诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生期末考试

《工科数学分析（二）》 A 卷

2017-2018 学年第二学期

参考答案

注意事项：

一、 开考前请将密封线内各项信息填写清楚；

二、 所有答案请直接答在试卷上；

三、 考试形式：闭卷；

四、 本试卷共 **6** 大题，满分 **100** 分，考试时间 **120** 分钟。

题　号	一	二	三	四	五	六	总　分
得　分							

一、 填空题：共 5 题，每题 2 分，共 10 分.

1. 微分方程 $y''+y'-2y=1-2x$ 的通解为 $\underline{\quad y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}+x\quad}$；

2. 设函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$，求 $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)=\underline{\quad \frac{2}{x^2+y^2+z^2}\quad}$；

3. 设 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则第一类曲线积分 $\oint\limits_{\Gamma}y^2\mathrm{d}s=\underline{\quad \frac{2}{3}\pi R^3\quad}$；

4. 参数曲线 $\begin{cases}x=t-\cos t,\\ y=1-\sin t,\\ z=t,\end{cases}$ 在 $t=0$ 对应的点处的切线方程为 $\underline{\quad \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}\quad}$；

5. 设周期为 2π 的函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0,\\ 1, & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的傅里叶 (Fourier) 级数在 $x=\pi$ 处收敛于 $\underline{\quad 0\quad}$；

二、 单选题: 共 5 题, 每题 2 分, 共 10 分.

1. 关于未知函数 y 的微分方程 $(y-\sin x)\mathrm{d}x+\ln x\mathrm{d}y=0$ 是 (B)

   A. 可分离变量方程;　　B. 一阶线性非齐次方程;

   C. 一阶线性齐次方程;　　D. 非线性方程.

2. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0 \end{cases}$, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ (C)

   A. 不存在;　　B. 等于 1;

   C. 等于 0;　　D. 等于 2.

3. 设函数 $z=f(x,y)$ 在 (a,b) 的某个邻域内有直到二阶的连续偏导数, 且 $\frac{\partial z}{\partial x}(a,b)=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}(a,b)=0$, 记

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(a,b),\qquad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(a,b),\qquad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(a,b).$$

   则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (a,b) 取极大值的充分条件是 (B)

   A. $A>0, AC>B^2$;　　B. $A<0, AC>B^2$;

   C. $A>0, AC<B^2$;　　D. $A<0, AC<B^2$.

4. 函数 $\ln(1-x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒 (Taylor) 展开式正确的是 (A)

   A. $\ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n, x\in(-1,1]$;

   B. $\ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n, x\in(-1,1]$;

   C. $\ln(1-x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n, x\in[-1,1)$;

   D. $\ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n, x\in[-1,1)$.

5. 使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n^p}$ 条件收敛的常数 p 的取值范围是 (C)

   A. $p\leqslant 0$;　　B. $0<p<1$;

   C. $0<p\leqslant 1$;　　D. $p>1$.

三、 计算题: 共 3 题, 每题 10 分, 共 30 分.

1. 设 $u=f(x,y,z)$, 其中函数 f 有二阶连续的偏导数, 且 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^5-5xy+5z=1$ 所确定, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

解: 先用隐函数求导法求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$. 在方程 $z^5-5xy+5z=1$ 的两边求全微分, 得

$$5z^4\mathrm{d}z-5x\mathrm{d}y-5y\mathrm{d}x+5\mathrm{d}z=0.$$

因此,

$$\mathrm{d}z=\frac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{z^4+1}.$$

即,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{z^4+1},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{z^4+1}.$$

由复合函数的求导法则, 可得

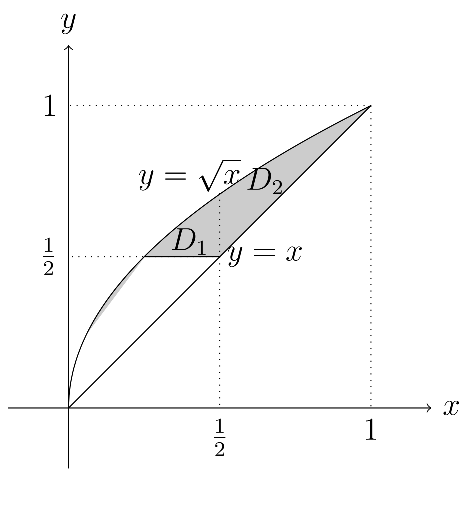
$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'(x,y,z)+f_3'(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'(x,y,z)+f_3'(x,y,z)\frac{y}{z^4+1}.$$

进一步, 可如下求得二阶偏导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=&f_{11}''(x,y,z)+f_{31}''(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}\\&+f_{13}''(x,y,z)\frac{y}{z^4+1}+f_{33}''(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}-f_3'(x,y,z)\frac{y}{(z^4+1)^2}4z^3\frac{\partial z}{\partial x}\\=&f_{11}''(x,y,z)+f_{13}''(x,y,z)\frac{2y}{z^4+1}+f_{33}''(x,y,z)\frac{y}{z^4+1}-f_3'(x,y,z)\frac{4y^2z^3}{(z^4+1)^3}.\end{aligned}$$

2. 计算累次积分 $\int_{\frac14}^{\frac12}\mathrm{d}x\int_{\frac12}^{\sqrt{x}}e^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y+\int_{\frac12}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{\sqrt{x}}e^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y.$

解: 记 D 为由 $y=\frac12$, $y=\sqrt{x}$ 和 $y=x$ 围成的区域, 如图示



则所求累次积分为

$$
\begin{aligned}
&\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{x}} e^{\frac{x}{y}} \mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}x \int_{x}^{\sqrt{x}} e^{\frac{x}{y}} \mathrm{d}y \\
=&\iint_D e^{\frac{x}{y}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}y \int_{y^2}^{y} e^{\frac{x}{y}} \mathrm{d}x \\
=&\int_{\frac{1}{2}}^{1} ey - ye^y \mathrm{d}y \\
=&\frac{3}{8}e - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

3. 计算球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ 含在抛物面 $z = x^2 + y^2$ 内的部分的面积.

解: 曲面 Σ 显示方程 $z = 2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, 其含在抛物面 $z = x^2 + y^2$ 内的部分在 xOy 平面的投影区域为

$$D := \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

曲面面积微元为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}S =&\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\right)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

因此, 所求曲面面积为

$$
\begin{aligned}
A =& \iint_\Sigma 1 \mathrm{d}S \\
=& \iint_{x^2+y^2\leq 3} \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=& \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{4 - r^2}} r\mathrm{d}r \\
=& 4\pi.
\end{aligned}
$$

四、 解答题: 共 3 题, 每题 10 分, 共 30 分.

1. 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=0$ 及 $z=1$ 截下的部分的下侧, 计算第二类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} xye^z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x-ye^z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解: 考虑平面 $\Sigma_1: z=1$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 的部分, 取上侧. 则 $\Sigma\cup\Sigma_1$ 形成一个闭曲面, 取外侧. 记其围成的闭曲面为 Ω, 由 Gauss 公式,

$$\iint\limits_{\Sigma\cup\Sigma_1} xye^z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x-ye^z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

而

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leq z^2} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\pi z^4\mathrm{d}z=\frac{\pi}{5}.$$

另一方面, Σ_1 的单位正法向为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$, 因此,

$$\iint\limits_{\Sigma\cup\Sigma_1} xye^z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x-ye^z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leq 1}-ye\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

因此,

$$\iint\limits_{\Sigma} xye^z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x-ye^z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leq 1}-ye\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{5}.$$

2. 设曲线积分 $\int\limits_{\Gamma}(\sin x-f(x))\frac{y}{x}\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关, 其中 $f(x)$ 有一阶连续导数且 $f(\pi)=1$, 求 $f(x)$ 并计算曲线积分 $\int\limits_{(1,0)}^{(\pi,\pi)}(\sin x-f(x))\frac{y}{x}\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$.

解: 记 $P=(\sin x-f(x))\frac{y}{x}, Q=f(x)$. 由积分 $\int\limits_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关, 有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. 即,

$$\frac{\sin x}{x}-\frac{f(x)}{x}=f'(x).$$

这是一个一阶线性非齐次微分方程, 积分因子 x, 因此

$$(xf(x))'=xf'(x)+f(x)=\sin x.$$

其通解为

$$f(x)=-\frac{\cos x}{x}+\frac{C}{x},$$

其中 C 为任意常数. 由 $f(\pi)=1$ 得 $C=-1$. 因此, $f(x)=\frac{-\cos x-1}{x}$.

此时,

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\frac{(x\sin x+\cos x+1)y}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{\cos x+1}{x}\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(-\frac{(\cos x+1)y}{x}\right).$$

因此,

$$\int\limits_{(1,0)}^{(\pi,\pi)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0.$$

3. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ 的收敛域及和函数.

解: 考虑幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}t^n$, 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2(n+1)+1}}{\frac{1}{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=1.$$

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}t^n$ 的收敛半径为 1. 因此幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}(x^2)^n$ 的收敛半径也是 1. 当 $x=\pm1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ 发散. 因此, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ 的收敛域为 $(-1,1)$.
记其和函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in(-1,1).$$

对 $\forall x\in(-1,1)$, 有

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}.$$

因此, 对 $\forall x\in(-1,1)$ 有

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^t\frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

易知, $f(0)=0$. 因此,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad x\in(-1,1).$$

五、 证明题: 共 1 题, 每题 10 分, 共 10 分.

证明函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛.

证明一: 对 $\forall x \in [0,+\infty)$, 我们有

$$e^{nx} > 1 + nx + \frac{1}{2}(nx)^2 > \frac{1}{2}(nx)^2.$$

因此,

$$\left|x^2 e^{-nx}\right| = \left|\frac{x^2}{e^{nx}}\right| \leq \frac{2}{n^2}.$$

而数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛. 由优级数判别法, 函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛.

证明二: 此函数项级数的部分和序列为

$$S_n(x) = \begin{cases} \frac{x^2(1-e^{-(n+1)x})}{1-e^{-x}}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

因此,

$$S(x) := \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1-e^{-x}}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

下证函数列 $S_n(x)$ 一致收敛于 $S(x)$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > \frac{1}{\epsilon}$, 当 $n > N$ 时, $\forall x \in [0,+\infty)$,

$$|S_n(x) - S(x)| \leq \left|\frac{x^2 e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}\right| = \left|\frac{x}{e^x - 1}\right| \left|\frac{x}{e^{nx}}\right| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

这里用到了不等式 $e^x \geq x + 1 \geq x, \forall x \in [0,+\infty)$.

因此, 函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛.

六、 应用题: 共 1 题, 每题 10 分, 共 10 分.

将长度为 $2a$ 的铁丝分成三段, 分别围成一个正方形、一个圆形和一个正三角形, 求三个图形面积之和的最大值.

解: 设正方形的边长为 x, 圆形的半径为 y, 正三角形的边长为 z. 则三个图形的周长之和

$$4x + 2\pi y + 3z = 2a.$$

它们的面积之和

$$f(x,y,z) = x^2 + \pi y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}z^2.$$

构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda) = x^2 + \pi y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}z^2 - \lambda(4x + 2\pi y + 3z - 2a).$$

极值点满足

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 4\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2\pi y - 2\pi\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\sqrt{3}}{2}z - 3\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(4x + 2\pi y + 3z - 2a) = 0. \end{cases}$$

解得

$$\lambda = \frac{a}{4+\pi+3\sqrt{3}}, \quad x_0 = \frac{2a}{4+\pi+3\sqrt{3}}, \quad y_0 = \frac{a}{4+\pi+3\sqrt{3}}, \quad z_0 = \frac{2\sqrt{3}a}{4+\pi+3\sqrt{3}}.$$

所求最小面积为

$$f(x_0,y_0,z_0) = \frac{a^2}{4+\pi+3\sqrt{3}}.$$