

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
12 Νοεμβρίου 2016 - Διάρκεια: 3 Ώρες

Θέμα 1 - 10 μονάδες. Βασικές έννοιες

(α) Ρίχνουμε ένα δίκαιο κέρμα 3 φορές. Ορίζουμε τα γεγονότα $A = \{\text{έρχονται περισσότερα από ένα } \Gamma\}$ και $B = \{\text{έρχονται ένα ή δύο } \text{Κ}\}$. Είναι τα γεγονότα A και B ανεξάρτητα;

(β) Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση: Αν τα C και D είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και $D \subset C$, τότε $P(D) = 0$ ή $P(C) = 1$.

Θέμα 2 - 15 μονάδες. Συνδυαστική

(α) Ο Χρήστος και ο Ανδρέας είναι δύο καλοί φίλοι που παίζουν στην ίδια ομάδα μπάσκετ. Υπάρχουν συνολικά 8 παίκτες στην ομάδα τους. Η αρχική πεντάδα του τελικού επιλέγεται τυχαία από τους 8 παίκτες. Με ποια πιθανότητα τουλάχιστον ένας από τους δύο φίλους θα αρχίσει τον αγώνα;

(β) Στην εικόνα του Σχήματος 1 επιλέγουμε τυχαία τρεις από τις κουκκίδες και τις ενώνουμε με γραμμές. Ποια είναι η πιθανότητα ότι θα σχηματιστεί ένα τρίγωνο;



Σχήμα 1: Η διάταξη του Θέματος 2(β).

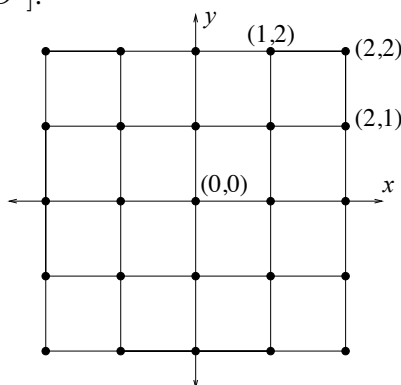
Θέμα 3 - 25 μονάδες. Βασικές έννοιες τ.μ. Γράφος είναι ένα σύνολο από κορυφές που ενώνονται μεταξύ τους με ακμές. Με γράφους μπορούν να μοντελοποιηθούν πολλές διαφορετικές φυσικές ή τεχνολογικές δομές, όπως π.χ. τα δίκτυα υπολογιστών. Στο Σχήμα 2 απεικονίζεται ένας γράφος με 25 κορυφές και ακμές μοναδιαίου μήκους σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Η κεντρική κορυφή έχει συντεταγμένες $(0,0)$.

Έστω οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) X, Y ομοιόμορφα κατενεμημένες στο σύνολο τιμών $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Επομένως, το ζεύγος (X, Y) αντιπροσωπεύει τις συντεταγμένες των κορυφών ενός γράφου που επιλέγονται τυχαία με ομοιόμορφο τρόπο. Ορίζουμε την τ.μ. H ως την απόσταση (το μήκος της συντομότερης διαδρομής - minimum number of hops) μεταξύ καθενός από τους 25 κόμβους (X, Y) και του κεντρικού κόμβου $(0, 0)$. Π.χ. $H = 3$ για την κορυφή $(1, 2)$ ενώ $H = 4$ για την κορυφή $(2, 2)$.

(α) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας (σ.π.) της τ.μ. H .

(β) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της σ.π. της τ.μ. H , δεδομένου ότι $|X| \neq |Y|$.

(γ) Έστω D η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των κόμβων (X, Y) και $(0, 0)$: $D^2 = X^2 + Y^2$. Υπολογίστε τη δεύτερη ροπή της τ.μ. D , $E[D^2]$.



Σχήμα 2: Ο γράφος του Θέματος 3.

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli

Ένας φοιτητής δίνει μία εξέταση 10 ερωτήσεων πολλαπλών επιλογών με 5 δυνατές επιλογές ανά ερώτημα. Δεν είναι καλά διαβασμένος (όπως εσείς σήμερα!) οπότε απαντά κάθε ερώτημα διαλέγοντας τυχαία μία από τις 5 δυνατές απαντήσεις, ανεξάρτητα από την μία ερώτηση στην άλλη.

Ορίζουμε $X_i = 1$ αν ο φοιτητής απαντήσει σωστά την i -στή ερώτηση και $X_i = 0$ αν την απαντήσει λάθος. Έστω Y το πλήθος των ερωτήσεων που απαντά σωστά.

(α) Υπολογίστε την δεσμευμένη πιθανότητα $P(Y = 3 \mid X_1 = 1, X_{10} = 0)$.

(β) Αν ο φοιτητής λαμβάνει 2 μονάδες για κάθε σωστή απάντηση, υπολογίστε τη μέση τιμή και διασπορά του συνολικού βαθμού, Z , που επιτυγχάνει στην εξέταση. Πως τα βλέπετε τα πράγματα για τον φίλο μας;

(γ) Αν ο φοιτητής λαμβάνει 2 μονάδες για κάθε σωστή απάντηση και -1 μονάδα για κάθε λανθασμένη, υπολογίστε τη μέση τιμή και διασπορά του συνολικού βαθμού που λαμβάνει στην εξέταση.

Θέμα 5 - 25 μονάδες. Από κοινού κατανομές

Οι τ.μ. X και Y παίρνουν τιμές x και y , αντίστοιχα, στο σύνολο $\{0, 1, 2, 3\}$. Στον παρακάτω πίνακα μας δίδεται μερική πληροφορία για την από κοινού σ.π. $p_{X,Y}(x, y)$ και τις περιθωριακές σ.π. $p_X(x)$ και $p_Y(y)$ των τ.μ. X και Y , αντίστοιχα. Επίσης, μας δίδεται ότι:

(i) $P(X = 3 \mid Y \geq 2) = 0.0909$ και (ii) $P(X = Y) = 0.06$.

		Y				$p_X(x)$
		$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	
X	$x = 0$	0.01	?	0.1	?	0.3
	$x = 1$	0	0	?	0.1	0.2
	$x = 2$	0.09	0.01	0.05	0.05	0.2
	$x = 3$	0.05	0.2	?	?	?
$p_Y(y)$		0.15	?	0.3	0.25	

(α) Χρησιμοποιώντας την πληροφορία που σας δίδεται, να συμπληρώσετε τις επτά τιμές που λείπουν στον πίνακα.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα η τ.μ. X να παίρνει τιμές μεγαλύτερες από την τ.μ. Y .

(γ) Δεδομένου ότι $Y = 0$, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι $X = 3$;

(δ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(Y \text{ είναι ζυγός} \mid X \text{ είναι περιττός})$;

(ε) Έστω $Z = 3X - Y^2$. Βρείτε τη μέση τιμή, $E[Z]$, της τ.μ. Z .