姓名________ 学号________ 学院________ 专业________ 座位号________

（密封线内不答题）

密 封 线

诚信应考, 考试作弊将带来严重后果!

华南理工大学本科生期中考试

《工科数学分析（二）》2018－2019学年第二学期期中考试

注意事项：1. 考前请将密封线内填写清楚;

2. 考试形式：闭卷;

3. 请用蓝色或黑色水笔答题，不要用铅笔或者其他颜色的笔答题;

4. 交卷时除了草稿纸不用交之外，每页试卷都要交;

5. 本试卷共 7 大题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得 分								

一、 填空题（共6小题，每小题5分，共30分）。

1. 设函数$f(u,v)$具有二阶连续偏导数，$z=f(x,xy)$，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\underline{xf_{12}+f_2+xyf_{22}}$。

2. 设函数$f(u,v)$可微，$z=z(x,y)$由方程$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$确定，则$dz\,|_{(0,1)}=\underline{-dx+2dy}$。

3. 曲面$z=x^2+y^2$与平面$2x+4y-z=0$平行的切平面方程为$\underline{2x+4y-z=5}$。

4. 设Ω是由平面$x+y+z=1$与三个坐标平面所围成的空间区域，则$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=\underline{1/4}$。

5. 设L是柱面$x^2+y^2=1$与平面$y+z=1$的交线，从z轴正向往z轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分$\oint_L xdx+ydz=\underline{0}$。

6. $\nabla(xy+\frac{z}{y})|_{(2,1,1)}=\underline{\{1,1,1\}}$。

二、 （15分）设函数$u=f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且满足等式

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

确定a，b的值，使等式在变换$\xi=x+ay$，$\eta=x+by$下化简为$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$。

解: 由复合函数的链式法则得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=a\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}$$

由

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

得

$$(5a^2+12a+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(5b^2+12b+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+(12a+12b+10ab+8)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0.$$

因此,

$$\begin{cases}5a^2+12a+4=0\\5b^2+12b+4=0\\12a+12b+10ab+8\neq 0\end{cases}$$

解得$a=-2/5$, $b=-2$或$a=-2$, $b=-2/5$.

三、（10分）设$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq\sqrt{2},x\geq 0,y\geq 0\}$，$[1+x^2+y^2]$表示不超过$1+x^2+y^2$的最大整数。计算二重积分

$$\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]dxdy$$

解: 令$D_1=\{(x,y)|0\leq x^2+y^2<1,x\geq 0,y\geq 0\}$, $D_2=\{(x,y)|1\leq x^2+y^2\leq\sqrt{2},x\geq 0,y\geq 0\}$. 则

$$\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]dxdy=\iint_{D_1}xydxdy+2\iint_{D_2}xydxdy$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^1 r^3dr+2\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_1^{\sqrt[4]{2}}r^3dr$$

$=3/8$

四、 （10分）已知曲线L的方程为

$$\begin{cases} z = \sqrt{2-x^2-y^2} \\ z = x, \end{cases}$$

起点为$A(0,\sqrt{2},0)$，终点为$B(0,-\sqrt{2},0)$，计算曲线积分

$$I = \int_L (y+z)dx + (z^2-x^2+y)dy + x^2y^2dz$$

解: 曲线L投影到XOY面上的平面曲线方程为

$$\begin{cases} x^2+\frac{y^2}{2}=1 \\ z=0, \end{cases} \quad -\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}.$$

曲线L的参数方程为

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sqrt{2}\sin\theta \\ z = \cos\theta, \end{cases} \quad \theta : \frac{\pi}{2} \to -\frac{\pi}{2}$$

代入得

$$I = -\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

五、 （15分）设P为椭球面$S: x^2+y^2+z^2-yz=1$上的动点，若S在点P处的切平面与XOY面垂直，求点P的轨迹C，并计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}} dS,$$

其中Σ是椭球面S位于曲线C上方的部分。

解: 令$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-yz-1$, 则动点P的切平面的法向量为$\vec{n} = \{2x, 2y-z, 2z-y\}$. 由切平面垂直XOY得$2x-y=0$. 由于P在椭球面上，故所求曲线C的方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-yz=1, \\ 2x-y=0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x^2+\frac{3}{4}y^2=1, \\ 2x-y=0. \end{cases}$$

曲线C在XOY面的投影为$D_{xy}: x^2+\frac{y^2}{4/3}=1$, 又方程$x^2+y^2+z^2-yz=1$两边分别关于$x$,$y$求导得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y-2z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-z}{y-2z}.$$

故

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}dxdy$$

于是

$$I=\iint_{D_{xy}}(x+\sqrt{3})dxdy=2\pi.$$

六、（10分）设Σ是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 1)$的下侧，求

$$I=\iint_{\Sigma}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy$$

解: 设$\Sigma_1: z=1, (x^2+y^2\le 1)$取上侧, 则利用Gauss公式得

$$I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy-\iint_{\Sigma_1}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy$$
$$=2\pi$$

七、（10分）在变力$\vec{F}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$上第一卦限点$(\xi,\eta,\zeta)$，问$\xi,\eta,\zeta$取何值时，力$\vec{F}$所做的功$W$最大？并求$W$的最大值。

解:

$$W=\int_{\overline{OM}}yzdx+zxdy+xydz=\xi\eta\zeta.$$

要使xyz最大,只要$(xyz/(abc))^2$最大, 又$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 当且仅当

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

时,$(xyz/(abc))^2$最大, 即

$$\xi=\frac{a}{\sqrt{3}},\eta=\frac{b}{\sqrt{3}},\zeta=\frac{c}{\sqrt{3}}.$$

从而

$$W_{max}=\frac{\sqrt{3}}{9}abc.$$

八、（0分）对本课程接下来的教学，你有什么建议？