ΗΥ 180 – Λογική
Εαρινό Εξάμηνο 2004
<u>1η Σειρά Ασκήσεων: Προτασιακός Λογισμός</u>

<u>Άσκηση 1</u>

Έστω:
p: «υπάρχει γνώση»
q: «μερικά πράγματα είναι γνωστά χωρίς να αποδεικνύονται»
r: «μπορούμε να αποδείξουμε κάθε προϋπόθεση με προηγούμενους ισχυρισμούς επ’ άπειρον»
Οι υποθετικές προτάσεις και τα πιθανά συμπεράσματα γίνονται τότε:

(α) $p \rightarrow q \vee r$	/	q
(β) $\neg r$	/	$\neg p$
(γ) p	/	...

Διαισθητικά, φαίνεται ότι το πρώτο συμπέρασμα εξάγεται έγκυρα από τις υποθέσεις, εφόσον όταν το p αληθεύει, για να αληθεύει η $p \rightarrow q \vee r$, πρέπει η $q \vee r$ να είναι αληθής με την r ψευδή (ή $\neg r$ αληθή).

Τυπικά, μπορεί να αποδειχθεί με πίνακα αληθείας, ή μορφολογική παραγωγή, κατασκευή μοντέλων,...

Πίνακας αληθείας

p	**q**	**r**	**$q \vee r$**	**$p \rightarrow q \vee r$**	**$\neg r$**	
α	α	α	α	α	ψ	
α	α	ψ	α	α	α	← Υποθέσεις και συμπέρασμα αληθή
α	ψ	α	α	α	ψ	
α	ψ	ψ	ψ	ψ	α	
ψ	α	α	α	α	ψ	
ψ	α	ψ	α	α	α	
ψ	ψ	α	α	α	ψ	
ψ	ψ	ψ	ψ	α	α	

Μορφολογική παραγωγή

(1) $p \rightarrow q \vee r$	(Υ)
(2) p	(Υ)
(3) $q \vee r$	(1), (2) με απαλοιφή $\rightarrow$
(4) Υποπαραγωγή	
(4.1) q	(ΥΥ)
(4.2) $r \vee q$	(4.1) με εισαγωγή $\vee$
(5) Υποπαραγωγή	
(5.1) r	
(5.2) $r \vee q$	(5.1) με εισαγωγή $\vee$
(6) $r \vee q$	(3), (4), (5) με απαλοιφή $\vee$
(7) $\neg r$	(Υ)
(8) q	(6), (7) με απαλοιφή $\neg$ 2

Κατασκευή μοντέλων

x (1) $p \rightarrow q \vee r$
x (2) $\neg r$
x (3) p
x (4) $\neg q$

--------------------------------- (1)

(5) $\neg p$ (6) $q \vee r$

===== (3) ------------------------- (6)

(7) q (8) r

=== (4) === (2)

<u>Άσκηση 2</u>

(α) $A \vee B$ αντινομία ανν $\neg (A \vee B)$ ταυτολογία
ή (από de Morgan) ανν $\neg A \wedge \neg B$ ταυτολογία
ανν $\neg A \wedge \neg B$ ικανοποιείται από κάθε ερμηνεία,
ανν $\neg A$ και $\neg B$ ικανοποιούνται από κάθε ερμηνεία,
ανν $\neg A$ και $\neg B$ ταυτολογίες. Επομένως,
$\neg (\neg A)$ και $\neg(\neg B)$ αντινομίες, δηλαδή A και B αντινομίες.

(β) $S \models A \rightarrow B$ ανν $S \cup \{A\} \models B$
→ *Αν*
Έστω $S \models A \rightarrow B$ και I ερμηνεία που ικανοποιεί το $S \cup \{A\}$. Εφόσον η I ικανοποιεί το S και $S \models A \rightarrow B$, θα ικανοποιεί και το $A \rightarrow B$ (*). Αλλά η I ικανοποιεί και το A. Επομένως, από (*) και το B. Επειδή η I επιλέχθηκε τυχαία, έχουμε ότι: $S \cup \{A\} \models B$

← *Μόνο αν*
Αντίστροφα, έστω $S \cup \{A\} \models B$ και I ικανοποιεί το S. Η μόνη περίπτωση για την οποία η I δεν θα ικανοποιούσε το $A \rightarrow B$ είναι αυτή όπου ικανοποιείται το A, αλλά όχι το B. Όμως, αν η I ικανοποιείτο A, από το $S \cup \{A\} \models B$ θα ικανοποιεί και το B. Επομένως, η I ικανοποιεί το $A \rightarrow B$, κι εφόσον επιλέχθηκε τυχαία από τις ερμηνείες που ικανοποιούν το S, θα ισχύει η $S \models A \rightarrow B$.

(γ) $(A \rightarrow B) \rightarrow A \not\models B$
Έστω I η ερμηνεία που ικανοποιεί την $(A \rightarrow B) \rightarrow A$. Αν η I ικανοποιεί την A, η B μπορεί να μην ικανοποιείται. Πράγματι, τότε $A \rightarrow B$ ψευδής στην I, και, επομένως, η $(A \rightarrow B) \rightarrow A$ αληθής.

(δ) **ΠΡΟΣΟΧΗ!** Υπήρξε λάθος στην εκφώνηση της άσκησης. O είναι το σύνολο των *μεγίστων* και όχι των *ελαχίστων* όρων, όπως αναφέρονταν. Παρατίθεται η λύση, βάσει της σωστής εκφώνησης:
Έστω I η ερμηνεία που περιλαμβάνει ένα τουλάχιστον αρνητικό γράμμα από κάθε *μέγιστο* όρο του συνόλου O. Η ερμηνεία αυτή ικανοποιεί όλους τους όρους του O (τους κάνει αληθείς), εφόσον αυτοί είναι διαζεύξεις γραμμάτων ή αρνήσεων γραμμάτων, μία τουλάχιστον από τις οποίες ικανοποιούνται από την I.
Όμως, τότε οι συζεύξεις τους, που με κατάλληλο τρόπο ισοδυναμούν με τις προτάσεις του S ως CNF μορφές των, είναι αληθείς ως προς την I (συζευγνύουν αληθείς όρους). Έτσι το S περιλαμβάνει προτάσεις, οι ισοδύναμες των οποίων ικανοποιούνται ταυτόχρονα από την I, άρα είναι ικανοποιήσιμο.

Άσκηση 3

Από το δοθέντα πίνακα έχουμε:

$X \equiv (A \land B \land C) \lor (A \land B \land \neg C) \lor (\neg A \land B \land \neg C) \lor (\neg A \land \neg B \land \neg C)$ *(προσεταιριστική, μεταθετική)*

$\equiv ((A \land B) \land C) \lor ((A \land B) \land \neg C) \lor ((\neg A \land \neg C) \land B) \lor ((\neg A \land \neg C) \land \neg B)$ *(επιμεριστική)*

$\equiv ((A \land B) \lor (\cancel{C \land \neg C})) \lor ((\neg A \land \neg C) \lor (\cancel{B \land \neg B}))$ *(ιδιότητες F)*

$\equiv ((A \land B) \lor (\neg A \land \neg C)$

Άσκηση 4

(α) DNF:

$((A \lor B) \land (B \lor (C \land A))) \lor (A \land B)$

$\equiv ((A \lor B) \land B) \lor ((A \lor B) \land (C \land A)) \lor (A \land B)$

$\equiv ((A \land B) \lor (B \land B)) \lor ((A \land C \land A) \lor (B \land C \land A)) \lor (A \land B)$

$\equiv (A \land B) \lor B \lor (A \land C) \lor (B \land C \land A)) \lor (A \land B)$

$\equiv B \lor (A \land C)$

CNF:

$B \lor (A \land C) \equiv (B \lor A) \land (B \lor C)$

(β) DNF:

$\neg(\neg((A \lor B) \land (\neg A \lor \neg B)) \rightarrow C)$

$\equiv \neg(\neg(\neg((A \lor B) \land (\neg A \lor \neg B))) \lor C)$

$\equiv \neg((A \lor B) \land (\neg A \lor \neg B)) \land \neg C$

$\equiv (\neg(A \lor B) \lor \neg(\neg A \lor \neg B)) \land \neg C$

$\equiv ((\neg A \land \neg B) \lor (\neg \neg A \land \neg\neg B)) \land \neg C$

$\equiv ((\neg A \land \neg B) \lor (A \land B)) \land \neg C$

$\equiv (\neg A \land \neg B \land \neg C) \lor (A \land B \land \neg C)$

CNF:

$(\neg A \land \neg B \land \neg C) \lor (A \land B \land \neg C)$

$\equiv ((\neg A \land \neg B) \lor (A \land B)) \land \neg C)$

$\equiv ((\neg A \land \neg B) \lor A) \land ((\neg A \land \neg B) \lor B) \land \neg C$

$\equiv ((\neg A \lor A) \land (\neg B \lor A)) \land ((\neg A \lor B) \land (\neg B \lor B) \land \neg C$

$\equiv (\neg B \lor A)) \land (\neg A \lor B) \land \neg C$

$\equiv (A \lor \neg B) \land (\neg A \lor B) \land \neg C$