ΗΥ380 – Αλγόριθμοι και πολυπλοκότητα

$4^{η}$ Σειρά ασκήσεων

Ημερομηνία Παράδοσης: 26/04/2017 την ώρα του μαθήματος ή σε email: drossis@csd.uoc.gr

Άσκηση 1

Έστω γράφος G(V,E). Υποθέστε ότι όλα τα βάρη (W) των ακμών του γράφου είναι ακέραιοι αριθμοί και παίρνουν τιμές απο 1 μέχρι |V|.
ΕΡΩΤΗΣΗ: Ποιός είναι ο βέλτιστος χρόνος που μπορείτε να πετύχετε τρέχοντας τον αλγόριθμο Kruskal; Τι θα αλλάξει αν το εύρος τιμών για τα βάρη γίνει απο 1 μέχρι W, όπου W σταθερός θετικός ακέραιος.

Άσκηση 2

Αναφέρετε τις κύριες διαφορές μεταξύ του BFS (Breadth-first search) και του DFS (Depth-first search). Σε ποιές περιπτώσεις χρησιμοποιούμε τον έναν και σε ποιες τον άλλον αλγόριθμο; Δώστε παραδείγματα.

Άσκηση 3

Ως διάμετρο ορίζουμε το μεγαλύτερο απο τα shortest paths ενός γράφου. Σας δίνεται ένας γράφος G (V,E). Να γράψετε έναν αλγόριθμο που να βρίσκει τη διάμετρο του γράφου G.

Άσκηση 4

Έστω Κατευθυνόμενος γράφος G (V,E), στον οποίο κάθε ακμή (u, v) E έχει μία σχετική τιμή r(u, v) R και 0 ≤ r(u, v) ≤ 1, η οποία αντιπροσωπεύει την αξιοπιστία, σε ένα επικοινωνιακό κανάλι, απο τον κόμβο u στον κόμβο v. Θεωρείστε ως r(u,v) την πιθανότητα οτι το κανάλι απο το u στο v δεν θα αποτύχει την μετάδοση και ότι οι πιθανότητες είναι ανεξάρτητες.
ΕΡΩΤΗΣΗ: Να δοθεί ένας αποδοτικός αλγόριθμος που να βρίσκει το ποιο αξιόπιστο μονοπάτι μεταξύ 2 κόμβων, που σας δίνονται.

Άσκηση 5

Δώστε έναν αλγόριθμο που να τρέχει σε χρόνο O(|V|*|E|) και να υπολογίζει το transitive closure σε ένα κατευθυνόμενο γράφο G(V,E).

Άσκηση 6

Δώστε έναν αλγόριθμο ο οποίος βρίσκει το MST (maximum spanning tree) ενός γράφου G (V,E) . Αποδείξτε ότι ο αλγόριθμος που δώσατε βρίσκει το MST.

Άσκηση 7

Δώστε έναν αλγόριθμο ο οποίος βρίσκει μια βέλτιστη κάλυψη κόμβων (vertex cover) ενός δένδρου σε γραμμικό χρόνο O(n) , όπου n είναι ο αριθμός των κόμβων του δένδρου.

Άσκηση 8

Ένα Euler tour ενός συνδεδεμένου, κατευθυνόμενου γράφου G = (V, E) είναι ουσιαστικά ένας κύκλος που διασχίζει κάθε ακμή του γράφου ακριβώς μία φορά, ωστόσο ένας κόμβος μπορεί να επισκέπτεται παραπάνω από μια φορά.
a. Να δείξετε ότι ο G έχει Euler tour αν και μόνο αν το in-degree (v) = out-degree (v) για κάθε κόμβο v V.
b. Περιγράψτε έναν αλγόριθμο που τρέχει σε χρόνο O(E) και βρίσκει ένα Euler tour του G, αν υπάρχει. (Υπόδειξη: Merge edge-disjoint cycles.)

Άσκηση 9

Έστω μη κατευθυνόμενος γράφος G (V,E). Ένα σημείο άρθρωσης του G είναι ένας κόμβος του οποίου η αφαίρεση αποσυνδέει τον G. Μια γέφυρα του G είναι μία ακμή της οποίας η αφαίρεση αποσυνδέει τον G.

Ένα biconnected component του G είναι ένα μέγιστο σύνολο ακμών έτσι ώστε κάθε δύο ακμές στο σύνολο βρίσκονται σε έναν κύκλο. Μπορούμε να καθορίσουμε τα σημεία άρθρωσης, τις γέφυρες, και τα components με αναζήτηση κατά βάθος.

Έστω ότι Gπ = (V, Eπ) είναι ένα depth-first δέντρο του G.

a. Αποδείξτε ότι η ρίζα του G είναι ένα σημείο άρθρωσης του G αν και μόνο αν έχει τουλάχιστον δύο παιδιά στον G.

b. Έστω κομβος v, ο οποιος δεν είναι ριζα του Gπ. Αποδείξτε ότι είναι ένα σημείο άρθρωσης του G αν και μόνο αν έχει ένα παιδί s τέτοιο ώστε δεν υπάρχει back edge από το s ή οποιοδήποτε απόγονο του s σε έναν πρόγονο του.

c. Έστω

$$\nu.low = \min \begin{cases} \nu.d \,, \\ w.d : (u, w) \text{ is a back edge for some descendant } u \text{ of } \nu \,. \end{cases}$$

Δείξετε πώς μπορείτε να υπολογίσετε: low[v] για όλους τους κόμβους του G σε O(E) χρόνο.

d. Δείξετε πώς μπορείτε να υπολογίσετε όλα τα σημεία άρθρωσης σε O(E) χρόνο.

e. Αποδείξτε ότι μια ακμή του G είναι μια γέφυρα, αν και μόνο αν δεν βρίσκεται σε οποιοδήποτε απλό κύκλο του G.