ΗΥ180 – Λογική
Εαρινό Εξάμηνο 2017
2η Σειρά Ασκήσεων
Προτεινόμενες Λύσεις

1. [25 μονάδες] Αποδείξτε με χρήση της μορφολογικής παραγωγής την εγκυρότητα των ακόλουθων εξαγωγών συμπερασμάτων ή θεωρημάτων:

(α) [10 μονάδες] {P ∧ Q → ¬R, S → R, Q, S } / ¬P

1. P ∧ Q → ¬R (Υπόθεση Παραγωγής)
2. S → R (Υπόθεση Παραγωγής)
3. Q (Υπόθεση Παραγωγής)
4. S (Υπόθεση Παραγωγής)
5. R (από 2, 4 και απάλοιφή →)
6. Υποπαραγωγή
    - 6.1. P (Υπόθεση Υποπαραγωγής)
    - 6.2. P ∧ Q (από 3, 6.1 και εισαγωγή ∧)
    - 6.3. ¬R (από 6.1, 1 και απαλοιφή →)
    - 6.4. R (από 5 και επανάληψη)
7. ¬P (από 6 και εισαγωγή ¬)

(β) [15 μονάδες] / (P → Q) ↔ (¬P ∨ Q)

1. Υποπαραγωγή
    - 1.1. P → Q (Υπόθεση Υποπαραγωγής)
    - 1.2. P ∨ ¬ P(Θεώρημα)
    - 1.3. Υποπαραγωγή
        - 1.3.1. P (Υπόθεση Υποπαραγωγής)
        - 1.3.2. Q (από 1.1, 1.3.1 και απαλοιφή →)
        - 1.3.3. ¬P ∨ Q (από 1.3.2 και εισαγωγή ∨ αριστερά)
    - 1.4. Υποπαραγωγή
        - 1.4.1. ¬ P (Υπόθεση Υποπαραγωγής)
        - 1.4.2. ¬P ∨ Q (από 1.3.2 και εισαγωγή ∨ δεξιά)
    - 1.5. ¬P ∨ Q (από 1.2, 1.3, 1.4 και απαλοιφή ∨)
2. Υποπαραγωγή
    - 2.1. ¬P ∨ Q (Υπόθεση Υποπαραγωγής)
    - 2.2. Υποπαραγωγή
        - 2.2.1. P (Υπόθεση Υποπαραγωγής)
        - 2.2.2. Υποπαραγωγή
            - 2.2.2.1. ¬P (Υπόθεση Υποπαραγωγής)
            - 2.2.2.2. Υποπαραγωγή
                - 2.2.2.2.1. ¬Q (Υπόθεση Υποπαραγωγής)

2.2.2.2.2. P (από 2.2.1 και επανάληψη)
2.2.2.2.3. ¬P (από 2.2.2.1 και επανάληψη)
2.2.2.3. Q (από 2.2.2.2 και εισαγωγή ¬)
2.2.3. Υποπαραγωγή
2.2.3.1. Q (Υπόθεση Υποπαραγωγής)
2.2.3.2. Q (από 2.2.3.1 και επανάληψη)
2.2.4. Q (από 2.2., 2.3 και απαλοιφή ∨)
2.3. P → Q (από 2.2.και εισαγωγή →)
3. (P → Q) ↔ (¬P ∨ Q) (από 1,2 και εισαγωγή ↔)

Σημείωση: Τα βήματα 2.2.2, 2.2.3 θα μπορούσαν να αντικατασταθούν και με χρήση του κανόνα απαλοιφής ¬ 2.

2. [20 μονάδες] Εξετάστε αν οι ακόλουθες εξαγωγές συμπεράσματος είναι έγκυρες χρησιμοποιώντας τη μέθοδο κατασκευής μοντέλων

(α) {¬P → Q, Q →P, P → (R ^ S)} / P ^ R ^ S

Ελέγχουμε την ικανοποιησιμότητα του συνόλου S= {¬P → Q, Q →P, P → (R ^ S),¬(P ^ R ^ S)}

C_0 ={{¬P → Q, Q →P, P → (R ^ S),¬(P ^ R ^ S)}}.
C_1 ={{¬¬P, Q →P, P → (R ^ S),¬(P ^ R ^ S)},{Q, Q →P, P → (R ^ S),¬(P ^ R ^ S)}} Από [→].
C_2 ={{P, Q →P, P → (R ^ S),¬(P ^ R ^ S)},{Q, Q →P, P → (R ^ S),¬(P ^ R ^ S)}} Από[¬¬].
C_3 ={{P, ¬Q, P → (R ^ S),¬(P ^ R ^ S)},{P, P, P → (R ^ S),¬(P ^ R ^ S)},
{Q, ¬Q, P → (R ^ S),¬(P ^ R ^ S)}, {Q, P, P → (R ^ S),¬(P ^ R ^ S)}}.Από [→].
C_4 ={{P, ¬Q, P → (R ^ S),¬(P ^ R ^ S)},{P, P → (R ^ S),¬(P ^ R ^ S)},
{Q, P, P → (R ^ S),¬(P ^ R ^ S)}}.Από [del].
C_5 ={{P, ¬Q, ¬P,,¬(P ^ R ^ S)}, {P, ¬Q, R ^ S,¬(P ^ R ^ S)}, {P, ¬P,¬(P ^ R ^ S)},
{P, R ^ S,¬(P ^ R ^ S)},{Q, P, ¬P ,¬(P ^ R ^ S)}, {Q, P, R ^ S,¬(P ^ R ^ S)}}.Από [→].
C_6 ={{P, ¬Q, R ^ S,¬(P ^ R ^ S)},{P, R ^ S,¬(P ^ R ^ S)},{Q, P, R ^ S,¬(P ^ R ^ S)}}.Από [del].
C_7 ={{P, ¬Q, R, S,¬(P ^ R ^ S)},{P, R, S,¬(P ^ R ^ S)}, {Q, P, R, S,¬(P ^ R ^ S)}}. Από [^].

¬(P ^ R ^ S) == ¬(P ^ (R ^ S)) οπότε:
C_8 ={{P, ¬Q, R, S,¬P}, {P, ¬Q, R, S,¬(R ^ S)}, {P, R, S,¬P}, {P, R, S,¬(R ^ S)},
{Q, P,R,S,¬P},{Q, P, R, S,¬(R ^ S)}}.Από [¬^].
C_9 ={{P, ¬Q, R, S,¬(R ^ S)}, {P, R, S,¬(R ^ S)}, {Q, P, R, S,¬(R ^ S)}}.Από[del].
C_{10} ={{P, ¬Q, R, S,¬R},{P, ¬Q, R, S,¬S}, {P, R, S,¬R}, {P, R, S,¬S},{Q, P, R, S,¬R},
{Q, P, R, S,¬S}}. Από [¬^].
C_{11} ={} Από [del.]

Δεν υπάρχει μοντέλο του S, οπότε είναι μη-ικανοποιήσιμο και άρα η εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη.

(β) / ((P ∨ Q) → R) → ((P→R) ^ (Q→R))

Ελέγχουμε την ικανοποιησιμότητα του συνόλου S= {¬(((P ∨ Q) → R) → ((P→R) ^ (Q→R)))}.

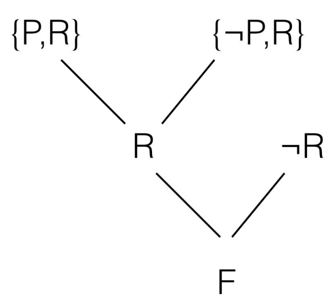
C_0= {{¬(((P ∨ Q) → R) → ((P→R) ^ (Q→R)))}}.
C_1= {{ (P ∨ Q) → R, ¬((P→R) ^ (Q→R)) }}. Από [¬→]
C_2= {{ ¬(P ∨ Q), ¬((P→R) ^ (Q→R)) },{ R, ¬((P→R) ^ (Q→R)) }}. Από [→]
C_3= {{ ¬P, ¬Q, ¬((P→R) ^ (Q→R)) },{ R, ¬((P→R) ^ (Q→R)) }}. Από [¬∨]
C_4= {{ ¬P, ¬Q, ¬(P→R)},{ ¬P, ¬Q, ¬(Q→R)},{ R, ¬(P→R)},{ R, ¬(Q→R)}}. Από [¬^]
C_5= {{ ¬P, ¬Q, P, ¬R)},{ ¬P, ¬Q, Q, ¬R)},{ R,P,¬R)},{ R, Q ¬R}}. Από [¬→]
C_6={}. Από [del].

Δεν υπάρχει μοντέλο του S, οπότε είναι μη-ικανοποιήσιμο και άρα η εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη.

3. **[15 μονάδες] (a) [10 μονάδες} Κατασκευάστε το δέντρο ανασκευής για το παρακάτω σύνολο όρων. Είναι όροι Horn; Υπάρχει και ακολουθία ανασκευής για το ίδιο σύνολο; Αν ναι, δείξτε την. Επίσης προσδιορίστε μία έγκυρη εξαγωγή συμπεράσματος η οποία προκύπτει από τη μη-ικανοποιησιμότητα αυτού του συνόλου.**

S= { {P,Q}, {P,R}, {¬P, R}, {¬Q, R}, {R, S}, {¬S ¬Q }, ¬R}

Ένα δέντρο ανασκευής είναι το παρακάτω:



Δεν είναι όλοι οι όροι του συνόλου Horn, καθώς περιέχουν παραπάνω από ένα θετικά γράμματα π.χ. {P,Q}, {P,R}, {R, S}.

Από το δέντρο παρατηρούμε ότι δεν έχουμε επίλυση όπου και οι δύο όροι να έχουν προκύψει από προηγούμενες επιλύσεις, συνεπώς υπάρχει ακολουθία ανασκευής και είναι η εξής:

$$\{P,R\} \xrightarrow{\{\neg P,R\}} R \xrightarrow{\neg R} F$$

Μία έγκυρη εξαγωγή συμπεράσματος που προκύπτει είναι:

{ {P,Q}, {P,R}, {¬P, R}, {¬Q, R}, {R, S}, {¬S ¬Q }} / R

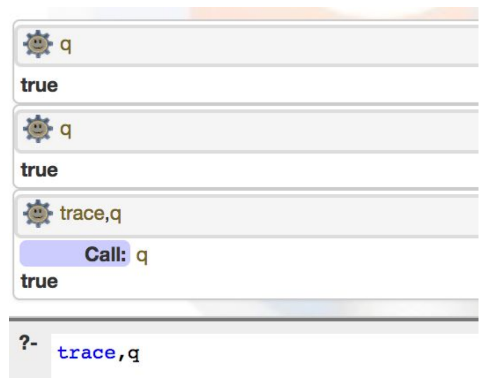
(b) [5 μονάδες] Γράψτε ένα πρόγραμμα σε Prolog για να ελέγξετε αν η πρόταση Q είναι λογική συνέπεια των υποθέσεων:

$$\{ P \rightarrow Q,\ R \wedge S \rightarrow P,\ U \wedge R \rightarrow S,\ V \wedge P \rightarrow R,\ V \wedge U \rightarrow R\ U,\ V\}.$$

Θα πρέπει να παραδώσετε το πρόγραμμα και την εκτέλεση της ερώτησης.

Μια προτεινόμενη λύση είναι η εξής:

```
q:-p.

p:-r,s.

s:-u,r.

r:-v,u.

r:-v,p.

u.

v.
```



Σχόλια: Για την κλήση του q απαιτείται η κλήση του p οπότε η prolog βλέπει την σειρά που πρέπει να κληθούν και προχωράει στο να ελέγξει το p. Όμοια για το p για να καταλήξουμε σε κάποιο συμπέρασμα για το p πρέπει να βρούμε το r και το s. Το r εξαρτάται όμως από τα v και u. Συνεπώς σε κάθε στάδιο η prolog δημιουργεί νέες κλήσεις κανόνων μέχρι το ποιο χαμηλό επίπεδο προκειμένου να αποτιμηθούν σε true ή false και να δώσουν κάποιο αποτέλεσμα προς τα πίσω.

4. [20 μονάδες] Εξετάστε αν οι εξαγωγές συμπεράσματος της ερώτησης 2 είναι έγκυρες χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της επίλυσης.

(α) $\{\neg P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow P,\ P \rightarrow (R \wedge S)\} \,/\, P \wedge R \wedge S \equiv$

$\{\neg P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow P,\ P \rightarrow (R \wedge S),\ \neg(P \wedge R \wedge S)\} \equiv$

$\{\neg(\neg P) \vee Q,\ \neg Q \vee P,\ \neg P \vee (R \wedge S),\ \neg P \vee \neg R \vee \neg S\} \equiv$

$\{P \vee Q,\ \neg Q \vee P,\ (\neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee S),\ \neg P \vee \neg R \vee \neg S\} \equiv$

$\{\{P, Q\},\ \{\neg Q, P\},\ \{\neg P, R\},\ \{\neg P, S\},\ \{\neg P, \neg R, \neg S\}\}$

Άρα έχουμε το εξής σύνολο όρων:
$S = \{ \{P , Q\} , \{\neg Q , P\} , \{\neg P , R\} , \{ \neg P , S\}, \{\neg P , \neg R , \neg S \} \}$

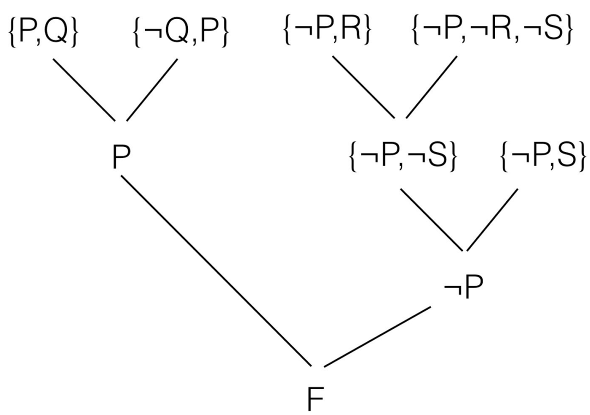
Σχηματίζουμε όρους επίλυσης από τους παραπάνω όρους

$res(\{P,Q\} , \{\{\neg Q , P\}) = P$
$res(\{\neg P , R\} , \{\neg P , \neg R , \neg S \}) = \{\neg P , \neg S\}$
$res(\{\neg P , \neg S\} , \{ \neg P , S\}) = \neg P$

Σύμφωνα με την αρχή της επίλυσης, το σύνολο R(S), που αποτελείται από τους όρους του S συν τους παραπάνω όρους επίλυσης, είναι το εξής:

$R(S) = \{ \{P , Q\} , \{\neg Q , P\} , \{\neg P , R\} , \{ \neg P , S\}, \{\neg P , \neg R , \neg S \} , \{\neg P , \neg S\} , P , \neg P\}$

Το σύνολο R(S) είναι μη ικανοποιήσιμο, αφού δε μπορεί να είναι ταυτόχρονα αληθείς η P και η ¬P. Άρα σύμφωνα με τη αρχή της επίλυσης και το αρχικό σύνολο S είναι μη ικανοποιήσιμο. Εναλλακτικά, μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη διαδικασία με το παρακάτω δέντρο επίλυσης:



(β) / $((P \vee Q) \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)) \equiv$

$\neg(\neg((P \vee Q) \rightarrow R) \vee ((P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R))) \equiv$
$\neg(\neg(\neg(P \vee Q) \vee R) \vee ((\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R))) \equiv$
$\neg(\neg((\neg P \wedge \neg Q) \vee R) \vee ((\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R))) \equiv$
$\neg\neg((\neg P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge \neg((\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)) \equiv$
$((\neg P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge (\neg(\neg P \vee R) \vee \neg(\neg Q \vee R)) \equiv$
$((\neg P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge ((\neg\neg P \wedge \neg R) \vee (\neg\neg Q \wedge \neg R)) \equiv$
$((\neg P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge ((P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R)) \equiv$
$(\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg R) \wedge (\neg R \vee Q) \wedge \neg R \equiv$
$(\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q) \wedge \neg R \equiv$

Άρα έχουμε το εξής σύνολο όρων:
S = { {¬P , R } , {¬Q , R} , {P , Q} , ¬R}

Σχηματίζουμε όρους επίλυσης από τους παραπάνω όρους

res({¬P , R} , ¬R) = ¬P
res({¬Q , R} , { P , Q}) = {P,R}
res(¬P , {P,R}) = R

Σύμφωνα με την αρχή της επίλυσης, το σύνολο R(S), που αποτελείται από τους όρους του S συν τους παραπάνω όρους επίλυσης, είναι το εξής:

R(S) = { {¬P , R } , {¬Q , R} , {P , Q} , ¬R, R, ¬P, {P,R}}

Το σύνολο R(S) είναι μη ικανοποιήσιμο, αφού δε μπορεί να είναι ταυτόχρονα αληθείς η R και η ¬R. Άρα σύμφωνα με τη αρχή της επίλυσης και το αρχικό σύνολο S είναι μη ικανοποιήσιμο. Εναλλακτικά, μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη διαδικασία με το παρακάτω δέντρο επίλυσης: