

**HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2016**  
**Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 11/10/2016

Ημερομηνία Παράδοσης: 20/10/2016

**Θέματα: Δεσμευμένη Πιθανότητα, ΘΟΠ, Νόμος του Bayes, Ανεξαρτησία.**

**Άσκηση 1.** Ένα στα 1000 άτομα ενός πληθυσμού πάσχει από κάποια σοβαρή ασθένεια. Η εξέταση που πραγματοποιείται για τη διάγνωση της ασθένειας δίνει λάθος διάγνωση στο 1% των περιπτώσεων, αν το άτομο που υποβάλλεται στην εξέταση πάσχει όντως από την ασθένεια, και στο 2% αν το άτομο το οποίο υποβάλλεται στην εξέταση δεν πάσχει από την ασθένεια.

(α) Να βρεθεί η πιθανότητα θετικού αποτελέσματος εξέτασης σε κάποιο άτομο του πληθυσμού.

(β) Αν για κάποιο άτομο του πληθυσμού η εξέταση ήταν θετική, ποια είναι η πιθανότητα να πάσχει πράγματι από την ασθένεια;

**Άσκηση 2.** Ο Κώστας αποφασίζει να παίξει ένα παιχνίδι με ζάρια και κέρματα. Ανοίγει λοιπόν το συρτάρι του και βρίσκει δύο δίκαια εξάεδρα ζάρια, τα A και B, και ένα δίκαιο κέρμα. Το ζάρι A έχει 4 μπλε όψεις και δύο κίτρινες. Το ζάρι B έχει 3 μπλε όψεις και 3 κίτρινες. Ο Κώστας ρίχνει το κέρμα. Αν έρθει κεφαλή, συνεχίζει το παιχνίδι ρίχνοντας μόνο το ζάρι A. Αλλιώς, αν έρθουν γράμματα, συνεχίζει το παιχνίδι ρίχνοντας μόνο το ζάρι B.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι η  $n$ -στη ρίψη του ζαριού φέρνει μπλε.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι τόσο η  $n$ -στη όσο και η  $(n+1)$ -στη ρίψη του ζαριού φέρνουν μπλε.

(γ) Αν έρθει μπλε κατά τις  $n$  πρώτες ρίψεις, υπολογίστε την δεσμευμένη πιθανότητα ότι η  $(n+1)$ -στη ρίψη θα φέρει μπλε. Ποιο είναι το όριο αυτής της πιθανότητας καθώς το  $n$  τείνει στο άπειρο; Ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.

(δ) Αν έρθει μπλε κατά τις  $n$  πρώτες ρίψεις, ποια είναι η πιθανότητα ότι ήρθε κεφαλή κατά την ρίψη του κέρματος; Ποιο είναι το όριο αυτής της πιθανότητας καθώς το  $n$  τείνει στο άπειρο; Ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.

**Άσκηση 3.** Έστω  $C_1, C_2, \dots, C_n$  μία διαμέριση ενός δειγματοχώρου  $\Omega$  και A, B δύο γεγονότα για τα οποία ισχύουν τα εξής:

(α) Τα A, B είναι ανεξάρτητα υπό συνθήκη δεδομένου του  $C_i$  για κάθε  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

(β) Το B είναι ανεξάρτητο από όλα τα  $C_i$ .

Να αποδειχθεί ότι τα A και B είναι ανεξάρτητα.

**Άσκηση 4.** Τρεις παίκτες ρίχνουν ο καθένας από μία φορά ένα αμερόληπτο ζάρι  $n$ -πλευρών. Ας ορίσουμε σαν  $A_{ij}$  το γεγονός ότι ο παίκτης  $i$  και ο παίκτης  $j$  φέρνουν την ίδια πλευρά (αποτέλεσμα). Δείξτε ότι τα γεγονότα  $A_{12}$ ,  $A_{13}$  και  $A_{23}$  είναι κατά ζεύγη ανεξάρτητα αλλά δεν είναι ανεξάρτητα.

**Άσκηση 5.** Ένα μεγάλο κουτί έχει μέσα πολλά φακελάκια, που το καθένα περιέχει 30 σπόρους για τριανταφυλλιές. Τα  $\frac{3}{4}$  από τα φακελάκια περιέχουν σπόρους για 20 τριανταφυλλιές που κάνουν λευκά τριαντάφυλλα και 10 τριανταφυλλιές που κάνουν κόκκινα τριαντάφυλλα. Το υπόλοιπο  $\frac{1}{4}$  περιέχει σπόρους για 25 τριανταφυλλιές που κάνουν λευκά τριαντάφυλλα και 5 τριανταφυλλιές που κάνουν κόκκινα τριαντάφυλλα. Έστω ότι διαλέγουμε τυχαία ένα φακελάκι και από αυτό φυτεύουμε έναν σπόρο.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα η τριανταφυλλιά που θα βγει να έχει λευκά τριαντάφυλλα;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα η τριανταφυλλιά που θα βγει να έχει κόκκινα τριαντάφυλλα;

(γ) Δεδομένου ότι η τριανταφυλλιά έχει τελικά κόκκινα τριαντάφυλλα, ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξαμε κάποιο από τα φακελάκια που περιείχαν 25 τριανταφυλλιές με λευκά και 5 τριανταφυλλιές με κόκκινα τριαντάφυλλα;

**Άσκηση 6.** Μία μαγνητική ταινία η οποία περιέχει πληροφορία σε ψηφιακή μορφή έχει αλλοιωθεί. Προσπαθείτε να ανακτήσετε όσο το δυνατόν περισσότερα bits πληροφορίας. Προφανώς γνωρίζετε ότι αυτό που διαβάζετε πιθανώς είναι λάθος. Γνωρίζετε ότι αν υπήρχε ένα 0, η πιθανότητα να το διαβάσετε σωστά είναι 0.9. Επίσης, η πιθανότητα σωστής ανάγνωσης ενός 1 είναι 0.85. Κάθε bit στην ταινία είναι 0 ή 1 με την ίδια πιθανότητα. Δεδομένου ότι διαβάζετε 1 για κάποιο bit, ποια η πιθανότητα ότι το έχετε διαβάσει σωστά;

**Άσκηση 7.** Το 60% των κατοίκων της πόλης Α έχει μπλε αυτοκίνητα, ενώ το υπόλοιπο 40% έχει κόκκινα αυτοκίνητα. Κάποια στιγμή στην πόλη Α έγινε ένα τροχαίο και ο μόνος αυτόπτης μάρτυρας ισχυρίζεται ότι το αυτοκίνητο που ήταν υπεύθυνο για το δυστύχημα ήταν χρώματος κόκκινου. Παρόλα αυτά, ο μάρτυρας έχει προβλήματα όρασης και μπορεί να αναγνωρίσει σωστά το χρώμα του αυτοκινήτου μόνο το 75% των φορές. Ποιο είναι το χρώμα που κατά πάσα πιθανότητα είχε το αυτοκίνητο;