1. Introdução.

Uma facilidade prática da decomposição *Wavelet* esta relacionada ao algoritmo proposto por *Stephane G. Mallat*. Embora exista uma teoria matemática detalhada e imprescindível para o entendimento da transformada *Wavelet*, quando a utilizamos para uma aplicação em processamento de imagens, basta que escolhamos um par de filtros espelho de quadratura. Esta escolha possui certas restrições mas é normalmente ligada a resultados experimentais. A escolha de filtros e o projeto de *Wavelets* são bastante detalhados na literatura. O livro escrito por *Stephane G. Mallat é* uma referência fundamental para qualquer interessado no tópico pois aborda e pormenoriza toda a teoria. Além disso, é referência para o *toolbox Wavelets* do software *Matlab* da *Math Works.*

Consideremos:

$$\int_{-oo}^{oo} \psi(t)dt = 0 \qquad (1)$$

Uma wavelet é uma função $\psi(t)$ que satisfaz (1). Para obtermos uma família de Wavelets a função $\psi(t)$ é dilatada e transladada.

Assim:

$$\psi_{u,s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi(\frac{t-u}{s}) \qquad (2)$$

A transformada Wavelet é definida como:

$$Wf\,(u,s) = \int_{-oo}^{oo} f\,(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^{*}(\frac{t-u}{s})dt \qquad (3)$$

Uma equação como a mostrada em (3) por si só não apresenta uma explicação qualitativa. As *wavelets* permitem que analisemos o sinal em diferentes escalas. Ao contrário da transformada de Fourier, que nos permite inspecionar quantas componentes de freqüência constituem o sinal, a transformada *Wavelet* permite que analisemos detalhes no sinal inclusive sua localização exata. O sinal analisado é a função *f(t), s* é um fator de escala e *u* um fator de translação.

Podemos discretizar a escala s como 2^j e assim obtemos as chamadas *Wavelets Dyadic*, cuja transformada é:

$$Wf\,(u,2^j) = \int_{-oo}^{oo} f\,(t)\frac{1}{\sqrt{2^j}}\psi^*(\frac{t-u}{2^j})dt \qquad (4)$$

A transformada *Wavelet* (4) pode ser estendida para duas dimensões como mostrado em [MALLAT 89] e [MALLAT 2000]. No primeiro artigo *Mallat* introduz um algoritmo para ser utilizado para decompor uma imagem *f(x,y)* em coeficientes *Wavelet*. O segundo é o livro "A Wavelet Tour Of Signal Processing" cuja segunda edição utilizamos como referência teórica. Em [MALLAT 1999], o autor descreve o algoritmo para decompor uma imagem em coeficientes Wavelet como abaixo:

$$\begin{aligned} a_{j+1}[n,m] &= a_j * \bar{h}\bar{h}[2n,2n] \quad \text{(i)} \\ d^1_{j+1}[n,m] &= a_j * \bar{h}\bar{g}[2n,2m] \quad \text{(ii)} \\ d^2_{j+1}[n,m] &= a_j * \bar{g}\bar{h}[2n,2m] \quad \text{(iii)} \\ d^3_{j+1}[n,m] &= a_j * \bar{g}\bar{g}[2n,2m] \quad \text{(iv)} \end{aligned} \qquad (5)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \bar{h}[n] &= h[-n] \\ hg[n,n] &= h[n]g[n] \end{aligned} \qquad (6)$$

Os filtros h[n] e g[n] são dois filtros respectivamente passa altas e passa baixas. O operador * denota convolução discreta. A equação (*i)* apresenta uma aproximação da imagem original *f(x,y)*, cuja amostra original é $a_o[n,m]$. (*ii)*, *(iii)* e *(iv*) apresentam os coeficientes discretos da transformada *Wavelet* bidimensional. *h[n] e g[n]* são dois filtros como os descritos anteriormente. Segundo [MALLAT 1999], *(ii)* nos dá as bordas horizontais, *(iii)* as bordas verticais e *(iv)* os cantos da imagem. Como se observa inspecionando (5) a decomposição se processa através de convoluções da imagem original com os filtros desenvolvidos.