ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

1

ΤΜΗΜΑ

Α.Μ. Εξάμηνο Περίοδος

Εξεταζόμενο Μάθημα

Ημερομηνία

Ονοματεπώνυμο

Σειρά 3

Άσκηση 1

a) $\forall y(\forall x R(x,y) \rightarrow R(y,y))$

1) Υποπαραγωγή
  1.1 $\forall x R(x,a)$ (υπ. υπ.)
  1.2 $R(a,a)$ (1.1 απαλ-∀ a/x)
2) $\forall x R(x,a) \rightarrow R(a,a)$ (1 εισαγ →)
3) $\forall y(\forall x R(x,y) \rightarrow R(y,y))$ (2 εισαγ ∀ y/a)

b)

1) $\forall x\,(P(x) \rightarrow \exists y\, R(x,y))$	(υπόθεση)
2) $P(a) \rightarrow \exists y\, R(a,y)$	(1, απαλ-$\forall$ a/x)
3) $P(a) \vee \neg P(a)$	(αποκλειομένου μέσου)
4) Υποπαραγωγή	
4.1) $P(a)$	(υπ. υπ.)
4.2) $\exists y\, R(a,y)$	(2, 4.1 απαλ $\rightarrow$)
4.3) Υποπαραγωγή	
4.3.1) $R(a,b)$	(υπ. υπ.)
4.3.2) Υποπαραγωγή	
(4.3.2.1) $P(a)$	(υπ. υπ.)
(4.3.2.2) $R(a,b)$	(4.3.1 επανάληψη)
4.3.3) $P(a) \rightarrow R(a,b)$	(4.3.2 εισαγ $\rightarrow$)
4.3.4) $\exists y\,(P(a) \rightarrow R(a,y))$	(4.3.3 εισαγ-$\exists$ y/b)
4.4) $\exists y\,(P(a) \rightarrow R(a,y))$	(4.2, 4.3 απαλ-$\exists$ y/b)
5) Υποπαραγωγή	
5.1) $\neg P(a)$	(υπ. υπ.)
5.2) Υποπαραγωγή	
5.2.1) $P(a)$	(υπ. υπ.)
5.2.2) Υποπαραγωγή	
(5.2.2.1) $\neg R(a,b)$	(υπ. υπ.)
(5.2.2.2) $\neg P(a)$	(5.1 επανάληψη)
(5.2.2.3) $P(a)$	(5.2.1 επανάληψη)
5.2.3) $\neg\neg R(a,b)$	(5.2.2 εισαγ $\neg$
5.2.4) $R(a,b)$	(5.2.3 απαλ $\neg$

5.3| $P(a) \rightarrow R(a,b)$ (5.2 εισαγ $\rightarrow$)

5.4| $\exists y(P(a) \rightarrow R(a,y))$ (5.3 εισαγ $\exists$ y/b)

6) $\exists y(P(a) \rightarrow R(a,y))$ (3,4,5 απαλ $\vee$)

7) $\forall x \exists y(P(x) \rightarrow R(x,y))$ (6 εισαγ $\forall$ x/a)

Άσκηση 2

α) $\{\forall x(P(x)\rightarrow R(x,x)),\ \exists x \neg R(x,x),\ P(a)\}$

Ψάχνουμε ερμηνεία (D,I) που να ικανοποιεί και τα τρία σχήματα

• $\models_{D,I} \forall x(P(x)\rightarrow R(x,x))$ ανν $I'(P(\_)\rightarrow R(\_,\_)) = D$

ή $\{d\in D \mid \models_{D,I_d} P(*)\rightarrow R(*,*)\} = D$

ή $\{d\in D \mid \not\models_{D,I_d} P(*)\} \cup \{d\in D \mid \models_{D,I_d} P(*)$ και $\models_{D,I_d} R(*,*)\} = D$

ή $\{d\in D \mid I_d(*) \notin I(P)\} \cup \{d\in D \mid I_d(*)\in I(P)$ και $(I_d(*), I_d(*)) \in I(R)\} = D$

ή $\{d\in D \mid d\notin I(P)\} \cup (\{d\in D \mid d\in I(P)\} \cap \{d\in D \mid (d,d)\in I(R)\}) = D$

Δηλαδή, το D αποτελείται από αντικείμενα που δεν έχουν την ιδιότητα P ή είναι P και ταυτόχρονα είναι R στον εαυτό τους

• $\models_{D,I} \exists x \neg R(x,x)$ ανν $I'(\neg R(\_,\_)) \neq \emptyset$ ή

$\{d\in D \mid \models_{D,I_d} \neg R(*,*)\} \neq \emptyset$ ή $\{d\in D \mid \not\models_{D,I_d} R(*,*)\} \neq \emptyset$

ή $\{d\in D \mid (I_d(*), I_d(*)) \notin I(R)\} \neq \emptyset$

ή $\{d\in D \mid (d,d) \notin I(R)\} \neq \emptyset$

Υπάρχει τουλάχιστον 1 αντικείμενο που δεν είναι R στον εαυτό του.

$\models_{D,I} P(a)$ αν-ν $a \in I(P)$
Το a είναι P

Έστω λοιπόν, η ακόλουθη ερμηνεία.
$D = \{a, b\}$ $I(P) = \{a\}$
$I(R) = \{(a, a)\}$
Ικανοποιεί και τα τρία σχήματα, άρα και το σύνολο είναι ικανοποιήσιμο.

b) $\{\neg \exists x (P(x) \wedge Q(x)), \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))\}$
Ομοίως με πριν

* δεν ερμηνεύσαμε κατευθείαν τον υπαρξιακό

$\models_{D,I} \neg \exists x (P(x) \wedge Q(x))$ αν-ν $\not\models_{D,I_d} \exists x (P(x) \wedge Q(x))$ αν-ν
$I'(P(\_) \wedge Q(\_)) = \emptyset$ ή
$\{d \in D \mid \models_{D,I_d} P(*) \wedge Q(*)\} = \emptyset$ ή (ενδιάμεσα βήματα, όπως πριν)
$\{d \in D \mid d \in I(P)$ και $d \in I(Q)\} = \emptyset$
Δεν υπάρχει αντικείμενο που να είναι ταυτόχρονα και P και Q

$\models_{D,I} \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ αν-ν $I'(P(\_) \rightarrow Q(\_)) = D$ ή
$\{d \in D \mid \models_{D,I_d} P(*) \rightarrow Q(*)\} = D$
(ενδιάμεσα βήματα όπως πριν)
$\{d \in D \mid d \notin I(P)\} \cup (\{d \in D \mid d \in I(P)\} \cap \{d \in D \mid d \in I(Q)\}) = D$

Τα πάντα είτε δεν είναι P είτε είναι ταυτόχρονα και P και Q

Έστω η ερμηνεία $D=\{a\}$, όπου $I(P)=I(Q)=\emptyset$
Επαληθεύονται και τα δύο σχήματα, άρα και το σύνολο είναι ικανοποιήσιμο.

c) $(\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)) \leftrightarrow (\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)))$

$\models_{D,I} (\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)) \leftrightarrow (\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)))$ αν-ν
$\models_{D,I} (\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)) \rightarrow (\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)))$ ⓐ
και $\models_{D,I} \forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y))$ ⓑ

ⓐ αν-ν $\not\models_{D,I} (\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y))$ ①
ή $(\models_{D,I} \forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)$ ②
και $\models_{D,I} \forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)))$ ③

①: αν-ν $\not\models_{D,I} \forall x P(x)$ ή $\not\models_{D,I} \forall y Q(y)$
$\{d \in D \mid d \in I(P)\} \neq D$ ή $\{d \in D \mid d \in I(Q)\} \neq D$ * κυριολεκτικά το D για κάθε σχήμα.
Υπάρχει αντικείμενο που δεν είναι P ή δεν είναι Q

② αν-ν $\models_{D,I} \forall x P(x)$ και $\models_{D,I} \forall y Q(y)$
$\{d \in D \mid d \in I(P)\} = D$ και $\{d \in D \mid d \in I(Q)\} = D$
Τα πάντα είναι και P και Q

③ αν-ν $\{d \in D \mid \models_{D,I_d} P(*) \leftrightarrow Q(*)\} = D$
$\{d \in D \mid \models_{D,I_d} P(*) \rightarrow Q(*)$ και $\models_{D,I_d} Q(*) \rightarrow P(*)\} = D$
Εφαρμόζοντας τη γνωστή πλέον διαδικασία και στα δύο σχήματα καταλήγουμε στο ότι:

είτε τα πάντα είναι και P και Q
είτε δεν είναι P και ταυτόχρονα δεν είναι ούτε Q

Εφόσον θέλουμε ① ή (② και ③) έχουμε ως άρα ότι:
Είτε όλα τα αντικείμενα είναι P και Q
είτε κάποιο δεν είναι P ή δεν είναι Q

(b) αν-ν $\not\models_{D,I} \forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$ ④
ή ($\models_{D,I} \forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$ ③ → από πριν
και $\models_{D,I} (\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y))$) ②

④: Το ④ είναι η άρνηση του ③, δηλ.
Δεν είναι τα πάντα και P και Q ταυτόχρονα
ή όχι P και όχι Q. —//—
Υπάρχει δηλαδή αντικείμενο που είτε είναι P, αλλά όχι Q
είτε Q, αλλά όχι P

Από ④ ή (② και ③) έχουμε ότι
Είτε όλα τα αντικείμενα είναι P και Q
είτε κάποιο είναι P και όχι Q είτε είναι Q αλλά όχι P.

Επομένως, για να ισχύει και (a) και (b) πρέπει:
είτε όλα τα αντικείμενα να είναι P και Q
είτε να μην υπάρχει κάποιο που να μην είναι ούτε P ούτε Q

Προφανώς υπάρχει μοντέλο, άρα ικανοποιήσιμο.
(Ωστόσο, αν και μοιάζει, δεν είναι λογικά αληθές, πχ $\neg P(a) \wedge \neg Q(a)$)

3)

α) $P(g(d), s(f(a), g(b))) \in I(P)$

$I'(g(d), s(f(a), g(b))) \in I(P)$

$I'(g(d)), I'(s(f(a), g(b))) \in I(P)$

$I(g)(I(d)), I(s)\cdot(I'(f(a)), I'(g(b))) \in I(P)$

$2, I(s)(I(f)\cdot I(a), I(g)\, I(b)) \in I(P)$

$2, I(s)(0,1) \in I(P)$

$2, 1 \notin I(P)$ μη ικαν.

β) $Q(s(a), g(c))$

$I'(s(a), g(c)) \in I(Q)$

$[I'(s(a)), I'(g(c))] \in I(Q)$

$(I(s)\cdot I(a), I(g)\, I(c)) \in I(Q)$

$(0, 1) \notin I(Q)$ Μη Ικανοπ.

γ) $\forall x\, P(g(x), s(x))$

$I'(P(g(x), s(x))) = D$

$\{d \in D \mid \models_{D,I_d} P(g(x), s(x))\} = D$

$\{d \in D \mid \models_{D,I_d} (I_d(g(x)), I_d(s(x))) \in I(P)\} = D$

$\{d \in D \mid (I(g)(I_d(x)), I(s)\, I_d(x)) \in I(P)\} = D$

$\{d \in D \mid (I(g)(d), I(s)(d)) \in I(P)\} \neq D$ Μη ικαν.

d) $\exists x \, Q(f(x), g(x))$

$I'(Q(f(x), g(x))) \neq \phi$

$\{d \in D \mid \models_{D, I_d} Q(f(x), g(x))\} \neq \phi$

$\{d \in D \mid \models_{D, I_d} (I_d(f(x)), I_d(g(x))) \in I(Q)\} \neq \phi$

$\{d \in D \mid \models_{D, I_d} (I(f) \cdot I_d(x), I(g) \cdot I_d(x)) \in I(Q)\} \neq \phi$

$\{d \in D \mid \cancel{\models_{D, I_d}} (I(f)(d), I(g)(d)) \in I(Q)\} \neq \phi$ ıkav.