

ΑΣΚΗΣΗ 1

α)

$$C_0 = \{ \{ P \rightarrow Q \vee R, Q \rightarrow S, R \rightarrow S, \neg(P \rightarrow S) \} \}$$

$$C_1 = \{ \{ P \rightarrow Q \vee R, \underline{Q \rightarrow S}, R \rightarrow S, P, \neg S \} \} \quad [\neg \rightarrow]$$

$$C_2 = \{ \{ P \rightarrow Q \vee R, \neg Q, R \rightarrow S, P, \neg S \}, \{ P \rightarrow Q \vee R, \underline{S}, R \rightarrow S, P, \underline{\neg S} \} \} \quad [\rightarrow]$$

$$C_3 = \{ \{ P \rightarrow Q \vee R, \neg Q, \underline{R \rightarrow S}, P, \neg S \} \} \quad [\text{del}]$$

$$C_4 = \{ \{ P \rightarrow Q \vee R, \neg Q, \neg R, P, \neg S \}, \{ P \rightarrow Q \vee R, \neg Q, \underline{S}, P, \underline{\neg S} \} \} \quad [\rightarrow]$$

$$C_5 = \{ \{ \underline{P \rightarrow Q \vee R}, \neg Q, \neg R, P, \neg S \} \} \quad [\text{del}]$$

$$C_6 = \{ \{ \underline{\neg P}, \neg Q, \neg R, \underline{P}, \neg S \}, \{ Q \vee R, \neg Q, \neg R, P, \neg S \} \} \quad [\rightarrow]$$

$$C_7 = \{ \{ \underline{Q \vee R}, \neg Q, \neg R, P, \neg S \} \} \quad [\text{del}]$$

$$C_8 = \{ \{ \underline{Q}, \underline{\neg Q}, \neg R, P, \neg S \}, \{ \underline{R}, \neg Q, \underline{\neg R}, P, \neg S \} \} \quad [\vee]$$

$$C_9 = \{ \} \quad [\text{del}]$$

Το σύνολο που προέκυψε είναι κενό. Άρα το αρχικό σύνολο
δεν είναι ικανοποιήσιμο, άρα η εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη

ΑΣΚΗΣΗ 1B

$$C_0 = \{ \{ P \wedge Q \rightarrow R, R \wedge S \rightarrow T \} / P \wedge S \rightarrow T \wedge R \}$$

$$C_1 = \{ \{ P \wedge Q \rightarrow R, R \wedge S \rightarrow T, \neg(P \wedge S \rightarrow T \wedge R) \} \} \quad [\neg \rightarrow]$$

$$C_2 = \{ \{ P \wedge Q \rightarrow R, R \wedge S \rightarrow T, \underline{P \wedge S}, \neg(T \wedge R) \} \} \quad [\wedge]$$

$$C_3 = \{ \{ \underline{P \wedge Q \rightarrow R}, R \wedge S \rightarrow T, P, S, \neg(T \wedge R) \} \} \quad [\rightarrow]$$

$$C_4 = \{ \{ \neg(P \wedge Q), R \wedge S \rightarrow T, P, S, \neg(T \wedge R) \}, \{ R, R \wedge S \rightarrow T, P, S, \neg(T \wedge R) \} \}$$

C₄₁

C₄₂

$$C_{41} = \{ \{ \neg(P \wedge Q), \underline{R \wedge S \rightarrow T}, P, S, \neg(T \wedge R) \} \} \quad [\rightarrow]$$

$$C_{411} = \{ \{ \neg(P \wedge Q), \neg(R \wedge S), P, S, \neg(T \wedge R) \}, \{ \neg(P \wedge Q), T, P, S, \neg(T \wedge R) \} \}$$

$$C_{42} = \{ \{ R, \underline{R \wedge S \rightarrow T}, P, S, \neg(T \wedge R) \} \} \quad [\rightarrow]$$

$$C_{421} = \{ \{ R, \neg(R \wedge S), P, S, \neg(T \wedge R) \}, \{ R, T, P, S, \neg(T \wedge R) \} \}$$

Οπότε το C₅ που προκύπτει είναι

C₅₁

C₅₂

$$C_5 = \{ \{ \neg(P \wedge Q), \neg(R \wedge S), P, S, \neg(T \wedge R) \}, \{ \neg(P \wedge Q), T, P, S, \neg(T \wedge R) \}, \\ \{ R, \neg(R \wedge S), P, S, \neg(T \wedge R) \}, \{ R, T, P, S, \neg(T \wedge R) \} \}$$

C₅₃

C₅₄

$$C_{51} = \{ \{ \neg(P \wedge Q), \neg(R \wedge S), P, S, \neg(T \wedge R) \} \} \quad [\neg \wedge]$$

$$C_{511} = \{ \{ \neg P, \neg(R \wedge S), P, S, \neg(T \wedge R) \}, \{ \neg Q, \neg(R \wedge S), P, S, \neg(T \wedge R) \} \}$$

$$C_{52} = \{ \{ \neg(P \wedge Q), \neg T, P, S, \neg(T \wedge R) \} \} \quad [\neg \wedge]$$

$$C_{521} = \{ \{ \neg P, \neg T, P, S, \neg(T \wedge R) \}, \{ \neg Q, \neg T, P, S, \neg(T \wedge R) \} \}$$

$$C_{53} = \{ \{ R, \neg(R \wedge S), P, S, \neg(T \wedge R) \} \} \quad [\neg \wedge]$$

$$C_{531} = \{ \{ R, \neg R, P, S, \neg(T \wedge R) \}, \{ R, \neg S, P, S, \neg(T \wedge R) \} \}$$

$$C_{54} = \{ \{ R, \neg T, P, S, \neg(T \wedge R) \} \} \quad [\neg \wedge]$$

$$C_{541} = \{ \{ R, \neg T, P, S, \neg T \}, \{ R, \neg T, P, S, \neg R \} \}$$

Οπότε το C_6 που προκύπτει είναι

$$C_6 = \{ \underbrace{\{ \neg Q, \neg(R \wedge S), P, S, \neg(T \wedge R) \}}_{C_{61}}, \underbrace{\{ \neg Q, \neg T, P, S, \neg(T \wedge R) \}}_{C_{62}} \}$$

$$C_{61} = \{ \{ \neg Q, \neg(R \wedge S), P, S, \neg(T \wedge R) \} \} \quad [\neg \wedge]$$

$$C_{611} = \{ \{ \neg Q, \neg R, P, S, \neg(T \wedge R) \}, \{ \neg Q, \neg S, P, S, \neg(T \wedge R) \} \}$$

$$C_{62} = \{ \{ \neg Q, \neg T, P, S, \neg(T \wedge R) \} \} \quad [\neg \wedge]$$

$$C_{621} = \{ \{ \neg Q, \neg T, P, S, \neg T \}, \{ \neg Q, \neg T, P, S, \neg R \} \}$$

Οπότε το C_7 που προκύπτει είναι:

$$C_7 = \{ \{ \neg Q, \neg R, P, S, \neg(T \wedge R) \}, \{ \neg Q, \neg T, P, S, \neg R \} \} \quad [\neg \wedge]$$

$$C_8 = \{ \{ \neg Q, \neg R, P, S, \neg T \}, \{ \neg Q, \neg R, P, S, \neg R \}, \{ \neg Q, \neg T, P, S, \neg R \} \}$$

Το C_8 περιέχει μεταβλητές και αρνήσεις μεταβλητών. Δεν επιδέχεται καμία αντικατάσταση. Άρα το σύνολό μου είναι ικανοποιήσιμο, ^{από} η εξαγωγή συμπεράσματος δεν είναι έγκυρη.

Άσκηση 2

$$a) \{P, Q \vee R\} / (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

(1) P (Υποθέτω παραγωγής)

(2) $Q \vee R$ (υποθέτω παραγωγής)

(3) Υποπαράγωγη

(3.1) Q (Υποθέτω υποπαράγωγής)

(3.2) $P \wedge Q$ (από (1), (3.1), εισαγωγή αββέυης)

(3.3) $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (από (3.2) και εισαγωγή διαβέυης αριστερά)

(4) Υποπαράγωγη

(4.1) R (Υποθέτω υποπαράγωγής)

(4.2) $P \wedge R$ (από (1), (4.1) και εισαγωγή αββέυης)

(4.3) $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (από (4.2) και εισαγωγή διαβέυης δεξιά)

(5) $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (από (2), (3), (4) και απαγωγή διαβέυης)

$$b) P / Q \rightarrow P$$

(1) P (υποθέτω παραγωγής)

(2) Υποπαράγωγη

(2.1) Q (υποθέτω υποπαράγωγής)

(2.2) P (από (1) με επανάληψη)

(3) $Q \rightarrow P$ (από (2) με εισαγωγή \rightarrow)

Άσκηση 3

(εφαρμόζουμε τον κανόνα αβαντής
ισοδυναμίας με χρήση 2 υποπαραγωγών)

1) Υποπαραγωγή

1.1) $(Q \wedge R) \vee P$ (Υπόθεση Υποπαραγωγής)

1.2) Υποπαραγωγή (για αναδοτική διαίρεση)

1.2.1) $Q \wedge R$ (Υποθ. Υποπαρ)

1.2.2) Q (Αναδοτική σύζευξη)

1.2.3) R (Αναδοτική σύζευξη)

1.2.4) $Q \vee P$ (Εισαγωγή διαίρεσης δεξιά)

1.2.5) $R \vee P$ (Εισαγωγή διαίρεσης ~~αριστερά~~ δεξιά)

1.2.6) $(Q \vee P) \wedge (R \vee P)$ (Εισαγωγή σύζευξης)

1.3) Υποπαραγωγή

1.3.1) P (Υπόθεση Υποπαραγωγής)

1.3.2) $Q \vee P$ (Εισαγωγή \vee αριστερά)

1.3.3) $R \vee P$ (Εισαγωγή \vee αριστερά)

1.3.4) $(Q \vee P) \wedge (R \vee P)$ (Εισαγωγή σύζευξης)

1.4) $(Q \vee P) \wedge (R \vee P)$

2) Υποπαραγωγή

2.1) $(Q \vee P) \wedge (R \vee P)$ (Υπόθεση Υποπαραγωγής)

2.2) $Q \vee P$ (Αναδοτική σύζευξη)

2.3) $R \vee P$ (Αναδοτική σύζευξη)

2.4) Υποπαραγωγή (Για αναδοτική διαίρεση από $Q \vee R$)

2.4.1) P (Υπόθεση Υποπαρ)

2.4.2) $P \vee (Q \wedge R)$ (Εισαγωγή διαίρεσης δεξιά)

2.5) Υποπαραγωγή (Αναδοτική διαίρεση $Q \vee R$)

2.5.1) Q (Υπόθεση Υποπαρ).

2.5.2) Υποπαραγωγή (Αναδοτική διαίρεση $R \vee P$)

2.5.2.1) R (Υποθ. Υποπαρ)

2.5.2.2) $Q \wedge R$ (Από 2.5.1 ή 2.5.2.1 και εισαγωγή \wedge)

2.5.2.3) $P \vee (Q \wedge R)$ (Εισαγωγή \vee από αριστερά)

2.5.3) Υποπαραγωγή (Αναδοτική διαίρεση $R \vee P$)

2.5.3.1) P

2.5.3.2) $P \vee (Q \wedge R)$ (Εισαγωγή \vee από δεξιά)

2.5.4) $P \vee (Q \wedge R)$

2.6) $P \vee (Q \wedge R)$

3) $(Q \wedge R) \vee P \leftrightarrow (Q \vee P) \wedge (R \vee P)$ (Εισαγωγή ισοδυναμίας)

ΑΣΚΗΣΗ 4

- $P \vee Q$
- $P \rightarrow R \vee S \equiv \neg P \vee R \vee S$
- $R \rightarrow T \wedge U \equiv \neg R \vee (T \wedge U) \equiv (\neg R \vee T) \wedge (\neg R \vee U)$
- $U \wedge \neg S \rightarrow \neg T \equiv \neg (U \wedge \neg S) \vee \neg T \equiv \neg U \vee S \vee \neg T$
- $\neg (\neg S \rightarrow Q) \equiv \neg (\neg \neg S \vee Q) \equiv \neg S \wedge \neg Q$

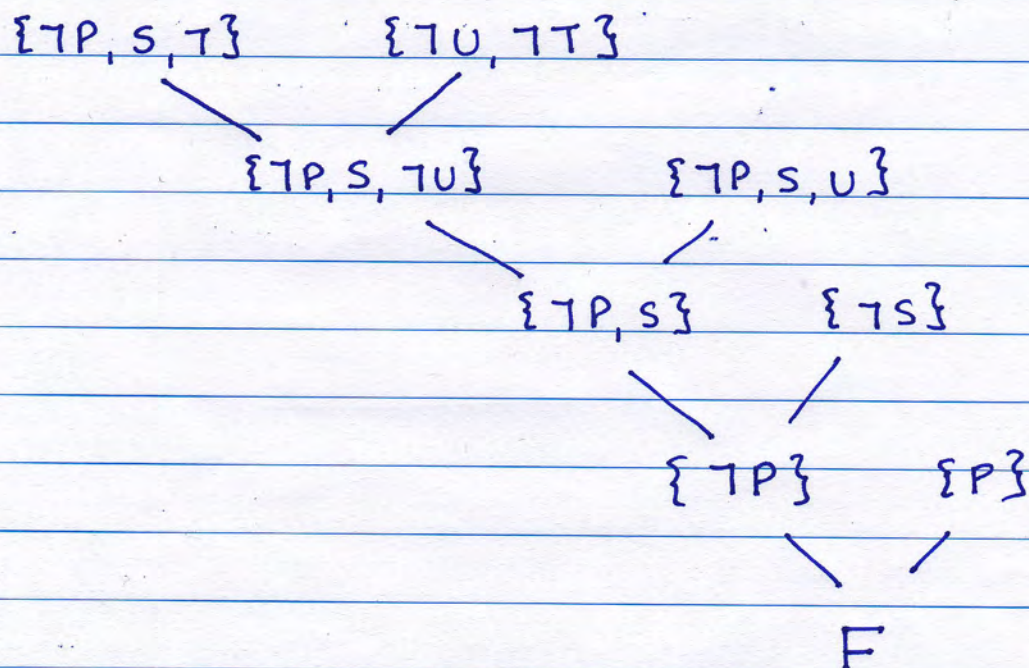
$$S = \{\{P, Q\}, \{\neg P, R, S\}, \{\neg R, T\}, \{\neg R, U\}, \{\neg U, S, \neg T\}, \neg S, \neg Q\}$$

Σχηματίζουμε όπως επιθυούμε

- $\text{res}(\{P, Q\}, \{\neg P, R, S\}) = \{Q, R, S\}$
- $\text{res}(\{P, Q\}, \neg Q) = P$
- $\text{res}(\{\neg P, R, S\}, \{\neg R, T\}) = \{\neg P, S, T\}$
- $\text{res}(\{\neg P, R, S\}, \{\neg R, U\}) = \{\neg P, S, U\}$
- $\text{res}(\{\neg P, R, S\}, \neg S) = \{\neg P, R\}$
- $\text{res}(\{\neg R, T\}, \{\neg U, S, \neg T\}) = \{\neg R, U, S\}$
- $\text{res}(\{\neg R, U\}, \{\neg U, S, \neg T\}) = \{\neg R, S, \neg T\}$
- $\text{res}(\{\neg U, S, \neg T\}, \neg S) = \{\neg U, \neg T\}$

$$\text{Αρα το } R(S) = \{\{P, Q\}, \{\neg P, R, S\}, \{\neg R, T\}, \{\neg R, U\}, \{\neg U, S, \neg T\}, \neg S, \neg Q, \{Q, R, S\}, P, \{\neg P, S, T\}, \{\neg P, S, U\}, \{\neg P, R\}, \{\neg R, U, S\}, \{\neg R, S, \neg T\}, \{\neg U, \neg T\}\}$$

Παρατηρούμε ότι ΔΕΝ υπάρχουν αντίθετοι όροι και χρησιμοποιώντας το παρακάτω δένδρο επίλυσης μπορούμε να ελέγχουμε την ικανοποιησιμότητα.



Άρα η εξαγωγή μας είναι έγκυρη, αφού το σύνολο είναι μη-ικανοποιήσιμο.

ΑΣΚΗΣΗ 5

- $\neg P \vee Q \rightarrow \{\neg P, Q\}$
- $\neg P \vee R \rightarrow \{\neg P, R\}$
- $\neg Q \vee \neg R \vee S \rightarrow \{\neg Q, \neg R, S\}$
- $\neg Q \vee \neg T \vee U \rightarrow \{\neg Q, \neg R, T\}$
- $\neg S \vee \neg T \vee U \rightarrow \{\neg S, \neg T, U\}$
- $\neg U \rightarrow \{\neg U\}$

Επειδή κάθε όρος του S περιέχει αρνητικό γράμμα, βάσει του
λήμματος που έχουμε δει στη θεωρία μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι
το σύνολο είναι ικανοποιήσιμο.

Το δένδρο ανασκευής είναι:

