Άσκηση 1 – Πρόοδος

1) PvQ |=A σημαίνει ότι P|=A ή Q |= A. Αλλά Q δεν ανήκει στο S. Άρα δε σημαίνει απαραίτητα ότι S|=A
2) (A -> B) v A ισοδυναμεί με (-A v B) v A ισοδυναμεί με -A v A v B ισοδυναμεί με T. Αφού έχουμε ένα σύνολο που είναι ικανοποιήσιμο, δηλαδή υπάρχει ερμηνεία που κάνει όλες τις προτάσεις αληθείς, αν προσθέσουμε το (A -> B) v A στο αρχικό σύνολο η ίδια ερμηνεία που κάνει αληθές το αρχικό σύνολο S:{A,B}, κάνει αληθές και το νέο σύνολο αφού η πρόταση αυτή είναι αληθής για κάθε ερμηνεία.

Λύσεις με πίνακα αληθείας απαιτούν και αιτιολόγηση σε τέτοιου είδους ασκήσεις.

Θέμα 2.

α) $\{\neg P \vee Q, \neg Q \vee R, P\} \,/\, R$.

(1) $\neg P \vee Q$ (Υπόθεση Παραγωγής)
(2) $\neg Q \vee R$ (Υπόθεση Παραγωγής)
(3) P (Υπόθεση Παραγωγής)
(4) Q (από (1), (3) και απαλοιφή άρνησης 2).
(5) R (από (2), (4) και απαλοιφή άρνησης 2).

β) $\{\neg R \vee (P \wedge Q)\} \,/\, (R \to P) \wedge (R \to Q)$

(1) $\neg R \vee (P \wedge Q)$ (Υπόθεση Παραγωγής)
(2) Υποπαραγωγή
  (2.1) R (υπόθεση Υποπαραγωγής)
  (2.2) $P \wedge Q$ (από (1), (2.1) και απαλοιφή άρνησης 2)
  (2.3) P (από (2.2) και απαλοιφή σύζευξης)
(3) $R \to P$ (από (2) και εισαγωγή συνεπαγωγής)
(4) Υποπαραγωγή
  (4.1) R. (Υπόθεση Υποπαραγωγής)
  (4.2) $P \wedge Q$ (από (1), (4.1) και απαλοιφή άρνησης 2)
  (4.3) Q (από (4.2) και απαλοιφή σύζευξης)
(5) $R \to Q$ (από (4) και εισαγωγή συνεπαγωγής).
(6) $(R \to P) \wedge (R \to Q)$ (από (3), (5) και εισαγωγή σύζευξης)

γ) $\vdash (P \vee Q) \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$ (Θεώρημα)

Πρέπει να αποδείξουμε θεώρημα οπότε ξεκινάμε με υποπαραγωγή

(1) Υποπαραγωγή
  (1.1) $P \vee Q$ (Υπόθεση Υποπαραγωγής)
  (1.2) Υποπαραγωγή
    (1.2.1) $\neg P$ (Υπόθεση Υποπαραγωγής)
    (1.2.2) Q (από (1.1), (1.2.1) και απαλοιφή άρνησης 2)
  1.3) $\neg P \rightarrow Q$. (από (1.2) και εισαγωγή συνεπαγωγής)
(2) $(P \vee Q) \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$ (από (1) και εισαγωγή συνεπαγωγής)

<u>ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 3</u>

$(P \to ((\neg Q \land R) \to S)) \lor ((\neg P \land Q) \lor (\neg R \to \neg S)) \equiv$ ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΩ $\to$

• Χρησιμοποιώ τις παρακάτω ισοδυναμίες για την αντικατάσταση των συνδετικών $\to$ και $\leftrightarrow$

$A \to B \equiv \neg A \lor B$

$A \leftrightarrow B \equiv (A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$

Άρα έχω:

$(P \to (\neg(\neg Q \land R) \lor S)) \lor ((\neg P \land Q) \lor (\neg\neg R \lor \neg S)) \equiv$ ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΩ $\to$

$(\neg P \lor (\neg(\neg Q \land R) \lor S)) \lor ((\neg P \land Q) \lor (R \lor \neg S)) \equiv$ ΚΑΝΟΝΑΣ DE MORGAN

$(\neg P \lor (Q \lor \neg R) \lor S) \lor (\neg P \land Q) \lor (R \lor \neg S) \equiv$

$\neg P \lor (Q \lor \neg R) \lor S \lor (\neg P \land Q) \lor R \lor \neg S \equiv$ ΜΕΤΑΘΕΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΟΥ $\lor$

$\neg P \lor (Q \lor \neg R) \lor \underbrace{S \lor \neg S}_{T \text{ (ταυτολογία)}} \lor (\neg P \land Q) \lor R \equiv$

$\neg P \lor (Q \lor \neg R) \lor T \lor (\neg P \land Q) \lor R \equiv$ ΑΠΟ ΚΑΝΟΝΑ ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗΣ $\boxed{S \lor T \equiv T}$

T Το T(ταυτολογία) είναι και σε <u>CNF</u> και σε <u>DNF</u> μορφή.