

SZEREG FOURIERA



Raport

Analiza sygnałów

Data oddania: 09.06.2024

Zuzanna Nasiłowska 276023

SYGNAL:

- TRÓJKĄTNY
- PROSTOKĄTNY
- PIŁOKSZTAŁTNY

SPIS TREŚCI

1	WPROWADZENIE	
	Wprowadzenie	3
2	MODEL MATEMATYCZNY	
	Rozwiniecie w szereg Fouriera	3-5
	Sygnal prostokatny- roz.analityczne	5-7
	Sygnal trojkatny- roz.analityczne	7-10
	Sygnal pilokształtny- roz.analityczne	10-11
	Sygnal prostokatny- roz.numeryczne	12-14
	Sygnal trojkatny- roz.numeryczne	14-17
	Sygnal pilokształtny- roz.numeryczne	17-19
3	PORÓWNANIE METOD	
	Sygnal prostokatny	20-21
	Sygnal trojkatny	21-24
	Sygnal pilokształtny	24-26
4	PODSUMOWANIE	
	Podsumowanie	26

1 Wprowadzenie

W niniejszym raporcie omówimy zagadnienie szeregu Fouriera oraz wykorzystamy je do rozłożenia trzech wybranych sygnałów: **prostokątnego, trójkątnego oraz piłokształtnego**. Do analizy wykorzystamy dwie metody obliczeń: analityczne oraz numeryczne przy użyciu programu Scilab. Dodatkowo przedstawione zostaną uzyskane w programie wykresy, gdzie ostatecznie porównamy oba podajeścia oraz podsumujemy całość sprawozdania.

Zaczniemy od krótkiego wprowadzenia teoretycznego. Szereg Fouriera pozwala nam rozłożyć niemal każdą funkcję okresową na sumę funkcji trygonometrycznych. Może zostać opisany jako kombinacja liniowa funkcji trygonometrycznych o różnych częstotliwościach będących wielokrotnością danej bazowej częstotliwości. Po dziś dzisiejszy szeregi Fouriera mają ogromne znaczenie m.in. w teorii drgań czy przetwarzaniu sygnałów obrazu i dźwięku. Dodatkowo rozkład drgania periodycznego na drgania proste nazywamy *analizą harmoniczną drgania*, zaś przedstawienie funkcji okresowej w postaci szeregu trygonometrycznego nazywamy **analizą harmoniczną** tej funkcji. W poniższej sekcji przejdziemy do omówienia tego zagadnienia, przedstawiając odpowiednie wzory oraz definicje. Przedstawiona wiedza przybliżymy nam temat niniejszego raportu i umożliwi analizę wspomnianych wyżej sygnałów.

2 Model matematyczny

2.1 Rozwinięcie w szereg Fouriera

Niemal każdą funkcję okresową możemy wystawić na działanie analizie harmonicznej, prezentując ją w postaci **szeregu trygonometrycznego**.

Niech $x(t)$ będzie dowolną funkcją okresową o okresie T , całkowalną na przedziale $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, spełniającą **warunki Dirichleta**:

1. Dla każdego t

$$f(t) = \frac{\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow t^+} f(x)}{2}$$

, gdzie granice jednostronne są właściwe

Wtedy dla każdego t wartość funkcji $f(t)$ i suma szeregu Fouriera funkcji f w punkcie t są sobie równe.

2. przedział $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ można podzielić na skończoną liczbę przedziałów takich, że funkcja $x(t)$ jest ciągła i monotoniczna na wnętrzu każdego z nich.

Dodatkowo oznaczymy $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ jako pulsacje sygnału (częstotliwość kołową, szybkość zmian). Weźmy:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$$
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Wtedy **szereg trygonometryczny**:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

nazywamy **szeregiem Fouriera**.

Ostatecznie:

- $x(t)$ to okresowa funkcja, którą chcemy rozwinać w szereg
- a_0, a_n, b_n - współczynniki naszego szeregu Fouriera
- t_0 dowolne przesunięcie funkcji wzdłuż osi t
- a_0 to wartość średnia funkcji na okresie T
- a_n oraz b_n to odpowiednio sinusowe i cosinusowe składniki szeregu, regulują odpowiednio skalę wspomnianego sinusa i cosinusa

- Obliczając współczynniki szeregu Fouriera możemy przyjąć dowolny przedział o długości okresu T

UWAGA

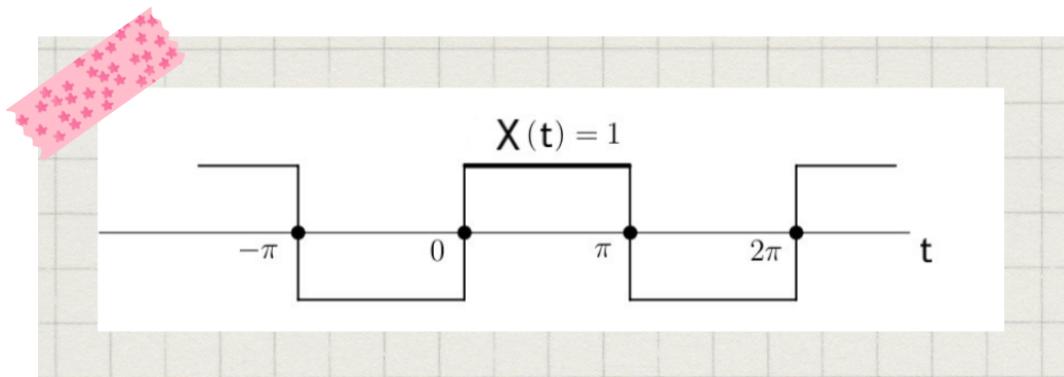
1. Jeżeli $x(t)$ jest funkcją nieparzystą przykładowo na wybranym przedziale $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, to $a_n = 0$ dla każdego $n=0,1,2\dots$ oraz w szeregu Fouriera tej funkcji nie występują cosinusy, zaś będzie się składał tylko z sinusów.
2. Analogicznie jeśli funkcja jest parzysta to $b_n = 0$, a w szeregu nie występują sinusy.

Po wstępnie teoretycznym możemy przejść do analizy harmonicznej trzech sygnałów: **prostokątnego, trójkątnego oraz piłokształtnego**.

ROZWIAZANIE ANALITYCZNE

2.2 Sygnał prostokątny

Zacznijmy od rozwinięcia w szereg Fouriera sygnału prostokątnego, przedstawionego na poniższym wykresie:



Rys. 1: Nieparzysta fala prostokątna z $x(t + 2\pi) = x(t) = \{1 \vee 0 \vee -1\}$

Nasz sygnał prostokątny, okresowy o okresie $T = 2\pi$ zdefiniujemy następująco na przedziale $[-\pi, \pi]$:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 < t < \pi, \\ -1 & \text{dla } -\pi < t < 0 \\ 0 & \text{dla } t = -\pi, 0, \pi \end{cases} \quad (1)$$

- Funkcja $x(t)$ spełnia warunki Dirichleta
- Okres funkcji wynosi 2π
- Pulsacja podstawowa sygnału będzie wynosić $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

W następnym kroku przejdziemy do wyliczenia **współczynników**. Zaczniemy od współczynnika a_0 oraz a_n .

współczynnik a_0

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt$$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 1 dt + \int_0^{\pi} 1 dt \right] = \frac{1}{\pi} \left[-t \Big|_{-\pi}^0 + t \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{1}{\pi} [-\pi + \pi] = 0$$

współczynnik a_n

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 \cos(nt) dt + \int_0^{\pi} \cos(nt) dt \right] = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \sin(nt) \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{n} \sin(nt) \Big|_0^{\pi} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\sin(0) + \sin(-\pi n) \frac{1}{n} + \sin(\pi n) \frac{1}{n} - \sin(0) \right] = \frac{1}{\pi} [-0 + 0 + 0 - 0] = 0 \end{aligned}$$

Jak widać współczynnik a_n wyszedł równy zeru, co będzie zgodne z nieparzystością naszego sygnału. Nasza funkcja $x(t)$ jest funkcją nieparzystą względem osi OY przechodzącej przez punkt $(0,0)$. Zatem:

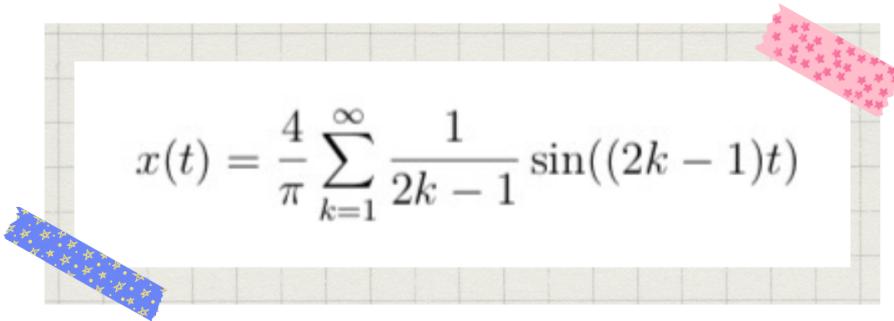
$$a_n = 0 \quad \text{dla } \text{każdego } n = 0, 1, 2, \dots$$

Na koniec potrzebujemy wyliczyć jeszcze współczynnik b_n .

współczynnik b_n

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \\
b_n &= \frac{2}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} \sin(nt) dt = -\frac{2}{n\pi} \cos(nt) \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{n\pi} (\cos(\pi n) - \cos(0)) = \\
&= -\frac{2}{n\pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{dla } n = 2k - 1, \\ 0 & \text{dla } n = 2k \end{cases}
\end{aligned}$$

Ostatecznie nasz sygnał prostokątny rozwija się w następujący szereg Fouriera:



Rys. 2: funkcja $x(t)$ rozwinięta w szereg Fouriera

2.3 Sygnał trójkątny

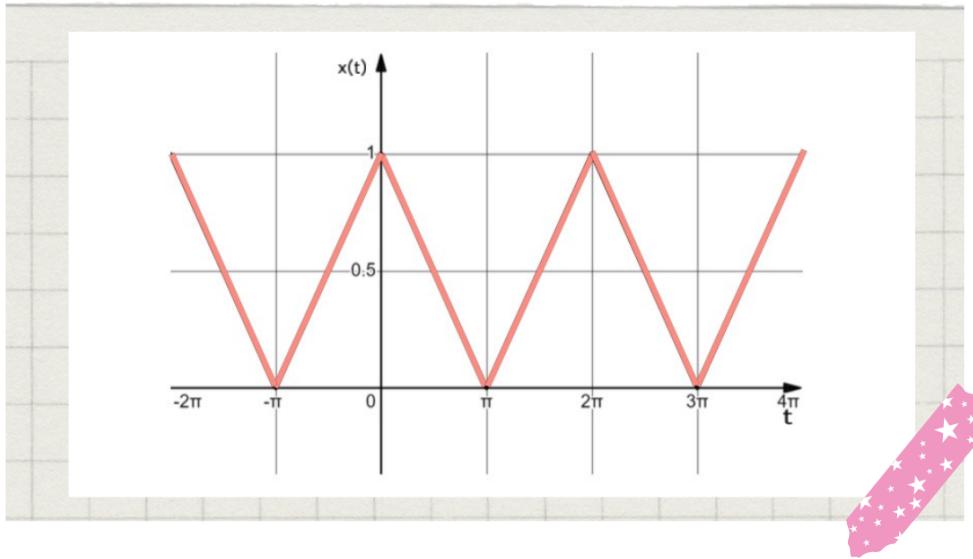
Przyjrzyjmy się teraz bliżej sygnałowi trójkątnemu i zdefiniujmy naszą funkcję $x(t)$ na przedziale $[0, 2\pi]$ w następujący sposób:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{-t}{\pi} + 1 & \text{dla } 0 < t < \pi, \\ \frac{t}{\pi} - 1 & \text{dla } \pi < t < 2\pi \\ 0 & \text{dla } t = 0, \pi \end{cases} \quad (2)$$

, gdzie

- okres $T = 2\pi$
- pulsacja sygnału $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$
- $x(t)$ to funkcja parzysta

Omawiany sygnał przedstawiony został na poniższym wykresie:



Rys. 3: sygnał trójkątny

współczynnik a_0

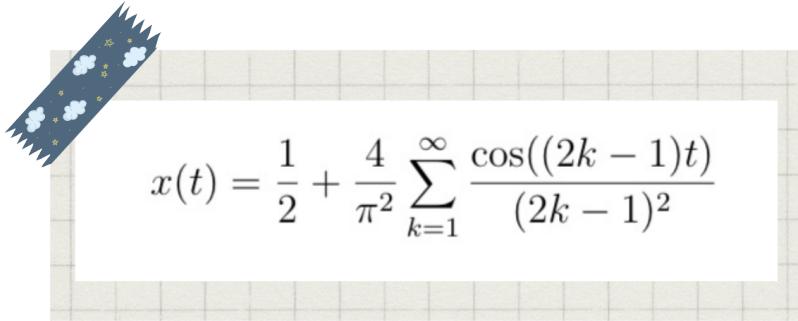
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{2\pi} x(t) dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \left(-\frac{t}{\pi} + 1 \right) dt + \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) dt \right] = \\ = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{t^2}{2\pi} \Big|_0^{\pi} + t \Big|_0^{\pi} + \frac{t^2}{2\pi} \Big|_{\pi}^{2\pi} - t \Big|_{\pi}^{2\pi} \right] = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi - \frac{\pi}{2} - 2\pi + \pi \right] = 1$$

współczynnik a_n dla $n=1,2..$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{2\pi} x(t) \cos(nt) dt \\ a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \left(-\frac{t}{\pi} + 1 \right) \cos(nt) dt + \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \cos(nt) dt \right] = \\ = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt + \int_0^{\pi} \cos(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} t \cos(nt) dt - \int_{\pi}^{2\pi} \cos(nt) dt \right] = \\ = \left| \begin{array}{l} f(t) = t \quad f'(t) = 1 \\ g'(t) = \cos(nt) \quad g(t) = \frac{\sin(nt)}{n} \end{array} \right| = \\ = \frac{1}{\pi} \left(\left(-\frac{1}{\pi} \left(\frac{t \sin(nt)}{n} \right) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nt)}{n} dt \right) + \frac{\sin(nt)}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{t \sin(nt)}{n} \right) \Big|_{\pi}^{2\pi} \right)$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(nt)}{n} dt \Big) - \frac{\sin(nt)}{n} \Big|_{\pi}^{2\pi} \Big) = \frac{1}{\pi} \left(- \frac{\cos(nt)}{\pi n^2} \Big|_0^\pi + \frac{\cos(nt)}{\pi n^2} \Big|_\pi^{2\pi} \right) = \\
& = \frac{1}{n^2 \pi^2} \left(- \cos(n\pi) + 1 + \cos(2\pi n) - \cos(n\pi) \right) = \\
& = \frac{2}{n^2 \pi^2} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{4}{n^2 \pi^2} & \text{dla } n = 2k - 1 \\ 0 & \text{dla } n = 2k \end{cases} \\
& \text{współczynnik } b_n \\
& b_n = \frac{2}{T} \int_0^{2\pi} x(t) \sin(nt) dt \\
& b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi \left(-\frac{t}{\pi} + 1 \right) \sin(nt) dt + \int_\pi^{2\pi} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin(nt) dt \right] = \\
& = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \sin(nt) dt + \int_0^\pi \sin(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} t \sin(nt) dt - \int_\pi^{2\pi} \sin(nt) dt \right] = \\
& = \left| \begin{array}{ll} f(t) = t & f'(t) = 1 \\ g'(t) = \sin(nt) & g(t) = -\frac{\cos(nt)}{n} \end{array} \right| = \\
& = \frac{1}{\pi} \left(\left(-\frac{1}{\pi} \left(\frac{-t \cos(nt)}{n} \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{n} dt \right) - \frac{\cos(nt)}{n} \Big|_0^\pi + \frac{1}{\pi} \left(\frac{-t \cos(nt)}{n} \Big|_\pi^{2\pi} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \int_\pi^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{n} dt \right) + \frac{\cos(nt)}{n} \Big|_\pi^{2\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{-1}{\pi} \left(\frac{-\pi \cos(nt)}{n} + \frac{\sin(nt)}{n^2} \Big|_0^\pi \right) \right. \\
& \left. - \frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{-2\pi}{n} + \frac{\pi \cos(nt)}{n} + \frac{\sin(nt)}{n^2} \Big|_\pi^{2\pi} \right) + \frac{1}{n} - \frac{\cos(n\pi)}{n} \right) = \\
& = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(n\pi)}{n} - \frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} - \frac{2}{\pi} + \frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} - \frac{\cos(n\pi)}{n} \right] = 0
\end{aligned}$$

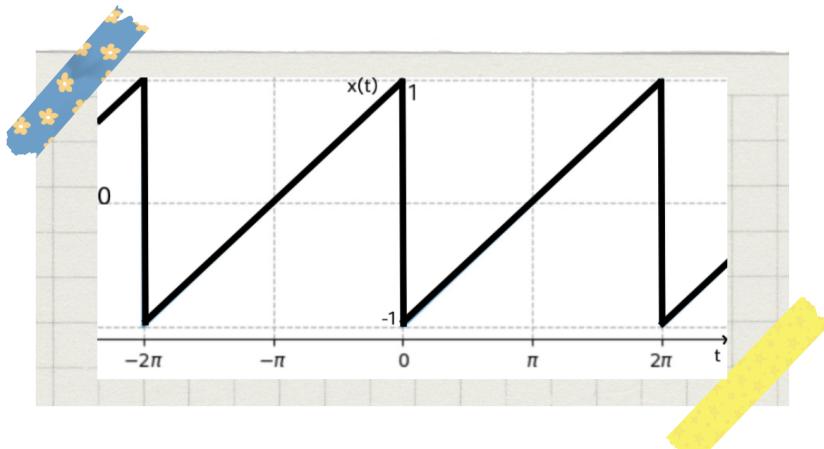
Ostatecznie nasz sygnał trójkątny rozwija się w następujący szereg Fouriera:



Rys. 4: funkcja $x(t)$ rozwinięta w szereg Fouriera

2.4 Sygnał piłokształtny

Ostatnim sygnałem, jaki rozwiniemy, będzie sygnał piłokształtny, przedstawiony poniżej:



Rys. 5: sygnał piłokształtny

Zdefiniujemy naszą funkcję $x(t)$ na przedziale $[0, 2\pi]$ w następujący sposób:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t}{\pi} - 1 & \text{dla } 0 < t < 2\pi \\ 0 & \text{dla } t = 0, 2\pi \end{cases} \quad (3)$$

, gdzie

- okres $T = 2\pi$
- pulsacja sygnału $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$
- $x(t)$ to funkcja nieparzysta

Wyliczmy teraz współczynniki:

współczynnik a_0

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^{2\pi} x(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) dt = \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t \right) \Big|_0^{2\pi} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} (2\pi - 2\pi) = 0 \end{aligned}$$

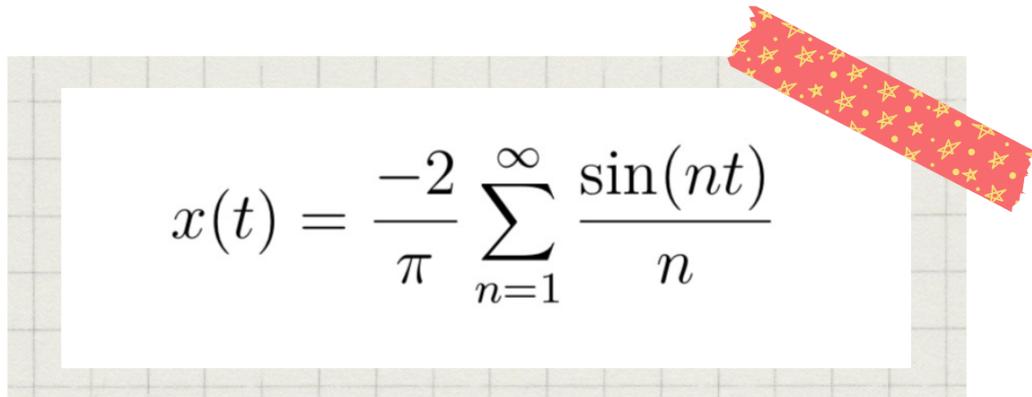
współczynnik a_n

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^{2\pi} x(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \cos(nt) dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \cos(nt) dt - \int_0^{2\pi} \cos(nt) dt \right] = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\pi} \left(\frac{t \sin(nt)}{n} \right) \Big|_0^{2\pi} \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nt)}{n} dt \right) - \frac{\sin(nt)}{n} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n^2} \cos(nt) \Big|_0^{2\pi} \right) = 0
 \end{aligned}$$

współczynnik b_n

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_0^{2\pi} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin(nt) dt \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \sin(nt) dt - \int_0^{2\pi} \sin(nt) dt \right] = \\
 &= \left| \begin{array}{ll} f(t) = t & f'(t) = 1 \\ g'(t) = \sin(nt) & g(t) = -\frac{\cos(nt)}{n} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\pi} \left(\frac{-t \cos(nt)}{n} \right) \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{n} dt \right) + \frac{\cos(nt)}{n} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\pi} \left(\frac{-2\pi \cos(2\pi n)}{n} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\sin(nt)}{n^2} \right) \Big|_0^{2\pi} + \frac{\cos(2\pi n)}{n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n\pi} \left(-2\cos(2\pi n) + \cos(2\pi n) - 1 \right) = \frac{-2}{n\pi}
 \end{aligned}$$

Ostatecznie nasz sygnał piłokształtny rozwija się w następujący szereg Fouriera:



Rys. 6: funkcja $x(t)$ rozwinięta w szereg Fouriera

$$x(t) = \frac{-2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}$$

Rys. 7: funkcja $x(t)$ rozwinięta w szereg Fouriera

ROZWIAZANIE NUMERYCZNE

2.5 Sygnał prostokątny

W numerycznej części raportu wyznaczymy współczynniki szeregu Fouriera oraz wyliczymy nasz szereg przy pomocy kodu napisanego w programie Scilab. Funkcje zostaną zaimplementowane, a współczynniki odpowiednio wyliczone na podstawie wzorów z części analitycznej. Ostatecznie wygenerujemy otrzymane sygnały oraz w kolejnej sekcji porównamy wyniki na wykresach.

Zaczniemy od wygenerowania sygnału prostokątnego:

```

1 function [t,x]=sygnal_prostokatny()
2 ... t=-pi:0.01:pi
3 ... Ns=length(t)
4 ... x=zeros(1,Ns)
5 ...
6 ... for i = 1:Ns
7 ... ... if t(i) > 0 & t(i) < pi then
8 ... ... ... x(i)=1
9 ... ... elseif t(i) > -pi & t(i) < 0 then
10 ... ... ... x(i)=-1
11 ... ... elseif t(i) == -pi | t(i) == pi then
12 ... ... ... x(i)=0
13 ... ... end
14 ... end
15 endfunction
16
1 function x=roz_analityczne(Ns)
2 ... t=-pi:0.01:pi
3 ... x=0
4 ... for k = 1:Ns
5 ... ... x = x + 4/pi*(sin((2*k-1)*t))/(2*k-1)
6 ... end
7 endfunction

```



Następnie zaimplementujemy kod obliczający rozwiązanie analityczne na podstawie wyników z poprzednich sekcji:

```

16
1 function x=roz_analityczne(Ns)
2 ... t=-pi:0.01:pi
3 ... x=0
4 ... for k = 1:Ns
5 ... ... x = x + 4/pi*(sin((2*k-1)*t))/(2*k-1)
6 ... end
7 endfunction

```



W kolejnym kroku wygenerujemy współczynniki, również stosując wyliczone przedtem wzory oraz zaprezentujemy rozwiązanie numeryczne szeregu Fouriera:

```

1 function a = a_n(n)
2 ... a=1/%pi*(integrate("-cos(n*t)", "t", -%pi, 0)+integrate("cos(n*t)", "t", 0, %pi))
3 endfunction
28
1 function b = b_n(n)
2 ... b=1/%pi*(integrate("sin(n*t)", "t", 0, %pi)+integrate("-sin(n*t)", "t", -%pi, 0))
3 endfunction
32
1 function a0 = a_0(n)
2 ... a0=1/%pi*(integrate("-l", "t", -%pi, 0)+integrate("l", "t", 0, %pi))
3 endfunction
36
1 function x=roz_numeryczne(Ns)
2 ... t=-%pi:0.01;%pi
3 ... x = a_0(Ns)/2
4 ...
5 ... for n=1:Ns
6 ... ... a = a_n(n)
7 ... ... b = b_n(n)
8 ... ... x = x + a*cos(n*t)+b*sin(n*t)
9 ... end
10 endfunction

```

Ostatecznie jesteśmy w stanie wywołać wszystkie funkcje wraz z wykresami:

```

48 [t,x1]= sygnal_prostokatny()
49 x2 = roz_analityczne(1)
50 x2_ = roz_numeryczne(1)
51
52 x3 = roz_analityczne(10)
53 x3_ = roz_numeryczne(10)
54
55 x4 = roz_analityczne(100)
56 x4_ = roz_numeryczne(100)
57
58 plot(t, x1, t, x2, t, x2_)
59 ax=gca()
60 ax.data_bounds= [-5.7-0;5.7-2.3]
61 legend('Sygnał-wyjściowy', 'rozwiązańe-analityczne', 'rozwiązańe-numeryczne')
62 xtitle("Sygnał-prostokątny dla N=1", 't', 'x(t)')
63 xs2png(0, 'C:\Users\zuzia\Desktop\wykres61.png')
64 clf
65
66 plot(t, x1, t, x3, t, x3_)
67 ax=gca()
68 ax.data_bounds= [-5.7-0;5.7-2.3]
69 legend('Sygnał-wyjściowy', 'rozwiązańe-analityczne', 'rozwiązańe-numeryczne')
70 xtitle("Sygnał-prostokątny dla N=10", 't', 'x(t)')
71 xs2png(0, 'C:\Users\zuzia\Desktop\wykres62.png')
72
73
74 plot(t, x1, t, x4, t, x4_)
75 ax=gca()
76 ax.data_bounds= [-5.7-0;5.7-2.3]
77 legend('Sygnał-wyjściowy', 'rozwiązańe-analityczne', 'rozwiązańe-numeryczne')
78 xtitle("Sygnał-prostokątny dla N=100", 't', 'x(t)')
79 xs2png(0, 'C:\Users\zuzia\Desktop\wykres23.png')
80 clf

```

Zmienna N definiuje liczbę wyrazów rozwinięcia szeregu Fouriera. Wygenerowaliśmy wykresy dla trzech różnych wartości $N = 1, 10, 100$. Dodatkowo im większe N, tym szereg lepiej przybliży omawianą funkcję.

2.6 Sygnał trójkątny

W celu numerycznego wyznaczenia szeregu Fouriera naszego sygnału, postąpimy analogicznie jak w poprzedniej sekcji.

Na początku generujemy nas sygnał wyjściowy:

```

1 function [t,x]=sygnal_trojkatny()
2     t=0:0.01:2*pi
3     Ns=length(t)
4     x=zeros(1,Ns)
5
6     for i=1:Ns
7         if t(i)>0 & t(i)<%pi then
8             x(i)=-t(i)/%pi+1
9         elseif t(i)>%pi & t(i)<2*pi then
10            x(i)=t(i)/%pi-1
11        elseif t(i)==0 | t(i)==%pi then
12            x(i)=0
13        end
14    end
15 endfunction

```

Implementujemy kod wyliczający analitycznie nasz szereg Fouriera:

```

10
1 function x=roz_analityczne(Ns)
2     t=0:0.01:2*pi
3
4     x=1/2
5
6     for k=1:Ns
7         x=x+4/%pi^2*(cos((2*k-1)*t))/(2*k-1)^2
8     end
9 endfunction

```

Obliczamy współczynniki oraz implementujemy kod na rozwiązanie numeryczne:

```

1 function a = a_n(n)
2 ... a = 1/%pi^k(integrate("(-t/%pi+1)^kcos(n^k t)", "t", 0, %pi) +integrate("(t/%pi-1)^kcos(n^k t)", "t", %pi, -2*k*pi))
3 endfunction
30
1 function b = b_n(n)
2 ... b = 1/%pi^k(integrate("(-t/%pi+1)^ksin(n^k t)", "t", 0, %pi) +integrate("(t/%pi-1)^ksin(n^k t)", "t", %pi, -2*k*pi))
3 endfunction
34
1 function a0 = a_0(n)
2 ... a0= 1/%pi^k(integrate("(-t/%pi+1)", "t", 0, %pi) +integrate("(t/%pi-1)", "t", %pi, -2*k*pi))
3 endfunction
38
1 function x=roz_numeryczne(Ns)
2 ... t= 0:0.01:2*k*pi
3 ... x = a_0(Ns)/2
4 ...
5 ... for n = 1:Ns
6 ... ... a = a_n(n)
7 ... ... b = b_n(n)
8 ... ... x = x + a*cos(n^k t)+b*sin(n^k t)
9 ... end
10 endfunction

```

Wywołujemy funkcję oraz generujemy wykresy:



```

50 [t,x1]= sygnal_trójkątny()
51 x2 = roz_analityczne(1)
52 x2_ = roz_numeryczne(1)
53
54 x3 = roz_analityczne(10)
55 x3_ = roz_numeryczne(10)
56
57 x5 = roz_analityczne(100)
58 x5_ = roz_numeryczne(100)
59
60 plot(t, x1,'color',[1-0.4-0.7]), -t, x2, -t, x2_
61 ax=gca()
62 ax.data_bounds=[-0.5-0;6.1-1.3]
63 legend('Sygnał-wyjściowy','rozwiązańe-analityczne','rozwiązańe-numeryczne')
64 xtitle("Sygnał-trójkątny-dla-N=1",'t','x(t)')
65 xs2png(0, 'C:\Users\zuzia\Desktop\wykreslll.png')
66
67
68 plot(t, x1, -t, x3, -t, x3_)
69 ax=gca()
70 ax.data_bounds=[-0.5-0;6.1-1.3]
71 legend('Sygnał-wyjściowy','rozwiązańe-analityczne','rozwiązańe-numeryczne')
72 xtitle("Sygnał-trójkątny-dla-N=10",'t','x(t)')
73 clf
74
75 plot(t, x1, -t, x4, -t, x4_)
76 ax=gca()
77 ax.data_bounds=[-0.5-0;6.1-1.3]
78 legend('Sygnał-wyjściowy','rozwiązańe-analityczne','rozwiązańe-numeryczne')
79 xtitle("Sygnał-trójkątny-dla-N=100",'t','x(t)')
80 clf

```

2.7 Sygnał piłokształtny

W tej części również postępujemy analogicznie z podsekcją (2.6) oraz (2.7).

Generujemy sygnał piłokształtny:

```

1 function [t,x]=sygnal_pilokształtny()
2     t=0:0.01:2*pi
3     Ns=length(t)
4     x=zeros(1,Ns)
5
6     for i = 1:Ns
7         if t(i) > 0 & t(i) < 2*pi then
8             x(i) = t(i)/pi - 1
9         elseif t(i) == 0 | t(i) == 2*pi then
10            x(i) = 0
11        end
12    end
13 endfunction

```



Następnie generujemy szereg Fouriera wyliczony metodą analityczną:

```

1 function x=roz_analityczne(Ns)
2     t=0:0.01:2*pi
3     x=0
4     for n = 1:Ns
5         x=x-2/pi*(sin(n*t))/n
6     end
7 endfunction
--
```

W kolejnym kroku zostaje nam wyznaczyć numerycznie współczynniki oraz podstawić pod wzór, aby wyliczyć szereg Fouriera numerycznie:

```


1 function a = a_n(n)
2 ... a=1/%pi*(integrate("(t/%pi-1)^cos(n^t)", "t", 0, 2*pi) +integrate("cos(n^t)", "t", 0, %pi))
3 endfunction
26
1 function b = b_n(n)
2 ... b = 1/%pi*(integrate("(t/%pi-1)^sin(n^t)", "t", 0, 2*pi))
3 endfunction
30
1 function a0 = a_0(n)
2 ... a0= 1/%pi*(integrate("(t/%pi-1)", "t", 0, 2*pi))
3 endfunction
34
1 function x=roz_numeryczne(Ns)
2 ... t=-0:0.01:2*pi
3 ... x = a_0(Ns)/2
4 ...
5 ... for n = 1:Ns
6 ... ... a = a_n(n)
7 ... ... b = b_n(n)
8 ... ... x = x + a*cos(n*t)+b*sin(n*t)
9 ... end
10 endfunction


```

Ostatecznie wywołujemy funkcje dla każdej z trzech wartości N oraz generujemy wykresy:

```


46 [t,x1]=sygnal_pilokształtny()
47 x2 = roz_analityczne(1)
48 x2_ = roz_numeryczne(1)
49
50 x3 = roz_analityczne(10)
51 x3_ = roz_numeryczne(10)
52
53 x4 = roz_analityczne(100)
54 x4_ = roz_numeryczne(100)
55
56 plot(t, x1, t, x2, t, x2_)
57 ax=gca()
58 ax.data_bounds=[0 0;7 2.3]
59 legend('Sygnał-wyjściowy', 'rozwiązanie-analityczne', 'rozwiązanie-numeryczne')
60 xtitle("Sygnał-pilokształtny-dla-N=1", 't', 'x(t)')
61 xs2png(0, 'C:\Users\zuzia\Desktop\wykres41.png')
62 clf
63
64 plot(t, x1, t, x3, t, x3_)
65 ax=gca()
66 ax.data_bounds=[0 0;7 2.3]
67 legend('Sygnał-wyjściowy', 'rozwiązanie-analityczne', 'rozwiązanie-numeryczne')
68 xtitle("Sygnał-pilokształtny-dla-N=10", 't', 'x(t)')
69 xs2png(0, 'C:\Users\zuzia\Desktop\wykres72.png')
70
71
72 plot(t, x1, t, x4, t, x4_)
73 ax=gca()
74 ax.data_bounds=[-5.7-0;5.7-2.3]
75 legend('Sygnał-wyjściowy', 'rozwiązanie-analityczne', 'rozwiązanie-numeryczne')
76 xtitle("Sygnał-pilokształtny-dla-N=100", 't', 'x(t)')
77 xs2png(0, 'C:\Users\zuzia\Desktop\wykres23.png')
78 clf

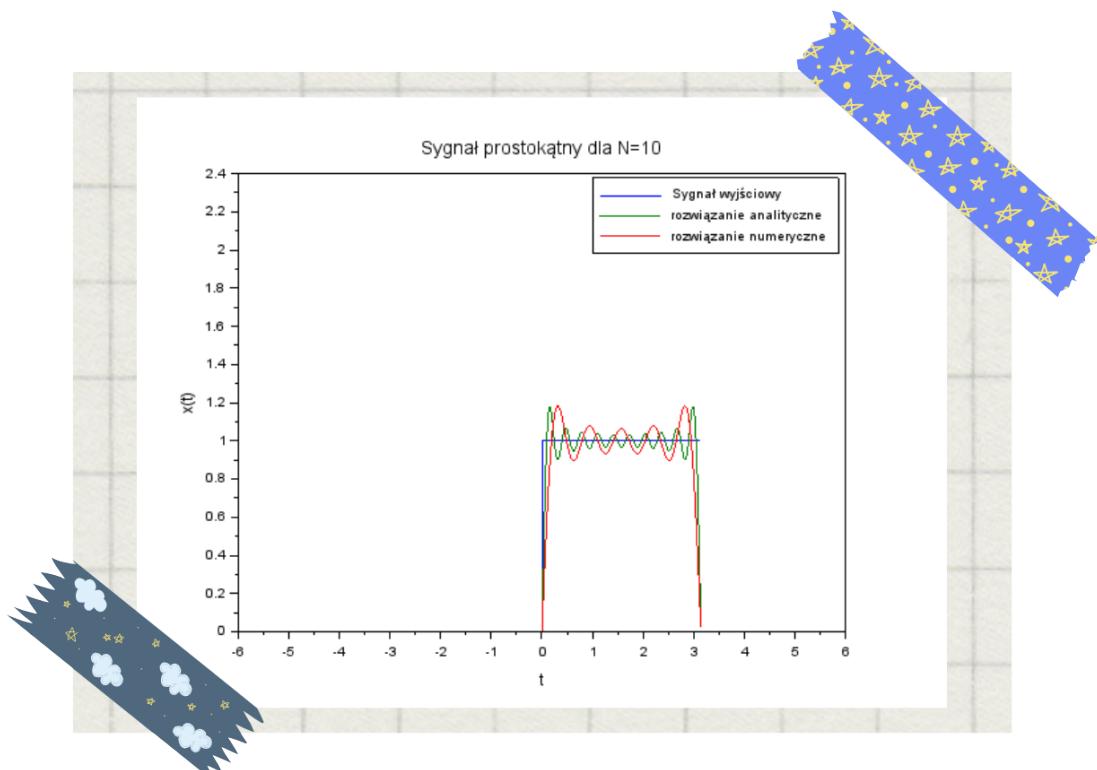

```



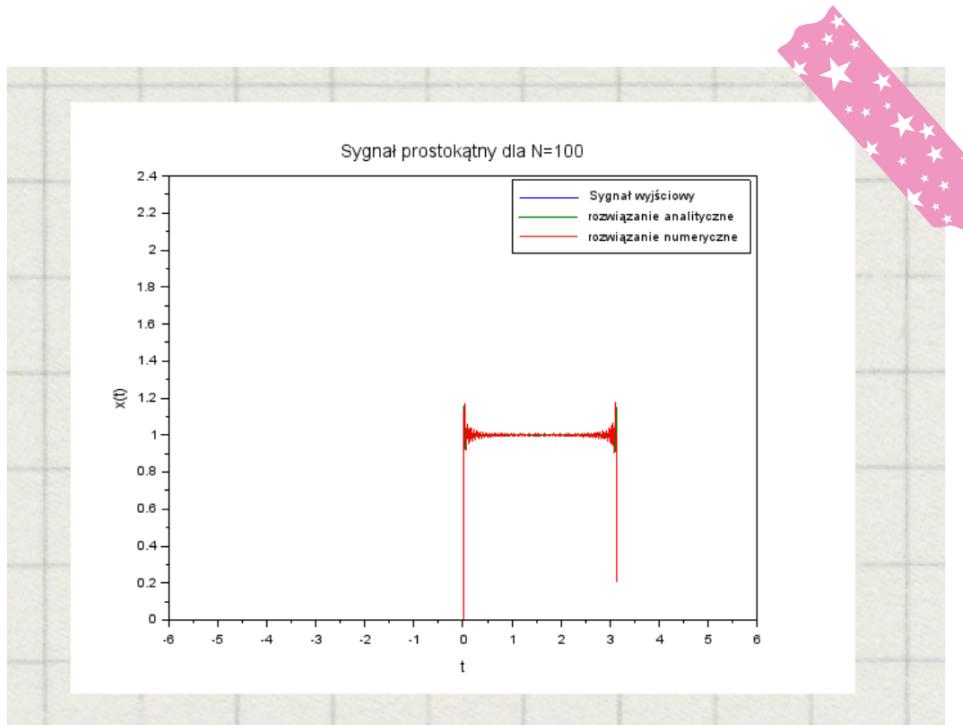
3 Porównanie metod

Po wykonaniu części numerycznej sprawozdania, możemy przejść do przedstawienia wygenerowanych wykresów. W ten sposób otrzymamy porównanie obu metod.: **analitycznej** oraz **numerycznej**. Dodatkowo warto zwrócić uwagę, że gdy zwiększa się wartość N to nasz wyjściowy sygnał bardziej pokrywa się z otrzymanymi krzywymi.

3.1 Sygnał prostokątny



Rys. 8: Wygenerowany wykres dla $N=10$

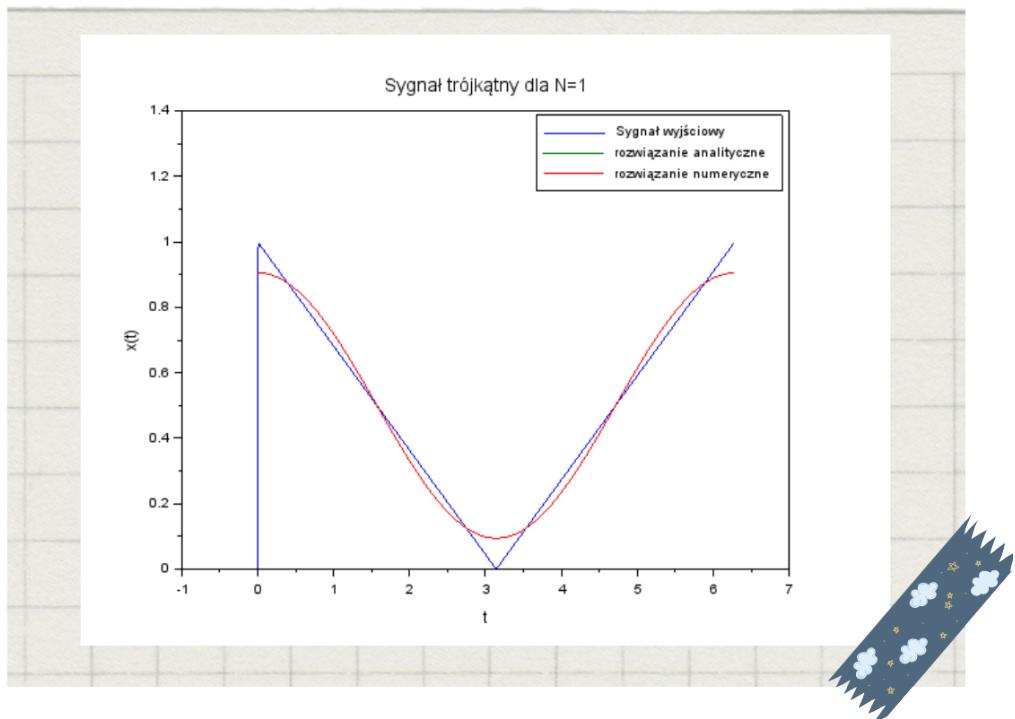


Rys. 9: Wygenerowany wykres dla $N=100$

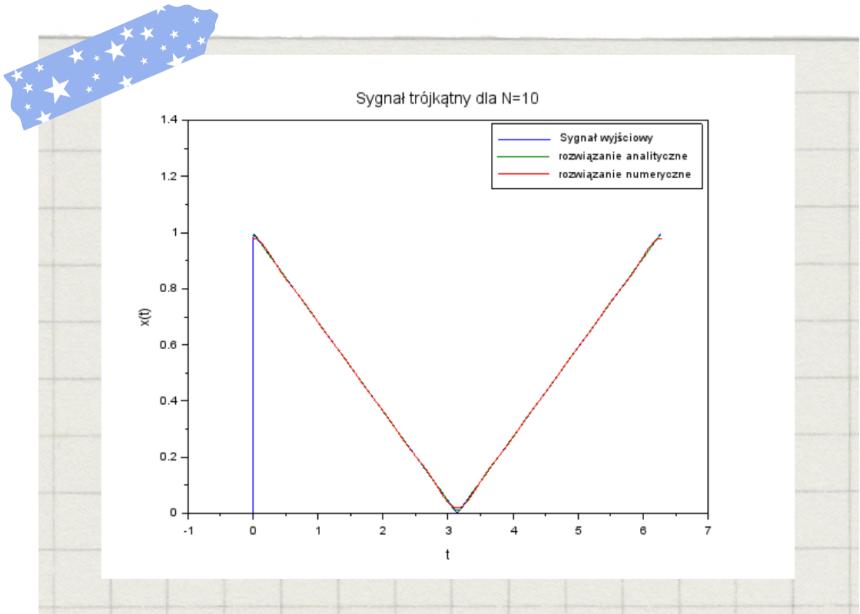
Na wykresach widzimy, że krzywe reprezentujące obie metody, pokrywają się z sygnałem wejściowym. Możemy wnioskować, że proces przebiegł poprawnie.

3.2 Sygnał trójkątny

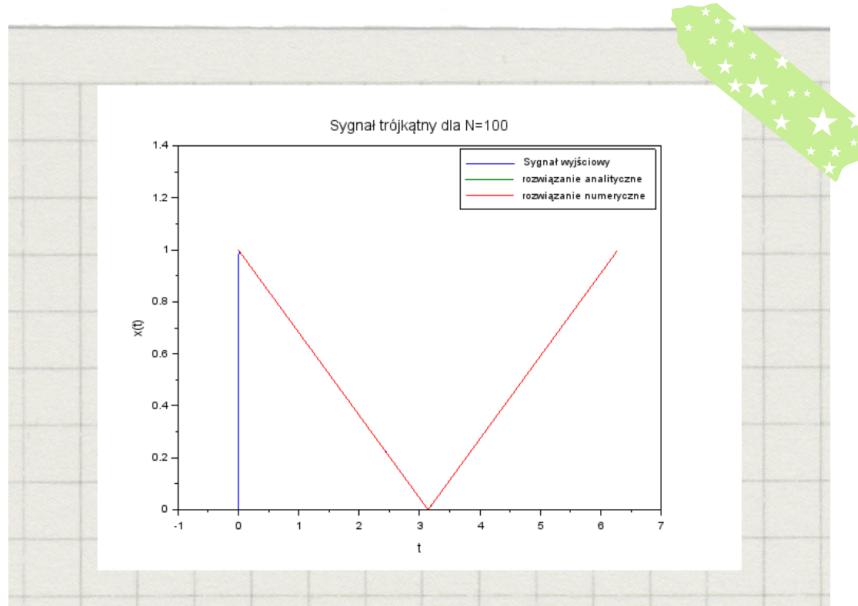
Poniżej przedstawione zostały trzy wykresy sygnału trójkątnego wraz z obliczonymi dwoma sposobami szeregami Fouriera:



Rys. 10: Wygenerowany wykres dla N=1



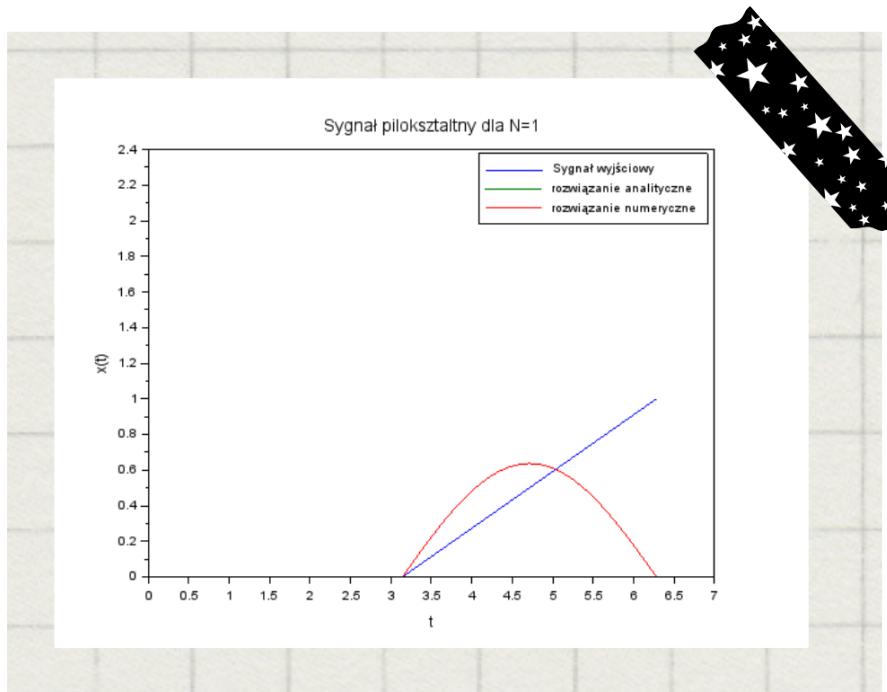
Rys. 11: Wygenerowany wykres dla $N=10$



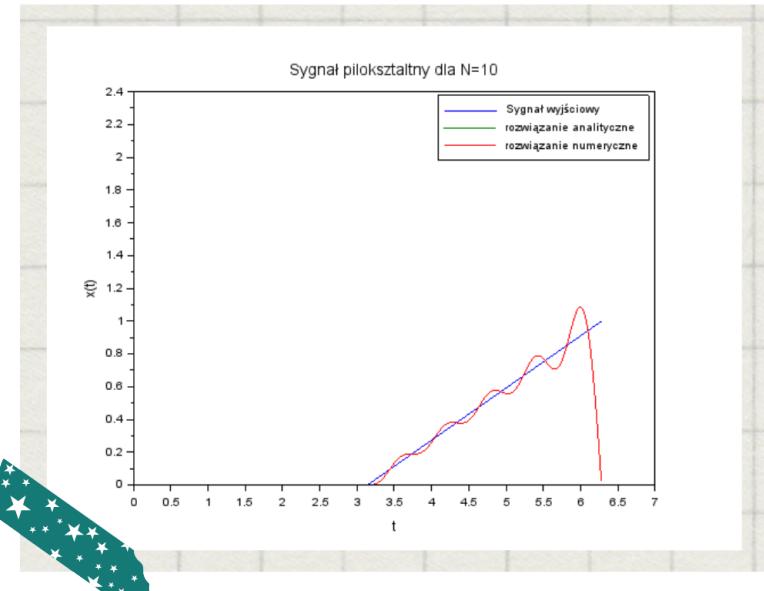
Rys. 12: Wygenerowany wykres dla $N=100$

3.3 Sygnał piłokształtny

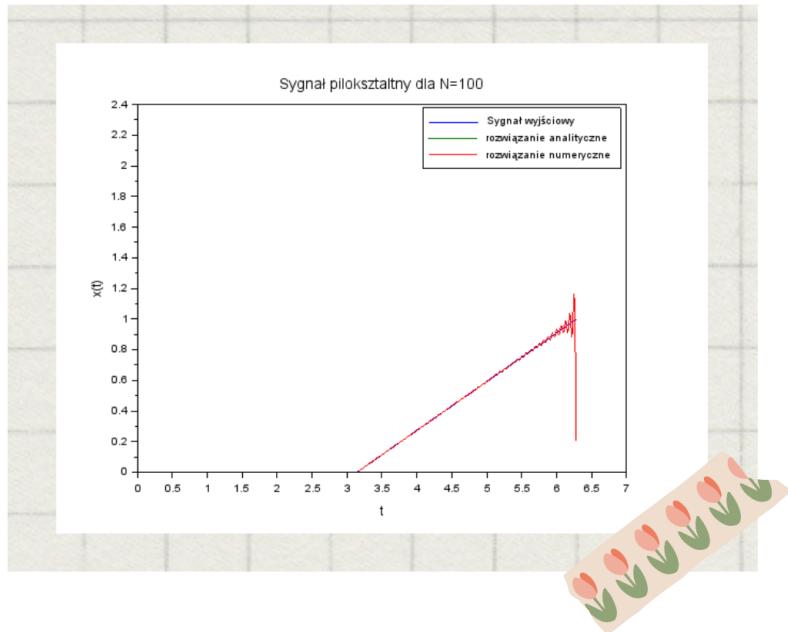
Poniżej znajdują się wykresy naszego otrzymanego sygnału piłokształtnego wraz z wyliczonymi szeregami Fouriera:



Rys. 13: Wygenerowany wykres dla $N=1$



Rys. 14: Wygenerowany wykres dla $N=10$



Rys. 15: Wygenerowany wykres dla $N=100$

W tej sekcji również możemy zaobserwować pokrycie się szeregów, wyliczonych metodą analityczną oraz numeryczną, z sygnałem piłokształtnym. Świadczy to oczywiście o poprawności przebiegu procesu.

4 Podsumowanie

W niniejszym raporcie omówiliśmy **szeregi Fouriera**, prezentując część teoretyczną, a także przedstawiając model matematyczny. Zostały przeanalizowane trzy sygnały: **prostokątny, trójkątny oraz piłokształtny**, a wykorzystane narzędzia z pewnością pomogły dokonać analizy harmonicznej. Dodatkowo przedstawione zostały dwie metody, które końcowo zostały porównane w podstaci wykresów. Możemy wnioskować, iż oba sposoby są poprawne i sprawdziły się przy dokonanej analizie. Jednak metoda numeryczna okazała się mniej czasochłonna.

Dodatkowo liczba pierwszych wyrazów rozwinięcia szeregu Fouriera, wpływała na dokładność aproksymacji funkcji. Gdy przyjrzymy się bliżej wygenerowanym wykresom, możemy zauważać, że sygnał trójkątny nie zawiera tyle elementów skokowych. Możemy to przyrównać z sygnałem prostokątnym oraz piłokształtnym, które zawierają sporo tych skoków, a szereg nie radzi sobie, aż tak dobrze z ich szacowaniem. Podsumowując warto znać obie metody rozwiązania oraz samo zagadnienie szeregów Fouriera. Metoda numeryczna okazuje się naprawdę efektowna, a wiedza w temacie szeregów z pewnością przyda się w wielu dziedzinach nauki.