
AND THIS IS HOW IT IS
we go home
and we shut our doors
I don't buy much anymore
I used to walk in circles
Around department stores
And the curved edges of
Barstools
Searching

离散数学

目录

第一章 命题逻辑基本概念

内容提要

- ❑ 命题与真值
- ❑ 联结词
- ❑ 命题公式
- ❑ 合式公式 (WFF)
- ❑ 公式的层次
- ❑ 赋值与分类

1.1 命题与真值

定义 1.1 命题 (Proposition)

一个非真即假的陈述句称为**命题**。

- 命题的真值：命题所陈述的事实是否正确。正确的称为**真命题**，真值为“真”（True，记为 T 或 1）；错误的称为**假命题**，真值为“假”（False，记为 F 或 0）。

例 1.1 判断下列语句是否为命题：

1. $2+2=4$。
2. $3>5$。
3. 你去哪儿？
4. 请关上门。
5. 我正在说谎。

解

1. 是命题，真值为 T。
2. 是命题，真值为 F。
3. 不是命题（疑问句）。
4. 不是命题（祈使句）。
5. 不是命题（悖论，无法确定真假）。

1.2 联结词 (Connectives)

在命题逻辑中，我们使用联结词将简单命题组合成复合命题。

定义 1.2 否定 (Negation)

设 P 为命题，则“非 P”称为 P 的**否定**，记作 $\neg P$。

- 真值表：若 P 为 T，则 $\neg P$ 为 F；若 P 为 F，则 $\neg P$ 为 T。

定义 1.3 合取 (Conjunction)

设 P, Q 为两个命题，则“P 且 Q”称为 P 与 Q 的**合取**，记作 $P \wedge Q$。

- 真值表：仅当 P, Q 同时为 T 时，$P \wedge Q$ 为 T。

定义 1.4 析取 (Disjunction)

设 P, Q 为两个命题，则“P 或 Q”称为 P 与 Q 的**析取**，记作 $P \vee Q$。

- 真值表：仅当 P, Q 同时为 F 时，$P \vee Q$ 为 F。

笔记 注意：逻辑中的“或”是**相容或**（Inclusive Or），即 P, Q 均可同时成立。

定义 1.5 蕴涵 (Implication)

设 P, Q 为两个命题，则“若 P 则 Q”称为 P 对 Q 的**蕴涵**，记作 $P \to Q$。

- P 称为前件，Q 称为后件。
- 真值表：仅当 P 为 T 且 Q 为 F 时，$P \to Q$ 为 F。

注 在自然语言中，“若 P 则 Q”往往要求 P 与 Q 有因果关系，但在数理逻辑中，$P \to Q$ 的真值仅取决于 P 和 Q 的真值。

定义 1.6 等价 (Biconditional)

设 P, Q 为两个命题，则“P 当且仅当 Q”称为 P 与 Q 的**等价**，记作 $P \Leftrightarrow Q$。

- 真值表：当 P, Q 真值相同时，$P \Leftrightarrow Q$ 为 T。

定义 1.7 其他常用联结词

1. **异或 (Exclusive OR)**：记作 $P \oplus Q$。当 P, Q 真值不同时为 T。
2. **与非 (NAND)**：记作 $P \nrightarrow \wedge Q$。等价于 $\neg(P \wedge Q)$。
3. **或非 (NOR)**：记作 $P \nrightarrow \vee Q$。等价于 $\neg(P \vee Q)$。

1.2.1 命题公式与合式公式

定义 1.8 合式公式 (Well-Formed Formula, WFF)

命题逻辑中的公式（符号串）按以下规则递归定义：

1. 单个命题变元（如 $P, Q, R, \ldots$）或命题常元（T, F）是合式公式，称为**原子命题公式**。
2. 若 A 是合式公式，则 $(\neg A)$ 也是合式公式。
3. 若 A, B 是合式公式，则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B), (A \Leftrightarrow B)$ 也是合式公式。
4. 只有有限次地应用上述规则形成的符号串才是合式公式。

1.2.2 公式的层次

定义 1.9 公式的层次 (Level)

1. 若 A 是原子命题公式，则 A 的层次为 0。
2. 若 A 的层次为 $h(A)$，则 $(\neg A)$ 的层次为 $h(A)+1$。
3. 若 A, B 的层次分别为 $h(A), h(B)$，则 $(A \bigcirc B)$ 的层次为 $\max(h(A), h(B))+1$，其中 $\bigcirc \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \Leftrightarrow\}$。

例 1.2 求公式 $G=(P \rightarrow(Q \vee \neg R))$ 的层次。

解

1. P, Q, R 是原子公式，层次均为 0。
2. $\neg R$ 的层次为 $0+1=1$。
3. $(Q \vee \neg R)$ 的层次为 $\max(0,1)+1=2$。
4. G 的层次为 $\max(0,2)+1=3$。

例 1.3 综合题：给定符号串 $H=(P \vee Q) \vee R$，判断其是否为合式公式（WFF）；如果是，求其层次；如果不是，请说明理由。

解

1. **判定：** 该符号串 **不是** 合式公式。
2. **理由：** 根据定义 1.9 的规则 3，当两个公式 A, B 通过联结词 $\vee$ 结合时，必须在外层包裹括号，即写成 $(A \vee B)$ 的形式。
3. 原式中 $(P \vee Q)$ 与 R 结合后缺少了最外层的强制括号。若要使其成为 WFF，应写为 $((P \vee Q) \vee R)$。
4. **修正后的层次：** 若公式为 $((P \vee Q) \vee R)$，其层次为 $\max(1,0)+1=2$。

1.2.3 公式的赋值与分类

定义 1.10 赋值 (Assignment / Interpretation)

设 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 是公式 G 中出现的所有命题变元。给这 n 个变元指定一组真值，称为对 G 的一个**赋值**或**解释**。

- 若赋值使 G 的真值为 T，则称该赋值为 G 的**成真赋值**。
- 若赋值使 G 的真值为 F，则称该赋值为 G 的**成假赋值**。

定义 1.11 公式的分类

根据公式在所有可能赋值下的表现，将其分为三类：

1. **重言式 (Tautology)**：又称永真式，在所有赋值下真值均为 T。
2. **矛盾式 (Contradiction)**：又称永假式，在所有赋值下真值均为 F。
3. **可满足式 (Satisfiable)**：至少存在一个赋值使公式真值为 T。

例 1.4 构造命题公式 $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ 的真值表并判断其类型。

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

第二章 命题逻辑等值演算

内容提要

- ❑ 等值式定义
- ❑ 基本等值式
- ❑ 置换与代入规则
- ❑ 析取与合取范式
- ❑ 主范式 (PDNF/PCNF)
- ❑ 联结词完备集

2.1 等值式

2.1.1 等值式的定义

定义 2.1 等值 (Equivalent)

若命题公式 A 和 B 的真值表完全相同，则称 A 与 B **等值**，记作 $A \Leftrightarrow B$。

笔记 $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \Leftrightarrow B$ 是重言式。

2.1.2 基本等值式

定理 2.1 常见等值式 (Laws of Logic)

1. 分配律：
   - $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
   - $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
2. 德·摩根律：
   - $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
   - $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
3. 吸收律：$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P, P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
4. 排中律与矛盾律：
   - $P \vee \neg P \Leftrightarrow T$ (排中律)
   - $P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$ (矛盾律)
5. 蕴涵等值式：$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
6. 等价等值式：$P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
7. 假言易位律：$P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$
8. 等价否定等值式：$P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \Leftrightarrow \neg Q$
9. 归谬律：$(P \to Q) \wedge (P \to \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$

2.2 等值演算

2.2.1 置换规则 (Substitution Rule)

定义 2.2 置换规则

设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的命题公式，$\Phi(B)$ 是用 B 置换 $\Phi(A)$ 中所有的 A 后得到的公式。若 $A \Leftrightarrow B$，则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$。

2.2.2 代入规则 (Replacement Rule)

定义 2.3 代入规则

设 $A \Leftrightarrow B$。若将 A 和 B 中出现的所有命题变元 P 用同一个命题公式 C 代替，得到的新公式 A' 和 B' 仍满足 $A' \Leftrightarrow B'$。

2.2.3 等值演算的应用

等值演算主要用于：

1. 证明两个公式等值。
2. 简化命题公式。
3. 判定公式的类型（重言式、矛盾式、可满足式）。

例 2.1 证明 $(P \to Q) \to P \Leftrightarrow P$。**解**

$$
\begin{aligned}
(P \to Q) \to P &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \to P \quad (\text{蕴涵等值式}) \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee P \quad (\text{蕴涵等值式}) \\
&\Leftrightarrow (\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee P \quad (\text{德·摩根律}) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee P \quad (\text{双重否定律}) \\
&\Leftrightarrow P \quad (\text{吸收律})
\end{aligned}
$$

例 2.2 简化公式 $\neg(P \to Q) \wedge Q$。**解**

$$
\begin{aligned}
\neg(P \to Q) \wedge Q &\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \wedge Q \\
&\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \wedge Q \\
&\Leftrightarrow P \wedge (\neg Q \wedge Q) \\
&\Leftrightarrow P \wedge F \\
&\Leftrightarrow F
\end{aligned}
$$

2.3 范式 (Normal Forms)

2.3.1 基本概念

定义 2.4 文字与简单析取/合取式

- **文字**：命题变元或其否定（如 $P, \neg P$）。
- **简单析取式**：仅由文字通过 $\vee$ 联结而成的公式。
- **简单合取式**：仅由文字通过 $\wedge$ 联结而成的公式。

笔记

- 一个简单析取式是重言式，当且仅当它同时包含某个变元及其否定。
- 一个简单合取式是矛盾式，当且仅当它同时包含某个变元及其否定。

定义 2.5 析取范式与合取范式

- **析取范式 (DNF)**：由若干个简单合取式通过 $\vee$ 联结而成的公式。
- **合取范式 (CNF)**：由若干个简单析取式通过 $\wedge$ 联结而成的公式。

2.3.2 主范式 (Principal Normal Forms)

定义 2.6 极小项 (Minterm)

在 n 个命题变元中，形如 $L_1 \wedge L_2 \wedge \dots \wedge L_n$ 的合取式，其中 L_i 是 P_i 或 $\neg P_i$。

- 记法：m_i，其中 i 是使该项为真的赋值对应的十进制数（P_i 为 1，$\neg P_i$ 为 0）。
- 性质：任意两个不同的极小项的合取为 F；所有极小项的析取为 T。

定义 2.7 极大项 (Maxterm)

在 n 个命题变元中，形如 $L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$ 的析取式，其中 L_i 是 P_i 或 $\neg P_i$。

- 记法：M_i，其中 i 是使该项为假的赋值对应的十进制数（P_i 为 0，$\neg P_i$ 为 1）。
- 性质：任意两个不同的极大项的析取为 T；所有极大项的合取为 F。

笔记 $\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \neg M_i \Leftrightarrow m_i$。

定义 2.8 主析取范式与主合取范式

- **主析取范式 (PDNF)**：由若干个极小项构成的析取式。
- **主合取范式 (PCNF)**：由若干个极大项构成的合取式。

结论

- 任何公式都存在唯一的主析取范式和主合取范式（不计项的顺序）。

- 公式 A 的 PDNF 中包含的极小项下标集合，与 A 的真值表中真值为 T 的行对应。
- 公式 A 的 PCNF 中包含的极大项下标集合，与 A 的真值表中真值为 F 的行对应。

例 2.3 求 $A = (P \vee Q) \to R$ 的主析取范式。

解 方法一：等值演算法

$$
\begin{aligned}
A &\Leftrightarrow \neg(P \vee Q) \vee R \\
&\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee R \\
&\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge (R \vee \neg R)) \vee ((P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge R) \\
&\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \\
&\Leftrightarrow m_1 \vee m_0 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \\
&\Leftrightarrow \sum m(0, 1, 3, 5, 7)
\end{aligned}
$$

方法二：真值表法（略）

2.4 联结词完备集

定义 2.9 联结词完备集

如果任何命题公式都可以由集合 S 中的联结词构成的公式等值表示，则称 S 是一个**联结词完备集**。

- 常用完备集：$\{\neg, \wedge, \vee\}, \{\neg, \wedge\}, \{\neg, \vee\}, \{\neg, \to\}, \{\uparrow\}$ (与非), $\{\downarrow\}$ (或非)。

2.5 联结词完备集

定义 2.10 联结词完备集

若一组联结词可以表示出所有可能的真值函数，则称其为**联结词完备集**。

性质 **常用完备集：**

1. $\{\neg, \wedge, \vee\}$
2. $\{\neg, \wedge\}$
3. $\{\neg, \vee\}$
4. $\{\neg, \to\}$

例 2.4 用 $\{\neg, \wedge\}$ 表示 $P \vee Q$。

解

$$P \vee Q \Leftrightarrow \neg\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

定义 2.11 联结词完备集

联结词完备集：若一组联结词可以表示出所有可能的真值函数，则称其为完备集。常见的完备集有 $\{\neg, \wedge, \vee\}, \{\neg, \wedge\}, \{\neg, \vee\}, \{\neg, \rightarrow\}$。

例 2.5 判断$\{\uparrow\}$是完备集

解 要证明 $\{\uparrow\}$ 是完备集，只需证明它可以表达出已知完备集 $\{\neg, \wedge\}$ 中的所有运算：

(1) 表示“非” ($\neg$) 利用自反性，我们可以得到：

$$\begin{aligned} p \uparrow p &= \neg(p \wedge p) \\ &\equiv \neg p \end{aligned}$$

2) 表示“与” ($\wedge$) 根据“与非”的定义，对其结果再取一次“非”即得到“与”：

$$\begin{aligned} (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q) &= \neg(p \uparrow q) \\ &= \neg(\neg(p \wedge q)) \\ &\equiv p \wedge q \end{aligned}$$

(3) 表示“或” ($\vee$) 根据德·摩根定律 $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$：

$$\begin{aligned} (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q) &= (\neg p) \uparrow (\neg q) \\ &= \neg(\neg p \wedge \neg q) \\ &\equiv p \vee q \end{aligned}$$

第三章 命题逻辑的推理理论

内容提要

- ❏ 推理的形式结构
- ❏ 推理规则 (P, T, CP)
- ❏ 自然推理系统 P
- ❏ 证明方法 (直接/间接/归谬)

3.1 推理的形式结构

定义 3.1 推理 (Inference)

设 $G_1, G_2, ..., G_n$ 和 H 是命题公式。称由前提 $G_1, G_2, ..., G_n$ 推出结论 H 的推理是**有效的**，当且仅当 $(G_1 \wedge G_2 \wedge ... \wedge n) \to H$ 是重言式。

- 记作：$\{G_1, G_2, ..., G_n\} \vDash H$ 或 $G_1, G_2, ..., G_n \to H$。

3.2 命题逻辑的自然推理系统 P

定义 3.2 自然推理系统 P

1. **字母表**：命题变元、联结词、括号。
2. **合式公式**：同前。
3. **推理规则**：
   - **P 规则 (Premise Rule)**：在推理的任何步骤都可以引入前提。
   - **T 规则 (Tautological Implication Rule)**：在推理中，如果前面的一个或多个公式永真蕴涵公式 S，则可将 S 引入推理。
   - **CP 规则 (Conditional Proof Rule)**：如果能从前提集合 Γ 与公式 R 推出 S，则能从 Γ 推出 $R \to S$。

3.3 推理规则汇总 (T 规则常用公式)

定理 3.1 常用推理规则 (T 规则)

1. 肯定前件 (Modus Ponens)：$A, A \to B \to B$
2. 否定后件 (Modus Tollens)：$\neg B, A \to B \to \neg A$
3. 假言三段论 (Hypothetical Syllogism)：$A \to B, B \to C \to A \to C$
4. 析取三段论 (Disjunctive Syllogism)：$A \vee B, \neg A \to B$
5. 附加律：$A \to A \vee B$
6. 化简律：$A \wedge B \to A$
7. 合取律：$A, B \to A \wedge B$
8. 等价三段论：$A \Leftrightarrow B, B \Leftrightarrow C \to A \Leftrightarrow C$

3.4 证明方法

3.4.1 直接证明法

从前提直接利用 P 规则和 T 规则推导出结论。

例 3.1 证明：前提 $P \to Q, Q \to R, P$ 推出结论 R。

证明

1. P (P 规则)
2. $P \to Q$ (P 规则)
3. Q (1, 2, T 规则，肯定前件)
4. $Q \to R$ (P 规则)
5. R (3, 4, T 规则，肯定前件)

3.4.2 附加前提证明法 (CP 规则)

若结论形如 $R \to S$，可将 R 作为附加前提，证明 S 成立。

例 3.2 证明：前提 $P \to (Q \to R), Q$ 推出结论 $P \to R$。

证明

1. P (附加前提)
2. $P \to (Q \to R)$ (P 规则)
3. $Q \to R$ (1, 2, T 规则，肯定前件)
4. Q (P 规则)
5. R (3, 4, T 规则，肯定前件)
6. $P \to R$ (1-5, CP 规则)

3.4.3 归谬法 (Reductio ad Absurdum)

将结论的否定 $\neg H$ 作为附加前提，若能推导出矛盾（如 F 或 $A \wedge \neg A$），则原推理有效。

例 3.3 证明：前提 $P \to Q, P \to \neg Q$ 推出结论 $\neg P$。

证明

1. $\neg\neg P$ (假设结论的否定)
2. P (1, T 规则，双重否定)
3. $P \to Q$ (P 规则)
4. Q (2, 3, T 规则，肯定前件)
5. $P \to \neg Q$ (P 规则)
6. $\neg Q$ (2, 5, T 规则，肯定前件)
7. $Q \wedge \neg Q$ (4, 6, T 规则，合取律)
8. F (7, T 规则，矛盾律)
9. $\neg P$ (1-8, 归谬法)

第三章 练习

1. 符号化下列命题：
   - 如果天下雨，我就不去公园。
   - 只有努力学习，才能取得好成绩。
2. 构造公式 $(P \vee Q) \to (P \wedge Q)$ 的真值表。
3. 用等值演算法证明：$(P \to Q) \to P \Leftrightarrow P$。
4. 求公式 $(P \wedge Q) \vee \neg R$ 的主析取范式。

第四章 一阶逻辑基本概念

内容提要

- ❑ 个体词、谓词、量词
- ❑ 一阶逻辑合式公式
- ❑ 自由变元与约束变元
- ❑ 解释与赋值

4.1 基本要素

定义 4.1 个体词 (Individual)

所研究对象中可以独立存在的客体。

- **个体常元**：表示具体的客体，常用 a, b, c 表示。
- **个体变元**：表示抽象或泛指的客体，常用 x, y, z 表示。
- **个体域 (Domain)**：个体变元的取值范围，可以是有限的或无限的。**全总个体域**指宇宙间一切事物组成的集合。

定义 4.2 谓词 (Predicate)

刻画个体性质或个体间关系的词。

- **谓词常元**：表示具体性质或关系，如 $P(x)$ 表示“x 是人”。
- **谓词变元**：表示抽象的性质或关系。
- **n 元谓词**：含有 n 个个体变元的谓词。

定义 4.3 量词 (Quantifier)

1. **全称量词 (Universal Quantifier)**：$\forall x$，表示“对所有的 x”。
2. **存在量词 (Existential Quantifier)**：$\exists x$，表示“存在某个 x”。

4.2 一阶逻辑合式公式

定义 4.4 合式公式 (WFF)

1. $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ 是原子谓词公式。
2. 若 A 是公式，则 $\neg A$ 是公式。
3. 若 A, B 是公式，则 $A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \Leftrightarrow B$ 是公式。
4. 若 A 是公式，则 $\forall x A, \exists x A$ 是公式。

4.3 自由变元与约束变元

定义 4.5 辖域 (Scope)

量词作用的范围称为该量词的**辖域**。

- 在 $\forall x A$ 和 $\exists x A$ 中，A 称为量词的辖域。
- 在辖域内与量词中变元相同的变元称为**约束变元**，其余称为**自由变元**。

例 4.1 指出公式 $\forall x(P(x) \to Q(x, y)) \vee \exists y R(x, y)$ 中的变元性质。**解**

- $\forall x$ 的辖域是 $(P(x) \to Q(x, y))$。其中 x 是约束变元，y 是自由变元。
- $\exists y$ 的辖域是 $R(x, y)$。其中 y 是约束变元，x 是自由变元。
- 全局来看，x 既有约束出现又有自由出现，y 同理。

笔记

改名规则：约束变元可以改名，但不能与辖域内的自由变元重名。

置换规则：自由变元可以被替换，但必须在所有出现处同时替换。

定义 4.6 封闭的公式 (Closed Formula / Sentence)

若公式 A 中不含任何自由变元，则称 A 为**封闭的公式**，简称**闭式**。

- **性质**：闭式的真值仅取决于解释 I (个体域及谓词/常元的意义)，而与变元的赋值无关。
- **示例**：$\forall x P(x)$ 是闭式，而 $P(x)$ 不是 (x 是自由的)。

笔记 **闭包 (Closure)**：

- **全称闭包**：设 A 的自由变元为 $x_1, x_2, ..., x_n$，则 $\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n A$ 称为 A 的全称闭包。
- **存在闭包**：$\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n A$ 称为 A 的存在闭包。

4.4 解释与赋值

定义 4.7 解释 (Interpretation)

一个解释 I 由以下部分组成：

1. 一个非空的个体域 D。
2. 为每个 n 元谓词常元指定 D^n 上的一个 n 元关系。
3. 为每个 n 元函数常元指定 D^n 到 D 的一个 n 元函数。
4. 为每个个体常元指定 D 中的一个固定元素。

定义 4.8 公式的分类

与命题逻辑类似，一阶逻辑公式也可分为：

1. **有效式 (Valid)**：在任何解释下均为真（类比重言式）。
2. **矛盾式 (Unsatisfiable)**：在任何解释下均为假。
3. **可满足式 (Satisfiable)**：至少存在一个解释使其为真。

例 4.2 在个体域 $D = \{1, 2\}$ 下，给定解释 I：

- $P(1) = T, P(2) = F$
- $Q(1,1) = F, Q(1,2) = T, Q(2,1) = T, Q(2,2) = F$

求公式 $G = \forall x(P(x) \to \exists y Q(x,y))$ 在解释 I 下的真值。

解 我们需要检查对于 D 中的每个 x，$P(x) \to \exists y Q(x,y)$ 是否为真。

1. 当 $x = 1$ 时：$P(1) \to (Q(1,1) \vee Q(1,2)) \Leftrightarrow T \to (F \vee T) \Leftrightarrow T \to T \Leftrightarrow T$。
2. 当 $x = 2$ 时：$P(2) \to (Q(2,1) \vee Q(2,2)) \Leftrightarrow F \to (T \vee F) \Leftrightarrow F \to T \Leftrightarrow T$。

由于对所有 $x \in D$ 条件均成立，故公式 G 的真值为 $\mathbf{T}$。

例 4.3 判断公式 $\forall x P(x) \to P(a)$ 是否为有效式，并简述理由。

解 该公式是**有效式**。

- **理由**：在任何解释 I 下，若前件 $\forall x P(x)$ 为真，则意味着个体域 D 中的每一个元素都具有性质 P。由于个体常元 a 被解释为 D 中的某个特定元素，因此 $P(a)$ 必然也为真。根据蕴涵的定义，当“前件真且后件真”或“前件假”时，公式均为真。因此该公式在任何解释下均为真。

第五章 一阶逻辑等值演算与推理

内容提要

- ❏ 一阶逻辑等值式
- ❏ 基本等值式
- ❏ 前束范式
- ❏ 推理规则 (US, UG, ES, EG)

5.1 一阶逻辑等值式

5.1.1 基本等值式

定理 5.1 基本等值式

1. **量词否定律** (Quantifier Negation, QN)：
   - $\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$
   - $\neg\exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$
2. **量词分配律**：
   - $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
   - $\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$
   - $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$
   - $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$
   - **注意**：后两者的反向蕴涵不成立。
3. **量词收缩律** (Quantifier Contraction)：若 x 不在 B 中自由出现，则：
   - $\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$
   - $\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$
   - $\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$
   - $\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$
   - $\forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x A(x)$
   - $\exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x A(x)$
   - $\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$
   - $\exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$

例 5.1 证明 $\neg\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \wedge \neg Q(x))$。

解

$$
\begin{aligned}
\neg\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) &\Leftrightarrow \forall x \neg(P(x) \rightarrow Q(x)) \quad \text{(量词否定律)} \\
&\Leftrightarrow \forall x \neg(\neg P(x) \vee Q(x)) \quad \text{(蕴涵等值式)} \\
&\Leftrightarrow \forall x(\neg\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \quad \text{(德·摩根律)} \\
&\Leftrightarrow \forall x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \quad \text{(双重否定律)}
\end{aligned}
$$

例 5.2 举例说明 $\forall x(A(x) \vee B(x)) \rightarrow \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$ 不成立。

解 设个体域为整数集 $\mathbb{Z}$，$A(x)$ 表示“x 是偶数”，$B(x)$ 表示“x 是奇数”。

- $\forall x(A(x) \vee B(x))$ 表示“每个整数要么是偶数要么是奇数”，显然为真。
- $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$ 表示“每个整数都是偶数，或者每个整数都是奇数”，显然为假。
- 因此，$\forall x(A(x) \vee B(x)) \nrightarrow \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$。

例 5.3 举例说明 $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \rightarrow \exists x(A(x) \wedge B(x))$ 不成立。

解 设个体域为实数集 $\mathbb{R}$，$A(x)$ 为 $x > 0$，$B(x)$ 为 $x < 0$。

- $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ 表示“存在大于 0 的数，且存在小于 0 的数”，为真。
- $\exists x(A(x) \wedge B(x))$ 表示“存在一个数既大于 0 又小于 0”，为假。
- 因此，$\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \nrightarrow \exists x(A(x) \wedge B(x))$。

5.1.2 命题逻辑重言式的代换实例

定理 5.2 重言式的代换实例

命题逻辑中的任何重言式，将其中的命题变元用谓词逻辑中的公式一致地替换，所得的公式都是谓词逻辑中的永真式。

例 5.4 判定下列公式是否为永真式：

1. $\forall x F(x) \Leftrightarrow \neg\neg\forall x F(x)$
2. $\forall x\exists y(F(x,y) \rightarrow G(x,y)) \Leftrightarrow \neg\neg\forall x\exists y(F(x,y) \rightarrow G(x,y))$
3. $F(x) \rightarrow G(y) \Leftrightarrow \neg F(x) \vee G(y)$
4. $\forall x(F(x) \rightarrow G(y)) \rightarrow \exists z H(z) \Leftrightarrow \neg\forall x(F(x) \rightarrow G(y)) \vee \exists z H(z)$

解

1. 这是命题逻辑重言式 $p \Leftrightarrow \neg\neg p$ 的代换实例，其中 p 被替换为 $\forall x F(x)$。
2. 这是命题逻辑重言式 $p \Leftrightarrow \neg\neg p$ 的代换实例，其中 p 被替换为 $\forall x\exists y(F(x,y) \rightarrow G(x,y))$。
3. 这是命题逻辑重言式 $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ 的代换实例，其中 p 替换为 $F(x)$，q 替换为 $G(y)$。
4. 这是命题逻辑重言式 $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ 的代换实例，其中 p 替换为 $\forall x(F(x) \rightarrow G(y))$，$q$ 替换为 $\exists z H(z)$。

以上公式均为永真式。

5.1.3 换名规则 (Renaming Rule)

定义 5.1 换名规则

设 A 为一公式，将 A 中某个量词的指导变元 x 以及该量词辖域内所有约束出现的 x 全部替换为 A 中未曾出现过的个体变元 y，所得公式 A' 与 A 等值。

例 5.5 对 $\forall x P(x,y) \vee \exists y Q(y)$ 进行换名。 **解**

- 对 $\forall x$ 换名：$\forall z P(z, y) \vee \exists y Q(y)$。
- 对 $\exists y$ 换名：$\forall x P(x, y) \vee \exists w Q(w)$。
- **注意**：不能将 $\forall x$ 换名为 y，因为 y 在辖域内已有自由出现。

5.2 前束范式 (Prenex Normal Form)

5.2.1 定义与性质

定义 5.2 前束范式

形如 $Q_1x_1Q_2x_2...Q_kx_k$ 的公式，其中 $Q_i \in \{\forall, \exists\}$，$M$ 中不含量词。

- $Q_1x_1Q_2x_2...Q_kx_k$ 称为**前缀**。
- M 称为**母式**。

定理 5.3 前束范式存在定理

任何一阶逻辑公式都存在与之等值的前束范式。

5.2.2 转换步骤

1. 消去联结词 $\rightarrow$ 和 $\Leftrightarrow$。
2. 将 $\neg$ 移到原子谓词公式前（利用量词否定律和德·摩根律）。
3. 利用换名规则使量词的指导变元互不相同，且与自由变元互不相同。
4. 利用量词收缩律将量词移到公式最左端。

例 5.6 求 $\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$ 的前束范式。

解

$$
\begin{aligned}
\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) &\Leftrightarrow \neg \forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \quad (\text{消去蕴涵}) \\
&\Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) \quad (\text{量词否定律}) \\
&\Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y) \quad (\text{换名规则}) \\
&\Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \vee Q(y)) \quad (\text{量词收缩律})
\end{aligned}
$$

5.3 一阶逻辑推理理论

5.3.1 推理定律

定理 5.4 常用推理定律

除了命题逻辑中的推理定律外，还有：

1. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \to \forall x(A(x) \vee B(x))$
2. $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \to \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$
3. $\forall x(A(x) \to B(x)) \to (\forall x A(x) \to \forall x B(x))$
4. $\forall x(A(x) \to B(x)) \to (\exists x A(x) \to \exists x B(x))$

5.3.2 推理规则 (量词规则)

定理 5.5 四种量词规则

1. **全称指定规则 (Universal Specification, US)**：
   - $\forall x A(x) \to A(y)$ (或 $A(c)$)。
   - 条件：y 是任意个体变元，c 是任意个体常元。
2. **全称推广规则 (Universal Generalization, UG)**：
   - $A(y) \to \forall x A(x)$。
   - 条件：y 必须是任意的，不能在前提中自由出现。
3. **存在指定规则 (Existential Specification, ES)**：
   - $\exists x A(x) \to A(c)$。
   - 条件：c 是使 $A(x)$ 成立的某个特定个体，且 c 在之前的推理步骤中未出现过。
4. **存在推广规则 (Existential Generalization, EG)**：
   - $A(c) \to \exists x A(x)$。

例 5.7 证明：$\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)$。

证明

1.	$\exists x P(x)$	(P 规则)
2.	$P(c)$	(1, ES 规则)
3.	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	(P 规则)
4.	$P(c) \to Q(c)$	(3, US 规则)
5.	$Q(c)$	(2, 4, T 规则，肯定前件)
6.	$\exists x Q(x)$	(5, EG 规则)

例 5.8 [蜂考] 构造下面推理证明： 前提：$\forall x(F(x) \vee G(x))$
结论：$\neg\forall x F(x) \to \exists x G(x)$

证明

1.	$\neg\forall xF(x)$	(附加前提引入)
2.	$\exists x\neg F(x)$	(1, 置换)
3.	$\neg F(a)$	(2, ES 规则)
4.	$\forall x(F(x)\vee G(x))$	(前提引入)
5.	$F(a)\vee G(a)$	(4, US 规则)
6.	$G(a)$	(3, 5, 析取三段论)
7.	$\exists xG(x)$	(6, EG 规则)

例 5.9 [蜂考] 证明下列各式：所有北极熊都是白色的，没有棕熊是白色的，所以北极熊不是棕熊。

解 **命题符号化：**

- $F(x)$：x 是北极熊
- $G(x)$：x 是白色的
- $H(x)$：x 是棕熊

前提： $\forall x(F(x)\to G(x)),\neg\exists x(H(x)\wedge G(x))$

结论： $\forall x(F(x)\to\neg H(x))$

证明 **归谬法：**

1.	$\neg\forall x(F(x)\to\neg H(x))$	(结论的否定引入)
2.	$\exists x(F(x)\wedge H(x))$	(1, 置换)
3.	$F(a)\wedge H(a)$	(2, ES 规则)
4.	$F(a)$	(3, 化简律)
5.	$H(a)$	(3, 化简律)
6.	$\forall x(F(x)\to G(x))$	(前提引入)
7.	$F(a)\to G(a)$	(6, US 规则)
8.	$G(a)$	(4, 7, 假言推理)
9.	$H(a)\wedge G(a)$	(5, 8, 合取律)
10.	$\exists x(H(x)\wedge G(x))$	(9, EG 规则)
11.	$\neg\exists x(H(x)\wedge G(x))$	(前提引入)
12.	F	(10, 11, 矛盾)

第六章 集合代数

内容提要

- ❑ 集合基本概念
- ❑ 集合运算
- ❑ 集合恒等式
- ❑ 幂集
- ❑ 有穷集合中元素的计数

6.1 集合的基本概念

定义 6.1 集合 (Set)

由确定且彼此不同的客体组成的整体。

- **表示法**：
  - 枚举法：$\{a, b, c\}$
  - 谓词法：$\{x \mid P(x)\}$
- **元素关系**：$a \in A$（属于）或 $a \notin A$（不属于）。

定义 6.2 特殊集合

- **空集 ($\emptyset$)**：不含任何元素的集合。$\forall x, x \notin \emptyset$。
- **全集 (U)**：包含所讨论的所有对象的集合。

定义 6.3 集合间的关系

- **包含**：$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B)$。
- **相等**：$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A$。
- **真包含**：$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \land A \neq B$。

笔记

1. 空集是任何集合的子集，即 $\emptyset \subseteq A$。
2. 空集是任何非空集合的真子集。

6.2 集合的运算

定理 6.1 基本运算

1. **并集**：$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
2. **交集**：$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
3. **相对补集 (差集)**：$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
4. **绝对补集**：$\complement A = U - A$
5. **对称差**：$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

定义 6.4 广义运算

设 A 为集合族（其元素也是集合）：

- **广义并**：$\cup A = \{x \mid \exists B(B \in A \wedge x \in B)\}$
- **广义交**：$\cap A = \{x \mid \forall B(B \in A \to x \in B)\}$ (要求 $A \neq \emptyset$)

笔记

1. **一类运算**（单独集合的运算）：广义运算 $(\cup, \cap)$、幂集运算 $(P(A))$、补运算 $(\complement)$。
   - **顺序**：由右向左进行。
2. **二类运算**：$\cup, \cap, -, \oplus$。
   - **顺序**：由括号确定。
3. **优先级**：一类运算优先于二类运算。

例 6.1 设 $A = \{\{a\}, \{a, b\}\}$，计算 $\cap \cup A \cup (\cup \cup A - \cup \cap A)$。

解

$$
\begin{aligned}
\cap \cup A \cup (\cup \cup A - \cup \cap A) &= \cap \{a, b\} \cup (\cup \{a, b\} - \cup \{a\}) \\
&= (a \cap b) \cup ((a \cup b) - a) \\
&= (a \cap b) \cup (b - a) \\
&= b
\end{aligned}
$$

例 6.2 设 $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$，求 $A \oplus B$。

解

$$
A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 3\} - \{2\} = \{1, 3\}
$$

6.3 集合恒等式

定理 6.2 集合代数定律

设 A, B, C 为任意集合，U 为全集，$\emptyset$ 为空集。

- **交换律**：$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- **结合律**：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- **分配律**：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **德·摩根律**：$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B, \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$
- **吸收律**：$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$
- **零律**：$A \cup U = U, A \cap \emptyset = \emptyset$
- **单位律**：$A \cup \emptyset = A, A \cap U = A$
- **排中律**：$A \cup \complement A = U$
- **矛盾律**：$A \cap \complement A = \emptyset$
- **补集律**：$A - B = A \cap \complement B$

定理 6.3 包含关系的等价条件

设 A, B 为任意集合，下列命题等价：

- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

定理 6.4 对称差的性质

1. **交换律**：$A \oplus B = B \oplus A$
2. **结合律**：$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
3. **单位元**：$A \oplus \emptyset = A$
4. **自反性**：$A \oplus A = \emptyset$
5. **消去律**：$A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C$
6. **补集性质**：$A \oplus \complement A = U$

例 6.3 证明：若 $A \oplus B = A \oplus C$，则 $B = C$。

解 在 $A \oplus B = A \oplus C$ 两边同时左对称差运算 A：

$$A \oplus (A \oplus B) = A \oplus (A \oplus C)$$

$$(A \oplus A) \oplus B = (A \oplus A) \oplus C \quad (\text{结合律})$$

$$\emptyset \oplus B = \emptyset \oplus C \quad (\text{自反性})$$

$$B = C \quad (\text{单位元})$$

例 6.4 证明 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$。

解

$$\begin{aligned} A-(B\cup C) &= A\cap \complement(B\cup C)\\ &= A\cap(\complement B\cap \complement C)\\ &= (A\cap \complement B)\cap(A\cap \complement C)\\ &= (A-B)\cap(A-C)\end{aligned}$$

6.4 幂集 (Power Set)

定义 6.5 幂集

设 A 为集合，由 A 的所有子集组成的集合称为 A 的**幂集**，记作 $P(A)$ 或 2^A。

- $P(A)=\{x \mid x\subseteq A\}$。

性质 若 $|A|=n$，则 $|P(A)|=2^n$。

例 6.5 求 $A=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ 的幂集。

解

$$P(A)=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$$

6.5 有穷集合中元素的计数

定理 6.5 包含排斥原理

设 A,B,C 为有穷集，则：

- $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$
- $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-(|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|)+|A\cap B\cap C|$
- $|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|S|-(|A|+|B|+|C|)+(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)-|A\cap B\cap C|$

例 6.6 在 1 到 100 的整数中，能被 2 或 3 整除的数有多少个？

解 设 A 为能被 2 整除的数集，B 为能被 3 整除的数集。$|A|=\lfloor\frac{100}{2}\rfloor=50, |B|=\lfloor\frac{100}{3}\rfloor=33$。$A\cap B$ 为能被 6 整除的数集，$|A\cap B|=\lfloor\frac{100}{6}\rfloor=16$。由包含排斥原理：$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=50+33-16=67$。

例 6.7 计算 1 到 1000 之间既不能被 5 和 6，也不能被 8 整除的数的个数。

解 设全集 $S=\{1,2,...,1000\}$，则 $|S|=1000$。设 A,B,C 分别为能被 5, 6, 8 整除的数集。$|A|=\lfloor\frac{1000}{5}\rfloor=200$ $|B|=\lfloor\frac{1000}{6}\rfloor=166$ $|C|=\lfloor\frac{1000}{8}\rfloor=125$ $|A\cap B|=\lfloor\frac{1000}{30}\rfloor=33$ $|A\cap C|=\lfloor\frac{1000}{40}\rfloor=25$ $|B\cap C|=\lfloor\frac{1000}{24}\rfloor=41$ $|A\cap B\cap C|=\lfloor\frac{1000}{120}\rfloor=8$ 由包含排斥原理：

$$
\begin{aligned}
|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}| &= |S|-(|A|+|B|+|C|)+(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)-|A\cap B\cap C| \\
&= 1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8 \\
&= 1000-491+99-8 \\
&= 600
\end{aligned}
$$

第六章 练习

1. 设 A, B 为集合，证明 $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$。
2. 简化集合表达式：$(A \cup B) - (A \cap B)$。
3. 某班有 50 名学生，其中 30 人喜欢数学，25 人喜欢物理，15 人两门都喜欢。求两门都不喜欢的学生人数。

第七章 二元关系

内容提要

- ❏ 有序对与笛卡尔积
- ❏ 关系及其表示
- ❏ 关系的运算
- ❏ 关系的性质
- ❏ 关系的闭包
- ❏ 等价关系与划分
- ❏ 偏序关系

7.1 有序对与笛卡尔积

定义 7.1 有序对 (Ordered Pair)

由两个客体 x 和 y 按特定顺序组成的二元组，记作 $<x,y>$。

- **性质**：$<x,y>=<u,v> \Leftrightarrow (x=u \wedge y=v)$。

定义 7.2 笛卡尔积 (Cartesian Product)

设 A,B 为集合，则 A 与 B 的笛卡尔积为：$A \times B = \{<x,y> \mid x \in A \wedge y \in B\}$。

性质

1. 不满足交换律：$A \times B \neq B \times A$ (当 $A \neq B$ 且 $A,B \neq \emptyset$ 时)。
2. 不满足结合律：$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$。
3. 对并/交运算满足分配律：
   - $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
   - $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
4. 若 $|A|=m, |B|=n$，则 $|A \times B| = mn$。

7.2 关系及其表示

定义 7.3 关系 (Relation)

如果一个集合满足以下条件之一，则称该集合为一个**二元关系**，记作 R：

1. 集合非空，且它的元素都是有序对。
2. 集合是空集。

对于二元关系 R，若 $<x,y> \in R$，记作 xRy；若 $<x,y> \notin R$，记作 $x\not{R}y$。

定义 7.4 从 A 到 B 的关系

设 A, B 为集合，$A \times B$ 的任何子集 R 称为从 A 到 B 的**二元关系**。

- 特别地，当 $A = B$ 时，称 R 为 A 上的二元关系。

性质 若 $|A| = n$，则：

1. $|A \times A| = n^2$。
2. $A \times A$ 的子集共有 2^{n^2} 个。
3. 每一个子集都代表一个 A 上的二元关系，因此 A 上共有 2^{n^2} 个不同的二元关系。

定义 7.5 特殊关系

设 A 为集合：

- **空关系**：$\emptyset$。
- **全域关系**：$E_A = A \times A$。
- **恒等关系**：$I_A = \{< x, x > | x \in A\}$。

定义 7.6 关系的表示

1. **集合表达式**：枚举法或谓词法。
2. **关系矩阵**：设 $A = \{x_1, x_2, ..., x_m\}, B = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$，$R$ 是从 A 到 B 的关系。R 的关系矩阵 $M_R = [m_{ij}]_{m \times n}$，其中：

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & < x_i, y_j > \in R \\ 0 & < x_i, y_j > \notin R \end{cases}$$

3. **关系图**：仅适用于 A 上的关系。顶点表示 A 中的元素，若 xRy，则从 x 到 y 画一条有向边。

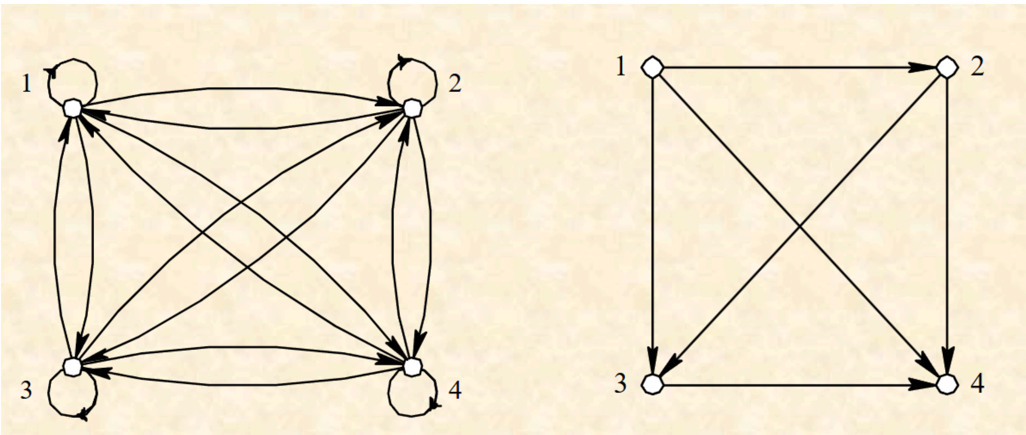


图 7.1 关系图的表示

7.3 关系的运算

定义 7.7 关系的域

设 R 为二元关系：

- **定义域**：$\mathrm{dom}(R) = \{x \mid \exists y(<x, y> \in R)\}$。
- **值域**：$\mathrm{ran}(R) = \{y \mid \exists x(<x, y> \in R)\}$。
- **域**：$\mathrm{fld}(R) = \mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{ran}(R)$。

定义 7.8 逆运算 (Inverse)

$R^{-1} = \{<y, x> \mid <x, y> \in R\}$。

定义 7.9 限制与像

设 $R \subseteq A \times B$：

1. **限制 (Restriction)**：对 $C \subseteq A$，$R|_C = \{<x, y> \mid <x, y> \in R \wedge x \in C\}$。
2. **像 (Image)**：对 $C \subseteq A$，$R(C) = \{y \mid \exists x \in C(<x, y> \in R)\}$。

例 7.1 设 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d\}$，$R = \{<1, a>, <1, b>, <2, c>, <3, d>\}$ 是从 A 到 B 的关系。若 $C = \{1, 2\}$，求 $R|_C$ 和 $R(C)$。

解

- **限制**：$R|_C$ 是 R 中第一元素属于 C 的有序对集合。$R|_C = \{<1, a>, <1, b>, <2, c>\}$
- **像**：$R(C)$ 是 C 中元素在 R 下对应的所有第二元素的集合。$R(C) = \{a, b, c\}$

定义 7.10 复合运算 (Composition)

设 $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$，则 R 与 S 的复合关系为：$S \circ R = \{<x, z> \mid \exists y(xRy \wedge ySz)\}$。

- **注意**：$S \circ R$ 是先做 R 再做 S。
- **矩阵表示**：$M_{\{S \circ R\}} = M_R \odot M_S$（布尔乘法）。

定义 7.11 幂运算 (Power)

设 R 是 A 上的关系：

- $R^0 = I_A$
- $R^{n+1} = R^n \circ R$

定理 7.1 关系运算的性质

1. **逆运算性质：**
   - $(R^{-1})^{-1} = R$
   - $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
   - $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
   - $(A \times B - R)^{-1} = B \times A - R^{-1}$
2. **复合运算性质：**
   - 结合律：$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$
   - 对并运算的分配律：$S \circ (R_1 \cup R_2) = (S \circ R_1) \cup (S \circ R_2)$
   - 单调性：若 $R \subseteq S$，则 $R \circ T \subseteq S \circ T$ 且 $T \circ R \subseteq T \circ S$
   - 复合的逆：$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$
3. **幂运算性质：**
   - $R^m \circ R^n = R^{m+n}$
   - $(R^m)^n = R^{mn}$

例 7.2 证明 $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$。

解 $<z, x> \in (S \circ R)^{-1} \Leftrightarrow <x, z> \in S \circ R$

$\Leftrightarrow \exists y(<x, y> \in R \wedge <y, z> \in S)$

$\Leftrightarrow \exists y(<y, x> \in R^{-1} \wedge <z, y> \in S^{-1})$

$\Leftrightarrow \exists y(<z, y> \in S^{-1} \wedge <y, x> \in R^{-1})$

$\Leftrightarrow <z, x> \in R^{-1} \circ S^{-1}$

例 7.3 设 $A = \{1, 2, 3\}, R = \{<1, 2>, <2, 3>, <3, 1>\}$，求 R^2。

解

$$R^2 = R \circ R = \{<1, 3>, <2, 1>, <3, 2>\}$$

7.4 关系的性质

定义 7.12 五大基本性质

设 R 是 A 上的关系：

1. **自反性 (Reflexive)**：$\forall x \in A, < x, x > \in R$。
   - 矩阵特征：主对角线全为 1。
   - 图形特征：每个顶点都有自环。
2. **反自反性 (Irreflexive)**：$\forall x \in A, < x, x > \notin R$。
   - 矩阵特征：主对角线全为 0。
   - 图形特征：每个顶点都没有自环。
3. **对称性 (Symmetric)**：$\forall x, y \in A, < x, y > \in R \rightarrow < y, x > \in R$。
   - 矩阵特征：$M_R^T = M_R$（对称矩阵）。
   - 图形特征：若有边，必成对出现（双向）。
4. **反对称性 (Antisymmetric)**：$\forall x, y \in A, (< x, y > \in R \wedge < y, x > \in R) \rightarrow x = y$。
   - 矩阵特征：若 $m_{\{ij\}} = 1$ 且 $i \neq j$，则 $m_{\{ji\}} = 0$。
   - 图形特征：任意两个顶点间最多只有一条单向边（自环除外）。
5. **传递性 (Transitive)**：$\forall x, y, z \in A, (< x, y > \in R \wedge < y, z > \in R) \rightarrow < x, z > \in R$。
   - 矩阵特征：$R^2 \subseteq R$。

笔记 注意：自反与反自反不是对立关系（存在既不自反也不反自反的关系）；对称与反对称也不是对立关系。

例 7.4 设 $A = \{1, 2, 3\}$，判断 $R = \{< 1, 1 >, < 1, 2 >, < 2, 1 >\}$ 的性质。

解

- 不自反（缺少 $< 2, 2 >, < 3, 3 >$），不反自反（有 $< 1, 1 >$）。
- 对称（$< 1, 2 >$ 与 $< 2, 1 >$ 成对）。
- 不反对称（有 $< 1, 2 >$ 和 $< 2, 1 >$ 但 $1 \neq 2$）。
- 不传递（有 $< 2, 1 >$ 和 $< 1, 2 >$ 但无 $< 2, 2 >$）。

7.5 关系的闭包

定义 7.13 闭包 (Closure)

设 R 是 A 上的关系，R 的具有性质 P 的闭包 $P(R)$ 是满足以下条件的最小关系 R'：

1. $R \subseteq R'$
2. R' 具有性质 P

定理 7.2 三大闭包的构造

1. **自反闭包**：$r(R) = R \cup I_A$
2. **对称闭包**：$s(R) = R \cup R^{-1}$
3. **传递闭包**：$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

性质 闭包的复合性质：

1. $rs(R) = sr(R)$
2. $rt(R) = tr(R)$
3. $ts(R) \supseteq st(R)$
4. $tsr(R)$ 是包含 R 的最小等价关系，称为 R 的**等价闭包**。

笔记 **Warshall 算法**：用于高效计算传递闭包的算法。其核心思想是：如果从 v_i 到 v_k 有路径，且从 v_k 到 v_j 有路径，则从 v_i 到 v_j 有路径。算法通过依次将每个顶点作为中间点来更新关系矩阵。

例 7.5 **Warshall 算法计算实例**

设 $A = \{1, 2, 3\}$，其上的关系 R 的关系矩阵为：

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

使用 Warshall 算法求传递闭包 $t(R)$：

1. **以 v_1 为中间点** ($k = 1$)：检查 M_0 的第 1 列和第 1 行。发现 $M_0[3,1] = 1$ 且 $M_0[1,2] = 1$，故将 $M_1[3,2]$ 置为 1。
$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
2. **以 v_2 为中间点** ($k = 2$)：检查 M_1 的第 2 列和第 2 行。发现 $M_1[1,2] = 1, M_1[3,2] = 1$ 且 $M_1[2,3] = 1$，故将 $M_2[1,3], M_2[3,3]$ 置为 1。
$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
3. **以 v_3 为中间点** ($k = 3$)：检查 M_2 的第 3 列和第 3 行。发现第 3 行全为 1，且第 1, 2, 3 行的第 3 列均为 1，故 M_3 变为全 1 矩阵。
$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

最终传递闭包的关系矩阵为 M_3，即 $t(R) = A \times A$。

例 7.6 [ppt] 设 R, S 为 A 上的关系，证明：若 $R \subseteq S$，则 $t(R) \subseteq t(S)$。

证明 只需证明对于任意正整数 n，均有 $R^n \subseteq S^n$。下面对 n 使用数学归纳法：

1. 当 $n=1$ 时，$R^1=R, S^1=S$，由已知条件 $R\subseteq S$ 可知命题成立。
2. 假设对于 n，命题为真，即 $R^n\subseteq S^n$。
3. 考虑 $n+1$ 的情况：任取 $<x,y>\in R^{n+1}$，则：

$$
\begin{aligned}
<x,y>\in R^n\circ R &\Rightarrow \exists t(<x,t>\in R^n \wedge <t,y>\in R)\\
&\Rightarrow \exists t(<x,t>\in S^n \wedge <t,y>\in S) \quad (\text{由归纳假设及已知条件})\\
&\Rightarrow <x,y>\in S^n\circ S\\
&\Rightarrow <x,y>\in S^{n+1}
\end{aligned}
$$

故 $R^{n+1}\subseteq S^{n+1}$。

综上所述，对于任意正整数 n，都有 $R^n\subseteq S^n$。由于 $t(R)=\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 且 $t(S)=\bigcup_{n=1}^{\infty} S^n$，由并集的性质可知 $t(R)\subseteq t(S)$。

例 7.7 [2024]下列选项正确的是 ( )

A. $tsr(R)$ 一定是等价关系
B. $srt(R)$ 一定不是等价关系
C. 未回忆
D. 偏序关系是自反、对称、传递的

解

- **选项 A**：正确。$tsr(R)$ 依次复合了自反、对称、传递闭包，最终得到的是包含 R 的最小等价关系。
- **选项 B**：错误。$srt(R)$ 也是等价关系（虽然复合顺序不同，但最终结果仍满足等价关系的三个性质）。
- **选项 D**：错误。偏序关系应该是自反、**反对称**、传递的。

例 7.8 设 $A=\{a,b,c\}, R=\{<a,b>,<b,c>\}$，求 $r(R), s(R), t(R)$。

解

- $r(R)=\{<a,b>,<b,c>,<a,a>,<b,b>,<c,c>\}$
- $s(R)=\{<a,b>,<b,c>,<b,a>,<c,b>\}$
- $t(R)=\{<a,b>,<b,c>,<a,c>\}$

7.6 等价关系与划分

定义 7.14 等价关系 (Equivalence Relation)

设 R 是 A 上的关系，若 R 是**自反的、对称的、传递的**，则称 R 为 A 上的等价关系。

- 记作 $x\sim y$。

定义 7.15 等价类与商集

设 R 是 A 上的等价关系：

- **等价类**：对于 $\forall x \in A$，$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge xRy\}$。
- **商集**：$\frac{A}{R} = \{[x]_R \mid x \in A\}$。

性质 等价类的性质：

1. $[x] \neq \emptyset$ (因为 xRx)。
2. 若 xRy，则 $[x]_R = [y]_R$。
3. 若 $x\not R y$，则 $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$。
4. $\cup_{\{x \in A\}} [x] = A$。

定义 7.16 集合的划分 (Partition)

设 A 为非空集合，若 A 的子集族 $\pi = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ 满足：

1. $A_i \neq \emptyset$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ (当 $i \neq j$)
3. $\cup A_i = A$

则称 π 为 A 的一个划分。

定理 7.3 等价关系与划分的一一对应

- A 上的一个等价关系 R 确定了 A 的一个划分（即商集 $\frac{A}{R}$）。
- 反之，A 的一个划分 π 也确定了 A 上的一个等价关系 R。

例 7.9 设 $A = \{1, 2, ..., 10\}$，R 是 A 上的模 3 同余关系。求 $\frac{A}{R}$。

解

- $[1] = \{1, 4, 7, 10\}$
- $[2] = \{2, 5, 8\}$
- $[0] = \{3, 6, 9\}$
- $\frac{A}{R} = \{\{1, 4, 7, 10\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6, 9\}\}$

例 7.10 设 R 是 $\mathbb{Z}$ 上的关系，定义为 $xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2$。证明 R 是等价关系，并求出商集 $\frac{\mathbb{Z}}{R}$。

解

1. **自反性**：对于 $\forall x \in \mathbb{Z}$，显然 $x^2 = x^2$，故 xRx。
2. **对称性**：若 xRy，则 $x^2 = y^2$，从而 $y^2 = x^2$，故 yRx。
3. **传递性**：若 xRy 且 yRz，则 $x^2 = y^2$ 且 $y^2 = z^2$，从而 $x^2 = z^2$，故 xRz。

因此，R 是 $\mathbb{Z}$ 上的等价关系。

商集：对于 $\forall x \in \mathbb{Z}$，其等价类为 $[x]_R = \{y \mid y^2 = x^2\} = \{x, -x\}$。故 $\frac{\mathbb{Z}}{R} = \{\{x, -x\} \mid x \in \mathbb{N}\}$。

例 7.11 设 $A=\{1,2,3,4\}$，求 A 上不同的等价关系的数量。

解 根据等价关系与划分的一一对应定理，A 上不同等价关系的数量等于 A 的不同划分的数量。集合的划分数量由 **Bell 数** B_n 给出。对于 $n=4$:

- 划分成 1 块：$\{\{1,2,3,4\}\}$，共 $S(4,1)=1$ 种。
- 划分成 2 块：
  - $3+1$ 型：如 $\{\{1,2,3\},\{4\}\}$，共 $C(4,3)=4$ 种。
  - $2+2$ 型：如 $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$，共 $\frac{C(4,2)}{2}=3$ 种。

  共 $S(4,2)=7$ 种。
- 划分成 3 块：$2+1+1$ 型，如 $\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$，共 $C(4,2)=6$ 种。共 $S(4,3)=6$ 种。
- 划分成 4 块：$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$，共 $S(4,4)=1$ 种。

总数 $B_4=1+7+6+1=15$。答：A 上共有 15 个不同的等价关系。

7.7 偏序关系

定义 7.17 偏序关系 (Partial Ordering)

设 R 是 A 上的关系，若 R 是**自反的、反对称的、传递的**，则称 R 为 A 上的偏序关系。

- 记作 $\preceq$。
- 称 $<A,\preceq>$ 为偏序集 (Poset)。

定义 7.18 哈斯图 (Hasse Diagram)

利用偏序关系的自反、反对称、传递性简化的关系图。

- 省略自环。
- 省略由传递性产生的边。
- 若 $x\preceq y$，则将 y 置于 x 之上。

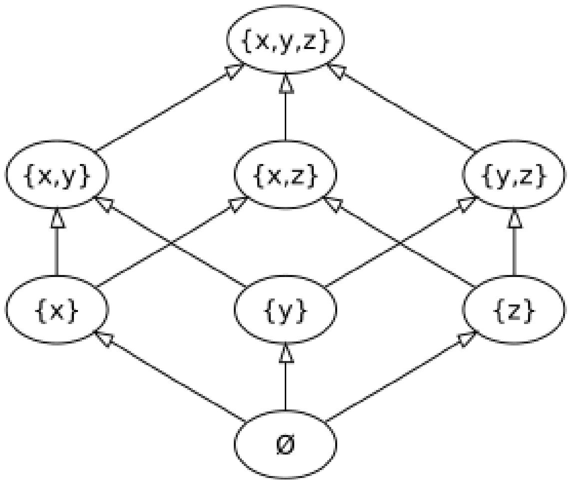


图 7.2 { x, y, z }的幂集按包含偏序排序的哈斯图

定义 7.19 偏序集中的特殊元素

设 $< A, \preceq >$ 为偏序集，$B \subseteq A$：
- **极大元/极小元**：在 B 中没有比它更大/更小的元素。
- **最大元/最小元**：比 B 中所有元素都大/小（若存在必唯一）。
- **上界/下界**：A 中比 B 中所有元素都大/小的元素。
- **最小上界（上确界）/最大下界（下确界）**：上界中的最小元/下界中的最大元。

例 7.12 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$，关系为整除关系 $|$。求 $B = \{2, 3, 6\}$ 的特殊元素。

解

- B 的极大元：6；极小元：2, 3。
- B 的最大元：6；最小元：无。
- B 的上界：6, 12；下界：1。
- B 的最小上界：6；最大下界：1。

例 7.13 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，关系 R 为 A 上的整除关系。

1. 画出该偏序集的哈斯图。
2. 找出 A 的极大元、极小元、最大元和最小元。

解

1. **哈斯图：**
   - 1 在最底层。
   - 2, 3, 5 在 1 之上。
   - 4, 6 在 2 之上；6 也在 3 之上。
   - 5 没有其他元素在其之上。
2. **特殊元素：**
   - 极大元：4, 5, 6（没有元素能整除它们）。
   - 极小元：1（它整除所有元素）。

- 最大元：无（不存在一个元素被所有元素整除）。
- 最小元：1。

例 7.14 设 S 是任意集合，$P(S)$ 是 S 的幂集。证明包含关系 $\subseteq$ 是 $P(S)$ 上的偏序关系。

解

1. **自反性**：对于 $\forall A \in P(S)$，显然 $A \subseteq A$。
2. **反对称性**：对于 $\forall A, B \in P(S)$，若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，根据集合相等的定义可知 $A = B$。
3. **传递性**：对于 $\forall A, B, C \in P(S)$，若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$，则对于 $\forall x \in A$，有 $x \in B$，进而 $x \in C$，故 $A \subseteq C$。

综上所述，$\subseteq$ 是 $P(S)$ 上的偏序关系。

例 7.15 在集合 $A = \{a, b, c, d, e\}$ 上定义关系 R：$R = \{<a,a>, <a,b>, <a,c>, <a,d>, <a,e>, <b,b>, <b,c>, <b,e>, <c,c>, <c,e>, <d,d>, <d,e>, <e,e>\}$

1. 写出其关系矩阵。
2. 验证 R 是偏序关系。
3. 画出其哈斯图。
4. 对于 $B = \{b, d, e\}$，说明其最大元、极大元、最小元、极小元是否存在，若存在则写出。

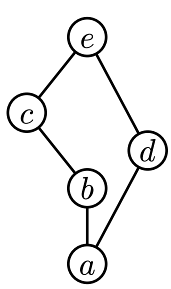
解 (1) **关系矩阵**：

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) **验证**：

- **自反性**：对角线元素均为 1，满足。
- **反对称性**：若 $i \neq j$ 且 $m_{\{ij\}} = 1$，则 $m_{\{ji\}} = 0$，满足。
- **传递性**：经计算 M_R^2 仍满足 $M_R^2 \subseteq M_R$（或通过路径检查），满足。

(3)**哈斯图**：



(4) **子集 $B = \{b, d, e\}$ 的特殊元素**：

- **极大元**：e（B 中没有比 e 更大的元素）。
- **最大元**：e（e 比 B 中所有元素都大）。

- **极小元**：b, d（B 中没有比它们更小的元素）。
- **最小元**：无（b 和 d 不可比）。

第七章 练习

1. 设 $A = \{1, 2, 3\}$，写出一个既是对称的又是反对称的关系。
2. 证明：若 R 是对称的，则 $r(R)$ 也是对称的。
3. 使用 Warshall 算法求关系 $R = \{< 1, 2 >, < 2, 3 >, < 3, 1 >\}$ 的传递闭包。
4. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，给出 A 的一个划分并写出其对应的等价关系。
5. 画出集合 $P(\{a, b, c\})$ 关于包含关系 $\subseteq$ 的哈斯图，并找出其中的最大元和最小元。

第八章 函数

内容提要

- ❑ 函数的定义与性质
- ❑ 特殊函数
- ❑ 函数的复合
- ❑ 反函数

8.1 函数的定义与性质

定义 8.1 函数 (Function)

设 A, B 是集合，f 是从 A 到 B 的二元关系。若对于 $\forall x \in A$，都存在唯一的 $y \in B$ 使得 $< x, y > \in f$，则称 f 为从 A 到 B 的**函数**（或映射），记作 $f : A \to B$。

- **定义域**：$\mathrm{dom}\ f = A$。
- **陪域**：$\mathrm{cod}\ f = B$。
- **值域**：$\mathrm{ran}\ f = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq B$。

定义 8.2 函数的性质

设 $f : A \to B$：

- **单射 (Injective)**：若 $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$。
- **满射 (Surjective)**：若 $\mathrm{ran}\ f = B$，即 $\forall y \in B, \exists x \in A$ 使得 $f(x) = y$。
- **双射 (Bijective)**：既是单射又是满射。

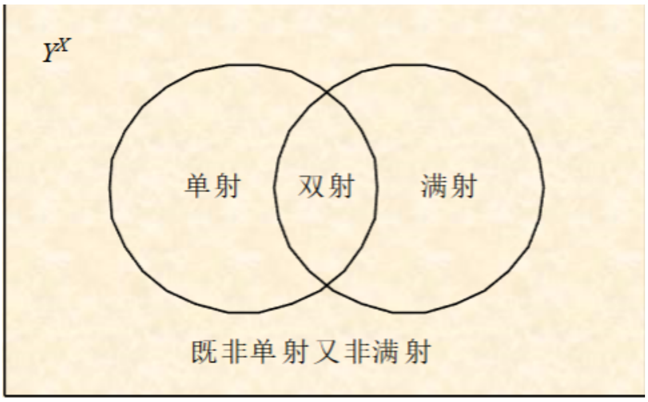


图 8.1 *单射、满射与双射的文氏图对比*

定义 8.3 特殊函数

- **常值函数**：$\forall x \in A, f(x) = c$（$c$ 为定值）。
- **恒等函数**：$I_A : A \to A, \forall x \in A, I_{A(x)} = x$。
- **特征函数**：设 $S \subseteq A$，$\chi_S : A \to \{0,1\}$，若 $x \in S$ 则 $\chi_{S(x)} = 1$，否则为 0。

例 8.1 典型例题：判断函数的性质

设 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(n) = 2n$。

- **单射**：是。若 $2n_1 = 2n_2$，则 $n_1 = n_2$。
- **满射**：不是。奇数（如 1）在陪域中没有原像。
- **结论**：该函数是单射但非满射。

8.2 函数的复合与反函数

定义 8.4 函数的复合 (Composition)

设 $f : A \to B, g : B \to C$，则 f 与 g 的复合函数 $g \circ f : A \to C$ 定义为：

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in A$$

注意：复合顺序是从右向左读。

推论 8.1

设 F, G, H 为函数，则 $(F \circ G) \circ H$ 和 $F \circ (G \circ H)$ 都是函数，且

$$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$$

定理 8.1 复合函数的性质

1. **结合律**：$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$。
2. **交换律**：一般不满足，$g \circ f \neq f \circ g$。
3. **保性**：
   - 若 f, g 均为单射（满射/双射），则 $g \circ f$ 也是单射（满射/双射）。
   - 若 $g \circ f$ 是单射，则 f 必是单射。
   - 若 $g \circ f$ 是满射，则 g 必是满射。

定义 8.5 反函数 (Inverse Function)

设 $f : A \to B$ 是双射，则 f 的逆关系 f^{-1} 也是一个函数，称为 f 的**反函数**，$f^{-1} : B \to A$。

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

定理 8.2 反函数的性质

1. $f^{-1} \circ f = I_A$， $f \circ f^{-1} = I_B$。
2. $(f^{-1})^{-1} = f$。
3. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$（注意顺序反转）。

例 8.2 典型例题：求复合函数与反函数

设 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 1, g(x) = 2x$。

1. 求 $g \circ f$：$(g \circ f)(x) = g(x+1) = 2(x+1) = 2x + 2$。
2. 求 f^{-1}：令 $y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1$，故 $f^{-1}(x) = x - 1$。

笔记 复习要点

1. **判定性质**：考试常考给出 $f : A \to B$ 的解析式或集合对，要求判断其是否为单/满/双射。
2. **复合保性**：记住"左满右单"原则——若复合函数是满射，左边的函数必满；若是单射，右边的函数必单。
3. **反函数存在性**：只有**双射**才存在反函数。

性质 像与原像的性质

设 $f : A \to B$，$S, S_1, S_2 \subseteq A$，$T, T_1, T_2 \subseteq B$：

1. $f(S_1 \cup S_2) = f(S_1) \cup f(S_2)$
2. $f(S_1 \cap S_2) \subseteq f(S_1) \cap f(S_2)$（若 f 是单射，则等号成立）
3. $f^{-1}(T_1 \cup T_2) = f^{-1}(T_1) \cup f^{-1}(T_2)$
4. $f^{-1}(T_1 \cap T_2) = f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2)$
5. $f(f^{-1}(T)) = T \cap f(A) \subseteq T$（若 f 是满射，则等号成立）
6. $S \subseteq f^{-1}(f(S))$（若 f 是单射，则等号成立）

例 8.3 设 f 为 $A \to B$ 的函数，$S \subseteq A, T \subseteq B$，下列说法正确的是 ( )

A. f 是满射$\Leftrightarrow f(A) = B$

B. f 是满射$\Leftrightarrow \forall T \subseteq B, f(f^{-1}(T)) = T$

C. f 有反函数$\Leftrightarrow f(A) = B$

D. f 有反函数$\Leftrightarrow \forall S \subseteq A, f^{-1}(f(S)) = S$

解

- **选项 A**：正确。这是满射的定义。
- **选项 B**：错误。$f(f^{-1}(T)) = T$ 对所有 $T \subseteq B$ 成立的充要条件是 f 为满射。
- **选项 C**：正确。f 有反函数意味着 f 是双射，双射必为满射，故 $f(A) = B$。
- **选项 D**：正确。f 有反函数意味着 f 是双射，双射必为单射，而单射满足 $f^{-1}(f(S)) = S$。

注：在单选题中，A 通常作为最基础的定义被视为标准答案；但在多选题或理论分析中，A、C、D 均为真命题。

8.3 集合的基数

定义 8.6 等势 (Equipotence)

设 A, B 是两个集合。若存在从 A 到 B 的双射 $f: A \to B$，则称 A 与 B **等势**，记作 $A \approx B$。

- 等势关系是一个等价关系（自反、对称、传递）。

定义 8.7 基数 (Cardinality)

集合 A 的**基数**（或势）记作 $|A|$。

- 若 $A \approx B$，则 $|A| = |B|$。
- 有限集的基数就是它包含的元素个数。
- **自然数集** $\mathbb{N}$ 的基数记作 $\aleph_0$（阿列夫零）。
- **实数集** $\mathbb{R}$ 的基数记作 $\aleph$（或 c，连续统势）。

定义 8.8 自然数的集合定义 (von Neumann 构造)

在集合论中，自然数通常被定义为集合：

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$
- $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $n = \{0, 1, ..., n - 1\}$
- $n + 1 = n \cup \{n\}$

由于自然数都是集合，有关集合的运算对自然数都是适用的。

例 8.4 计算 $2 \cup 5$ 和 $3 \cap 4$。

解 根据自然数的集合定义：

- $2 = \{0, 1\}$
- $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

由于 $2 \subseteq 5$，故 $2 \cup 5 = 5$。

同理：

- $3 = \{0, 1, 2\}$
- $4 = \{0, 1, 2, 3\}$

由于 $3 \subseteq 4$，故 $3 \cap 4 = 3$。

结论：对于自然数 m, n，若 $m \leq n$，则 $m \subseteq n$，且 $m \cup n = \max(m, n)$，$m \cap n = \min(m, n)$。

定义 8.9 函数集合及其基数

设 A,B 是集合，从 A 到 B 的所有函数构成的集合记作 B^A。

- **基数计算**：$|B^A| = |B|^{|A|}$。
- **幂集关系**：由于 $P(A)$ 与 $\{0,1\}^A$ 等势，故 $|P(A)| = 2^{|A|}$。
- **连续统势**：$|\mathbb{R}| = |P(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0} = \aleph$。

定义 8.10 可数集 (Countable Set)

- **列入集**（可数无穷集）：与自然数集 $\mathbb{N}$ 等势的集合，其基数记为 $\aleph_0$。
- **可数集**：有限集或列入集。
- **不可数集**：不是可数集的无限集（如实数集 $\mathbb{R}$）。
- **常见列入集**：整数集 $\mathbb{Z}$、偶数集、有理数集 $\mathbb{Q}$、两个列入集的笛卡尔积 $A \times B$。

定理 8.3 可数集的性质

1. 可数集的任何子集都是可数集。
2. 两个可数集的并是可数集：若 A,B 可数，则 $A \cup B$ 可数。
3. 无穷集 A 的幂集 $P(A)$ 不是可数集：$|P(A)| > |A|$。
4. 可数个可数集的并集仍是可数集：$|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i| = \aleph_0$（若 A_i 为列入集）。

定理 8.4Cantor 定理

对于任何集合 A，都有 $|A| < |P(A)|$。

- 这意味着不存在最大的基数。
- $|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$，即 $\aleph_0 < \aleph$。

定理 8.5Schroeder-Bernstein 定理

设 A,B 是集合。若 $|A| \le |B|$ 且 $|B| \le |A|$，则 $|A| = |B|$。（即：若存在单射 $f: A \to B$ 和单射 $g: B \to A$，则 $A \approx B$）

例 8.5 典型例题：证明集合等势

证明区间 $(0,1)$ 与 $(0,2)$ 等势。

- **构造双射**：令 $f: (0,1) \to (0,2), f(x) = 2x$。
- 显然 f 是双射，故 $(0,1) \approx (0,2)$。

例 8.6 下列选项正确的是 ( )

A. $\mathbb{R} \approx \mathbb{Q}$　　B. $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx P(\mathbb{R})$

C. $\{0,1\}^A \approx P(A)$　　D. $\mathbb{Q} \approx (0,1)$

解

- **选项 A**：错误。$|\mathbb{R}| = \aleph$ 而 $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$，且 $\aleph_0 < \aleph$。
- **选项 B**：错误。$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 的基数为 $2^{\{\aleph_0\}} = \aleph$，而 $P(\mathbb{R})$ 的基数为 $2^{\aleph}$，由 Cantor 定理知 $\aleph < 2^{\aleph}$。
- **选项 C**：正确。集合 A 到 $\{0,1\}$ 的所有函数（特征函数）与 A 的幂集 $P(A)$ 之间存在一一对应关系，故 $\{0,1\}^A \approx P(A)$。
- **选项 D**：错误。$|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ 而 $|(0,1)| = \aleph$。

因此，正确答案为 **C**。

笔记 **复习要点**

1. **常见基数结论**：$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$，而 $|\mathbb{R}| = |(0,1)| = |[0,1]| = \aleph$。
2. **函数集合基数**：$|B^A| = |B|^{\{|A|\}}$，特别地 $|P(A)| = 2^{\{|A|\}}$。
3. **可数性判定**：只要能把元素排成一列（即使是无穷列），就是可数的。
4. **基数比较**：掌握 $\aleph_0 < \aleph$ 以及 Cantor 定理的含义。

第九章 图

内容提要

- ❑ 图的定义与术语
- ❑ 握手定理
- ❑ 度数列与可图化
- ❑ 通路、回路与连通性
- ❑ 图的矩阵表示
- ❑ 图的运算

9.1 图的基本概念

定义 9.1 图 (Graph)

一个图 $G=<V,E>$，其中 V 是顶点集，E 是边集。

- **无向图**：边是无序对，记作 (u,v)。
- **有向图**：边是有序对（弧），记作 $<u,v>$。
- **基图 (Underlying Graph)**：忽略有向图 D 中所有边的方向，得到的无向图称为 D 的基图。

例 9.1 设 $D=<V,E>$，其中 $V=\{v_1,v_2,v_3\}$，$E=\{\langle v_1,v_2\rangle,\langle v_2,v_3\rangle,\langle v_3,v_1\rangle\}$。求 D 的基图。

解 D 的基图为 $G=<V,E'>$，其中 $E'=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_1)\}$。

定义 9.2 关联、环与孤立点

- **关联 (Incidence)**：若边 $e=(u,v)$，则称 u,v 为 e 的端点，e 与 u,v **关联**。
- **关联次数**：顶点 v 与边 e 关联的次数。若 e 不是环，关联次数为 1；若 e 是环，关联次数为 2。
- **环 (Loop)**：两端点重合的边。
- **孤立点**：不与任何边关联的顶点（度数为 0）。
- **相邻 (Adjacency)**：
  - **顶点相邻**：若两个顶点是同一条边的端点，则称这两个顶点相邻。
  - **边相邻**：若两条边有关联的公共顶点，则称这两条边相邻。

例 9.2 在一个包含环的图中，环与其唯一的端点的关联次数是多少？

解 2 次。

定义 9.3 邻域与关联集

- **邻域 (Neighborhood)**：$N(v) = \{u \mid (u, v) \in E\}$，即与 v 相邻的顶点集。
- **闭邻域**：$N[v] = N(v) \cup \{v\}$。
- **关联集**：$I(v) = \{e \mid e \text{ 与 } v \text{ 关联}\}$。
- **前驱集 (Predecessor Set)**：$N^-(v) = \{u \mid \langle u, v\rangle \in E\}$。
- **后继集 (Successor Set)**：$N^+(v) = \{u \mid \langle v, u\rangle \in E\}$。

例 9.3 设 $V = \{a, b, c, d\}$，$E = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle d, a\rangle\}$，求 $N^+(a)$ 和 $N^-(a)$。

解 $N^+(a) = \{b, c\}$，$N^-(a) = \{d\}$。

例 9.4 设 G 是有向图，$V(G) = \{v_1, v_2\}$，$E(G) = \{\langle v_1, v_1\rangle, \langle v_1, v_2\rangle\}$。求 $N^+(v_1)$ 和 $N^-(v_1)$。

解 $N^+(v_1) = \{v_1, v_2\}$，$N^-(v_1) = \{v_1\}$。注意自环使顶点既是自己的前驱也是自己的后继。

例 9.5 综合练习：设 $D = < V, E >$ 是有向图，$V = \{a, b, c, d\}$，$E = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle a, a\rangle, \langle c, a\rangle, \langle a, d\rangle\}$。求顶点 a 的 $N^+(a), N^-(a), N(a)$ 和 $N[a]$。

解

- $N^+(a) = \{a, b, d\}$（从 a 出发的边到达的顶点）
- $N^-(a) = \{a, b, c\}$（到达 a 的边所来自的顶点）
- $N(a) = N^+(a) \cup N^-(a) = \{a, b, c, d\}$（与 a 相邻的所有顶点）
- $N[a] = N(a) \cup \{a\} = \{a, b, c, d\}$

定义 9.4 简单图与多重图

- **平行边 (Parallel Edges)**：连接同一对顶点的多于一条边。
- **简单图 (Simple Graph)**：既没有环也没有平行边的图。
- **多重图 (Multigraph)**：含有平行边的图。

例 9.6 判断：一个包含环的图是否可能是简单图？

解 不可能，简单图的定义要求无环且无平行边。

定义 9.5 顶点的度数 (Degree)

- **无向图**：与顶点 v 关联的边数，记作 $d(v)$。环计算两次。
- **有向图**：
  - **入度** $d^-(v)$：以 v 为终点的边数。
  - **出度** $d^+(v)$：以 v 为起点的边数。
  - **度数** $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$。
- **孤立点**：度数为 0 的顶点。
- **叶点**：度数为 1 的顶点。

定义 9.6 度数相关符号

- **最小度**：$\delta(G)$，指图 G 中所有顶点的度数中的最小值，即 $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V(G)\}$。
- **最大度**：$\Delta(G)$，指图 G 中所有顶点的度数的最大值，即 $\delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\}$。

定理 9.1 握手定理 (Handshaking Lemma)

1. **无向图**：所有顶点的度数之和等于边数的两倍，即 $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$。
2. **有向图**：所有顶点的入度之和等于出度之和，且等于边数，即 $\sum_{v \in V} d^-(v) = \sum_{v \in V} d^+(v) = |E|$。

推论 9.1 握手定理推论

任何图中，度数为奇数的顶点个数必为偶数。

例 9.7 设图 G 有 10 条边，4 个 3 度顶点，其余顶点的度数均为 2，求 G 的顶点数。

解 设顶点数为 n。根据握手定理：

$$4 \times 3 + (n-4) \times 2 = 2 \times 10$$

$$12 + 2n - 8 = 20$$

$$2n + 4 = 20 \rightarrow 2n = 16 \rightarrow n = 8$$

答：顶点数为 8。

定义 9.7 度数列与可图化 (Degree Sequence and Graphic Sequence)

- **度数列**：由图 G 的所有顶点的度数构成的非增序列。
- **可图化**：若一个非负整数序列是某个图的度数列，则称该序列是**可图化**的。
- **可简单图化**：若一个非负整数序列是某个**简单图**的度数列，则称该序列是**可简单图化**的。

笔记 可图化要求：度数之和为偶数（握手定理）。

定理 9.2Havel-Hakimi 定理

设 $d=(d_1,d_2,...,d_n)$ 是一个非增非负整数序列，d 是可简单图化的，当且仅当 $d'=\left(d_2-1,d_3-1,...,d_{\{d_1+1\}}-1,d_{\{d_1+2\}},...,d_n\right)$ 经排序后也是可简单图化的。

- **算法步骤**：
  1. 将序列按降序排列。
  2. 移出最大元素 d_1。
  3. 将其后的 d_1 个元素各减 1。
  4. 若出现负数，则不可简单图化；若全为 0，则可简单图化；否则返回步骤 1。

例 9.8 下列可简单图化的度数序列为 ( )

A. (4, 4, 4, 4, 2)
B. (4, 4, 3, 3, 1)
C. (4, 4, 3, 3, 2, 1)
D. (4, 4, 3, 3, 2, 2)

解

- **选项 A**：(4, 4, 4, 4, 2)
  1. 移出 4，后 4 个减 1：(3, 3, 3, 1)
  2. 移出 3，后 3 个减 1：(2, 2, 0)
  3. 移出 2，后 2 个减 1：(1, −1) -> 出现负数，不可简单图化。
- **选项 B**：(4, 4, 3, 3, 1)。度数之和为 15（奇数），由握手定理可知不可图化。
- **选项 C**：(4, 4, 3, 3, 2, 1)。度数之和为 17（奇数），不可图化。
- **选项 D**：(4, 4, 3, 3, 2, 2)
  1. 移出 4，后 4 个减 1：(3, 2, 2, 1, 2) -> 排序：(3, 2, 2, 2, 1)
  2. 移出 3，后 3 个减 1：(1, 1, 1, 1)
  3. 移出 1，后 1 个减 1：(0, 1, 1) -> 排序：(1, 1, 0)
  4. 移出 1，后 1 个减 1：(0, 0) -> 全为 0，可简单图化。

因此，正确答案为 **D**。

定义 9.8 特殊图

- **完全图** K_n：每对顶点间都有一条边的简单图。边数为 $\frac{n(n-1)}{2}$。
- **圈图**C_n： 由一个圈围成的图。
- **轮图** W_n：C_n 增加一个中心点并与所有点相连。
- **正则图 (Regular Graph)**：每个顶点的度数都相等的图。若度数均为 k，称 k-正则图。
- **竞赛图 (Tournament Graph)**：基图为完全图 K_n 的有向图。
- **二部图 (Bipartite Graph)**：顶点集可划分为两个不相交子集 V_1, V_2，使得每条边都连接 V_1 和 V_2 中的顶点。

定理 9.3 二部图的判定

- **判别法**：一个图是二部图当且仅当它不含奇数长度的圈（奇圈）。

例 9.9 证明：n 阶完全图 K_n 是 $(n-1)$-正则图。

解 在 K_n 中，每个顶点都与其余 $n-1$ 个顶点相邻，故每个顶点的度数均为 $n-1$。

例 9.10 设 T 是 n 阶竞赛图，证明 T 的所有顶点的出度之和等于 $\frac{n(n-1)}{2}$。

解 竞赛图的边数等于 K_n 的边数，即 $\frac{n(n-1)}{2}$。在有向图中，所有顶点的出度之和等于边数。

定义 9.9 图的同构 (Isomorphism)

若存在双射 $f: V_G \to V_H$，使得 $(u,v) \in E_G$ 当且仅当 $(f(u), f(v)) \in E_H$，则称 G 与 H 同构。

直观上说，如果两个图可以通过顶点的重新摆放变得一样，那么就是同构。

- **必要条件**：顶点数相同、边数相同、度数列相同。
- **自补图 (Self-Complementary Graph)**：若图 G 与其补图 $\overline{G}$ 同构，则称 G 为自补图。

例 9.11 证明：若 n 阶简单图 G 是自补图，则其边数 $m = \frac{n(n-1)}{4}$。

解 因为 $G \approx \overline{G}$，所以 $|E(G)| = |E(\overline{G})|$。又因为 $|E(G)| + |E(\overline{G})| = |E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$，故 $2|E(G)| = \frac{n(n-1)}{2}$，即 $m = \frac{n(n-1)}{4}$。由此可知，n 阶自补图的顶点数 n 必须满足 $n \equiv 0, 1 \pmod 4$。

定义 9.10 图的运算 (Graph Operations)

- **删除点 (Vertex Deletion)**：从图 G 中删除顶点 v 及其所有关联的边，记作 $G - v$。若删除顶点子集 $V' \subseteq V$，记作 $G - V'$。
- **删除边 (Edge Deletion)**：从图 G 中删除边 e，但保留其端点，记作 $G - e$。
- **加新边 (Edge Addition)**：在图 G 的不相邻顶点 u, v 之间添加一条新边 $e = (u, v)$，记作 $G + e$。
- **边的收缩 (Edge Contraction)**：删除边 $e = (u, v)$，并将 u 与 v 合并为一个新顶点，使原先与 u 或 v 关联的所有边都与这个新顶点关联，记作 $G \cdot e$。

例 9.12 设 G 是 n 阶 m 条边的图，求 $G - v$ 的顶点数和边数（设 $d(v) = k$）。

解 $G - v$ 有 $n-1$ 个顶点和 $m-k$ 条边。

例 9.13 设 G 是 n 阶 m 条边的简单图，收缩一条边 e 后，新图的顶点数是多少？

解 $n-1$ 个。

9.2 通路与回路

定义 9.11 通路与回路 (Path and Cycle)

- **通路**：顶点与边的交替序列 $v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k$。
- **回路**：起点和终点相同的通路 ($v_0 = v_k$)。
- **简单通路/回路**：边不重复。
- **初级通路/回路 (路径)**：顶点不重复（除起点终点外）。
- **圈 (Cycle)**：长度 $k \geq 1$ 的初级回路称为 k-圈。奇数长度的圈称为奇圈，偶数长度的圈称为偶圈。

例 9.14 [辨析题] 判断下列命题是否正确，并说明理由：

1. 任何简单回路都是圈。
2. 若图中任意两个顶点之间都存在两条不相同的通路，则该图一定是连通图。
3. 在 n 阶简单图中，若每个顶点的度数均大于等于 2，则图中一定含有圈。

解

1. **错误**。简单回路只要求边不重复，而圈（初级回路）要求顶点不重复。例如"8"字形的回路（经过中心点两次）是简单回路但不是圈。
2. **正确**。存在两条通路自然意味着存在至少一条通路，满足连通图定义。
3. **正确**。这是图论中的一个基本结论。从任一顶点出发沿边行走，由于度数 ≥ 2，总能进入新顶点或回到已访问顶点。由于顶点数有限，最终必然会回到某个已访问过的顶点，从而形成圈。

定理 9.4 通路长度定理

- 在 n 阶图 G 中，若从顶点 v_i 到 v_j ($v_i \neq v_j$) 存在通路，则 v_i 到 v_j 一定存在长度小于或等于 $n-1$ 的初级通路（路径）。
- 在一个 n 阶图 G 中，若存在 v_i 到自身的回路，则一定存在 v_i 到自身长度小于或等于 n 的回路。

推论 9.2

在一个 n 阶图 G 中，若存在 v_i 到自身的简单回路，则一定存在 v_i 到自身长度小于或等于 n 的初级回路。

定义 9.12 连通性 (Connectivity)

- 无向图：
  - **连通图**：任意两点间都有通路。
  - **连通分支**：极大连通子图。
- 有向图：
  - **强连通**：任意两点 u, v 互相可达。
  - **单向连通**：任意两点 u, v，u 可达 v 或 v 可达 u。
  - **弱连通**：忽略方向后的无向图是连通的。

定义 9.13 连通分支数与短程线

- **连通分支数 (Connected Component Index)**：图 G 中连通分支的个数，记作 $p(G)$。
- **短程线 (Geodesic)**：连接顶点 u 与 v 的长度最短的通路。
- **距离 (Distance)**：短程线的长度，记作 $d(u, v)$。若 u, v 之间不存在通路，则 $d(u, v) = \infty$。

例 9.15 设 G 是一个有 10 个顶点、3 个连通分支的无向图，求 $p(G)$。若 u, v 属于不同的连通分支，求 $d(u, v)$。

解 $p(G) = 3$。由于 u, v 不连通，故 $d(u, v) = \infty$。

定理 9.5 有向图连通性判定

- **强连通判定**：有向图 D 是强连通的，当且仅当 D 中存在一条经过所有顶点的回路。
- **单向连通判定**：有向图 D 是单向连通的，当且仅当 D 中存在一条经过所有顶点的通路。

定义 9.14 极大路径法 (Maximal Path Method)

在有限图中，由于顶点数有限，必然存在一条长度最长的初级通路（路径），称为**极大路径**。

- **核心思想**：设 $P = v_1, v_2, \dots, v_k$ 是一条极大路径，则 v_1 的所有邻接点必在 P 中（否则 P 可以延长，矛盾）。
- **应用**：常用于证明图中圈的存在性、估算圈的长度以及研究图的连通性质。

例 9.16 设 G 为 n $(n \geq 4)$ 阶无向简单图，$\delta(G) \geq 3$。证明 G 中存在长度大于或等于 4 的圈。

解

1. 取 G 中的一条极大路径 $P = v_1, v_2, \dots, v_k$。
2. 由于 G 是简单图且 $\delta(G) \geq 3$，顶点 v_1 至少有 3 个邻接点。

3. 根据极大路径的性质，v_1 的所有邻接点都在 P 中。设 v_1 的邻接点为 v_i, v_j, v_l，其中 $2 \le i < j < l \le k$。
4. 显然 v_1 与 v_i, v_j, v_l 分别构成了圈。考虑最远的邻接点 v_l，圈 $C = v_1, v_2, ..., v_l, v_1$ 的长度为 l。
5. 因为 v_1 有至少 3 个邻接点，且 v_1 不与自身相邻（简单图），故 v_1 的邻接点在 P 中的下标至少有 3 个不同的值。
6. 设邻接点为 v_2, v_a, v_b $(2 < a < b)$。则圈 $v_1, v_2, ..., v_b, v_1$ 的长度为 b。
7. 由于 v_1 至少有 3 个邻接点，且 v_2 是其中之一，另外两个邻接点 v_a, v_b 的下标 a, b 必须满足 $b > a > 2$。
8. 因此 $b \ge 4$，即圈 $v_1, v_2, ..., v_b, v_1$ 的长度至少为 4。

例 9.17 判断一个有向图的连通性等级。

解 强连通 $\to$ 单向连通 $\to$ 弱连通。

定义 9.15 图的连通性与度数相关定义

- **点连通度**：$\kappa(G)$，指为了使图 G 变为不连通图或平凡图所需移除的最少顶点数目。
- **边连通度**：$\lambda(G)$，指为了使图 G 变为不连通图所需移除的最少边数目。
- **k-连通**：如果一个图的点连通度 $\kappa(G) \ge k$，则称该图为 k-连通图。

定理 9.6 惠特尼定理 (Whitney's Theorem)

对于任何连通图 G，有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$ 成立。

例 9.18 设 G 是一个有 p 个顶点的无向简单图，$p \ge 2$。若 $\delta(G)》 = \frac{(p+k-1)}{(2)}$, 其中 $k < p$ 为正整数，则 G 是 k-连通的，即 $\kappa(G) \ge k$。

证明 反设不然，令 $\kappa(G) = t < k$，则存在顶点割集 S，$|S| = t$，使得 $G - S$ 不连通。设 $G - S$ 的两个连通分支为 A, B，顶点数分别为 a, b，则

$$a + b = p - t.$$

对于任意位于 A 的顶点，其邻接点最多来自 A 内其他 $a - 1$ 个顶点和割集 S 的 t 个顶点， 因此 $\delta(G) \le (a - 1) + t$. 同理对 B 中的顶点也有 $\delta(G) \le (b - 1) + t$，从而 $a \ge \delta(G) - t + 1$, $\quad b \ge \delta(G) - t + 1$. 将两式相加得

$$p - t = a + b \ge 2(\delta(G) - t + 1),$$

即 $2\delta(G) \le p + t - 2$. 由假设 $\delta(G) \ge \frac{p+k-1}{2}$， 于是 $p + k - 1 \le p + t - 2$, 即 $k - 1 \le t - 2$，从而 $t \ge k + 1$。这与 $t < k$（或 $t \le k - 1$）矛盾， 因此初始假设不成立，$\kappa(G) \ge k$，证毕。

9.3 图的矩阵表示

定义 9.16 邻接矩阵 (Adjacency Matrix)

设 $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$，矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，其中 a_{ij} 表示 v_i 到 v_j 的边数。

定义 9.17 关联矩阵 (Incidence Matrix)

对于无向图 $G = (V, E)$，设 $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$，$E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$。关联矩阵 $M = (m_{ij})_{n\times m}$，其中：

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, v_i \text{ 与 } e_j \text{ 相关联} \\ 0, v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不相关联} \end{cases}$$

注：若有环，则对应元素为 2。

定理 9.7 邻接矩阵的性质

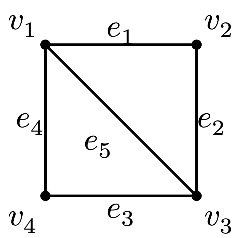
A^k 中的元素 $a_{ij}^{(k)}$ 表示从 v_i 到 v_j 长度为 k 的通路数目。

定义 9.18 可达矩阵 (Reachability Ma trix)

$P = (p_{ij})_{n\times n}$，若 v_i 可达 v_j，则 $p_{ij} = 1$，否则为 0。

$$P = I \vee A \vee A^2 \vee ... \vee A^{n-1}$$

例 9.19 考虑下图 G：



其邻接矩阵 A 为：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

其关联矩阵 M 为（列对应 e_1, e_2, e_3, e_4, e_5）：

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

其可达矩阵 P 为：

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

9.4 图的运算

定义 9.19 子图与补图

- **子图**：$V' \subseteq V, E' \subseteq E$。
- **生成子图**：$V' = V$。
- **导出子图**：由顶点子集 V' 及其在原图中关联的所有边构成的子图。
- **补图**：对于简单图 G，其补图 $\overline{G}$ 的边集是完全图 K_n 中不在 G 中的边。

例 9.20 证明：若 G 是不连通的，则其补图 $\overline{G}$ 必连通。

证明 设 u, v 是 $\overline{G}$ 中的任意两个顶点。

1. 若 u, v 在 G 中属于不同的连通分支，则 u, v 在 G 中不相邻，故在 $\overline{G}$ 中相邻，连通。
2. 若 u, v 在 G 中属于同一个连通分支，设 w 是 G 中另一个连通分支的顶点。则 u, w 和 v, w 在 G 中均不相邻，故在 $\overline{G}$ 中均相邻。从而 $u - w - v$ 是 $\overline{G}$ 中的一条通路，连通。

第九章 练习

1. 证明：在任何图中，度数为奇数的顶点个数必为偶数。
2. 设 G 是 n 阶简单图，若 G 不连通，证明 $\overline{G}$ 连通。
3. 给定一个图的邻接矩阵 A，如何利用 A 判断该图是否为强连通图？

第十章 欧拉图与哈密顿图

内容提要

- ❏ 欧拉通路与回路
- ❏ 欧拉图的判别
- ❏ 哈密顿通路与回路
- ❏ 哈密顿图的判别
- ❏ 典型应用

10.1 欧拉图 (Eulerian Graphs)

定义 10.1 欧拉通路与回路

- **欧拉通路**：通过图中每条边一次且仅一次的通路。
- **欧拉回路**：通过图中每条边一次且仅一次的回路。
- **欧拉图**：具有欧拉回路的图。
- **半欧拉图**：具有欧拉通路但无欧拉回路的图。

定理 10.1 无向欧拉图的判别

设 G 是无孤立点的无向图：

1. G 是欧拉图 $\Leftrightarrow$ G 连通且所有顶点的度数均为偶数。
2. G 是半欧拉图 $\Leftrightarrow$ G 连通且恰有两个奇度顶点（这两个点即为通路的起点和终点）。

定理 10.2 有向欧拉图的判别

设 G 是有向图，其基图连通且无孤立点：

1. G 是欧拉图 $\Leftrightarrow$ 每个顶点的入度等于出度 $(d^-(v) = d^+(v))$。
2. G 是半欧拉图 $\Leftrightarrow$ 除两个顶点外，其余顶点入度等于出度；这两个点中，一个满足 $d^+(v) = d^-(v) + 1$（起点），另一个满足 $d^-(v) = d^+(v) + 1$（终点）。

例 10.1 著名的“哥尼斯堡七桥问题”是否有解？

解 将桥抽象为边，陆地抽象为顶点。得到的图中四个顶点的度数分别为 $3, 3, 3, 5$。由于奇度顶点个数不为 0 或 2，故不存在欧拉通路或回路。答：无解。

10.2 哈密顿图 (Hamiltonian Graphs)

定义 10.2 哈密顿通路与回路

- **哈密顿通路**：通过图中每个顶点一次且仅一次的通路。
- **哈密顿回路**：通过图中每个顶点一次且仅一次的回路。
- **哈密顿图**：具有哈密顿回路的图。
- **半哈密顿图**：具有哈密顿通路但无哈密顿回路的图。

定理 10.3 哈密顿图的必要条件

若 $G=<V,E>$ 是哈密顿图，则对于 V 的任何非空真子集 S，均有：

$$p(G-S)\leq|S|$$

其中 $p(G-S)$ 表示从 G 中删除 S 后所得图的连通分支数。

笔记 该条件常用于证明一个图**不是**哈密顿图。

定理 10.4 哈密顿图的充分条件

设 G 是 $n(n\geq3)$ 阶简单无向图：

1. **Dirac 定理**：若对于 $\forall v\in V$，均有 $d(v)\geq\frac{n}{2}$，则 G 是哈密顿图。
2. **Ore 定理**：若对于每对不相邻的顶点 u,v，均有 $d(u)+d(v)\geq n$，则 G 是哈密顿图。

定理 10.5 完全图的哈密顿分解(Lucas 定理)

对于 n 阶完全图 K_n：

1. 若 n 为奇数，则 K_n 可以分解为 $\frac{n-1}{2}$ 个边不重的哈密顿回路。
2. 若 n 为偶数，则 K_n 可以分解为 $\frac{n-2}{2}$ 个边不重的哈密顿回路和一个完美匹配。

即：K_n 可分解为 $\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$ 个边不重合的哈密顿回路。

例 10.2 一幼儿园有 9 名新来的小朋友，每天中午围成圆桌就餐，每天小朋友相邻的人都不相同，试用图论求最多能坚持几天这种做法。

解 将 9 名小朋友抽象为图的顶点集 $V=\{v_1,v_2,...,v_9\}$，即顶点数 $n=|V|=9$。若两名小朋友相邻就餐，则在对应的顶点间连一条边。由于任意两名小朋友理论上都可以相邻，所有可能的邻座关系构成的集合即为 9 阶完全图 K_9 的边集 E。

即：若 H_i 和 H_j 分别代表第 i 天和第 j 天的方案，则对于任意 $i\neq j$，需满足：

$$E(H_i)\cap E\left(H_j\right)=\emptyset$$

这是一个关于完全图 K_9 的 **边不相交汉密尔顿回路分解** 问题。

在 n 阶完全图 K_n 中，每个顶点的度数均为 $d(v)=n-1$。在本题中，$n=9$，故 $d(v)=9-1=8$。在任何一个汉密尔顿回路 H 中，每个顶点 v 必须且仅与 2 条边相关联（即在回路

子图中，顶点的度数 $d_{H(v)}=2$）。设最多能坚持 k 天，则这 k 个边不相交的回路在任一顶点 v 处消耗的总度数为 $2k$。根据度数的约束条件，必须满足：

$$2k \le d(v)$$
$$2k \le 8 \Rightarrow k \le 4$$

由此可知，理论上最多只能坚持 4 天。

根据图论中的 **Lucas 定理**, $n=9$ 为奇数，根据该定理，K_9 恰好可以分解为：$k=\frac{9-1}{2}=4$个边不相交的汉密尔顿回路。

这证明了 $k=4$ 这一上界在物理上是可构造实现的。

笔记 **闭包 (Closure)**：在 G 中反复连接度数之和 $\ge n$ 的不相邻顶点对，直到无法继续为止，所得的图 $C(G)$ 称为 G 的闭包。G 是哈密顿图当且仅当 $C(G)$ 是哈密顿图。

例 10.3 证明：完全图 $K_n(n\ge 3)$ 是哈密顿图。

证明 在 K_n 中，每个顶点的度数均为 $n-1$。当 $n\ge 3$ 时，$n-1\ge \frac{n}{2}$ 恒成立。根据 Dirac 定理，K_n 是哈密顿图。

定理 10.6 竞赛图的性质

任何竞赛图（完全图 K_n 的有向定向图）都存在哈密顿通路。

10.3 典型例题与应用

例 10.4 判定哈密顿性

利用必要条件证明下图（彼得森图）不是哈密顿图。

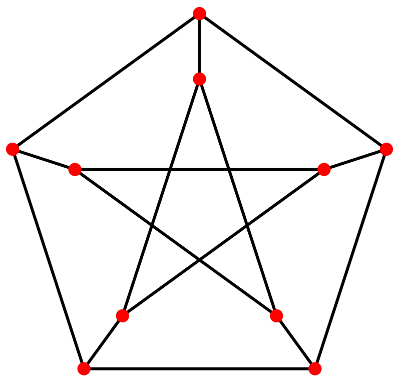


图 10.1 Peterson 图

解（此处可简述证明思路，如寻找合适的 S 使得 $p(G-S)>|S|$，或利用其对称性说明）。

第十章 练习

1. 设 G 是有 n 个顶点的简单图，若 G 有欧拉回路，则 G 的补图 $\overline{G}$ 是否一定有欧拉回路？
2. 证明：若 G 是哈密顿图，则 G 必是 2-连通的。
3. 给出一个 5 阶图，使其是欧拉图但不是哈密顿图。

4. 解释为什么 Dirac 定理只是充分条件而非必要条件（举出反例）。

第十一章 树

内容提要

- ❑ 树的定义与性质
- ❑ 生成树与最小生成树
- ❑ 根树及其应用
- ❑ 哈夫曼编码

11.1 无向树 (Undirected Trees)

定义 11.1 树 (Tree)

- **树**：连通且无回路的无向图。
- **森林**：每个连通分支都是树的图。
- **叶点**：度数为 1 的顶点。
- **分支点**：度数 ≥ 2 的顶点。

定理 11.1 树的等价定义

设 G 是 n 阶无向图，则下列命题等价：

1. G 是树（连通且无回路）。
2. G 中任意两个顶点间存在唯一的初级通路。
3. G 是连通的，且 $m = n - 1$。
4. G 中无回路，且 $m = n - 1$。
5. G 中无回路，但在任意两个不相邻顶点间添加一条边后，恰好形成一个回路。

推论 11.1 树的性质

任何阶数 $n \geq 2$ 的树中至少有两片叶子。

推论 11.2 森林的边数

设 G 是具有 n 个顶点，k 个连通分支的森林，则 G 的边数 $m = n - k$。

例 11.1 设树 T 有 2 个 4 度点，3 个 3 度点，其余均为叶点，求 T 的叶点数。

解 设叶点数为 x，顶点总数 $n = 2 + 3 + x = 5 + x$。根据握手定理：$\sum d(v) = 2m$。在树中，$m = n - 1 = 4 + x$。

$$2 \times 4 + 3 \times 3 + x \times 1 = 2(4 + x)$$

$$8 + 9 + x = 8 + 2x \rightarrow 17 + x = 8 + 2x \rightarrow x = 9$$

答：叶点数为 9。

11.2 生成树与基本系统

定义 11.2 生成树 (Spanning Trees)

若 T 是 G 的生成子图且是树，则称 T 为 G 的**生成树**。

- **树枝 (Branch)**：生成树中的边。
- **弦 (Chord)**：G 中不在生成树中的边。
- **余树 (Cotree)**：由 G 中所有弦组成的集合（或其导出的子图），也称为生成树的补，记作 $\overline{T}$。

性质

1. 连通图 G 的生成树 T 包含 $n-1$ 条边。
2. 连通图 G 的余树 $\overline{T}$ 包含 $m-n+1$ 条边。
3. **生成树的秩** (Rank)：$r(G)=n-1$。
4. **余树的秩** (Nullity)：$m(G)=m-n+1$。

定理 11.2 生成树的存在性

无向图 G 具有生成树当且仅当 G 连通。

定义 11.3 基本回路系统 (Fundamental Cycle System)

设 T 是连通图 G 的一棵生成树，对于每一条弦 $e \in \overline{T}$，$T \cup \{e\}$ 恰好含有一个回路，称为由弦 e 产生的**基本回路**。所有这些基本回路的集合称为 G 关于 T 的基本回路系统。

- 基本回路个数 = 弦的个数 = $m-n+1$。

定义 11.4 基本割集系统 (Fundamental Cut-set System)

设 T 是连通图 G 的一棵生成树，对于每一条树枝 $b \in T$，从 T 中删除 b 会将 T 分成两个连通分支 V_1, V_2。在原图 G 中，连接 V_1 与 V_2 的所有边的集合称为由树枝 b 产生的**基本割集**。

- 基本割集个数 = 树枝个数 = $n-1$。

例 11.2 生成树的例题

考虑图 G 有顶点 A,B,C,D,E，边为 $A-B, A-C, B-C, B-D, C-D, D-E$。找出 G 的一棵生成树。

解 图 G 是连通的，有 5 个顶点和 6 条边。一棵可能的生成树是 $T=\{A-B, A-C, B-D, D-E\}$，包含 4 条边，无回路。

例 11.3 基本回路系统的例题

对于上述图 G 和生成树 $T=\{A-B, A-C, B-D, D-E\}$，找出由弦 $B-C$ 产生的基本回路。

解 将弦 $B-C$ 加入 T，得到回路 $B-C-A-B$（通过 $A-B$ 和 $A-C$）。这就是基本回路。

例 11.4 基本割集系统的例题

对于上述图 G 和生成树 $T=\{A-B, A-C, B-D, D-E\}$，找出由树枝 $A-B$ 产生的基本割集。

解 删除 $A-B$ 将 T 分成两部分：$\{A, C\}$ 和 $\{B, D, E\}$。连接这两部分的边有 $A-C, B-C, B-D$。所以基本割集是 $\{A-C, B-C, B-D\}$。

11.3 最小生成树 (MST)

定义 11.5 最小生成树算法流程

在带权图中，边权之和最小的生成树称为最小生成树。

1. Kruskal (克鲁斯卡尔) 算法 —— 避圈法 (适合稀疏图)

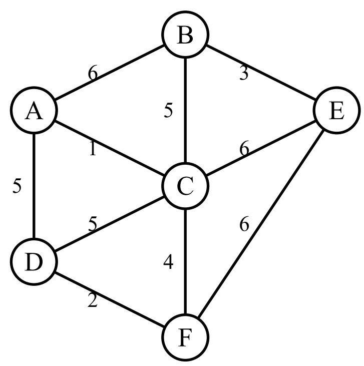
- **步骤 1**：将图 G 中的所有边按权值从小到大排序。
- **步骤 2**：初始状态为只有 n 个顶点的零图（每个点自成一个连通分支）。
- **步骤 3**：依次选择权值最小的边。若该边的两个端点属于不同的连通分支（即不形成回路），则加入该边并合并连通分支；否则舍弃。
- **步骤 4**：重复步骤 3，直到选够 $n-1$ 条边为止。

2. Prim (普里姆) 算法 —— 加点法 (适合稠密图)

- **步骤 1**：任选一顶点 v 加入集合 U，剩余顶点在 $V-U$ 中。
- **步骤 2**：在所有连接 U 与 $V-U$ 的边中，找一条权值最小的边 (u, w)，其中 $u \in U, w \in V-U$。
- **步骤 3**：将该边加入生成树，并将顶点 w 加入集合 U。
- **步骤 4**：重复步骤 2、3，直到 $U=V$（即所有顶点均已加入）为止。

例 11.5 最小生成树算法实例

给定带权无向图 G 如下，求其最小生成树。



解 **1. Kruskal 算法过程**：按边权从小到大排序：

- $(A, C): 1$ —— 加入（无回路）

- $(D, F) : 2$ —— 加入（无回路）
- $(B, E) : 3$ —— 加入（无回路）
- $(C, F) : 4$ —— 加入（无回路）
- $(B, C) : 5$ —— 加入（无回路，连接了 $\{A, C, F, D\}$ 和 $\{B, E\}$）
- $(A, D) : 5$ —— 舍弃（形成回路 $A - C - F - D - A$）
- $(C, D) : 5$ —— 舍弃（形成回路 $C - F - D - C$）

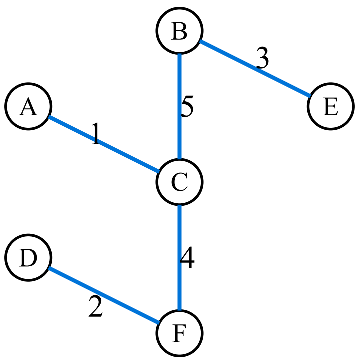
… 已选够 5 条边，算法结束。

2. Prim 算法过程（从 A 点开始）：

- $U = \{A\}$，可选边 $\{(A, C) : 1, (A, B) : 6, (A, D) : 5\}$，选 (A, C)，$U = \{A, C\}$
- $U = \{A, C\}$，可选边 $\{(C, F) : 4, (C, B) : 5, (C, D) : 5, (A, B) : 6, (A, D) : 5\}$，选 (C, F)，$U = \{A, C, F\}$
- $U = \{A, C, F\}$，可选边 $\{(F, D) : 2, (F, E) : 6, (C, B) : 5, (C, D) : 5, ...\}$，选 (F, D)，$U = \{A, C, F, D\}$
- $U = \{A, C, F, D\}$，可选边 $\{(C, B) : 5, (B, A) : 6, (F, E) : 6, ...\}$，选 (C, B)，$U = \{A, C, F, D, B\}$
- $U = \{A, C, F, D, B\}$，可选边 $\{(B, E) : 3, (F, E) : 6, (C, E) : 6\}$，选 (B, E)，$U = \{A, C, F, D, B, E\}$

所有顶点已加入，算法结束。

最终最小生成树结果：



最小生成树的权值之和为：$1 + 4 + 2 + 5 + 3 = 15$。

11.4 根树 (Rooted Trees)

定义 11.6 根树

一个指定了特殊顶点（根）的有向树。

- **层数**：根到顶点的路径长度。
- **树高**：顶点的最大层数。
- **m 叉树**：每个结点的出度 $\leq m$。
- **完全 m 叉树**：每个结点的出度恰好为 m 或 0。

定理 11.3 完全 m 叉树的性质

设 T 是有 i 个分支点，t 个叶点的完全 m 叉树，则：

$$(m-1)i = t-1$$

例 11.6 某学校有 11 个学院，现要举行辩论赛，采用淘汰制（每场比赛淘汰一人），问共需进行多少场比赛？

解 这可以看作一棵完全二叉树，叶点 $t=11$ 为参赛队伍，分支点 i 为比赛场次。

$$(2-1)i = 11-1 \rightarrow i = 10$$

答：共需进行 10 场比赛。

11.5 哈夫曼编码 (Huffman Coding)

定义 11.7 最优二叉树 (Huffman Tree)

在所有叶子节点权值给定的二叉树中，带权路径长度（WPL）最小的二叉树称为最优二叉树或哈夫曼树。

- **WPL** $= \sum_{i=1}^{n} w_i l_i$，其中 w_i 是第 i 个叶子节点的权值，l_i 是从根节点到该叶子节点的路径长度。

性质

1. 权值越大的叶子节点越靠近根节点。
2. 哈夫曼树中没有度为 1 的节点（即只有度为 0 或 2 的节点）。
3. n 个权值构造的哈夫曼树共有 $2n-1$ 个节点。

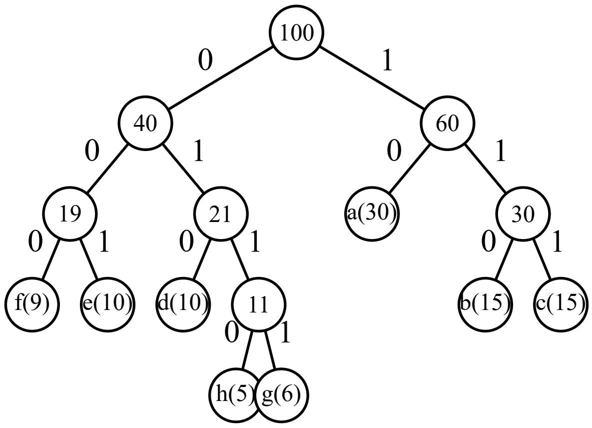
例 11.7 哈夫曼编码与 WPL 计算

已知 8 个字符 a, b, c, d, e, f, g, h 的使用频率分别为 30%, 15%, 15%,10%, 10%, 9%, 6%, 5%。

1. 请构造哈夫曼树，并给出每个字符的哈夫曼编码。
2. 计算该哈夫曼树的带权路径长度 (WPL)。
3. 若有 100 个字符，使用哈夫曼编码共需多少位？

解 (1) **构造哈夫曼树**：将频率视为权值：$w = \{30, 15, 15, 10, 10, 9, 6, 5\}$。构造过程：

- 合并 5 和 6 $\rightarrow$ 11
- 合并 9 和 10 $\rightarrow$ 19
- 合并 10 和 11 $\rightarrow$ 21
- 合并 15 和 15 $\rightarrow$ 30
- 合并 19 和 21 $\rightarrow$ 40
- 合并 30 和 30 $\rightarrow$ 60
- 合并 40 和 60 $\rightarrow$ 100



字符编码（左 0 右 1）：

- $a:10$
- $b:110$
- $c:111$
- $d:010$
- $e:001$
- $f:000$
- $g:0111$
- $h:0110$

(2) **计算 WPL**： $\mathrm{WPL}=\sum w_i l_i=30\times 2+15\times 3+15\times 3+10\times 3+10\times 3+9\times 3+6\times 4+5\times 4$ $\mathrm{WPL}=60+45+45+30+30+27+24+20=281$

(3) **100 个字符的总位数**： 平均码长为 2.81 位/字符。 总位数 $=100\times 2.81=281$ 位。

第十一章 练习

1. 证明：若 G 是森林且有 k 个连通分支，则 $m=n-k$。
2. 给定权值 $\{2,3,5,7,8\}$，构造哈夫曼树并计算其 WPL。
3. 证明：在任何树中，分支点的个数 i 与叶点个数 t 满足什么关系？（提示：利用度数之和）。
4. 简述 Kruskal 算法与 Prim 算法的区别及适用场景。

第十二章 平面图

内容提要

- ❑ 平面图的定义与面
- ❑ 平面图的判定
- ❑ 平面图的着色
- ❑ 欧拉公式及其推论
- ❑ 对偶图

12.1 平面图的基本概念

定义 12.1 平面图 (Planar Graph)

- **平面图**：如果能把图 G 画在平面上，使得除顶点外，边与边之间没有交叉，则称 G 为平面图。
- **平面嵌入**：图 G 的一种没有边交叉的画法。

定义 12.2 面与次数

- **面 (Face)**：由边围成的区域。
- **外部面 (Infinite Face)**：面积无限的面，记作 f_0。
- **内部面**：面积有限的面。
- **边界 (Boundary)**：围成面的回路。
- **次数 (Degree of a Face)**：面 f 的边界长度，记作 $\deg(f)$。
  - 注意：割边在计算次数时计两次。

定理 12.1 面次数之和定理

平面图所有面的次数之和等于边数的两倍：

$$\sum_{\{i=1\}}^{f} \deg(f_i) = 2m$$

例 12.1 一个连通平面图有 6 个顶点，每个顶点的度数均为 3，求该图的面数及各面的次数。

解

1. 根据握手定理：$\sum d(v) = 2m \to 6 \times 3 = 2m \to m = 9$。
2. 根据欧拉公式（见下节）：$n - m + f = 2 \to 6 - 9 + f = 2 \to f = 5$。
3. 根据面次数之和定理：$\sum \deg(f_i) = 2m = 18$。

12.2 欧拉公式 (Euler's Formula)

定理 12.2 欧拉公式

设 G 是一个连通平面图，则：

$$n - m + f = 2$$

其中 n 为顶点数，m 为边数，f 为面数。

推论 12.1 欧拉公式推广

若 G 是具有 k 个连通分支的平面图，则：

$$n - m + f = k + 1$$

定理 12.3 平面图的重要推论

1. 设 G 是连通简单平面图，$n \geq 3$，则 $m \leq 3n - 6$。
2. 若 G 中每个面的次数至少为 l，则 $m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$。
   - 特别地，若简单平面图 G 不含三角形（即 $l \geq 4$），则 $m \leq 2n - 4$。
3. 任何简单平面图中至少有一个顶点的度数 $d(v) \leq 5$。

例 12.2 证明 K_5 和 $K_{\{3,3\}}$ 是非平面图。

证明

- 对于 K_5：$n = 5, m = 10$。若为平面图，应满足 $m \leq 3n - 6$，即 $10 \leq 3(5) - 6 = 9$，矛盾。
- 对于 $K_{\{3,3\}}$：$n = 6, m = 9$，且不含三角形（二部图，$l \geq 4$）。若为平面图，应满足 $m \leq 2n - 4$，即 $9 \leq 2(6) - 4 = 8$，矛盾。

12.3 平面图的判定

定义 12.3 同胚与初等收缩

- **同胚 (Homeomorphic)**：两个图通过反复插入或删除度为 2 的顶点可以互相转化。
- **初等收缩**：将一条边 (u, v) 及其端点合并为一个新顶点。

定理 12.4 库拉托夫斯基 (Kuratowski) 定理

一个图是平面图的充要条件是：它不含与 K_5 或 $K_{\{3,3\}}$ 同胚的子图。

定理 12.5 瓦格纳 (Wagner) 定理

一个图是平面图的充要条件是：它不能通过初等收缩得到 K_5 或 $K_{\{3,3\}}$。

12.4 对偶图 (Dual Graphs)

定义 12.4 对偶图的构造

设 G 是平面图，其对偶图 G^* 的构造方法：

1. 在 G 的每个面 f_i 中放置一个顶点 v_i^*。
2. 若 G 中的边 e 是面 f_i 与 f_j 的公共边界，则连接 v_i^* 与 v_j^*，得到边 e^*。

性质 **对偶图的性质**：

- G^* 总是连通的。
- 若 G 是连通的，则 $(G^*)^* = G$。
- $n^* = f, m^* = m, f^* = n$。
- G^*中某个顶点的度数对应G中对应面f的次数。
- （2024）二部图的对偶图是欧拉图，欧拉图的对偶图是二部图

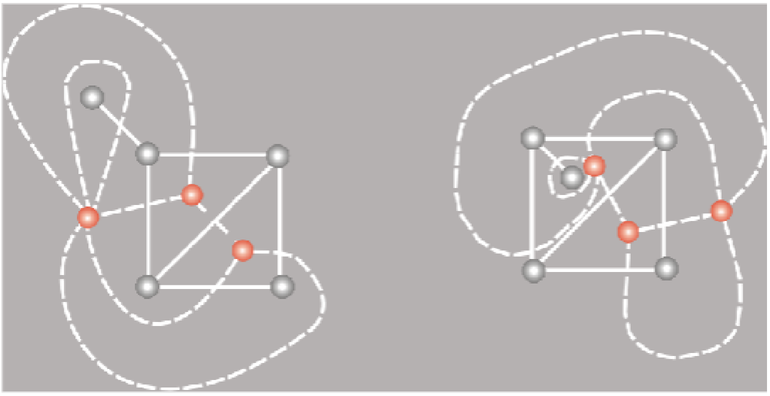


图 12.1 对偶图表示

定义 12.5 自对偶图 (Self-Dual Graphs)

若平面图 G 与其对偶图 G^* 同构（$G \cong G^*$），则称 G 为**自对偶图**。

- **性质**：
  1. 顶点数等于面数 $(n = f)$。
  2. 边数满足 $m = 2n - 2$。
- **典型例子**：
  - 轮图 W_n 都是自对偶图（如 K_4 即 W_3）。

第十二章 练习

1. 证明：彼得森图 (Petersen Graph) 是非平面图。
2. 一个连通平面图有 10 个顶点，每个面的次数均为 3，求边数和面数。
3. 证明：若简单平面图 G 的每个顶点的度数 $d(v) \geq 3$，则 $f \geq 2 + \frac{n}{2}$。
4. 构造一个 4 阶图，画出其平面嵌入并求其对偶图。

第十三章 支配集、覆盖集、独立集与匹配

内容提要

- ❑ 支配集与支配数
- ❑ 覆盖集与覆盖数
- ❑ Hall 定理
- ❑ 独立集与独立数
- ❑ 匹配与匹配数

13.1 支配集、独立集与独立数

定义 13.1 支配集 (Dominating Set)

设 $G =< V, E >$ 为无向图，$V' \subseteq V$。若对于 $\forall v \in V \setminus V'$，在 V' 中至少存在一个顶点 u 使得 $(u, v) \in E$，则称 V' 为 G 的一个**支配集**。

- **极小支配集**：任何真子集都不是支配集。
- **最小支配集**：顶点数最小的支配集。
- **支配数** $\gamma(G)$：最小支配集的顶点数。

定义 13.2 点独立集 (Vertex Independent Set)

设 $G =< V, E >$ 为无向图，$V' \subseteq V$。若 V' 中任意两个顶点都不相邻，则称 V' 为 G 的一个**点独立集**。

- **极大独立集**：任何真超集都不是独立集。
- **最大独立集**：顶点数最大的独立集。
- **点独立数** $\alpha_0(G)$：最大独立集的顶点数。

定理 13.1

1. V' 是极大独立集 $\Leftrightarrow V'$ 既是独立集又是支配集。
2. 若$G =< V, E >$无孤立点，任何极大独立集都是极小支配集。

例 13.1 **典型例题：求循环图 C_5 的支配数与独立数**

对于 C_5（五边形）：

- 支配集：至少需要 2 个点才能支配所有点（如相邻两点或间隔两点），故 $\gamma(C_5) = 2$。
- 独立集：最多只能选 2 个不相邻的点，故 $\alpha_0(C_5) = 2$。

13.2 覆盖集与覆盖数

定义 13.3 点覆盖集 (Vertex Covering Set)

设 $G=<V,E>$ 为无向图，$V'\subseteq V$。若对于 $\forall e\in E$，e 至少有一个端点在 V' 中，则称 V' 为 G 的一个**点覆盖集**。

- **极小点覆盖集**：任何真子集都不是点覆盖集。
- **最小点覆盖集**：顶点数最小的点覆盖集。
- **点覆盖数** $\beta_0(G)$：最小点覆盖集的顶点数。

定理 13.2Gallai 定理 (1)

对于无孤立点的图 $G=<V,E>$，有：

$$\alpha_0(G)+\beta_0(G)=n$$

其中 $n=|V|$。

定义 13.4 边覆盖集 (Edge Covering Set)

设 $G=<V,E>$ 为无向图，$E'\subseteq E$。若对于 $\forall v\in V$，v 至少是 E' 中某条边的端点，则称 E' 为 G 的一个**边覆盖集**。

- **极小边覆盖集**：任何真子集都不是边覆盖集。
- **最小边覆盖集**：边数最小的边覆盖集。
- **边覆盖数** $\beta_1(G)$：最小边覆盖集的边数。

13.3 匹配与匹配数

定义 13.5 匹配 (Matching)

设 $G=<V,E>$ 为无向图，$M\subseteq E$。若 M 中任意两条边都不相邻（不共用顶点），则称 M 为 G 的一个**匹配**。

- **匹配数** $\alpha_1(G)$：最大匹配的边数。
- **饱和点**：与 M 中的边关联的点。
- **极大匹配**：无法再加入新的边使得满足匹配定义的匹配。
- **完美匹配**：若 M 饱和 V 中的所有顶点，则称 M 为 G 的一个**完美匹配**。

定义 13.6 增广路径 (Augmenting Path)

设 M 是 G 的一个匹配。

- **交错路径**：边在 M 与 $E \setminus M$ 中交替出现的路径。
- **增广路径**：起点和终点都是**非饱和点**的交错路径。

定理 13.3Berge 定理

M 是 G 的最大匹配 $\Leftrightarrow G$ 中不存在关于 M 的增广路径。

定理 13.4Hall 定理 (二部图完备匹配条件)

设 $G =< V_1, V_2, E >$ 是二部图，且 $|V_1| \leq |V_2|$。G 存在饱和 V_1 的匹配的充要条件是：对于 $\forall S \subseteq V_1$，都有 $|N(S)| \geq |S|$。（其中 $N(S)$ 是 S 的邻接顶点集）

推论 13.1t-条件

设 $G =< V_1, V_2, E >$ 是二部图。若存在正整数 t，使得：

1. V_1 中每个顶点的度数 $d(v) \geq t$；
2. V_2 中每个顶点的度数 $d(v) \leq t$；

则 G 中存在饱和 V_1 的匹配。

例 13.2 典型例题：判断二部图是否存在完备匹配

给定二部图$V_1 = \{a, b, c\}, V_2 = \{1, 2, 3\}$, 边集$E = \{(a, 1),(a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$。

- 取 $S = \{a, b, c\}$，则 $N(S) = \{1, 2\}$。
- 因为 $|N(S)| = 2 < |S| = 3$，不满足 Hall 条件。
- 结论：不存在饱和 V_1 的匹配。

例 13.3 典型例题：完全图的参数

求无向完全图 K_n（$n \geq 3$）中的 $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$。

解

- **点独立数** $\alpha_0(K_n)$：最大独立集的顶点数。由于 K_n 中任意两个顶点都相邻，所以最大独立集只能包含一个顶点。因此，$\alpha_0(K_n) = 1$。
- **匹配数** $\alpha_1(K_n)$：最大匹配的边数。在n为奇数时，K_n没有完美匹配，最大匹配包含 $\frac{n-1}{2}$ 条边；在n为偶数时，K_n有完美匹配，最大匹配包含 $\frac{n}{2}$ 条边。因此，$\alpha_1(K_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。
- **点覆盖数** $\beta_0(K_n)$：最小点覆盖集的顶点数。要覆盖所有边，至少需要 $n - 1$ 个顶点（去掉一个顶点后，剩余顶点覆盖所有边）。因此，$\beta_0(K_n) = n - 1$。
- **边覆盖数** $\beta_1(K_n)$：最小边覆盖集的边数。由$\alpha_1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 可知，$\beta_1 = \{\frac{n}{2}\}$(向上取整)

第十四章 图的着色

内容提要

- ❑ 点着色与色数
- ❑ 常见图的色数
- ❑ 平面图着色
- ❑ 边着色

14.1 点着色

定义 14.1 点着色 (Vertex Coloring)

设 G 是无环图。对 G 的每个顶点涂一种颜色，使得相邻顶点涂不同的颜色，称为 G 的一个**点着色**。

- **k-着色**：使用了 k 种颜色的着色方案。
- **色数** $\chi(G)$：使 G 产生点着色所需的最少颜色数。

结论 **常见图的色数**

- 完全图 $\chi(K_n) = n$。
- 二部图 G（至少有一条边）：$\chi(G) = 2$。
- 树 T（至少有两个点）：$\chi(T) = 2$。
- 圈图 C_n：
  - n 为偶数时，$\chi(C_n) = 2$。
  - n 为奇数时，$\chi(C_n) = 3$。

定理 14.1

对于任何图 G，有 $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$，其中 $\Delta(G)$ 是 G 的最大度。

定理 14.2Brooks 定理

若 G 是连通图，且既不是奇圈也不是完全图，则 $\chi(G) \leq \Delta(G)$。

例 14.1 **典型例题：Welsh-Powell 算法求色数**

1. 将顶点按度数递减排列：$v_1, v_2, \ldots, v_n$。
2. 用第一种颜色对 v_1 着色，并按顺序对与已着色顶点不相邻的顶点着相同的颜色。
3. 用第二种颜色对尚未着色的顶点中度数最大的顶点着色，重复上述过程。

14.2 平面图着色

定理 14.3 四色定理 (Four Color Theorem)

任何平面图都是 4-可着色的，即 $\chi(G) \leq 4$。

定理 14.4 五色定理

任何平面图都是 5-可着色的。

例 14.2 已知连通简单平面图 G 不含 K_3，求证：

1. G 的最小度 $\delta(G) \leq 3$。
2. G 是可 4-着色的。

证明

1. **证明 $\delta(G) \leq 3$**：由于 G 是简单平面图且不含 K_3，故每个面的次数至少为 4，即 $\deg(f_i) \geq 4$。由面次数之和定理：$2m = \sum \deg(f_i) \geq 4f$。代入欧拉公式 $f = m - n + 2$：
$$2m \geq 4(m - n + 2) = 4m - 4n + 8$$
整理得：$2m \leq 4n - 8$，即 $m \leq 2n - 4$。由握手定理：$\sum d(v_i) = 2m$。又因为 $\sum d(v_i) \geq n \cdot \delta(G)$，所以：
$$n \cdot \delta(G) \leq 2m \leq 2(2n - 4) = 4n - 8$$
$$\delta(G) \leq \frac{4n - 8}{n} = 4 - \frac{8}{n} < 4$$
由于 $\delta(G)$ 是整数，故 $\delta(G) \leq 3$。
2. **证明 G 是可 4-着色的**：
    - **方法一**：直接利用四色定理。因为 G 是平面图，所以 $\chi(G) \leq 4$。
    - **方法二**：利用 $\delta(G) \leq 3$ 进行归纳证明。
    - 当 $n \leq 4$ 时，显然成立。
    - 假设对于 $n - 1$ 个顶点的图成立。对于 n 个顶点的图 G，由 (1) 知存在顶点 v 使得 $d(v) \leq 3$。
    - 移去 v 得到 $G - v$，它是 $n - 1$ 个顶点的平面图且不含 K_3，由假设它是 4-可着色的。
    - 在对 $G - v$ 着色后，由于 v 在 G 中最多只有 3 个邻居，这 3 个邻居最多占用 3 种颜色。
    - 在 4 种可用颜色中，至少还剩一种颜色可以分配给 v。
    - 故 G 是 4-可着色的。

定理 14.5 五色定理 (Five Color Theorem)

任何平面图都是 5-可着色的，即 $\chi(G) \leq 5$。

证明

1. **证明对于简单平面图，$\delta(G) \le 5$：** 由于 G 是简单平面图，每个面的次数至少为 3，即 $\sum \deg(f_i) = 2m \ge 3f$。代入欧拉公式 $f = m - n + 2$ 得：

$$2m \ge 3(m - n + 2) = 3m - 3n + 6$$

整理得：$m \le 3n - 6$。根据握手定理：$\sum d(v_i) = 2m \le 6n - 12$。若所有顶点的度数都 ≥ 6，则 $\sum d(v_i) \ge 6n$，这与 $2m \le 6n - 12$ 矛盾。故 G 中至少存在一个顶点 v，满足 $d(v) \le 5$。即 $\delta(G) \le 5$。

2. **对顶点数 n 施加数学归纳法证明 G 是 5-可着色的：**
   - 当 $n \le 5$ 时，显然结论成立。
   - 假设对于所有顶点数小于 n 的平面图，结论都成立。
   - 对于 n 个顶点的平面图 G，由 (1) 知，存在顶点 v 满足 $d(v) \le 5$。
   - 考虑 $G - v$，由归纳假设，它是 5-可着色的。
   - **情形 1：** 若 $d(v) < 5$，或者 v 的邻居在 $G - v$ 的着色中使用的颜色种类少于 5 种。则在 5 种可用颜色中，至少剩有一种颜色可以分配给 v，结论成立。
   - **情形 2：** 若 $d(v) = 5$，且 v 的 5 个邻居 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5（按顺时针排列）分别染了 5 种不同的颜色 c_1, c_2, c_3, c_4, c_5。
     - 设 $G_{i,j}$ 是 $G - v$ 中仅由染有颜色 c_i 和 c_j 的顶点构成的导出子图。
     - 考虑 $G_{1,3}$：
       - 若 v_1 与 v_3 不在 $G_{1,3}$ 的同一个连通分支中：我们可以将 v_1 所在分支的所有颜色 c_1 和 c_3 互换。互换后 v_1 染上 c_3，此时 v 的邻居只用了 4 种颜色（c_3, c_2, c_3, c_4, c_5），v 可染 c_1。
       - 若 v_1 与 v_3 在 $G_{1,3}$ 的同一个连通分支中：则存在一条由颜色 c_1, c_3 交替构成的通路 $P_{1,3}$ 连接 v_1 和 v_3。这条通路与路径 $v_1 - v - v_3$ 构成了一个圈，根据平面图性质，该圈将 v_2 与 v_4 隔开。
     - 此时，在 $G_{2,4}$ 中，v_2 与 v_4 必然不在同一个连通分支中（因为任何连接 v_2, v_4 的 c_2, c_4 路径都会与 $P_{1,3}$ 或顶点 v 相交，而这些地方没有颜色 c_2, c_4）。
     - 我们可以将 v_2 所在分支的颜色 c_2 和 c_4 互换。互换后 v_2 染上 c_4，此时 v 的邻居只用了 4 种颜色，v 可染 c_2。
   - 综上所述，G 是 5-可着色的。

14.3 边着色

定义 14.2 边着色 (Edge Coloring)

设 G 是无环图。对 G 的每条边涂一种颜色，使得相邻（有公共端点）的边涂不同的颜色，称为 G 的一个**边着色**。

- **边色数** $\chi'(G)$：使 G 产生边着色所需的最少颜色数。

定理 14.6Vizing 定理

对于简单图 G，其边色数 $\chi'(G)$ 满足：

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

- **第一类图**：$\chi'(G) = \Delta(G)$。
- **第二类图**：$\chi'(G) = \Delta(G) + 1$。

14.4 第一类图和第二类图的常见形式

定义 14.3 第一类图的常见形式

- **二部图**：所有二部图都是第一类图，因为它们的边色数等于最大度数。
- **偶数阶完全图**：如 $K_4, K_6, \ldots$，边色数为 $n-1$，而 $\Delta = n-1$。
- **某些平面图**：如树、双环图等，通常是第一类图。
- 简单图且仅有一个最大度点后两个相邻最大度点。 **ppt 单列定理**

定义 14.4 第二类图的常见形式

- **奇数阶完全图**：如 $K_3, K_5, K_7, \ldots$，边色数为 n，而 $\Delta = n-1$，所以 $\chi' = \Delta + 1$。
- **Petersen 图**：一个著名的第二类图，最大度数为 3，但边色数为 4。
- 奇阶图且$m > k\Delta$的图。 **ppt 单列定理**
- 奇阶图且Δ正则简单图。 **ppt 单列定理**
- **非二部图的奇圈**：如 C_3, C_5 等，但更一般的是具有奇数度数的顶点导致的图。

结论 **特定图的边色数**

- 若 G 是二部图，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$。
- 完全图 K_n：
  - n 为偶数时，$\chi'(K_n) = n - 1$。
  - n 为奇数时，$\chi'(K_n) = n$。

笔记 **复习要点**

1. 注意点着色和边着色的区别：点着色看相邻点，边着色看相邻边。
2. Vizing 定理非常重要，简单图的边色数只有两种可能：Δ 或 $\Delta + 1$。
3. 掌握常见图（K_n, C_n）的色数和边色数，考试常考选择填空。

例 14.3 **典型例题：比赛日程安排 (Tournament Scheduling)**

有 5 支球队参加单循环赛，每两支球队之间都要比赛一场。每支球队每天最多只能参加一场比赛。问最少需要安排多少天才能完成全部比赛？

解

1. **建模**：将 5 支球队看作完全图 K_5 的 5 个顶点。每场比赛看作连接两个顶点的一条边。
2. **转化**：由于每支球队每天只能参加一场比赛，这意味着在同一天进行的比赛（边）不能有公共顶点。因此，每天安排的比赛集合必须是图的一个**匹配**。
3. **求解**：最少比赛天数即为 K_5 的边色数 $\chi'(K_5)$。
4. **计算**：
   - 对于完全图 K_n，当 n 为奇数时，$\chi'(K_n) = n$。
   - 这里 $n = 5$，故 $\chi'(K_5) = 5$。
5. **结论**：最少需要安排 **5** 天。

补充：若有 6 支球队 ($n = 6$ 为偶数)，则 $\chi'(K_6) = n - 1 = 5$ 天。

例 14.4 设 $G = (X, Y)$ 是一个最大度为 Δ 的二部图，求证：(1) G 是某个 Δ 正则二部图 G^* 的子图。(2) 用 (1) 证明：二部图的边色数等于其最大度。

解 (1) **证明**：对于二部图 $G = (X, Y)$，设 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}, Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_q\}$。

构造一个 Δ 正则二部图 $G^* = (X^*, Y^*)$，其中：

- $X^* = X \cup \{x_{\{p+1\}}, \ldots, x_{\{\Delta p\}}\}$，即为每个 x_i 添加 $\Delta - d_{G(x_i)}$ 个新顶点。
- $Y^* = Y \cup \{y_{\{q+1\}}, \ldots, y_{\{\Delta q\}}\}$，即为每个 y_j 添加 $\Delta - d_{G(y_j)}$ 个新顶点。

连接规则：

- 对于 G 中的边 (x_i, y_j)，在 G^* 中保留。
- 对于每个 x_i，将其与 $\Delta - d_{G(x_i)}$ 个新 y 顶点连接。
- 对于每个 y_j，将其与 $\Delta - d_{G(y_j)}$ 个新 x 顶点连接。
- 新顶点之间不连接。

这样构造的 G^* 是 Δ 正则的，且 G 是 G^* 的子图。

(2) **证明**：由 (1)，G 是 Δ 正则二部图 G^* 的子图。由于 G^* 是二部图且为 Δ 正则的，其边色数为 Δ（因为二部图的边色数等于最大度）。又因为 G 是 G^* 的子图，边着色时使用的颜色数不会超过 G^* 的边色数，所以 $\chi'(G) \leq \chi'(G^*) = \Delta$。另一方面，由 Vizing 定理，$\chi'(G) \geq \Delta(G) = \Delta$。因此，$\chi'(G) = \Delta$。