HY180 – 2010

Λύσεις 2^{ης} σειράς ασκήσεων

Άσκηση 1

α) Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $S = \{\{P \rightarrow Q \wedge R , \neg (P \rightarrow Q) \vee \neg(P \rightarrow R) \}\}$ είναι μη ικανοποιήσιμο.

$C0 = \{\{P \rightarrow Q \wedge R , \neg (P \rightarrow Q) \vee \neg (P\rightarrow R) \}\}$
s

$C1 = \{\{P \rightarrow Q \wedge R, \neg (P \rightarrow Q)\},\{ P \rightarrow Q \wedge R, \neg(P\rightarrow R) \}\}$ [∨]

$C2 = \{\{P \rightarrow Q \wedge R, P, \neg Q\},\{P \rightarrow Q \wedge R, P, \neg R\} \}$ [¬→]

$C3 = \{\{\neg \cancel{P, P, \neg} Q\},\{Q \wedge R, P, \neg Q \},\{\neg \cancel{P, P ,} \neg R\},\{ Q \wedge R, P, \neg R\}\}$ [→][del]

$C4 = \{\{Q \cancel{, R, P,} \neg Q \}, \{ Q, \cancel{R, P,} \neg R \}\}$ [∧][del]

$C5 = \{\}$

Επομένως αφού το C5 είναι κενό δεν υπάρχει μοντέλο για το S, άρα το S είναι μη-ικανοποιήσιμο και η εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $S = \{\{P \rightarrow Q \vee R , Q\rightarrow S, R \rightarrow S, \neg (P \rightarrow S)\}\}$ είναι μη ικανοποιήσιμο.

$C0 = \{\{P \rightarrow Q \vee R , Q\rightarrow S, R \rightarrow S, \neg (P \rightarrow S)\}\}$

$C1 = \{\{P \rightarrow Q \vee R , Q\rightarrow S, R \rightarrow S, P, \neg S\}\}$ [¬→]

$C2 = \{\{P \rightarrow Q \vee R , \neg Q , R \rightarrow S, P, \neg S\}, \cancel{\{P \rightarrow Q \vee R , S , R \rightarrow S, P, \neg S\}}\}$ [→][del]

$C3 = \{\{P \rightarrow Q \vee R , \neg Q , \neg R , P, \neg S\}, \{ P \cancel{\rightarrow Q \vee R , \neg Q , S , P, \neg S} \}\}$ [→][del]

$C4 = \{\{\neg P \cancel{, \neg Q , \neg R , P, \neg S}\}, \{ Q \vee R , \neg Q , \neg R , P, \neg S \}\}$ [→][del]

$C5 = \{\{ \cancel{Q, \neg Q , \neg R , P, \neg S} \}, \{ \cancel{R, \neg Q , \neg R , P, \neg S} \}\}$ [∨][del]

$C6 = \{\}$ [del]

Το C6 είναι κενό, δηλαδή δεν υπάρχει μοντέλο για το S. Άρα το S είναι μη-ικανοποιήσιμο και η εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη.

Άσκηση 2

Αποδείξτε με τη χρήση μορφολογικής παραγωγής το θεώρημα
$(P \to Q) \to ((R \to S) \to (P \land R \to Q \land S))$

(1) Υποπαραγωγή
- (1.1) $P \to Q$ (Υπόθεση υποπαραγωγής)
- (1.2) Υποπαραγωγή
  - (1.2.1) $R \to S$ (Υπόθεση υποπαραγωγής)
  - (1.2.2) Υποπαραγωγή
    - (1.2.2.1) $P \land R$ (Υπόθεση υποπαραγωγής)
    - (1.2.2.2) P (από (1.2.2.1) και απαλοιφή $\land$)
    - (1.2.2.3) $P \to Q$ (από (1.1) και επανάληψη)
    - (1.2.2.4) Q (από (1.2.2.2) , (1.2.2.3) και απαλοιφή συνεπαγωγής)
    - (1.2.2.5) R (από (1.2.2.1) και απαλοιφή $\land$)
    - (1.2.2.6) $R \to S$ (από (1.2.1) και επανάληψη)
    - (1.2.2.7) S (από (1.2.2.5) , (1.2.2.6) και απαλοιφή συνεπαγωγής)
    - (1.2.2.8) $Q \land S$ (από (1.2.2.4) , (1.2.2.7) και εισαγωγή $\land$)
  - (1.2.3) $P \land R \to Q \land S$ (από (1.2.2) και εισαγωγή $\to$)
- (1.3) $(R \to S) \to (P \land R \to Q \land S)$ (από (1.2) και εισαγωγή $\to$)

(2) $(P \to Q) \to ((R \to S) \to (P \land R \to Q \land S))$

Άσκηση 3

Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο
$\{ P \to Q \land R , \neg(P \to Q) \lor \neg(P \to R) \}$ είναι μη-ικανοποιήσιμο.

Μετατροπή σε σύνολο όρων

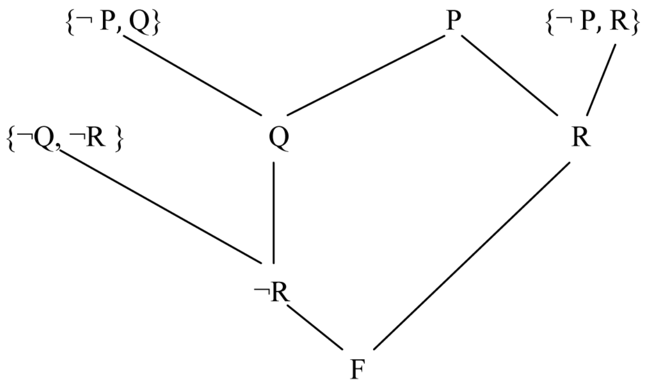
$S = \{\neg P \lor (Q \land R) , \neg(P \to Q) \lor \neg(P \to R) \}$ (εφαρμογή επιμεριστικής ιδιότητας)

$S = \{(\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor R) , \neg(P \to Q) \lor \neg(P \to R) \}$

$S = \{\{\neg P, Q\} , \{\neg P, R\} , (P \land \neg Q) \lor (P \land \neg R) \}$ (εφαρμογή επιμεριστικής ιδιότητας)

$S = \{\{\neg P, Q\} , \{\neg P, R\} , P, \{P, \neg R\}, \{\neg Q , P\}, \{\neg Q, \neg R \}\}$

Το δέντρο ανασκευής που προκύπτει είναι το εξής:



Μη ικανοποιήσιμο επομένως έγκυρη εξαγωγή συμπεράσματος

Εναλλακτικά μπορούσαμε να το δείξουμε με την εξής ακολουθία επίλυσης:

$\{\neg P, R\} \xrightarrow{\{\neg Q,\ \neg R\}} \{\neg P, \neg Q\} \xrightarrow{\{\neg P,\ Q\}} \neg P \xrightarrow{P} F$

<u>Άσκηση 4</u>

Ισοδύναμο με $\{P \rightarrow Q \vee R, Q \rightarrow S, R \rightarrow S, P\} \models S$

Μετατροπή σε όρους

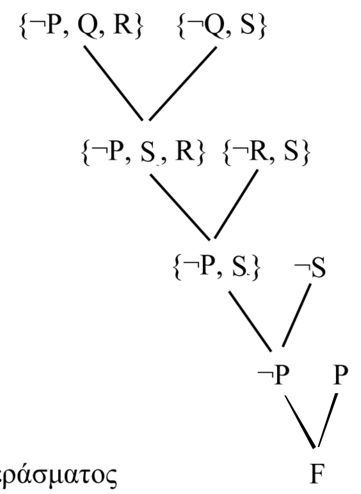
$P \rightarrow Q \vee R \equiv \neg P \vee Q \vee R$

$Q \rightarrow S \equiv \neg Q \vee S$

$R \rightarrow S \equiv \neg R \vee S$

Προκύπτει το εξής σύνολο όρων

$S = \{\{\neg P, Q, R\}, \{\neg Q, S\}, \{\neg R, S\}, P, \neg S\}$



Μη ικανοποιήσιμο σύνολο,
επομένως έγκυρη εξαγωγή συμπεράσματος