Ασκήσεις Στην Γραμμική ΙΙ
Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.
Μέρος 1

Μερικά εισαγωγικά στοιχεία

Θεωρούμε τον ακόλουθο πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 3/4 & 1/4 \\ 9 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμου του πίνακα Α είναι το πολυώνυμο (ως προς λ):

$$\det(A - \lambda I).$$

Ιδιοτιμές του πίνακα Α λέγονται οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, δηλαδή οι λύσεις της εξίσωσης:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Στο παράδειγμα μας οι ιδιοτιμές του πίνακα Α δίνονται από την εξίσωση:

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 7 & 3/4-\lambda & 1/4 \\ 9 & 1/4 & 3/4-\lambda \end{bmatrix} = 0,$$

απ'όπου προκύπτει ότι οι ιδιοτιμές είναι $\lambda = 1, 1/2, 3$.

Για κάθε μία από αυτές τις ιδιοτιμές υπάρχει και ένα (με προσέγγιση κατεύθυνσης) ιδιοδιάνυσμα. Τα ιδιοδιανύσματα δίνονται από την ακόλουθη σχέση και εξαρτόνται από τις ιδιοτιμές, π.χ για την ιδιοτιμή λ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα x είναι λύση του συστήματος:

$$Ax = \lambda x \text{ ή του } (A - \lambda I)x = 0.$$

Στο παράδειγμα μας τα ιδιοδιανύσματα είναι:

- Για την ιδιοτιμή $\lambda = 1$, το σύστημα είναι:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 3/4 & 1/4 \\ 9 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

και η λύση του είναι η $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$.
Συνεπώς ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$ είναι το $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda = 1/2$, το σύστημα είναι:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 3/4 & 1/4 \\ 9 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

  και η λύση του είναι η $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$.
  Συνεπώς ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1/2$ είναι το $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Όμοια για την ιδιοτιμή $\lambda = 3$.

Περνάμε σε κάποιες ενδιαφέρουσες ιδιότητες των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων.

- Το άθροισμα των ιδιοτιμών ενός πίνακα A ισούται με το ίχνος του A ($\operatorname{tr} A$) δηλαδή με το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του A.
  Στο προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι το άθροισμα των ιδιοτιμών του A είναι $1 + \frac{1}{2} + 3 = \frac{9}{2}$ και το ίχνος του $\operatorname{tr} A = 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$.

- Το γινόμενο των ιδιοτιμών ενός πίνακα A ισούται με την ορίζουσα του A ($\det A$).
  Στο προηγούμενο, πάλι, παράδειγμα έχουμε ότι το γινόμενο των ιδιοτιμών είναι $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$ και ότι η ορίζουσα του είναι $\det A = \frac{3}{2}$.

$\star$ *Παρατήρηση:* Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αν ο πίνακας A δεν αντιστρέφεται τότε η ορίζουσα του είναι 0 κατά συνέπεια κάποια ιδιοτιμή του είναι μηδενική.

Θα λέμε ότι ένας πίνακας *διαγωνιοποιείται* όταν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας S και διαγώνιος πίνακας Λ έτσι ώστε:

$$S^{-1}AS = \Lambda \text{ ή } A = S\Lambda S^{-1}.$$

Πρακτικά:

- Όταν ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει <u>n διαφορετικές ιδιοτιμές</u> σίγουρα διαγωνιοποιείται. Ειδικότερα:
  α. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (γιατι;).
  β. Κατασκευάζουμε τον πίνακα Λ ως διαγώνιο πίνακα με τις ιδιοτιμές του Α στην διαγώνιο.
  γ. Κατασκευάζουμε τον πίνακα S βάζοντας ως στήλες αυτού τα ιδιοδιανύσματα του Α με την ίδια σειρά που εμφανίζονται οι αντίστοιχες ιδιοτιμές στον πίνακα Λ. Ο S τότε αντιστρέφεται (γιατι;) και έχουμε:

  $$A = S\Lambda S^{-1}.$$

- Όταν ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει <u>κάποιες ιδιοτιμές επαναλαμβανόμενες</u>, μπορεί να διαγωνιοποιείται, χρειάζεται όμως ιδιαίτερη μελέτη. π.χ

  $$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

  Ο Α έχει ώς ιδιοτιμές $\lambda = 1, 3, 3$ με ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ αντίστοιχα (κάντε το αναλυτικά). Τότε:

  $$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, S^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

  Τότε ο Α διαγωνιοποιείται ως $A = S\Lambda S^{-1}$ (κάντε τα αναλυτικά).

  Εν'γένει ένας πίνακας με επαναλαμβανόμενες ιδιοτιμές δεν διαγωνιοποιείται. π.χ

  $$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Δύο παρατηρήσεις στα προηγούμενα.

- Στη διαγωνιοποίηση δεν μας ενδιαφέρει αν κάποια ιδιοτιμή του πίνακα A είναι μηδενική. Π.χ ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

έχει 3 διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda = 0, 1, 3$. Οπότε σίγουρα διαγωνιοποιείται(γιατι;), όμως δεν αντιστρέφεται(γιατι;).

- Η διαγωνιοποίηση συνδέεται με τα ιδιοδιανύσματα.
Αν δηλαδή για ένα πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ βρούμε n γ.α ιδιοδιανύσματα (είτε κάποιες ιδιοτιμές επαναλαμβάνονται είτε όχι) τότε αυτός ο πίνακας διαγωνιοποιείται.

Περνάμε τώρα στις Ασκήσεις

Άσκηση 1 *(5.3.3 στον Strang)*
Εάν κάθε αριθμός είναι ο μέσος όρος των δύο προηγούμενων του, $G_{k+2} = \frac{G_{k+1}+G_k}{2}$, βρείτε τον πίνακα A και διαγωνιοποιήστε τον. Ξεκινώντας με $G_0 = 0$ και $G_1 = \frac{1}{2}$ βρείτε έναν τύπο για το G_k και υπολογίστε το όριο του, καθώς $k \to \infty$.

Λύση
Θέτουμε $u_k = \begin{pmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{pmatrix}$ και $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ οπότε έχουμε ότι $u_{k+1} = Au_k$.
α. Ιδιοτιμές του A:
$\det(A - \lambda I) = 0$ ισοδύναμα $\det \begin{bmatrix} 1/2-\lambda & 1/2 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$ τελικά $\lambda = 1$ ή $\lambda = -1/2$.
β. Ιδιοδιανύσματα του A:
Για την ιδιοτιμή $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

λύνοντας το σύστημα αυτό παίρνουμε ως ιδιοδιάνυσμα το $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Για την ιδιοτιμή $\lambda = -1/2$:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

λύνοντας το σύστημα αυτό παίρνουμε ως ιδιοδιάνυσμα το $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
γ. Θέτοντας τώρα $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$ καθώς επίσης $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ έχουμε ότι $S^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (υπολογίστε τον) και ότι $A = S\Lambda S^{-1}$ (επαληθεύστε).
δ. Έχοντας τώρα ότι $u_0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ προκύπτει ότι:

$$u_k = S\Lambda^k S^{-1} u_0$$

δηλαδή

$$u_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1/2)^k \end{bmatrix} (-\frac{1}{3}) \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 + (-1/2)^{k+1} \\ -1 - 2(-1/2)^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Περνώντας στο όριο, καθώς $k \to \infty$ έχουμε ότι

$$\lim_{k \to \infty} G_k = 1/3.$$

□

Άσκηση 2 *(5.3.4 στον Strang)*
Ο Bernadelli μελέτησε ένα σκαθάρι που ζει τρία χρόνια και αναπαράγεται στον τρίτο χρόνο. Εάν η ομάδα ενός έτους επιβιώνει με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, η δύο ετών με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ και η τρίτη γεννάει 6 σκαθάρια και πεθαίνει, τότε ο πίνακας είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι $A^3 = I$ και παρακολουθήσετε την κατανομή των σκαθαριών για 6 χρόνια ξεκινώντας με 6000 σκαθάρια σε κάθε ομάδα ηλικίας.

Λύση

α. Εύκολα έχουμε ότι $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ και ότι $A^3 = I$ (κάντε τις πράξεις).

β. Θεωρούμε αρχική κατανομή $u_0 = \begin{pmatrix} 6000 \\ 6000 \\ 6000 \end{pmatrix}$ οπότε με απλές πράξεις (κάντε τις) έχουμε ότι:

$$u_1 = Au_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 6000 \\ 6000 \\ 6000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36000 \\ 3000 \\ 2000 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = Au_1 = \begin{pmatrix} 12000 \\ 18000 \\ 1000 \end{pmatrix},$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 6000 \\ 6000 \\ 6000 \end{pmatrix} = u_0,$$

$$u_4 = u_1,$$

$$u_5 = u_2,$$

$$u_6 = u_3 = u_0.$$

□

Άσκηση 3 *(5.3.5 στον Strang)*
Υποθέστε ότι υπάρχει μία επιδημία, στην οποία κάθε μήνα οι μισοί από τους υγιείς αρρωσταίνουν και ένα τέταρτο από τους αρρώστους πεθαίνουν. Βρείτε την σταθερά κατάσταση για την αντίστοιχη ανέλιξη Markov

$$\begin{pmatrix} d_{k+1} \\ s_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_k \\ s_k \\ w_k \end{pmatrix}.$$

Λύση

Το διάνυσμα της κατανομής του πληθυσμού στο χρονικό βήμα k είναι το εξής:

$$\begin{pmatrix} d_k \\ s_k \\ w_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{νεκροί} \\ \text{ασθενείς} \\ \text{υγιείς} \end{pmatrix}.$$

Έχουμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ και βρίσκουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του.

Ιδιοτιμή λ=1 με ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

ιδιοτιμή λ=3/4 με ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

ιδιοτιμή λ=1/2 με ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Κατασκευάζουμε τους πίνακες για την διαγωνιοποίηση (γίνεται;),

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Με αρχική κατανομή $u_0 = \begin{pmatrix} d_0 \\ s_0 \\ k_0 \end{pmatrix}$, έχουμε:

$$u_k = A^k u_0 = S\Lambda^k S^{-1} u_0 = S \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (3/4)^k & 0 \\ 0 & 0 & (1/2)^k \end{bmatrix} S^{-1} u_0$$

$$\xrightarrow{k\to\infty} S \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} S^{-1} u_0 = \begin{pmatrix} d_0 + s_0 + k_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Πώς αλλιώς μπορούμε να βρούμε την σταθερά κατάσταση; (Υποδ. Δείτε ότι ο πίνακας A είναι πίνακας Markov). □

Άσκηση 4 *(5.3.8 στον Strang)*

α. Ξεκινώντας από το γεγονός ότι για τον ακόλουθο πίνακα ισχύει 1η στήλη + 2η στήλη = 2×3η στήλη, βρείτε μία από τις ιδιοτιμές του A και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

β. Βρείτε τι υπόλοιπες ιδιοτιμές του A.

γ. Εάν $u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ *βρείτε το όριο των* $A^k u_0$ *καθώς* $k \to \infty$.

Λύση

α. Οι στήλες του A είναι γραμμικώς εξαρτημένες οπότε ο A είναι ιδιόμορφος κατά συνέπεια έχει ορίζουσα μηδέν άρα κάποια ιδιοτιμή του είναι μηδέν(γιατί;). Το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι μια μη-μηδενική λύση του ομογενούς συστήματος:

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

κρατάμε ως ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ=0 το $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

β. Ο πίνακας A είναι πίνακας Markov οπότε έχει ως ιδιοτιμή την λ=1. Τέλος χρησιμοποιώντας ότι το ίχνος του A ($\operatorname{tr} A$) είναι ίσο με το άθροισμα των ιδιοτιμών, έχουμε ότι η τρίτη ιδιοτιμή του A είναι η λ=-0,2.

γ. Ο πίνακας A είναι πίνακας Markov οπότε σταθερά κατάσταση είναι κάποιο πολλαπλάσιο του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχει στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$, είναι δηλαδή $k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}$ για κάποιο κατάλληλο $k \in \mathbb{R}$. Ποιό είναι το κατάλληλο αυτό $k \in \mathbb{R}$;.

Γνωρίζουμε ότι ο συνολικός πληθυσμός είναι σταθερός (γιατί;) οπότε πρέπει να έχουμε $k + k + 4/3k = 10$ (γιατί;) δηλαδή $k = 15/8$ οπότε η σταθερά κατάσταση θα είναι $\begin{pmatrix} 15/8 \\ 15/8 \\ 5/2 \end{pmatrix}$. □

Άσκηση 5 *(5.3.9 στον Strang)*

Υποθέστε ότι υπάρχουν 3 κέντρα φορτηγών στην Αμερική. Κάθε μήνα τα μισά φορτηγά της Βοστώνης και τα μισά του Λος Αντζελες πάνε στο Σικάγο και τα φορτηγά του Σικάγο μοιράζονται εξίσου στην Βοστώνη και στο Λος Αντζελες. Φτιάξτε τον 3×3 *πίνακα μετάβασης A και υπολογίστε την σταθερά κατάσταση* u_∞ *αυτού που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή* $\lambda = 1$.

Λύση

Σύμφωνα με την εκφώνηση και αν b, l, s είναι τα φορτηγά στις πόλεις Βοστώνη, Λος Αντζελες, Σικάγο αντίστοιχα πρέπει η μετάβαση με τον πίνακα A να δίνεται από την σχέση:

$$A\begin{pmatrix} b \\ l \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2b + 1/2s \\ 1/2l + 1/2s \\ 1/2b + 1/2l \end{pmatrix},$$

από την σχέση αυτή προκύπτει ότι ο πίνακας A πρέπει να είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας A είναι πίνακας Markov οπότε η ζητούμενη σταθερά κατάσταση είναι ένα κατάλληλο πολλαπλάσιο του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$.

Το ιδιοδιάνυσμα της $\lambda = 1$ είναι το $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, και η σταθερά κατάσταση είναι το

$$u_\infty = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{R}.$$

Το k το βρίσκουμε από τον αρχικό πληθυσμό και είναι τέτοιο ώστε

$$\text{αρχικός πληθυσμός φορηγών} = k + k + k = 3k.$$

$\square$

Άσκηση 6 *(5.3.10 στον Strang)*
α. Για ποιές τιμές των a, b είναι η επόμενη μια ανέλιξη Markov;

$$u_{k+1} = Au_k = \begin{bmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{bmatrix} u_k, \quad u_0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

β. Υπολογίστε το $u_k = S\Lambda^k S^{-1}u_0$ για κάθε a, b. (όχι μόνο για τα a, b του (α) ερωτήματος)
γ. Υπό ποιές συνθήκες για τα a, b το u_k προσεγγίζει ένα πεπερασμένο όριο, καθώς $k \to \infty$; Μήπως ο A πρέπει να είναι πίνακας Markov;

Λύση
α. Πρέπει $0 \leq a, b \leq 1$.

β. Ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda = 1, a - b$. (πως μπορούμε να τις βρούμε χωρίς πολλές πράξεις ;)
Ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 1$ είναι για $b \neq 0$ το $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - a/b \end{pmatrix}$, για την ιδιοτιμή $\lambda = a - b$ είναι το $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Κατασκευάζουμε τους πίνακες:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a - b \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 - a/b & -1 \end{bmatrix}, S^{-1} = \frac{b}{a - b - 1} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ a - 1/b & 1 \end{bmatrix},$$

οπότε :

$$u_k = S\Lambda^k S^{-1}.$$

γ. Πρέπει το $\lim_{k\to\infty}(a - b)^k$ να υπάρχει. Μοναδικές εκδοχές λοιπόν είναι $|a - b| < 1$ ή $a = b$. □

Άσκηση 7 *(5.3.13 στον Strang)*
Η λύση του $\frac{du}{dt} = Au = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$ *(με ιδιοτιμές* $i, -i$*) διαγράφουν έναν κύκλο:* $u = (\cos t, \sin t)$. *Υποθέστε ότι προσεγγίζουμε με εξισώσεις διαφορών από εμπρός, από πίσω και από την μέση:*
α. $u_{n+1} - u_n = Au_n$ *ή* $u_{n+1} = (I + A)u_n$
β. $u_{n+1} - u_n = Au_{n+1}$ *ή* $u_{n+1} = (I - A)^{-1}u_n$
γ. $u_{n+1} - u_n = A\frac{u_{n+1}+u_n}{2}$ *ή* $u_{n+1} = (I - \frac{A}{2})^{-1}(I + \frac{A}{2})u_n$.
Βρείτε τις ιδιοτιμές των $I + A$, $(I - A)^{-1}$, $(I - \frac{A}{2})^{-1}(I + \frac{A}{2})$. *Γιά ποιά εξίσωση διαφορών παραμένει η λύση πάνω σε κύκλο;*

Άσκηση 8 *(5.3.14 στον Strang)*
Γιά ποιές τιμές του a *προκύπτει αστάθεια στο σύστημα* $u_{n+1} = a(u_n + w_n)$, $w_{n+1} = a(u_n + w_n)$;

Λύση
Το σύστημα των Εξισώσεων Διαφορών είναι το εξής:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του παραπάνω πίνακα είναι $\lambda = 0$ και $\lambda = 2a$. Οπότε το σύστημα των Εξισώσεων Διαφορών είναι ασταθές όταν $a > 1/2$. □

Άσκηση 9 *(5.3.15 στον Strang)*

Άσκηση 10 *(5.3.16 στον Strang)*
Πολλαπλασιάζοντας όρο προς όρο ισχύει ότι $(I-A)(I+A+A^2+A^3+\cdots)=I$.
Βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα $I-A$ *όταν* $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

<u>Λύση</u>
Για τον πίνακα A έχουμε ότι $A^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ και $A^3=0$. Οπότε η άπειρη σειρά της εκφώνησης σταματάει, για αυτον τον A, στον τρίτο όρο της και έτσι:

$$(I-A)(I+A+A^2)=I.$$

Εύκολα γίνεται η επαλήθευση. □

Άσκηση 11 *(5.4.6 στον Strang)*
Να γράψετε την εξίσωση β′ τάξης $y''+y=0$ *ως* 2×2 *σύστημα Δ.Ε πρώτης τάξης. Υπολογίστε την λύση της Δ.Ε με αρχικές συνθήκες* $y_0=2$ *και* $y_0'=0$.

<u>Λύση</u>
Θέτουμε $v=y'$ και επειδή $y''=-y$ έχουμε ότι $v'=-y$ οπότε

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}y\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y'\\v'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v\\-y\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}y\\v\end{pmatrix}.$$

Ιδιοτιμές του A : $\lambda=i$ και $\lambda=-i$.
Ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda=i$:

$$\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}.$$

Ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda=-i$:

$$\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-i\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}.$$

Συνεπώς οι πίνακες που μας χρειάζονται είναι:

$$\Lambda=\begin{bmatrix}i&0\\0&-i\end{bmatrix},S=\begin{bmatrix}1&1\\i&-i\end{bmatrix},S^{-1}=\frac{i}{2}\begin{bmatrix}-i&-1\\-i&1\end{bmatrix}.$$

Άρα η λύση του συστήματος Δ.Ε είναι:

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ v(t) \end{pmatrix} Se^{\Lambda t}S^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix}\frac{i}{2}\begin{bmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{pmatrix} e^{it}+e^{-it} \\ ie^{it}-ie^{-it} \end{pmatrix}.$$

Η λύση λοιπόν της Δ.Ε $y''+y=0$ με αρχικές συνθήκες $y_0=2$ και $y_0'=0$ είναι $y(t)=e^{it}+e^{-it}$. □

Άσκηση 12 *(5.4.7 στον Strang)*
Μετατρέψτε την Σ.Δ.Ε $y''=0$ σε σύστημα Δ.Ε πρώτου βαθμού. Υπολογίστε την λύση ξεκινώντας με αρχικές συνθήκες $y_0=3$ και $y_0'=4$.

<u>Λύση</u>

α. Θέτουμε $u(t)=\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ και έχουμε

$$\frac{du}{dt}=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y' \\ 0 \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

β. Ο Α έχει μοναδική ιδιοτιμή το 0.
γ. Ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμά $\lambda=0$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0\Rightarrow y=0\longmapsto\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Έχοντας μόνο «ένα» ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda=0$ ο πίνακας Α είναι ελαττωματικός, δεν μπορεί δηλαδή να διαγωνιοποιηθεί. Πως λοιπόν θα υπολογίσουμε λοιπόν το e^{At};
δ. Από τον ορισμό του, έχουμε ότι $e^{At}=I+At+\frac{(At)^2}{2!}+\frac{(At)^3}{3!}+\cdots$ και παρατηρώντας ότι για τον δοσμένο Α προκύπτει $A^2=0$ έχουμε εύκολα ότι

$$e^{At}=I+At=\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ε. Η λύση του συστήματος Δ.Ε θα είναι

$$u(t)=\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}=e^{At}u_0=\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+4t \\ 4 \end{pmatrix}.$$

στ. Τέλος, η λύση της Διαφορικής Εξίσωσης με τις δοσμένες Αρχικές Συνθήκες είναι: $y(t)=3+4t$. □

Άσκηση 13 *(5.4.8 στον Strang)*
Υποθέστε ότι r, w είναι οι πληθυσμοί των κουνελιών και των λύκων αντίστοιχα και ότι διέπονται από τις σχέσεις

$$\frac{dr}{dt} = 4r - 2w,$$

$$\frac{dw}{dt} = r + w.$$

α. Είναι το σύστημα ευσταθές, ασταθές ή ουδέτερα ευσταθές ;
β. Εάν αρχικά είχαμε $r = 300$ και $w = 200$, ποιοί οι πληθυσμοί τη χρονική στιγμή t;
γ. Ποιό είναι το πηλίκο των κουνελιών προς τους λύκους, για μεγάλους χρόνους ;

Λύση
Το σύστημα των Δ.Ε μετατρέπεται εύκολα στο εξής:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r \\ w \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} r \\ w \end{pmatrix}.$$

α. Οι ιδιοτιμές του Α είναι $\lambda = 2$ και $\lambda = 3$. Κατά συνέπεια το σύστημα είναι ασταθές (δείτε την αντίστοιχη θεωρία στην παράγραφο 5.4 του Strang).
β. Ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Οι πίνακες της διαγωνιοποίησης είναι:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, S^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα η λύση του συστήματος των Δ.Ε είναι

$$\begin{pmatrix} r(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = Se^{\Lambda t}S^{-1}\begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{pmatrix} 100e^{2t} + 200e^{3t} \\ 100e^{2t} + 100e^{3t} \end{pmatrix}.$$

γ. Το ζητούυμενο πηλίκο είναι το

$$\frac{r(t)}{w(t)} = \frac{100e^{2t} + 200e^{3t}}{100e^{2t} + 100e^{3t}} \overset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 2.$$

□

Άσκηση 14 *(5.4.9 στον Strang)*
Να εξετάσετε ως προς την ευστάθεια το σύστημα των Δ.Ε $u' = Au$, για τους επόμενου πίνακες:
$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Λύση
Το κριτήριο ευστάθειας των συστημάτων Δ.Ε βρίσκεται στην σελίδα 327 στο βιβλίο του Strang.
Συγκεκριμένα έχουμε:
α. Ιδιοτιμές του A είναι $\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{57}}{2}$ και έτσι το σύστημα είναι ασταθές (έχει θετική πραγματική ιδιοτιμή).
β. Ιδιοτιμές του B είναι $\lambda = \pm\sqrt{6}$ και έτσι το σύστημα είναι ασταθές (έχει θετική πραγματική ιδιοτιμή).
γ. Ιδιοτιμές του C είναι $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$ και έτσι το σύστημα είναι ασταθές (έχει θετική πραγματική ιδιοτιμή).
δ. Ιδιοτιμές του D είναι $\lambda = 0, -2$ και έτσι το σύστημα είναι ουδέτερα ευσταθές (έχει μια μηδενική και μία αρνητική πραγματική ιδιοτιμή).
□

Άσκηση 15 *(5.4.10 στον Strang)*
Εξετάστε την ευστάθεια του συστήματος:

$$\frac{dv}{dt} = w, \quad \frac{dw}{dt} = v.$$

Υπάρχει κάποια λύση που να φθίνει;

Λύση
Το σύστημα των Δ.Ε γράφεται ως

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda = 1$ και $\lambda = -1$. Συνεπώς το σύστημα των Δ.Ε είναι ασταθές (έχει θετική ιδιοτιμή).
Οι πίνακες της διαγωνιοποίησης είναι:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, S^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι η λύση του συστήματος για αρχικές συνθήκες $\begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ είναι

$$\begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = Se^{\Lambda t}S^{-1}\begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (v_0 + w_0)e^t + (v_0 - w_0)e^{-t} \\ (v_0 + w_0)e^t - (v_0 - w_0)e^{-t} \end{pmatrix}$$

Αν τώρα θέλουμε η λύση να φθίνει για μεγάλα t πρεπει να έχουμε $v_0 + w_0 = 0$ έτσι ώστε η λύση να γίνει

$$\begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0e^{-t} \\ -v_0e^{-t} \end{pmatrix}.$$

□

Άσκηση 16 *(εκτός βιβλίου)*
Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 3 \end{bmatrix}$, *βρείτε ορθομοναδιαίο πίνακα* U *που να διαγωνιοποιεί τον πίνακα* A.

Λύση
Ο A είναι Ερμιτιανός διότι $A^H = A$.
Ιδιοτιμές του A $\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$.
Ιδιοδιανύσματα του A
· Για την $\lambda = 2 + \sqrt{2} \longrightarrow \begin{pmatrix} i \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$ και το ονομάζουμε a.
· Για την $\lambda = 2 - \sqrt{2} \longrightarrow \begin{pmatrix} i \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$ και το ονομάζουμε b.
Κανονικοποιώντας τα δύο προηγούμενα ιδιοδιανύσματα έχουμε τον πίνακα U να είναι

$$U = \begin{bmatrix} \frac{i}{||a||} & \frac{i}{||b||} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{||a||} & \frac{1-\sqrt{2}}{||b||} \end{bmatrix}.$$

Οπότε

$$U^H = \begin{bmatrix} \frac{-i}{||a||} & \frac{1+\sqrt{2}}{||a||} \\ \frac{-i}{||b||} & \frac{1-\sqrt{2}}{||b||} \end{bmatrix}.$$

Έχοντας επιπλέον ως $\Lambda = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} \end{bmatrix}$ προκύπτει με απλές πράξεις (να τις κάνετε) ότι

$$A = U\Lambda U^H.$$

□

Άσκηση 17 *(5.5.16 στον Strang)*
Καταγράψτε από μία σημαντική ιδιότητα για τις ιδιοτιμές των : α. ενός πραγματικού συμμετρικού πίνακα,
β. ενός ευσταθούς πίνακα A, για τον οποίον όλες οι λύσεις του συστήματος $\Delta.E\ du/dt = Au$ τείνουν στο μηδέν,
γ. ενός ορθογωνίου πίνακα,
δ. ενός πίνακα Markov,
ε. ενός ελαττωματικού πίνακα (μη-διαγωνιοποιήσιμου),
στ. ενός ιδιόμορφου πίνακα.

Λύση
α. Έστω Q πραγματικός συμμετρικός πίνακας, τότε όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές.
Έστω $\lambda \neq 0$ ιδιοτιμή του Q και x το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα τότε:

$$Qx = \lambda x \Rightarrow \underline{x^H Q x = \lambda x^H x} \Rightarrow (x^H Q x)^H = (\lambda x^H x)^H$$

$$\Rightarrow x^H Q^H x = \bar{\lambda} x^H x \Rightarrow \underline{x^H Q x = \bar{\lambda} x^H x}.$$

Εξισώνοντας τα αριστερά μέλη των υπογραμισμένων έχουμε ότι $\lambda x^H x = \bar{\lambda} x^H x$ και επειδή $x \neq 0$ (γιατί ;) προκύπτει ότι $\lambda = \bar{\lambda}$ δηλαδή $\lambda \in \mathbb{R}$.
β. Από την θεωρία της Παραγράφου 5.4 (στον Strang) γνωρίζουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα πρέπει να έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη.
γ. Κάθε ορθογώνιος πίνακας διατηρεί τα μήκη (γιατι ;) οπότε οι ιδιοτιμές του πρέπει να έχουν μήκος 1(γιατί ;).
δ. Γνωρίζουμε από την θεωρία της παραγράφου 5.3 ότι πρέπει να έχει μία ιδιοτιμή ίση με 1.
ε. Κάποια ιδιοτιμή πρέπει να επαναλαμβάνετε (γιατι ;).
στ. Κάποια ιδιοτιμή πρέπει να είναι μηδεν (γιατι ;). □

Άσκηση 18 *(5.5.21 στον Strang)*
Περιγράψτε όλους του 3×3 πίνακες που είναι ταυτόχρονα Ερμιτιανοί, ορθομοναδιαίοι και διαγώνιοι.

Λύση
Έστω A ένας τέτοιος πίνακας.

Εφόσον A διαγώνιος τότε πρέπει να είναι της μορφής: $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ με $a, b, c \in \mathbb{C}$.
Εφόσον A Ερμιτιανός πρέπει $A^H = A$ οπότε $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Εφόσον A ορθομοναδιαίος πρέπει $|a| = |b| = |c| = 1$.
Συνοψίζοντας έχουμε 8 πιθανούς τέτοιους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}.$$

□

Άσκηση 19 *(εκτός βιβλίου)*
Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 3 \\ -2 & 8 & -3 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ *έχει μία ιδιοτιμή* $\lambda = 9$ *με πολλαπλότητα 3.*
Βρείτε:
α. Πόσα γρ. ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα υπάρχουν ;
β. Βάσει της απάντησης στο (α) σχηματίστε τον πίνακα Jordan ο οποίος είναι όμοιος με τον A.
γ. Βρείτε ένα πίνακα S, ώστε $S^{-1}AS = J$*. (μην υπολογίσετε τον* S^{-1}*)*

Λύση
α. Λύνουμε το σύστημα $(A - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} x - y + 3z & = 0 \\ -2x - y - 3z & = 0 \\ x + 2y & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$
$\left.\begin{array}{ll} -2x - y - 3z & = 0 \\ 3y - 3z & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} x & = -2y \\ z & = y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Οπότε βλέπουμε ότι υπάρχει μόνο ένα γρ. ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα.
β. Ο πίνακας Jordan που είναι όμοιος με τον A έχει δύο άσσους πάνω από την διαγώνιο είναι δηλαδή ο

$$J = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

γ. Υποθέτουμε ότι $S = \begin{bmatrix} | & | & | \\ x_1 & s_2 & s_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$ οπότε πρέπει $\left.\begin{array}{l} (A-9I)s_2 = x_1 \\ (A-9I)s_3 = s_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ και $s_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, οπότε $S = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2/3 \end{bmatrix}$. □

Άσκηση 20 *(5.6.2 στον Strang)*
Περιγράψτε με λόγια όλους τους πίνακες 2×2 που είναι όμοιοι με τον $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *και βρείτε δύο από αυτούς.*

Λύση

Έστω A ένας 2×2 πίνακας, όμοιος προς τον $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ τότε οι ιδιοτιμές του A είναι 1,-1 (γιατι;), η ορίζουσα του είναι -1 (γιατι;) το ίχνος του είναι 0 (γιατί;) και τέλος είναι διαγωνιοποιήσιμος(γιατί;). □

Άσκηση 21 *(5.6.3 στον Strang)*
Εξηγήστε γιατί ο A δεν είναι όμοιος με τον A+I.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε ότι «Όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές».
Έστω $\{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$ οι ιδιοτιμές του A και έστω λ ιδιοτιμή του A+I, τότε:

$$\det((A+I) - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det(A - (\lambda - 1)I) = 0,$$

δηλαδή $\lambda - 1$ ιδιοτιμή του A, δηλαδή $\lambda - 1 \in \{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$ δηλαδή $\lambda \in \{\lambda_1 + 1, \dots \lambda_n + 1\}$ οπότε οι ιδιοτιμές του A+I είναι οι $\{\lambda_1 + 1, \dots \lambda_n + 1\}$. Όμως τα σύνολα $\{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$, $\{\lambda_1 + 1, \dots \lambda_n + 1\}$ είναι διαφορετικά (γιατί;). Έτσι οι A, A+I δεν είναι όμοιοι. □

Άσκηση 22 *(5.6.5 στον Strang)*
Δείγτε ότι όταν ο B είναι αντιστρέψιμος τότε οι AB, BA είναι όμοιοι, για κάθε πίνακα A.

Λύση

Εύκολα βλέπουμε ότι $B^{-1}(BA)B = (B^{-1}B)AB = AB$, άρα οι AB, BA είνα όμοιοι. □

Άσκηση 23 *(5.6.11 στον Strang)*
Εάν ο μετασχηματισμός T είναι μία ανάκλαση ως προς την ευθεία κλίσης 45^o

του επιπέδου, βρείτε τον πίνακα του ως προς την συνήθη βάση $v_1 = (1,0)$, $v_2(0,1)$ *καθώς επίσης ως προς τα* $V_1 = (1,1)$ *και* $V_2 = (1,-1)$. *Δείξτε ότι οι πίνακες αυτοί είναι όμοιοι.*

Λύση

Η ανάκλαση ως προς την πρώτη διχοτόμο είναι η απεικόνιση $T(x,y) = (y,x)$ οπότε ο πίνακας ως προς την πρώτη βάση B_1 είναι ο $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ο πίνακας που μετασχηματίζει την βάση $B_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ στην βάση $B_2 = \{(1,1),(1,-1)\}$ είναι ο $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, και ο αντίστροφος αυτού είναι ο $M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. □

Άσκηση 24 *(5.6.16 στον Strang)*

α. Βρείτε ένα ορθογώνιο πίνακα Q *έτσι ώστε* $Q^{-1}AQ = \Lambda$ *όταν*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ \text{και} \ \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

β. Βρείτε κατόπιν ένα δεύτερο ζευγάρι ορθοκανονικών ιδιοδιανυσμάτων της ιδιοτιμής $\lambda = 0$.

β. Επαληθεύστε ότι η έκφραση $P = x_1x_1^T + x_2x_2^T$ *είναι η ίδια και για τα δύο ζεύγη ορθοκανονικών ιδιοδιανυσμάτων που βρήκατε.*

Λύση

Φανερα οι ιδιοτιμές του A είναι οι 0,0,3 (γιατί;).

Για την ιδιοτιμή $\lambda = 0$ βρίσκουμε τα εξής δύο γρ. ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

για την ιδιοτιμή $\lambda = 3$ βρίσκουμε ιδιοδιάνυσμα $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

α. Για την κατασκευή του Q θέλουμε q_1, q_2, q_3 ορθοκανονικά και τέτοια ώστε q_1, q_2 να είναι ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής $\lambda = 0$ και q_3 ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda = 3$.

Σπάμε το πρόβλημα της κατασκευή των ορθοκανονικών q_1, q_2, q_3 σε δύο βήματα (ορθογωνιότητα-κανονικότητα).

- Πρώτα η ορθογωνιότητα
Ζητάμε v_1, v_2, v_3 ορθογώνια και τέτοια ώστε v_1, v_2 ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής $\lambda = 0$ και v_3 ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda = 3$
Θα χρησιμοποιήσουμε ότι
«Κάθε μη-τετριμ. γρ. συνδυασμός 2 ιδιοδιανυσμάτων της ίδιας ιδιοτιμής λ είναι ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ».

  - Φανερά το x_3 είναι ορθογώνιο στα x_1, x_2, οπότε θα είναι κάθετο και σε κάθε γρ. συνδυασμό τους. Έτσι επιλέγουμε ως v_3 το $v_3 = x_3$.
  - Για v_1 μπορούμε να κρατήσουμε το x_1 έτσι $v_1 = x_1$.
  - Για v_2 θα επιλέξουμε ένα κατάλληλο γρ. συνδυασμό των x_1, x_2 (ώστε να εξασφαλίσουμε ότι θα είναι ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda = 0$ και ότι θα είναι κάθετο στο v_3) προσέχοντας να είναι κάθετο στο v_1.
Την ιδέα τη δίνει η μέθοδος Gram-Schmidt.
Παίρνουμε $v_2 = x_2 - cv_1$ με c τέτοιο ώστε $v_2 \perp v_1$, δηλαδή:
$v_2 \perp v_1 \Leftrightarrow v_1^T v_2 = 0 \Leftrightarrow v_1^T(x_2 - cv_1) = 0 \Leftrightarrow v_1^T x_2 - cv_1^T v_1 = 0 \Leftrightarrow$ $c = \frac{v_1^T x_2}{v_1^T v_1}$.
Έτσι έχουμε $v_2 = x_2 - \frac{v_1^T x_2}{v_1^T v_1} v_1$.

Συνοψίζοντας, τα ορθογώνια διανύσματα που γυρεύαμε είναι:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Τώρα η κανονικοποίηση των v_1, v_2, v_3.
Παίρνουμε

$$q_1 = \frac{1}{||v_1||} v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$q_2 = \frac{1}{||v_2||} v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$q_3 = \frac{1}{||v_3||} v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Οπότε ο πίνακας Q είναι

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

β. Ιδέα « Οι διαγώνιοι ενός τετραγώνου τέμνονται κάθετα.»
Τα q_1, q_2 είναι ορθοκανονικά, οπότε ορίζουν ένα τετράγωνο με πλευρές q_1 και q_2, του οποίου οι διαγώνιοι είναι τα διανύσματα $q_1 + q_2$ και $q_1 - q_2$. Ισχύει ότι $(q_1 + q_2) \perp (q_1 - q_2)$ (γιατί;) όμως δεν είναι κανονικά. Έτσι επιλέγουμε ως δεύτερο ζευγάρι ορθοκανονικών ιδιοδιανυσμάτων τα $q_1' = \frac{1}{||q_1+q_2||}(q_1 + q_2)$ και $q_2' = \frac{1}{||q_1-q_2||}(q_1 - q_2)$ που είναι και ορθογώνια και κανονικά.
γ. Ο πίνακας για τα q_1, q_2 είναι ο

$$P = q_1 q_1^T + q_2 q_2^T.$$

Ο πίνακας για τα q_1', q_2' είναι ο

$$\begin{aligned} P' &= q_1' q_1'^T + q_2' q_2'^T \\ &= \frac{1}{||q_1 + q_2||^2}(q_1 + q_2)(q_1 + q_2)^T + \frac{1}{||q_1 - q_2||^2}(q_1 - q_2)(q_1 - q_2)^T \\ &= \frac{1}{2}(q_1 q_1^T + q_1 q_2^T + q_2 q_1^T + q_2 q_2^T) + \frac{1}{2}(q_1 q_1^T - q_1 q_2^T - q_2 q_1^T + q_2 q_2^T) \\ &= q_1 q_1^T + q_2 q_2^T = P, \end{aligned}$$

αφού πρώτα παρατηρήσουμε ότι $||q_1 + q_2|| = ||q_1 - q_2|| = \sqrt{2}$ (γιατί;). □

Άσκηση 25 *(5.6.20 στον Strang)*
Εάν ο N είναι κανονικός, δείξτε ότι $||Nx|| = ||N^H x||$ για κάθε διάνυσμα x. Συμπεράνετε ότι η i γραμμή του N έχει το ίδιο μήκος με την i στήλη του. Αν επιπλέον ο N είναι άνω τριγωνικός τότε πρέπει να είναι διαγώνιος.

<u>Λύση</u>
α. Έστω διάνυσμα x, τότε

$$\begin{aligned} ||Nx||^2 = (Nx)^H Nx = x^H N^H N x &\overset{N^H N = N N^H}{=} x^H N N^H x \\ &= (N^H x)^H (N^H x) = ||N^H x||^2. \end{aligned}$$

β. Επιλέγοντας ως $x = e_i$ έχουμε ότι Nx είναι η i-στήλη του πίνακα N, και $N^H x$ είναι η συζυγής i-γραμμή του N. Από το (α) λοιπόν έχουμε ότι $||Nx|| =$

$||N^H x||$. γ. Συμβολίζουμε με $N_{i,j}$ τα στοιχεία του πίνακα N. Υποθέτουμε ότι ο N είναι άνω τριγωνικός, δηλαδή $N_{i,j} = 0$ για $i > j$.

$$N = \begin{bmatrix} \star & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & 0 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \star \end{bmatrix}.$$

Η πρώτη στήλη του N έχει μήκος $|N_{11}|$ ενώ η πρώτη γραμμή έχει μήκος $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |N_{1j}|^2}$ πρέπει λοιπόν $N_{1j} =$ για $j \geq 2$ και ο πίνακας N θα γίνει

$$N = \begin{bmatrix} \star & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & 0 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \star \end{bmatrix}.$$

Δουλεύοντας όμοια και με τις υπόλοιπες στήλες και γραμμές του N προκύπτει ότι ο N θα είναι διαγώνιος. □

Άσκηση 26 *(5.6.23 στον Strang)*
Εάν ο A έχει ιδιοτιμές $\lambda = 0, 1, 2$ ποιές είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$A(A - I)(A - 2I);$$

Λύση
Ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος (γιατί;) οπότε

$$A = S\Lambda S^{-1}, \text{ όπου } \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Έτσι προκύπτει ότι

$$B = S\Lambda S^{-1}(S\Lambda S^{-1} - I)(S\Lambda S^{-1} - 2I)$$

$$= S\Lambda S^{-1}(S\Lambda S^{-1} - SS^{-1})(S\Lambda S^{-1} - 2SS^{-1})$$

$$= S\Lambda(\Lambda - I)(\Lambda - 2I)S^{-1}$$

$$= S \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} S^{-1}$$

$$= S\mathbb{O}S^{-1} = \mathbb{O}.$$

Οπότε οι ιδιοτιμές του B είναι οι 0,0,0.
Επιπλέον των προηγουμένων έρχεται το Θεώρημα των Cayley-Hamilton το οποίο παρουσιάζεται ως Άσκηση (5.6.24) στο βιβλίο του Strang. □

Άσκηση 27 *(5.6.30 στον Strang)*
Υπολογίστε του πίνακες J^{10}, A^{10}, e^{At} *όταν* $A = MJM^{-1}$*:*

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 9 \\ -16 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$