ΗΥ180 – Λογική
Εαρινό Εξάμηνο 2012

Λύσεις 3ης Σειράς Ασκήσεων

1. **[15] Θεωρείστε την ερμηνεία (D,I) της γλώσσας L όπου D είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών και I συνάρτηση ερμηνείας για την οποία: I(a) = 0, I(b) = 1, I(c) = 3, I(d) = 4, I(f): n → n^3 , I(g): (m,n) → m*n, I(P) = "το σύνολο των περιττών φυσικών αριθμών", I(Q) = {(m,n) | m διαιρεί το n}. Με βάση αυτή την ερμηνεία, εξηγείστε αν τα παρακάτω σχήματα είναι αληθή ή ψευδή:**

a) P(f(c))

Σύμφωνα με τη θεωρία για να είναι αληθές το παραπάνω σχήμα για την ερμηνεία (D,I), θα πρέπει

$$\vDash_{D,I_d} P\big(f(c)\big) \alpha\nu\nu\, I'\big(f(c)\big) \in I(P) \Leftrightarrow I(f)\big(I(c)\big) \in I(P) \Leftrightarrow I(f)(3) \in I(P) \Leftrightarrow 3^3 \in I(P)$$

που ισχύει αφού το 27 είναι περιττός φυσικός αριθμός. Συνεπώς το σχήμα είναι αληθές.

b) P(g(a,b))

Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, θα πρέπει

$$\vDash_{D,I_d} P(g(a,b)) \alpha\nu\nu\, I'(g(a,b)) \in I(P) \Leftrightarrow I(g)\big(I(a),I(b)\big) \in I(P) \Leftrightarrow I(g)(0,1) \in I(P) \Leftrightarrow 0*1 \in I(P)$$

που δεν ισχύει αφού το 0 δεν είναι περιττός φυσικός αριθμός. Συνεπώς το σχήμα είναι ψευδές.

c) Q(f(c), f(d))

Θα πρέπει

$$\vDash_{D,I_d} Q(f(c),f(d)) \alpha\nu\nu\, I'(f(c),f(d)) \in I(Q) \Leftrightarrow \Big(I(f)\big(I(c)\big),I(f)\big(I(d)\big)\Big) \in I(Q) \Leftrightarrow \big(I(f)(3),I(f)(4)\big) \in I(Q) \Leftrightarrow (3^3,4^3) \in I(Q)$$

που δεν ισχύει αφού το 27 δε διαιρεί το 64. Συνεπώς το σχήμα είναι ψευδές.

d) ∀x Q(x,f(x))

Σύμφωνα με τη θεωρία για να είναι αληθές το παραπάνω σχήμα για την ερμηνεία (D,I), θα πρέπει η εκτεταμένη ερμηνεία του σχήματος που δεσμεύεται από το $\forall x$ να περιλαμβάνει ολόκληρο το σύνολο D, δηλαδή

$$\vDash_{D,I_d} \forall x\big(Q(x,f(x))\big)\ \alpha\nu\nu\ I'\big(Q(x,f(x))\big) = D$$

Οπότε πρέπει να κατασκευάσουμε σταδιακά την εκτεταμένη ερμηνεία και αν τελικά καταλήξουμε σε D τότε το αρχικό σχήμα είναι αληθές, αλλιώς είναι ψευδές. Έχουμε τα εξής:

$$I'\big(Q(x,f(x))\big) = \big\{d \in D \big| \vDash_{D,I_d} Q(*,f(*))\big\} = \{d \in D | d\ \delta\iota\alpha\iota\rho\varepsilon\acute{\iota}\ \tau o\ d^3\} = D$$

Συνεπώς το αρχικό σχήμα είναι αληθές.

e) $\exists$**x Q(x,f(x))**

Εδώ έχουμε ότι

$$\vDash_{D,I_d} \exists x\left(Q\big(x,f(x)\big)\right)\ \alpha\nu\nu\ I'(Q(x,f(x)))\neq\emptyset$$

Πρέπει να βρούμε τουλάχιστον ένα $x\in D$, τέτοιο ώστε το $Q(x,f(x))$ να είναι αληθές. Όμως στο προηγούμενο ερώτημα αποδείξαμε ότι είναι αληθές για κάθε x, άρα και αυτή η πρόταση είναι αληθής.

2. **[15] Χαρακτηρίστε τις ακόλουθες προτάσεις ως λογικά αληθείς, λογικά ψευδείς ή τίποτε από τα δύο. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.**

a) $\exists$**x (P(x)** $\wedge\neg$ **P(x))**

Επιλέγουμε αυθαίρετα μια ερμηνεία (D,I). Για να είναι λογικά αληθής η πρόταση, θα πρέπει για κάποιο $d\in D$

$$\vDash_{D,I_d} P(*)\wedge\neg P(*)\ \Leftrightarrow \vDash_{D,I_d} P(*)\ \kappa\alpha\iota\ \vDash_{D,I_d}\neg P(*) \Leftrightarrow \vDash_{D,I_d} P(*)\ \kappa\alpha\iota\ \nvDash_{D,I_d} P(*)$$

Κάτι που δε μπορεί να ισχύει για κανένα $d\in D$. Άρα η πρόταση είναι λογικά ψευδής.

b) $\forall$**x P(x)** $\rightarrow\exists$**x P(x)**

Επιλέγουμε αυθαίρετα μια ερμηνεία (D,I). Έχουμε ότι

$\vDash_{D,I}\big(\forall xP(x)\rightarrow\exists xP(x)\big)$

$\alpha\nu\nu \nvDash_{D,I}\big(\forall xP(x)\big)$ ή $\Big(\vDash_{D,I}\big(\forall xP(x)\big)\ \kappa\alpha\iota\ \vDash_{D,I}\big(\exists xP(x)\big)\Big)$

$\Leftrightarrow I'\big(P(x)\big)\neq D$ ή $\Big(I'\big(P(x)\big)=D\ \kappa\alpha\iota\ I'\big(P(x)\big)\neq\emptyset\Big)\ \Leftrightarrow I'\big(P(x)\big)$
$\neq D$ ή $I'\big(P(x)\big)=D$

κάτι που ισχύει για οποιαδήποτε ερμηνεία. Άρα η πρόταση είναι λογικά αληθής.

c) $\exists$**x P(x)** $\wedge\exists$**x** $\neg$ **P(x)**

Επιλέγουμε αυθαίρετα μια ερμηνεία (D,I). Έχουμε ότι

$\vDash_{D,I}\big(\exists xP(x)\wedge\exists x\neg P(x)\big)$

$\alpha\nu\nu\vDash_{D,I}\big(\exists xP(x)\big)\ \kappa\alpha\iota\ \vDash_{D,I}\big(\exists x\neg P(x)\big)\Leftrightarrow$

$I'\big(P(x)\big)\neq\emptyset$ ή $I'\big(\neg P(x)\big)\neq\emptyset$

κάτι που δεν ισχύει για οποιαδήποτε ερμηνεία αφού θα μπορούσε να ισχύει $I'\big(P(x)\big)=\emptyset$ ή $I'\big(\neg P(x)\big)=\emptyset$. Άρα η πρόταση δεν είναι ούτε λογικά αληθής, ούτε λογικά ψευδής.

3. **[20] Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της μορφολογικής παραγωγής για να δείξετε τις ακόλουθες λογικές συνεπαγωγές:**

a) ∀x ∃y (P(x) → R(x,y)) |= ∀x (P(x) → ∃y R(x,y))

1. $\forall x \exists y \big(P(x) \rightarrow R(x,y)\big)$ (υπόθεση)
2. Υποπαραγωγή
   2.1. $P(b)$ (υπόθεση υποπαραγωγής)
   2.2. $\exists y \big(P(b) \rightarrow R(b,y)\big)$ (από (1) και απαλοιφή ∀ με b/x)
   2.3. Υποπαραγωγή
      2.3.1 $P(b) \rightarrow R(b,a)$ (υπόθεση υποπαραγωγής)
      2.3.2 $R(b,a)$ (από (1.1), (1.3.1) και απαλοιφή συνεπαγωγής)
      2.3.3 $\exists y R(b,y)$ (από (1.3.2) και εισαγωγή ∃ με y/a)
   2.4. $\exists y R(b,y)$ (από (1.2), (1.3) και απαλοιφή ∃)
3. $P(b) \rightarrow \exists y R(b,y)$ (από (2) και εισαγωγή συνεπαγωγής)
4. $\forall x \big(P(x) \rightarrow \exists y R(x,y)\big)$ (από (3) και εισαγωγή ∀ με x/b

b) ∀x (P(x) → Q(a)) |= ∃x P(x) → Q(a)

1. $\forall x \big(P(x) \rightarrow Q(a)\big)$ (υπόθεση)
2. $P(b) \rightarrow Q(a)$ (από (1) και απαλοιφή ∀ με b/x)
3. $\exists x \big(P(x) \rightarrow Q(a)\big)$ (από (2) και εισαγωγή ∃ με x/b)

4. **[5] Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της επίλυσης για να εξετάσετε αν το ακόλουθο σύνολο όρων είναι ικανοποιήσιμο:**
   {P, {¬P ,Q}, {¬P,Q,R}, {¬R,¬S,T}, {S,T}, {¬P,T}, {¬R,T} }

Βρίσκουμε τους όρους επίλυσης του παραπάνω συνόλου S.
res(P, {¬P ,Q}) = Q
res(P, {¬P ,Q,R}) = {Q,R}
res(P, {¬P ,T}) = T
res({¬P ,Q,R}, {¬R,¬S,T}) = {¬P,Q, ¬S,T}
res({¬P ,Q,R}, {¬R,T}) = {¬P,Q,T}
res({¬R , ¬S,T}, {S,T}) = {¬R ,T}

Οπότε R(S) = {P, {¬P ,Q}, {¬P,Q,R}, {¬R,¬S,T}, {S,T}, {¬P,T}, {¬R,T}, **Q, {Q,R}, T, {¬P,Q, ¬S,T}, {¬P,Q,T}**}

Συνεχίζουμε βρίσκοντας τους όρους επίλυσης του R(S).
res({Q,R}, {¬R,¬S,T}) = {Q, ¬S,T}
res({Q,R}, {¬R,T}) = {Q,T}

Οπότε R(R(S)) = {P, {¬P ,Q}, {¬P,Q,R}, {¬R,¬S,T}, {S,T}, {¬P,T}, {¬R,T}, Q, {Q,R}, T, {¬P,Q, ¬S,T}, {¬P,Q,T}, **{Q, ¬S,T}, {Q,T}**}

Δε μπορούν να γίνουν άλλες επιλύσεις και αφού καμία επίλυση δεν κατέληξε σε F, τότε το αρχικό σύνολο είναι ικανοποιήσιμο.

5. [10] Βρείτε μια ακολουθία ανασκευής για το ακόλουθο σύνολο όρων:
{ {¬P , ¬R}, {R, ¬T}, {¬P , S}, {¬S, T}, {P ,Q}, ¬Q }

Μια ακολουθία ανασκευής είναι η εξής:
$\{\neg P, \neg R\} \xrightarrow{\{R,\neg T\}} \{\neg P, \neg T\} \xrightarrow{\{\neg S,T\}} \{\neg P, \neg S\} \xrightarrow{\{\neg P,S\}} \neg P \xrightarrow{\{P,Q\}} Q \xrightarrow{\{\neg Q\}} F$

Μπορούμε, αν θέλουμε, να την κατασκευάσουμε συστηματικά εφαρμόζοντας το γνωστό αλγόριθμο. Έχουμε:

1. Δεν υπάρχουν αντίθετα γράμματα στο αρχικό σύνολο U
2. Υπάρχει ένας όρος, ο $\{\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}\}$ που έχει μόνο θετικά γράμματα.
3. $\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}\}$**, i:=1,** δηλαδή εξετάζουμε πρώτα το γράμμα P.
4. Ελέγχουμε αν το $\neg P$ υπάρχει ως όρος στο U. $\neg \boldsymbol{P} \notin \boldsymbol{U}$
5. Δημιουργούμε το σύνολο U_1 που προκύπτει αν αφαιρέσουμε τον όρο C από το U και αν από κάθε όρο που απομένει, αφαιρέσουμε το γράμμα $\neg \boldsymbol{P}$.

$$\boldsymbol{U_1} = \{\neg \boldsymbol{R}, \{\boldsymbol{R}, \neg \boldsymbol{T}\}, \boldsymbol{S}, \{\neg \boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}\}, \neg \boldsymbol{Q}\}$$

6. Καλούμε αναδρομικά τον αλγόριθμο με είσοδο το $\boldsymbol{U_1}$**.**

1'. Δεν υπάρχουν αντίθετα γράμματα στο U_1
2'. Υπάρχει ένας όρος, ο S που έχει μόνο θετικά γράμματα.
3'. $\boldsymbol{C_1} = \boldsymbol{S}$**, i':=1,** δηλαδή εξετάζουμε το γράμμα S.
4'. Ελέγχουμε αν το $\neg S$ υπάρχει ως όρος στο U_1. $\neg \boldsymbol{S} \notin \boldsymbol{U_1}$
5'. Δημιουργούμε το σύνολο U_{11} που προκύπτει αν αφαιρέσουμε τον όρο C_1 από το U_1 και αν από κάθε όρο που απομένει, αφαιρέσουμε το γράμμα $\neg \boldsymbol{S}$.

$$\boldsymbol{U_{11}} = \{\neg \boldsymbol{R}, \{\boldsymbol{R}, \neg \boldsymbol{T}\}, \boldsymbol{T}, \neg \boldsymbol{Q}\}$$

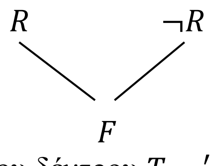
6'. Καλούμε αναδρομικά τον αλγόριθμο με είσοδο το $\boldsymbol{U_{11}}$**.**

1''. Δεν υπάρχουν αντίθετα γράμματα στο U_{11}
2''. Υπάρχει ένας όρος, ο T που έχει μόνο θετικά γράμματα.
3''. $\boldsymbol{C_{11}} = \boldsymbol{T}$**, i'':=1,** δηλαδή εξετάζουμε το γράμμα T.
4''. Ελέγχουμε αν το $\neg T$ υπάρχει ως όρος στο U_{11}. $\neg \boldsymbol{T} \notin \boldsymbol{U_{11}}$
5''. Δημιουργούμε το σύνολο U_{111} που προκύπτει αν αφαιρέσουμε τον όρο C_{11} από το U_{11} και αν από κάθε όρο που απομένει, αφαιρέσουμε το γράμμα $\neg \boldsymbol{T}$.

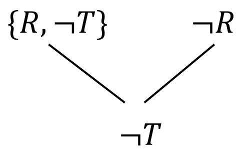
$$\boldsymbol{U_{111}} = \{\neg \boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}, \neg \boldsymbol{Q}\}$$

6''. Καλούμε αναδρομικά τον αλγόριθμο με είσοδο το $\boldsymbol{U_{111}}$**.**

1'''. Το U_{111} περιέχει αντίθετα γράμματα, άρα ο αλγόριθμος επιστρέφει το δέντρο T_{111}':

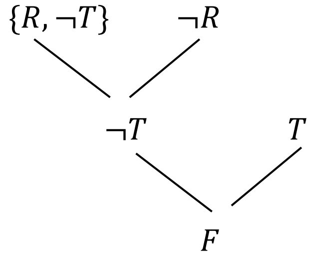


7''. Αντικαθιστούμε τα φύλλα του δέντρου T_{111}' με τους αντίστοιχους όρους από το σύνολο $\boldsymbol{U_{11}}$ και καταλήγουμε στο εξής δέντρο T_{111}:

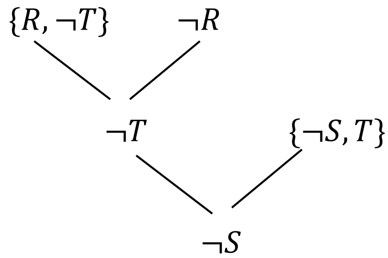


8''. $\boldsymbol{i''} = \boldsymbol{n''}$**,** οπότε συνεχίζουμε στο βήμα 9.

9’’. Επιστρέφουμε το δέντρο $T_{11}{}'$:

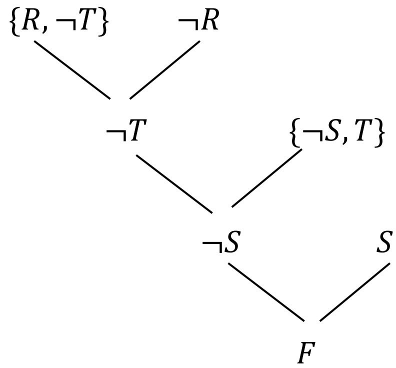


7’. Αντικαθιστούμε τα φύλλα του δέντρου $T_{11}{}'$ με τους αντίστοιχους όρους από το σύνολο $\boldsymbol{U_1}$ και καταλήγουμε στο εξής δέντρο T_{11}:

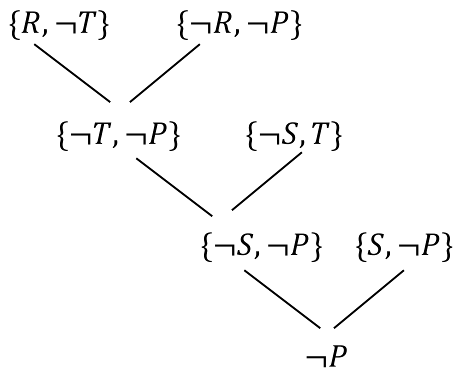


8’. $\boldsymbol{i' = n'}$**,** οπότε συνεχίζουμε στο βήμα 9.

9’. Επιστρέφουμε το δέντρο $T_1{}'$:



7. Αντικαθιστούμε τα φύλλα του δέντρου $T_1{}'$ με τους αντίστοιχους όρους από το σύνολο $\boldsymbol{U}$ και καταλήγουμε στο εξής δέντρο T_1:

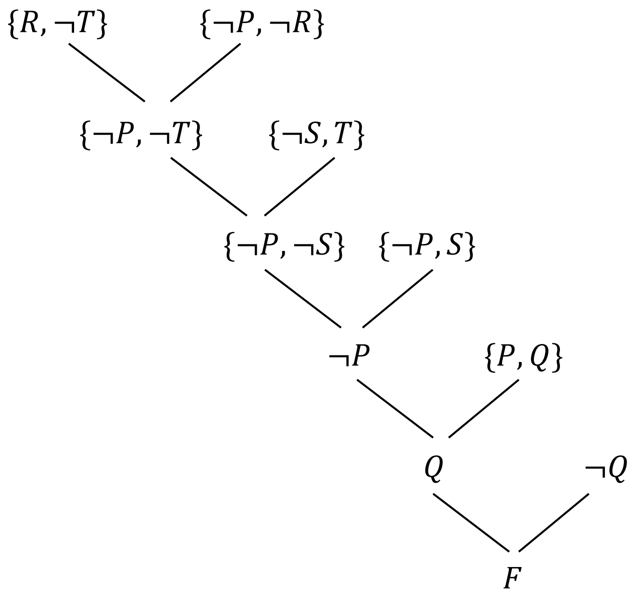


8. $\boldsymbol{i = 2}$ και επιστρέφουμε στο βήμα 4, εξετάζοντας αυτή τη φορά το γράμμα Q.

4. Ελέγχουμε αν το $\neg Q$ υπάρχει ως όρος στο U. Υπάρχει οπότε δημιουργούμε το δέντρο $T_2 = \neg Q$ και πάμε πάλι στο βήμα 8.

8. $\boldsymbol{i = n}$**,** οπότε συνεχίζουμε στο βήμα 9.

9. Επιστρέφουμε το δέντρο T:



το οποίο όπως παρατηρούμε μπορεί να γραφτεί ως ακολουθία ανασκευής με τη μορφή που δόθηκε εξαρχής:

$$\{\neg P, \neg R\} \xrightarrow{\{R,\neg T\}} \{\neg P, \neg T\} \xrightarrow{\{\neg S,T\}} \{\neg P, \neg S\} \xrightarrow{\{\neg P,S\}} \neg P \xrightarrow{\{P,Q\}} Q \xrightarrow{\{\neg Q\}} F$$