2):251–259, 1991.