Γραμμική Άλγεβρα

Ανάλυση πίνακα σε ιδιάζουσες τιμές
Singular Value Decomposition (SVD)

Η ανάλυση σε ιδιάζουσες τιμές μπορεί να γίνει για οποιοδήποτε πίνακα, τετραγωνικό ή μη. Ας είναι A ένας πίνακας $m \times n$. Η ανάλυση είναι μια παραγοντοποίηση ως εξής

$$A = U\Sigma V^T, \quad \text{με} \quad U^T U = UU^T = \mathbf{I} \quad \text{και} \quad V^T V = VV^T = \mathbf{I},$$

όπου ο πίνακας Σ περιλαμβάνει τις ιδιάζουσες τιμές του A: $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$ των οποίων το πλήθος είναι ίσο με την τάξη r του πίνακα A. Οι ιδιάζουσες τιμές είναι όλες θετικές. Ο πίνακας U είναι $m \times m$, ο πίνακας V είναι $n \times n$ και ο πίνακας Σ είναι $m \times n$. Πιο συγκεκριμένα ο τελευταίος πίνακας χωρίζεται σε μπλοκ ως εξής

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_+ & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r)\times r} & \mathbf{0}_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}, \quad \text{με} \quad \Sigma_+ = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix}.$$

Για την εύρεση των U, V και Σ απαιτείται η εύρεση των χαρακτηριστικών μεγεθών των πινάκων $A^T A$ και AA^T. Θα έχουμε

$$A^T A = V\Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V\Sigma^T \Sigma V^T.$$

Με δοσμένο ότι ο πίνακας $A^T A$ είναι συμμετρικός, ο πίνακας V περιλαμβάνει τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A^T A$ και ο διαγώνιος πίνακας $\Sigma^T \Sigma$ περιλαμβάνει τις ιδιοτιμές του. Θα είναι πιο συγκεκριμένα

$$\Sigma^T \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_+^2 & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r)\times r} & \mathbf{0}_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}, \quad \text{με} \quad \Sigma_+^2 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r^2 \end{bmatrix}.$$

Άρα ο πίνακας Σ_+ περιλαμβάνει τις θετικές ρίζες των ιδιοτιμών του $A^T A$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι ο πίνακας U περιλαμβάνει τα ιδιοδιανύσματα του AA^T.

Ακολουθούν παραδείγματα ανάλυσης πινάκων που είτε είναι ιδιόμορφοι, είτε δεν είναι τετραγωνικοί.

Παράδειγμα 1.1. Δίδεται ένας ιδιόμορφος πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Θα είναι

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Οπότε βρίσκουμε

$$A = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 1.2. Θεωρούμε ένα πίνακα στήλη $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Θα είναι

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Οπότε βρίσκουμε

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 1.3. Θεωρούμε ένα πίνακα γραμμή $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$. Θα είναι

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad AA^T = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}.$$

Οπότε βρίσκουμε

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Με βάση την παραγοντοποίηση ο πίνακας μπορεί να αναλυθεί χρησιμοποιώντας τις ιδιάζουσες τιμές ως εξής

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T,$$

όπου $\mathbf{u}_i$ είναι οι στήλες του U και $\mathbf{v}_i$ είναι οι στήλες του V. Σε συνέχεια αυτού του αναπτύγματος μπορεί να ευρεθεί ο γενικευμένος αντίστροφος του πίνακα

$$A^{\#} = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T.$$

Ο γενικευμένος αντίστροφος μπορεί επίσης να γραφεί ως εξής

$$A^{\#} = V \Sigma^{\#} U^T, \quad \text{με} \quad \Sigma^{\#} = \begin{bmatrix} \Sigma_+^{-1} & \mathbf{0}_{r \times (m-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & \mathbf{0}_{(n-r) \times (m-r)} \end{bmatrix}$$

Η γενικευμένη επομένως επίλυση του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ δίδει

$$\mathbf{x}^{\#} = A^{\#}\mathbf{b} = V \Sigma^{\#} U^T \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{r} \frac{b_i}{\sigma_i} \mathbf{v}_i.$$

Άρα με τη γενικευμένη έννοια το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει πάντοτε μία λύση. Αν ο αριθμός των εξισώσεων είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των αγνώστων, και ο πίνακας $A^T A$ είναι αντιστρέψιμος, τότε πρόκειται για τη λύση των ελαχίστων τετραγώνων. Αν ο αριθμός των πραγματικών εξισώσεων είναι μικρότερος από τον αριθμό των αγνώστων, τότε επιλέγεται μεταξύ των λύσεων εκείνη που έχει το ελάχιστο μέτρο.

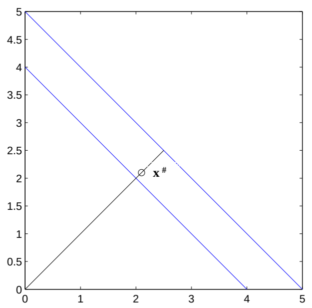
Δίδονται στη συνέχεια οι γενικευμένες λύσεις στα γραμμικά συστήματα των παραπάνω παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 2.1. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε προς λύση το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Οι δύο εξισώσεις είναι ασύμβατες, δηλαδή δύο παράλληλες ευθείες στο επίπεδο, και με τη γενικευμένη λύση βρίσκουμε

$$\mathbf{x}^{\#} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 21 \\ 21 \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 1: Γραφική αναπαράσταση των εξισώσεων του Παραδείγματος 2.1.

Παράδειγμα 2.2. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε προς λύση το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Πάλι έχουμε δύο ασύμβατες εξισώσεις και βρίσκουμε

$$x^{\#} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 11 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων δίδει ακριβώς την ίδια λύση.

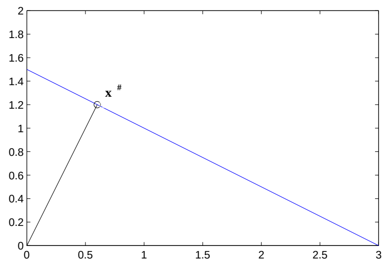
Παράδειγμα 2.3. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε προς λύση το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 3.$$

Βρίσκουμε

$$\mathbf{x}^{\#} = \frac{3}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{3}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Σε αυτό το παράδειγμα έχουμε μία εξίσωση με δύο άγνωστες. Μεταξύ των άπειρων λύσεων, δηλαδή μια ολόκληρη ευθεία, η γενικευμένη λύση είναι αυτή με το ελάχιστο μέτρο.



Σχήμα 2: Γραφική επίλυση της εξίσωσης του Παραδείγματος 2.3.