

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2016

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 27/09/2016

Ημερομηνία Παράδοσης: 07/10/2016

Θέματα: Σύνολα, Πιθανοτικά Μοντέλα, Δεσμευμένη Πιθανότητα, Πολλαπλασιαστικός Νόμος

Άσκηση 1.

Ένας φοιτητής εξετάζεται προφορικά σε τέσσερις διαδοχικές ερωτήσεις. Η εξέταση διακόπτεται όταν ο φοιτητής απαντήσει λάθος στην πρώτη ερώτηση ή σε δύο διαδοχικές. Τότε απορρίπτεται. Η πιθανότητα σωστής απάντησης από το φοιτητή σε κάθε ερώτηση είναι $\frac{3}{4}$.

(α') Να προσδιοριστεί ο δειγματικός χώρος αυτού του πειράματος τύχης με χρήση δενδρικού διαγράμματος.

(β') Να υπολογιστεί η συνολική πιθανότητα να απαντηθούν σωστά και οι τέσσερις ερωτήσεις, κάνοντας χρήση του δενδρικού διαγράμματος που κατασκευάσατε παραπάνω.

(γ') Να βρεθούν τα γεγονότα:

- $A = \{\text{Ο φοιτητής απορρίφθηκε}\}$
- $B = \{\text{Ο φοιτητής απάντησε λάθος στην τρίτη ερώτηση}\}$
- $\Gamma = \{\text{Ο φοιτητής απάντησε λάθος στην τέταρτη ερώτηση}\}$
- $\Delta = \{\text{Ο φοιτητής πέρασε}\}$
- $E = \{\text{Ο φοιτητής απάντησε λάθος στην τρίτη ερώτηση και πέρασε}\}$

και να υπολογιστούν οι αντίστοιχες πιθανότητες τους $P(A), P(B), P(\Gamma), P(\Delta), P(E)$.

Άσκηση 2.

Ένα τυχαίο πείραμα έχει δειγματοχώρο $\Omega = \{A, B, C\}$. Γνωρίζουμε ότι $P(\{A \cup C\}) = \frac{9}{16}$ και $P(\{A \cup B\}) = \frac{3}{4}$ και ότι τα απλά γεγονότα A, B, C είναι ξένα μεταξύ τους. Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(A), P(B), P(C)$.

Άσκηση 3.

Από τους μαθητές σε μια τάξη, το 60% είναι ιδιοφυείς, στο 70% αρέσει η σοκολάτα, και το 40% ανήκει και στις δύο κατηγορίες. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ένας τυχαία επιλεγμένος μαθητής δεν είναι ούτε ιδιοφυΐα, ούτε λάτρης της σοκολάτας.

Άσκηση 4.

Ένα εξάεδρο ζάρι κατασκευάζεται με τέτοιο τρόπο ώστε οι έδρες του με άρτιο αριθμό να έχουν τριπλάσια πιθανότητα να εμφανιστούν από ότι έχουν οι έδρες με περιττό αριθμό. Όλες οι έδρες με άρτιο αριθμό είναι ισοπίθανες μεταξύ τους και το ίδιο ισχύει και για τις έδρες με περιττό αριθμό. Ορίστε το πιθανοτικό μοντέλο για το πείραμα της απλής ρίψης αυτού του ζαριού και βρείτε την πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι μικρότερο από 4.

Άσκηση 5.

Ρίχνουμε δύο δίκαια εξαέδρα ζάρια. Καθένα από τα 36 πιθανά ενδεχόμενα θεωρείται ισοπίθανο.

- (α') Υπολογίστε την πιθανότητα να έρθουν διπλές.
- (β') Δεδομένου ότι η ζαριά φέρνει άθροισμα 4 ή λιγότερο, υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα να έρθουν διπλές.
- (γ') Υπολογίστε την πιθανότητα ότι τουλάχιστον ένα ζάρι φέρνει 6.
- (δ') Δεδομένου ότι τα δύο ζάρια προσγειώνονται σε διαφορετικούς αριθμούς, υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι τουλάχιστον ένα ζάρι φέρνει 6.

Άσκηση 6.

Ρίχνουμε ένα κέρμα δύο φορές. Η Αλίκη υποστηρίζει ότι το απλό γεγονός να έρθουν δύο κεφαλές είναι τουλάχιστον εξίσου πιθανό, αν γνωρίζουμε ότι η πρώτη ρίψη φέρνει κεφαλή, από ό,τι αν γνωρίζουμε ότι τουλάχιστον μία εκ των ρίψεων φέρνει κεφαλή. Είναι σωστός ο συλλογισμός της Αλίκης; Υπάρχει διαφορά αν το κέρμα είναι δίκαιο ή όχι; Υπολογίστε τις εν λόγω δεσμευμένες πιθανότητες στην περίπτωση που το κέρμα είναι δίκαιο.

Άσκηση 7.

Μια συντηρητική ομάδα σχεδίασης, η 'Σ', και μια καινοτόμα ομάδα σχεδίασης, η 'Κ', αναλαμβάνουν να σχεδιάσουν παράλληλα ένα προϊόν μέσα σε ένα μήνα (ξεχωριστά και ανεξάρτητα η μία από την άλλη). Από προηγούμενη εμπειρία γνωρίζουμε ότι:

- (α') Η πιθανότητα επιτυχίας για την ομάδα 'Σ' είναι $\frac{2}{3}$.
- (β') Η πιθανότητα επιτυχίας για την ομάδα 'Κ' είναι $\frac{1}{2}$.
- (γ') Η πιθανότητα ότι τουλάχιστον μία από τις δύο ομάδες θα επιτύχει είναι $\frac{3}{4}$.

Αν υποθέσουμε ότι σχεδιάζεται τελικά ακριβώς ένα επιτυχημένο προϊόν, ποια είναι η πιθανότητα ότι αυτό σχεδιάστηκε από την ομάδα 'Κ';

Βοήθεια: Ορίστε 4 ενδεχόμενα, για τους 4 πιθανούς συνδυασμούς επιτυχίας-αποτυχίας των δύο ομάδων και σύμφωνα με αυτά ερμηνεύστε τις πιθανότητες που σας δίδονται για να υπολογίσετε τη ζητούμενη δεσμευμένη πιθανότητα.

Άσκηση 8.

Μια παρτίδα εκατό προϊόντων ελέγχεται δοκιμάζοντας τέσσερα τυχαία επιλεγμένα προϊόντα. Αν ένα από τα τέσσερα είναι ελαττωματικό, η παρτίδα απορρίπτεται. Ποια είναι η πιθανότητα η παρτίδα να γίνει αποδεκτή, ενώ περιέχει πέντε ελαττωματικά προϊόντα;

Βοήθεια: Χρησιμοποιήστε τον πολλαπλασιαστικό νόμο για να διαπιστώσετε σε ποια περίπτωση μια παρτίδα γίνεται αποδεκτή και να υπολογίσετε τη ζητούμενη πιθανότητα.