ΑΣΚΗΣΗ 1

$$(P \land (R \to \neg Q)) \land ((\neg P \leftrightarrow Q) \lor P)$$

DNF:

Βήμα 1: Αντικαθιστούμε τις συνεπαγωγές και ισοδυναμίες

$$(P \land (\neg R \lor \neg Q)) \land ((\neg P \land Q) \lor (\neg\neg P \land \neg Q) \lor P) \equiv$$

Βήμα 2: Σπρώχνουμε τις πιο εξωτερικές αρνήσεις εσωτερικά:

$$(P \land (\neg R \lor \neg Q)) \land ((\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q) \lor P) \equiv$$

Βήμα 3: Χρησιμοποιούμε την επιμεριστικότητα της σύζευξης:

$$((P \land \neg R) \lor (P \land \neg Q)) \land ((\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q) \lor P) \equiv$$

$$((P \land \neg R) \land ((\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q) \lor P)) \lor ((P \land \neg Q) \land ((\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q) \lor P)) \equiv$$

$$((P \land \neg R) \land (\neg P \land Q)) \lor ((P \land \neg R) \land (P \land \neg Q)) \lor ((P \land \neg R) \land P) \lor ((P \land \neg Q) \land (\neg P \land Q))$$
$$\lor ((P \land \neg Q) \land (P \land \neg Q)) \lor ((P \land \neg Q) \land P) \equiv$$

$$(\overset{F}{\cancel{P \land \neg R \land \neg P \land Q}}) \lor (P \land \neg R \land P \land \neg Q) \lor (P \land \neg R \land P) \lor (\overset{F}{\cancel{P \land \neg Q \land \neg P \land Q}}) \lor (P \land \neg Q \land P \land \neg Q) \lor$$
$$\lor (P \land \neg Q \land P) \equiv$$

$$F \lor (P \land \neg R \land \neg Q) \lor (P \land \neg R) \lor F \lor (P \land \neg Q) \lor (P \land \neg Q) \equiv$$

$$(P \land \neg R \land \neg Q) \lor (P \land \neg R) \lor (P \land \neg Q) \equiv \quad \text{(απορρόφηση του } \lor\text{)}$$

$$(P \land \neg R) \lor (P \land \neg Q)$$

CNF:

$$\big(P \wedge (R \to \neg Q)\big) \wedge \big((\neg P \leftrightarrow Q) \vee P\big) \equiv$$

Βήμα 1: Αντικαθιστούμε τις συνεπαγωγές και ισοδυναμίες

$$\big(P \wedge (\neg R \vee \neg Q)\big) \wedge \big((\neg P \wedge Q) \vee (\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee P\big) \equiv$$

Βήμα 2: Σπρώχνουμε τις πιο εξωτερικές αρνήσεις εσωτερικά:

$$\big(P \wedge (\neg R \vee \neg Q)\big) \wedge \big((\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee P\big) \equiv$$

Βήμα 3: Χρησιμοποιούμε την επιμεριστικότητα της διάζευξης:

$$\big(P \wedge (\neg R \vee \neg Q)\big) \wedge \big((\neg P \wedge Q) \vee P\big) \equiv \quad \text{(απορρόφηση του } \vee \text{)}$$

$$\big(P \wedge (\neg R \vee \neg Q)\big) \wedge \big(\cancelto{T}{(\neg P \vee P)} \wedge (Q \vee P)\big) \equiv$$

$$P \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge (T) \wedge (Q \vee P) \equiv \quad \text{(απορρόφηση του } \wedge \text{)}$$

$$P \wedge (\neg R \vee \neg Q)$$

Άσκηση 2α
Υπόθεση: (Q∨R)<->P
Συμπέρασμα: (R->Q) ∨P

Q	**R**	**P**	**Q∨R**	**(Q∨R)->P**	**P->(Q∨R)**	**(Q∨R)<->P**	**R->Q**	**(R->Q) ∨P**
T	T	T	T	T	T	**T**	T	**T**
T	T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	T	T	T	T	**T**	T	**T**
T	F	F	T	F	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T	**T**	F	**T**
F	T	F	T	F	T	***F***	F	***F***
F	F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	T	T	**T**	T	**T**

Όπως βλέπουμε, αν η πρόταση (Q∨R)<->P είναι αληθής, τότε σε καμία περίπτωση η (R->Q) ∨P δεν είναι ψευδής, οπότε η εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη.

Άλλη αιτιολόγηση,
για κάθε ψευδές συμπέρασμα, η υπόθεση είναι επίσης ψευδής, επομένως είναι έγκυρη.

Άσκηση 2β
Υπόθεση: ((┐P->S) ^ R) και (Q<->(S˅ (R^Q)))
Συμπέρασμα: (P->(P->Q)) ^Q

P	**S**	**R**	**Q**	**┐P**	**┐P->S**	**(┐P->S) ^ R**	**R^Q**	**S˅ (R^Q)**	**Q<->(S˅ (R^Q))**	**P->Q**	**P->(P->Q)**	**(P->(P->Q)) ^Q**
T	T	T	T	F	T	**T**	T	T	**T**	T	T	**T**
T	T	T	F	F	T	T	F	T	F	F	F	F
T	T	F	T	F	T	F	F	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	F	T	**T**	T	T	**T**	T	T	**T**
T	F	T	F	F	T	**T**	F	F	**T**	F	F	**F**
T	F	F	T	F	T	F	F	F	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	T	T	**T**	T	T	**T**	T	T	**T**
F	T	T	F	T	T	T	F	T	F	T	T	F
F	T	F	T	T	T	F	F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	F	F	F	F	T	T	T	F
F	F	F	T	T	F	F	F	F	F	T	T	T
F	F	F	F	T	F	F	F	F	T	T	T	F

Όπως παρατηρούμε, όταν και οι δύο υποθέσεις είναι True **ταυτόχρονα**, το συμπέρασμα δεν είναι πάντα αληθές, επομένως δεν είναι έγκυρη

'ΑΣΚΗΣΗ 3

α) $(((P \vee Q) \wedge R) \vee (R \to (\neg Q \to R))) \to R \equiv$ αντικατάσταση ισοδυναμίας $\to$

$(((P \vee Q) \wedge R) \vee (R \to (Q \vee R))) \to R \equiv$ αντικατάσταση ισοδυναμίας $\to$

$(((P \vee Q) \wedge R) \vee (\neg R \vee (Q \vee R))) \to R \equiv$ απαλοιφή παρένθεσης

$(((P \vee Q) \wedge R) \vee (\neg R \vee \underbrace{Q \vee R}_{T})) \to R \equiv$

$(((P \vee Q) \wedge R) \vee T \to R \equiv$ απορρόφηση T

$T \to R \equiv$

$\neg T \vee R \equiv$

$F \vee R \equiv R$

β) $\neg(R \to \neg(R \vee P)) \equiv$ αντικατάσταση ισοδυναμίας $\to$

$\neg(\neg R \vee \neg(R \vee P)) \equiv$ De Morgan

$\neg(\neg R \vee (\neg R \wedge \neg P)) \equiv$ De Morgan

$R \wedge \neg(\neg R \wedge \neg P) \equiv$ De Morgan

$R \wedge (R \vee P) \equiv$ απορρόφηση του $\wedge$

R

ΆΣΚΗΣΗ 4

$(R \land Q) \to (R \lor ((R \land Q) \leftrightarrow P)) \equiv$ αντικατάσταση ισοδυναμίας $\to$

$\neg (R \land Q) \lor (R \lor ((R \land Q) \leftrightarrow P)) \equiv$ De Morgan

$(\neg R \lor \neg Q) \lor (R \lor ((R \land Q) \leftrightarrow P)) \equiv$ απαλοιφή παρένθεσης

$(\neg R \lor \neg Q) \lor R \lor ((R \land Q) \leftrightarrow P))) \equiv$ αντικατάσταση ισοδυναμίας $\leftrightarrow$

$(\neg R \lor \neg Q) \lor R \lor (R \land Q \land P) \lor (\neg (R \land Q) \land \neg P)) \equiv$ απορρόφηση των $\lor$

$(\neg R \lor \neg Q) \lor R \lor (\neg (R \land Q) \land \neg P) \equiv$ De Morgan

$(\neg R \lor \neg Q) \lor R \lor ((\neg R \lor \neg Q) \land \neg P) \equiv$ επιμερισμός

$(\neg R \lor \neg Q) \lor R \lor (\neg R \land \neg P) \lor (\neg P \land \neg Q) \equiv$ απαλοιφή παρένθεσης

$\underbrace{\neg R \lor \neg Q \lor R}_{T} \lor (\neg R \land \neg P) \lor (\neg P \land \neg Q) \equiv$

$\neg Q \lor T \lor (\neg R \land \neg P) \lor (\neg P \land \neg Q) \equiv T$

Ή πιο απλά;

$(R \land Q) \to (R \lor ((R \land Q) \leftrightarrow P)) \equiv$ αντικατάσταση ισοδυναμίας $\to$

$\neg (R \land Q) \lor (R \lor ((R \land Q) \leftrightarrow P)) \equiv$ De Morgan

$\neg R \lor \neg Q \lor (R \lor ((R \land Q) \leftrightarrow P)) \equiv$ απαλοιφή παρένθεσης

$\underbrace{\neg R \lor \neg Q \lor R}_{T} \lor ((R \land Q) \leftrightarrow P)$

$T \lor \neg Q \lor ((R \land Q) \leftrightarrow P) \equiv T$

Άσκηση 5

Η πρόταση που εξάγεται από τον πίνακα αληθείας είναι:

$$(A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge B\wedge\neg C)\vee\underbrace{(\neg A\wedge\neg B\wedge C)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)}_{\text{συνένωση}}\equiv$$

$$(A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge\neg B)\equiv \quad \text{(επιμεριστική)}$$

$$(A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge\cancelto{T}{(B\vee\neg B)}\wedge(\neg C\vee\neg B))\equiv$$

$$(A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge(\neg C\vee\neg B))\equiv \quad \text{(επιμεριστική)}$$

$$(A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge\neg C)\equiv \quad (1) \quad \text{(επιμεριστική)}$$

$$(A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge(\neg(B\wedge C))\equiv \quad \text{De Morgan}$$

$$(A\wedge B\wedge C)\vee\neg(A\vee(B\wedge C)) \quad (2)$$

$$A\vee(B\wedge C)\rightarrow(A\wedge B\wedge C) \quad (3)$$

Θεωρήσαμε σωστές και τις (1), (2), (3)

Επαληθεύουμε την παραπάνω πρόταση δημιουργώντας τον πίνακα αληθείας και συγκρίνοντας τον με τον πίνακα που δίνεται στην εκφώνηση

A	B	C	$(A\wedge B\wedge C)\vee\neg(A\vee(B\wedge C))$
α	α	α	α
α	α	ψ	ψ
α	ψ	α	ψ
α	ψ	ψ	ψ
ψ	α	α	ψ
ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	α	α
ψ	ψ	ψ	α

Σημείωση: Υπάρχει και απλούστερη μορφή. Από (2) έχουμε ισοδύναμα:

$(A\wedge(B\wedge C))\vee(\neg A\wedge\neg(B\wedge C))$

$A\leftrightarrow(B\wedge C)$