座位号________

专业班级________

学院________

(密封线内不答题)

学号

姓名________

密　封　线

诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生期末考试

《工科数学分析（二）》B 卷　参考答案

2017-2018 学年第二学期

注意事项：

一、 开考前请将密封线内各项信息填写清楚；

二、 所有答案请直接答在试卷上；

三、 考试形式：闭卷；

四、 本试卷共 6 大题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。

题　号	一	二	三	四	五	六	总　分
得　分							

一、 填空题：共 5 题，每题 2 分，共 10 分.

1. 微分方程 $y''+2y'-3y=2-3x$ 的通解为 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}+x$，其中 C_1,C_2 为任意常数；

2. 向量场 $2xy\vec{\boldsymbol{i}}+e^{z}\sin y\vec{\boldsymbol{j}}+(x^2+y^2+z^2)\vec{\boldsymbol{k}}$ 的旋度为 $(2y-e^{z}\sin y)\vec{\boldsymbol{i}}-2x\vec{\boldsymbol{k}}-2x\vec{\boldsymbol{k}}$；

3. 设 Γ 是平面上的下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2},-1\leqslant x\leqslant 1$，则第一类曲线积分 $\int_{\Gamma} x^2+y^2\mathrm{d}s=$ π；

4. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\cdot 2^n}x^n$ 的收敛域为 $(-2,2]$；

5. 设周期为 2π 的函数 $f(x)=|x|,-\pi<x\leqslant\pi$，则 $f(x)$ 的傅里叶 (Fourier) 级数在 $x=\pi$ 处收敛于 π.

二、 单选题: 共 5 题, 每题 2 分, 共 10 分.

1. 下列微分方程中, 属于二阶线性常微分方程的是 (B)

   A. $(x+y^2)\mathrm{d}y+e^x\mathrm{d}x=0$;

   B. $xy''+(\sin x)y'+(\ln x)y=\tan x$;

   C. $(y'')^2+y=2$;

   D. $y''+\ln y=2$.

2. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 的两个偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的 (D)

   A. 充分而非必要条件;

   B. 必要而非充分条件;

   C. 充分必要条件;

   D. 既非充分也非必要条件.

3. 曲面 $3x^2+y^2+z^2=12$ 上点 $M(-1,0,3)$ 处的切平面与平面 $z=0$ 的夹角是 (B)

   A. $\frac{\pi}{6}$;

   B. $\frac{\pi}{4}$;

   C. $\frac{\pi}{3}$;

   D. $\frac{\pi}{2}$.

4. 设 Γ 是平面曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a,b>0$, 取逆时针方向, 则第二类曲线积分 $\int\limits_{\Gamma} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=$(B)

   A. πab;

   B. $2\pi ab$;

   C. 0;

   D. $-2\pi ab$.

5. 下列级数发散的是 (B)

   A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$;

   B. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$;

   C. $\sum\limits_{n=2018}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$;

   D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

三、 计算题: 共 3 题, 每题 10 分, 共 30 分.

1. 设 $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + g(x, xy)$, 其中 $f(t)$ 具有连续的二阶导数, $g(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数, 计算二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

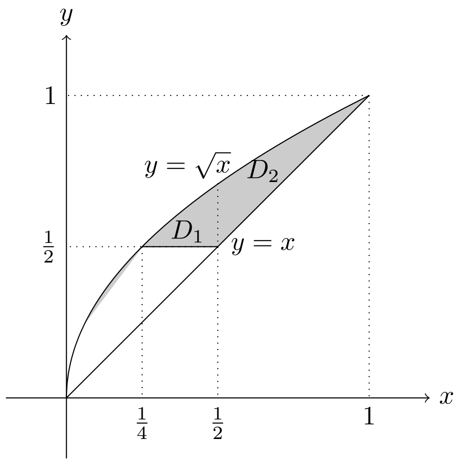
   解:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'\left(\frac{y}{x}\right) + xg_2'(x, xy). \cdots\cdots\cdots (5\text{ 分})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right) + g_2'(x, xy) + xg_{21}''(x, xy) + xyg_{22}''(x, xy). \cdots\cdots\cdots (5\text{ 分})$$

2. 计算累次积分 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{x}} \cos\left(\pi \frac{x}{y}\right) \mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}x \int_{x}^{\sqrt{x}} \cos\left(\pi \frac{x}{y}\right) \mathrm{d}y$.

   解: 记 D 为由 $y = \frac{1}{2}, y = \sqrt{x}$ 和 $y = x$ 围成的区域, 如图示



   则所求累次积分为

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{x}} \cos\left(\pi \frac{x}{y}\right) \mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}x \int_{x}^{\sqrt{x}} \cos\left(\pi \frac{x}{y}\right) \mathrm{d}y \\
&= \iint_D \cos\left(\pi \frac{x}{y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}y \int_{y^2}^{y} \cos\left(\pi \frac{x}{y}\right) \mathrm{d}x \cdots\cdots\cdots (6\text{ 分}) \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{1} y \sin(\pi y) \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\pi^3}(1 - \pi). \cdots\cdots\cdots (4\text{ 分})
\end{aligned}$$

3. 计算曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 夹在两柱面 $x^2+y^2=x$ 和 $x^2+y^2=2x$ 之间的那一部分的面积.

解: 曲面的面积微元为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S &= \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\cdots\cdots\cdots(3\text{ 分})\end{aligned}$$

因此, 所求面积为

$$\begin{aligned}A &= \iint\limits_{\Sigma} 1\mathrm{d}S\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分}) \\ &= \iint\limits_{x\leqslant x^2+y^2\leqslant 2x} \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdots\cdots\cdots(3\text{ 分}) \\ &= \sqrt{2}(\pi-\frac{1}{4}\pi)=\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi.\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})\end{aligned}$$

四、 解答题: 共 3 题, 每题 10 分, 共 30 分.

1. 设 Σ 是曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{y-1}, \\ x=0 \end{cases}$ $(1\leqslant y\leqslant 3)$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面, 其法向量与 y 轴正向夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$. 求曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解: 设 Σ_1 为平面 $y=3$ 在 $x^2+z^2\leqslant 2$ 的部分, 取右侧为正向. 则 Σ 和 Σ_1 形成一个闭曲面, 外侧为正向, 其所围区域为 Ω, 由 Gauss 公式

$$\iint\limits_{\Sigma\cup\Sigma_1}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}4y+2z-1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\cdots\cdots\cdots(5\text{ 分})$$

由对称性,

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

因此,

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}4y+2z-1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iiint\limits_{\Omega}4y-1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_1^3\mathrm{d}y\iint\limits_{x^2+z^2\leqslant y-1}4y-1\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\&=\int_1^3(4y-1)\pi(y-1)\mathrm{d}y=\frac{50}{3}\pi.\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})\end{aligned}$$

而 Σ_1 的单位法向量为 $(0,1,0)$, 因此,

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint\limits_{x^2+z^2\leqslant 2}16\mathrm{d}x\mathrm{d}z=-32\pi.\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

因此,

$$\iint\limits_{\Sigma}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{50}{3}\pi+32\pi=\frac{146}{3}\pi.\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

2. 设曲线积分 $\int\limits_{\Gamma}(f(x)-e^x)\sin\frac{y}{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}f(x)\cos\frac{y}{2}\mathrm{d}y$ 与路径无关, 其中 $f(x)$ 有一阶连续导数且 $f(0)=0$. 求 $f(x)$ 并计算曲线积分 $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)}(f(x)-e^x)\sin\frac{y}{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}f(x)\cos\frac{y}{2}\mathrm{d}y$.

解: 记 $P=(f(x)-e^x)\sin\frac{y}{2}$, $Q=-\frac{1}{2}f(x)\cos\frac{y}{2}$. 由于曲线积分与路径无关, 因此

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.\cdots\cdots\cdots(3\text{ 分})$$

因此,

$$f(x)-e^x=-f'(x).\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

这是一个一阶线性微分方程, 其通解为

$$f(x)=\frac{1}{2}e^x+Ce^{-x}.$$

由 $f(0)=0$, 有 $C=-\frac{1}{2}$, 因此,

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{2}e^{-x}.\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

此时,

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\sin\frac{y}{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{4}(e^{x}-e^{-x})\cos\frac{y}{2}\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})\sin\frac{y}{2}\right).$$

因此,

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\left(-\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})\sin\frac{y}{2}\right)\Bigg|_{(0,0)}^{(1,1)}=-\frac{1}{2}(e-e^{-1})\sin\frac{1}{2}.\cdots\cdots\cdots(4\text{ 分})$$

3. 将函数 $f(x)=\cos^2 x$ 展开成 x 的幂级数.

解: $\cos t$ 可展开为

$$\cos t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}.\cdots\cdots\cdots(4\text{ 分})$$

注意到

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x.\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

因此,

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{(2n)!}x^{2n},\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

其收敛域为 $(-\infty,+\infty)$. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (2 分)

五、 证明题: 共 1 题, 每题 10 分, 共 10 分.

设 $0 < c < 1$, 证明函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$ 在 $[c,1]$ 一致收敛, 但在 $(0,1)$ 不一致收敛.

证明: $\forall x \in [c,1]$, $(1-x)^n \leqslant (1-c)^n$. 由于

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-c)^n$$

收敛. 由优级数判别法, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$$

在 $[c,1]$ 上一致收敛.$\cdots\cdots\cdots\cdots$(6 分)

级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$ 在 $(0,1]$ 收敛, 前 n 项和为

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(1-x)^k = \frac{1-(1-x)^{n+1}}{x}.$$

和函数为

$$S(x) = \frac{1}{x}.$$

取 $x_n = \frac{1}{n} \in (0,1)$, 则

$$\lim_{n\to\infty}|S_n(x_n) - S(x_n)| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^n(n-1)\right| = +\infty.$$

因此, 函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$ 在 $(0,1)$ 不一致收敛.$\cdots\cdots\cdots\cdots$(4 分)

六、 应用题: 共 1 题, 每题 10 分, 共 10 分.

设椭圆 $x^2+3y^2=12$ 的内接等腰三角形之底边平行于椭圆的长轴, 求这样的三角形的最大面积.

解: 设等腰三角形的三个顶点为 $(-x,y)$, (x,y) 和 $(0,2)$, $x>0$. 则三角形面积为

$$f(x,y)=x(2-y)\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分}).$$

因此, 只需求出函数 $f(x,y)$ 在条件 $x^2+3y^2=12$ 之下的条件极值.$\cdots\cdots\cdots\cdots$(2 分)

设 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=x(2-y)-\lambda(x^2+3y^2-12).\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

则极值点满足

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=2-y-2\lambda x=0,\\ \frac{\partial L}{\partial y}=-x-6\lambda y=0,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=-(x^2+3y^2-12)=0.\end{cases}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

解之, 得

$$(x,y,\lambda)=\left(3,-1,\frac{1}{2}\right),\left(-3,-1,-\frac{1}{2}\right),\text{ 或 }(0,2,0)\,.$$

因 $x>0$ 有极大值点为 $(x,y)=(3,-1)$. 因此, 三角形最大面积为

$$f\,(3,-1)=9.\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$