ΕΜΒΟΛΙΜΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥΡΙΟΥ 2016 ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΙ

ΘΕΜΑ 1ο. (1,5) Να αποδειχθεί οτι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{όταν } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{όταν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$ και να ευρεθεί η εξίσωση του επιπέδου στον $\mathbb{R}^3$ που εφάπτεται στο γράφημά της και διέρχεται από το σημείο $(0,0,1)$.

ΘΕΜΑ 2ο. (1,5) Εστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση και $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$h(r,\phi,\theta) = f(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta).$$

Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial h}{\partial r}, \dfrac{\partial h}{\partial \phi}, \dfrac{\partial h}{\partial \theta}$ της h (σε κάθε σημείο) συναρτήσει των μερικών παραγώγων της f.

ΘΕΜΑ 3ο. (2) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = 2xy.$$

Εστω $R > 0$ και $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}$.
(α) Να ευρεθουν τα κρίσιμα σημεία της f και το είδος τους στο εσωτερικό του D.
(β) Να ευρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f στο

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = R^2\}.$$

(γ) Ποιά είναι η ελάχιστη και ποιά η μέγιστη τιμή της f στο D;

ΘΕΜΑ 4ο. (1,5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_B e^{x+y}dxdy$, όπου B είναι το τρίγωνο στο $\mathbb{R}^2$ με κορυφές τα σημεία $(1,1)$, $(2,2)$ και $(2,0)$.

ΘΕΜΑ 5ο. (2) Αν $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 2x, \quad y \geq 0\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_B (x-y)dxdy.$$

ΘΕΜΑ 6ο. (2) Αν $0 < a < R$, να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2, \quad z \geq a\}.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΜΒΟΛΙΜΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2016 ΑΠΕΙΡ. ΛΟΓ. ΙΙ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο Έχουμε $f(x,0) = \dfrac{\arctan|x|}{|x|}$ για $x \neq 0$, οπότε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\arctan|h| - |h|}{h|h|} = 0$$

γιατί $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{\arctan|h|-|h|}{h|h|} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\arctan h - h}{h^2} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+h^2}-1}{2h}$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1-1-h^2}{2h(1+h^2)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h}{2(1+h^2)} = 0, \quad (\text{L'Hospital})$$

και $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{\arctan|h|-|h|}{h|h|} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\arctan h + h}{-h^2} = 0.$

Άρα $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ και αφού $f(0,y) = \dfrac{\arctan|y|}{|y|}$ για $y \neq 0$, άρα έχουμε $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Τέλος για $(h_1,h_2) \neq (0,0)$ έχουμε

$$\frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\binom{h_1}{h_2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$= \frac{\frac{\arctan\sqrt{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} - 1 - 0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{\arctan\rho - \rho}{\rho^2}$$

και όπως προηγουμένως $\displaystyle\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\arctan\rho - \rho}{\rho^2} = 0$, όπου $\rho = \sqrt{h_1^2+h_2^2}$. Άρα η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ και το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημά της στο σημείο $(0,0,1)$ έχει εξίσωση $z - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)$

$\Leftrightarrow z - 1 = 0$, δηλαδή $z = 1$.

ΘΕΜΑ 2ο Θεωρούμε την απεικόνιση $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με

$$g(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta)$$

Τότε η g είναι C^∞ και $h = f\circ g$. Άρα η h είναι διαφορίσιμη και από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\left(\frac{\partial h}{\partial r}\ \frac{\partial h}{\partial \varphi}\ \frac{\partial h}{\partial \theta}\right) = Dh(r,\varphi,\theta) = Df(x,y,z)\cdot Dg(r,\varphi,\theta)$$

(όπου $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$. Άρα)

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial f}{\partial z}\right)\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

οπότε

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r,\varphi,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\cos\varphi\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\cdot\sin\varphi\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\cos\theta$$

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\cdot r\sin\varphi\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\, r\cos\varphi\sin\theta$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\, r\cos\varphi\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\, r\sin\varphi\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\, r\sin\theta$$

ΘΕΜΑ 3ο (α) Τα κρίσιμα σημεία της f στο $\operatorname{int}D$ είναι οι λύσεις του συστήματος εξισώσεων $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ που περιέχονται στο $\operatorname{int}D$. Αλλά $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x = 0$. Άρα το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f στο $\operatorname{int}D$ είναι το $(0,0)$. Η f είναι C^∞ και

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Άρα $\det Hf(0,0) = -4 < 0$, το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο f.

(β) Τα σημεία του S στα οποία η $f|_S$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή (το S είναι κλειστό και φραγμένο, οπότε και το D και $\partial D = S$) είναι αρκετό να υπολογίσουμε τα ακρότατα στη S μέσω του Lagrange

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2\lambda x \qquad y = \lambda x \qquad \Longrightarrow \quad (x+y) = \lambda (x+y)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 2\lambda y \quad \Longleftrightarrow \quad x = \lambda y$$

$$x^2+y^2=R^2 \qquad x^2+y^2=R^2$$

Άρα $\lambda=1$ ή $x+y=0$. Αν $\lambda=1$, τότε $x=y$ και $2x^2=R^2$. Άρα $(x,y) = \left(\frac{R}{\sqrt2}, \frac{R}{\sqrt2}\right)$ ή $\left(\frac{R}{-\sqrt2}, \frac{R}{-\sqrt2}\right)$.

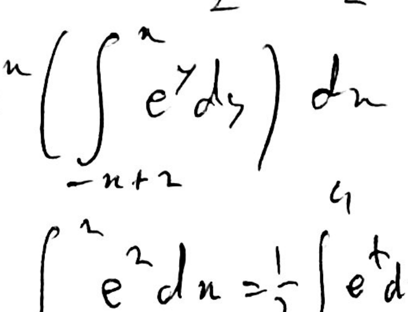
Αν $x=-y$, τότε εξετάζοντας λόγω $(x,y) = \left(\frac{R}{\sqrt2}, -\frac{R}{\sqrt2}\right)$ ή $\left(-\frac{R}{\sqrt2}, \frac{R}{\sqrt2}\right)$

Άρα $f\left(\frac{R}{\sqrt2}, \frac{R}{\sqrt2}\right) = f\left(\frac{R}{-\sqrt2}, \frac{R}{-\sqrt2}\right) = R^2$ και

$f\left(\frac{R}{-\sqrt2}, \frac{R}{\sqrt2}\right) = f\left(\frac{R}{\sqrt2}, \frac{R}{-\sqrt2}\right) = -R^2$, Η μέγιστη τιμή της

$f|_S$ είναι το R^2 και η ελάχιστη το $-R^2$.

Οπότε Η μέγιστη τιμή της f στο D είναι R^2 και η ελάχιστη $-R^2$.



ΘΕΜΑ 4ο Η ευθεία που διέρχεται από τα (1,1) και (2,2) είναι η $y=x$ και η ευθεία που διέρχεται από τα (1,1) και (2,0) είναι η $y=-x+2$. Άρα

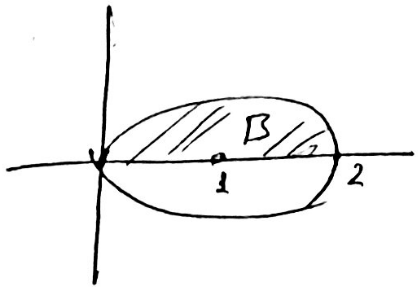
$$\int_B e^{x+y}\,dx\,dy = \int_1^2\left(\int_{-x+2}^{x} e^{x+y}\,dy\right)dx = \int_1^2 e^x\left(\int_{-x+2}^{x} e^y\,dy\right)dx$$

$$= \int_1^2 e^x\left[e^x - e^{-x+2}\right]dx = \int_1^2 e^{2x}\,dx - \int_1^2 e^2\,dx = \frac12\int_2^4 e^t\,dt - e^2$$

$$= \frac12\left(e^4-e^2\right) - e^2 = \frac12 e^4 - \frac32 e^2.$$

ΘΕΜΑ 5ο Έχουμε $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+\frac{y^2}{2^2}\leq 1,\ y\geq 0\}$

Θέτουμε τον μετασχηματισμό



$x-1=r\cos\varphi \quad \Leftrightarrow \quad x=1+r\cos\varphi$

$\frac{y}{2}=r\sin\varphi \qquad\quad y=2r\sin\varphi$

Αφού $y\geq 0$ πρέπει $0\leq\varphi\leq\pi$, $0\leq r\leq 1$

Ο Ιακωβιανός πίνακας είναι $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ 2\sin\varphi & 2r\cos\varphi\end{pmatrix}$ που έχει ορίζουσα $2r$

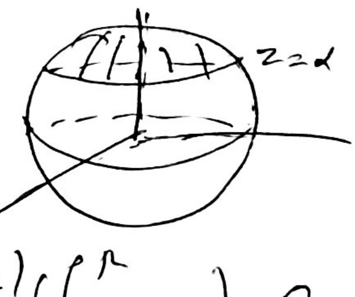
Άρα

$$\int_B (x-y)\,dx\,dy=\int_0^{\pi}\int_0^1 (1+r\cos\varphi-2r\sin\varphi)\cdot 2r\,dr\,d\varphi$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^1 2r\,dr\,d\varphi+\int_0^{\pi}\int_0^1 2r\cos\varphi\,dr\,d\varphi-\int_0^{\pi}\int_0^1 4r\sin\varphi\,dr\,d\varphi$$

$$=\pi+\frac{2}{3}\cdot(0-0)+\frac{4}{3}\cdot[-1-1]=\pi-\frac{8}{3}$$

ΘΕΜΑ 6ο 1ος/ Μετά σχηματισμούς σε σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε



έχουμε $0\leq\varphi\leq 2\pi$, $\alpha\leq z=\rho\cos\theta$, οπότε

$\frac{\alpha}{\cos\theta}\leq\rho\leq R$ και $0\leq\theta\leq\arccos\left(\frac{\alpha}{R}\right)$. Άρα

$$Vol(K)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\arccos(\frac{\alpha}{R})}\left(\int_{\frac{\alpha}{\cos\theta}}^{R}\rho^2\sin\theta\,d\rho\right)d\theta\,d\varphi=2\pi\int_0^{\arccos(\frac{\alpha}{R})}\sin\theta\left(\int_{\frac{\alpha}{\cos\theta}}^{R}\rho^2\,d\rho\right)d\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\arccos(\frac{\alpha}{R})}\sin\theta\left[\frac{R^3}{3}-\frac{\alpha^3}{3\cos^3\theta}\right]d\theta=$$

$$=-2\pi\frac{R^3}{3}\left[\cos\left(\arccos\left(\frac{\alpha}{R}\right)\right)-\cos 0\right]+2\pi\frac{\alpha^3}{3}\int_0^{\arccos(\frac{\alpha}{R})}\frac{1}{\cos^3\theta}(-\sin\theta)\,d\theta$$

$$=2\pi\frac{R^3}{3}\left(1-\frac{\alpha}{R}\right)+\frac{2\pi\alpha^3}{3}\left[\frac{\cos^{-2}\theta}{-2}\right]_0^{\arccos(\frac{\alpha}{R})}=\frac{2\pi R^3}{3}\left(1-\frac{\alpha}{R}\right)+\frac{\pi\alpha^3}{3}\left(1-\frac{R^2}{\alpha^2}\right).$$

Σε νέες μετασχηματισμούς σε κυλινδρικές συντεταγμένες έχουμε $0 \leq r \leq \sqrt{R^2-\alpha^2}$ και

$$\alpha \leq z \leq \sqrt{R^2-r^2}$$

Άρα $\mathrm{Vol}(K) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2-\alpha^2}} \left(\int_\alpha^{\sqrt{R^2-r^2}} r\,dz \right) dr\,d\varphi$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{R^2-\alpha^2}} r \left[\sqrt{R^2-r^2} - \alpha \right] dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{R^2-\alpha^2}} \sqrt{R^2-r^2}\, r\,dr - 2\pi\alpha \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} r\,dr$$

$$= \pi \int_{\alpha^2}^{R^2} s^{1/2}\,ds - \pi\alpha\,(R^2-\alpha^2) \qquad (s = R^2 - r^2)$$

$$= \frac{2\pi}{3}(R^3-\alpha^3) - \pi\alpha\,(R^2-\alpha^2)$$

$$= \frac{2\pi}{3} R^3 + \pi \frac{a^3}{3} - \pi\alpha R^2$$

$$= \frac{2\pi R^3}{3}\left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) + \frac{\pi\alpha^3}{3}\left(1 - \frac{R^2}{\alpha^2}\right).$$