

Άσκηση 14

1. $\neg B$ (πρώτη παραγωγή)
2. Υπόθεση
2.1. $\neg A$ (πρώτη υποθέση)
- ⋮
- 2.4. B
3. $\neg \neg A$ με εισαγωγή \neg από 2.
4. A με απαγωγή \neg από 3

Άσκηση 24

- α)
1. Υπόθεση
1.1 $P \vee (Q \wedge R)$ (γ.γ)
 - 1.2 υποθέση
1.2.1 P (γ.γ)
 - 1.2.2 $(P \vee Q)$ με εισαγωγή \vee
 - 1.2.3 $P \vee R$ από 1.2.1 με εισ \vee .
 - 1.2.4 $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ με εισ \wedge από 1.2.2, 1.2.3
 - 1.3 υποθέση
1.3.1 $Q \wedge R$ (γ.γ)
 - 1.3.2 Q από 1.3.1 με εισ \wedge
 - 1.3.3 R από 1.3.1 με εισ \wedge
 - 1.3.4 $P \vee Q$ από 1.3.2 με εισ \vee
 - 1.3.5 $P \vee R$ από 1.3.3 με εισ \vee
 - 1.3.6 $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ από 1.3.4, 1.3.5 με εισ \wedge
 - 1.4 $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ από 1.2, 1.3 με απαγωγή διαζεύξης
 2. $P \vee (Q \wedge R) \rightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Το ίδιο και για το αντίστροφο!!

6) $\neg P / \neg (P \wedge Q)$.

1. $\neg P$ Υ.Π
2. Υποσταγωγή
 - 2.1 $P \wedge Q$ Υ.Υ.
 - 2.2 P 2.1 αναγωγή 1
 - 2.3 $\neg P$ 1 εναντίληψη.
- 3 $\neg (P \wedge Q)$ 2 εισαγωγή άρνησης.

γ) $\{ Q \rightarrow R, P \rightarrow Q \} / P \rightarrow R$.

- 1 $Q \rightarrow R$ Υ.Π.
- 2 $P \rightarrow Q$ Υ.Π.
- 3 Υποσταγωγή.
 - 3.1. P Υ.Υ.
 - 3.2 $P \rightarrow Q$ 2 εναντίληψη.
 - 3.3 Q 3.1, 3.2 αναγωγή \rightarrow .
 - 3.4 $Q \rightarrow R$ 1 εναντίληψη.
 - 3.5 R 3.3, 3.4 αναγωγή \rightarrow .
- 4 $P \rightarrow R$ 3 εισαγωγή \rightarrow .

λίστα 3

$\{ P \vee Q, P \rightarrow R \vee S, R \rightarrow T \vee U, U \wedge T \rightarrow T \} / T \rightarrow Q$

~~$P \vee Q$~~
 ~~$P \rightarrow R \vee S$~~
 ~~$R \rightarrow T \vee U$~~
 ~~$U \wedge T \rightarrow T$~~
 ~~$\neg (T \rightarrow Q)$~~ 5 $[T \rightarrow J]$
 ~~T~~
 ~~$T \rightarrow Q$~~ 1 $[\vee I]$

~~8 P~~ 2 $[\vee I]$ 9 ~~Q~~ del 7.
~~10 $\neg P$~~ del 8 11 $R \vee S$ 11 $[\vee I]$
~~12 R~~ 3 $[\vee I]$ 13 ~~S~~ del 6
~~14 T~~ del 12 15 $T \vee U$ 15 $[\vee I]$

15 $[\vee I]$

~~16 T~~
~~17 U~~ 4 $[\vee I]$
~~18 $T \vee U \vee S$~~ 18 $[\vee I]$ 19 ~~T~~ del 16.
~~20 $T \vee U$~~ del 17 21 ~~S~~ del 6

Άσκηση 3

α) μεθοδός κατασκευής μοντέλων.

$$C_0 = \{P \vee Q, P \rightarrow R \vee S, R \rightarrow T \wedge U, U \wedge \neg S \rightarrow \neg T, \neg(\neg S \rightarrow Q)\} \quad [\neg(\rightarrow)]$$

$$C_1 = \{P \vee Q, P \rightarrow R \vee S, R \rightarrow T \wedge U, U \wedge \neg S \rightarrow \neg T \wedge S, \neg Q\} \quad [\vee]$$

$$C_2 = \{\cancel{P}, \cancel{P \rightarrow R \vee S}, \cancel{R \rightarrow T \wedge U}, \cancel{U \wedge \neg S \rightarrow \neg T}, \neg S, \neg Q\}, \{Q, P \rightarrow R \vee S, R \rightarrow T \wedge U, U \wedge \neg S \rightarrow \neg T, \neg S, \neg Q\} \quad [\text{del}]$$

$$C_3 = \{\cancel{P}, \cancel{P \rightarrow R \vee S}, \cancel{R \rightarrow T \wedge U}, \cancel{U \wedge \neg S \rightarrow \neg T}, \neg S, \neg Q\} \quad [\rightarrow]$$

$$C_4 = \{\cancel{\{P, \neg P, R \rightarrow T \wedge U, U \wedge \neg S \rightarrow \neg T, \neg S, \neg Q\}}, \{P, R \vee S, R \rightarrow T \wedge U, U \wedge \neg S \rightarrow \neg T, \neg S, \neg Q\}\} \quad [\text{del}]$$

$$C_5 = \{\cancel{P}, \cancel{R \vee S}, \cancel{R \rightarrow T \wedge U}, \cancel{U \wedge \neg S \rightarrow \neg T}, \neg S, \neg Q\} \quad [\vee]$$

$$C_6 = \{\cancel{\{P, R, R \rightarrow T \wedge U, U \wedge \neg S \rightarrow \neg T, \neg S, \neg Q\}}, \{P, S, R \rightarrow T \wedge U, U \wedge \neg S \rightarrow \neg T, \neg S, \neg Q\}\} \quad [\text{del}]$$

$$C_7 = \{\cancel{P}, \cancel{R}, \cancel{R \rightarrow T \wedge U}, \cancel{U \wedge \neg S \rightarrow \neg T}, \neg S, \neg Q\} \quad [\rightarrow]$$

$$C_8 = \{\cancel{\{P, R, \neg R, U \wedge \neg S \rightarrow \neg T, \neg S, \neg Q\}}, \{P, R, T \wedge U, U \wedge \neg S \rightarrow \neg T, \neg S, \neg Q\}\} \quad [\text{del}]$$

$$C_9 = \{\cancel{P}, \cancel{R}, \cancel{T \wedge U}, \cancel{U \wedge \neg S \rightarrow \neg T}, \neg S, \neg Q\} \quad [\wedge]$$

$$C_{10} = \{\cancel{P}, \cancel{R}, \cancel{T}, \cancel{U}, \cancel{U \wedge \neg S \rightarrow \neg T}, \neg S, \neg Q\} \quad [\rightarrow]$$

$$C_{11} = \{\cancel{\{P, R, T, U, \neg(U \wedge \neg S), \neg S, \neg Q\}}, \{P, R, T, U, \neg T, \neg S, \neg Q\}\} \quad [\text{del}]$$

$$C_{12} = \{P, R, T, U, \neg(U \wedge \neg S), \neg S, \neg Q\} [\neg \wedge]$$

$$C_{13} = \{P, R, T, U, (\neg U \vee S), \neg S, \neg Q\} [\vee]$$

$$C_{14} = \left\{ \{P, R, T, U, \neg U, S, \neg S, \neg Q\}, \{P, R, T, U, S, \neg S, \neg Q\} \right\} [\text{del}] [\text{del}]$$

$$C_{15} = \{ \}$$

Αρα αφού υπάρχει έρμηνεία I που ικανοποιεί την C_0 , τότε η εξαγωγή συμπέρασματος είναι έγκυρη.

β) μέθοδος επίλυσης.

Επακολουθεί τους αφορμούς:

$$P \vee Q \rightsquigarrow \{P, Q\}$$

$$P \rightarrow R \vee S \equiv \neg P \vee (R \vee S) \rightsquigarrow \{ \neg P, R, S \}$$

$$R \rightarrow T \wedge U \equiv \neg R \vee (T \wedge U) \equiv (\neg R \vee T) \wedge (\neg R \vee U) \rightsquigarrow \{ \neg R, T \}, \{ \neg R, U \}$$

$$U \wedge \neg S \rightarrow \neg T \equiv \neg(U \wedge \neg S) \vee \neg T \equiv \neg U \vee \neg \neg S \vee \neg T \rightsquigarrow \{ \neg U, S, \neg T \}$$

$$\neg(\neg S \rightarrow Q) \equiv \neg(\neg \neg S \vee Q) \equiv \neg(S \vee Q) \equiv \neg S \wedge \neg Q \rightsquigarrow \{ \neg S \}, \{ \neg Q \}$$

$$\text{Έτσι } S \equiv \{ \{P, Q\}, \{ \neg P, R, S \}, \{ \neg R, T \}, \{ \neg R, U \}, \{ \neg U, S, \neg T \}, \{ \neg S \}, \{ \neg Q \} \}$$

Η παραπάνω ακολουθία επίλυσης δίνει την εγκυρότητα εξαγωγής συμπέρασματος:

$$\begin{array}{ccccccc} \{ \neg R, T \} & \xrightarrow{\{ \neg U, S, \neg T \}} & \{ \neg R, \neg U, S \} & \xrightarrow{\{ \neg R, U \}} & \{ \neg R, S \} & \xrightarrow{\{ \neg P, R, S \}} & \{ \neg P, S \} \xrightarrow{\{ P, Q \}} \\ & & & & & & \{ Q, S \} \xrightarrow{\neg Q} S \xrightarrow{-S} F \end{array}$$