

ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ 2016 ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ II

ΘΕΜΑ 1ο. (2) Εστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}, & \text{όταν } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{όταν } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0, 0)$ και να ευρεθεί η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου του γραφήματος της f στο σημείο $(0, 0, 0)$.

(β) Να αποδειχθεί ότι το όριο $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ δεν υπάρχει. Είναι η f συνεχώς διαφορίσιμη στο \mathbb{R}^2 .

ΘΕΜΑ 2ο. (1.5) Εστω ότι $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση και $h : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$h(r, \phi) = f(r \cos \phi, r \sin \phi).$$

Να αποδειχθεί ότι

$$\left(\frac{\partial h}{\partial r}(r, \phi) \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial h}{\partial \phi}(r, \phi) \right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)^2$$

για κάθε $r > 0$, $\phi \in \mathbb{R}$, όπου $x = r \cos \phi$ και $y = r \sin \phi$.

ΘΕΜΑ 3ο. (1) Να ευρεθούν τα σημεία τοπικού μεγίστου, τοπικού ελαχίστου, καθώς και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y$$

ΘΕΜΑ 4ο. (1.5) Εστω $R > 0$. Να ευρεθούν πραγματικοί αριθμοί $x \geq 0$, $y \geq 0$ και $z \geq 0$ με σταθερό άθροισμα τετραγώνων $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ τέτοιοι ώστε το γινόμενο τους xyz να είναι το μέγιστο δυνατό.

ΘΕΜΑ 5ο. (1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_B (2y - \frac{1}{2}x) dx dy$, όπου B είναι το τρίγωνο στο \mathbb{R}^2 με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 1)$ και $(0, 2)$.

ΘΕΜΑ 6ο. (1.5) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq x, \quad y \geq 0\}.$$

ΘΕΜΑ 7ο. (1.5) Αν $R > 0$ και

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \quad 0 \leq y \leq x, \quad z \geq 0\},$$

να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_K z dx dy dz.$$

ΘΕΜΑ 10 (Α) Προφανώς $f(x,0)=0, f(0,y)=0 \forall x,y \in \mathbb{R}$

Αρα $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Έχουμε τότε

$$\frac{|f(h_1, h_2) - f(0,0) - (0,0) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{h_1^2 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \frac{h_1^2 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} \leq \frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \frac{h_1^2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \quad \forall (h_1, h_2) \neq (0,0)$$

ή αλλιώς $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} \leq y^2$ για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$.

Αρα η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ και $Df(0,0) = (0,0)$

Το επόμενο βήμα είναι να εξετάσουμε την f στο $(0,0)$ για $z=0$, δηλαδή να εξετάσουμε το επόμενο

(β) Για $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^2(x^2 + y^4) - x^2 y^2 \cdot 2x}{(x^2 + y^4)^2} = \frac{2xy^6}{x^2 + y^4}$$

$$\text{Επαιδα} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(y^2,y) = \frac{2y^8}{(2y^4)^2} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ δεν υπάρχει. Έτσι η $\frac{\partial f}{\partial x}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι συνεχής. Αρα η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

ΘΕΜΑ 20 Αν $g(r,\varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, $g: (0,+\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ τότε $D = f \circ g$. Η f συνιστά διαφορίσιμη και η g είναι C^∞ αρα η D είναι διαφορίσιμη και αρα να υπολογίσουμε $Dh(r,\varphi)$.

$$Dh(r,\varphi) = Df(g(r,\varphi)) \cdot Dg(r,\varphi) = \left(\frac{\partial h}{\partial x} \quad \frac{\partial h}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial h}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial h}{\partial y} \sin \varphi, -r \sin \varphi \frac{\partial h}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad \text{Αρα}$$

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \cos \varphi \frac{\partial h}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \frac{\partial h}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \frac{\partial h}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \text{ποτε}$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\cos \varphi \frac{\partial h}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + \left(-\sin \varphi \frac{\partial h}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial h}{\partial y}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.0 4 φορές C^∞ και $\frac{\partial h}{\partial x} = 3x^2 - 3$, $\frac{\partial h}{\partial y} = 3y^2 - 12$

Από το ημίγειο είναι ένα άνω και ένα άνω ημίσφαιρο εμβαδόν

$x^2=1$
 $y^2=4$ $\Rightarrow (x,y) = (1,2), (1,-2), (-1,2), (-1,-2)$

Επίσης $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

(α) $Hf(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, πηλίκο $\frac{12}{6} = 2 \Rightarrow (1,2)$

(β) $Hf(1,-2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ $\frac{-12}{6} = -2 \Rightarrow (1,-2)$

(γ) $Hf(-1,2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ $\frac{12}{-6} = -2 \Rightarrow (-1,2)$

(δ) $Hf(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ $\frac{-12}{-6} = 2 \Rightarrow (-1,-2)$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.0 $\pi_{\mathbb{R}^3} \circ \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, α $f(x,y,z) = xyz$, α $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ και $\gamma(0) = (1,1,1)$ και $\gamma(1) = (0,0,0)$. Αλλά γ $\pi_{\mathbb{R}^3} \circ \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ και $\gamma(0) = (1,1,1)$ και $\gamma(1) = (0,0,0)$. Αλλά γ $\pi_{\mathbb{R}^3} \circ \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ και $\gamma(0) = (1,1,1)$ και $\gamma(1) = (0,0,0)$.

$$\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Lagrange

πλην $\Delta^0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x > 0, y > 0, z > 0\}$

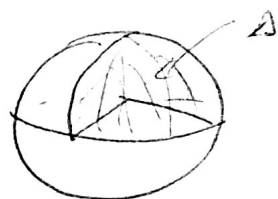
Είναι Δ $\pi_{\mathbb{R}^3} \circ \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ και $\gamma(0) = (1,1,1)$ και $\gamma(1) = (0,0,0)$.

$\Delta^0 = h^{-1}(\mathbb{R}^3)$, όπου $h: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^∞ συνάρτηση με $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ και $A \subset \mathbb{R}^3$ είναι το σύνολο Δ^0

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$

Από γ $\pi_{\mathbb{R}^3} \circ \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ και $\gamma(0) = (1,1,1)$ και $\gamma(1) = (0,0,0)$.

$yz = 2\lambda x$, $xz = 2\lambda y$, $xy = 2\lambda z$ και $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x > 0, y > 0, z > 0$



$$\Rightarrow \begin{aligned} xy &= 2\lambda x \\ xy &= 2\lambda y \\ xy &= 2\lambda z \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x > 0, y > 0, z > 0$$

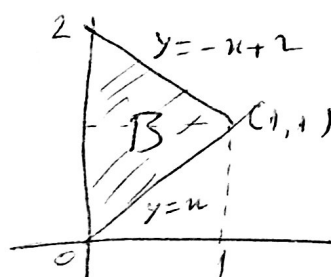
$$\Rightarrow \int xy = 2\lambda R^2 \Rightarrow 2\lambda = \frac{1}{R^2} xy$$

Also, we have $xy = \frac{1}{R^2} x^2 y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{R^2}{y} \Rightarrow$

$$x = \frac{R}{\sqrt{y}}, \text{ for } y \neq 0, x > 0. \text{ Also } y = \frac{R}{\sqrt{x}}, z = \frac{R}{\sqrt{x}}$$

is a region with circ. $\frac{R^2}{3\sqrt{3}}$.

THEMA 50 Examine $\int_B (2y - \frac{1}{2}x) dx dy$



$$= \int_0^1 \left(\int_x^{-x+2} (2y - \frac{1}{2}x) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[2 \int_x^{-x+2} y dy - \frac{1}{2}x \int_x^{-x+2} dy \right] dx$$

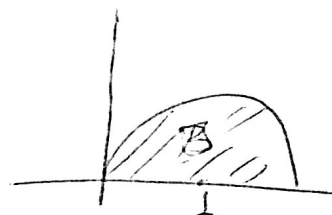
$$= \int_0^1 \left[(x-2)^2 - x^2 \right] dx - \frac{1}{2} \int_0^1 x(-x+2-x) dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 5x + 4) dx = \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = \frac{11}{6}$$

THEMA 60 Let $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$

then $f(k) = \int_B x dx dy$ with $|x| \leq |x|/2$.

with $0 \leq \pi/4$ and $0 \leq \phi \leq \pi$, also $y \geq 0$



$$x = 1 + r \cos \phi \quad \text{where } 0 \leq r \leq 1 \text{ and } 0 \leq \phi \leq \pi, \text{ also } y \geq 0$$

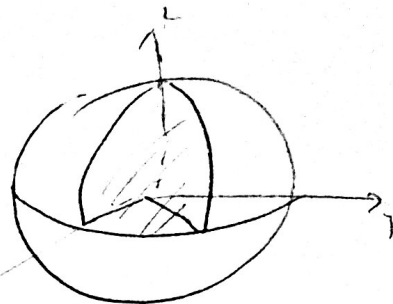
$$y = r \sin \phi$$

And $f(k) = \int_0^\pi \int_0^1 (1 + r \cos \phi) \cdot r dr d\phi$

$$= \frac{\pi}{2} + \left(\int_0^1 r^2 dr \right) \cdot \left(\int_0^\pi \cos \phi d\phi \right) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

EMA 70 Maxima/2T. Jorvis

Ge eqd. in 3D with sphere



$$\int_K z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/4} \int_0^R \rho \cos \theta \, \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(\int_0^R \rho^3 \, d\rho \right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \right) = \frac{\pi R^4}{32} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{\pi R^4}{64} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, d(2\theta) = \frac{\pi R^4}{64} \int_0^{\pi} \sin t \, dt = \frac{\pi R^4}{32}$$

Me wdz. in 3D with sphere \approx 0.12 70

$(x, y, z) \in K \Leftrightarrow 0 \leq r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{R^2 - z^2}$, $0 \leq z \leq R$ and $0 \leq \sin \phi \leq \cos \phi$, $\sin \phi \cos \phi$ $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$. And

$$\int_K z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{\pi/4} \int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} z \cdot r \, dr \right) dz \, d\phi$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^R z \left(\frac{R^2 - z^2}{2} \right) dz = \frac{\pi}{4} \left[\int_0^R \frac{R^2}{2} z \, dz - \int_0^R \frac{z^3}{2} \, dz \right]$$

$$= \frac{\pi R^4}{8} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right] = \frac{\pi R^4}{32}$$

Me wdz. in 3D with sphere \approx 0.12 60

$(x, y) \in B \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 1$ and $y \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq r^2 \leq 2r \cos \phi$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\text{And } \int(K) = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2 \cos \phi} r^2 \cos \phi \, dr \right) d\phi = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \phi \, d\phi$$

$$= \frac{8}{3} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\phi}{2} \, d\phi - \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\phi \, d\phi \right]$$

$$= \frac{8}{3} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos 2\phi \, d\phi - \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4\phi}{2} \, d\phi \right] = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{16} \right) \frac{8}{3} = \frac{8}{3} \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{2}$$