<u>Άσκηση 1</u>

(D,I) όπου D=N

I(α)=0 , I(b)=1, I(c)=3, I(f): n→ n^2, I(g): m, n→m+n

<u>Σύνολο άρτιων</u>← I(P)={nєN/n: άρτιος}, <u>Σύνολο ζευγ.</u>←I(Q)= {(m,n) єNxN/ το m διαιρ. το n}

(α) P(f(b)) Το τετράγωνο του b είναι άρτιος αριθμός.

$F_{D,I}$ P(F(b)) ισχ. Αν I΄(F(b)) ϵ I(P).

Ανν. I(f)I΄(b) ϵ I(P) δεν ισχύει επειδή το 1^2 <u>δεν</u> είναι άρτιος.

b) P(g(b,c)) Το άθροισμα των των b,c είναι άρτιος αριθμός.

$F_{D,I}$ P(g(b,c)) ανν. I΄(g(b,c)) ϵ I(P) ανν I(g)I΄(b,c) ϵ I(P)

<u>Ισχύει</u> επειδή I(b)+I(c)=4 ϵ στους άρτιους.

c) P(g(f(c),f(b))) Το άθροισμα των τετραγώνων των b και c είναι άρτιος αριθμός.

$F_{D,I}$ P(g(f(c),f(b))) ανν I΄(g(f(c),f(b))) ϵ I(P)

I΄(g(f(c),f(b))) =3^2+1^2=10 ϵ I(P) . Άρα ισχύει

d) Q(f(f(c)),f(f(c))) Το τετράγωνο του τετραγώνου του c διαιρεί το τετράγωνο του τετραγώνου του c

$F_{P,I}$ Q(f(f(c),f(f(c))) ανν. I΄(f(f(c)),f(f(c)) ϵ I(Q)

Όπου I΄(f(f(c)),f(f(c)) = $((3^2)^2,(3^2)^2)$ το οποίο ανήκει στο I(Q) επειδή κάθε αριθμός διαιρεί τον εαυτό του.

e) ∀ XQ (f(x),x) Το τετράγωνο κάθε φυσικού αριθμού, διαιρεί αυτόν τον αντίστοιχο φυσικό αριθμό.

$F_{P,I}$ ∀ Q(f(x),x) ανν I΄(Q(f(x),x))= D

Όπου I΄(Q(f(x),x)) = I(Q)(I΄(f(x)),I΄(x))

Δεν ισχύει επειδή δεν διαιρεί το τετράγωνο ενός αριθμού, αυτόν τον αριθμό. (π.χ. 1 δε διαιρεί το 2)

f) $\exists x\, Q(x,f(x))$ Υπάρχει φυσικός αριθμός που διαιρεί το τετράγωνο του.

$F_{P,I}$ $\exists xQ\, (x,f(x))$ ανν $I'(Q(x,f(x)) \neq 0$

Όπου $I'(Q(x,f(x)) = I(Q)(I'(x,f(x))$ ισχύει επειδή υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός που διαιρεί το τετράγωνό του

g) $\forall x\, P(x) \rightarrow P(f(x))$ για κάθε φυσικό αριθμό ο οποίος είναι άρτιος το τετράγωνο του είναι άρτιος αριθμός επίσης.

$F_{P,I}$ $\forall x\, (P(x) \rightarrow P(f(x)))$ ανν $I'(P(x) \rightarrow P(f(x))) = D$

Ισχύει επειδή για κάθε φυσικό που είναι άρτιος ισχύει ότι και το τετράγωνο του θα είναι άρτιος (π.χ. 2)

h) $\exists x\, (P(x) \wedge P(f(x)))$ Υπάρχει φυσικός ο οποίος είναι άρτιος και το τετράγωνο του είναι ταυτόχρονα άρτιος.

$F_{P,I}$ $\exists x\, (Px) \wedge P(f(x)))$ ανν $I'(P(x) \wedge P(f(x))) \neq \emptyset$

Ισχύει επειδή υπάρχει αριθμός που είναι άρτιος και είναι και το τετράγωνο του άρτιος (π.χ. 2)

i) $\exists x \exists y\, (P(x) \wedge P(y) \wedge P(g(x,y)))$ Θέλουμε να ελέγξουμε αν υπάρχουν 2 άρτιοι για τους οποίους να ισχύει: να είναι άρτιος επίσης

$F_{P,I}$ $\exists x \exists y(P(x))$

Άσκηση 2

a) Έστω ότι η πρόταση ∃x□y P(x,y) είναι ικανοποιήσιμη. Τότε θα ισχύει
I(∃x□y P(x,y)) $\neq \emptyset$.
Τότε υπάρχει x=a τ.ω □y άρα και για y=a P(a,a) αληθής.
Άρα a $\notin$ I(□x ¬P(x,x)) => I(□x¬P(x,x)) $\neq \emptyset$. Συνεπώς το σύνολο είναι μη ικανοποιήσιμο.

b) Έστω ότι οι προτάσεις ∃x P(x) και □x¬Q(x) ικανοποιήσιμες. Τότε
I(∃x P(x)) ≠ ∅ και I(□x¬Q(x)) = D.
Άρα υπάρχει x=a τ.ω. Q(x) να είναι αληθής και δεν υπάρχει x τ.ω. Q(x) να είναι αληθής. Για x=a έχουμε ότι P(a) → Q(a) ψευδής.
Άρα a ∉ I(□x P(x) → Q(x)). Συνεπώς I(□x P(x) → Q(x)) ≠ D.
Άρα το σύνολο μή ικανοποιήσιμο.

(εναλλακτική λύση)

a) $\{\exists x\, \forall y\, P(x,y),\ \forall x\, \neg P(x,x)\}$

→ Από $\forall x \neg P(x,x)$ συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει X το οποίο μαζί με τον εαυτό του, επαληθεύουν την P.

→ Από $\exists x \forall y\, P(x,y)$ συμπεραίνουμε ότι για κάθε y υπάρχει ένα X τέτοιο ώστε να ισχύει η $P(x,y)$. Αν όμως $x=y$ τότε θα έχω $\{P(x,x), \neg P(x,x)\}$ που δεν ισχύει. Άρα το σύνολο είναι μη ικανοποιήσιμο.

b) $\{\exists x\, P(x),\ \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \forall x \neg Q(x)\}$

→ Από $\exists x P(x)$ συμπεραίνουμε ότι η P ισχύει για ένα τουλ. x. (1)

→ Από $\forall x \neg Q(x)$ συμπεραιν. ότι η Q δεν ισχύει για κανένα X. (2)

→ Από $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ συμπεραίνω ότι

α) δεν ισχύει η P ή

β) αν ισχύει η P θα ισχύει και η Q.

όμως από (1) $\exists x\, P(x)$ άρα πρέπει αυτό το X να επαληθ. και την Q, για να είναι ικανοποιήσιμο. Αυτό όμως δεν ισχύει από (2)

Άρα το σύνολο μη ικανοποιήσιμο.

Άσκηση 3

a) 1. Υποπαραγωγή
 1.1. P(b) (ΥΥ)
 1.2. ∃x P(x) (από 1.1 και εισαγωγή ∃)
 1.3. ∃x P(x) → Q(a) (Υπόθεση)
 1.4. Q(a) (από 1.2, 1.3 και απαλοιφή →)

2. □x(P(x) → Q(a)) (από 1 και εισαγωγή □)

Προσοχή: Η εισαγωγή □ επιτρέπεται γιατί το b δεν εμφανίζεται σε καμία υπόθεση. Αν στην υπόθεση της υποπαραγωγής είχαμε υπόθεση P(a) θα ήταν λάθος.

b) 1. Υποπαραγωγή
   1.1. P(α) (YY)
   1.2.□x ∃y (P(x) → R(y,x)) (Υπόθεση)
   1.3. ∃y (P(a) → R(y,a)) (από 1.2, απαλοιφ □ και αντικατ με a)
   1.4. Υποπαραγωγή
      1.4.1. P(a) → R(b,a) (YY)
      1.4.2. P(a) (επανάληψη 1.1)
      1.4.3. R(b,a) (1.4.1, 1.4.2 και απαλοιφή →)
      1.4.4. ∃y R(y,a) (από 1.4.3, εισαγ ∃ και αντικ b με y)
   1.5. ∃y R(y,a) (από 1.3, 1.4 και απαλοιφή ∃)
2. □x(P(x) → ∃y R(y,x)) (από 1, εισαγωγή □ και αντικ a με x)

c) 1. ∃x □y (P(y) → R(x,y)) (Υπόθεση)
2. □y P(y) → ∃x R(x,y) (από ερώτημα b)
3. P(a) → ∃x(R(x,a)) (από 2, απαλοιφή □y και αντικατ με α)
4. P(a) (υπόθεση)
5. ∃x R(x,a) (από 3,4 και απαλοιφή →)

Άσκηση 4

1. Υποπαραγωγή
   1.1. R(a,b) (YY)
   1.2. R(a,b) (1.1 και επανάληψη)
2. □x□y (R(x,y) → R(x,y)) (από 1 και εισαγωγή □)

<u>Άσκηση 5</u>

1) predicate_1(c1) ≡ ∀ (d1, d2, Co, C2)(Department (d1, “Chemistry”, d2) ∧
Courses(Co, C1, C2, d1)

2) predicate_2(fname_2, fname_3) $\equiv \exists$ (i1, i2, i3, i4, i5)
[Instructor(i1, fname_2, fname_3, i2, i3, i4, i5) $\wedge \forall$ (a, b, c, d, e, f, g)
(Instructor(a, b, c, d, e, f, g) $\wedge$ (i3 >=e) $\wedge$ (i1≠a))]

3) predicate_3(fname_3, lname_3) $\equiv \exists$ (d1, d2, i1, i2, i3, i4)
(Department (d1, “Biology”, d2) $\wedge$ Instructor (d2, fname_3, lname_3, i1, i2, i3, i4))

4) predicate_4(fname_4, lname_4, fname_5, lname_5) $\equiv$

$\forall$ (S1, S2, … S7, i1…, i6, C1,… , C4)
(Instructor(i1, fname_5, lname_5, i2, …, i6) $\wedge$ Student (S1, fname_4, lname_4, S2, …, S7)
$\wedge$ Course (c1, …, c4) $\wedge$ Teach (i1, C1) $\rightarrow$Attend (S1, C1)).

5) Predicate_5(cname) $\equiv \forall$ (C1, C2, C3) [Course(C1, cname, C2, C3) $\rightarrow$
$\exists$ (i1, i2, …, i7)(Instructor(i1, i2, “Papadopoulos”, i3, …, i7) $\wedge$ Teaches (i1, c1)) $\vee$
$\exists$ (S1, S2, …, s8) (Student(S1, S2, “Papadopoulos”, S3, …, S8) $\wedge$ Attend (s1, C1))]