ΗΥ-111 (1) 9/3/2015

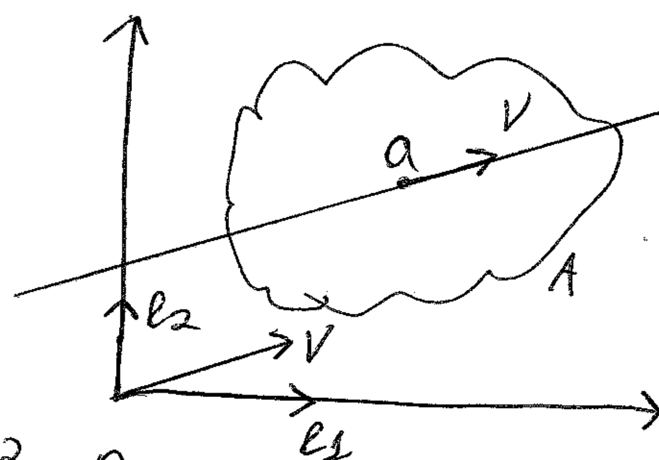
ΜΕΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και $f: A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.
Η *μερική παράγωγος* της f στο $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ ως προς την i-μεταβλητή είναι $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\cdot e_i) - f(x)}{h} =$
$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i+h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h}$ άν υπάρχει το όριο.

Για $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ το $f'(a; v) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\cdot v) - f(a)}{h}$ λέγεται *κατευθυνόμενη παράγωγος* της f στο a κατά τη διεύθυνση του v.

Προφανώς $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'(a; e_i)$

$e_i = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-θέση}}}{1}, 0, \ldots, 0)$



Παραδείγματα (a) Η $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = e^x \cos(x+y)$ έχει $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \cos(x+y) - e^x \sin(x+y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^{2} \sin(x+y).$$

HY-111

(β) Η $f: R^2 \to R$ με $f(x,y) = x\log(x^2+y^2)$ έχει

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \log(x^2+y^2) + x\frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \cdot \frac{1}{x^2+y^2}$$

(γ) Έστω $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in R^{n\times n}$ συμμετρικα, δηλαδή $a_{ij} = a_{ji}$ για κάθε $1 \le i,j \le n$ και $f: R^n \to R$ η (τετραγωνική μορφή) $f(x) = \langle Ax, x\rangle$, δηλαδή

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Έστω $v \in R^n$, $v \neq 0$. Τότε $f'(x;v) =$
$= F'(0)$ όπου $F(t) = f(x + t\cdot v) =$
$= \langle A(x+t\cdot v), x+t\cdot v\rangle = \langle Ax + At\cdot v, x+t\cdot v\rangle$
$= \langle Ax,x\rangle + t\langle Ax,v\rangle + t\langle Av,x\rangle + t^2\langle Av,v\rangle$
$= f(x) + 2t\langle Ax,v\rangle + t^2\cdot f(v)$

Άρα $f'(x;v) = 2\langle Ax, v\rangle$

<u>Παρατήρηση</u>: Αν ο $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ είναι συμμετρικα τότε ισχύει $\langle Ax,y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ για κάθε $x,y \in R^n$ γιατί αν $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,\ldots,y_n)$ τότε $\langle Ax,y\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ και $\langle x, Ay\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i =$
$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji} x_i y_j$

HY-111 ② 9/3/2015

(δ) Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & , \text{για } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{για } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Έστω $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$ θέλουμε να υπολογίσουμε την $f'((0,0); v)$. Απ' τον ορισμό έχουμε $f'((0,0); v) =$

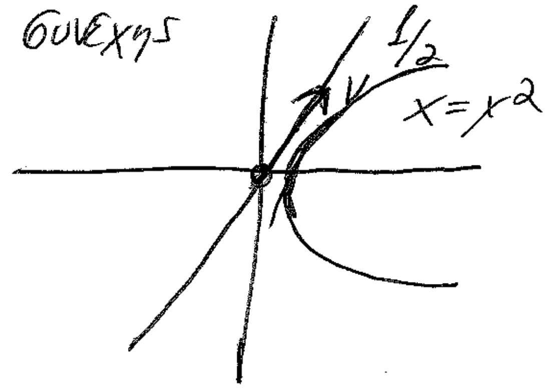
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0) + h(v_1, v_2)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h \cdot v_1, hv_2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h \cdot v_1 \cdot h^2 \cdot v_2^2}{h^2 \cdot v_1^2 + h^4 \cdot v_2^4}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3 \cdot v_1 \cdot v_2^2}{h^3 v_1^2 + h^5 \cdot v_2^4} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + h^2 \cdot v_2^4} = \begin{cases} \frac{v_2^2}{v_1} & , \text{όταν } v_1 \neq 0 \\ 0 & , \text{όταν } v_1 = 0 \end{cases}$$

Άρα η $f'((0,0); v)$ υπάρχει για κάθε $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$

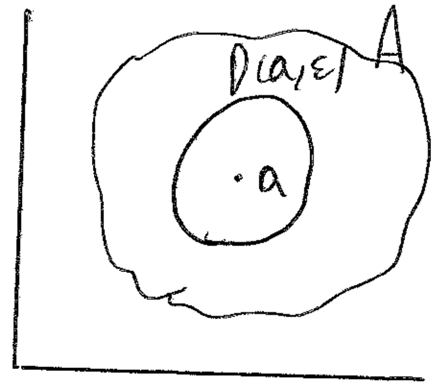
Παρατηρούμε όμως ότι η f <u>δεν</u> είναι συνεχής στο $(0,0)$, γιατί $f(y^2, y) = \frac{1}{2}$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$



ΗΥ-111

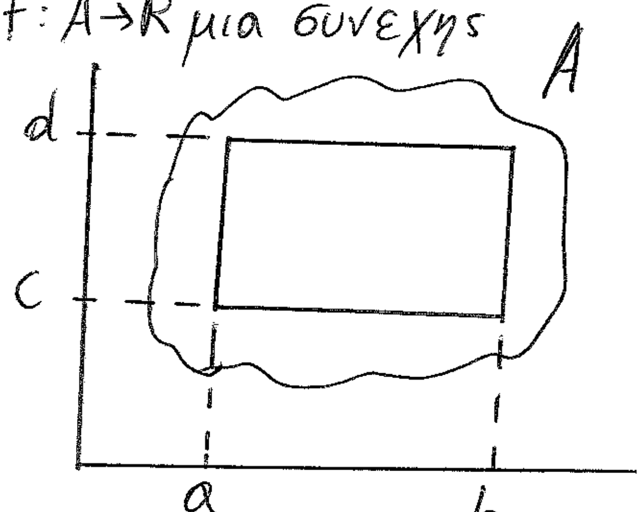
<u>**Ορισμός:**</u> Η $f: A \to R$, $\overset{\text{ανοιχτό}}{A \subset R^n}$, λέμε ότι έχει <u>τοπικό μέγιστο</u> στο $a \in A$ αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $D(a,\varepsilon) \subset A$ και $f(x) \le f(a)$ για κάθε $x \in D(a,\varepsilon)$

Αν $f(x) \ge f(a)$ για κάθε $x \in D(a,\varepsilon)$ τότε λέμε ότι η f έχει <u>τοπικό ελάχιστο</u> στο $a \in A$.



<u>**Πρόταση**</u> Έστω $A \subset R^n$ ανοιχτό και $f: A \to R$. Αν $a \in A$ στο οποίο η f έχει τοπικό ακρότατο (= μέγιστο ή ελάχιστο) και υπάρχει η $f'(a,v)$, $v \in R^n$, $v \neq 0$ τότε $f'(a,v) = 0$

<u>**Πρόταση**</u> Έστω $A \subset R^2$ ανοιχτό και $f: A \to R$ μια συνεχής συνάρτηση. Έστω ακόμα $[a,b] \times [c,d] \subset A$ ένα ορθογώνιο. Θεωρούμε την συνάρτηση $F: [c,d] \to R$ με $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$



Αν η $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ υπάρχει για κάθε $(x,y) \in A$ και η συνάρτηση $\frac{\partial f}{\partial y}: A \to R$ είναι συνεχής, τότε η F είναι διαφορίσιμη και

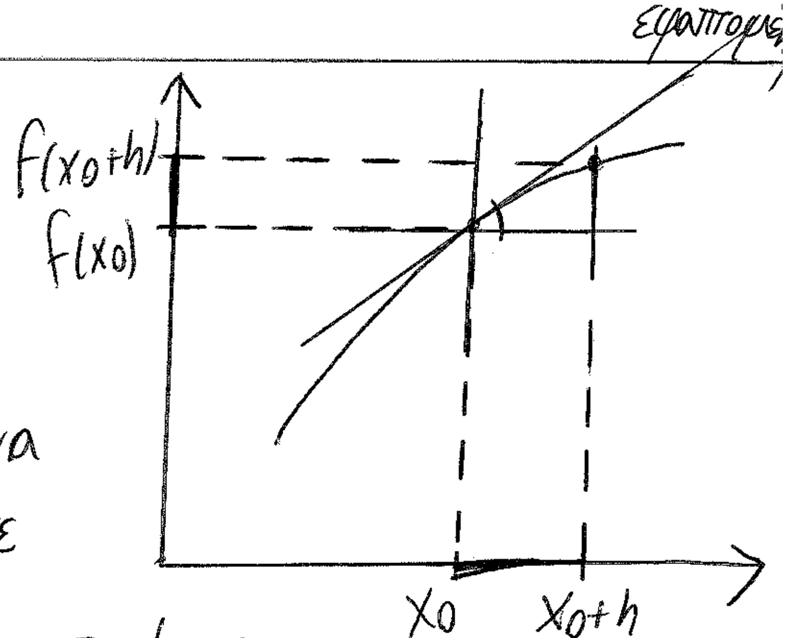
$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x,y)\,dx = F'(y) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx$$

ΗΥ-111 ③ 9/3/2015

Παράδειγμα Αν $f: R^2 \to R$ είναι η $f(x,y) = e^x \cos(x+y)$,
τότε $\frac{\partial}{\partial y}\int_0^1 e^x \cos(x+y)\,dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \cos(x+y)\right)dx =$
$= -\int_0^1 e^x \sin(x+y)\,dx$

$f:(a,b) \to R,\ a < x_0 < b$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



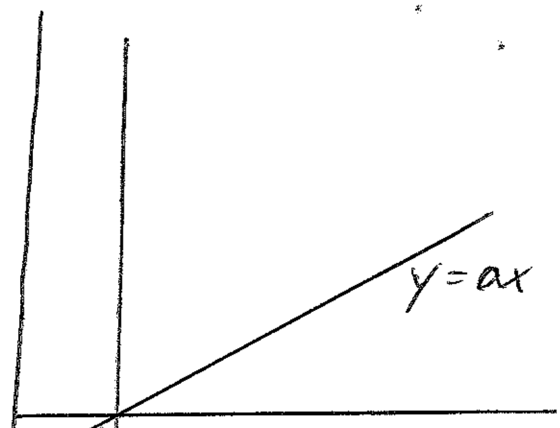
Αν μεταφέρουμε τους άξονες να έχουν αρχή το $(x_0, f(x_0))$ τότε η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το h και η εξαρτημένη, δηλαδή η τιμή της f στο h είναι $f(x_0+h) - f(x_0)$. Ο λόγος $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ είναι η κλίση της ευθείας που περνάει απ' την καινούρια αρχή $(x_0, f(x_0))$ και το $(x_0+h, f(x_0+h)-f(x_0))$. Η εφαπτομένη ευθεία στο γράφημα της f στο $(x_0, f(x_0))$ είναι η ευθεία που περνάει απ' το $(x_0, f(x_0))$ και έχει την οριακή κλίση $f'(x_0)$

(δηλαδή έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$)

HY-111

<u>Ορισμός</u>: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και $f: A \to \mathbb{R}^m$. Η f λέγεται <u>διαφορίσιμη</u> στο $x_0 \in A$ αν υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ώστε

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(x_0+h) - f(x_0) - T(h) \|}{\|h\|} = 0$$



$T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$T(x) = a \cdot x$

η T είναι γραμμική απεικόνιση

$T(\lambda x + \mu x') = \lambda T(x) + \mu T(x')$

με πίνακα $(a) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$

<u>Λήμμα</u>: Στον προηγούμενο ορισμό, αν η T υπάρχει είναι μοναδική και λέγεται <u>παράγωγος</u> της f στο x_0

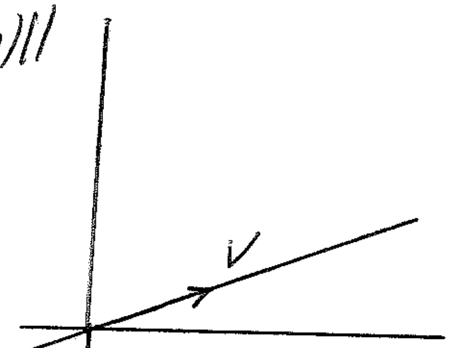
Συμβολίζεται $T = Df(x_0)$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω ότι υπάρχουν δύο γραμμικές $T, S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν τον παραπάνω ορισμό. Για κάθε $h \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\|T(h) - S(h)\| = \|(f(x_0+h) - f(x_0) - S(h) - (f(x_0+h) - f(x_0) - T(h))\|$$

$$\leq \|f(x_0+h) - f(x_0) - S(h)\| + \|f(x_0+h) - f(x_0) - T(h)\|$$

Άρα $\lim_{h \to 0} \frac{\|T(h) - S(h)\|}{\|h\|} = 0$.



Για κάθε $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ έχουμε $\lim_{t \to 0} t \cdot v = 0$

οπότε $0 = \lim_{t \to 0} \frac{\|T(tv) - S(tv)\|}{\|tv\|} = \lim_{t \to 0} \frac{\|t \cdot T(v) - tS(v)\|}{\|t\| \cdot \|v\|}$

$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{\|t\|} \|T(v) - S(v)\|}{\cancel{\|t\|} \cdot \|v\|} = \frac{\|T(v) - S(v)\|}{\|v\|}$. Άρα $\|T(v) - S(v)\| = 0$

δηλαδή $T(v) - S(v) = 0$

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin x + \sin y$

Αν θέσουμε $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ τη γραμμική απεικόνιση με πίνακα $(1\ 1)$ τότε για $x_0 = (0,0)$ έχουμε

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - T(h)}{\|h\|} = \frac{(\sin h_1 + \sin h_2) - 0 - (1\ 1)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$= \frac{(\sin h_1 + \sin h_2) - (h_1 + h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \longrightarrow 0$$

για $h = (h_1, h_2) \to (0,0)$ $\left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0 \right)$

ΗΥ-111 $\boxed{SOS}$ ① 10/3/2015

Έστω $A \subset R^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \to R^n$.

Η f λέγεται διαφορίσιμη στο $x_0 \in A$ αν υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $T: R^n \to R^m$ ώστε

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - T(h)}{\|h\|} = 0$. Η T είναι μοναδική

και λέγεται παράγωγος της f στο x_0.

Συμβολίζεται $T = Df(x_0)$

Πρόταση Αν η f είναι διαφορίσιμη στο x_0, τότε είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim (f(x_0+h) - f(x_0)) = 0$

Αν θέσουμε $E(h) = \frac{1}{\|h\|}[(f(x_0+h) - f(x_0) - D \cdot f(x_0) \cdot h]$ τότε

$f(x_0+h) - f(x_0) = Df(x_0) \cdot h + \|h\| \cdot E(h)$ και $\lim_{h \to 0} E(h) = 0$

Όμως $\lim_{h \to 0} Df(x_0) h = Df(x_0) \cdot 0 = 0$ γιατί κάθε γραμμική απεικόνιση $R^n \to R^m$ είναι συνεχής.

Άρα $\lim_{h \to 0} (f(x_0+h) - f(x_0)) = 0$

HY-111

<u>Πρόταση</u> Αν η f είναι διαφορίσιμη στο x_0, τότε για κάθε $v \in R^n$, $v \neq 0$ υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f'(x_0;v)$ και $f'(x_0;v) = Df(x_0)\cdot v$

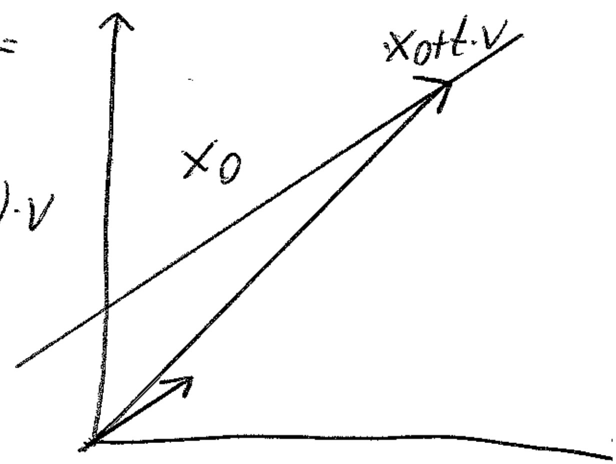
<u>Απόδειξη</u> Θέτουμε $\epsilon(h) = \frac{1}{\|h\|}\left[f(x_0+h) - f(x_0) - Df(x_0)\cdot h\right]$,

οπότε $f'(x_0;v) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x_0+t\cdot v) - f(x_0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{Df(x_0)(t\cdot v) + \|t\cdot v\|\epsilon(t\cdot v)}{t}$

$= \lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{t\,Df(x_0)\cdot v}{t} + \frac{\|t\|}{t}\|v\|\cdot\epsilon(t\cdot v)\right] =$

$= \lim\limits_{t\to 0}\left[Df(x_0)\cdot v \pm \|v\|\,\epsilon(t\cdot v)\right] = Df(x_0)\cdot v$

γιατί $\lim\limits_{t\to 0} \epsilon(t\cdot v) = 0$



Ειδικά αν η f είναι διαφορίσιμη στο x_0, τότε υπάρχει η j-μερική παράγωγος $\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0;e_j) = Df(x_0)\cdot e_j$, $1\leq j\leq n$

Το $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ είναι η κανονική βάση του R^n.

Έστω $\{e_1, \dots, e_m\}$ η κανονική βάση του R^n. Τότε

$Df(x_0)e_j = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}e_i$, από τα a_{ij}, $1\leq i\leq m$ είναι μοναδικά και ο πίνακας της $Df(x_0)$ είναι ο

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & \star & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \boxed{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\star = Df(x_0)\cdot e_j$

HY-111 ② 10/3/2015

Αφού $f: A \to R^m$ υπάρχουν μοναδικές $f_1, f_2, \dots, f_m : A \to R$ ώστε $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ για κάθε $x \in A$.

Άρα $Df(x_0) \cdot v = f'(x_0; v) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0;v) \\ f_2'(x_0;v) \\ \vdots \\ f_m'(x_0;v) \end{pmatrix}$, $v \in R^n, v \neq 0$,

οπότε ειδικά για $v = e_j$ έχουμε:

$$\frac{df}{dx_j}(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_j}(x_0) \\ \frac{df_2}{dx_j}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{df_m}{dx_j}(x_0) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \frac{df_i}{dx_j}(x_0) \cdot e_i = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i = Df(x_0) \cdot e_j = \frac{df(x_0)}{dx_j}$$

Συμπέρασμα $a_{ij} = \frac{df_i}{dx_j}(x_0)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

Δηλαδή, αν η f είναι διαφορίσιμη στο x_0, τότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι ως προς όλες τις μεταβλητές στο x_0, αλλά $\frac{df_i}{dx_j}(x_0)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ και ο πίνακας της $Df(x_0)$ είναι ο:

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(x_0) & \frac{df_1}{dx_2}(x_0) & \cdots & \frac{df_1}{dx_n}(x_0) \\ \frac{df_2}{dx_1}(x_0) & \frac{df_2}{dx_2}(x_0) & \cdots & \frac{df_2}{dx_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{f_m}{dx_1}(x_0) & \frac{df_m}{dx_2}(x_0) & \cdots & \frac{df_m}{dx_m}(x_0) \end{pmatrix}$$

Ιακωβιανός πίνακας της f στο x_0.

ΗΥ-111

<u>Αλγόριθμος ελέγχου διαφορισιμότητας συνάρτησης $f=(f_1,\dots,f_m)$ στο x_0</u>

<u>ΒΗΜΑ 1ο</u> Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους $\frac{df_i}{dx_j}(x_0)$, $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$. Αν έστω και μία δεν υπάρχει, τότε η f <u>δεν</u> είναι διαφορίσιμη στο x_0. Αν υπάρχουν όλες, προχωράμε στο

<u>ΒΗΜΑ 2ο</u> Θέτουμε $T=\begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(x_0) & \frac{df_1}{dx_2} & \cdots & \frac{df_1}{dx_m}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{df_m}{dx_1}(x_0) & \frac{df_m}{dx_2}(x_0) & \cdots & \frac{df_m}{dx_n}(x_0) \end{pmatrix}$

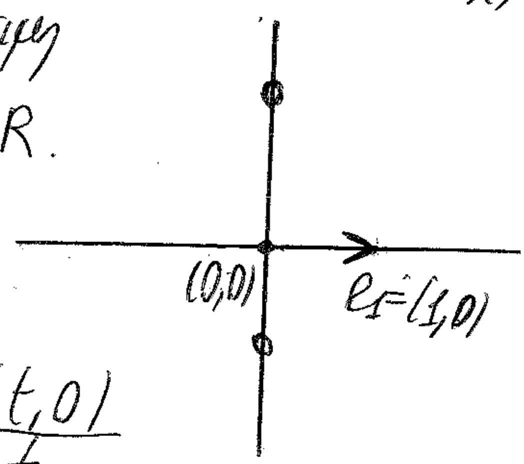
και υπολογίζουμε το

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-T(h)}{\|h\|}.$$

Αν το όριο είναι ίσο με το 0 τότε η f είναι διαφορίσιμη στο x_0. Σε κάθε άλλη περίπτωση, η f δεν είναι διαφορίσιμη στο x_0.

<u>Παράδειγμα</u> (α) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(x,y)=\begin{cases} x^2\log(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Θέλουμε να δούμε αν η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$. Προφανώς $f(0,y)=0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$.



Άρα $\frac{df}{dy}(0,0)=0$. Επίσης $\frac{df}{dx}(0,0)=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+(1,0)\cdot t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2t^{2}\log|t|}{\cancel{t}} = \lim_{t\to 0} 2t\log|t| = 0$$

Προχωράμε στο 2ο βήμα Θέτουμε $T = \left(\frac{df}{dx}(0,0)\ \frac{df}{dy}(0,0)\right) = (0\ 0)$
και υπολογίζουμε το $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f((0,0)+(h_1,h_2)) - f(0,0) - T\binom{h_1}{h_2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - 0 - (0\ 0)\binom{h_1}{h_2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2\log(h_1^2+h_2^2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Όμως $\left|\frac{h_1^2\log(h_1^2+h_2^2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| = \frac{h_1^2|\log(h_1^2+h_2^2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \frac{(h_1^2+h_2^2)|\log(h_1^2+h_2^2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$

$= 2\sqrt{h_1^2+h_2^2}\,\left|\log\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)\right| \longrightarrow 0$ όταν $\sqrt{h_1^2+h_2^2} \to 0$

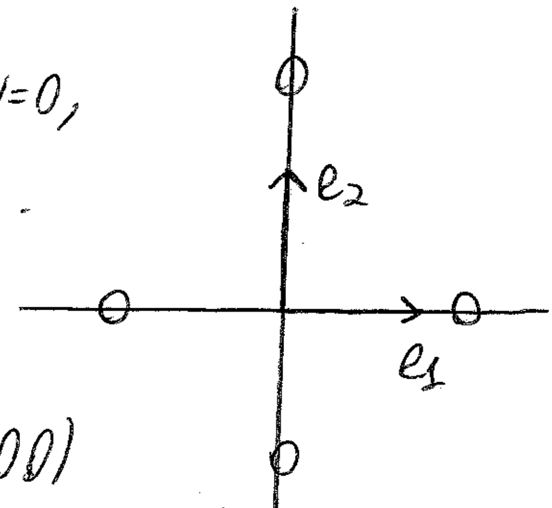
<u>Συμπέρασμα</u> $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f((0,0)+(h_1,h_2)) - f(0,0) - (0\ 0)\binom{h_1}{h_2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$

και η f είναι διαφορίσιμη στο (0,0) με παράγωγο
$Df(x_0) = (0\ \ 0)$

HY-111

(β) Έστω $f: R^2 \to R$ με $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Θέλουμε να δούμε αν η f είναι διαφορίσιμη στο (0,0). Επειδή $f(x,0)=0$, $f(0,y)=0$ για κάθε $x\in R$, $y \in R$ έχουμε αμέσως ότι $\frac{df}{dx}(0,0)=0$, $\frac{df}{dy}(0,0)=0$



Προχωράμε στο 2ο βήμα. Θέτουμε $T=(0\,0)$ και υπολογίζουμε το $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-(0\,0)\binom{h_1}{h_2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1^2 \cdot h_2}{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2\cdot h_2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}$$

Για $h_1=h_2$ έχουμε $\left|\frac{h_1^2 h_2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}\right| = \frac{|h_1|^3}{2^{3/2}|h_1^2|^{3/2}} = \frac{1}{2^{3/2}}$

Άρα το όριο δεν είναι ίσο με το 0 (μάλιστα δεν υπάρχει) και συνεπώς η f <u>δεν</u> είναι διαφορίσιμη στο (0,0).

Η f <u>όμως είναι συνεχής</u> στο (0,0)

ΗΥ-111 (4) 10/3/2015

Θεώρημα Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $f=(f_1, f_2, \ldots, f_m): A \to \mathbb{R}^m$ και $a \in A$. Αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $D(a,\varepsilon) \subset A$ και οι $\frac{df_i}{dx_j}(x)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ υπάρχουν για κάθε $x \in D(a,\varepsilon)$ και είναι συνεχείς συναρτήσεις $\frac{df_i}{dx_j}: D(a,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ στο a τότε η f είναι διαφορίσιμη στο a.

Ορισμός Η f λέγεται συνεχής διαφορίσιμη (δηλαδή C^1) στο A αν υπάρχουν η $\frac{df_i}{dx_j}$ πάνω στο A και είναι συνεχείς συναρτήσεις $\frac{df_i}{dx_j}: A \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

$\Leftrightarrow$ η συνάρτηση $Df: A$ υπάρχει $x \longmapsto$

$$\longmapsto Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(x) & \cdots & \frac{df_1}{dx_n}(x) \\ \frac{df_2}{dx_1}(x) & \cdots & \frac{df_2}{dx_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{df_m}{dx_1}(x) & \cdots & \frac{df_m}{dx_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} = \mathbb{R}^{m \cdot n}$$

HY-111

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $f: R^3 \to R^3$, $f(x,y,z) = (\underbrace{x\cos y}_{f_1(x,y,z)}, \underbrace{x\sin y}_{f_2(x,y,z)}, \underbrace{z}_{f_3(x,y,z)})$

Εδώ έχουμε $\frac{df}{dx}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{df}{dy}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x\sin y \\ x\cos y \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\frac{df}{dz}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Επειδή η $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz} : R^3 \to R$ είναι συνεχείς πάνω, η f είναι C'.

και $Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y & 0 \\ \sin y & x\cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

· Αν $f: A \subset R^n \to R$ και x_0 τότε

$Df(x_0) = \left(\frac{df}{dx_1}(x_0), \frac{df}{dx_2}(x_0), \dots, \frac{df}{dx_0}(x_0) \right)$, αν

η f είναι διαφορίσιμη στο x_0.

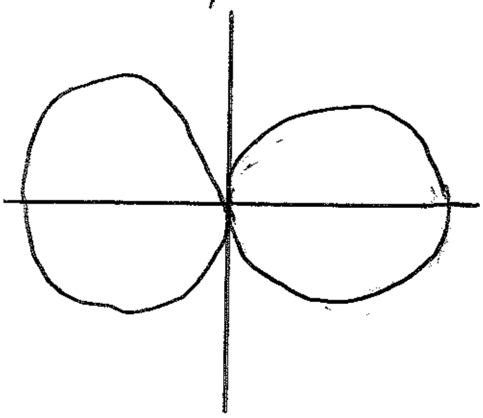
· Το $\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{df}{dx_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{df}{dx_n}(x_0) \end{pmatrix} \in R^n$ λέγεται gradient της f στο x_0 και είναι το μοναδικό με την ιδιότητα:

· $Df(x_0) \cdot v = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$ για κάθε $v \in R^n$ =

$= f'(x_0; v)$

ΗΥ-111 (Φροντιστήριο) ① 12/3/2015

Άσκηση 7 / 3º Φυλλάδιο



$$r^2 = 2a^2\cos(2\varphi),\ a>0$$

μήκος καμπύλης $\rightarrow L = \int_a^b \|\underset{\text{παράγωγος}}{\gamma'(t)}\|\,dt$

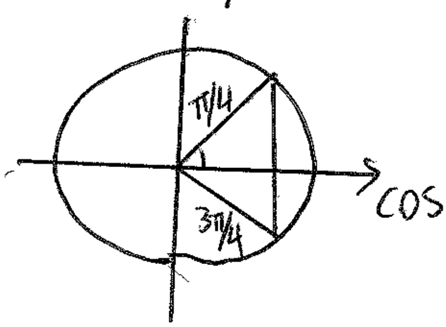
$a \le t \le b$ (Καρτεσιανές Συντεταγμένες)

$$\rightarrow L = \int_a^b \sqrt{(r'(\varphi))^2 + r^2(\varphi)} \quad \text{(Πολικές Συντ/νες)}$$

$$r(\varphi) = a\sqrt{2}\cdot\sqrt{\cos(2\varphi)} \quad -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow r'(\varphi) = a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\cos(2\varphi)}}(\cos(2\varphi))' = a\sqrt{2}\,\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{\cos(2\varphi)}}(-\sin(2\varphi))$$

$$\boxed{(r'(\varphi))^2 = 2a^2\cdot\frac{\sin^2(2\varphi)}{\cos(2\varphi)}} \quad -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$$



$$L = 2a\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\sqrt{\cos(2\varphi) + \frac{\sin^2(2\varphi)}{\cos(2\varphi)}}\,d\varphi = 2a\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\sqrt{\cos(2\varphi)}}\,d\varphi =$$

$$= 2a\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\sqrt{1-2\sin^2(\varphi)}}\,d\varphi \quad \text{Θέτω } \sqrt{2}\cdot\sin\varphi = \sin\theta,$$

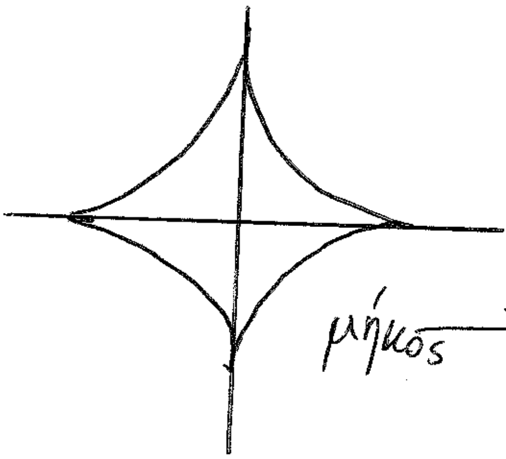
$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4},\quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

HY-111 (Φροντιστήριο)

Οπότε $\sqrt{1-2\sin^2\varphi}=\cos\theta$ $\quad \frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}\cos\varphi}=\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}}$

Άρα $L=2a\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}}\,d\theta=2a\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}}\,d\theta$

Άσκηση 2 Φυλλάδιο 4ο



$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3},\ a>0$$

$$\gamma(t)=\left(a\cos^3(t),\ a\sin^3(t)\right),\ 0\le t\le 2\pi$$

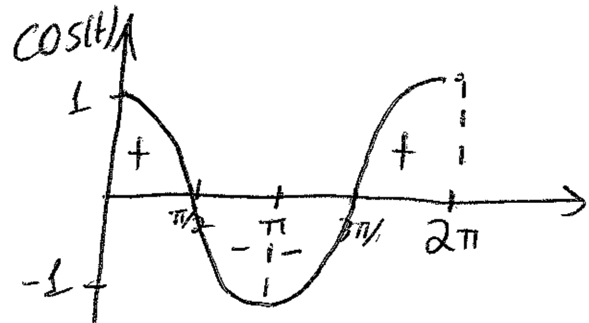
μήκος $\longrightarrow L=\int_0^{2\pi}\|\gamma(t)\|\,dt$

$$\gamma(t)=\left(-3a\cos^2(t)\sin t,\ 3a\sin^2(t)\cos t\right)$$

$$\|\gamma(t)\|=\sqrt{9a^2\cos^4(t)\sin^2(t)+9a^2\sin^4(t)\cos^2(t)}$$

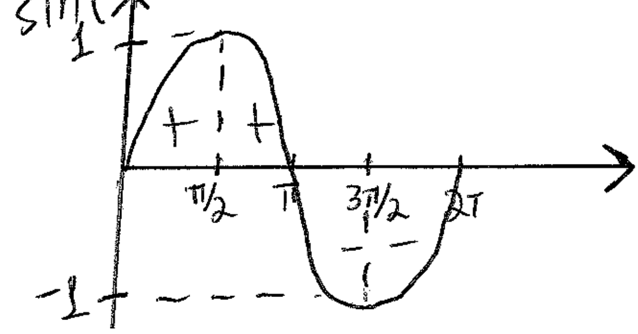
$$=\sqrt{9a^2\cos^2(t)\cdot\sin^2(t)\left(\cos^2(t)+\sin^2(t)\right)}$$

$$=3a|\cos t||\sin t|$$



$$L=\int_0^{2\pi}3a|\cos t||\sin t|\,dt$$

$$L=3a\int_0^{\pi/2}$$



HY-111 (Φροντιστήριο) ② 12/3/2015

$$L = 3a\int_0^{2\pi} |\cos t|\,|\sin t|\,dt = 3a\left(\int_0^{\pi/2}\cos t\cdot\sin t\,dt - \int_{\pi/2}^{\pi}\cos t\cdot\sin t\,dt\right.$$

$$\left. + \int_{\pi}^{3\pi/2}\cos t\cdot\sin t\,dt - \int_{3\pi/2}^{2\pi}\cos t\cdot\sin t\,dt\right)$$

$$L = \frac{3a}{2}\left(\int_0^{\pi/2}\sin(2t)\,dt - \int_{\pi/2}^{\pi}\sin(2t)\,dt + \int_{\pi}^{3\pi/2}\sin(2t)\,dt\right.$$

$$\left. - \int_{3\pi/2}^{2\pi}\sin(2t)\,dt\right) = \qquad \cos t\cdot\sin t = \frac{\sin(2t)}{2}$$

$$= \frac{3a}{2}\left(\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} - \left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi} + \left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_{\pi}^{3\pi/2}\right.$$

$$\left. - \left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_{3\pi/2}^{2\pi}\right) = \ldots = 3a$$

Άσκηση 2 φυλλάδιο 5

ⓐ $f(x_1,x_2) = x_1\cdot\cos(x_1)\cdot\cos(x_2)$

$$\frac{df(x_1,x_2)}{dx_1} = \cos(x_2)\left[\cos(x_1) - \sin(x_1)\cdot x_1\right]$$

$$\frac{df(x_1,x_2)}{dx_2} = x_1\cdot\cos(x_1)\left[-\sin(x_2)\right]$$

ΗΥ-111 (Φροντιστήριο)

β) $f(x_1,x_2) = x_1 \cdot e^{x_1^2+x_2^2}$

$$\frac{df(x_1,x_2)}{dx_1} = e^{x_1^2+x_2^2} + x_1\left(e^{x_1^2+x_2^2} \cdot 2x_1\right)$$

$$\frac{df(x_1,x_2)}{d(x_2)} = 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot e^{x_1^2+x_2^2}$$

Άσκηση 5 Φυλλάδιο 5

a) $f(0,0) = 0$

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{\cancel{n^2}}}{\frac{2}{\cancel{n^2}}} = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$$

Ασυνεχής

β) $$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x_1} = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(1,0)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(0,1)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} = 0$$

ΗΥ-111 (Φροντιστήριο) ③ 12/3/2015

Άσκηση 7 φυλλάδιο 5

$F(x_1, x_2, x_3) = e^{x_3^2} + x_3 \sin(x_1 \cdot x_2^2)$

Η $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=1,2,3$ υπάρχει σε κάθε σημείο και είναι συνεχής

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\theta}{\theta x} \int_0^1 \left[e^{t^2} + t \cdot \sin(xy^2)\right] dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\theta}{\theta x} \left[e^{t^2} + t \cdot \sin(xy^2)\right] dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^1 \left[e^{t^2} + t \cdot \sin(xy^2)\right] dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left[e^{t^2} + t \cdot \sin(xy^2)\right] dt = \int_0^1 2txy\cos(xy^2)\, dt =$$

$$= 2xy\cos(xy^2) \qquad = 2xy\cos(xy^2) \int_0^1 t\, dt = x \cdot y\cos(xy^2)$$

ΗΥ-111 (Φροντιστήριο)

Άσκηση 1 Φυλλάδιο 6

a) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \cdot y^2 \log(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t} = \frac{f(t,0)}{t} = 0 \quad \forall t \neq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

Βήμα 1ο : Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους στο (0,0) αν υπάρχουν. Αν δεν υπάρχουν η συνάρτηση δεν είναι διαφορίσιμη στο (0,0).

$$\frac{f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)}{t} = \frac{f(0,t)}{t} = 0 \quad \forall t \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Βήμα 2ο Ελέγχουμε ότι για $T = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = T(0,0)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f((0,0)+(h_1,h_2)) - f(0,0) - T \cdot h|}{\|h\|} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)=h \to 0} \frac{|f(h_1,h_2)|}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{h_1^2 \cdot h_2^2 |\log(h_1^2+h_2^2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \quad (*)$$

ΗΥ-111 (Φροντιστήριο) ④ 12/3/2015

$$h_1^2+h_2^2-2h_1\cdot h_2 \geq 0 \Rightarrow 2h_1\cdot h_2 = h_1^2+h_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_1\cdot h_2 \leq \frac{1}{2}(h_1^2+h_2^2) \Rightarrow h_1^2\cdot h_2^2 \leq \frac{1}{4}(h_1^2+h_2^2)^2$$

$$(*) \leq \lim_{h\to 0} \frac{1}{4}\frac{(h_1^2+h_2^2)^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \log(h_1^2+h_2^2) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^2 \cdot \log\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

Θέτουμε $\sqrt{h_1^2+h_2^2} = t$ Άρα $(h_1,h_2)=h\to 0$
$t\to 0^+$

$$(*\ *) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2} t^3 \log t = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2}\frac{\log t}{t^{-3}} =$$

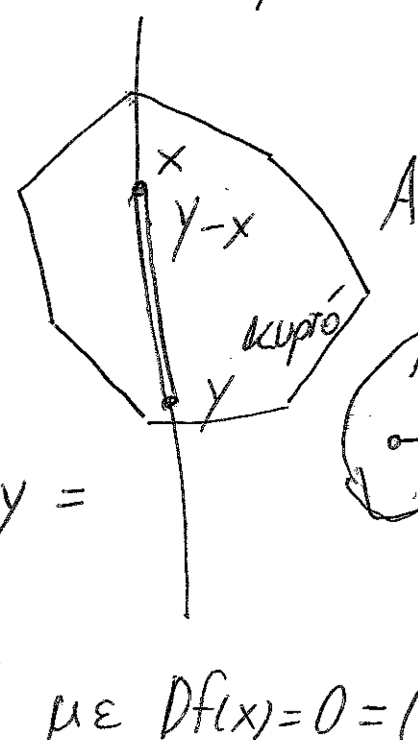
$$\overset{DL'H}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{t}}{-3t^{-4}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{t}}{\frac{-3}{t^4}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2}\frac{t^{\cancel{4}}}{-3\cancel{t}} = 0$$

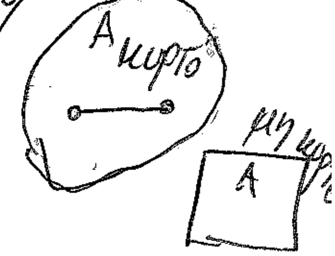
Άρα $A=0$

HY-111 ① 16/3/2015

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

1) Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι σταθερή δηλαδή υπάρχει $c \in \mathbb{R}^m$ ώστε $f(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ τότε η f είναι παντού διαφορίσιμη και $Df(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Αντίστροφα: Έστω ότι $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό και κυρτό σύνολο. <u>Κυρτό</u> σημαίνει ότι για κάθε $x, y \in A$ ισχύει $(1-t)x + t \cdot y \in A$ για κάθε $0 \leq t \leq 1$. Δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα x και y περιέχεται όλο μέσα στο A.





Το ευθύγραμμο τμήμα αυτό είναι το ίχνος της παραμετρικής καμπύλης $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ με $\gamma(t) = (1-t)x + ty =$

$= t(y-x) + x$

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο A με $Df(x) = 0 = (0,0,\ldots,0)$ για κάθε $x \in A$

<u>Ερώτημα</u>: Είναι η f σταθερή στο A;

Δηλαδή αν $x, y \in A$ είναι οποιαδήποτε σημεία στο A,

ΗΥ-111

ισχύει $f(x) = f(y)$; χρησιμοποιούμε αυτά που ξέρουμε για την κυρτότητα...

Η $f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$, δηλαδή η $f(\gamma(t)) = f((1-t)x + ty)$, είναι διαφορίσιμη στο $[0,1]$; και πόσο είναι η παράγωγος $(f \circ \gamma)'(t)$; ***

Ορισμός Κανόνας Αλυσίδας. Chainrule.

Θεώρημα - Κανόνας Αλυσίδας

- Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτά σύνολα, και $U \xrightarrow{F} V \xrightarrow{G} \mathbb{R}^k$. Αν $x_0 \in U$ και η F είναι διαφορίσιμη στο x_0 και G διαφορίσιμη στο $F(x_0)$, τότε η $G \circ F : U \to \mathbb{R}^k$, είναι διαφορίσιμη στο x_0 $D(G \circ F)(x_0) =$

$(a,b) \xrightarrow{f} (c,d) \xrightarrow{g} \mathbb{R}$
διαφορίσιμη
$(g \circ f)'(t) = g'(f(t)) f'(t)$

γινόμενο πινάκων = σύνθεση

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$v \to g'(f(t)) \cdot v$	$u \to f'(t) \cdot u$

$= DG(F(x_0)) \cdot DF(x_0)$ (= σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων δηλαδή γινόμενο πινάκων)

***

- Εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας και υπολογίζουμε ότι:

$$(f \circ \gamma)'(t) = Df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0, \text{ για κάθε } t \in [0,1]$$

Άρα η $f \circ \gamma$ είναι σταθερή, οπότε $f(x) = f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = y$

2) Γενικότερα αν έχουμε: $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο, $f: A \to \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση, και $\gamma: I \to A$ μια παραμετρισμένη C^1 καμπύλη, τότε ($I \subset \mathbb{R}$, ανοιχτό διάστημα) η $f \circ \gamma$ είναι διαφορίσιμη στο A και:
$(f \circ \gamma)'(t) = Df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$, για κάθε $t \in I$.

- Με συντεταγμένες $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t))$, τότε

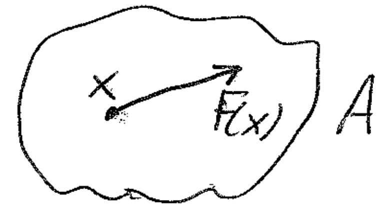
$$(f \circ \gamma)'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\gamma(t)), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t))\right)$$

- $$\begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t)\right) = \underline{\langle \nabla f(\gamma(t)), \overset{o}{\gamma}(t) \rangle}$$

<u>Εφαρμογή:</u> (Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας).

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό σύνολο και $F: A \to \mathbb{R}^3$ ένα πεδίο δυνάμεων:

- Το F λέγεται συντηρητικό αν υπάρχει μια:
C^1 συνάρτηση $V: A \to \mathbb{R}$ με $F = -\nabla V$, δηλαδή
$F(x) = -\nabla V(x), \forall x \in A$, V: Δυναμική ενέργεια



- Η εξίσωση κίνησης του Newton είναι:
$$m \cdot \gamma''(t) = F(\gamma(t)) = -\nabla V(\gamma(t))$$
όπου $\gamma''(t) = (\gamma_1''(t), \gamma_2''(t), \ldots, \gamma_i''(t))$ αν $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

- Η μηχανική ενέργεια είναι $E = \underset{\text{κιν. ενεργ.}}{T} + V$, δηλαδή
$$E(\gamma(t)) = \frac{1}{2} m \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + V(\gamma(t))$$
όπου $\gamma: I \to A$ η παραμετρισμένη C^1 καμπύλη

που περιγράφει την τροχιά ενός υλικού σημείου μάζας m υπό την επίδραση του πεδίου δυνάμεων F.

- Η μεταβολή (ρυθμός μεταβολής) της Μηχανικής Ενέργειας στη διάρκεια της κίνησης είναι: $(E \circ \gamma)'(t) = \frac{1}{2} m \left[\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle + \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle \right]$

$$+ \langle \nabla V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle m\gamma''(t), \gamma'(t) \rangle + \langle \nabla V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle =$$

$$= \langle m\gamma''(t) + \nabla V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle 0, \gamma(t) \rangle = 0$$

- Άρα η μηχανική ενέργεια στη διάρκεια κίνησης υπό την επίδραση συντηρητικών δυνάμεων παραμένει σταθερή.

3) <u>Πρόταση</u>: Έστω $A \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό σύνολο και $[a,b] \times [c,d] \subset A$.

- Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει η $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, για κάθε $(x,y) \in A$ και $\frac{\partial f}{\partial y}: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Τέλος, έστω $p, q: [c,d] \to [a,b]$ δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις και $F: [c,d] \to \mathbb{R}$ με $F(y) = \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dx$.

Τότε F διαφορίσιμη και: $\cancel{F'(y) = \int_{p(y)}^{q(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(t,y)\,dt}$

$$\boxed{F'(y) = \int_{p(y)}^{q(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(t,y)\,dt + f(q(y),y) \cdot q'(y) - f(p(y),y) \cdot p'(y)}$$

HY-111 ③ 16/3/2015

Απόδειξη: Θεωρούμε συνάρτηση $G: [a,b]\times[a,b]\times[c,d]\to R$

με • $G(x_1,x_2,x_3)=\int_{x_1}^{x_2} f(t,x_3)\,dt$

$f:[a,b]\to R$ συνεχής η $F:[a,b]\to R$, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ διαφορίσιμη και $F'(x)=f(x)$

• Η G είναι C^1 και $F(y)=G(p(y),q(y),y)=$
δηλαδή $= G(\gamma(y))$

όπου $\gamma:[c,a]\to[a,b]\times[a,b]\times[c,d]\subset R^3$ είναι η διαφορίσιμη παραμετρισμένη καμπύλη:

$$\gamma(y)=(p(y),q(y),y)$$

που έχει ταχύτητα $\gamma'(y)=\begin{pmatrix}p'(y)\\q'(y)\\1\end{pmatrix}$, και από κανόνας αλυσίδας: $F'(y)=(G\circ\gamma)'(y)=DG(\gamma(t_1))\gamma'(t)$.

• Έχουμε $\frac{\partial G}{\partial x_1}=-f(x_1,x_3)$, $\frac{\partial G}{\partial x_2}=f(x_2,x_3)$, $\frac{\partial G}{\partial x_3}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x_3}f(t,x_3)\,dt$

• Άρα αντικαθιστώντας βρίσκουμε $F'(y)=\Big(\frac{\partial G}{\partial x_1}(p(y),q(y),y),$
$\frac{\partial G}{\partial x_2}(p(y),q(y),y),\ \frac{\partial G}{\partial x_3}(p(y),q(y),y)$

$$\begin{pmatrix}p'(y)\\q'(y)\\1\end{pmatrix}=\left(-f(p(y),y),\,f(q(y),y),\,\int_{p(y)}^{q(y)}\frac{\partial}{\partial y}f(t,y)\,dt\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix}p'(y)\\q'(y)\\1\end{pmatrix}\right)$$

HY-111

4) <u>Παράδειγμα:</u> Έστω $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{G} \mathbb{R}^2$ διαφορίσιμες

· $F(0,0) = (2,0,1)$ ενώ $DF(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ενώ

η: $DG(2,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Τότε η $G \circ F$ είναι διαφορίσιμη και:

$$D(G \circ F)(0,0) = DG(F(0,0)) \cdot DF(0,0) =$$
$$= DG(2,0,1) \cdot DF(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

5) <u>Πρόταση:</u> Αν η $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι γραμμική $(f(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot f(x) + \mu f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$ τότε η f είναι παντού διαφορίσιμη και η παράγωγος της σε οποιοδήποτε σημείο είναι ίδια:

· $Df(x) = f$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ (άρα $Df: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m \times n}$ είναι σταθερή με τιμή f).

<u>Απόδειξη</u>: πράγματι: $\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x) - f(h)}{\|h\|} \right) =$

$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{0}{\|h\|} \right) = 0$

αφού η f υποτίθεται γραμμική.

6) (α). Αν $f, g : A \to R^m$ είναι διαφορίσιμες στο $x_0 \in A$ τότε η $f \circ g$ είναι επίσης διαφορίσιμη και η
$D(f+g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$

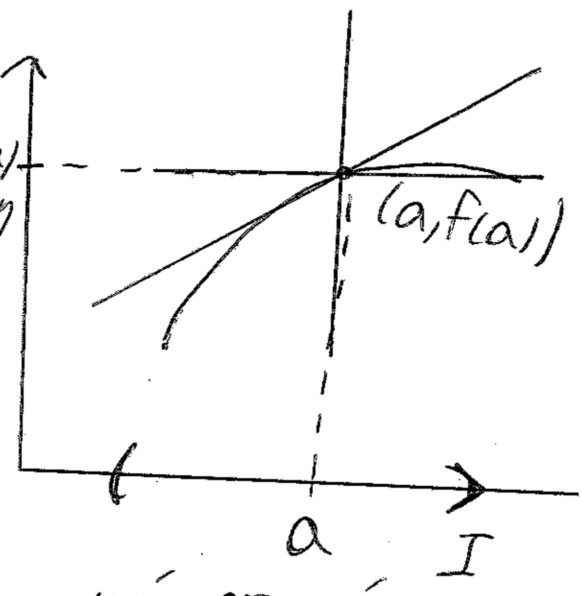
• Επίσης το ίδιο είναι και η $f \cdot g$ και
$D(f \cdot g)(x_0) = g(x_0) \cdot Df(x_0) \cdot f(x_0) \cdot Dg(x_0)$

(β) Αν $m = 1$ και $g(x_0) \neq 0$, τότε η $\frac{f}{g}$ είναι διαφορίσιμη στο x_0 και:

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(x_0) \cdot Df(x_0) - f(x_0) \cdot Dg(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

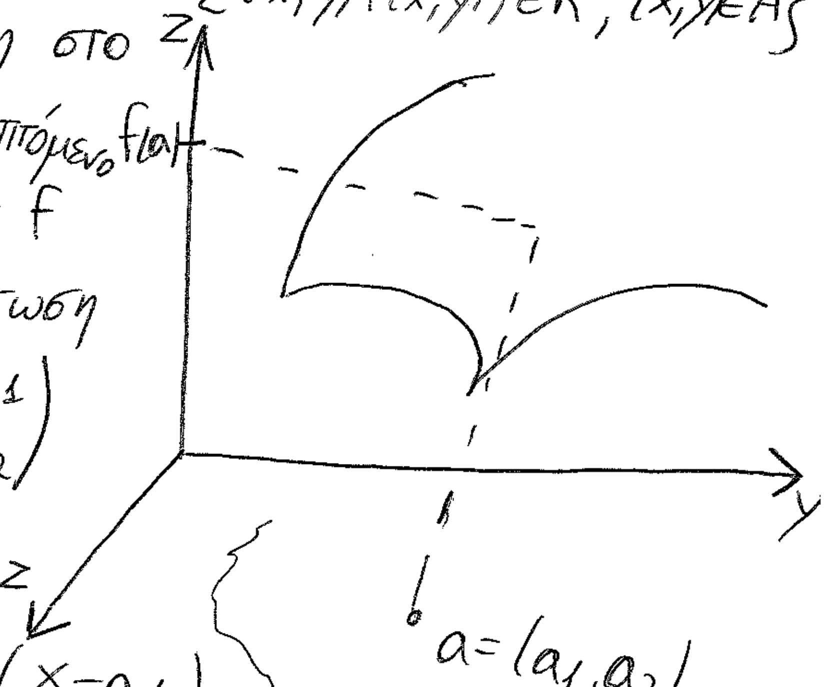
Το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο

Αν $I \subset \mathbb{R}$ είναι ανοιχτό διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση διαφορίσιμη στο $a \in I$, η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας του γραφήματος της f στο $(a, f(a))$ είναι $y - f(a) = f'(a)(x-a)$



Δηλαδή είναι το γράφημα της γραμμικής απεικόνισης $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $T(u) = f'(a) \cdot u$ στο $\mathbb{R}^2$ με αρχή των αξόνων στο $(a, f(a))$. Όμοια αν έχουμε ένα ανοιχτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^2$ και μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, τότε το γράφημα της f είναι το $\Gamma = \{(x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3, (x,y) \in A\}$

Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $a = (a_1, a_2) \in A$ τότε το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της f στο $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ έχει εξίσωση



$$z - f(a_1, a_2) = Df(a_1, a_2)\begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow z - f(a_1, a_2) = $$

$$= \left(\frac{df}{dx}(a_1, a_2), \frac{df}{dy}(a_1, a_2)\right)\begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z - f(a_1, a_2) = \frac{df}{dx}(a_1, a_2)(x-a_1) + \frac{df}{dy}(a_1, a_2)(y-a_2)}$$

και είναι το γράφημα της γραμμικής απεικόνισης $Df(a_1,a_2): R^2 \to R$ δηλαδή $E=\{(u,v,w)\in R^3 : w = Df(a_1,a_2)\binom{u}{v}\}$ με αρχή των αξόνων στο $(a_1,a_2,f(a_1,a_2))$ που σημαίνει ότι $u = x-a_1$, $v=y-a_2$, $w=z-f(a_1,a_2)$.

Γενικά αν έχουμε $A \subset R^n$ ανοιχτό και μια συνάρτηση $f: A\to R$, το γράφημά της είναι το $\Gamma = \{(x_1,x_2,\dots,x_n, f(x_1,x_2,\dots,x_n)) \in R^{n+1} \; (x_1,x_2,\dots,x_n)\in A\}$.

Όταν η f είναι διαφορίσιμη στο $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in A$, το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο του γραφήματος της f στο $(a_1,a_2,\dots,a_n, f(a_1,a_2,\dots,a_n))$ έχει εξίσωση

$$x_{n+1} - f(a_1,a_2,\dots,a_n) = Df(a_1,a_2,\dots,a_n)\begin{pmatrix} x_1-a_1 \\ x_2-a_2 \\ \vdots \\ x_n-a_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} - f(a_1,a_2,\dots,a_n) = \left(\frac{df}{dx_1}(a_1,a_2,\dots,a_n) \dots \frac{df}{dx_n}(a_1,\dots,a_n)\right)\begin{pmatrix} x_1-a_1 \\ x_2-a_2 \\ \vdots \\ x_n-a_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_{n+1} - f(a_1,a_2,\dots,a_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i}(a_1,a_2,\dots,a_n)(x_i-a_i)}$$

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $f: R^2 \to R$ με $f(x,y) = xy^2 + x^3 + x^2 - y^2 + x + y + 3$

Η f είναι C^1 στο R^2 και ειδικά

$$\frac{df}{dx} = y^2 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$\frac{df}{dy} = 2xy - 2y + 1$$

ΗΥ-111 ② 17/3/2015

(α) $Df(0,0) = (1 \quad 1)$ και $f(0,0) = 3$. Άρα το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της f στο σημείο $(0,0,f(0,0)) = (0,0,3)$ έχει εξίσωση
$z-3 = 1(x-0) + 1(y-0) \Leftrightarrow x+y-z=-3$

(β) $Df(1,2) = (10 \quad 1)$ και $f(1,2) = 8$. Άρα το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της f στο σημείο $(1,2,8)$ έχει εξίσωση $z-8 = 10(x-1) + 1\cdot(y-2) \Leftrightarrow 10x+y-z=4$

ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \to \mathbb{R}$ μια C^1 συνάρτηση δηλαδή οι $\frac{df}{dx_i}: A \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ υπάρχουν και είναι συνεχείς συναρτήσεις. Αν η $\frac{d}{dx_j}\left(\frac{df}{dx_i}\right)(a)$, $a \in A$ υπάρχει, λέγεται (i,j)-μερική παράγωγος δεύτερης τάξης της f στο a και συμβολίζεται με $\frac{d^2f}{dx_j dx_i}(a)$.
Η f λέγεται C^2 συνάρτηση στο A αν υπάρχουν οι $\frac{d^2f}{dx_j dx_i}(a)$, $1 \leq i,j \leq n$ για κάθε $a \in A$, οι συναρτήσεις $\frac{d^2f}{dx_j dx_i}: A \to \mathbb{R}$, $1 \leq i,j \leq n$ είναι συνεχείς.

Επαγωγικά, ορίζονται (αν υπάρχουν) οι κ-τάξης μερικές παραγώγους

HY-111

$$\frac{d^k f}{dx_{i_k} dx_{i_{k-1}} \cdots dx_{i_1}}(a) = \frac{d}{dx_{i_k}}\left(\frac{d}{d_{i_{k-1}}}\left(\cdots\left(\frac{df}{dx_{i_1}}\right)\cdots\right)\right)(a)$$

$1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k \leq n$

και η f λέγεται C^k συνάρτηση στο A αν οι k-τάξεως μερικές παραγώγους $\frac{d^2 f}{dx_{i_k} \cdots dx_{i_2} dx_{i_1}} : A \to R$, $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n$ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο A.

<u>Ορισμός</u> : Η $f : A \to R$ λέγεται C^∞ στο A αν είναι C^k για κάθε $k \geq 0$ (για $k=0$, η f λέγεται C^0 αν είναι συνεχής στο A.)

Έτσι έχουμε μια ιεραρχία συναρτήσεων

$$C^0 \supset C^1 \supset C^2 \supset \ldots \supset C^k \supset \ldots \supset C^\infty, \text{ δηλαδή } C^\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k$$

<u>Ερώτημα</u> Ισχύει $\frac{d^2 f}{dx_j dx_i}(a) = \frac{d^2 f}{dx_i dx_j}(a)$, όταν υπάρχουν;

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $f : R^2 \to R$ με $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Επειδή $f(0,y) = 0$, $f(x,0) = 0$ για κάθε $x, y \in R$

Έχουμε $\frac{df}{dx}(0,0) = 0$, $\frac{df}{dy}(0,0) = 0$. Υπολογίζουμε τώρα ότι

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - (0\ 0)\binom{h_1}{h_2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1 \cdot h_2(h_1^2-h_2^2)}{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 h_2(h_1^2-h_2^2)}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}$$

και $\left|\frac{h_1 h_2(h_1^2-h_2^2)}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}\right| = \frac{|h_1 \cdot h_2|(h_1^2+h_2^2)}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} = \frac{|h_1 \cdot h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{h_1^2+h_2^2} \to$

$\to 0$, όταν $(h_1,h_2)\to(0,0)$ $\qquad (h_1-h_2)^2 \geq 0$

Άρα η f είναι πάντα διαφορίσιμη με $\frac{df}{dx}(0,0)=0$, $\frac{df}{dy}(0,0)=0$

και για $(x,y)\neq(0,0)$ έχουμε $\frac{df}{dx} = \frac{x^4 \cdot y^2+3x^2 \cdot y^4-y^5+x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$,

$\frac{df}{dy} = -\frac{x^2 \cdot y^4+3x^4y^2-x^5+x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$

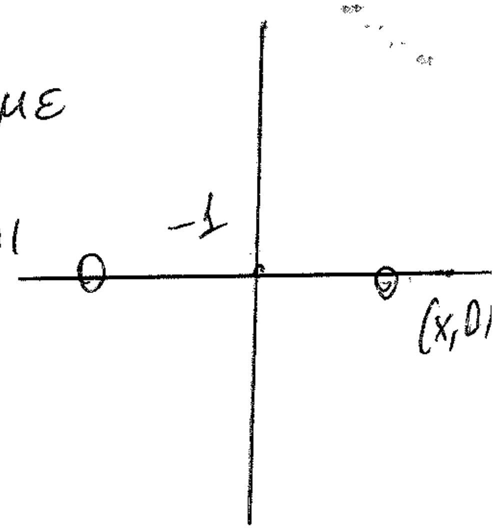
Έχουμε τώρα

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2f}{dy \cdot dx}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(\frac{-y^5}{y^4}\right) = -1 \\ \frac{d^2f}{dx \cdot dy}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(-\frac{(-x^5)}{x^4}\right) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d^2f}{dy \cdot dx}(0,0) \neq \frac{d^2f}{dx\,dy}(0,0)$$

<u>Θεώρημα (Schwarz)</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι C^2, τότε $\frac{d^2f}{dy \cdot dx} = \frac{d^2f}{dx \cdot dy}$ παντού στο A.

HY-111

<u>Παράδειγμα (συνέχεια)</u> Για $x \neq 0$ έχουμε $\frac{d^2f}{dydx}(x,0)=0$. Άρα η $\frac{df}{dydx}:R^2 \to R$ είναι ασυνεχής στο $(0,0)$. Συνεπώς η f <u>δεν</u> είναι C^1.



Αν $A \subset R^n$ είναι ανοιχτό σύνολο και $f: A \to R$ μια συνάρτηση, και $a \in A$, τότε ο πίνακας

$$H f(a) = \left(\frac{d^2f}{dx_i \cdot dx_j}(a) \right)_{1 \leq i,j \leq n} \overset{\text{Θεώρημα Schwarz}}{=} \begin{pmatrix} \frac{d^2f}{dx_1^2} & \frac{d^2f}{dx_2 dx_1} & \cdots & \frac{d^2f}{dx_n \cdot dx_1} \\ \frac{d^2f}{dx_2 \cdot dx_1} & \frac{d^2f}{dx_2^2} & \cdots & \frac{d^2f}{dx_n dx_2} \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{d^2f}{dx_n dx_1} & \frac{d^2f}{dx_n dx_2} & \cdots & \frac{d^2f}{dx_n^2} \end{pmatrix}$$

Είναι <u>συμμετρικός</u> και λέγεται Εσσιακός πίνακας (Hession matrix) της f στο a.

HY-111 (Φροντιστήριο) ① 19/3/2015

Άσκηση 1 Φυλλάδιο 6

β) $f(x,y) = \begin{cases} x \cdot y \sin\frac{1}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$A = \frac{f((0,0) + t(1,0) - f(0,0))}{t} = \frac{f(t,0)}{t} = 0$

$\lim_{t \to 0} A = 0 \quad \frac{\theta f}{\theta x}(0,0) = 0$

$B = \ldots = \frac{f(0,t)}{t} = 0$ άρα $\lim_{t \to 0} B = 0$

Άρα $\frac{\theta f}{\theta t}(0,0) = 0$

Βήμα 2ο

$T = \left(\frac{\theta f}{\theta x}(0,0), \frac{\theta f}{\theta y}(0,0) \right) = (0,0)$

$\Gamma = \frac{|f((0,0) + (h_1,h_2)) - f(0,0) - T \cdot h|}{\|h\|} = \frac{|f(h_1,h_2)|}{\|h\|} =$

$= \frac{\left| h_1 \cdot h_2 \cdot \sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2} \right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \overset{\text{cauchy Schwartz}}{\leq} \frac{|h_1 \cdot h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \cdot \left| \sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2} \right| \leq$ ⊛

HY-111 (Φροντιστήριο)

Ανισότητα Cauchy - Schwartz

$$|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$$

$(*)$ $h_1^2 - 2h_1 \cdot h_2 + h_2^2 \geq 0 \Rightarrow h_1 \cdot h_2 \leq \frac{h_1^2 + h_2^2}{2}$

$$\overset{(*)}{\leq} \frac{1}{2} \frac{h_1^2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \cdot \left| \sin \frac{1}{h_1^2 + h_2^2} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \left| \sin \frac{1}{h_1^2 + h_2^2} \right|$$

Άρα $T \to 0$ γιατί $\left| \sin \frac{1}{h_1^2 + h_2^2} \right| \leq 1$

δηλαδή $\lim_{h \to 0} \Gamma = 0$). Άρα f διαφορίσιμη στο $(0,0)$

και $Df(0,0) = 0$

<u>Άσκηση 4</u>

β) $f(x,y,z) = \sin(x \cdot \sin y)$ $\quad Df(x,y,z) = \left(\frac{\theta f}{\theta x}, \frac{\theta f}{\theta y}, \frac{\theta f}{\theta z} \right)$

$$\frac{\theta f}{\theta x} = \sin y \cos(x \cdot \sin y)$$

$$\frac{\theta f}{\theta y} = x \cdot \cos y \cos(x \sin y)$$

$$(\sin(f(x)))' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$$

ΗΥ-111 (Φροντιστήριο) ② 19/3/2015

δ) $f(x,y,z) = (y^2+z^2, z^2+x^2, x^2+y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x \\ 2x \end{pmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} 2y \\ 0 \\ 2y \end{pmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \begin{pmatrix} 2z \\ 2z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D_{f(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 0 & 2y & 2z \\ 2x & 0 & 2z \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 5

a) $f(x,y) = \int_0^{x+y} g(t)\,dt$, g συνεχής

Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Άρα ισχύει: $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

π.χ. $\left(\int_0^x \sin^2 t\,dt\right)' = \sin^2 x$

HY-111 (Φροντιστήριο)

- Η $\frac{\theta f}{\theta x}$ υπάρχει και είναι συνεχής γιατί αν: $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$G(s) = \int_0^s g(t)dt$ έχουμε $\underline{\frac{\theta f}{\theta x} = G'(x+y) \cdot 1 = g(x,y)}$, και:

$\underline{\frac{\theta f}{\theta y} = G'(x+y) \cdot 1 = g(x+y)}$ ← Συνεχείς διότι g συνεχής (δεδ.)

f είναι C^1 άρα $\boxed{Df(x,y) = (g(x+y), g(x+y))}$

συνεχής και διαφορίσιμη 1 φορά

β) $\int_0^{xy} g(t)dt = f(x,y)$, $f(x,y) = G(x,y)$: θέτω

- $\frac{\theta f}{\theta x} = y \cdot G'(xy) = y \cdot g(xy)$

- $\frac{\theta f}{\theta y} = x \cdot G'(xy) = x \cdot g(xy)$

$Df(x,y) = (y \cdot g(xy), x \cdot g(xy))$

ΗΥ-111 (Φροντιστήριο) ③ 19/3/2015

7α) $f(x,y) = 2x^2 + y^2$

- Γράφημα της f ονομάζουμε το σύνολο των σημείων x, y, z των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν την $z = f(x,y)$.
- Η γραφική παράσταση 2 μεταβλητών = επιφάνεια σε 3D.

- Ποιο το εφαπτόμενο επίπεδο;

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\theta f}{\theta x}(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\theta f}{\theta y}(x_0; y_0)(y - y_0) \text{ ή}$$

$$z - f(0,0) = \frac{\theta f}{\theta x}(0,0)\cdot(x-0) + \frac{\theta f}{\theta y}(0,0)\cdot(y-0)$$

$$\frac{\theta f}{\theta x}(0,0) = \frac{\theta f}{\theta y}(0,0) = 0$$

$z = 0$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (x, y, 2x^2+y^2) \\ : \text{για } x,y \in R^2 \end{array} \right\}$$

, Το εφαπτόμενο επίπεδο είναι >0 x, y διότι $z=0$

HY-111 (1) 23/3/2015

Τύπος του Taylor ($2^{ης}$ τάξης)

__Θεώρημα__ Έστω $A \in \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό __κυρτό__ σύνολο (δηλ. $(1-t)x + ty \in A$ για κάθε $0 \leq t \leq 1$ $x, y \in A$) και $f: A \to \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση. Τότε για κάθε $x, y \in A$, $x \neq y$, υπάρχει $0 < \xi < 1$ ώστε:

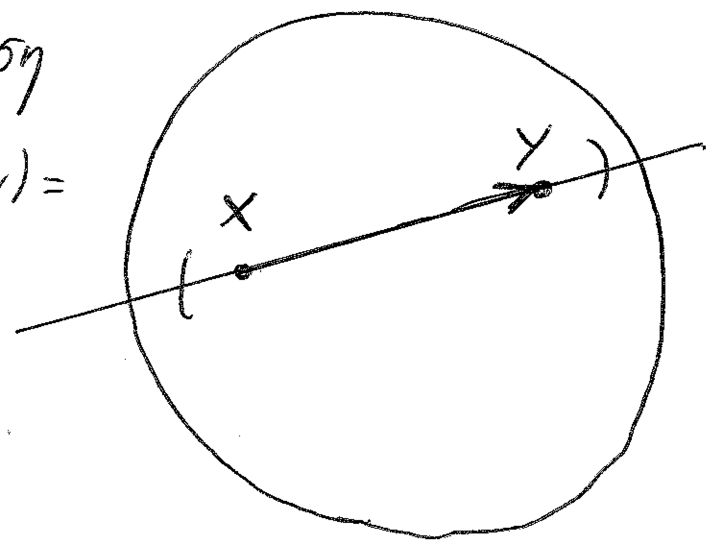
$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \frac{1}{2} \langle y-x \, , H f((1-\xi)x + \xi y) \cdot (y-x) \rangle$$

__Απόδειξη__ Θεωρούμε τη συνάρτηση

$g: [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(t) = f((1-t)x + ty) =$

$= f(x + t(y-x)) = f(\gamma(t))$.

όπου $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$,



Επειδή η f υποτίθεται C^2 και η γ είναι C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη η g είναι επίσης C^2. Υπολογίζουμε το $g'(t)$ και $g''(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$g'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle \nabla f((1-t)x + ty), y - x \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i} ((1-t)x + ty) \cdot (y_i - x_i), \text{ όπου } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

HY-111

και $g''(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j}\left(\frac{df}{dx_i}\right)((1-t)x+ty)(y_j-x_j) \right)(y_i-x_i)$

$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{d^2 f}{dx_j dx_i}((1-t)x+ty)\cdot(y_j-x_j)(y_i-x_i) =$

$\langle y-x, Hf((1-t)x+ty)(y-x) \rangle$.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Taylor για συναρτήσεις μιας μεταβλητής στην g, υπάρχει $0<\xi<1$ ώστε $g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(\xi)$. Αφού $g(1) = f(y)$ και $g(0) = f(x)$, άρα αντικαθεστώντας βρίσκουμε τον τύπο:

$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \frac{1}{2}\langle y-x \;\; H\; f((1-\xi)x+\xi y), (y-x) \rangle.$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Έστω $X \in \mathbb{R}^n$ ένα σύνολο και $f: X \to \mathbb{R}$. Η f λέμε ότι έχει τοπικό (γνήσιο) μέγιστο στο $x_0 \in X$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(f(x_0) > f(x))$ $f(x_0) \geq f(x)$ για κάθε $x \in X \cap D(x_0, \delta)$

Η f παίρνει <u>ολικά</u> στο X μέγιστη τιμή στο x_0, όταν $f(x_0) \geq f(x)$ για κάθε $x \in X$. Αντίστοιχα ορίζεται η έννοια του σημείου τοπικού (γνησίου) ελάχιστου και ολικά ελάχιστου στο X. Σε κάθε περίπτωση λέμε ότι έχουμε τοπικό ακρότατο.

<u>Θεώρημα</u>: Αν $X \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό και φραγμένο σύνολο τότε κάθε συνεχής συνάρτηση $f: X \to \mathbb{R}$ παίρνει ολικά μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλαδή υπάρχει $x_0, y_0 \in X$ ώστε για κάθε $x \in X$: $f(y_0) \leq f(x) \leq f(x_0)$

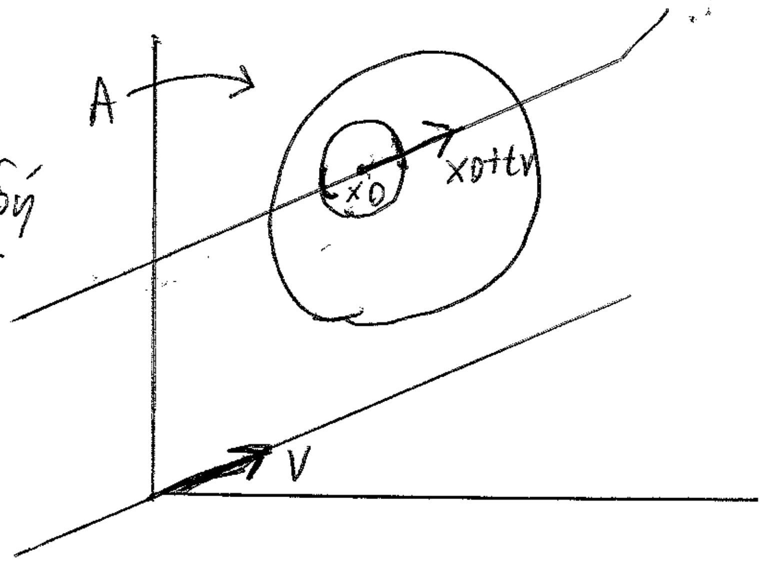
Αναγκαία συνθήκη για τοπικό ακρότατο:

<u>Πρόταση</u>: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό σύνολο και $f: A \to \mathbb{R}$ ανοιχτή συνάρτηση. Έστω ακόμα ότι υπάρχει $x_0 \in A$ στο οποίο η f έχει τοπικό ακρότατο.

Αν $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ και υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f'(x_0; v)$, τότε $f'(x_0; v) = 0$.

HY-111

• **Απόδειξη:** Έχουμε $f'(x_0;v) = F'(0)$ όπου $F(t) = f(x_0 + t\cdot v)$, δηλαδή η F είναι ο περιορισμός της f πάνω στην ευθεία που διέρχεται από το x_0 και είναι // στο v.



• Αφού η f έχει τοπικό ακρότατο στο x_0, ειδικά η F έχει τοπικό ακρότατο στο 0. Άρα $F'(0)=0$

• **Πόρισμα:** Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \to \mathbb{R}$ με τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in A$. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο x_0, τότε $Df(x_0) = 0$ (δηλ. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0, i = 1, 2, \dots, n$)

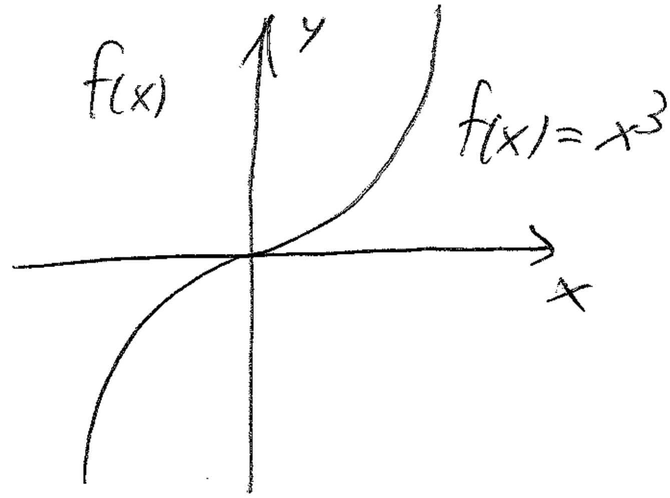
Απόδειξη: Από την πρόταση έχουμε $Df(x_0)\cdot v = f'(x_0;v) = 0, \ \forall v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$, άρα $Df(x_0) = 0$

Ορισμός: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \to \mathbb{R}$ μια C^1 συνάρτηση. Το $x_0 \in A$ λέγεται κρίσιμο σημείο αν $Df(x_0) = 0$. Κάθε σημείο τοπικού ακροτάτου είναι κρίσιμο αλλά δεν ισχύει το ~~[illegible]~~ αντίστροφο

HY-111 3 23/3/2015

Παραδείγματα

1) Η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$



- Εδώ $f'(0)=0$, αλλά στο 0 δεν έχει ακρότατο.

2) Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$

→ Θέλουμε να βρούμε κρίσιμα σημεία

Η f είναι C^∞ και τα κρίσιμα σημεία της είναι οι λύσεις της $Df(x,y) = (0\ 0)$, δηλαδή οι λύσεις του συστήματος εξισώσεων.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$ Έχουμε:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x(y-2x^2) + (y-x^2)(-4x) = -6xy + 8x^3$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = (y-2x^2) + (y-x^2) = 2y - 3x^2$

Άρα τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος εξισώσεων

- $\left.\begin{matrix} -6xy + 8x^3 = 0 \\ 2y - 3x^2 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x(-3y+4x^2) = 0 \\ y = \frac{3}{2}x^2 \end{matrix}\right\}$ αντικατάσταση...

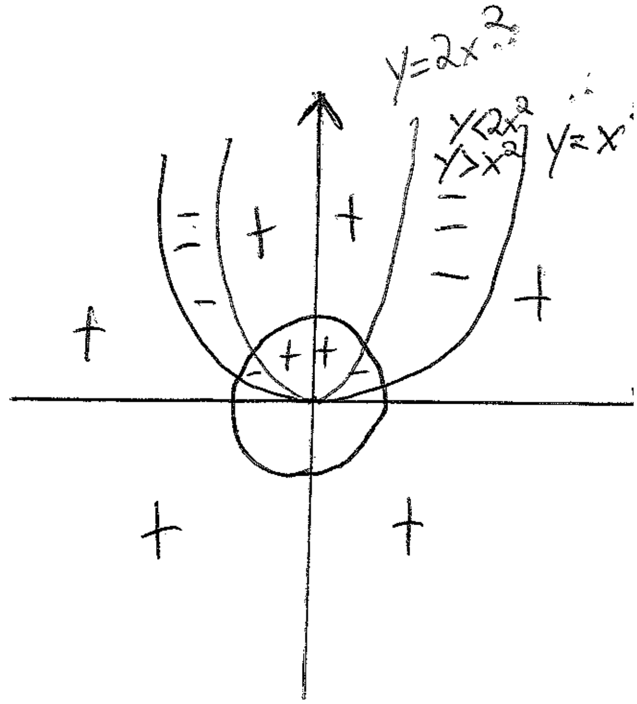
$$x\left(-\frac{9}{2}x^2 + 4x^2\right) = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$$

- Άρα $y=0$, Άρα μοναδικό κρίσιμο σημείο της f είναι το $(0,0)$.

HY-111

• Εδώ έχουμε $f(0,0)=0$,

Σε οποιαδήποτε μπάλα με κέντρο το (0,0) έχω και αρνητικές και θετικές τιμές!



και $f(x,y) = \begin{cases} >0 & \text{για } y<x^2 \text{ ή } y>2x^2 \\ <0 & x^2<y<2x^2 \end{cases}$

• Άρα η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο (0,0).

C^1

C^2

• <u>Θεώρημα</u>: Έστω $A \subset R^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \to R$ μια C^2 συνάρτηση. Έστω ακόμα $x_0 \in A$ ένα κρίσιμο σημείο της f, δηλαδή η παράγωγος είναι 0: ... <u>$Df(x_0)=0$</u>.

a) · Αν ο Εσσιανός $Hf(x_0)$ πίνακας είναι <u>θετικά ημιορισμένος</u> τότε η f έχει τοπικό γνήσιο ελάχιστο στο x_0.

b) · Αν ο $Hf(x_0)$ είναι <u>αρνητικά ημιορισμένος</u> τότε η f έχει τοπικό γνήσιο μέγιστο στο x_0.

c) · Αν δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ημιορισμένες τότε η f δεν έχει ακρότατο στο x_0.

ΗΥ-111 ④ 23/3/2015

- Έστω $S \in R^{n\times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας, δηλαδή $S^t = S$. Έστω $S = (s_{ij})$

- <u>Ορισμός:</u> Ο S λέγεται θετικά ημιορισμένος, όταν $\langle x, Sx\rangle \geq 0$, $\forall x \in R^n$ δηλαδή: $\sum_{i,j=1}^{n} S_{i,j} x_i x_j \geq 0$ $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n$.

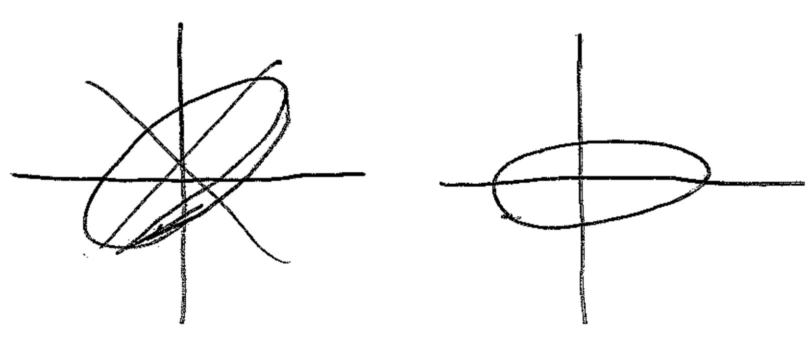
- Αν $\langle x, Sx\rangle$ $\forall x \in R^n$, $Sx > 0$, $x \neq 0$, ο S λέγεται θετικά ορισμένος. Όμοια ορίζεται η έννοια αρνητικά ημιορισμένος και αρνητικά ορισμένος - Φασματικό Θεώρημα.

<u>Παρατήρηση:</u> $\forall$ συμμετρικό πίνακα S. $\exists$ μια ορθοκανονική βάση του R από ίδια διανύσματα του S.
Δηλαδή $\exists$ ορθογώνιος πίνακας $U \in R^{n\times n}$ $(U^t = U^{-1})$ ώστε

$$U^{-1} S U = U^t S U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ όπου $\lambda_1, \dots \lambda_n \in R$

είναι οι ιδιότητες του S. Ο S είναι θετικά ημιορισμένος όταν και μόνο $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$
ορισμένος $\Leftrightarrow \lambda_1 > 0, \dots \lambda_n > 0$

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \geq 0, \forall (y_1, \dots, y_n) \in R^n$$



ΗΥ-111

<u>Παράδειγμα:</u> Η $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x^2-y^2-z^2$

έχει $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}=-2z$

· Άρα μοναδικό κρίσιμο σημείο το $(0,0,0)$ και $f(0,0,0)=0$

· Όμως $Hf(0,0,0)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$, άρα ο $Hf(0,0,0)$

δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ημιορισμένος,

γιατί: $\langle x, Hf(0,0,0)x\rangle = 2x_1^2-2x_2^2-2x_3^2$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

>0

<0

HY-111 ① 24/3/2015

<u>Θεώρημα</u> · Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και f μια C^2 συνάρτηση.

· Έστω κρίσιμο σημείο $x_0 \in A$ της f δηλ. $Df(x_0) = 0$

a) Αν ο $Hf(x_0)$ είναι <u>θετικά</u> ημιορισμένος τότε η f έχει τοπικό (γνήσιο) <u>ελάχιστο</u> στο x_0 ($\langle v, Hf(x_0)v \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$)

b) Αν ο $Hf(x_0)$ είναι <u>αρνητικά</u> ημιορισμένος τότε η f έχει τοπικό (γνήσιο) <u>μέγιστο</u> στο x_0 ($\langle v, Hf(x_0)v \rangle \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$)

c) Αν υπάρχουν $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u \neq v \neq 0$ ώστε $\langle u, Hf(x_0)u \rangle > 0$ και $\langle v, Hf(x_0)v \rangle < 0$ τότε η f δεν έχει ακρότατο στο x_0.

Ειδικά, έστω $n=2$ (2 μεταβλητές) και $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Αφού:

· $$Hf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

, θέτω $a = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0)$

$b = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0)$

και $c = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0)$

· Έχουμε $\langle v, Hf(x_0) \cdot v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right\rangle =$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ bv_1 + cv_2 \end{pmatrix} \right\rangle = v_1(av_1 + bv_2) + v_2(bv_1 + cv_2) =$$

$$= av_1^2 + 2 \cdot b \cdot v_1 \cdot v_2 + cv_2^2 =$$

HY-111

$$= \frac{a^2 \cdot v_1^2}{a} + \frac{2b \cdot a \cdot v_1 \cdot v_2}{a} + (b^2 v_2^2 - b^2 v_2^2)\frac{1}{a} + c \cdot v_2^2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} = \quad (\text{όταν } a \neq 0)$$

$$= \frac{1}{a}\left[(av_1 + bv_2)^2 + (a \cdot c - b^2)v_2^2\right] = \frac{1}{a}\left[(a \cdot v_1 + b \cdot v_2^2) + \Delta V_2^2\right]$$

όπου Δ η ορίζουσα του $Hf(x_0)$. $\Delta = \det Hf(x_0) = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$

<u>Πόρισμα</u>: Έστω $A \subset R^2$, f μια C^2 συνάρτηση $f : A \to R$ και $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε $Df(x_0) = 0$

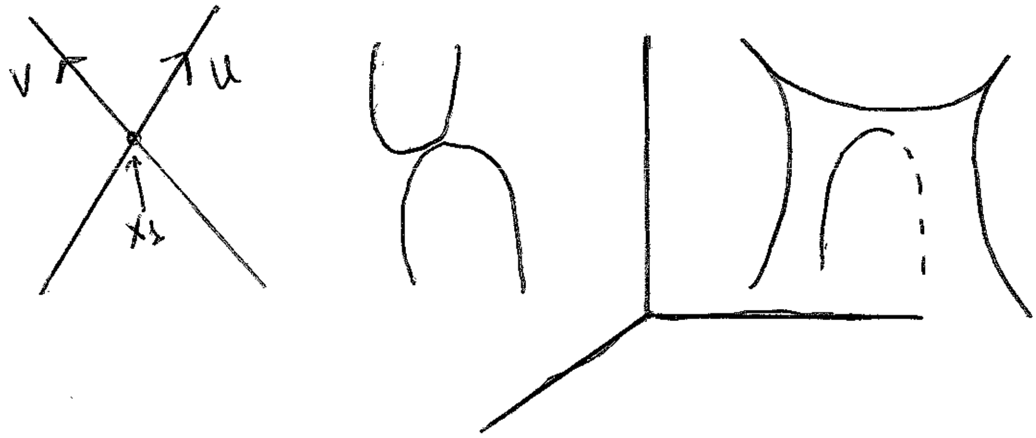
1) Έστω $\Delta = \det Hf(x_0) > 0$, τότε:

αν $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) > 0$, η f έχει τοπικό (γνήσιο) <u>ελάχιστο</u> στο x_0

αν $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) < 0$, η f έχει τοπικό (γνήσιο) <u>μέγιστο</u> στο x_0

2) Έστω $\Delta = \det Hf(x_0) < 0$, τότε η f δεν έχει ακρότατο στο x_0, αλλά έχει <u>σάγμα (saddle = σαμάρι)</u>

$u, v \in R^2$ όπου στο c του Θεωρήματος



ΗΥ-111 ② 24/3/2015

Παράδειγμα: Θέλουμε τα τοπικά ακρότατα της $f: R^2 \to R$ με

- $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

- Πρώτο βήμα: ΚΡΙΣΙΜΑ ΣΗΜΕΙΑ της f (που είναι C^∞). Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12 \end{array}\right\}$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία της f είναι η λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 5 \\ x \cdot y = 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 5 \\ y = 2/x \end{array}$$

, Αντικατάσταση... $x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \text{ ή } x^2 = 1$$

$$\boxed{x = \pm 2 \text{ ή } x = \pm 1}$$

Συνεπώς τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $(1,2)$, $(-1,-2)$, $(2,1)$, $(-2,-1)$

- Ο $Hf(x,y)$ είναι:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

$$\det Hf(x,y) = 36(x^2 - y^2)$$

για κάθε σημείο...:

HY-111

1º) $H f(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$, στο $(1,2)$: $\Delta = \det Hf(1,2) =$
$= 36 - 144 < 0$

· Άρα η f έχει σάγμα στο $(1,2)$.

2º) $H f(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$, στο $(-1,-2)$: $\Delta = 36 - 144 < 0$

· Άρα η f έχει σάγμα στο $(-1,-2)$.

3º) $Hf(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$, στο $(2,1)$: $\Delta = 144 - 36 > 0$

• Αφού $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = 12 > 0$, <u>έχουμε τοπικό γνήσιο ελάχιστο στο $(2,1)$</u>

4º) $Hf(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$, στο $(-2,-1)$: $\Delta = 144 - 36 > 0$

• Αφού $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,-1) = -12 < 0$, <u>έχουμε τοπικό γνήσιο μέγιστο στο $(-2,-1)$</u>

ΗΥ-111 ③ 24/3/2015

Γεωμετρική εφαρμογή: Έστω $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ένα τρίγωνο με γωνίες A, B, Γ

νδο: $\cos A + \sqrt{2}(\cos B + \cos\Gamma) \leq 2$

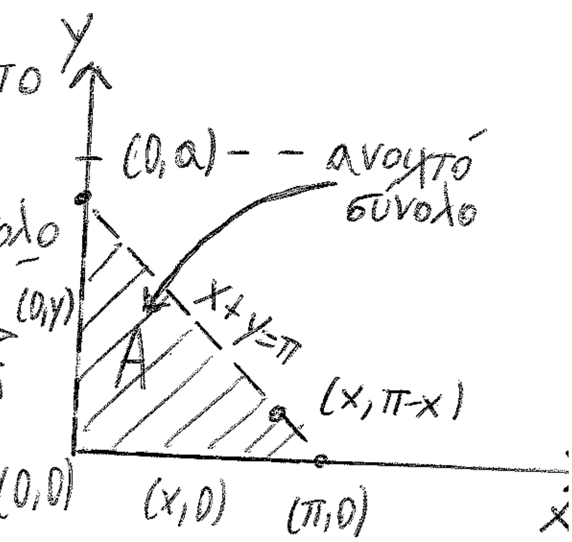
Απόδειξη: Αφού έχουμε τρίγωνο πρέπει $A, B, \Gamma < \pi$

και: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \pi$

Άρα: $A = \pi - (B+\Gamma)$ και $\cos A = \cos(\pi - (B+\Gamma)) = -\cos(B+\Gamma) =$
$= \cos A$

- Θεωρώ τη συνάρτηση $f: R^2 \to R$ με τύπο
$f(x,y) = -\cos(x+y) + \sqrt{2}(\cos x + \cos y)$
και αναζητώ τη μέγιστη τιμή της f στο σύνολο

$A = \{(x,y) \in R^2 ; x>0, y>0, \text{ και } x+y<\pi\}$



- Η f είναι φραγμένη στο κλειστό και φραγμένο $\bar{A} = \left\{ (x,y) \in R^2 : x \geq 0, y \geq 0, \; x+y \leq \pi \right\}$

- Μάλιστα η f η συγκεκριμένη είναι φραγμένη στο R^2 διότι: $|f(x,y)| \leq 1 + \sqrt{2}(1+1) = 1 + 2\sqrt{2}$

- Η f είναι C^∞ και έχει:

HY-111

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(x+y) - \sqrt{2}\sin x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x+y) - \sqrt{2}\sin y$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι η λύση του συστήματος (στο A):

$$\left.\begin{array}{l} \sin(x+y) - \sqrt{2}\sin x = 0 \\ \sin(x+y) - \sqrt{2}\sin y = 0 \\ x>0,\ y>0,\ x+y<\pi \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ $\sin x = \sin y$ άρα $\boxed{x = y \text{ ή } x = \pi - y}$

αποκλείεται

Άρα αντικαθιστώντας: $\sin 2x = \sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos x = \sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4} = y}$, Άρα μοναδικό κρίσιμο σημείο στο A είναι το $(\pi/4, \pi/4)$. Με $f(\pi/4, \pi/4) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2$

- $$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) - (\cos x)\cdot\sqrt{2} & \cos(x+y) \\ \cos(x+y) & \cos(x+y) - \sqrt{2}\cos y \end{pmatrix}$$

- Ειδικά λοιπόν στο $(\pi/4, \pi/4)$: $Hf(\pi/4, \pi/4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $\det Hf(\pi/4, \pi/4) = +1$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pi/4, \pi/4) = -1 < 0$

Άρα έχει <u>τοπικό</u> γνήσιο μέγιστο στο $(\pi/4, \pi/4)$

Επιπλέον για τα σημεία του ∂A (συνόρου) έχουμε:

- $f(x,0) = -\cos x + \sqrt{2}(\cos x + 1) = (-1+\sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} \leq -1+\sqrt{2}+\sqrt{2} \leq 2\sqrt{2}-1 < 2$
- $F(0,y) < 2$, ομοίως
- $F(x,\pi-x) = -\cos\pi + \sqrt{2}(\cos x + \cos(\pi - x)) = 1 < 2$

Άρα: το 2 είναι η μέγιστη τιμή στο $\bar{A}$.

Δηλαδή: $-\cos(x+y) + \sqrt{2}(\cos x + \cos y) \leq 2$

για κάθε $x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq \pi$

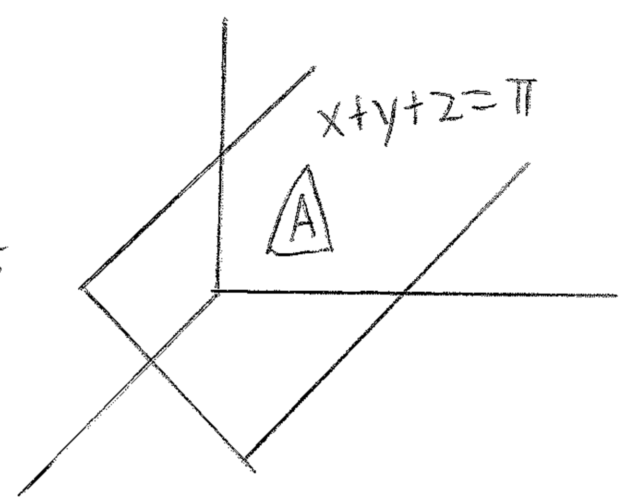
Ιδέα: $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = \cos x + \sqrt{2}(\cos y + \cos z)$

$G(x,y,z)$ στα $x+y+z=\pi$,

και θέλουμε το $\max(F|E)$, όπου E το επίπεδο

- $G(x,y,z) = c$, σταθερά...

πότε μπορώ να λύσω ως προς κάποια μεταβλητή



ΗΥ-111 (Φροντιστήριο) ① 26/3/2015

Ασκηση 7 Φυλλάδιο 6

$f(x,y) = x^2 - 3y^2 + x$ στο σημείο $(1,0,2)$

$$z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\overset{1}{x_0},\overset{0}{y_0})(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$z - 2 = 3(x-1) + 0(y-0)$$

$$\Leftrightarrow \; z-2 = 3x-3 \;\Leftrightarrow\; \boxed{z = 3x-1}$$

Ασκηση 3 Φυλλάδιο 7

$$\phi(x,y) = f(x-y) + g(x+y) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x-y) + \frac{\partial g}{\partial x}(x+y) \; , \; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}(x-y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x+y) \; , \; \frac{\partial \varphi^2}{\partial y^2}$$

Άσκηση 4 Φυλλάδιο 6 $\quad x = (x_1, x_2, x_3)$

$$V(x) = -\frac{1}{\|x\|} \qquad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = 0 \qquad V(x) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

HY-111 (Φροντιστήριο)

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = + \frac{\frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = \frac{x_i}{\|x\|^3} \longrightarrow \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^{\,3}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i} = \frac{\|x\|^3 - x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left((x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}\right)}{\|x\|^6} = \frac{1}{\|x\|^3} - x_i \cdot \frac{1}{\|x\|^6} \cdot 3$$

$$\|x\| \cdot x_i = \frac{1}{\|x\|^3} - \frac{3x_i^2}{\|x\|^5}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = \frac{3}{\|x\|^3} - \frac{3\|x\|^2}{\|x\|^5} = \frac{3}{\|x_i\|^3} - \frac{3}{\|x\|^3} = 0$$

Άσκηση 2 Φυλλάδιο 6

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)}{t} = 0$$

$$T = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0)$$

ΗΥ-111 (Φροντιστήριο) ② 26/3/2015

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f((0,0)+(h_1,h_2))-f(0,0)-T\cdot h|}{\|h\|}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|f(h_1,h_2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|h_1\cdot h_2|}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{h\to 0}\sqrt{\frac{|h_1\cdot h_2|}{h_1^2+h_2^2}}$$

$$\frac{|h_1\cdot h_2|}{h_1^2+h_2^2}=g(h_1,h_2) \quad g(0,1/n)=0 \quad g(1/n,0)=0$$

$$g\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{\left|\frac{1}{n^2}\right|}{\frac{2}{n^2}}=\frac{\frac{1}{\cancel{n^2}}}{\frac{2}{\cancel{n^2}}}=\frac{1}{2}$$

vavouris@csd.uoc.gr

Άσκηση 6 Φυλλάδιο 7

β) $f(x,y)=x^2+y^2+x+y+xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+1+y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y+1+x$$

$$Df(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=0$$

$$\begin{cases}2x+1+y=0\\2y+1+x=0\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}2x+y+1=0\\-2x-4y-2=0 \quad (-2)\ \oplus\end{cases}$$

$$-3y-1=0 \Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{3}} \quad \boxed{x=\frac{-1}{3}}$$

ΗΥ-111 (Φροντιστήριο)

$Hf\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$ οπότε $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1/3, -1/3) = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$ οπότε $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1/3, -1/3) = 1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$ οπότε $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1/3, -1/3) = 2$

$Hf(-1/3, -1/3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\det Hf(-1/3, -1/3) = 4 - 1 = 3 > 0$

$2 > 0$ και $\det Hf(-1/3, -1/3) > 0$

Τότε στο $(-1/3, -1/3)$ έχουμε τοπικά γνήσια ελάχιστα

α) $f(x,y) = x^4 + x^2 y + y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2y$

$Df(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 + 2xy = 0 \\ x^2 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$(0,0)$ κρίσιμο σημείο

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x \, , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 2y \, , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ άρα:

- $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det Hf(0,0) = 0 \ldots$;!

! Για κάθε $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in R^2 \; \langle v, Hf(0,0) \cdot v \rangle =$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}^{2\times 2} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2v_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2v_2^2 \geq 0$$

- Ο $Hf(0,0)$ δεν είναι θετικά ορισμένος αλλά θετικά ημιορισμένος. αυτό σημαίνει ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0,0)$ που όμως δεν είναι γνήσια κατ'ανάγκη.

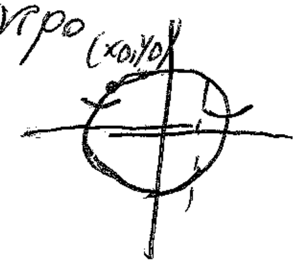
$f(x, y, z)$

$g(x, y, z) = c$ σταθερά

Παράδειγμα

$g(x,y) = c$ σταθερά
$y = \Phi(x)$
$g(x, \Phi(x)) = c$
Το γράφημα της φ

Το σύνολο των σημείων του R^2 που ικανοποιούν την εξίσωση $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$ είναι ο κύκλος με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα 1.



Ο κύκλος δεν είναι γράφημα καμιάς συνάρτησης. Αν $(x_0, y_0) \in S$ και $y_0 > 0$.
Τότε το y_0 βρίσκεται στο βορειο ημικύκλιο
$S^+ = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1$ και $y > 0\}$, που είναι το γράφημα της C^∞ συνάρτησης $\varphi : (-1,1) \to R$ με $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$

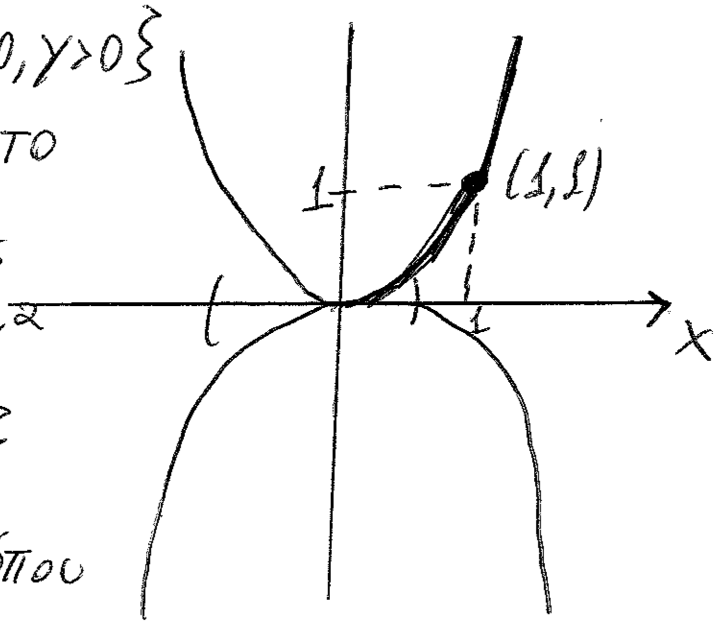
Όμοια αν $y_0 < 0$, τότε το (x_0, y_0) βρισκεται στο νότιο ημικύκλιο $S^- = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1, y < 0\}$, που είναι το γράφημα της C^∞ συνάρτησης
$\psi : (-1,1) \to R$ με $\psi(x) = -\sqrt{1-x^2}$

ΗΥ-111

Όμοια αν $x_0 > 0$ τότε γίνονται τα ίδια πράγματα, δηλαδή το (x_0, y_0) βρίσκεται στο δεξιό ημικύκλιο που είναι το γράφημα της C^∞ συνάρτησης $x : (-1,1) \to \mathbb{R}$ με $x(y) = \sqrt{1-y^2}$. Αντίστοιχα όταν $x_0 < 0$

<u>Συμπέρασμα:</u> Ο κύκλος S καλύπτεται από γραφήματα C^∞ συναρτήσεων (είτε του x είτε του y)

<u>Παράδειγμα 2</u> Έστω $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 - y^2 = 0\} =$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = \pm x^2\}$. Τότε $(1,1) \in S$. Το υποσύνολο $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 - y^2 = 0 \text{ και } x>0, y>0\}$ περιέχει το $(1,1)$ και είναι το γράφημα της C^∞ συνάρτησης $\varphi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = x^2$ δηλαδή $\Gamma = \{(x, x^2),\ x>0\}$

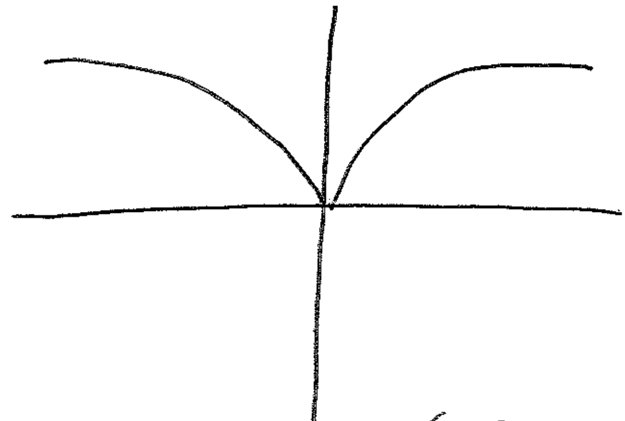


Παρατηρούμε ότι $\Gamma = S \cap W$, όπου $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x>0, y>0\}$ και το W είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}^2$.

Αντίθετα, δεν υπάρχει κανένα ανοιχτό σύνολο V με $(0,0) \in V$ (π.χ. $V = D((0,0), \delta)$, $\delta > 0$ όσο πιο μικρό γίνεται) ώστε το $S \cap V$ να είναι γράφημα συνάρτησης του x ή του y.

ΗΥ-111 ② 30/3/2015

Παράδειγμα 3 Έστω $S=\{(x,y)\in R^2 : x^2-y^3=0\}=$
$=\{(x,y)\in R^2 : y=x^{2/3}\}$ στο γράφημα της συνάρτησης $\varphi: R\to R$ με $\varphi(x)=x^{2/3}$. Η φ δεν είναι διαφορίσιμη στο 0.



Θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων (ειδική μορφή)

Έστω $A\subset R^{n+1}$, ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A\to R$ μια C^k συνάρτηση $k\geq 1$. Έστω $c\in R$ και $(a_1,a_2,\dots,a_n,a_{n+1})\in A$ ώστε $f(a_1,a_2,\dots,a_n,a_{n+1})=c$. Αν $1\leq j\leq n$ και $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1,\dots,a_{n+1})\neq 0$, τότε υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $V\in R^n$ και μια μοναδική C^k συνάρτηση $\phi: V\to R$ ώστε

$$f(x_1,\dots,x_{j-1},\phi(x_1,\dots,x_j,x_{j+1},\dots,x_{n+1}),x_{j+1},\dots,x_{n+1})=c$$

για κάθε $(x_1,x_2,\dots,x_{j+1},\dots,x_{n+1})\in V$.

με $\varphi(a_1,\dots,a_{j-1},a_{j+1},\dots,a_{n+1})=a_j$

HY-111

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $f: R^3 \to R$ με $f(x,y,z) =$
$= x^3 \cdot y^2 \cdot z^6 + 3x^2y^4 - 18z^5 + 12x^2y^2z^3 - 5$
Τότε $f(1,-1,1) = 1+3-18+12-5 = -7$
$(c=-7, (a_1,a_2,a_3) = (1,-1,1))$. Ρωτάμε αν υπάρχει
C^∞ συνάρτηση $\varphi: V \to R$ όπου το $V \subset R^2$ είναι ανοιχτό
και περιέχει το $(1,-1)$ ώστε $f(x,y,\varphi(x,y)) = -7$ για
κάθε $(x,y) \in V$. Έχουμε $\frac{\partial f}{\partial z} = 6x^3y^2z^5 - 90z^4 + 36x^2y^2z^2$,
οπότε $\frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,1) = 6-90+36 = -48 \neq 0$
Απ' το Θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων
τέτοια φ υπάρχει! Η φ δεν ξέρουμε ποια είναι, αλλά
μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγό της
π.χ. στο $(1,-1)$ απ' τον κανόνα της αλυσίδας
Παραγωγίζοντας την εξίσωση $f(x,y,\varphi(x,y)) = -7$
$\Leftrightarrow (f \circ g)(x,y) = -7$, όπου $g(x,y) = (x,y,\varphi(x,y))$
έχουμε από το κανόνα της αλυσίδας

ότι $Df(g(x,y)) \cdot Dg(x,y) = 0$

$g: V \to R^3$

HY-111 ③ 30/3/2015

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(x,y)), \frac{\partial f}{\partial y}(g(x,y)), \frac{\partial f}{\partial z}(g(x,y))\right) \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y}\end{pmatrix} = (0,0) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(g(x,y)),\right.$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}(g(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial z}(g(x,y))\right) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}, \text{ όταν } (x,y)\in V$$

(μπορούμε να μικρίνουμε την ανοιχτή περιοχή V του $(1,-1)$ ώστε $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)) \neq 0$ για κάθε $(x,y)\in V$, αφού $\frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,1) \neq 0$ και η f είναι τουλάχιστον C^1)

HY-111

Ειδικά $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,-1) = \dfrac{-\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1,1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,1)} = \dfrac{\cdots}{-7}$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,-1) = \dfrac{-\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1,1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,1)} = \dfrac{\cdots}{-7}$$

<u>Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων (γενική μορφή)</u>

Έστω $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \to \mathbb{R}^m$ μια C^k συνάρτηση $k \geq 1$. Έστω $c \in \mathbb{R}^m$ και $(a_1, \dots, a_{n+m}) \in A$ με $f(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+m}) = c$

Αν $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_{n+m})\right) \neq 0$, τότε υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $V \in \mathbb{R}^n$ και μια μοναδική C^k συνάρτηση $\varphi: V \to \mathbb{R}^m$ ώστε

$f(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)) = c$

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in V$, με $\varphi(a_1, \dots, a_n) = (a_{n+1}, a_{n+m})$

$$Df(\dots) = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{matrix}}_{\substack{m \times n \\ \text{block} \\ D_\varphi f}} & \underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \\ & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{matrix}}_{\substack{m \times m \\ \text{block}}} \end{array} \right)$$

$D_x f$

Η παράγωγος υπολογίζεται από τον κανόνα της αλυσίδας, θέτοντας $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n))$

οπότε $\underline{Df(g(x_1, \dots, x_n)) \cdot Dg(x_1, \dots, x_n) = 0}$

<u>Παράδειγμα</u> Έστω δίνονται οι εξισώσεις $2x^2+y^2+z^2+u^2-v^2=0$
$x^2+z^2+2u-v=0$

Υπάρχει C^∞ λύση ως προς u,v συναρτήσεις των x,y,z
δηλαδή $u=u(x,y,z)$ ώστε $u(1,-1,1)=0$
$v=v(x,y,z)$ $\quad v(1,-1,1)=2$

Εδώ έχουμε την C^∞ συνάρτηση $f: R^3\times R^2 = R^5 \to R^2$
με τύπο $f(x,y,z,u,v)=(2x^2+y^2+z^2+u^2-v^2, x^2+z^2-2u-v)$
Έχουμε επίσης $c=(0,0)$ και $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=(1,-1,1,0,2)$
Ο ιακωβιανός πίνακας της f στο (x,y,z,u,v) είναι

$$Df(x,y,z,u,v)=\left(\begin{array}{ccc|cc} 4x & 2y & 2z & 2u & -2v \\ 2x & 0 & 2z & -2 & -1 \end{array}\right)$$

και ειδικά $$Df(1,-1,1,0,2)=\left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & -2 & 2 & \boxed{\begin{matrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{matrix}} \end{array}\right)$$

Αφού $\det\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -8 \neq 0$

απ' το Θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων υπάρχει C^∞ συνάρτηση $\varphi: V \to R^2$ από το V είναι ανοιχτή περιοχή του $(1,-1,1)\in R^3$ και $\varphi(1,-1,1)=(0,2)$
Ενώ αν $\varphi(x,y,z)=(u(x,y,z), v(x,y,z))$, τότε

$$2x^2+y^2+z^2+(u(x,y,z))^2-(v(x,y,z))^2=0 \quad \forall (x,y,z)\in V$$
$$x^2+z^2+2u(x,y,z)-v(x,y,z)=0$$

HY-111

* * *

Η παράγωγος της φ στο Θεώρημα

Αν $g(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_n,\varphi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,(x_1,\dots x_n))$
$= (x,\Phi(x))$

όπου $X=(x_1,\dots,x_n)$. Επίσης $Y=(x_{n+1},\dots,x_{n+m})$

Αν θέσουμε $D_x f = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$, $D_y f = \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\right)_{\substack{m\leq i\leq n+m\\ 1\leq j\leq m}}$

και παραγωγίζουμε την

$f(g(x)) = f(x,\Phi(x)) = c$ βρίσκουμε

$$0 = Df(g(x))\cdot Dg(x) = (D_x f \mid D_y f)\begin{pmatrix} I_n \\ \hline D\Phi(x)\end{pmatrix} = D_x f + D_y f\cdot D\varphi(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{D\phi(x) = -(D_y f)^{-1}\cdot D_x f}$$

* * *

Ο ιακωβιανός πίνακας της φ υπολογίζεται

$$D\Phi(x,y,z) = -\begin{pmatrix} 2u(x,y,z) & -2v(x,y,z) \\ 2 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4x & 2y & 2z \\ 2x & 0 & 2z\end{pmatrix}$$

οπότε $D\Phi(1-1,1) - \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$

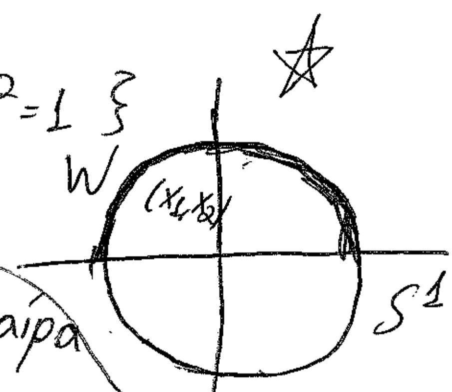
$= \dots\dots$

HY-111 ② 31/3/2015

Ορισμός: Ένα σύνολο $S \subset R^{n+1}$ λέγεται λεία υπερεπιφάνεια (για $n=2$, επιφάνεια) όταν για κάθε $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in S$ υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $W \subset R^{n+1}$ ώστε το $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in W$ ώστε το $S \cap W$ να είναι το γράφημα μιας C^∞ συνάρτηση n-μεταβλητών $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_{n+1})$.

Παράδειγμα Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$, το $S^n = \{(x_1, \ldots x_n, x_{n+1}) \in R^{n+1}: x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\}$ λέγεται η (μοναδιαία) n-διάστατη σφαίρα (με κέντρο το $(0, \ldots, 0)$)

Για $n=1$, η $S^1 = \{(x_1, x_2) \in R^2: x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ είναι ο κύκλος



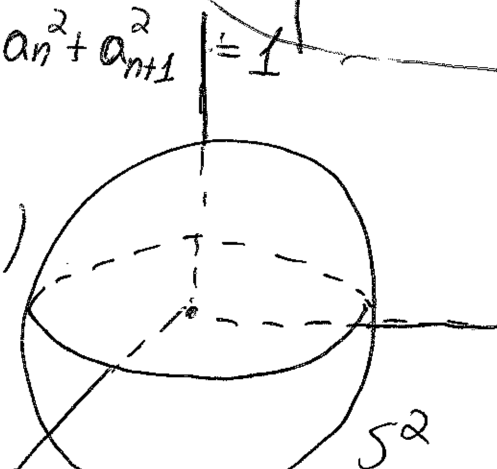
Για $n=2$, η S^2 είναι η 2-διάστατη σφαίρα

Γενικά αν $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in S^n$ δηλ. $a_1^2 + \ldots + a_n^2 + a_{n+1}^2 = 1$

τότε υπάρχει $1 \leq j \leq n+1$ ώστε $a_j \neq 0$

Αν $a_j > 0$ (π.χ. για $n=2$ και $j=3$ δηλ. $a_j > 0$)

τότε το $W = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in R^{n+1} \; x_j > 0\}$



(για $n=2$, $j=3$, το $W = \{(x_1, x_2, x_3) \subset R^3 : x_j > 0\}$)

είναι ανοιχτή περιοχή του $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$

HY-111

και το $S^n \cap W$ είναι το γράφημα της C^∞ συνάρτησης $\phi: D(0,1) \subset R^n \to R$ με τύπο:

$$\phi(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_{n+1}) = \sqrt{1-x_1^2-\dots-x_{j-1}^2-x_{j+1}^2-\dots-x_{n+1}^2}$$

Ομοια αν $a_j<0$, τότε $\varphi(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_{n+1}) =$

$$= -\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_{j-1}^2-x_{j+1}^2-\dots-x_{n+1}^2}$$

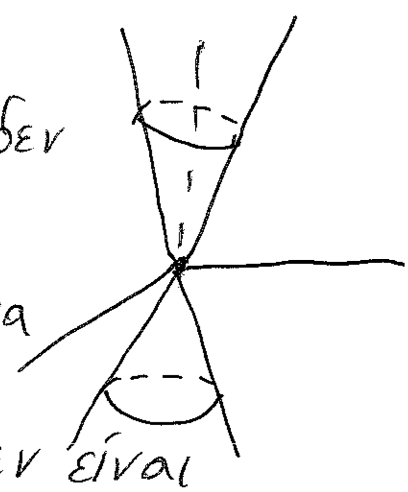
(για $n=2$, $j=3$, $a_j>0$, έχουμε $\varphi(x_1,x_2)=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$

★ Για $n=1$ κύκλο: (Προφανως $S^n = \partial D(0,1)$)

$\phi:(-1,1)\to R$ $\quad \gamma(t) = (t,\varphi(t)) = (t,\sqrt{1-t^2})$

$\phi(x)=\sqrt{1-x^2}$ $\quad \gamma$ είναι 1-1, $\gamma(t) \neq \binom{0}{0}$

<u>Παράδειγμα</u>: Το $C=\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2-z^2=0\}$ είναι κώνος με την κορυφή στο $(0,0,0)$ δεν είναι λεία επιφάνεια γιατί για καμιά ανοιχτη περιοχή W του $(0,0,0)$ το $C\cap W$ δεν είναι γράφημα συνάρτησης.



Το πάνω χωνί του κώνου είναι το γράφημα της συνάρτησης $z=\varphi(x,y)=\sqrt{z^2+y^2}$ που δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ $\phi:R^2\to R$

HY-111 (Φροντιστήριο) ① 2/4/2015

SOS Ακρότατα!!!

Άσκηση 6 Φυλλάδιο 7

γ) $f(x,y) = (x-1)^4 + (x-y)^4$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 4(x-1)^3 + 4(x-y)^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -4(x-y)^3 \end{aligned}\right\}$$

Σύστημα $4(x-1)^3 + 4(x-y)^3 = 0$

$\oplus \quad -4(x-y)^3 = 0$

$4(x-1)^3 = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

Άρα $-4(1-y)^3 = 0$

$\boxed{y=1}$

· $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 0$ διότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12(x-1)^2 + 12(x-y)^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 0$

· $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 0$

$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ άρα

$\det(Hf(1,1)) = 0$

ειδική περίπτωση

· Αφού $f(x,y) \geq 0$, για κάθε $x,y \in R^2$ και $f(1,1) = (0,0)$, τότε $f(x,y) \geq f(1,1)$ άρα το $(1,1)$ είναι ολικό ελάχιστο.

HY-111 (Φροντιστήριο)

Άσκηση 7 Φυλλάδιο 7

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+y \,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y+x \,, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ 2y+x=0 \\ 2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ x=-2y \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x=y=z=0}$$

· Κρίσιμο σημείο το $(0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,0) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,0) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0,0,0) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0,0) = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0,0,0) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0,0,0) = 0 \end{array}\right\}$$

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det Hf(0,0,0) = 6 > 0$$

$\Rightarrow$ Θεωρούμε διάνυσμα $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ τότε:

$$\langle v, Hf(0,0,0) \cdot v \rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2v_1+v_2 \\ v_1+2v_2 \\ 2v_3 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

ΗΥ-111 (Φροντιστήριο) ② 2/4/2015

$= v_1(2v_1+v_2) + v_2(v_1+2v_2) + v_3(2v_3) =$

$= 2v_1^2 + v_1 \cdot v_2 + v_1 \cdot v_2 + 2v_2^2 + 2v_3^2 =$

$= v_1^2 + (v_1+v_2)^2 + v_2^2 + 2v_3^2 > 0$, για κάθε $v \neq 0$

Άρα ο $Hf(0,0,0)$ είναι θετικά ορισμένος άρα η f παίρνει τοπικά γνήσια ελάχιστη τιμή (τοπικό) στο $(0,0,0)$. Επειδή η f δεν έχει άλλο κρίσιμο σημείο είναι ολικό ελάχιστο.

Άσκηση 8 Φυλλάδιο 7

- $f(x,y) = \frac{1}{xy}$, $x \cdot y \neq 0$. σημεία πλησιέστερα στο $(0,0,0)$;
- Η απόσταση του $(x, y, \frac{1}{xy})$ από το $(0,0,0)$ είναι:

$$g(x,y) = \left(\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + \left(\frac{1}{xy} - 0\right)^2}\right)^2 = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 \cdot y^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cdot\ \frac{\partial g}{\partial x} &= 2x - \frac{2}{x^3} \cdot \frac{1}{y^2} \\ \cdot\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 2y - \frac{2}{y^3} \cdot \frac{1}{x^2} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 2x - \frac{2}{y^2} \cdot \frac{1}{x^3} &= 0 \\ 2y - \frac{2}{x^2} \cdot \frac{1}{y^3} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x^4 \cdot y^2 - 2 &= 0 \\ 2y^4 \cdot x^2 - 2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^4 \cdot y^2 - 1 &= 0 \\ y^4 \cdot x^2 - 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (x^2 \cdot y - 1)(x^2 \cdot y + 1) &= 0 \\ (y^2 \cdot x - 1)(y^2 \cdot x + 1) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x^2 \cdot y - 1 &= 0 \\ x y^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \ ① \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} x^2 y - 1 &= 0 \\ x y^2 + 1 &= 0 \end{aligned} \ ②$$

$$\begin{aligned} x^2 y + 1 &= 0 \\ x y^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \ ③ \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} x^2 y + 1 &= 0 \\ x y^2 + 1 &= 0 \end{aligned} \ ④$$

HY-111 (Φροντιστήριο)

(1): $\begin{cases} x^2 y - 1 = 0 \\ x y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1/x^2 \\ y^2 = 1/x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1/x^4 \\ x^4 = x \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 1/x^2 \\ x(x^3-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1/x^2 \\ x=0 \text{ απορρίπτεται}, \ x = 1 \end{cases}$ → $y = 1$

(2): $\left.\begin{matrix} x^2 \cdot y - 1 = 0 \\ x \cdot y^2 + 1 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 1/x^2 \\ y^2 = -1/x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 1/x^2 \\ x^4 = -x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 1/x^2 \\ x(x^3+1) = 0 \end{matrix}\right\}$

$y = 1 \leftarrow x = -1$

$\boxed{x = 0 \text{ απορρ.}}$

(3): ... ομοίως: $x = 1$, $y = -1$

(4): ... ομοίως: $x = -1$, $y = -1$

Θέλουμε: $Hg(1,1)$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1) = 8, \ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,1) = 8, \ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1,1) = 4$

Άρα $Hg(1,1) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $\det(Hg(1,1)) = 48 > 0$

αφού $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1) = 8 > 0$ το $(1,1,1)$ βρίσκεται

εγγύτερα στο $(0,0,0)$ όμοια και τα $(-1,1,-1)$,

$(1,-1,-1)$, $(-1,-1,1)$