ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 21/10/2016 Ημερομηνία Παράδοσης: 1/11/2016

Θέματα: Στοιχεία Συνδυαστικής Ανάλυση και Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές(I).

Άσκηση 1.
Παρατηρούμε ότι οι ημέρες των γενεθλίων του συνόλου των k ατόμων μπορούν να παρασταθούν από μία διάταξη $(i_1, i_2, ..., i_k)$ του συνόλου των 365 ημερών $\{1, 2, ..., 365\}$ ανά k με επανάληψη, όπου i_r είναι η ημέρα γέννησης του r ατόμου.

Ο δειγματικός χώρος Ω, ο οποίος περιλαμβάνει τις διατάξεις αυτές, έχει $N(\Omega) = (365)^k$ ισοπίθανα δειγματικά σημεία, καθώς κάθε άτομο μπορεί να έχει γενέθλια οποιαδήποτε από τις 365 μέρες του χρόνου (αγνοούμε την πιθανότητα κάποιος να έχει γενέθλια στις 29 Φεβρουαρίου).

Έστω Α το ενδεχόμενο όπως δύο τουλάχιστο από τα k άτομα έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα. Το συμπληρωματικό του ενδεχομένου Α είναι το ενδεχόμενο A' όπως τα k άτομα έχουν διαφορετικές ημέρες γενεθλίων. Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα $P(A')$ υπολογίζεται πιο εύκολα από την πιθανότητα $P(A)$. Συγκεκριμένα, το ενδεχόμενο A' περιλαμβάνει τις διατάξεις $(i_1, i_2, ..., i_k)$ του συνόλου των 365 ημερών $\{1, 2, ..., 365\}$ ανά k (χωρίς επανάληψη), και έτσι $N(A') = (365)(364)(363)...(365-n+1)$. Ως εκ τούτου, συνάγουμε την πιθανότητα:

$$P(A') = \frac{N(A')}{N(\Omega)} = \frac{(365)(364)(363)...(365-n+1)}{(365)^k}$$

Με βάση τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{(365)(364)(363)...(365-n+1)}{(365)^k}$$

Άσκηση 2.
(α) Επιλέγοντας 5 φοιτητές από 100, εφ' όσον δε μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής, για να συγκροτήσουμε μια πενταμελή ομάδα εργασίας υπάρχουν:

$$C(100, 5) = \binom{100}{5} = \frac{100!}{5!(100-5)!} = \frac{100 \times 99 \times 98 \times 97 \times 96 \times 95!}{5!95!} = 75.287.520$$

δυνατές πεντάδες που μπορούμε να επιλέξουμε.
(β) Ορίζουμε τον δειγματικό χώρο Ω ως το σύνολο όλων των δυνατών μη-διατεταγμένων επιλογών 5 ατόμων από 100 (εφόσον σε αυτό το πρόβλημα δε μας απασχολεί η σειρά με την οποία επιλέγονται). Όπως είδαμε στο α) ερώτημα, $N(\Omega) = C(100, 5) = 75.287.520$. Ορίζουμε το ενδεχόμενο:

Α=$\{$όλες οι πενταμελείς ομάδες εργασίας που αποτελούνται από 2 αγόρια και 3 κορίτσια$\}$
Θα υπολογίσουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Α ως εξής:

Παρατηρούμε ότι το πείραμα μπορεί να χωριστεί σε 2 μέρη: την επιλογή των αγοριών και αυτή των κοριτσιών. Από τα 40 αγόρια μπορούμε να επιλέξουμε 2 με $C(40,2) = \binom{40}{2}$ τρόπους, και αντίστοιχα από τα 60 κορίτσια μπορούμε να επιλέξουμε 3 με $C(60,3) = \binom{60}{3}$ τρόπους. Άρα, ο συνδυασμός αυτών των δύο επιλογών βάσει της Πολλαπλασιαστικής Αρχής έχει

$$N(A) = \binom{40}{2}\binom{60}{3} = \frac{40!60!}{2!38!3!57!} = \frac{40 \times 39 \times 60 \times 59 \times 58}{2 \times 3 \times 2} = 26.691.600$$

δυνατά αποτελέσματα.

(γ) Ακολουθώντας παρόμοια συλλογιστική με πρίν, ορίζουμε το ενδεχόμενο:

Β=$\{$όλες οι πενταμελείς ομάδες εργασίας που αποτελούνται από 4 αγόρια και 1 κορίτσι$\}$

Θα υπολογίσουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Β ως εξής:

Παρατηρούμε ότι ξανά το πείραμα μπορεί να χωριστεί σε 2 μέρη: την επιλογή των αγοριών και αυτή των κοριτσιών. Από τα 40 αγόρια μπορούμε να επιλέξουμε 4 με $C(40,4) = \binom{40}{4}$ τρόπους, και αντίστοιχα από τα 60 κορίτσια μπορούμε να επιλέξουμε 1 με $C(60,1) = \binom{60}{1}$ τρόπους. Άρα, ο συνδυασμός αυτών των δύο επιλογών βάσει της Πολλαπλασιαστικής Αρχής έχει

$$N(A) = \binom{40}{4}\binom{60}{1} = \frac{40!60!}{4!36!1!59!} = ... = 5.483.400$$

δυνατά αποτελέσματα.

(δ) Ακολουθώντας παρόμοια συλλογιστική όπως και στα προηγούμενα ερωτήματα τις άσκησης, ορίζουμε το ενδεχόμενο:

Γ=$\{$όλες οι πενταμελείς ομάδες εργασίας που αποτελούνται μόνο από αγόρια$\}$

Θα υπολογίσουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Γ ως εξής:

Από τα 40 αγόρια μπορούμε να επιλέξουμε 5 με $C(40,5) = \binom{40}{5}$ τρόπους. Παρατηρείστε ότι πλέον δεν χρειάζεται να εφαρμόσουμε την Πολλαπλασιαστική Αρχή όπως πριν, καθώς το πλήθος των τρόπων να μην επιλέξουμε κανένα κορίτσι από τα 60 για την πενταμελή ομάδα εργασίας είναι $C(60,0) = \binom{60}{0} = \frac{60!}{0!60!} = 1$ Ως εκ τούτου

$$N(\Gamma) = \binom{40}{5} = \frac{40!}{5!35!} = ... = 658.008$$

Αφού η επιλογή θεωρούμε ότι γίνεται ¨εντελώς τυχαία¨, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{658.008}{75.287.520} = ... = 0.0087.$$

Άσκηση 3.

Το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι n^{2k+1}, γιατί σε κάθε μετάδοση της φημολογίας αυτός που τη μεταδίδει έχει n επιλογές. Δηλαδή, όλα τα άτομα του αντίθετου φύλλου. Σχετικά με τις ευνοϊκές περιπτώσεις, εφαρμόζουμε την Πολλαπλασιαστική Αρχή. Η φημολογία θα μεταδοθεί από $k+1$ άνδρες και k γυναίκες. Ο πρώτος άνδρας $A_1 = a1$ έχει k επιλογές, η γυναίκα η οποία αυτός επιλέγει (έστω $\Gamma 1$) έχει $k-1$ επιλογές (δεν μπορεί να επιλέξει τον A_1), ο άνδρας που επιλέγει η $\Gamma 1$ (έστω A_2) έχει ομοίως $k-1$ επιλογές. Η k γυναίκα σε αυτή την αλυσίδα έχει $n-k$ επιλογές, και ο $k-1$ άνδρας έχει $n-k$ επιλογές (αφού k γυναίκες έχουν μεταδώσει τη φημολογία). Ως εκ τούτου, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P = \frac{n \times (n-1) \times (n-1) \times (n-2) \times (n-2) \times ... \times (n-k) \times (n-k)}{n^{2k+1}}$$

Άσκηση 4.

(α) Για τη λέξη ¨ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΣ¨, παρατηρούμε ότι το γράμμα ¨Ο¨ εμφανίζεται 2 φορές, ενώ όλα τα υπόλοιπα γράμματα από 1 φορά. Θα υπήρχαν $10!$ μεταθέσεις αν το γράμμα ¨Ο¨ ήταν διακριτό. Εφόσον όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει, πρέπει να διαιρέσουμε με $2! = 2$, αφού για το γράμμα ¨Ο¨ δεν μας αφορά η διάταξη. Ως εκ τούτου, προκύπτει πως υπάρχουν $\frac{10!}{2!} = \frac{3628800}{2} = 1.814.400$ αναγραμματισμοί.

(β) Για τη λέξη ¨ΠΡΩΤΑΘΛΗΤΗΣ¨, παρατηρούμε ότι τα γράμματα ¨Η¨ και ¨Τ¨ εμφανίζονται 2 φορές, ενώ όλα τα υπόλοιπα γράμματα από 1 φορά όπως και πριν. Θα υπήρχαν $11!$ μεταθέσεις αν όλα τα γράμματα εμφανίζονταν από 1 φορά. Εφόσον όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει, πρέπει να διαιρέσουμε με $2! \times 2! = 4$, και τελικά προκύπτει πως υπάρχουν $\frac{11!}{2! \times 2!} = \frac{39916800}{4} = 9.979.200$ αναγραμματισμοί.

(γ) Για τη λέξη ¨ΚΥΠΕΛΛΟΥΧΟΣ¨, παρατηρούμε ότι τα γράμματα ¨ Υ¨, ¨Λ¨ και ¨Ο¨ εμφανίζονται 2 φορές, ενώ τα υπόλοιπα γράμματα από 1 φορά. Θα υπήρχαν $11!$ μεταθέσεις αν όλα τα γράμματα εμφανίζονταν από 1 φορά. Εφόσον όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει, πρέπει να διαιρέσουμε με $2! \times 2! \times 2! = 8$, και τελικά προκύπτει πως υπάρχουν $\frac{11!}{2! \times 2! \times 2!} = \frac{39916800}{8} = 4.989.600$ αναγραμματισμοί.

Άσκηση 5.

(α) Ο αριθμός X των εμφανίσεων της όψης ¨Γράμματα¨ είναι μία διακριτή τυχαία μεταβλητή, εφόσον το σύνολο τιμών της $R_X = \{0, 1, 2\}$ είναι διακριτό (απαριθμητό).

Η συνάρτηση πιθανότητας μάζας υπολογίζεται καταμετρώντας τον αριθμό των ¨ευνοϊκών¨ περιπτώσεων για κάθε ενδεχόμενο (τιμή της Τ.Μ. Χ) προς τον αριθμό όλων των πιθανών περιπτώσεων - αφού υποθέτουμε ότι οι 2 ρίψεις του νομίσματος είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Εκτελώντας λοιπόν τους σχετικούς υπολογισμούς, έχουμε:

$$f(0) = P(X = 0) = P[(\kappa, \kappa)] = \frac{1}{4}$$
$$f(1) = P(X = 1) = P[(\gamma, \kappa), (\kappa, \gamma)] = \frac{1}{2}$$
$$f(2) = P(X = 2) = P[(\gamma, \gamma)] = \frac{1}{4}$$

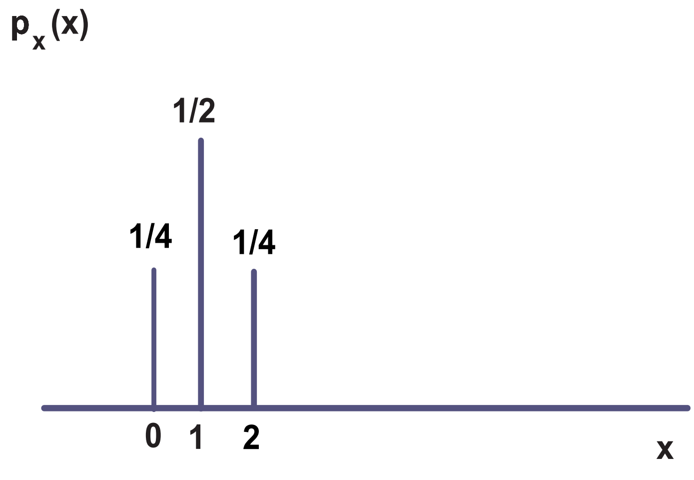
Στην ουσία, πρόκειται περί μίας ¨πολύκλαδης¨ συνάρτησης της μορφής:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/4 & x = 0 \\ 1/2 & x = 1 \\ 1/4 & x = 2 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Παρατηρείστε ότι η συνάρτηση πιθανότητας μάζας ικανοποιεί τη Συνθήκη Κανονικοποίησης, καθώς ισχύει:

$$\sum_{x=0}^{2} p_X(x) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



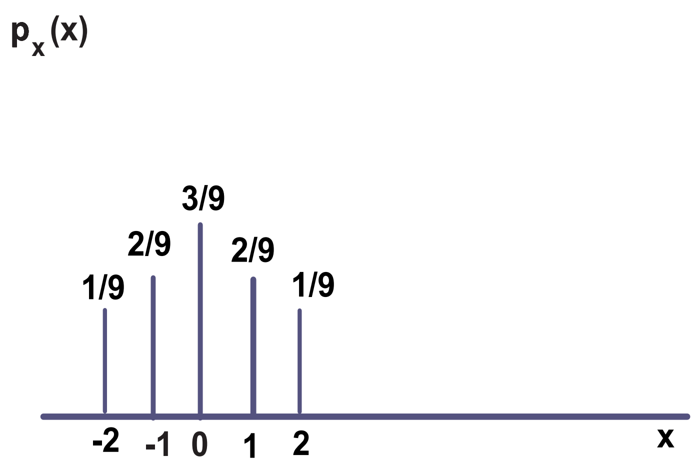
(β) Ο δειγματοχώρος του πειράματος αποτελείται από 9 ισοπίθανα ζευγάρια (i, j) με $i, j = 1, 2, 3$. Για κάθε τιμή της Τ.Μ. Χ ($0, \pm1, \pm2$), υπολογίζουμε το πλήθος των αποτελεσμάτων που δίνουν διαφορά που ισούται με τη αντίστοιχη τιμή της Τ.Μ. Χ. Για παράδειγμα, το γεγονός $\{X = 0\}$ προκύπτει όταν έρθουν οι 3 διπλές $(1, 1), (2, 2)$, και $(3, 3)$. Ακολουθώντας παρόμοια συλλογσιτική με παραπάνω, καταμετρούμε τον αριθμό των ¨ευνοϊκών¨ περιπτώσεων για κάθε ενδεχόμενο (τιμή της Τ.Μ. Χ) προς εκείνον των συνολικών πιθανών περιπτώσεων. Εύκολα προκύπτει τότε ότι η ζητούμενη συνάρτηση πιθανότητας μάζας θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/9 & x = -2, 2 \\ 2/9 & x = -1, 1 \\ 3/9 & x = 0 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Παρατηρείστε ότι και πάλι η συνάρτηση πιθανότητας μάζας ικανοποιεί τη Συνθήκη Κανονικοποίησης, καθώς ισχύει:

$$\sum_{x=-2}^{2} p_X(x) = \tfrac{1}{9} + \tfrac{2}{9} + \tfrac{3}{9} + \tfrac{2}{9} + +\tfrac{1}{9} = 1$$

Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Άσκηση 6.

Αν θεωρήσουμε ως επιτυχία την εκπομπή του σήματος 0 και ως αποτυχία την εκπομπή του σήματος 1, τότε έχουμε το μοντέλο $n = 10$ ανεξάρτητων δοκιμών $Bernoulli$ με πιθανότητα επιτυχίας $p = \frac{1}{5}$. Επομένως, η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη Διωνυμική Κατανομή, με συνάρτηση πιθανότητας μάζας:

$$f(x) = p_X(x) = \binom{10}{x}(\tfrac{1}{5})^x(\tfrac{4}{5})^{10-x}, x = 0, 1, 2, ..., 10.$$

Άσκηση 7.

Έστω η Τ.Μ. X η οποία απεικονίζει τον αριθμό των εμφανίσεων της όψης ¨κορώνα¨ σε 10 ρίψεις του μη-αμερόληπτου νομίσματος. Από την εκφώνηση της άσκησης καταλαβαίνουμε ότι η Τ.Μ. X ακολουθεί Διωνυμική Κατανομή με $n = 10$ δοκιμές και $x = 4, 5$ ¨επιτυχίες¨ αντίστοιχα. Ως εκ τούτου, η συνάρτηση πιθανότητας μάζας της Τ.Μ. X θα έχει την εξής μορφή:

$$f(x) = p_X(x) = \binom{10}{x}(p)^x(1-p)^{10-x}, x = 0, 1, 2, ..., 10.$$

Την παράμετρο p η οποία αντιστοιχεί στην πιθανότητα ¨επιτυχίας¨ θα την προσδιορίσουμε από τα δεδομένα της άσκησης ως εξής:

$$P(X = 4) = \binom{10}{4}(p)^4(1-p)^6 = \tfrac{10!}{4!6!}(p)^4(1-p)^6 \text{ (1)}$$
$$P(X = 5) = \binom{10}{5}(p)^5(1-p)^5 = \tfrac{10!}{5!5!}(p)^5(1-p)^5 \text{ (2)}$$

Όμως, από την εκφώνηση της άσκησης έχουμε:

$$P(X = 5) = 2P(X = 4) \text{ (3)}$$

Η σχέση (3) έχει ως μόνη άγνωστη παράμετρο την πιθανότητα ¨επιτυχίας¨ p. Αντικαθιστώντας σε αυτήν τις σχέσεις (1) και (2), και ακολούθως επιλύοντας ως προς p, προκύπτει $p = \frac{5}{8} > \frac{1}{2}$ (θυμηθείτε ότι το νόμισμα είναι μη-αμερόληπτο).

Έχοντας υπολογίσει την πιθανότητα ¨επιτυχίας¨ p, ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή Y η οποία απεικονίζει πλέον τον αριθμό των εμφανίσεων της όψης ¨κορώνα¨ σε 5 ρίψεις του μη-αμερόληπτου νομίσματος. Η συνάρτηση πιθανότητας μάζας της Τ.Μ. Y (κατ' αναλογία με πριν) ακολουθεί Διωνυμική Κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας μάζας:

$$f(y) = p_Y(y) = \binom{5}{y}(\frac{5}{8})^y(\frac{3}{8})^{5-y}, y = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P(Y >= 1)$, η οποία μπορεί να υπολογιστεί εύκολα ως εξής: $P(Y >= 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{5}{0}(\frac{5}{8})^0(\frac{3}{8})^5 = 1 - (\frac{3}{8})^5 = 1 - 0.074 = 0.9926.$

Άσκηση 8.

Διαβάζοντας προσεκτικά τα δεδομένα, παρατηρούμε ότι το πείραμα που επαναλαμβάνεται εδώ είναι η βολή. Η πιθανότητα επιτυχίας μιας βολής (γεγονός A) είναι ίση με $p = 0.6$, ενώ η πιθανότητα αποτυχίας (γεγονός A') είναι ίση με $q = 1 - p = 1 - 0.4 = 0.4$. Φυσικά, το αποτέλεσμα κάθε βολής είναι ανεξάρτητο από τα αποτελέσματα των υπολοίπων. Έτσι έχουμε ανεξάρτητες επαναλήψεις δοκιμών $Bernoulli$ με $p = 0.6$. Ο αριθμός των επαναλήψεων είναι $n = 4$. Ως εκ τούτου, έχουμε Διωνυμική Κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας μάζας:

$$f(x) = p_X(x) = \binom{4}{x}(0.6)^x(0.4)^{4-x}, x = 0, 1, 2, 3, 4.$$

(α) Ονομάζουμε γεγονός Β=¨Σε 4 βολές,ο σκοπευτής έχει 3 επιτυχίες¨. Τότε, εφαρμόζοντας τον τύπο της Διωνυμικής Κατανομής, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(B) = \binom{4}{3}(0.6)^3(0.4)^1 = ... = 0.3456$$

(β) Ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό με πριν, ονομάζουμε γεγονός Γ=¨Σε 4 βολές,ο σκοπευτής δεν έχει καμία επιτυχία¨. Τότε, εφαρμόζοντας τον τύπο της Διωνυμικής Κατανομής, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(\Gamma) = \binom{4}{3}(0.6)^0(0.4)^4 = ... = 0.0256$$

(γ) Δουλεύοντας όπως πριν, ονομάζουμε γεγονός Δ=¨Σε 4 βολές,ο σκοπευτής έχει τουλάχιστον 1 επιτυχία¨. Παρατηρούμε ότι το γεγονός Δ πραγματοποιείται όταν ο σκοπευτής έχει 1 ή 2 ή 3 ή 4 επιτυχίες. Άρα, το συμπληρωματικό του γεγονός είναι το Δ'=¨Σε 4 βολές,ο σκοπευτής δεν έχει καμία επιτυχία¨. Δηλαδή, το γεγονός Γ που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο ερώτημα της άσκησης. Τότε, εφόσον τα δύο γεγονότα είναι συμπληρωματικά, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(\Delta) = 1 - P(\Gamma) = 1 - 0.0256 = 0.9744$$

(δ) Κατ' αναλογία με τα προηγούμενα ερωτήματα της άσκησης, ονομάζουμε γεγονός Ε=¨Σε 4 βολές,ο σκοπευτής έχει 1 επιτυχία¨. Τότε, εφαρμόζοντας τον τύπο της Διωνυμικής Κατανομής, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(E) = \binom{4}{1}(0.6)^1(0.4)^3 = ... = 0.1536$$