

HY110 Απειροστικός Λογισμός 1
Χειμερινό Εξάμηνο 2009
Διδασκων Α.Μουχταρης

Ασκηση 1 (2 μοναδες) Παραγωγοι

Εστω 2 συναρτησεις f και g παραγωγισιμες. Βρειτε ενα τυπο για την παραγωγο της συναρτησης f^g .

Ασκηση 2 (3 μοναδες) Τεχνικες ολοκληρωσης

(α)(1 μοναδα) Υπολογιστε το αοριστο ολοκληρωμα $\int \theta^2 e^\theta d\theta$.

(β)(1 μοναδα) Υπολογιστε το αοριστο ολοκληρωμα $\int \frac{x+3}{x^2+2x+1} dx$.

(γ)(1 μοναδα) Υπολογιστε το αοριστο ολοκληρωμα $\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}} dx$, αν γνωριζετε οτι $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1}(x) + C$.

Ασκηση 3(2 μοναδες) Σειρες και Δυναμοσειρες

(α)(1 μοναδα) Διερευνηστε τη συγκλιση της σειρας $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 9}{5^n}$.

(β)(1 μοναδα) Διερευνηστε την (απολυτη) συγκλιση και βρειτε το διαστημα συγκλισης της δυναμοσειρας $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}}{2n+5}$.

Ασκηση 4(3 μοναδες + 1 μοναδα BONUS) Γενικευμενα ολοκληρωματα και συγκλιση σειρων

(α)(2 μοναδες) Υπολογιστε το γενικευμενο ολοκληρωμα $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$, οπου p οποιοσδηποτε πραγματικος αριθμος.

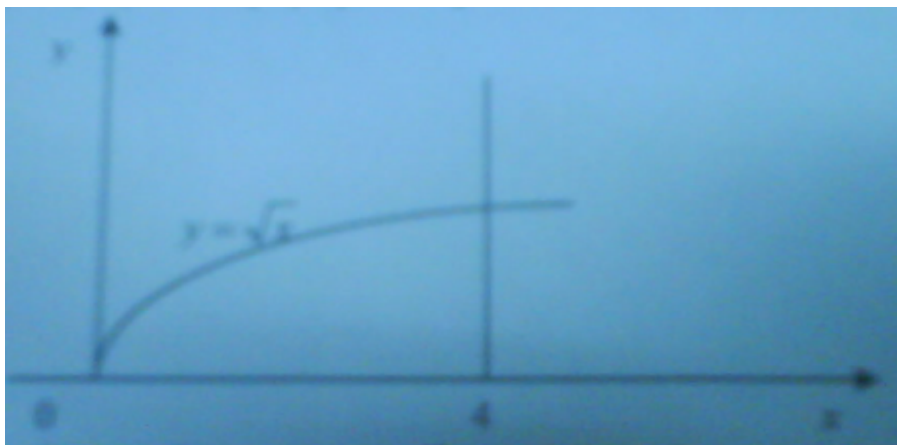
(β)(1 μοναδα BONUS) Αποδειξτε το κριτηριο του ολοκληρωματος για συγκλιση σειρων θετικων ορων, δηλαδη <<Εστω a_n ακολουθια θετικων ορων. Εστω $a_n = f(n)$ οπου f συνεχης θετικη "...". Στην περιπτωση αυτη η σειρα $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ και το ολοκληρωμα $\int_N^{\infty} f(x)dx$ θα συγκλινουν ή θα αποκλινουν ταυτοχρονα>>. Αρκει να το δειξετε για μια τιμη του N , π.χ. $N-1$.

(γ)(1 μοναδα) Με χρηση των αποτελεσματος των (α) και (β), βρειτε ποτε (δλδ για ποιες τιμες του p) συγκλινει και ποτε αποκλινει η p -σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

ΗΥ110 Απειροστικός Λογισμός 1
Σεπτέμβρης 2009
Διδασκων Α.Μουχταρης

Άσκηση 1 Εφαρμογες Ολοκληρωμάτων

(α) (1 μοναδα) Το χωριο που περικλειεται από την καμπυλη $y=\sqrt{x}$, τον αξονα x και την ευθεια $x=4$, περιστρεφεται ως προς τον αξονα x ώστε να παραγει ένα στερεο, του οποιου ο ογκος ζητειται.



(β)(1 μοναδα) Βρείτε το μήκος της καμπυλης που προκυπτει από τις παρακατω παραμετρικες εξισωσεις $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Άσκηση 2 Τεχνικες Ολοκληρωσης

(α)(1 μοναδα) Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int \sin \theta e^{\theta} d\theta$.

(β)(2 μοναδες) Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int \frac{e^{\theta} d\theta}{e^{2\theta} + 3e^{\theta} + 2}$

Άσκηση 3

(2 μοναδες) Εστω μια συναρτηση $f(x)$ ορισμενη στο συνολο των πραγματικων αριθμων. Εστω ότι ισχυει $x \leq f(x) \leq x + x^2$. Δειξτε ότι η συναρτηση είναι παραγωγισιμη στο $x=0$, και βρείτε την παραγωγο της στο σημειο αυτό.

Άσκηση 4 Απειρες Σειρες και Δυναμοσειρες

(α)(1 μοναδα) Μελετηστε την συγκλιση της σειρας απειρων ορων $\sum_{i=1}^n \frac{(\ln n)^n}{n}$

(β)(2 μοναδες) Εστω μια οποιαδηποτε συναρτηση $f(x)$ με παραγωγους ολων των ταξεων σε κάθε σημειο διαστηματος που περιεχει ένα σημειο c . Υποθεστε ότι θελουμε να αναλυσουμε την συναρτηση σαν μια δυναμοσειρα με κεντρο το c , δηλαδη θελουμε να γραψουμε τη συναρτηση σαν αθροισμα της μορφης

$$f(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + a_3(x - c)^3 + \Lambda = \sum_{i=0}^n a_i (x - c)^i .$$

Βρείτε τους συντελεστές a_i για να ισχύει η παραπάνω ισότητα (η σειρά αυτή είναι η σειρά Taylor που παραγεται από τη συνάρτηση γύρω από το σημείο c).
 Βοήθεια: όπως λείει η εκφώνηση για να ισχύει η ισότητα, θα πρέπει η συνάρτηση να έχει παραγωγούς όλων των τάξεων σε διαστήμα που περιεχει το c .

ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ Ι

Σεπτέμβριος 2010

Μουχτάρης

Άσκηση 1 (2 μονάδες)

Εστω μια συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Εστω ότι ισχύει

$x \leq f(x) \leq x + x^2$. Δειξτε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγισιμη στο $x=0$, και βρείτε την παραγωγο της στο σημείο αυτό.

Άσκηση 2 (2 μονάδες)

$F(x) = x^4 + 4x^3 + 10$. Να γίνει πλήρης ανάλυση της συνάρτησης (συνέχεια, αύξουσα/φθίνουσα, σημεία καμπής, κρίσιμα σημεία, κοίλα άνω/κάτω, ασύμπτωτες) Και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Άσκηση 3 (2 μονάδες)

(α)(1 μοναδα) Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int \cos \theta e^{\theta} d\theta$.

(β)(1 μοναδα) Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int \frac{e^{\theta} d\theta}{e^{2\theta} + 3e^{\theta} + 2}$

Άσκηση 4 (2 μονάδες)

(α)(1 μοναδα) Υπολογιστε το γενικευμένο ολοκληρωμα $\int_0^{\infty} \theta e^{\theta} d\theta$.

(β)(1 μοναδα) Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

Άσκηση 5 (2 μονάδες)

(α)(1 μοναδα) Μελετηστε την συγκλιση της σειρας απειρων ορων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^n}$

(β)(1 μοναδα) Εστω μια οποιαδηποτε συνάρτηση $f(x)$ με παραγωγούς όλων των τάξεων σε κάθε σημείο διαστήματος που περιεχει ένα σημείο c . Υποθεστε ότι θελουμε να αναλυσουμε την συνάρτηση σαν μια δυναμοσειρα με κεντρο το c , δηλαδη θελουμε να γραψουμε τη συνάρτηση σαν αθροισμα της μορφης

$$f(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + a_3(x - c)^3 + \Lambda = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - c)^i .$$

Βρείτε τους συντελεστές a_i για να ισχύει η παραπάνω ισότητα (η σειρά αυτή είναι η σειρά Taylor που παραγεται από τη συνάρτηση γύρω από το σημείο c).

Βοήθεια: όπως λείει η εκφώνηση για να ισχύει η ισότητα, θα πρέπει η συνάρτηση να έχει παραγωγούς όλων των τάξεων σε διαστήμα που περιεχει το c .

HY 110 Απειροστικός Λογισμός Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων Α. Μουχτάρης

Τελική Εξέταση Σεπτεμβρίου 30/8/2011

Άσκηση 1 (3 μονάδες): Παράγωγος παραμετρικής και πεπλεγμένης συνάρτησης.

(α) (1.5 μονάδα) Έστω η καμπύλη (σημεία (x,y) στο επίπεδο) που δίνεται από την παραμετρική εξίσωση $x = \cos t$, $y = 1 + \sin t$. Να βρεθεί η εφαπτομένη ευθεία (της καμπύλης), στο σημείο $t = \pi/2$.

(β) (1.5 μονάδα) Έστω η καμπύλη $xy + y^2 = 1$. Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος στο σημείο $(0, -1)$.

Άσκηση 2 (3 μονάδες): Τεχνικές ολοκλήρωσης.

(α) (1 μονάδα) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \cos \theta \cdot e^{\theta} \cdot d\theta$.

(β) (1 μονάδα) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{e^{\theta} d\theta}{e^{2\theta} + 3e^{\theta} + 2}$.

(γ) (1 μονάδα) Υπολογίστε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx$

Άσκηση 3 (2 μονάδες): Γενικευμένα ολοκληρώματα και εφαρμογές ολοκληρωμάτων.

(α) (1 μονάδα) Υπολογίστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$, όπου p οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

(β) (1 μονάδα) Βρείτε το μήκος της καμπύλης: $x = \frac{y^3}{12} + \frac{1}{y}$, $1 \leq y \leq 2$.

Άσκηση 4 (2 μονάδες): Σειρές και Δυναμοσειρές.

(α) (1 μονάδα) Διερευνήστε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$.

(β) (1 μονάδα) Διερευνήστε τη σύγκλιση της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$.