**Teoria Sterowania (639B-ARAUT-MEP-TSTUZ)**
**Dyskretyzacja układów z czasem ciągłym**

(opracował: M.T., ostatnia modyfikacja: 2 października 2024)

# 1 Teoria

Rozważmy układ liniowy z czasem ciągłym opisany równaniami stanu

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{u}(t), \tag{1a}$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t), \tag{1b}$$

gdzie $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem stanu, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem wymuszeń, zaś $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ jest wektorem odpowiedzi. Rozwiązanie równania stanu (1a), dla $t \geq t_0$, wyraża się wzorem

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}(t-\tau)}\boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\,. \tag{2}$$

Układ (1) można zdyskretyzować. Zakładając, że wymuszenie $\boldsymbol{u}(t)$ jest stałe między kolejnymi chwilami próbkowania, tzn.

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(k\Delta) \quad \text{dla} \quad k\Delta \leq t \leq (k+1)\Delta \tag{3}$$

oraz znając stan w chwili $k\Delta$, można wyznaczyć stan w chwili $(k+1)\Delta$ zgodnie ze wzorem

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}((k+l)\Delta) &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}\Delta}\boldsymbol{x}(k\Delta) + \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}((k+1)\Delta-\tau)}\boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}\Delta}\boldsymbol{x}(k\Delta) + \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}((k+1)\Delta-\tau)}\mathrm{d}\tau\boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{u}(k\Delta) \\ &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}\Delta}\boldsymbol{x}(k\Delta) + \int_{0}^{\Delta} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}\tau}\mathrm{d}\tau\boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{u}(k\Delta)\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Oznaczając

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{x}(k\Delta), \quad \boldsymbol{u}(k) = \boldsymbol{u}(k\Delta), \tag{5}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A}_{\Delta} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}\Delta}, \quad \boldsymbol{B}_{\Delta} = \int_0^{\Delta} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}\tau}\boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}\mathrm{d}\tau,} \tag{6}$$

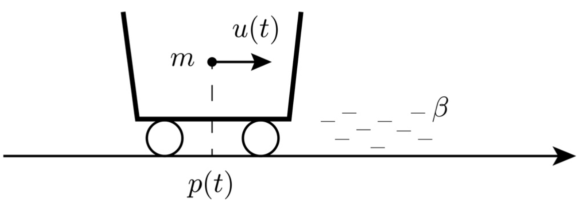
możemy napisać równania odpowiednika dyskretnego

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_{\Delta}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_{\Delta}\boldsymbol{u}(k), \tag{7a}$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k). \tag{7b}$$

W sytuacjach gdy nie będzie to prowadzić do wątpliwości, będziemy opuszczać indeks $\Delta$ przy macierzach $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ w równaniu (7a), ponadto, będziemy pisać $\boldsymbol{x}_k$ oraz $\boldsymbol{u}_k$ zamiast, odpowiednio, $\boldsymbol{x}(k)$ oraz $\boldsymbol{u}(k)$.

# 2 Przykład

Rozpatrujemy wózek o masie $m$ (Rys. 1), w położeniu $p(t)$, poruszający się w ustalonym kierunku, na który działa siła wymuszająca $u(t)$ oraz siła oporów ruchu scharakteryzowana współczynnikiem $\beta$.




**Rysunek 1:** Obiekt sterowania. Źródło: [1].

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, ruch wózka jest opisany równaniem

$$u(t) - \beta\dot{p}(t) = m\ddot{p}(t). \tag{8}$$

Oznaczając $x_1(t) = p(t)$, $x_2(t) = \dot{p}(t)$, można napisać równanie (8) w postaci układu dwóch równań pierwszego rzędu

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \tag{9a}$$
$$\dot{x}_2(t) = \alpha x_2(t) + bu(t), \tag{9b}$$

gdzie

$$\alpha = -\frac{\beta}{m}, \qquad b = \frac{1}{m}. \tag{10}$$

Wprowadzając dalej oznaczenia

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{B}_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

można napisać

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}u(t), \tag{12}$$

Jeżeli przyjmiemy, że interesującym nas sygnałem odpowiedzi rozpatrywanego układu jest położenie wózka, to równanie wyjścia będzie postaci

$$y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t), \quad \text{gdzie} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Równania (12) oraz (13) opisują układ z czasem ciągłym. Dla układów tego typu można wyznaczać odpowiedniki dyskretne. Korzystając ze wzorów (5–7) oraz uwzględniając (11) otrzymujemy macierze

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha\Delta} - 1) \\ 0 & \mathrm{e}^{\alpha\Delta} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{B} = -\frac{1}{\beta}\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha\Delta} - 1) - \Delta \\ \mathrm{e}^{\alpha\Delta} - 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

odpowiednika dyskretnego

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k, \tag{16a}$$
$$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_k, \tag{16b}$$

dla rozpatrywanego obiektu tzn. wózka.
Wyprowadzenie zależności (14)–(15) podano w Dodatku A.

# 3 Zadania

**Zadanie 1.** Zakładając, że masa rozpatrywanego wózka wynosi $m = 1\,[\mathrm{kg}]$, $\beta = 0.1\,[\mathrm{Ns/m}]$, przedział próbkowania $\Delta = 0.5\,[\mathrm{s}]$, wyznacz macierze $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ odpowiednika dyskretnego

(a) ze wzoru (6), korzystając z procedur `expm` oraz `integral` (z opcją `'ArrayValued'`),

(b) ze wzorów (14) oraz (15),

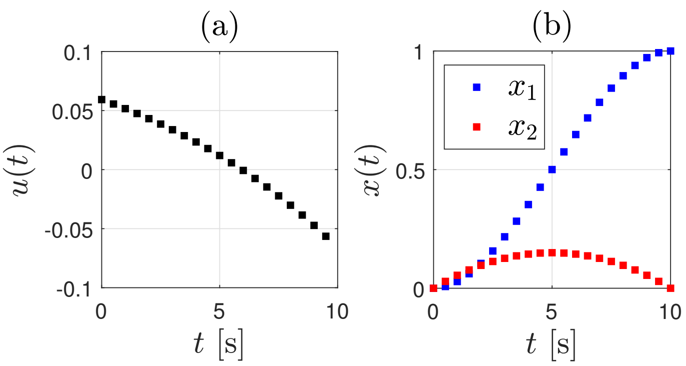
(c) korzystając z procedury `c2d`.

Porównaj otrzymane wyniki.

**Zadanie 2.** Zakładając, że masa rozpatrywanego wózka wynosi $m = 1\,[\mathrm{kg}]$, $\beta = 0.1\,[\mathrm{Ns/m}]$, przedział próbkowania $\Delta = 0.5\,[\mathrm{s}]$, stan początkowy $x_0 = [0\ 0]^\mathrm{T}$, $t_\mathrm{f} = 10\,[\mathrm{s}]$ wyznacz przebiegi zmiennych stanu modelu dyskretnego dla sekwencji sterowań

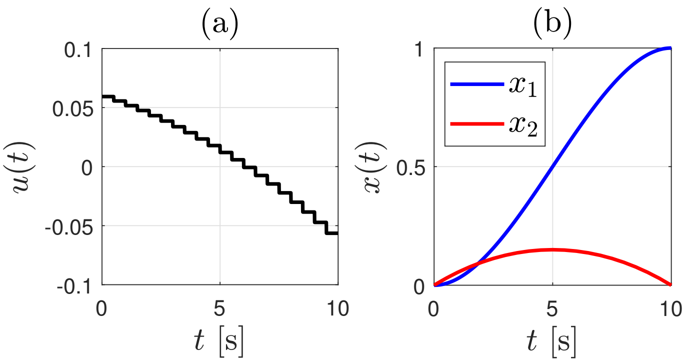
$$u = \begin{bmatrix} 0.0593 \\ 0.0556 \\ 0.0516 \\ 0.0475 \\ 0.0432 \\ 0.0386 \\ 0.0338 \\ 0.0287 \\ 0.0234 \\ 0.0178 \\ 0.0120 \\ 0.0058 \\ -0.0007 \\ -0.0075 \\ -0.0147 \\ -0.0222 \\ -0.0301 \\ -0.0385 \\ -0.0472 \\ -0.0564 \end{bmatrix} \tag{17}$$

tzn. $u_0 = 0.0593$, $u_1 = 0.0556$, ... , $u_{N-1} = -0.0564$, gdzie $N = 20$. Następnie wykonaj wykres przebiegów tych wartości tzn. sterowania i zmiennych stanu, jak na Rys. 2. (Można skorzystać ze wskazówki w Dodatku B)




**Rysunek 2:** Sterowanie z minimalną energią - sygnał sterowania $u(t)$. Panel (a): układ z czasem dyskretnym, panel (b): układ z czasem ciągłym. [Zadanie 2]

**Zadanie 3.** Zakładając, że masa rozpatrywanego wózka wynosi $m = 1\,[\mathrm{kg}]$, $\beta = 0.1\,[\mathrm{Ns/m}]$, przedział próbkowania $\Delta = 0.5\,[\mathrm{s}]$, stan początkowy $x_0 = [0\ 0]^\mathrm{T}$, $t_\mathrm{f} = 10\,[\mathrm{s}]$ wyznaczyć przebiegi zmiennych stanu modelu z czasem ciągłym i sterowania w postaci sygnału schodkowego odpowiadającego sekwencji z Zadania 2. Następnie wykonaj wykres przebiegów tych wartości tzn. sterowania i zmiennych stanu, jak na Rys. 2. (Można skorzystać ze wskazówki w Dodatku C)




**Rysunek 3:** Sterowanie z minimalną energią - zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$. Panel (a): układ z czasem dyskretnym, panel (b): układ z czasem ciągłym. [Zadanie 2]

# Literatura


[1] G.C. Calafiore and L. El Ghaoui. *Optimization Models*. Control systems and optimization series. Cambridge University Press, 2014.

[2] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, 2013.

[3] C.M. Bender and S.A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I*. Springer New York, 1999.


# A Wyprowadzenie zależności (14–15)

Wyprowadzenie zależności (14-15)

$$\boldsymbol{A}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha\Delta} - 1) \\ 0 & \mathrm{e}^{\alpha\Delta} \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{B}_\Delta = -\frac{1}{\beta}\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha\Delta} - 1) - \Delta \\ \mathrm{e}^{\alpha\Delta} - 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

otrzymujemy bezpośrednio ze wzoru (5-6). Najważniejszym krokiem jest wyznaczenie macierzy $\mathrm{e}^{\boldsymbol{M}}$, gdzie $\boldsymbol{M}$ jest pewną macierzą kwadratową. Bezpośrednio z definicji

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{M}} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{M}^k}{k!}. \tag{20}$$

Załóżmy, że macierz $\boldsymbol{M}$ można przedstawić w postaci iloczynu $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1}$, gdzie $\boldsymbol{Q}$ jest pewną macierzą odwracalną, zaś

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{21}$$

Podstawiając do (20) otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\boldsymbol{M}} &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1}} \\
&= \boldsymbol{Q}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{\Lambda}^k}{k!}\right]\boldsymbol{Q}^{-1} \\
&= \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^k}{k!} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n^k}{k!} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1} \\
&= \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Ponadto

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\boldsymbol{M}t} &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}t\boldsymbol{Q}^{-1}} \\
&= \boldsymbol{Q}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{\Lambda}^k t^k}{k!}\right]\boldsymbol{Q}^{-1} \\
&= \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n^k t^k}{k!} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1} \\
&= \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Macierze $\boldsymbol{A}_\mathrm{c}$, $\boldsymbol{B}_\mathrm{c}$ rozpatrywanego układu z czasem ciągłym, to

$$
\boldsymbol{A}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad \alpha = -\beta b. \tag{24}
$$

Doświadczony czytelnik łatwo zauważy, że

$$
\boldsymbol{A}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}^{-1}, \tag{25}
$$

skąd po uwzględnieniu powyższych rozważań otrzymujemy

$$
\boldsymbol{A} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_\mathrm{c}\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha\Delta} - 1) \\ 0 & \mathrm{e}^{\alpha\Delta} \end{bmatrix} \tag{26}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= \int_0^{\Delta} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_\mathrm{c}\tau}\boldsymbol{B}_\mathrm{c}\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^{\Delta} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha\tau} - 1) \\ 0 & \mathrm{e}^{\alpha\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}\mathrm{d}\tau \\
&= b\int_0^{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha\tau} - 1) \\ \mathrm{e}^{\alpha\tau} \end{bmatrix}\mathrm{d}\tau \\
&= -\frac{1}{\beta}\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha\Delta} - 1) - \Delta \\ \mathrm{e}^{\alpha\Delta} - 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

a następnie wzory (14-15). Jedną z metod wyznaczania macierzy $\mathrm{e}^{\boldsymbol{M}}$ jest aproksymacja wielomianami Padé [2, 3]. Obszerne omówienie numerycznego wyznaczania macierzy $\mathrm{e}^{\boldsymbol{M}}$ można znaleźć w [2] oraz podanych tam źrodłach.

# B Symulacja układów LTI z czasem dyskretnym

Znając warunek początkowy i ciąg sterowań można wyznaczyć trajektorię stanu rozwiązując równanie stanu (różnicowe). Przykładowy kod w środowisku Matlab wygląda następująco.

```
Xd = zeros(size(x0,1),kf+1);
Xd(:,1) = x0;
for k=1:length(u)
    Xd(:,k+1) = Ad*Xd(:,k)+Bd*u(k);
end
```

# C Symulacja układów LTI z czasem ciągłym

Znając warunek początkowy i sygnał sterujący można wyznaczyć trajektorię stanu rozwiązując równanie stanu (różniczkowe). W przypadku kiedy sterowanie ma postać sygnału schodkowego odpowiadającego pewnej sekwencji wartości, można skorzystać z poniższego kodu.

```
opts = odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-8);
[tPlot,Xc] = ode45(@(t,x) ...
         Ac*x+Bc*u(min(floor(t/Delta)+1,kf)), ...
[0 tf], x0, opts);
```

Jeśli `u` jest zmienną tablicową przechowującą dyskretne wartości sygnału sterującego, to wartością wyrażenia `u(min(floor(t/Delta)+1,kf))` będzie wartość sygnały schodkowego w chwili czasowej o wartości zmiennej `t`. Zmienna `Delta` przechowuje wartość okresu próbkowania, zmienna `kf` przechowuje wartość czasu końcowego.