ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2016-2017
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

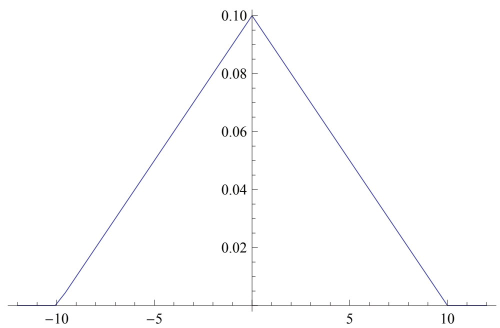
Λυσεις Πέμπτης Σειρά Ασκήσεων

Θέματα: Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές (Ι).

Άσκηση 1.

(α) Το εμβαδόν κάτω από την $f_X(x)$ πρέπει να είναι μονάδα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \frac{1}{2} \times 20 \times a = 10a = 1 \Rightarrow a = 0.1.$$



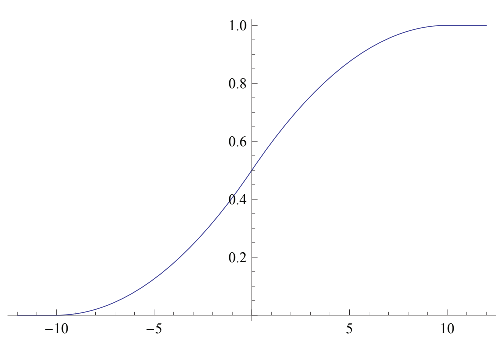
Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της $f_X(x)$.

(β) Εφόσον η $f_X(x)$ είναι άρτια συνάρτηση, τότε $E[X] = 0$. Επιπλέον:

$$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - 0 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = 2\int_0^{10} \frac{10-x}{100}x^2 dx = \frac{50}{3}.$$

(γ) Ομοίως η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \begin{cases} 0, & x < -10 \\ 0.005(x+10)^2, & x \in [-10, 0] \\ 1 - 0.005(x-10)^2, & x \in [0, 10] \\ 1, & x > 10 \end{cases}$$



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση της $F_X(x)$.

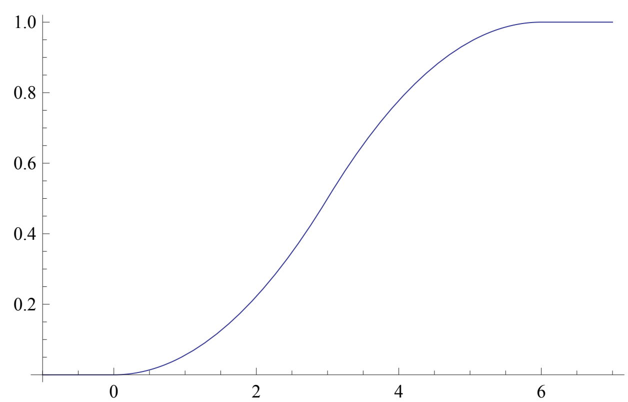
Άσκηση 2.

(α) Από τις ιδιότητες μιας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας έχουμε ότι:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^3 cx\,dx + \int_3^6 c(6-x)\,dx = 9c \Rightarrow c = 1/9.$$

(β) Επειδή έχουμε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή, θα ισχύει ότι: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$. Οπότε θα έχουμε:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{9}\int_0^x u\,du = \frac{x^2}{18}, & 0 \le x < 3 \\ \frac{1}{9}\int_0^3 u\,du + \frac{1}{9}\int_3^x (6-u)\,du = \frac{1}{2} - \frac{1}{18}(6-u)^2\Big|_3^x = 1 - \frac{(6-x)^2}{18}, & 3 \le x < 6 \\ 1, & x \ge 6 \end{cases}$$



Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση της $F_X(x)$.

Η γραφική παράσταση της $F_X(x)$ φαίνεται στο σχήμα 3.

(γ) Είναι εύκολα αντιληπτό ότι η $F_X(x)$ είναι μη φθίνουσα και ότι $0 \le F_X(x) \le 1$ για κάθε τιμή του x, τόσο από το παραπάνω σχήμα όσο και από την ανάλυση των συναρτήσεων $x^2/18$ και $1-(6-x)^2/18$ στα διαστήματα $[0,3]$ και $[3,6]$, αντίστοιχα. Επιπλέον, ισχύει ότι: $F_X(-\infty) = F_X(0) = 0$ και $F_X(+\infty) = F_X(6) = 1$. Τέλος, είναι εύκολα αντιληπτό ότι η $F_X(x)$ είναι συνεχής παντού, ακόμη και στα σημεία $x = 0, x = 3$ και $x = 6$.

(δ) Έχουμε ότι:

$$P(A) = P(X > 3) = 1 - F_X(3) = 0.5.$$

Παρομοίως:

$$P(B) = P(1.5 \le X \le 9) = P(X \le 9) - P(X < 1.5) = F_X(9) - F_X(1.5^-) = 1 - 0.125 = 0.875.$$

(ε) Η τομή των A και B είναι το γεγονός $\{3 < X \le 9\}$. Άρα,

$$P(A \cap B) = P(3 < X \le 9) = P(X > 3) = 0.5 = P(A) \ne P(A)\,P(B)$$

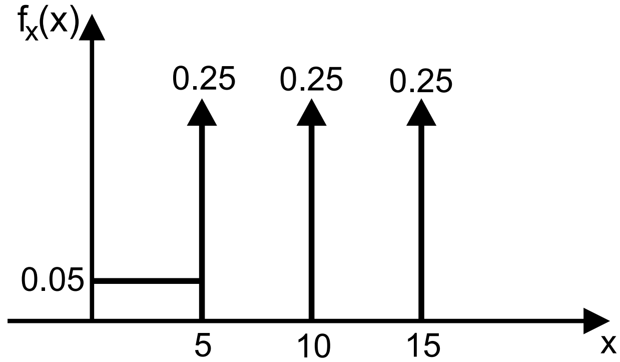
Επομένως, τα δύο γεγονότα δεν είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 3.

(a-i) $P(X \leq 1) = F_X(1) = 0.05$
(a-ii) $P(X \leq 10) = F_X(10) = 0.75$
(a-iii) $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - 0.75 = 0.25$
(a-iv) $P(X \geq 10) = P(X > 10) + P(X = 10) = 0.25 + 0.25 = 0.5$
(a-v) $P(|X - 5| \leq 0.1) = P(4.9 < X < 5.1) + P(X = 4.9) = F_X(5.1) - F_X(4.9) + 0 = 0.255$
(a-vi) Παρατηρώντας τις ασυνέχειες στην $F_X(u)$, συμπεραίνουμε ότι η X είναι μικτή τ.μ. Παίρνει τις τιμές $X = 5, 10, 15$ με μη-μηδενικές πιθανότητες:

$$P(X = 5) = P(X = 10) = P(X = 15) = 0.25$$

Επίσης, καθώς $F_X(x) = \frac{x}{20}$ για $0 \leq x < 5$, παραγωγίζοντας παίρνω ότι $f_X(x) = \frac{1}{20}$ για $0 \leq x < 5$. Η γραφική παράσταση της $\sigma.\pi.\pi.$ της X φαίνεται στο Σχήμα .



Σχήμα 4: Η γραφική παράσταση της $\sigma.\pi.\pi.$ για την Άσκηση 3.

$$f_X(x) = \frac{1}{20}[u(x) - u(x-5)] + 0.25[\delta(x-5) + \delta(x-10) + \delta(x-15)]$$

(a-vi) $E[X] = \int_0^5 \frac{1}{20} x dx + 0.25(5 + 10 + 15) = \frac{1}{20}\frac{1}{2}x^2\Big|_0^5 + 0.25 \times 30 = 8.125$

Άσκηση 4.

(α) $P(X \leq 15) = P(\frac{X-17}{3} \leq \frac{15-17}{3}) = P(\frac{X-17}{3} \leq -0.67) = \Phi(-0.67) = 1 - \Phi(0.67) = 1 - 0.7486 = 0.25$

(β) $P(X > 22) = P(\frac{X-17}{3} > \frac{22-17}{3}) = P(\frac{X-17}{3} > 1.67) = 1 - P(\frac{X-17}{3} \leq 1.67) = 1 - \Phi(1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475$

(γ) $P(13 \leq X \leq 22) = P(\frac{13-17}{3} \leq \frac{X-17}{3} \leq \frac{21-17}{3}) = P(-1.33 \leq \frac{X-17}{3} \leq 1.33) = 2\Phi(1.33) - 1 = 2 \cdot 0.9082 - 1 = 0.8164$

Άσκηση 5.
Η πιθανότητα για οποιοδήποτε γεγονός να συμβεί ισούται με το εμβαδόν κατώ από την $\sigma.\pi.\pi.$. Παρατηρήστε ότι $X^2 - 12X + 35 = (X-5)(X-7)$. Οπότε, $X^2 - 12x + 35 > 0$ αν και μόνο αν $\{X > 7\} \cup \{X < 5\}$. Εφόσον $X \sim U[2,10]$, $f_X(x) = 1/8$ για $x \in [2,10]$ και $f_X(x) = 0$ αλλού. Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X^2 - 12X + 35 > 0) &= P(\{X > 7\} \cup \{X < 5\} \cap \{2 \leq X \leq 10\}) \\ &= P(\{2 \leq X < 5\} \cup \{7 < X \leq 10\}) \\ &= P(\{2 \leq X < 5\}) + P(\{7 < X \leq 10\}) \\ &= 1/8 \times (5-3) + 1/8 \times (10-7) \\ &= 1/8 \times 3 + 1/8 \times 3 = 0.75. \end{aligned}$$

Άσκηση 6. Έστω $Q \sim N(500, 100^2)$ ο βαθμός του μαθητή. Έστω επίσης c ο μεγαλύτερος βαθμός που μπορεί να έχει, ώστε να βρίσκεται στο 20% της μικρότερης βαθμολογίας της κατανομής. Για το c θα πρέπει να ισχύει ότι,

$P(X \leq c) = 0.2 \Leftrightarrow P(\frac{X-500}{100} \leq \frac{c-500}{100}) = 0.2 \Rightarrow \Phi(\frac{c-500}{100}) = 0.2 = 1 - 0.8 = 1 - \Phi(0.84) = \Phi(-0.84) \Rightarrow \frac{c-500}{100} = -0.84 \Rightarrow c = 500 - 84 = 416$

Άσκηση 7.
Η ($\alpha.\sigma.\kappa.$) θα είναι:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 - P(X > x) = 1 - e^{-\lambda x} & \text{αλλιώς}, \end{cases}$$

Για τη ($\sigma.\pi.\pi.$) θα ισχύει ότι, $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{d}{dx}1 - e^{-\lambda x} = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$
ενώ $f_X(x) = 0$ για $x < 0$.

Τέλος, επιθυμούμε να καθορίσουμε το χρόνο εγγύησης x ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} P(X \leq x) \leq 0.01 &\Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda x} \leq 0.01 \\ &\Leftrightarrow e^{-\lambda x} \geq 1 - 0.01 \\ &\Leftrightarrow -\lambda x \geq ln(0.99) \\ &\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{\lambda} ln(0.99) \end{aligned}$$

Αρα τελικά για να επιστρέφονται στο εργοστάσιο το πολύ 1% των λαμπτήρων, θα πρέπει να δοθούν ως εγγύηση $c = -\frac{1}{0.1} ln(0.99) = 10 \cdot 0.0100503 = 0.100503 \approx 100$ ώρες