座位号______ 专业班级______ 学院______ 学号______ 姓名______
（密 封 线 内 不 答 题）
密 封 线

诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生期末考试

《工科数学分析》2017-2018 学年第一学期期末考试试卷 (A) 卷

参考答案

注意事项：

1. 开考前请将密封线内各项信息填写清楚;
2. 所有答案请直接答在试卷上;
3. 考试形式：闭卷;
4. 本试卷共 5 个大题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。

题　　号	一	二	三	四	五	总　　分
得　　分						
评 卷 人						

一、 填空题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]=$ ____1____;
2. 设在区间 $[0,1]$ 上，$f''(x)>0$，则 $f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$ 的大小顺序是 ____$f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1)$____;
3. 设 $y=xe^x$，则 $\mathrm{d}^{(n)}y=$ ____$(x+n)e^x\mathrm{d}x^n$____;
4. $\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+\frac{\sin x}{1+x^6}\right)\mathrm{d}x=$ ____π____;
5. 反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x}\mathrm{d}x=$ ____1____。

二、 计算下列各题（3 小题，每小题 8 分，共 24 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}\int_0^x t^2e^{t^2}\mathrm{d}t}{x}$

   解：应用 L'Hôspital 法则和原函数存在定理，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}\int_0^x t^2e^{t^2}\mathrm{d}t}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^2e^{t^2}\mathrm{d}t}{xe^{x^2}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+2x^2}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. 求不定积分 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x \mathrm{d}x$

解:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x \mathrm{d}x &= \int \frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} e^x \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} e^x + \tan\frac{x}{2} e^x \mathrm{d}x \\
&= \int e^x \mathrm{d}\tan\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} \mathrm{d}e^x \\
&= \int \mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2} e^x\right) \\
&= \tan\frac{x}{2} e^x + C.
\end{aligned}$$

3. 计算定积分 $\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4} \mathrm{d}x$

解:

$$\begin{aligned}
\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4} \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{a\tan t}{a^4 \sec^4 t} \mathrm{d}(a\sec t) \\
&= \frac{1}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^2 t}{\sec^3 t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \cos t \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \mathrm{d}\sin t \\
&= \frac{1}{3a^2} \sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8a^2}.
\end{aligned}$$

三、 解答题（4 小题，每题 8 分，共 32 分）

1. 设 $a>0, 0<x_1<\frac{1}{a}, x_{n+1}=x_n(2-ax_n),(n=1,2,\ldots)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

解：先证明数列 $\{x_n\}$ 有界。因为

$$x_{n+1}=x_n(2-ax_n)=-a\left(x_n-\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{a}.$$

因此，若 $0<x_n<\frac{1}{a}$，则 $0<x_{n+1}<\frac{1}{a}$。现在有 $0<x_1<\frac{1}{a}$，由归纳法，$0<x_n<\frac{1}{a}$，$n=1,2,\ldots.$

进而，$\{x_n\}$ 是一个正数列，满足

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=2-ax_n>1.$$

即 $\{x_n\}$ 是单调递增数列。

由单调有界收敛定理，数列 $\{x_n\}$ 收敛，记其极限为 x。在等式

$$x_{n+1}=x_n(2-ax_n)$$

两端令 $n\to\infty$，有

$$x=x(2-ax).$$

解得 $x=0$ 或 $x=\frac{1}{a}$。

由于数列 $\{x_n\}$ 单调递增，故 $x\geqslant x_1>0$，因此 $x=\frac{1}{a}$.

2. 求函数 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间及拐点（要求列表）。

解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

$$f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(x-1)x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}},$$
$$f''(x)=\frac{15}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{9}(5x-2)x^{-\frac{4}{3}}=\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}(5x+1).$$

列表如下

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right)$	$-\frac{1}{5}$	$\left(-\frac{1}{5},0\right)$	0	$\left(0,\frac{2}{5}\right)$	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	不存在	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	不存在	$+$	$+$	$+$

由表中数据知，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 单调递增，在 $\left[0,\frac{2}{5}\right]$ 单调递减，在 $\left[\frac{2}{5},+\infty\right)$ 单调递增。

当 $x=-\frac{1}{5}$ 时，$f\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{6}{5\sqrt[3]{25}}$，即 $\left(-\frac{1}{5},-\frac{6}{5\sqrt[3]{25}}\right)$ 是函数 $f(x)$ 的拐点。

3. 求旋轮线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 上斜率为 1 的切线方程，并求 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$。

解：由参数求导法,

$$y'(x) = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

在切线斜率为 1 的点处, 参数 t 满足

$$1 = y'(x) = \frac{\sin t}{1-\cos t}$$

即, $t = \frac{\pi}{2}$. 此参数对应的旋轮线上的点为

$$x_0 = a\left(\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right), \qquad y_0 = a.$$

因此, 切线方程为

$$y - a = x - a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

函数 $y'(x)$ 可由参数方程表示为

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y' = \frac{\sin t}{1-\cos t}, \end{cases} \quad 0 < t < 2\pi.$$

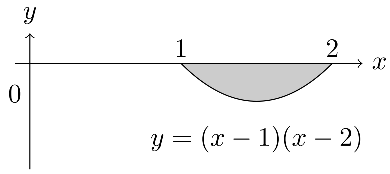
因此,

$$y''(x) = \frac{\frac{\mathrm{d}y'(x)}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{\cos t(1-\cos t) - \sin^2 t}{(1-\cos t)^2}}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

4. 求曲线 $y = (x-1)(x-2)$ 和 x 轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转而成的立体的体积。

解：所求旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 2\pi x|(x-1)(x-2)|\mathrm{d}x \\ &= -2\pi\int_1^2 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x \\ &= -2\pi\int_1^2 x^3 - 3x^2 + 2x\mathrm{d}x \\ &= -2\pi\left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right)\Big|_1^2 \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



四、 证明题（2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足李普希兹条件：$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|(\forall x,y\in[a,b])$，其中 L 为常数。

   证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

   证明：$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\frac{\varepsilon}{L}$，使得当 $x_1,x_2\in[a,b]$ 且满足 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|<L\delta=\varepsilon.$$

   因此，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 一致连续。

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有三阶连续导数，且 $f(-1)=0,f(1)=1,f'(0)=0$，证明：至少存在 $\xi\in(-1,1)$, 使得 $f'''(\xi)=3$。

   解：考虑 $f(x)$ 在 $x=0$ 处带 Lagrange 余项的三阶 Taylor 公式。存在 $\xi_1\in(-1,0)$ 使得

$$f(-1)=f(0)+f'(0)(-1)+\frac{f''(0)}{2!}(-1)^2+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(-1)^3.$$

   即，

$$0=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}-\frac{1}{6}f'''(\xi_1).$$

   同理，存在 $\xi_2\in(0,1)$ 使得

$$f(1)=f(0)+f'(0)1+\frac{f''(0)}{2!}1^2+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}1^3.$$

   即，

$$1=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}+\frac{1}{6}f'''(\xi_2).$$

   因此，

$$\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3.$$

   由于 $f'''(x)$ 在 $[-1,1]$ 连续，由介值定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(-1,1)$，使得

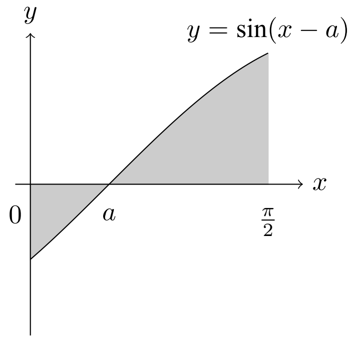
$$f'''(\xi)=\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3.$$

五、 应用题（本题 9 分）

问当 a 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内取何值时，曲线 $y=\sin(x-a), \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴 y 轴及直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 所围图形的面积最小，并求此最小面积。

解：记 $V(a)$ 为曲线 $y=\sin(x-a), \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴 y 轴及直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 所围图形的面积，则

$$\begin{aligned} V(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x-a)| \mathrm{d}x \\ &= -\int_0^a \sin(x-a)\mathrm{d}x + \int_a^{\frac{\pi}{2}} \sin(x-a)\mathrm{d}x \\ &= \cos(x-a)\big|_0^a - \cos(x-a)\big|_a^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 - \cos a - \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \\ &= 2 - \cos a - \sin a. \end{aligned}$$



下面求 $V(a)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 的最小值，

$$V'(a) = \sin a - \cos a.$$

由 $V'(a)=0$ 得 $a=\frac{\pi}{4}$，且 $V''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} > 0$。即 $V(a)$ 在 $a=\frac{\pi}{4}$ 处取最小值，最小值为

$$V\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} = 2 - \sqrt{2}.$$