Λύσεις 3^{ης} Σειράς Ασκήσεων

Ζήτημα 1ο

a) $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$

Θέλουμε να δείξουμε ότι το σύνολο:
S= $\{\neg ((P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P))\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμο.

$C_0 = \{\{\neg ((P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P))\}\}$

$C_1 = \{\{(P \to Q)\}, \{\neg(\neg Q \to \neg P)\}\}$ [¬ →]

$C_2 = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg(\neg Q \to \neg P)\}\}$ [→]

$C_3 = \{\{\neg P, Q\}, \neg Q, P\}$ [¬ →]

$C_4 = \{\{P, \neg Q, Q\}, \{P, \neg Q, \neg P\}\}$ [∨]

$C_5 = \{\{P, \neg Q, Q\}\}$ [del]

$C_6 = \{\ \}$ [del]

Το C_6 είναι κενό σύνολο, άρα το S είναι μη - ικανοποιήσιμο.

b) $\{(A \vee B) \wedge \neg C, \neg C \to (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E) / \neg E \wedge F$

Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο:
S= $\{(A \vee B) \wedge \neg C, \neg C \to (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), \neg (\neg E \wedge F)\}$
είναι μη ικανοποιήσιμο.

$C_0 = \{\{(A \vee B) \wedge \neg C, \neg C \to (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), \neg (\neg E \wedge F)\}\}$

$C_1 = \{\{(A \vee B), \neg C, \neg C \to (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), \neg (\neg E \wedge F)\}\}$ [∧]

$C_2 = \{\{(A \vee B), \neg C, \neg C \to (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), \neg\neg E\},$
$\{(A \vee B), \neg C, \neg C \to (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), \neg F\}\}$ [¬ ∧]

$C_3 = \{\{(A \vee B), \neg C, \neg C \to (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), E\},$
$\{(A \vee B), \neg C, \neg C \to (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), \neg F\}\}$ [¬¬]

$C_4 = \{\{(A \vee B), \neg C, \neg\neg C, B \to (A \vee E), E\},$
$\{(A \vee B), \neg C, (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), E\},$
$\{(A \vee B), \neg C, \neg C \to (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), \neg F\}\}$ [→]

$C_5 = \{\{(A \vee B), \neg C, C, B \to (A \vee E), E\},$
$\{(A \vee B), \neg C, (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), E\},$
$\{(A \vee B), \neg C, \neg C \to (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), \neg F\}\}$ [¬¬]

$C_6 = \{\{(A \vee B), \neg C, (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), E\},$
$\{(A \vee B), \neg C, \neg C \to (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), \neg F\}\}$ [del]

$C_7 = \{\{(A \vee B), \neg C, D, \neg A, B \to (A \vee E), E\},$
$\{(A \vee B), \neg C, \neg C \to (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), \neg F\}\}$ [∧]

$C_8 = \{\{A, \neg C, D, \neg A, B \to (A \vee E), E\},$
$\{B, \neg C, D, \neg A, B \to (A \vee E), E\},$
$\{(A \vee B), \neg C, \neg C \to (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), \neg F\}\}$ [∨]

$C_9 = \{\{B, \neg C, D, \neg A, B \to (A \vee E), E\},$
$\{(A \vee B), \neg C, \neg C \to (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), \neg F\}\}$ [del]

$C_{10} = \{\{B, \neg C, D, \neg A, \neg B, E\}, \{B, \neg C, D, \neg A, (A \vee E), E\},$
$\{(A \vee B), \neg C, \neg C \to (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), \neg F\}\}$ [→]

$C_{11} = \{\{B, \neg C, D, \neg A, (A \vee E), E\},$
$\{(A \vee B), \neg C, \neg C \to (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), \neg F\}\}$ [del]

$C_{12} = \{\{B, \neg C, D, \neg A, A, E\}, \{B, \neg C, D, \neg A, E, E\},$
$\{(A \vee B), \neg C, \neg C \to (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), \neg F\}\}$ [∨]

$C_{13} = \{\{B, \neg C, D, \neg A, E\},$
$\{(A \vee B), \neg C, \neg C \to (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), \neg F\}\}$ [del]

$C_{14} = \{\{B, \neg C, D, \neg A, E\},$
$\{(A \vee B), \neg C, \neg\neg C, B \to (A \vee E), \neg F\},$
$\{(A \vee B), \neg C, (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), \neg F\}\}$ [→]

$C_{15} = \{\{B, \neg C, D, \neg A, E\},$
$\{(A \vee B), \neg C, C, B \to (A \vee E), \neg F\},$
$\{(A \vee B), \neg C, (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), \neg F\}\}$ [¬¬]

$C_{16} = \{\{B, \neg C, D, \neg A, E\},$
$\{(A \vee B), \neg C, (D \wedge \neg A), B \to (A \vee E), \neg F\}\}$ [del]

$C_{17} = \{\{B, \neg C, D, \neg A, E\},$
$\{(A \vee B), \neg C, D, \neg A, B \to (A \vee E), \neg F\}\}$ [∧]

$C_{18} = \{\{B, \neg C, D, \neg A, E\},$
$\{A, \neg C, D, \neg A, B \to (A \vee E), \neg F\},$
$\{B, \neg C, D, \neg A, B \to (A \vee E), \neg F\}\}$ [∨]

$C_{19} = \{\{B, \neg C, D, \neg A, E\},$
$\{B, \neg C, D, \neg A, B \to (A \vee E), \neg F\}\}$ [del]

$C_{20} = \{\{B, \neg C, D, \neg A, E\},$
$\{B, \neg C, D, \neg A, \neg B, \neg F\}, \{B, \neg C, D, \neg A, (A \vee E), \neg F\}\}$ [→]

$C_{21} = \{\{B, \neg C, D, \neg A, E\},$
$\{B, \neg C, D, \neg A, (A \vee E), \neg F\}\}$ [del]

$C_{22} = \{\{B, \neg C, D, \neg A, E\},$

$\{B, \neg C, D, \neg A, A, \neg F\}, \{B, \neg C, D, \neg A, E, \neg F\}\}$ [$\vee$]

$C_{23} = \{\{B, \neg C, D, \neg A, E\},$
$\{B, \neg C, D, \neg A, E, \neg F\}\}$ [del]

Το C_{23} είναι μη κενό σύνολο, άρα το S είναι ικανοποιήσιμο. Επομένως, η εξαγωγή συμπεράσματος είναι **μη** έγκυρη.

c) $\{P \wedge Q \rightarrow R, R \wedge S \rightarrow T\} / P \wedge S \rightarrow R \wedge T$

Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο:
S= $\{P \wedge Q \rightarrow R, R \wedge S \rightarrow T, \neg(P \wedge S \rightarrow R \wedge T)\}$ είναι μη ικανοποιήσιμο.

$C_0 = \{\{P \wedge Q \rightarrow R, R \wedge S \rightarrow T, \neg(P \wedge S \rightarrow R \wedge T)\}\}$

$C_1 = \{\{P \wedge Q \rightarrow R, R \wedge S \rightarrow T, P \wedge S, \neg(R \wedge T)\}\}$ [$\neg \rightarrow$]

$C_2 = \{\{P \wedge Q \rightarrow R, R \wedge S \rightarrow T, P, S, \neg(R \wedge T)\}\}$ [$\wedge$]

$C_3 = \{\{\neg(P \wedge Q), R \wedge S \rightarrow T, P, S, \neg(R \wedge T)\},$
$\{R, R \wedge S \rightarrow T, P, S, \neg(R \wedge T)\}\}$ [$\rightarrow$]

$C_4 = \{\{\neg P, R \wedge S \rightarrow T, P, S, \neg(R \wedge T)\},$
$\{\neg Q, R \wedge S \rightarrow T, P, S, \neg(R \wedge T)\},$
$\{R, R \wedge S \rightarrow T, P, S, \neg(R \wedge T)\}\}$ [$\neg \wedge$]

$C_5 = \{\{\neg Q, R \wedge S \rightarrow T, P, S, \neg(R \wedge T)\},$
$\{R, R \wedge S \rightarrow T, P, S, \neg(R \wedge T)\}\}$ [del]

$C_6 = \{\{\neg Q, \neg(R \wedge S), P, S, \neg(R \wedge T)\}, \{\neg Q, T, P, S, \neg(R \wedge T)\},$
$\{R, R \wedge S \rightarrow T, P, S, \neg(R \wedge T)\}\}$ [$\rightarrow$]

$C_7 = \{\{\neg Q, \neg R, P, S, \neg(R \wedge T)\}, \{\neg Q, \neg S, P, S, \neg(R \wedge T)\},$
$\{\neg Q, T, P, S, \neg(R \wedge T)\}, \{R, R \wedge S \rightarrow T, P, S, \neg(R \wedge T)\}\}$ [$\neg \wedge$]

$C_8 = \{\{\neg Q, \neg R, P, S, \neg(R \wedge T)\},$
$\{\neg Q, T, P, S, \neg(R \wedge T)\}, \{R, R \wedge S \rightarrow T, P, S, \neg(R \wedge T)\}\}$ [del]

$C_9 = \{\{\neg Q, \neg R, P, S, \neg R\}, \{\neg Q, \neg R, P, S, \neg T\},$
$\{\neg Q, T, P, S, \neg(R \wedge T)\}, \{R, R \wedge S \rightarrow T, P, S, \neg(R \wedge T)\}\}$ [$\neg \wedge$]

$C_{10} = \{\{\neg Q, \neg R, P, S\}, \{\neg Q, \neg R, P, S, \neg T\},$
$\{\neg Q, T, P, S, \neg R\}, \{\neg Q, T, P, S, \neg T\},$
$\{R, R \wedge S \rightarrow T, P, S, \neg(R \wedge T)\}\}$ [$\neg \wedge$]

$C_{11} = \{\{\neg Q, \neg R, P, S\}, \{\neg Q, \neg R, P, S, \neg T\},$
$\{\neg Q, T, P, S, \neg R\}, \{R, R \wedge S \rightarrow T, P, S, \neg(R \wedge T)\}\}$ [del]

$C_{12} = \{\{\neg Q, \neg R, P, S\}, \{\neg Q, \neg R, P, S, \neg T\},$
$\{\neg Q, T, P, S, \neg R\}, \{R, R \wedge S \rightarrow T, P, S, \neg R\},$
$\{R, R \wedge S \rightarrow T, P, S, \neg T\}\}$ [$\neg \wedge$]

$C_{13} = \{\{\neg Q, \neg R, P, S\}, \{\neg Q, \neg R, P, S, \neg T\},$
$\{\neg Q, T, P, S, \neg R\}, \{R, R \wedge S \rightarrow T, P, S, \neg T\}\}$ [del]

$C_{14} = \{\{\neg Q, \neg R, P, S\}, \{\neg Q, \neg R, P, S, \neg T\},$
$\{\neg Q, T, P, S, \neg R\}, \{R, \neg(R \wedge S), P, S, \neg T\}$
$\{R, T, P, S, \neg T\}\}$ [$\rightarrow$]

$C_{15} = \{\{\neg Q, \neg R, P, S\}, \{\neg Q, \neg R, P, S, \neg T\},$
$\{\neg Q, T, P, S, \neg R\}, \{R, \neg(R \wedge S), P, S, \neg T\}\}$ [del]

$C_{16} = \{\{\neg Q, \neg R, P, S\}, \{\neg Q, \neg R, P, S, \neg T\},$
$\{\neg Q, T, P, S, \neg R\}, \{R, \neg R, P, S, \neg T\}, \{R, \neg S, P, S, \neg T\}\}$ [$\neg \wedge$]

$C_{17} = \{\{\neg Q, \neg R, P, S\}, \{\neg Q, \neg R, P, S, \neg T\},$
$\{\neg Q, T, P, S, \neg R\}, \{R, \neg S, P, S, \neg T\}\}$ [del]

$C_{18} = \{\{\neg Q, \neg R, P, S\}, \{\neg Q, \neg R, P, S, \neg T\}, \{\neg Q, T, P, S, \neg R\}\}$ [del]

Το C_{18} είναι μη κενό σύνολο, άρα το S είναι ικανοποιήσιμο. Επομένως, η εξαγωγή συμπεράσματος είναι **μη** έγκυρη.

d) $\{R \vee (Q \wedge R), Q \rightarrow R\} / (P \rightarrow Q) \rightarrow R$

Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο:
S= $\{R \vee (Q \wedge R), Q \rightarrow R, \neg((P \rightarrow Q) \rightarrow R)\}$
είναι μη ικανοποιήσιμο.

$C_0 = \{\{R \vee (Q \wedge R), Q \rightarrow R, \neg((P \rightarrow Q) \rightarrow R)\}\}$

$C_1 = \{\{R \vee (Q \wedge R), Q \rightarrow R, (P \rightarrow Q), \neg R\}\}$ [$\neg \rightarrow$]

$C_2 = \{\{R, Q \rightarrow R, (P \rightarrow Q), \neg R\}, \{(Q \wedge R), Q \rightarrow R, (P \rightarrow Q), \neg R\}\}$ [$\vee$]

$C_3 = \{\{(Q \wedge R), Q \rightarrow R, (P \rightarrow Q), \neg R\}\}$ [del]

$C_4 = \{\{Q, R, Q \rightarrow R, (P \rightarrow Q), \neg R\}\}$ [$\wedge$]

$C_5 = \{\}$ [del]

Το C_5 είναι κενό σύνολο, άρα το S είναι μη ικανοποιήσιμο. Επομένως, η εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη.

Άσκηση 2

<u>Βάση Επαγωγής</u>: S={A, ¬A}.
Το σύνολο αυτό είναι μη ικανοποιήσιμο γιατί υπάρχουν η ακολουθία ανασκευής.

$$A \xrightarrow{\neg A} \mathbf{F}$$

ή

$$\neg A \xrightarrow{A} \mathbf{F}$$

Επομένως, το θεώρημα ισχύει.

<u>Επαγωγική υπόθεση:</u>
Υποθέτουμε ότι το θεώρημα ισχύει για όλα τα σύνολα με λιγότερους από n όρους.
Έστω | S | = n.

1) Οποτεδήποτε ο C εμφανίζεται σε ακολουθία ανασκευής για το S (υπάρχει πάντα ακολουθία ανασκευής εφόσον το S είναι μη ικανοποιήσιμο σύνολο όρων Horn), κάποιο γράμμα του C αντιστοιχεί σε αντιφατικό γράμμα του προηγούμενου όρου της ακολουθίας – αλλά αυτό πρέπει να έχει προκύψει από άλλο μέλος, έστω C΄, του S που σημαίνει ότι οι όροι C και C΄ θα μπορούσαν να έχουν επιλυθεί μεταξύ τους.
2) Αν το S-{C} δεν περιέχει κανένα όρο που θα μπορούσε να επιλυθεί με το C, το C από το (1) <u>δεν ανήκει</u> σε ακολουθία ανασκευής για το S. Άρα οποιαδήποτε ακολουθία ανασκευής σε αυτή την περίπτωση δεν περιλαμβάνει τον όρο C, αποτελεί ακολουθία ανασκευής και για το σύνολο S-{C}.Οπότε το S-{C} είναι μη ικανοποιήσιμο σύνολο. (Με αυτό τον τρόπο αποδείχτηκε το πρώτο μέρος του θεωρήματος).
3) Έστω, ότι το S-{C} είναι ικανοποιήσιμο. Από το (1), ισχύει ότι το S πρέπει να περιέχει όρο C΄ τέτοιον ώστε η επίλυση του με τον όρο C να δίνει το R1.
Έστω, το σύνολο S' = (S-{C, C΄} U {R1}), όπου R1 = res(C, C΄). Το S' έχει n-1 όρους και το S'-{R1} είναι ικανοποιήσιμο γιατί το S-{C} είναι ικανοποιήσιμο (αν ένα σύνολο είναι ικανοποιήσιμο και του αφαιρέσω ένα όρο, παραμένει ικανοποιήσιμο).

Έτσι από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει για το S ακολουθία ανασκευής που ξεκινάει με R1 (σύμφωνα με το δεύτερο μέρος του θεωρήματος), που είναι η εξής:

$$R_1 \xrightarrow{C_1} R_2 \xrightarrow{C_2} \ldots\ldots \xrightarrow{C_{n-1}} R_n \equiv \mathbf{F}$$

Όμως, ο R1 είναι η επίλυση του όρου C με τον όρο C΄, R1 = res(C, C΄). Έτσι για το σύνολο S έχουμε:

$$C \xrightarrow{C'} R_1 \xrightarrow{C_1} R_2 \xrightarrow{C_2} \ldots\ldots \xrightarrow{C_{n-1}} R_n \equiv \mathbf{F}$$

Επομένως, αποδείχτηκε και το δεύτερο κομμάτι του θεωρήματος.

Ζήτημα 3^o

a) {P → Q ∨ R, Q → S, R → S} / P→ S

Για να δείξουμε οι η παραπάνω εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο των υποθέσεων και της άρνησης του συμπεράσματος είναι μη ικανοποιήσιμο.
Αρχικά μετατρέπουμε τις προτάσεις σε όρους.
Έτσι:
P → Q ∨ R ≡ ¬ P ∨ (Q ∨ R) ≡ ¬ P ∨ Q ∨ R
Q → S ≡ ¬Q ∨ S
R → S ≡ ¬R ∨ S
¬ (P→ S) ≡ ¬ (¬P ∨ S) ≡ ¬¬P ∧ ¬S ≡ P ∧ ¬S

Στη συνέχεια εξετάζουμε το σύνολο
S = {{¬ P, Q, R}, {¬Q, S}, {¬R, S}, P, ¬S}

Πρώτα βρίσκουμε τους όρους επίλυσης του S:

res({¬ P, Q, R}, {¬Q, S})= {¬ P, R, S}
res({¬ P, Q, R}, {¬R, S})= {¬ P, Q, S}
res({¬ P, Q, R}, P)= {Q, R}
res({¬Q, S}, ¬S)= ¬Q
res({¬R, S}, ¬S)= ¬R

R(S) = {{¬ P, Q, R}, {¬Q, S}, {¬R, S}, P, ¬S, {¬ P, R, S}, {¬ P, Q, S},
{Q, R}, ¬Q, ¬R}

Στη συνέχεια βρίσκουμε τους όρους επίλυσης του R(S):

res΄({¬ P, Q, R}, ¬Q) = {¬ P, R}
res΄({¬ P, Q, R}, ¬R) = {¬ P, Q}
res΄({¬Q, S}, {¬ P, Q, S}) = {¬ P, S}
res΄({¬Q, S}, {Q, R}) = {R, S}
res΄({¬R, S}, {¬ P, R, S})= {¬P, S}
res΄({¬R, S}, {Q, R})= {Q, S}
res΄(P, {¬ P, R, S})= {R, S}
res΄(P, {¬ P, Q, R})= {Q, R}
res΄(¬S, {¬ P, R, S})= {¬ P, R}
res΄(¬S, {¬ P, Q, S})= {¬ P, Q}
res΄({¬ P, R, S}, ¬R)= { ¬P, S}
res΄({¬ P, Q, S}, ¬Q) = {¬ P, S}
res΄({Q, R}, ¬Q) = R
res΄({Q, R}, ¬R) = Q

$R^{(2)}$(S) = {{¬ P, Q, R}, {¬Q, S}, {¬R, S}, P, ¬S, {¬ P, R, S}, {¬ P, Q, S},
{Q, R}, ¬Q, ¬R, {¬ P, R}, {¬ P, Q}, {¬ P, S}, {R, S}, {Q, S}, R, Q}

Εφόσον, το $R^{(2)}$(S) περιέχει αντίθετα γράμματα, το $R^{(3)}$(S) θα περιλαμβάνει το **F.** Έτσι, σύμφωνα με την αρχή της επίλυσης, το S είναι μη ικανοποιήσιμο. Επομένως, η εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη.

b) { P, Q ∨ R} / (P ∧ Q) ∨ (P ∧ R)

Για να δείξουμε οι η παραπάνω εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο των υποθέσεων και της άρνησης του συμπεράσματος είναι μη ικανοποιήσιμο.

Αρχικά μετατρέπουμε τις προτάσεις σε όρους.
Έτσι:
P (Είναι θετικός μοναδιαίος όρος)
$Q \lor R$ (Είναι όρος)
$\neg((P \land Q) \lor (P \land R)) \equiv \neg(P \land Q) \land \neg(P \land R) \equiv (\neg P \lor \neg Q) \land (\neg P \lor \neg R)$

Στη συνέχεια εξετάζουμε το σύνολο:
$S = \{P, \{Q, R\}, \{\neg P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg R\}\}$

Η ακολουθία:

$$\{\neg P, \neg Q\} \xrightarrow{\{Q, R\}} \{\neg P, R\} \xrightarrow{\{\neg P, \neg R\}} \neg P \xrightarrow{P} \mathbf{F}$$

είναι ακολουθία ανασκευής, επομένως το S είναι μη ικανοποιήσιμο. Άρα, η εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη.

c) $(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

Θα μετατρέψουμε την παραπάνω πρόταση σε CNF:

Αρχικά αντικαθιστούμε το συνδετικό → με την ισοδύναμη του έκφραση ($A \rightarrow B \equiv \neg A \lor B$). Έτσι:

$(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)) \equiv$
$(\neg Q \lor R) \rightarrow (\neg (P \rightarrow Q) \lor (P \rightarrow R)) \equiv$
$(\neg Q \lor R) \rightarrow (\neg (\neg P \lor Q) \lor (\neg P \lor R)) \equiv$
$\neg (\neg Q \lor R) \lor (\neg (\neg P \lor Q) \lor (\neg P \lor R))$

Στη συνέχεια ελαχιστοποιούμε το πεδίο της άρνησης με τη χρήση του κανόνα De Morgan ($\neg(A_1 \lor A_2 \lor A_3 \lor \ldots \lor A_n) \equiv \neg A_1 \land \neg A_2 \land \neg A_3 \land \ldots \land \neg A_n$)). Έτσι:

$\neg (\neg Q \lor R) \lor (\neg (\neg P \lor Q) \lor (\neg P \lor R)) \equiv$
$(\neg\neg Q \land \neg R) \lor ((\neg\neg P \land \neg Q) \lor (\neg P \lor R))$

Απαλείφουμε διπλές αρνήσεις. Έτσι:

$(\neg\neg Q \land \neg R) \lor ((\neg\neg P \land \neg Q) \lor (\neg P \lor R)) \equiv$
$(Q \land \neg R) \lor ((P \land \neg Q) \lor (\neg P \lor R))$

Βρίσκουμε τη διάζευξη που βρίσκεται σε μεγαλύτερο βάθος και περιέχει μια τουλάχιστον σύζευξη. Αυτή είναι η $(P \land \neg Q) \lor (\neg P \lor R)$. Εφαρμόζουμε επιμερισμό της διάζευξης πάνω στη σύζευξη.

$(Q \land \neg R) \lor ((P \land \neg Q) \lor (\neg P \lor R)) \equiv$
$(Q \land \neg R) \lor ((P \lor \neg P \lor R) \land (\neg Q \lor \neg P \lor R)) \equiv$

Βρίσκουμε τη διάζευξη που βρίσκεται σε μεγαλύτερο βάθος και περιέχει μια τουλάχιστον σύζευξη. Αυτή είναι ολόκληρη η πρόταση. Εφαρμόζουμε επιμερισμό της διάζευξης πάνω στη σύζευξη.

$(Q \land \neg R) \lor ((P \lor \neg P \lor R) \land (\neg Q \lor \neg P \lor R)) \equiv$

$(Q \lor P \lor \neg P \lor R) \land (Q \lor \neg Q \lor \neg P \lor R) \land (\neg R \lor P \lor \neg P \lor R) \land$
$(\neg R \lor \neg Q \lor \neg P \lor R)$

Έστω C η πρόταση σε CNF μορφή

C: $(Q \lor P \lor \neg P \lor R) \land (Q \lor \neg Q \lor \neg P \lor R) \land (\neg R \lor P \lor \neg P \lor R) \land$
$(\neg R \lor \neg Q \lor \neg P \lor R)$

Παρατηρούμε ότι η πρόταση C είναι πάντα αληθής ($\mathbf{T} \land \mathbf{T} \land \mathbf{T} \land \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$). Οπότε ικανοποιείται από κάθε ερμηνεία. Θα χρησιμοποιήσουμε, όμως, την μέθοδο της επίλυσης όπως ζητείται από την εκφώνηση της άσκησης.

Η πρόταση C μετατρέπεται στο ακόλουθο σύνολο όρων, έστω S:
$S = \{\{Q, P, \neg P, R\}, \{Q, \neg Q, \neg P, R\}, \{\neg R, P, \neg P, R\}, \{\neg R, \neg Q, \neg P, R\}\}$

Αρχικά βρίσκω τους όρους επίλυσης του S.

$res(\{Q, P, \neg P, R\}, \{Q, \neg Q, \neg P, R\}) = \{Q, \neg P, R\}$
$res(\{Q, P, \neg P, R\}, \{\neg R, P, \neg P, R\}) = \{Q, R\}$
$res(\{Q, P, \neg P, R\}, \{\neg R, \neg Q, \neg P, R\}) = \{\neg P, R\}$
$res(\{Q, \neg Q, \neg P, R\}, \{\neg R, P, \neg P, R\}) = \{Q, \neg Q, \neg P, R\}$
$res(\{Q, \neg Q, \neg P, R\}, \{\neg R, \neg Q, \neg P, R\}) = \{\neg Q, \neg P, R\}$
$res(\{\neg R, P, \neg P, R\}, \{\neg R, \neg Q, \neg P, R\}) = \{\neg P, \neg Q\}$

$R(S) = \{\{Q, P, \neg P, R\}, \{Q, \neg Q, \neg P, R\}, \{\neg R, P, \neg P, R\}, \{\neg R, \neg Q, \neg P, R\},$
$\{Q, \neg P, R\}, \{Q, R\}, \{\neg P, R\}, \{\neg Q, \neg P, R\}, \{\neg P, \neg Q\}\}$

Βρίσκουμε τους όρους επίλυσης του R(S).
$res'(\{Q, P, \neg P, R\}, \{Q, \neg P, R\}) = \{Q, \neg P, R\}$
$res'(\{Q, P, \neg P, R\}, \{\neg P, R\}) = \{Q, \neg P, R\}$
$res'(\{Q, P, \neg P, R\}, \{\neg Q, \neg P, R\}) = \{\neg P, R\}$
$res'(\{Q, P, \neg P, R\}, \{\neg P, \neg Q\}) = \{\neg P, R\}$
$res'(\{Q, \neg Q, \neg P, R\}, \{Q, \neg P, R\}) = \{Q, \neg P, R\}$
$res'(\{Q, \neg Q, \neg P, R\}, \{Q, R\}) = \{Q, \neg P, R\}$
$res'(\{Q, \neg Q, \neg P, R\}, \{\neg Q, \neg P, R\}) = \{\neg Q, \neg P, R\}$
$res'(\{Q, \neg Q, \neg P, R\}, \{\neg P, \neg Q\}) = \{\neg Q, \neg P, R\}$
$res'(\{\neg R, P, \neg P, R\}, \{Q, \neg P, R\}) = \{Q, \neg P, R\}$
$res'(\{\neg R, P, \neg P, R\}, \{Q, R\}) = \{Q, P, \neg P, R\}$
$res'(\{\neg R, P, \neg P, R\}, \{\neg P, R\}) = \{\neg P, R\}$
$res'(\{\neg R, P, \neg P, R\}, \{\neg Q, \neg P, R\}) = \{\neg Q, \neg P, R\}$
$res'(\{\neg R, P, \neg P, R\}, \{\neg P, \neg Q\}) = \{\neg R, \neg Q, \neg P, R\}$
$res'(\{Q, \neg P, R\}, \{\neg Q, \neg P, R\}) = \{\neg P, R\}$
$res'(\{Q, \neg P, R\}, \{\neg P, \neg Q\}) = \{\neg P, R\}$
$res'(\{Q, R\}, \{\neg Q, \neg P, R\}) = \{\neg P, R\}$
$res'(\{Q, R\}, \{\neg P, \neg Q\}) = \{\neg P, R\}$

$R^{(2)}(S) = R(S) \cup \{\}$

Στη συνέχεια δε γίνεται καμία επίλυση. Άρα, για $n>1$ $R^{(n)}(S) = R(S)$.
Όμως, στο $R^{(n)}(S)$ δεν περιέχεται το F. Άρα το σύνολο S είναι ικανοποιήσιμο.

Άσκηση 4

α)

Έστω,
$\Phi = \Phi' \wedge C \wedge C'$, η CNF μορφή του προτασιακού σχήματος και
$\Psi = \Phi' \wedge res(C, C')$, η μορφή του μετά την εφαρμογή της πράξης επίλυσης μεταξύ των όρων C και C΄.
Τότε, αν I τυχαία ερμηνεία τέτοια ώστε $\models_I \Phi$ τότε θα ισχύει $\models_I \Phi'$, $\models_I C$ και $\models_I C'$. Όμως, γνωρίζουμε ότι $C \wedge C' = res(C, C')$, επομένως θα ισχύει και $\models_I res(C, C')$. Άρα, και $\models_I \Psi$. Επειδή η I επιλέχτηκε τυχαία, τα παραπάνω ισχύουν για κάθε ερμηνεία που ικανοποιεί τη Φ. Άρα, $\Phi \models \Psi$.

β)

Έστω, $\Phi \equiv (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge R$.
Τότε, $\Psi \equiv (Q \vee \neg Q) \wedge R \equiv \mathbf{T} \wedge R \equiv R$
Έστω, $I = \{P, Q, R\}$ μια ερμηνεία. Η I ικανοποιεί την Ψ αλλά δεν ικανοποιεί την Φ.

Ζήτημα 5ο

a) Είτε ο X παρευρέθηκε στο συμβούλιο, ή δεν προσκλήθηκε σε αυτό.
b) Αν ο προϊστάμενος επιθυμούσε την παρουσία του X στο συμβούλιο, τότε ο X θα είχε προσκληθεί σε αυτό.
c) Ο X δεν παρευρέθηκε στο συμβούλιο.
d) Αν ο προϊστάμενος δεν επιθυμούσε την παρουσία του X στο συμβούλιο και ο X δεν προσκλήθηκε σε αυτό, ο X πρόκειται να απολυθεί.

Έστω, οι παρακάτω προτάσεις:

P: Ο X παρευρέθηκε στο συμβούλιο.
Q: Ο X προσκλήθηκε στο συμβούλιο.
S: Ο προϊστάμενος επιθυμούσε την παρουσία του X στο συμβούλιο.
R: Ο X πρόκειται να απολυθεί.

Επομένως,
a) $P \vee \neg Q$
b) $S \rightarrow Q$
c) $\neg P$
d) $(\neg S \wedge \neg Q) \rightarrow R$

Το συμπέρασμα που θέλουμε να δείξουμε είναι η πρόταση «ο X πρόκειται να απολυθεί». Δηλαδή, το R.

Για να δείξουμε οι η παραπάνω εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο των υποθέσεων και της άρνησης του συμπεράσματος είναι μη ικανοποιήσιμο.
Αρχικά μετατρέπουμε τις προτάσεις σε όρους.
Έτσι:
$P \vee \neg Q$ (Είναι όρος)
$S \rightarrow Q \equiv \neg S \vee Q$
$\neg P$ (Είναι αρνητικός μοναδιαίος όρος)
$(\neg S \wedge \neg Q) \rightarrow R \equiv \neg(\neg S \wedge \neg Q) \vee R \equiv (\neg\neg S \vee \neg\neg Q) \vee R \equiv S \vee Q \vee R$

$\neg R$ (Είναι αρνητικός μοναδιαίος όρος)

Στη συνέχεια εξετάζουμε το σύνολο
$S = \{\{P, \neg Q\}, \{\neg S, Q\}, \neg P, \{S, Q, R\}, \neg R\}$

Πρώτα βρίσκουμε τους όρους επίλυσης του S:

$res(\{P, \neg Q\}, \{\neg S, Q\}) = \{P, \neg S\}$
$res(\{P, \neg Q\}, \neg P) = \neg Q$
$res(\{P, \neg Q\}, \{S, Q, R\}) = \{P, S, R\}$
$res(\{\neg S, Q\}, \{S, Q, R\}) = \{Q, R\}$
$res(\{S, Q, R\}, \neg R) = \{S, Q\}$

$R(S) = \{\{P, \neg Q\}, \{\neg S, Q\}, \neg P, \{S, Q, R\}, \neg R, \{P, \neg S\}, \neg Q, \{P, S, R\}, \{Q, R\}, \{S, Q\}\}$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τους όρους επίλυσης του R(S):

$res'(\{P, \neg Q\}, \{Q, R\}) = \{P, R\}$
$res'(\{P, \neg Q\}, \{S, Q\}) = \{P, S\}$
$res'(\{\neg S, Q\}, \neg Q) = \neg S$
$res'(\{\neg S, Q\}, \{P, S, R\}) = \{P, Q, R\}$
$res'(\{\neg S, Q\}, \{S, Q\}) = Q$
$res'(\neg P, \{P, \neg S\}) = \neg S$
$res'(\neg P, \{P, S, R\}) = \{S, R\}$
$res'(\{S, Q, R\}, \{P, \neg S\}) = \{P, Q, R\}$
$res'(\{S, Q, R\}, \neg Q) = \{S, R\}$
$res'(\neg R, \{P, S, R\}) = \{P, S\}$
$res'(\neg R, \{Q, R\}) = Q$
$res'(\{P, \neg S\}, \{P, S, R\}) = \{P, R\}$
$res'(\{P, \neg S\}, \{S, Q\}) = \{P, Q\}$
$res'(\neg Q, \{Q, R\}) = R$
$res'(\neg Q, \{S, Q\}) = S$

$R^{(2)}(S) = \{\{P, \neg Q\}, \{\neg S, Q\}, \neg P, \{S, Q, R\}, \neg R, \{P, \neg S\}, \neg Q, \{P, S, R\}, \{Q, R\}, \{S, Q\}, \{P, R\}, \{P, S\}, \neg S, \{P, Q, R\}, Q, \{S, R\}, \{P, Q\}, R, S\}$

Εφόσον, το $R^{(2)}(S)$ περιέχει αντίθετα γράμματα, το $R^{(3)}(S)$ θα περιλαμβάνει το **F.** Έτσι, σύμφωνα με την αρχή της επίλυσης, το S είναι μη ικανοποιήσιμο. Επομένως, η εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη. Δηλαδή, η πρόταση «Ο X πρόκειται να απολυθεί» εξάγεται ως συμπέρασμα από τις υποθέσεις.