ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ

Α.Μ. Εξάμηνο Περίοδος

Εξεταζόμενο Μάθημα

Ημερομηνία

Ονοματεπώνυμο

Άσκηση 1 (2.2.3) (Παραλλαγή)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1 \leftrightarrow 2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2 \cdot r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Βασικές μεταβλητές: x_1, x_2, x_3
Ελεύθερες μεταβλητές: x_4
Τάξη του πίνακα: 3

$x_3 - 2x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 2x_4$
$x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -6x_4$
$x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 6x_4 - 2x_4 = 4x_4$

$$x = \begin{bmatrix} 4x_4 \\ -6x_4 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- x_4 αυθαίρετες τιμές
- Οι βασικές μεταβλητές προσδιορίζονται από αυτές

Άσκηση 2 (2.2.7)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - 2 \cdot b_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - 2b_1 - 3b_2 \end{bmatrix}$$

Πρέπει $b_3 - 2b_1 - 3b_2 = 0$

- Καμία ελεύθερη μεταβλητή
- Τάξη 2
- Άπειρες λύσεις

Άσκηση 3 (2.2.9)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

- Δεν υπάρχουν περιορισμοί στα b

α) Βασικές μεταβλητές x_1, x_4

$x_4 = 0$

$x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2 \qquad x = x_2 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Ειδική λύση: μηδενίζουμε τις ελεύθερες μεταβλητές

$x_4 = b_2 - 2b_1$

$x_1 + 2x_2 + 3x_4 = b_1 \Rightarrow x_1 = b_1 - 3x_4 = b_1 - 3b_2 + 6b_1 = 7b_1 - 3b_2$

$$x_{\text{ειδική}} = \begin{bmatrix} 7b_1 - 3b_2 \\ 0 \\ 0 \\ b_2 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

$$x_{\text{γενική}} = \begin{bmatrix} 7b_1 - 3b_2 \\ 0 \\ 0 \\ b_2 - 2b_1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 4 (2.3.9) (Παραλλαγή)

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R(U) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$ Χώρος στηλών

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{γραμμικά εξαρτημένες} \quad R(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \neq R(U)$$

Άσκηση 5 (2.3.13)

1) $x_1+v_2+v_3+v_4=0 \rightarrow v_4=+v_1-v_2-v_3$

$$v = v_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix} + v_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix} + v_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

Γραμμικά ανεξάρτητα

Διάσταση του χώρου 3

2) $$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Μοναδική λύση $x_1=x_2=x_3=x_4=0$

Μηδενική διάσταση του μηδενοχώρου

- Διάσταση μηδενοχώρου: $n-r = 4-4=0$

3) Διάσταση 16 (4×4 πίνακας $\leftrightarrow$ 16×1 διάνυσμα)

Βάση: 16 πίνακες με έναν άσσο και όλα μηδενικά

Άσκηση 6 (2.4.3) (Παραλλαγή)

α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Rank: 2 $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$R(A^T) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ Διάσταση 2

$x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_3$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_3 - x_4$

$x = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$R(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ $L^{-1} \cdot P = L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $N(A^T) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

β) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -11 \end{bmatrix}$ $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$R(A^T) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ -11 \end{bmatrix} \right\}$ $R(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$-8x_2 - 11x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{11}{8} x_3$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{11}{4} x_3 - 3x_3 = -\frac{1}{4} x_3$

$N(A^T) = \left\{ \cancel{\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}$ $N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -1/4 \\ -11/8 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Λάθος: είναι κενός (διάσταση 0)

γ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$R(A^T) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad R(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$x_2 = 0$

$x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3 \quad N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad N(A^T) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Άσκηση 7 (2.4.9)

$\text{Rank}(A) = \min(n, m)$

Στήλες του A γραμμικά ανεξάρτητες

Άσκηση 8 (2.32)

$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6$

α) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Downarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow X = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

β) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

γ) $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$