Χειμερινό Εξάμηνο
Ακαδημαϊκό Έτος 2009-2010

Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-110 Απειροστικός Λογισμός Ι
Διδάσκων: Θ. Μουχτάρης
Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1η: Υπολογισμός αόριστων ολοκληρωμάτων.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

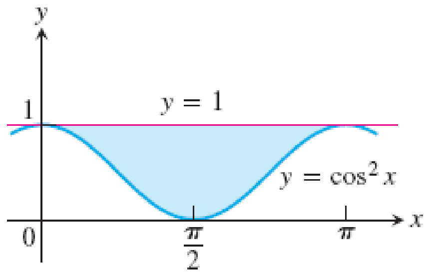
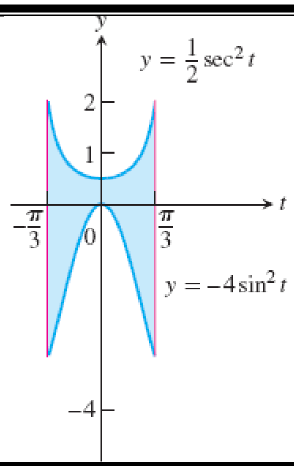
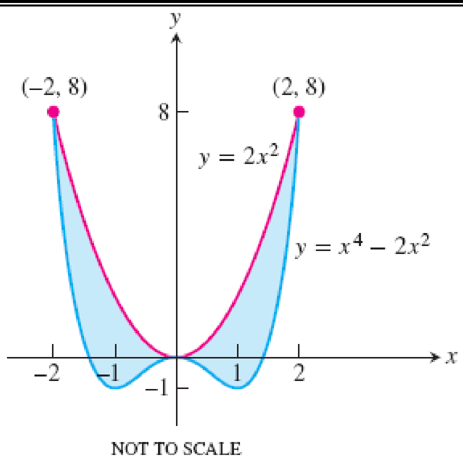
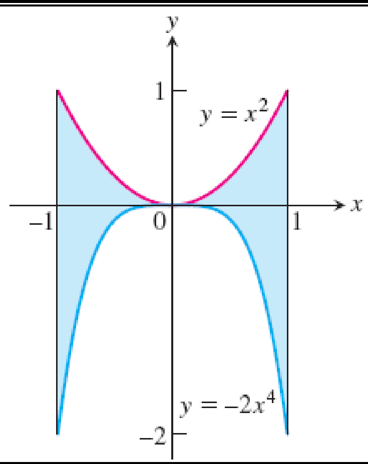
1. $\int (x^3 + 5x - 7)dx$
2. $\int \left(3\sqrt{t} + \frac{4}{t^2}\right) dt$
3. $\int \frac{r\,dr}{(r^2+5)^2}$
4. $\int 3\theta\sqrt{2-\theta^2}d\theta$
5. $\int x^3(1+x^4)^{-1/4}dx$
6. $\int \sec^2 \frac{s}{10} ds$
7. $\int \csc\sqrt{2\theta}\ \cot\sqrt{2\theta}\ d\theta$
8. $\int \sin^{-2} \frac{4}{x} dx$
9. $\int 2(\cos x)^{-1/2} \sin x\, dx$
10. $\int \left(t - \frac{2}{t}\right)\left(t + \frac{2}{t}\right) dt$

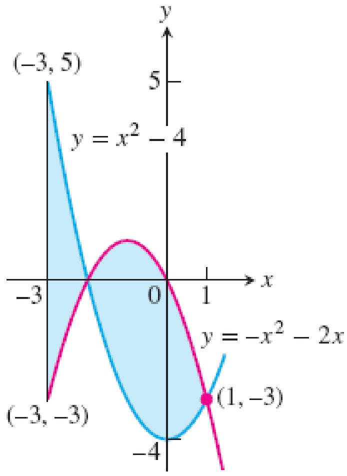
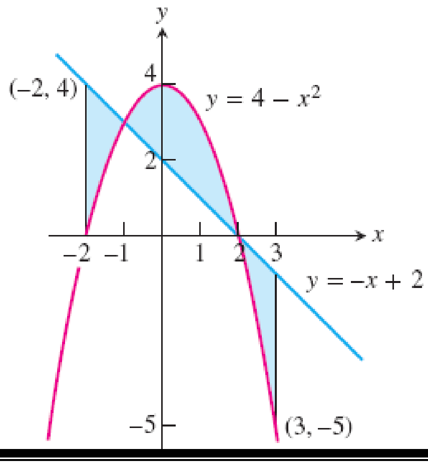
Άσκηση 2η: Χρήση των κανόνων για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων από ήδη γνωστά μας ολοκληρώματα.

1. Αν $\int_{-2}^{2} 3f(x)dx = 12$, $\int_{-2}^{5} f(x)dx = 6$ και $\int_{-2}^{5} g(x)dx = 2$, υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:
   a. $\int_{-2}^{2} f(x)dx$
   b. $\int_{2}^{5} f(x)dx$
   c. $\int_{5}^{-2} g(x)dx$
   d. $\int_{-2}^{5}(-\pi g(x))dx$
   e. $\int_{-2}^{5}(\frac{f(x)+g(x)}{5})dx$
2. Αν $\int_{0}^{2} f(x)dx = \pi$, $\int_{0}^{2} 7g(x)dx = 7$ και $\int_{0}^{1} g(x)dx = 2$, υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα
   a. $\int_{0}^{2} g(x)dx$
   b. $\int_{1}^{2} g(x)dx$
   c. $\int_{2}^{0} f(x)dx$
   d. $\int_{0}^{2} \sqrt{2}f(x)dx$
   e. $\int_{0}^{2}(g(x) - 3f(x))dx$

Άσκηση 3η: Εμβαδόν

Βρείτε τα εμβαδά των σκιασμένων περιοχών στα σχήματα 1-6

<table>
<tr><td>Σχήμα 1</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Σχήμα 2</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Σχήμα 3</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Σχήμα 4</td><td>
</td></tr>
</table>

Σχήμα 5	
Σχήμα 6	

Άσκηση 4η: Προβλήματα αρχικών τιμών.

1. Δείξτε ότι η $y = x^2 + \int_1^x \frac{1}{t} dt$ αποτελεί λύση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - \frac{1}{x^2}, y'(1) = 3, y(1) = 1$$

2. Δείξτε ότι η $y = \int_0^x (1 + 2\sqrt{\sec t})dt$ αποτελεί λύση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{\sec x} \tan x \, , y'(0) = 3, y(0) = 0$$

Άσκηση 5η: Όγκοι.

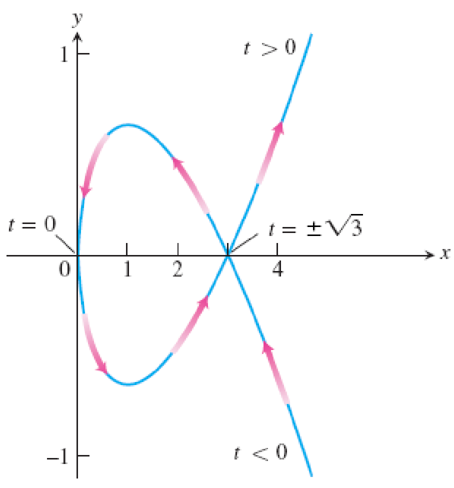
Βρείτε τους όγκους των στερεών στα ερωτήματα 1-3:

1. Το στερεό κείται μεταξύ κάθετων στον άξονα x στα σημεία $x = 0$και $x = 4$. Οι κάθετες στον άξονα x διατομές του στερεού είναι κυκλικοί δίσκοι με διαμέτρους που εκτείνονται από την καμπύλη $x^2 = 4y$ έως την καμπύλη $y^2 = 4x$.
2. Βάση του στερεού είναι η περιοχή που φράσσεται από την παραβολή $y^2 = 4x$ και την ευθεία $x = 1$ στο επίπεδο xy. Οι κάθετες στον άξονα x διατομές του στερεού είναι ισόπλευρα τρίγωνα με μία ακμή στο επίπεδο. (Όλα τα τρίγωνα κείνται στην ίδια πλευρά του επιπέδου.
3. Δίδεται το «τριγωνικό» χωρίο που φράσσεται από την καμπύλη $y = \frac{4}{x^3}$ και τις ευθείες $x = 1$ και $y = \frac{1}{2}$. Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε το χωρίο ως προς:
    a. τον άξονα x
    b. τον άξονα y
    c. την ευθεία $x = 2$
    d. την ευθεία $y = 4$

Άκσηση 6η: Μήκη καμπυλών.

Βρείτε τα μήκη των καμπυλών στα παρακάτω ερωτήματα

1. $x = 5\cos t - \cos 5t\,, y = 5\sin t - \sin 5t\,, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
2. $x = t^2, y = 2t, 0 \le t \le 1$
3. $x = 3\cos\theta, y = 3\sin\theta\,, 0 \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$
4. Βρείτε το μήκος του βρόχου που σχηματίζεται από τις καμπύλες $x = t^2, y = \left(\frac{t^3}{3}\right) - t$ που φαίνονται στο σχήμα 1. Ο βρόχος να ξεκινά στο σημείο $x = -\sqrt{3}$ και τελειώνει στο $t = \sqrt{3}$



Σχήμα 1: Το σχήμα για την άσκηση 6.4