

Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-110 Απειροστικός Ι
Διδάσκων: Θ. Μουχτάρης
Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

ΠΑΡΑΔΟΣΗ ΜΕΧΡΙ ΤΡΙΤΗ 3/11/2009, ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 1^η

Για τις παρακάτω συναρτήσεις

(α) Βρείτε την παράγωγο $y' = f'(x)$ της συναρτήσεως $y=f(x)$ που δίδεται.

(β) Σχεδιάστε τις $y = f(x)$ και $y' = f'(x)$ τη μία δίπλα στην άλλη, χρησιμοποιώντας διαφορετικούς άξονες συντεταγμένων και απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις.

(γ) Για ποιες τιμές του x , αν υπάρχουν, είναι η y' θετική, μηδέν ή αρνητική;

(δ) Σε ποια διαστήματα τιμών του x , αν υπάρχουν, είναι η $y = f(x)$ αύξουσα, και σε ποια φθίνουσα; Συσχετίστε την απάντησή σας με το ερώτημα γ.

- $y = -x^2$
- $y = -\frac{1}{x}$
- $y = \frac{x^3}{3}$
- $y = \frac{x^4}{4}$

Άσκηση 2

Αν ο Γαλιλαίος είχε αφήσει μια μπάλα κανονιού να πέσει από τον πύργο της Πίζας, ύψους 55m, τότε μετά από t sec πτώσεως η μπάλα θα βρισκόταν σε ύψος $s = 55 - 4.9t^2$.

(α) Ποια θα ήταν τότε η ταχύτητα (μέτρο και φορά) και η επιτάχυνση της μπάλας τη χρονική στιγμή t ;

(β) Σε πόσο χρόνο θα έφτανε η μπάλα στο έδαφος;

(γ) Ποια θα ήταν η ταχύτητα της μπάλας τη στιγμή που θα έφτανε στο έδαφος;

Άσκηση 3

Βρείτε τις εφαπτόμενες των παρακάτω συναρτήσεων στα σημεία που δίνονται

$$y = \frac{4x}{x^2 + 1}, (1, 2)$$

$$y = \frac{8}{x^2 + 4}, (2, 1)$$

Άσκηση 4

Η καμπύλη $y = ax^2 + bx + c$ διέρχεται από το σημείο (1,2). Και εφάπτεται της ευθείας $y = x$ στην αρχή των αξόνων. Βρείτε τα a,b,c.

Άσκηση 5

Κατά τη χρονική στιγμή $t \geq 0$, η ταχύτητα ενός σώματος που κινείται επί του άξονα s δίδεται από τη σχέση $v = t^2 - 4t + 3$.

(α) Να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος κάθε φορά που η ταχύτητά του μηδενίζεται.

(β) Πότε κινείται προς τα εμπρός το σώμα και πότε προς τα πίσω;

(γ) Πότε αυξάνεται η ταχύτητα του σώματος και πότε μειώνεται;

Άσκηση 6

Σχεδιάστε τις καμπύλες μαζί με τις εφαιπτόμενες τους στα αναφερόμενα διαστήματα και σημεία, αντίστοιχα.

- $y = \sin x, \frac{-3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$

- $x = -\pi, 0, \frac{3\pi}{2}$

- $y = \tan x, \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

- $x = \frac{-\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$

- $y = 1 + \cos x, \frac{-3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$

- $x = \frac{-\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$

Άσκηση 7

Κάνοντας χρήση μαθηματικής επαγωγής, δείξτε ότι αν $y = u_1 u_2 \dots u_n$ είναι ένα πεπερασμένο γινόμενο διαφορίσιμων συναρτήσεων, τότε η συνάρτηση y είναι διαφορίσιμη στο κοινό πεδίο ορισμού τους και ότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du_1}{dx} u_2 \dots u_n + u_1 \frac{du_2}{dx} u_3 \dots u_n + u_1 u_2 \frac{du_3}{dx} u_4 \dots u_n + \dots + u_1 \dots u_{n-1} \frac{du_n}{dx}$$

Άσκηση 8

Για μικρού πλάτους ταλαντώσεις, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο για τη σχέση που συνδέει την περίοδο T με το μήκος L απλού εκκρεμούς. Το μοντέλο είναι

η εξίσωση $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$, όπου g είναι η σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας στο σημείο

όπου βρίσκεται το εκκρεμές. Αν το g εκφράζεται σε cm ανά sec^2 , τότε το L εκφράζεται σε cm και το T σε sec . Αν το εκκρεμές είναι μεταλλικό, το μήκος του θα μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία, και συγκεκριμένα θα αυξάνεται ή θα μειώνεται με ρυθμό που είναι περίπου ανάλογος του L . Αν u είναι η θερμοκρασία και k η σταθερά της εν λόγω αναλογίας, τότε θα ισχύει $\frac{dL}{du} = kL$. Αν έτσι έχουν τα πράγματα, να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της περιόδου ως προς τη θερμοκρασία ισούται με $\frac{kT}{2}$.

Άσκηση 9

Δύο αεροσκάφη της πολιτικής αεροπορίας πετούν στα 40.000 πόδια σε ευθείες τροχιές που τέμνονται κάθετα. Το αεροσκάφος Α πλησιάζει το σημείο τομής με ταχύτητα 442 κόμβων (1 κόμβος = 1 ναυτικό μίλι την ώρα = 1852μ.). Το αεροσκάφος Β πλησιάζει το σημείο τομής με ταχύτητα 481 κόμβων. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης μεταξύ των αεροσκαφών τη στιγμή που τα Α και Β απέχουν 5 και 12 ναυτικά μίλια, αντίστοιχα, από το σημείο τομής;

Άσκηση 10

(α) Για ποιες τιμές των a, b είναι η συνάρτηση

$$f(x) = ax, x < 2$$

$$f(x) = ax^2 - bx + 3, x \geq 2$$

διαφορίσιμη για κάθε x ;

(β) Εξηγήστε τη γεωμετρία της γραφικής παράστασης της f .