ΗΥ118: Διακριτά Μαθηματικά

Εαρινό εξάμηνο 2009

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Ιουνίου

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Οι παρακάτω λύσεις είναι ενδεικτικές, υπάρχουν πολλές άλλες σωστές επιλύσεις των ίδιων ασκήσεων. Σε μερικά από τα θέματα, αναφέρονται εναλλακτικές λύσεις.

Θέμα 1^{ο} : [10 μονάδες]

1. [5] Σε ένα fast-food ένας υπάλληλος τυλίγει 100 σάντουιτς καθένα από τα οποία περιλαμβάνει ένα από τα εξής τέσσερα υλικά: κοτόπουλο, γαλοπούλα, ζαμπόν, λουκάνικο. Ωστόσο, ξεχνάει να βάλει ετικέτες και δεν γνωρίζει ποιό σάντουιτς περιλαμβάνει ποιό υλικό. Μια παρέα, θέλει να έχει τουλάχιστον 6 σάντουιτς του ίδιου τύπου (με το ίδιο υλικό). Ποιό είναι το ελάχιστο πλήθος από σάντουιτς που θα πρέπει να τους δώσει ο υπάλληλος για να είναι εγγυημένο ότι θα ικανοποιήσει την επιθυμία τους;

2. [5] Ο Νίκος διαλέγει τυχαία έντεκα διαφορετικούς αριθμούς από το 1 έως το 20. Αποδείξτε ότι ανάμεσά τους υπάρχουν δύο αριθμοί των οποίων η διαφορά είναι ίση με 10.

Λύση

1. Έστω ότι οι περιστεριώνες είναι 4 (οι τύποι των σάντουιτς) και *x* είναι τα περιστέρια (τα σάντουιτς που πρέπει να μοιραστούν). Θέλουμε τουλάχιστον 6 περιστέρια να πέσουν στον ίδιο περιστεριώνα. Από της γενικευμένη αρχή του περιστεριώνα έχουμε ότι:

$$\left\lceil \frac{x}{4} \right\rceil = 6$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι x=21. ΟΕΔ.

Εναλλακτικά, θα μπορούσε κανείς να διατυπώσει την παρακάτω κατασκευαστική απόδειξη. Έστω ότι ο υπάλληλος μοιράζει τα σάντουιτς. Στην χειρότερη (ως προς το πλήθος των μοιρασμένων σάντουιτς) των περιπτώσεων, μπορεί να έχει δώσει 20 σάντουιτς τα οποία να είναι κατανεμημένα σε πεντάδες των τεσσάρων διαφορετικών γεύσεων (4x5=20) έτσι ώστε να μη σχηματίζεται καμία εξάδα ίδιων γεύσεων. Το 21ο σάντουιτς αναγκαστικά θα περιλαμβάνει ένα από τα 4 υλικά των 4 σχηματισμένων 5άδων. Άρα, αναγκαστικά θα δημιουργηθεί μία 6άδα όμοιων σάντουιτς. Άρα ο υπάλληλος πρέπει να μοιράσει τουλάχιστον 21 σάντουιτς για να εγγυηθεί ότι η παρέα έχει τουλάχιστον μία εξάδα από σάντουιτς ίδιου τύπου.

2. Έστω ότι απεικονίζουμε τον κάθε αριθμό στο υπόλοιπο της ακέραιας διαίρεσής του με το 10. Έτσι, το 1 και το 11 θα απεικονιστούν στο 1, το 2 και το 12 στο 2, το 3 και το 13 στο 3, το 4 και το 14 στο 4, ..., το 9 και το 19 στο 9 και το 10 και το 20 στο 0. Επομένως, αυτό το υπόλοιπο παίρνει 10 διαφορετικές τιμές στο σύνολο {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Έστω ότι τις τις τιμές αυτές τις θεωρούμε ως περιστεριώνες. Εάν επιλέξουμε 11 διαφορετικούς αριθμούς (περιστέρια) από το 1 έως το 20, η αρχή του περιστεριώνα μας λεει πως δύο περιστέρια θα πέσουν στον ίδιο περιστεριώνα. Άρα, αναγκαστικά δύο από τους επιλεγμένους αριθμούς έχουν ίσο ακέραιο υπόλοιπο διάιρεσης με το 10. Σε αυτή την περίπτωση όμως γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί αυτοί έχουν διαφορά ίση με 10.

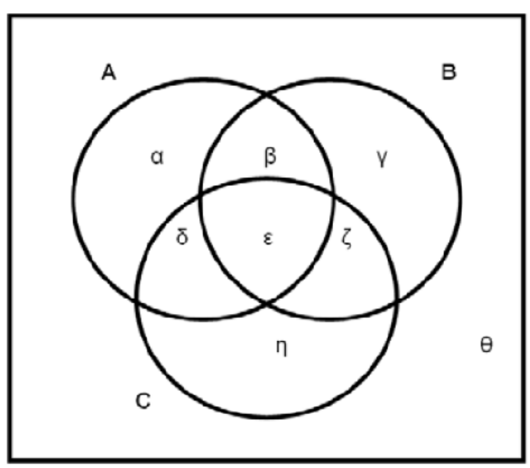
Θέμα 2^o : [15 μονάδες]

Σε κάποιο από τα Τμήματα του Πανεπιστημίου μας οι καθηγητές έχουν συνολικά 30 προσωπικούς υπολογιστές. Από αυτούς, οι 20 έχουν λειτουργικό σύστημα Windows, οι 8 έχουν οθόνη 21 ιντσών, οι 25 έχουν CD-ROM, οι 20 έχουν τουλάχιστον δύο από αυτά τα χαρακτηριστικά και 6 έχουν όλα αυτά τα χαρακτηριστικά.

1. [5] Πόσοι υπολογιστές έχουν ακριβώς ένα από αυτά τα χαρακτηριστικά;
2. [5] Πόσοι προσωπικοί υπολογιστές έχουν τουλάχιστον ένα από αυτά τα χαρακτηριστικά;
3. [5] Πόσοι δεν έχουν κανένα από αυτά τα χαρακτηριστικά;

Λύση

Έστω το παρακάτω Venn διάγραμμα με τα σύνολα A={υπολογιστές που έχουν Windows}, B={υπολογιστές που έχουν οθόνη 21 ιντσών} και C={υπολογιστές που έχουν CDROM}



Από τα δεδομένα του προβλήματος γνωρίζουμε ότι

$α+β+δ+ε=20$ (1)

$β+γ+ε+ζ = 8$ (2)

η+δ+ε+ζ = 25 (3)
β+δ+ε+ζ=20 (4)
ε=6 (5)
α+β+γ+δ+ε+ζ+η+θ=30 (6)

1. Ενδιαφερόμαστε να βρούμε το άθροισμα α+γ+η. Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι α+η+γ+2(β+δ+ζ+ε)+ε = 53 η οποία λόγω των (4) και (5) δίνει ότι **α+η+γ=53-40-6=7**.
2. Ενδιαφερόμαστε να βρούμε το άθροισμα α+β+γ+δ+ε+ζ+η. Όμως, ξέρουμε ότι α+β+γ+δ+ε+ζ+η=(α+γ+η)+(β+δ+ζ+ε) $\xRightarrow{(7),(4)}$ **α+β+γ+δ+ε+ζ+η =7+20= 27**.
3. Ενδιαφερόμαστε να βρούμε το θ. Όμως **θ = 30 – (α+β+γ+δ+ε+ζ+η) = 30-27=3**.

Θέμα $3^{ο}$: [5 μονάδες]

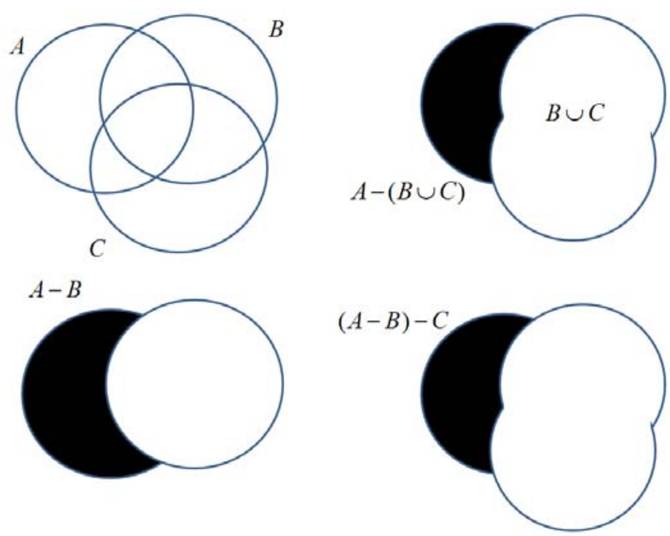
Έστω *A, B* και *C* τυχαία σύνολα. Αποδείξτε κατά πόσον ισχύει ή όχι η παρακάτω ισότητα:

$$(A - B) - C = A - (B \cup C)$$

Λύση

Υπάρχουν πολλοί τρόποι να λύσει κανείς αυτό το θέμα.

$1^{ος}$ τρόπος: Δείχνουμε με διαγράμματα Venn ότι τόσο το αριστερό όσο και το δεξί μέλος της εξίσωσης προς απόδειξη αντιστοιχούν στο ίδιο σύνολο. Προσοχή: πρέπει τα σύνολα να έχουν γενική σχέση μεταξύ τους, δηλαδή να σχηματίζονται τομές ανά δύο αλλά και τομή και των τριών συνόλων (όπως π.χ., στο διάγραμμα του θέματος 2)



$2^{ος}$ τρόπος: Δείχνουμε ότι η αντίστοιχη πρόταση σε προτασιακό λογισμό είναι αληθής Πιό συγκεκριμένα:

$$\left(A \wedge \overline{B}\right) \wedge \overline{C} = A \wedge \left(\overline{B} \wedge \overline{C}\right) = A \wedge (B \vee C)$$

3^{ος} τρόπος: Κάνουμε το ίδιο με πίνακα αληθείας:

A	B	C	A-B	(A-B)-C	B∪C	A-(B∪C)
0	0	0	0	**0**	0	**0**
0	0	1	0	**0**	1	**0**
0	1	0	0	**0**	1	**0**
0	1	1	0	**0**	1	**0**
1	0	0	1	**1**	0	**1**
1	0	1	1	**0**	1	**0**
1	1	0	0	**0**	1	**0**
1	1	1	0	**0**	1	**0**

Παρατηρούμε ότι οι στήλες 5 και 7 έχουν τις ίδιες τιμές, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι οι εκφράσεις είναι ισοδύναμες.

4^{ος} τρόπος: Δείχνουμε ότι (α) το $(A-B)-C$ είναι υποσύνολο του $A-(B\cup C)$ και ότι (β) το $A-(B\cup C)$ είναι υποσύνολο του $(A-B)-C$.

(α) Θα αποδείξουμε ότι $(A-B)-C\subseteq A-(B\cup C)$

Έστω $x\in((A-B)-C)$. Τότε

$$x\in(A-B)\wedge x\notin C\Rightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\wedge x\notin C$$
$$\Rightarrow x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)\Rightarrow x\in A\wedge(x\notin(B\cup C))$$
$$\Rightarrow x\in(A-(B\cup C))$$

Άρα, $(A-B)-C\subseteq A-(B\cup C)$

(β) Θα αποδείξουμε ότι $A-(B\cup C)\subseteq(A-B)-C$

Έστω $x\in A-(B\cup C)$. Τότε

$$x\in A\wedge(x\notin(B\cup C))\Rightarrow x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)$$
$$(x\in A\wedge x\notin B)\wedge x\notin C\Rightarrow x\in(A-B)\wedge x\notin C$$
$$\Rightarrow x\in((A-B)-C)$$

Άρα, $A-(B\cup C)\subseteq(A-B)-C$.

Αφού ισχύει ταυτόχρονα ότι $(A-B)-C\subseteq A-(B\cup C)$ και $A-(B\cup C)\subseteq(A-B)-C$, τότε ισχύει πως $A-(B\cup C)=(A-B)-C$.

Θέμα 4^o : [15 μονάδες]

Έστω Z το σύνολο των ακεραίων αριθμών. Έστω η σχέση
$R = \{(x, y) \mid x \in Z, y \in Z, \exists k \in Z: |x-y| = 5k\}$

1. [8] Ποιές από τις παρακάτω ιδιότητες έχει η *R*; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

(α) ανακλαστική
(β) συμμετρική
(γ) μεταβατική
(δ) αντισσυμμετρική

2. [7] Είναι η σχέση *R* σχέση ισοδυναμίας; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

Λύση

Δύο ακέραιοι αριθμοί σχετίζονται με τη σχέση *R* όταν η απόλυτη διαφορά τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 5.

1.

(α) Η *R* είναι ανακλαστική γιατί $\forall x \in Z, xRx$, αφού |x-x|=0 και $\exists \kappa \in Z\ (\kappa = 0)$

τέτοιο ώστε |x-x|=5κ

(β) Η *R* είναι συμμετρική γιατί εάν xRy, τότε yRx.

(γ) Η *R* είναι μεταβατική γιατί εάν xRy, και yRz τότε xRz.

(δ) Η *R* δεν είναι αντισυμμετρική γιατί συμμετρίες της μορφής xRy και yRx δεν εμφανίζονται μόνο για $x = y$. Π.χ., 1*R*6 και 6*R*1 αλλά $1 \neq 6$.

2. Για να είναι μια σχέση *R* σχέση ισοδυναμίας, πρέπει να έχει την ανακλαστική συμμετρική και μεταβατική ιδιότητα. Όπως δείξαμε, η R έχει αυτές τις ιδιότητες και επομένως είναι σχέση ισοδυναμίας.

Θέμα 5^o : [15 μονάδες]

1. [8] Αποδείξτε ότι για κάθε n>0, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (n(n + 1)/2)^2$.
2. [7] Αποδείξτε ότι για κάθε n≥0, ισχύει ότι:

$$1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

Λύση

Και οι δύο προτάσεις θα αποδειχτούν επαγωγικά.

1. (α) Για n=1, η πρόταση δίνει $1^3 = (1(1+1)/2)^2 \Rightarrow 1 = 1$, πράγμα που ισχύει.
   (β) Έστω ότι η πρόταση ισχύει για n=k+1, έστω δηλαδή ότι ισχύει πως
   $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = (k(k + 1)/2)^2$
   (γ) Θα πρέπει να αποδείξω ότι η πρόταση ισχύει για n=k+1, δηλαδή ότι:
   $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = ((k+1)(k+2)/2)^2$

Πράγματι,

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2(k^2+4(k+1))}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

2. (α) Για n=0, η πρόταση δίνει

   $$3^0=\frac{3^1-1}{2}\Rightarrow 1=1,$$

   πράγμα που ισχύει.

   (β) Έστω ότι η πρόταση ισχύει για n=k, έστω δηλαδή ότι ισχύει πως

   $$1+3^1+3^2+...+3^k=\frac{3^{k+1}-1}{2}$$

   (γ) Θα πρέπει να αποδείξω ότι η πρόταση ισχύει για n=k+1, δηλαδή ότι:

   $$1+3^1+3^2+...+3^k+3^{k+1}=\frac{3^{k+2}-1}{2}$$

   Πράγματι,

   $$1+3^1+3^2+...+3^k+3^{k+1}=\frac{3^{k+1}-1}{2}+3^{k+1}=\frac{3^{k+1}-1+2\cdot 3^{k+1}}{2}=\frac{3\cdot 3^{k+1}-1}{2}=\frac{3^{k+2}-1}{2}$$

Θέμα 6^{ο} : [10 μονάδες]

Στο πόκερ, κάθε παίκτης παίρνει μία πεντάδα χαρτιών από μία τυπική τράπουλα 52 χαρτιών που περιλαμβάνει 4 διαφορετικά χρώματα (κούπες, καρώ, μπαστούνια, σπαθιά) με 13 φιγούρες το καθένα (1-10, βαλές, ντάμα, ρήγας).

1. [2] Πόσες διαφορετικές πεντάδες χαρτιών υπάρχουν;
2. [2] Πόσες διαφορετικές πεντάδες υπάρχουν που να αποτελούνται μόνο από κούπες;
3. [2] Πόσες πεντάδες αποτελούνται από τρεις κούπες και δύο καρώ;
4. [4] Πόσες πεντάδες έχουν τρεις ίδιες φιγούρες διαφορετικού χρώματος και δύο ίδιες φιγούρες διαφορετικού χρώματος; (π.χ., 3 επτάρια και δύο βαλέδες, 3 ντάμες και 2 πεντάρια, κ.ο.κ)

Λύση

1. Ενδιαφερόμαστε να βρούμε πόσες 5άδες μπορούμε να κατασκευάσουμε από 52 διαφορετικά αντικείμενα, χωρίς να μας ενδιαφέρει η διάταξή τους:

   $$C(52,5)=\binom{52}{5}=\frac{52!}{(52-5)!5!}=\frac{52!}{47!5!}=\frac{48\cdot 49\cdot 51\cdot 52}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=2{,}598{,}960$$

2. Ενδιαφερόμαστε να βρούμε πόσες 5άδες μπορούμε να κατασκευάσουμε από τα 13 διαφορετικά αντικείμενα (13 κούπες), χωρίς να μας ενδιαφέρει η διάταξή τους:

$$C(13,5) = \binom{13}{5} = \frac{13!}{(13-5)!5!} = \frac{13!}{8!5!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1{,}287$$

3. Επιλέγουμε από τις 13 κούπες τις 3 και από τα 13 καρώ τα 2:

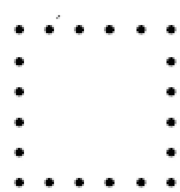
$$C(13,3) \cdot C(13,2) = \binom{13}{3}\binom{13}{2} = \frac{13!13!}{(13-3)!5!(13-2)!5!} = 22{,}308$$

4. Επιλέγουμε από τις 13 φιγούρες τη μία και από τα 4 χρώματα τα 3 και κατόπιν από τις 12 φιγούρες που απομένουν την μία και από τα τέσσερα χρώματα τα δύο.

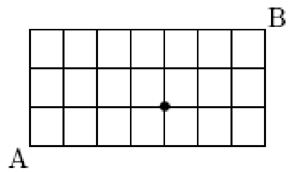
$$C(13,1) \cdot C(4,3) \cdot C(12,1) \cdot C(4,2) = \binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2} = 3{,}744$$

Θέμα 7^{ο} : [20 μονάδες]

1. [10] Το παρακάτω σχήμα έχει 20 τελείες. Ας υποτεθεί ότι επιλέγουμε στην τύχη 3 από αυτές. Ποιά είναι η πιθανότητα οι τυχαία επιλεγμένες τελείες να είναι συνευθειακές;



2. [10] Υποθέστε ότι το παρακάτω 3x7 πλέγμα αναπαριστά ένα τμήμα μιας πόλης: οι γραμμές είναι δρόμοι που ορίζουν οικοδομικά τετράγωνα. Μία στοιχειώδης κίνηση σας μεταφέρει από μία διασταύρωση σε μία γειτονική της. Πρέπει να ξεκινήσετε από το κάτω αριστερά σημείο (σημείο A) και να φτάσετε στο πάνω δεξιά σημείο (σημείο B) χρησιμοποιώντας ακριβώς 10 στοιχειώδεις κινήσεις.
   a. [5] Με πόσα διαφορετικά μονοπάτια μπορείτε να πάτε από το A στο B; (δύο μονοπάτια είναι διαφορετικά μεταξύ τους αν περιλαμβάνουν έστω και μία διαφορετική στοιχειώδη κίνηση). **ΒΟΗΘΕΙΑ:** Προσπαθείστε να διατυπώστε το πρόβλημα ως πρόβλημα κατασκευής μιας συμβολοσειράς (string), και κατόπιν δείξτε πόσες είναι οι επιτρεπτές διαφορετικές συμβολοσειρές...
   b. [5] Με πόσα διαφορετικά μονοπάτια μπορείτε να πάτε από το A στο B αν πρέπει οπωσδήποτε να αποφύγετε το (κακόφημο) σημείο με την τελεία;



Λύση

1. Το σύνολο όλων των συνδυασμών τριάδων που μπορούμε να κάνουμε έχει πλήθος

$$|\Omega| = C(20,3) = \binom{20}{3} = 1{,}140$$

Για να είναι οι τρεις τελείες συνευθειακές θα πρέπει να ανήκουν στην ίδια πλευρά του τετραγώνου. Σε κάθε πλευρά, οι συνδυασμοί 3άδων που μπορούμε να κάνουμε είναι:

$$|S| = C(6,3) = \binom{6}{3} = 20$$

Η πιθανότητα να επιλέξει κανείς τυχαία 3 συνευθειακές τελείες είναι

$$P = \frac{4 \cdot |S|}{|\Omega|} = \frac{80}{1{,}140} \simeq 0.0702$$

(περίπου 7%). Το 4 στον αριθμητή του κλάσματος οφείλεται στο γεγονός ότι έχουμε τέσσερις πλευρές στο τετράγωνο.

2. a.

Παρατηρούμε ότι για να μπορέσουμε να πάμε από το σημείο Α στο σημείο Β με ακριβώς 10 στοιχειώδεις κινήσεις, θα πρέπει σε κάθε διασταύρωση να κινούμαστε είτε προς τα πάνω (Π), είτε προς τα δεξιά (Δ). Επίσης, παρατηρούμε ότι θα πρέπει να κάνουμε συνολικά τρεις κινήσεις προς τα επάνω και επτά κινήσεις προς τα δεξιά. Με άλλα λόγια, μπορούμε να θεωρήσουμε την διαδρομή μας σαν μία συμβολοσειρά μήκους 10 χαρακτήρων που αποτελείται από 3 Π και 7 Δ. Μας ενδιαφέρει να βρούμε πόσες τέτοιες συμβολοσειρές μπορούμε να κατασκευάσουμε. Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το να βρούμε με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε τρία διαφορετικά αντικείμενα από 10 διαφορετικά αντικείμενα, χωρίς να μας ενδιαφέρει η διάταξη (ουσιαστικά, να βρούμε σε ποιά σημεία τις διαδρομής των 10 κινήσεων θα κάνουμε τις κινήσεις προς τα πάνω). Ξέρουμε όμως ότι αυτοί έχουν πλήθος ίσο με

$$\mathrm{A} = C(10,3) = \binom{10}{3} = 120$$

b.

Εργαζόμαστε με τρόπο ανάλογο με το ερώτημα a, για να βρούμε το πλήθος των μονοπατιών *B* που *περνάνε* από το κακόφημο σημείο K. Τότε, ο ζητούμενος αριθμός είναι *X=A-B* (όπου *A* η απάντηση στο ερώτημα a).

Το πλήθος των μονοπατιών από το Α στο Β μέσω του Κ είναι ίσο με το πλήθος των μονοπατιών απο το Α στο Κ (=B_1) επί το πλήθος των μονοπατιών από το Κ στο Β (=B_2).

Εργαζόμενοι όπως στο a:

$$\mathrm{B}_1 = C(5,4) = \binom{5}{4} = 5, \quad \mathrm{B}_2 = C(5,2) = \binom{5}{2} = 10$$

Άρα B=B_1xB_2=50. Επομένως X=A-B=120-50=70.

Θέμα 8^{ο} : [10 μονάδες]

Ο Παναγιώτης εργάζεται σε μία εταιρία στην οποία μπορεί να πάει με έναν από τρεις εναλλακτικούς τρόπους (α) με το αυτοκίνητό του, (β) με το λεωφορείο και (γ) με το τρένο. Επειδή έχει μεγάλη κίνηση, αν πάει με το αυτοκίνητό του, θα καθυστερήσει με πιθανότητα 50%. Αν χρησιμοποιήσει το λεωφορείο που κινείται σε συγκεκριμένο λεωφορειόδρομο, η πιθανότητα να καθυστερήσει είναι 20%. Το τρένο δεν καθυστερεί σχεδόν ποτέ, οπότε αν το χρησιμοποιήσει έχει πιθανότητα 1% να καθυστερήσει.

1. [5] Ο προϊστάμενος του Παναγιώτη δεν γνωρίζει τίποτε για το πως μετακινείται ο Παναγιώτης και επομένως θεωρεί ότι επιλέγει ένα από τα τρία μέσα μεταφοράς με ίση πιθανότητα. Δεδομένου ότι μια μέρα ο Παναγιώτης άργησε να πάει στη δουλειά του, βοηθείστε τον προϊστάμενό του να εκτιμήσει την πιθανότητα ο Παναγιώτης να χρησιμοποίησε το αυτοκίνητό του.
2. [5] Ένας συνεργάτης του Παναγιώτη γνωρίζει ότι ο Παναγιώτης δεν χρησιμοποιεί ποτέ λεωφορείο, ότι συνήθως (στο 90% των περιπτώσεων) χρησιμοποιεί το τρένο και ότι μερικές φορές (10% των περιπτώσεων) χρησιμοποιεί το αυτοκίνητό του. Πόσο εκτιμά ο συνεργάτης του Παναγιώτη την πιθανότητα ο Παναγιώτης να χρησιμοποίησε το αυτοκίνητό του δεδομένου ότι άργησε;

Λύση

Έστω τα εξής ενδεχόμενα

K={Ο Παναγιώτης καθυστερεί να πάει στην δουλειά του}

A={Ο Παναγιώτης χρησιμοποιεί αυτοκίνητο για να πάει στη δουλειά του}

Λ={Ο Παναγιώτης χρησιμοποιεί λεωφορείο για να πάει στη δουλειά του}

T={Ο Παναγιώτης χρησιμοποιεί τρένο για να πάει στη δουλειά του}

Τα δεδομένα του προβλήματος μας παρέχουν τις εξής δεσμευμένες πιθανότητες:

P(K|A)=0.5 (πιθανότητα να καθυστερήσει δεδομένου ότι χρησιμοποιεί αυτοκίνητο...)

P(K|Λ)=0.2 (πιθανότητα να καθυστερήσει δεδομένου ότι χρησιμοποιεί λεωφορείο...)

P(K|T)=0.01 (πιθανότητα να καθυστερήσει δεδομένου ότι χρησιμοποιεί τρένο...)

Και στα δύο ερωτήματα του θέματος ζητάμε την πιθανότητα P(A|K), δηλαδη την πιθανότητα ο Παναγιώτης να χρησιμοποίησε αυτοκίνητο, δεδομένου ότι καθυστέρησε.

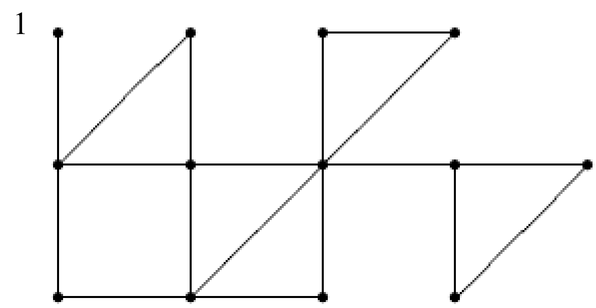
Με βάση το νόμο του Bayes, γνωρίζουμε ότι

$$P(A|K)=\frac{P(A\cap K)}{P(K)}=\frac{P(K|A)P(A)}{P(K)}=\frac{P(K|A)P(A)}{P(\mathrm{K}|\mathrm{A})P(\mathrm{A})+P(\mathrm{K}|\Lambda)P(\Lambda)+P(K|T)P(T)} \quad (1)$$

1. Ο προϊστάμενος του Παναγιώτη δεν γνωρίζει τίποτε για το πως μετακινείται ο Παναγιώτης και θεωρεί ότι το κάθε μέσο μεταφοράς επιλέγεται με ίση πιθανότητα, δηλαδή P(A)=P(Λ)=P(T)=1/3. Η αντικατάσταση των δεδομένων στη σχέση (1) μας δίνει:
$$P(A|K)=\frac{0.5\cdot 0.33}{0.5\cdot 0.33+0.2\cdot 0.33+0.01\cdot 0.33}=\frac{0.50}{0.5+0.2+0.01}=0.7042$$
Άρα, ο προϊστάμενος του Παναγιώτη εκτιμά ότι ο Παναγιώτης χρησιμοποίησε αυτοκίνητο με πιθανότητα 70.42%.
2. Ο συνάδελφος του Παναγιώτη γνωρίζει τις συνήθειες του Παναγιώτη και έτσι γνωρίζει τις πιθανότητες P(A)=0.1, P(Λ)=0.0 και P(T)=0.9. Η αντικατάσταση αυτών των δεδομένων στη σχέση (1) μας δίνει:
$$P(A|K)=\frac{0.5\cdot 0.1}{0.5\cdot 0.1+0.2\cdot 0.0+0.01\cdot 0.90}=\frac{0.05}{0.05+0.009}=0.8474$$
Άρα, ο προϊστάμενος του Παναγιώτη εκτιμά ότι ο Παναγιώτης χρησιμοποίησε αυτοκίνητο με πιθανότητα 84.74%.

Θέμα 9^{ο} : [10 μονάδες]

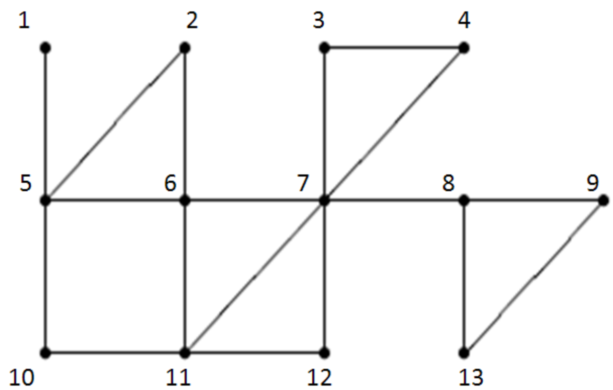
1. [2] Έχει ο παρακάτω γράφος μονοπάτι Euler; Αν ναι, αριθμείστε τους κόμβους για να πείτε ποιό είναι αυτό το μονοπάτι. Αν όχι, δικαιολογείστε την απάντησή σας.
2. [2] Έχει ο παρακάτω γράφος κύκλωμα Euler; Αν ναι, αριθμείστε τους κόμβους για να πείτε ποιό είναι αυτό το κύκλωμα. Αν όχι, δικαιολογείστε την απάντησή σας.



3. [3] Δώστε ένα παράδειγμα γράφου που να έχει κύκλωμα Euler αλλά να μην έχει κύκλωμα Hamilton.
4. [3] Δώστε ένα παράδειγμα γράφου που να έχει κύκλωμα Hamilton αλλά να μην έχει κύκλωμα Euler.

Λύση

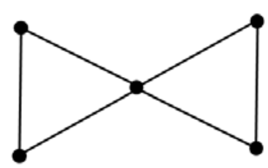
1.



Έστω η αρίθμηση που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Ο γράφος έχει μονοπάτι Euler, γιατί έχει ακριβώς δύο κόμβους περιττού βαθμού, τους (1) και (8). Υπάρχουν πολλά μονοπάτια Euler, αλλά σε καθένα από αυτά ο αρχικός και ο τελικός κόμβος θα είναι αναγκαστικά ένας από τους {1,8}. Παράδειγμα ενός Euler μονοπατιού είναι το 1, 5, 10, 11, 6, 5, 2, 6, 7, 11, 12, 7, 3, 4, 7, 8, 13, 9, 8.

2. Όχι, ο γράφος αυτός δεν έχει κύκλωμα Euler. Για να έχει, θα έπρεπε όλοι οι κόμβοι του να έχουν άρτιο βαθμό, αλλά όπως είδαμε στο ερώτημα (1), υπάρχουν δύο κόμβοι περιττού βαθμού.

3. Υπαρχουν πολλοί τέτοιοι γράφοι. Παράδειγμα φαίνεται παρακάτω:



4. Υπαρχουν πολλοί τέτοιοι γράφοι. Παράδειγμα φαίνεται παρακάτω: