

ΗΥ119 - ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΣΚΗΣΗ 3

Η άσκηση θα παραδοθεί ηλεκτρονικά στη σελίδα του μαθήματος στο <http://elearn.uoc.gr/>.

Θεωρητικές Ασκήσεις

(80%)

Άσκηση 1

Ποια ζεύγη είναι ορθογώνια, μεταξύ των διανυσμάτων

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2

Βρείτε ένα διάνυσμα x ορθογώνιο στον χώρο γραμμών, και ένα διάνυσμα y ορθογώνιο στο χώρο στηλών του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3

Αληθές ή ψευδές (και εξηγήστε τις επιλογές σας):

1. Αν ο V είναι ορθογώνιος στον W , τότε και ο V^\perp είναι ορθογώνιος στον W^\perp .
2. Αν ο V είναι ορθογώνιος στον W και ο W είναι ορθογώνιος στον Z , τότε και ο V είναι ορθογώνιος στον Z .

Άσκηση 4

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (5) της σελίδας 170 του βιβλίου Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές του G. Strang, επαληθεύστε ότι το μήκος της προβολής είναι $\|p\| = \|b\| |\cos\theta|$.

Άσκηση 5

Βρείτε τον πίνακα που προβάλλει κάθε σημείο του επιπέδου πάνω στην ευθεία $x + 2y = 0$

Άσκηση 6

Υποθέστε ότι οι τιμές $b_1 = 1$ και $b_2 = 7$ στους χρόνους $t_1 = 1$ και $t_2 = 2$ οδηγούν στην παρεμβολή ευθείας $b = Dt$ διερχόμενης από την αρχή. Λύστε τις $D = 1$ και $2D = 7$ με ελάχιστα τετράγωνα και σχεδιάστε τη βέλτιστη ευθεία.

Άσκηση 7

α) Εάν $P = P^T P$ δείξτε ότι ο P είναι ο πίνακας προβολής. β) Σε ποιόν υποχώρο προβάλλει ο πίνακας προβολής;

Άσκηση 8

Ποιος πίνακας 2 επί 2 προβάλλει το επίπεδο x, y στην -45° ευθεία $x + y = 0$;

Άσκηση 9

Εφαρμόστε την μέθοδο Gram-Schmidt στα $(1, -1, 0)$, $(0, 1, -1)$ και $(1, 0, -1)$ για να βρείτε μία ορθοκανονική βάση του επιπέδου $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Ποιά είναι η διάσταση αυτού του υποχώρου και πόσα μη μηδενικά διανύσματα προκύπτουν από την Gram-Schmidt;

Άσκηση 10

Εφαρμόστε διαδικασία Gram-Smidt στα

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και γράψτε το αποτέλεσμα στη μορφή $A = QR$.

Προγραμματιστική Άσκηση

(20%) Στην άσκηση αυτή θα κάνετε παρεμβολή των δεδομένων με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Κατεβάστε από τη σελίδα του μαθήματος το αρχείο `exercise3matrices.mat`. Φορτώνοντάς το στο MATLAB θα δείτε δύο πίνακες, τον 1000×1 πίνακα Y και τον 1000×4 πίνακα X . Κάθε στήλη του X αντιστοιχεί σε μία μεταβλητή X_i .

1. Υλοποιήστε τη συνάρτηση `linearinterpolation` που θα παίρνει σαν όρισμα τους πίνακες Q και U και θα επιστρέφει τους συντελεστές a_i του υπερεπιπέδου $Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_0$ που προκύπτει με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.
2. Κάντε το ιστόγραμμα των λαθών. Τι παρατηρείτε;
3. Δείξτε (υπολογιστικά) ότι τι διάνυσμα του λάθους είναι κάθετο στο διάνυσμα στήλων του πίνακα δεδομένων.

Παραδώστε:

1. Ένα αρχείο [αριθμος μητρώου σας]_ex2.zip που θα περιλαμβάνει
 - Τη συνάρτηση linearinterpolation.m.
 - Το scriptexercise3 που θα φορτώνει τους πίνακες X και Y από το αρχείο exercise3matrices.mat και θα καλεί τη συνάρτηση linearinterpolation.m με τους πίνακες για ορίσματα.
 - Μία αναφορά (δε χρειάζεται να είναι ξεχωριστό έγγραφο, μπορείτε να τη συμπεριλάβετε στις λύσεις των θεωρητικών ασκήσεων) που να περιλαμβάνει μία **μικρή** περιγραφή του αλγορίθμου που υλοποιήσατε, και την απάντησή σας στο ερώτημα 2 της προγραμματιστικής άσκησης.