ΗΥ119 - ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Λύσεις 4ης σειράς Ασκήσεων

Όλες οι ασκήσεις είναι από το βιβλίο "Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές" του Gilbert Strang (3η έκδοση).

4.2.9.

Q orthogonal matrix $\rightarrow Q^TQ = I \Leftrightarrow \det(Q^TQ) = \det(I) \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow \det(Q^T)\cdot\det(Q) = 1 \\ \det Q^T = \det Q \end{array}\right\} \Rightarrow (\det Q)^2 = 1 \Leftrightarrow \det Q = \pm 1$$

Από τις στήλες του Q σχηματίζεται ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο κυβικής μορφής με όγκο ίσο με 1.

4.2.16

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (-1) \\ \\ (+) \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (-1) \\ (+) \end{array} \rightarrow$$

4.2.16 (συνέχεια)

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U$$

- $\det A = (-1)^{0} \det U = 1 \cdot 4 \cdot (-1) = -4$

  πλήθος εναλλαγών γραμμών που χρησιμοποιήθηκε στη διαδικασία απαλοιφής από τον A στον U

- $\det B = 1 \cdot 4 \cdot 1 = 4$

  συμβολισμός ορίζουσας

- $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

  $= \det A + \det B = 4 - 4 = 0$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα φτάναμε και με απαλοιφή.

- $\det AB = \det A \cdot \det B = -16$

- $\left.\begin{array}{l} \det A^T A = \det A^T \cdot \det A \\ \det A^T = \det A \end{array}\right\} \Rightarrow \det A^T A = (\det A)^2 = 16$

- $\det C^T = \det C = 0$

4.3.4

α) Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με a_{ij} = το μικρότερο από τα i,j

τότε:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

$$\det A = (-1)^0 \det U = \det U = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1.$$

β) Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με $a_{ij} = \min\{n_i, n_j\}$ για $n_1 = 2$, $n_2 = 6$, $n_3 = 8$, $n_4 = 10$, τότε:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 6 & 8 & 8 \\ 2 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{απαλοιφή}} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U$$

(4.3.4 (β) συνέχεια)

Επομένως, $\det A = (-1)^0 \det U = 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

Για κάθε $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$ έχουμε :

$$A = \left|\begin{matrix} n_1 & n_1 & n_1 & n_1 \\ n_1 & n_2 & n_2 & n_2 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} (-1)(-1)(-1) \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} n_1 & n_1 & n_1 & n_1 \\ 0 & n_2-n_1 & n_2-n_1 & n_2-n_1 \\ 0 & n_2-n_1 & n_3-n_1 & n_3-n_1 \\ 0 & n_2-n_1 & n_3-n_1 & n_4-n_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-1)(-1) \\ (+) \\ (+) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} n_1 & n_1 & n_1 & n_1 \\ 0 & n_2-n_1 & n_2-n_1 & n_2-n_1 \\ 0 & 0 & n_3-n_2 & n_3-n_2 \\ 0 & 0 & n_3-n_2 & n_4-n_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \\ (+) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} n_1 & n_1 & n_1 & n_1 \\ 0 & n_2-n_1 & n_2-n_1 & n_2-n_1 \\ 0 & 0 & n_3-n_2 & n_3-n_2 \\ 0 & 0 & 0 & n_4-n_3 \end{bmatrix} = U$$

Άρα, $\det A = (-1)^0 \det U = n(n_2-n_1)(n_3-n_2)(n_4-n_3)$

4.4.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

$$C_{11} = \det A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 20$$

$$C_{12} = (-1) \cdot \det A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{13} = \det A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{21} = -\det A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10$$

$$C_{22} = \det A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{23} = \det A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{31} = \det A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

(4.4.1. συνέχεια)

$$C_{32} = (-1)\det A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{33} = \det A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

προσοχή (ανάστροφος)

$$\text{cofactor matrix} = C^T = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \\ -12 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T = \underbrace{\begin{bmatrix} 20 & -10 & -12 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{A_{cof}}$$

$$A \cdot A_{cof} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} = 20 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \det(A) \cdot I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{cof} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 20 & -10 & -12 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -3/5 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

4.4.5. Find x, y, z by Cramer's rule

a) $\begin{aligned} ax + by &= 1 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$ and b) $\begin{aligned} x + 4y - z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \\ 2x \quad + 3z &= 0 \end{aligned}$

a) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B_x = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$, $B_y = \begin{bmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{bmatrix}$

$\det A = ad - bc$, $\det B_x = d$, $\det B_y = -c$

$x = \dfrac{\det B_x}{\det A}$, $y = \dfrac{\det B_y}{\det A}$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$x = \dfrac{d}{ad-bc}$, $y = \dfrac{-c}{ad-bc}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B_x = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$B_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B_z = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(8/8)

(συνέχεια 4.4.5(β))

$$\det A = 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(4+1)+3(1-4)=1$$

(ορίζουσα ως προς 3η γραμμή)

$$\det B_x = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$ (ορίζουσα ως προς 1η στήλη)

$$\det B_y = -1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$ (ως προς 2η στήλη)

$$\det B_z = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$ (ως προς 3η στήλη)

$$x = \frac{\det B_x}{\det A} = \frac{3}{1} = 3$$

$$y = \frac{\det B_y}{\det A} = -1 \quad , \quad z = \frac{\det B_z}{\det A} = -2 .$$

5.1.6:

π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ιδιοτιμές } \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1$$

προσθέτω στη 2η γραμμή την 1η γραμμή ×2

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ιδιοτιμές } \lambda_1' = 3.35, \quad \lambda_2' = 1.15$$

5.1.13:

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

Οι B, D μπορούν να γραφούν ως άνω τριγωνικοί με τις ιδιοτιμές τους στις διαγωνίους

Άρα, ο A είναι άνω τριγωνικός με τις ιδιοτιμές στην διαγώνιο

$\Rightarrow$ ιδιοτιμές $A: (1, 2, 3, 7, 8, 9)$

5.2.9:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} aq+bs & ar+bt \\ cq+ds & cr+dt \end{bmatrix} \quad \text{ίχνος: } aq+bs+cr+dt$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} qa+rc & qb+rd \\ sa+tc & sb+td \end{bmatrix} \quad \text{ίχνος: } qa+rc+sb+dt$$

$$AB - BA = \begin{bmatrix} bs-rc & ar+bt-qb-rd \\ cq+ds-sa-ct & cr-sb \end{bmatrix} \neq I$$

5.3.8:

a) A ιδιόμορφος $\Rightarrow \det = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} z = 2x \\ x = y \end{matrix} \qquad \text{ιδιοδιάνυσμα: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) A: Markov πίνακας $\Rightarrow \lambda_2 = 1$

Άρα $\lambda_3 = -0.2$ (επειδή ίχνος(A) = άθροισμα ιδιοτιμών)

c)
$$\begin{pmatrix} 0.2-1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2-1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} z = 4/3\, y \\ x = y \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$k + k + 4/3\, k = 10 \Rightarrow k = \frac{15}{8}$$

5.3.9:

Πίνακας Markov:
$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \text{ιδιοδιάνυσμα: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άρα $k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ⇝ αρχικός πληθυσμός φορτηγών: $k+k+k = 3k$