Sketch Λύσεων 1^{ης} Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1

$$ffof\,(p1, p2, p3, p4) = 1 \text{ αν } 3p1 + p2 + p3 + p4 \geq 5$$

Από πίνακα αληθείας έχω

$$
\begin{aligned}
&(p1 \wedge p2 \wedge p3 \wedge p4) \vee (p1 \wedge p2 \wedge p3 \wedge \neg p4) \vee (p1 \wedge p2 \wedge \neg p3 \wedge p4) \\
&\vee (p1 \wedge \neg p2 \wedge p3 \wedge p4) \equiv [(p1 \wedge p2 \wedge p3) \wedge (p4 \vee \neg p4)] \vee (p1 \wedge p2 \wedge \neg p3 \wedge p4) \\
&\vee (p1 \wedge \neg p2 \wedge p3 \wedge p4) \equiv (p1 \wedge p2 \wedge p3) \vee (p1 \wedge p2 \wedge \neg p3 \wedge p4) \\
&\vee (p1 \wedge \neg p2 \wedge p3 \wedge p4) \equiv [(p1 \wedge p2) \wedge (p3 \vee (\neg p3 \wedge p4))] \vee (p1 \wedge \neg p2 \wedge p3 \wedge p4) \\
&\equiv [(p1 \wedge p2) \wedge (p3 \vee \neg p3) \wedge (p3 \vee p4)] \vee (p1 \wedge \neg p2 \wedge p3 \wedge p4) \\
&\equiv (p1 \wedge p2 \wedge p3) \vee (p1 \wedge p2 \wedge p4) \vee (p1 \wedge \neg p2 \wedge p3 \wedge p4) \\
&\equiv (p1 \wedge p2 \wedge p3) \vee [(p1 \wedge p4) \wedge (p2 \vee (\neg p2 \wedge p3))] \\
&\equiv (p1 \wedge p2 \wedge p3) \vee ((p1 \wedge p4) \wedge (p2 \vee \neg p2) \wedge (p2 \vee p3)) \\
&\equiv (p1 \wedge p2 \wedge p3) \vee ((p1 \wedge p4) \wedge (p2 \vee p3)) \\
&\equiv (p1 \wedge p2 \wedge p3) \vee (p1 \wedge p2 \wedge p4) \vee (p1 \wedge p3 \wedge p4) \\
&\equiv \neg(\neg(p1 \wedge p2 \wedge p3) \wedge \neg(p1 \wedge p2 \wedge p4) \wedge \neg(p1 \wedge p3 \wedge p4))
\end{aligned}
$$

Άσκηση 2

Έστω:

p: Ο Χ είναι από την Κρήτη

q: Ο Χ είναι από τα Χανιά

r: Ο Χ είναι από το Ηράκλειο

Υποθέτουμε ότι και οι 3 είναι από τα Χανιά. Άρα ισχύουν:

$$\left.\begin{array}{l} 1^{ος}\text{ άνθρωπος : } p \oplus q \\[1em] 2^{ος}\text{ άνθρωπος: } p \oplus r \\[1em] 3^{ος}\text{ άνθρωπος: } \neg p \oplus q \end{array}\right\} 1^{ο}\text{ σύνολο}$$

Υποθέτουμε ότι και οι 3 είναι από το Ηράκλειο. Άρα ισχύουν

$$\left.\begin{array}{l} 1^{ος}\text{ άνθρωπος : } \neg\, p \oplus q \\[1em] 2^{ος}\text{ άνθρωπος: } \neg\, p \oplus r \\[1em] \end{array}\right\} 2^{ο}\text{ σύνολο}$$

3^{ος} άνθρωπος: $p \oplus q$

Κάνουμε πίνακα αλήθειας:

			1ος	2ος	3ος	1ος	2ος	3ος
P	q	r	p$\oplus q$	p$\oplus r$	$\neg p \oplus q$	$\neg p \oplus q$	$\neg$ p$\oplus r$	p$\oplus q$
Α	Α	Α	ψ	Ψ	**Α**	**Α**	**Α**	ψ
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	**Α**	**Α**	**Α**	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	ψ	Ψ	**Α**	**Α**	**Α**	ψ

Αυτό που κάναμε ήταν να υποθέσουμε ότι α) είναι και οι 3 Χανιώτες και β)ότι είναι και οι 3 Ηρακλιώτες. Οπότε με βάση τον πίνακα , ψαχνουμε 3δες για τις οποίες θα είναι αληθείς οι προτάσεις. Οπότε έχουμε 2 διαφορετικές απαντήσεις : α) 1^{ος} Ηρακλιώτης , 2^{ος} , 3^{ος} Χανιώτες

β) 1^{ος} , 2^{ος} Ηρακλιώτες , 3^{ος} Χανιώτης

Άρα σίγουρα ο 1^{ος} είναι από Ηράκλειο και ο 3^{ος} από Χανιά. Ο 2^{ος} μπορεί να είναι από Ηράκλειο ή Χανιά.

Άσκηση 3

A) $\neg A \wedge ((\neg B \vee \neg C) \vee (\neg A \to C)) \equiv \neg A \wedge ((\neg B \vee \neg C) \vee (A \vee C))$
$\equiv \neg A \wedge (\neg B \vee \neg C \vee A \vee C) \equiv \neg A$

Κάθε ερμηνεία $I = \{\neg A\}$ επαληθεύει την πρόταση. Αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε

ερμηνεία βρούμε που δεν περιέχει το A τότε είναι σωστή και επαληθεύει την πρόταση. Άρα είναι επαληθεύσιμη.

B) $\neg(R \vee (W \wedge \neg R)) \to W \equiv \neg(\neg(R \vee (W \wedge \neg R))) \vee \neg W \equiv R \vee (W \wedge \neg R) \vee \neg W$
$\equiv ((R \vee W) \wedge ()) \vee \neg W \equiv R \vee W \vee \neg W \equiv True$

Άρα η πρόταση είναι λογικά αληθής

Γ) $[(R \to S) \vee (\neg S \to \neg R)] \wedge (\neg S \vee R) \wedge (R \wedge \neg S)$
$\equiv [(\neg R \vee W) \vee (S \vee \neg R)] \wedge (\neg S \vee R) \wedge (\neg S \wedge R)$
$\equiv (\neg R \vee S) \wedge (\neg S \vee R) \wedge (\neg S \wedge R)$
$\equiv (\neg R \vee S) \wedge (R \wedge \neg S \wedge R) \vee (R \wedge \neg S \wedge \neg S) \equiv (\neg R \vee S) \wedge (R \wedge \neg S)$
$\equiv (\neg R \vee S) \wedge \neg(\neg R \vee S) \equiv False$

Άρα η πρόταση είναι λογικά ψευδής .

Θέμα 4

A) Από άσκηση 3 ισχύει

$\neg(R \vee (W \wedge \neg R)) \to \neg N \equiv .... \equiv \neg A$ που είναι CNF,DNF

B)Από άσκηση 3 ισχύει

Ότι είναι False άρα και σε CNF και DNF

Άσκηση 5

A)

$$S \models ((A \to B) \to C) \to D \Leftrightarrow S \cup \{((A \vee C) \wedge (\neg B \vee C))\} \models D$$

Αρχικά απλοποιούμαι με χρήση κανόνων προτασιακού λογισμού:

$$((A \to B) \to C) \to D \equiv ((\neg A \vee B) \to C) \to D \equiv (\neg(\neg A \vee B) \vee C) \to D$$
$$\equiv ((A \wedge \neg B) \vee C) \to D \equiv [(A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)] \to D$$

Άρα έχω αποδείξει ότι

$$S \models ((A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)) \to D \Leftrightarrow S \cup \{(A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)\} \models D$$

Θέτω έστω $R \equiv ((A \vee C) \wedge (\neg B \vee C))$ άρα έχω

$$S \models R \to D \Leftrightarrow S \cup \{R\} \models D$$

- Αποδεικνύω για $\Rightarrow$ (ευθύ)

Έστω $S \models R \to D$ και I ερμηνεία που ικανοποιεί το $S \cup \{R\}$. Εφόσον η I ικανοποιεί το S

και $S \models R \to D$ θα ικανοποιεί και το $R \to D$ (*).Αλλά η I ικανοποιεί και το R. Επομένως (από *)και το D. Και επειδή η I επιλέχτηκε τυχαία, έχουμε ότι $S \cup \{A\} \models B$.

- Αποδεικνύω για $\Leftarrow$(αντίστροφο)

Αντίστροφα, έστω $s \cup \{R\} \models B$ και I ικανοποιεί το S.Η μόνη περίπτωση για την οποία η I δεν ικανοποιεί το $R \to D$ είναι αύτη που ικανοποιεί το R αλλά όχι το D. Όμως αν η

I ικανοποιεί το R, από το $S \cup \{R\} \models D$ θα ικανοποιεί και το D.Επομένως η I ικανοποιεί το

$R \to D$ και εφόσον επιλέχτηκε τυχαία από τις ερμηνείες που ικανοποιούν το S,θα ισχύει η $S \models R \to D$.

B)

$\models (A \vee B) \wedge (B \vee D) \to ((A \wedge B) \to (B \wedge D))$

Έστω Π η παραπάνω πρόταση

Άρα πρέπει η Π να είναι ταυτολογία

$$
\begin{aligned}
&\Pi \equiv (A \vee B) \wedge (B \vee D)) \to ((A \wedge B) \to (B \wedge D)) \equiv \\
&\neg((A \vee B) \wedge (B \vee D)) \vee (\neg(A \wedge B) \vee (B \wedge D)) \equiv \\
&\neg((A \vee B) \vee \neg(B \vee D)) \vee \neg(A \wedge B) \vee (B \wedge D) \equiv \\
&(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg D) \vee (\neg A \vee \neg B) \vee (B \wedge D) \equiv \\
&(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg D) \vee ((\neg A \vee \neg B \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee D)) \equiv \\
&(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg D) \vee \neg A \vee \neg B \vee D \equiv \\
&\neg A \vee (\neg B \wedge \neg D) \vee (\neg B \vee D) \equiv \neg A \vee ((\neg B \vee D \vee \neg B) \wedge (\neg B \vee D \vee \neg D)) \equiv \\
&A \vee \neg B \vee D.
\end{aligned}
$$

Άρα η Π δεν είναι ταυτολογία.

Π.χ.η ερμηνεία $\mathrm{I} = \{\neg A, B, \neg D\}$ δεν την επαληθεύει.

C)

1) Η P είναι σε CNF άρα έχει μορφή:

C1 $\wedge$ C2 $\wedge$ …… $\wedge$ Cn όπου κάθε Ci όρος έχει μορφή: Ci = A1 $\vee$ A2 $\vee$ …….. $\vee$ Aj

Αντικαθιστώντας τα $\wedge$ σε $\vee$ και ανάποδα, έχω:

Ci ‘= A1 $\vee$ A2 $\vee$ …….. $\vee$ Aj και η έκφραση 0 θα είναι :

C1’ $\vee$ C2’ $\vee$ ………… $\vee$ Cn’

Για να είναι η O σε DNF πρέπει να μην υπάρχει Ci’ όρος να απορροφάει έναν όρο Cj’. Έστω δεν είναι σε DNF. Άρα υπάρχει όρος , A $\wedge$ B που απορροφάει έναν όρο A $\wedge$ B $\wedge$ C. Αυτός ο όρος όμως θα υπήρχε και στην P σαν A $\vee$ B και θα απορροφούσε τον A $\vee$ B $\vee$ C. Άρα ούτε η P θα ήταν σε CNF **ΑΤΟΠΟ**. Οπότε η O είναι σε DNF.

2)Δεν ισχύει

Αντιπαράδειγμα:

Έστω $\mathrm{P} \equiv (A1 \vee B1) \wedge (A2 \vee B2)$ και $I1 = \{A1, A2\}$ ερμηνεία που την ικανοποιεί.

$0 \equiv (A1 \wedge B1) \vee (A2 \wedge B2)$ όμως η $I1$ δεν ικανοποιεί την 0

3) Δεν ισχύει

Αντιπαράδειγμα:

Έστω $0 \equiv A \vee B$ και η $\mathrm{I1} = \{A\}$ ερμηνεία που την ικανοποιεί.

$P \equiv A \wedge B$ όμως η $I1$ δεν ικανοποιεί την P.