ΗΥ-111 ① 20/4/2015

ΛΕΙΕΣ ΥΠΕΡΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

<u>Ορισμός</u>: Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ λέγεται <u>λεία υπερεπιφάνεια</u>. Αν για κάθε $x \in S$ υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $U \in \mathbb{R}^{n+1}$ με $x \in U \cap S$ ώστε το $U \cap S$ να είναι το γράφημα κάποιας C^{∞} συνάρτηση, n-μεταβλητών.

<u>Ερώτημα</u>: Αν $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο και $h : A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Για $c \in \mathbb{R}$, πότε το $h^{-1}(c) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in A : h(x_1, \dots, x_{n+1}) = c\}$ είναι λεία υπερεπιφάνεια; ☆☆☆

Το $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in A$ είναι κρίσιμο σημείο της h όταν

$$Dh(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0 \iff \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \dots = \frac{\partial h}{\partial x_{n+1}}(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$$

☆☆☆

$$\boxed{\text{Το } h^{-1}(c) \text{ λέγεται σύνολο στάθμης της τιμής } c \text{ για την } h}$$

☆ Αν το c δεν είναι κανονική τιμή της h τότε λέγεται κρίσιμο σημείο της h

Το $c \in \mathbb{R}$ λέγεται <u>κανονική τιμή</u> της h αν το $h^{-1}(c)$ δεν περιέχει κρίσιμα σημεία της h, δηλαδή αν ☆

$Dh(x_1, \dots, x_{n+1}) \neq 0$ για κάθε $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in h^{-1}(c)$

ΗΥ-111

<u>Αναδιατύπωση του θεωρήματος των πεπλεγμένων συναρτήσεων</u> (ειδική μορφή). Αν $A \subset R^{n+1}$ ένα ανοιχτό σύνολο, $h: A \to R$ μια C^∞ συνάρτηση και $c \in R$ μια κανονική τιμή της h, τότε το $h^{-1}(c)$ είναι λεία υπερεπιφάνεια.

<u>Παραδείγματα</u> 1) Το $R>0$ είναι κανονική τιμή της $h: R^{n+1} \to R$ με $h(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2$ γιατί η h έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο το $(0,0,\dots,0)$. Άρα το $S_R^n = h^{-1}(R^2) = \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in R^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = R^2\}$ είναι λεία υπερεπιφάνεια (n-σφαίρα με ακτίνα $R>0$ και κέντρο το $(0,0,\dots,0)$)

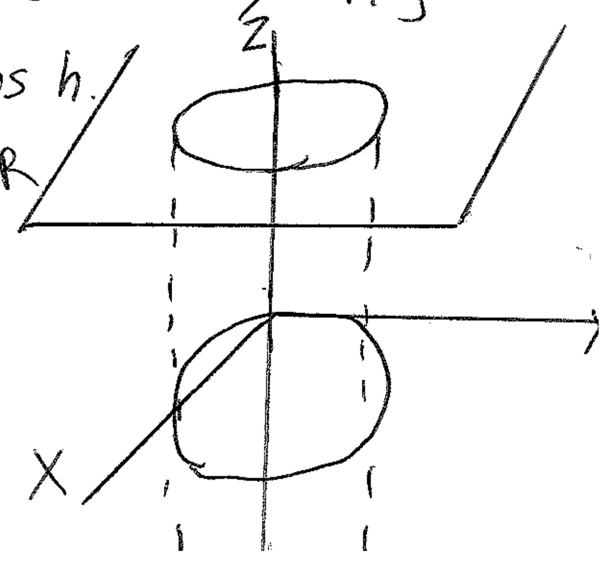
2) Έστω $h: R^3 \to R$ με $h(x,y,z) = x^2 + y^2$. Εδώ έχουμε

$$Dh(x,y,z) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 0)$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία της h είναι τα $(0,0,\ )$, $z \in R$

Για $R>0$ έχουμε $h^{-1}(R^2) = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 = R^2\}$ οπότε το R^2 είναι κανονική τιμή της h.

και το $h^{-1}(R^2)$ είναι λεία (υπερ.) επιφάνεια. Το $h^{-1}(R^2)$ είναι ο ορθός κυκλικός κύλινδρος με ακτίνα βάσης $R>0$.



ΗΥ-111 ② 20/4/2015

3) Έστω $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $h(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$, που είναι C^∞ και $Dh(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)$. Άρα μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0,0,0)$. Άρα το $0 \in \mathbb{R}$ είναι κρίσιμη τιμή της h και το $h^{-1}(0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-z^2=0\}$ είναι ο κώνος, που δεν είναι λεία επιφάνεια.
Κάθε $c \neq 0$ είναι κανονική τιμή της h και το $h^{-1}(c)$ είναι λεία επιφάνεια. Εδώ $h^{-1}(c) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2=c\}$

Αν $g: X \to \mathbb{R}$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση στο ανοιχτό σύνολο $X \subset \mathbb{R}^n$ και το $a = (a_1, \ldots, a_n) \in X$, το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο του γραφήματος της g στο $(a_1, \ldots, a_n, g(a_1, \ldots, a_n))$ έχει εξίσωση $x_{n+1} - g(a_1, \ldots, a_n) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n)(x_i - a_i)$$

Το $\operatorname{Im} Dg(a_1, \ldots, a_n)$ έχει εξίσωση $y_{n+1} =$

$$= \sum \frac{\partial g}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) y_i = Dg(a_1, \ldots, a_n)\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right)$$

Το γράφημα της g είναι το σύνολο

$$\Gamma = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \ldots, x_n) \in X \text{ και } x_{n+1} = g(x_1, \ldots, x_n)\} =$$

HY-111

$= \{(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)) \in R^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in X\}$

$= \Phi(X)$ όπου $\varphi : X \to R^{n+1}$ είναι η διαφορίσιμη συνάρτηση

$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n))$

Έχουμε

$$D\varphi(a_1, \dots, a_n) = \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right\} \text{στο } (a_1, \dots, a_n)$$

και $\operatorname{Im} D\varphi(a_1, \dots, a_n) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \in R^{n+1} : \right.$

$\left. D\varphi(a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \text{ για κάποιο } \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in R^n \right\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \in R^{n+1} \text{ υπάρχουν } \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in R^n \text{ ώστε} \right.$

$\left. \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) \cdot z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \right\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} : y_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) y_i \right\}$$

Άρα το εφαπτομένο υπερεπίπεδο του γραφήματος της g στο $(a_1, \ldots, a_n, g(a_1, \ldots, a_n))$ ταυτίζεται με Το $\operatorname{Im} D\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ μεταφερόμενο κατά το διάνυσμα $(a_1, \ldots, a_n, g(a_1, \ldots, a_n))$

Έστω ότι $h : A \to \mathbb{R}$ μια C^∞ συνάρτηση, $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ανοιχτό και $c \in \mathbb{R}$ μια κανονική τιμή της h και $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in h^{-1}(c)$, δηλαδή $h(a_1, \ldots, a_{n+1}) = c$. Υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ώστε $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in U$ και το $U \cap h^{-1}(c)$ να είναι το γράφημα κάποιας C^∞ συνάρτησης $g : X \to \mathbb{R}$ δηλαδή $U \cap h^{-1}(c) = \{(x_1, \ldots, x_n, g(x_1, \ldots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \ldots, x_n) \in X\}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό (όταν $\frac{\partial h}{\partial x_{n+1}}(a_1, \ldots, a_{n+1}) \neq 0$).

Άρα $h(\varphi(x_1, \ldots, x_n)) = c$ για κάθε $(x_1, \ldots, x_n) \in X$ όπου όπως προηγουμένως $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, g(x_1, \ldots, x_n))$.

HY-111

Ειδικά $g(a_1,\dots,a_n) = a_{n+1}$ και παραγωγίζονται απ' τον κανόνα της αλυσίδας βρίσκουμε $0 = Dh(\varphi(a_1,\dots,a_n))$.

$D\varphi(a_1,\dots,a_n)_v = Dh(a_1,\dots,a_{n+1}) \cdot D\varphi(a_1,\dots,a_n)_v = 0$ για κάθε $v \in R^n$

$\Leftrightarrow Im\, D\varphi(a,\dots,a_n) \leq Ker\, Dh(a_1,\dots,a_{n+1})$: |

$Dh(a_1,\dots,a_{n+1}) : R^{n+1} \to R$

Επειδή $Dh(a_1,\dots,a_n) \neq 0 \Rightarrow \dim Ker\, h(a_1,\dots,a_{n+1}) = n$.

Άρα $Im\, D\varphi(a_1,\dots,a_n) = Ker\, Dh(a_1,\dots,a_{n+1}) =$

$\{u \in R^{n+1} : Dh(a_1,\dots,a_{n+1}) \cdot u = 0\} = \{a \in R^{n+1}$

$: \langle \nabla h(a_1,\dots,a_{n+1}), u \rangle = 0\} =$

= υπερεπίπεδο κάθετο στο $\nabla h(a_1,\dots,a_n)$

<u>Ορισμός:</u> Αν το $c \in R$ είναι κανονική τιμή της h, τότε το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο T_aS της υπερεπιφάνειας στάθμης $S = h^{-1}(c)$ στο σημείο $a = (a_1, \dots, a_{n+1})$ είναι το κάθετο στο $\nabla h(a_1, \dots, a_{n+1})$ που περνάει απ' το $(a_1, \dots, a_{n+1})$

<u>Παράδειγμα:</u> Η $S^n = h^{-1}(1) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in R^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$

δηλαδή: $h(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1$, στο σημείο $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in S^n$ έχει εφαπτόμενο υπερεπίπεδο εξίσωσης:

$$T_a S^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in R^{n+1} : \left\langle \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_n - a_{n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \\ \vdots \\ 2a_{n+1} \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in R^{n+1} : a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_{n+1} \cdot x_{n+1} = 1 \right\} =$$

= Το κάθετο στο $a = (a_1, \dots, a_{n+1})$ που διέρχεται απ' το $a = (a_1, \dots, a_{n+1})$.

Πρόβλημα: Να βρεθούν τα ακρότατα της ποσότητας $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ όταν οι μεταβλητές μας ικανοποιούν την συνθήκη (= περιορισμό) $h(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = c$

Θεώρημα (Lagrange): Έστω $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ένα ανοιχτό σύνολο και $c \in \mathbb{R}$ μια κανονική τιμή της C^∞ συνάρτησης $h: A \to \mathbb{R}$, (όποτε το $S = h^{-1}(c)$ είναι λεία υπερεπιφάνεια στο $\mathbb{R}^{n+1}$). Αν $f: A \to \mathbb{R}$ είναι μια C^1 συνάρτηση και η $f|_S$ έχει τοπικό ακρότατο στο $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) \in S$ (δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x) \leq f(a)$ για κάθε $x \in S \cap D(a, \delta)$ ή $f(x) \geq f(a)$ για κάθε $x \in S \cap D(a, \delta)$), τότε το $\nabla f(a)$ είναι συγγραμμικό του $\nabla h(a)$ δηλαδή υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\nabla f(a) = \lambda \nabla h(a)$.

Με άλλα λόγια τα ακρότατα της $f|_S$ είναι λύσεις του συστήματος εξισώσεων

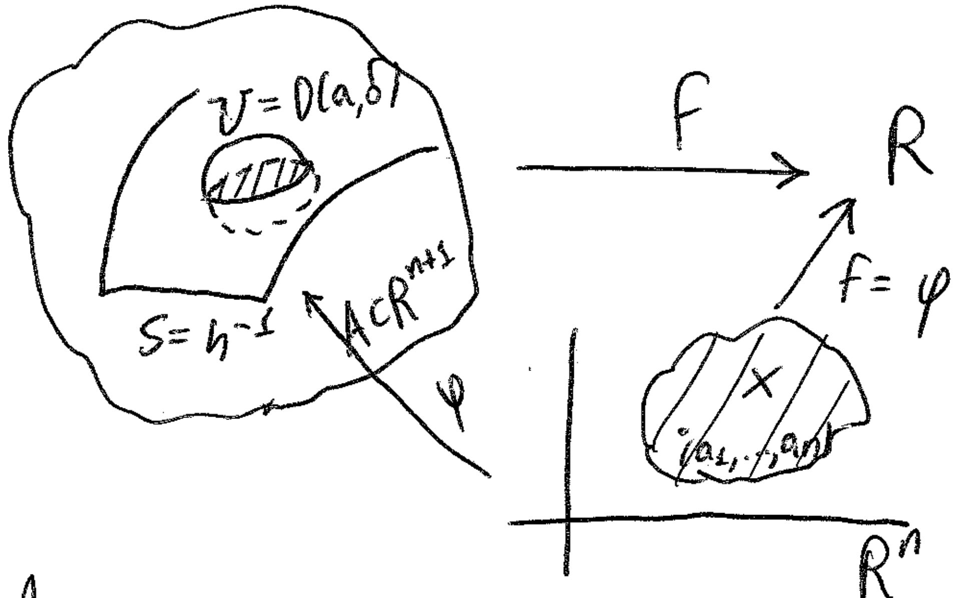
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lambda \frac{\partial h}{\partial x_i}(a), \quad 1 \leq i \leq n+1$$

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = c$$

Το λ λέγεται πολλαπλασιαστής Lagrange

HY-111

<u>Απόδειξη</u> Επειδή το c είναι κανονική τιμή της h και $a \in h^{-1}(c) = S$ υπάρχει ανοιχτό σύνολο $U \subset R^{n+1}$ με $a \in U$ ώστε το $U \cap S$ να είναι το γράφημα μιας C^{∞} συνάρτησης $g: X \to R$, όπου $X \subset R^n$ είναι ανοιχτό.
Δηλαδή $U \cap S = \varphi(X)$, όπου $\varphi: X \to R^{n+1}$ είναι η $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n))$ (όταν $\frac{\partial h}{\partial x_{n+1}}(a) \neq 0$).



Αν η $f|_S$ έχει τοπικό ακρότατο στο $a = (a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = (a_1, \dots, a_n, g(a_1, \dots, a_n))$ τότε η $f \circ \varphi : X \to R$ έχει τοπικό ακρότατο στο $(a_1, \dots, a_n)$

Άρα $0 = D(f\circ\varphi)(a_1, \dots, a_n) = Df(\varphi(a_1, \dots, a_n)) \cdot D\varphi(a_1, \dots, a_n) = Df(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \cdot D\varphi(a_1, \dots, a_n)$

HY-111 ② 21/4/2015

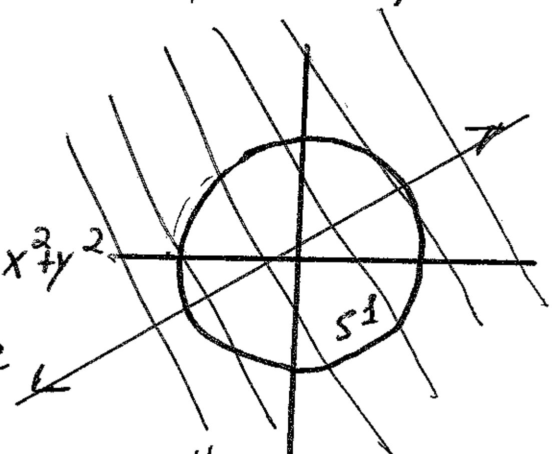
Το κάθετο υπερεπίπεδο στο $\nabla h(a) = T_aS = \operatorname{Im} D\varphi(a_1,\dots,a_n) \subseteq$

$\operatorname{Ker} \nabla h(a) \subseteq \operatorname{Ker} Df(a_1,\dots,a_n,a_{n+1})$ (= το κάθετο υπερεπίπεδο στο $\nabla f(a)$,

Αφού $\dim T_aS = n \Rightarrow$ τα $\nabla f(a), \nabla h(a)$ είναι συγγραμμικά $T = f^{-1}\{a\}$

Παράδειγμα 1) Θέλουμε να βρούμε τα ακρότατα της ποσότητας $4x+3y$ υπό τη συνθήκη $x^2+y^2=1$, δηλαδή θέλουμε τα $\max(f|S^1)$, $\min(f|S^1)$, όπου $f(x,y)=4x+3y$ και $S^1=h^{-1}(1)$, όπου $h(x,y)=x^2+y^2$.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Lagrange οι λύσεις του προβλήματος είναι λύσεις του συστήματος.



$a = 4x+3y$

$\nabla h\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$

$\nabla f\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right) = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 4 &= 2\lambda x \\ 3 &= 2\lambda y \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{2}{\lambda} \\ y &= \frac{3}{2\lambda} \end{aligned}$$

$$x^2+y^2=1 \quad \frac{4}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \frac{25}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 5$$

Για $\lambda = \frac{5}{2}$ έχουμε τη λύση $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{3}{5}$

και για $\lambda = -\frac{5}{2}$ έχουμε $x = \frac{-4}{5}$, $y = \frac{-3}{5}$

Επειδή $\underbrace{f\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)}_{\text{μέγιστη τιμή}} = 5 > -5 = \underbrace{f\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)}_{\text{ελάχιστη τιμή}}$

HY-111

2) Θέλουμε την ελάχιστη τιμή της $f(x,y,z) = -2xy + 2yz + 2xz$ πάνω στη σφαίρα $S^2 = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2+y^2+z^2 = 1 = h^{-1}(1)$

Αυτή υλοποιείται σε λύση του συστήματος

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \lambda \frac{\partial h}{\partial z} \\ h(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2 = 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} -\cancel{2}y + \cancel{2}z &= \cancel{2}\lambda x \\ -\cancel{2}x + \cancel{2}z &= \cancel{2}\lambda y \\ \cancel{2}y + \cancel{2}x &= \cancel{2}\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 &= 1 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} \lambda x + y - z &= 0 \\ x + \lambda y - z &= 0 \\ x + y - \lambda z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= 1 \end{aligned} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} (\lambda-1)(x-y) &= 0 \\ (\lambda-1)(y+z) &= 0 \\ x + y - \lambda z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= 1 \end{aligned}$$

Έχουμε τώρα δύο περιπτώσεις

1) $\lambda = 1$, οπότε το σύστημα γίνεται

$$x + y - z = 0 \Rightarrow z = x + y$$

$$x^2+y^2+z^2 = 1$$

Σ' αυτή τη περίπτωση η τιμή είναι

$$f(x,y,z) = -2xy + 2y(x+y) + 2(x+y)x$$

$$= 2y^2 + 2z^2 + 2xy = y^2 + x^2 + (x+y$$

ΗΥ-111 ③ 21/4/2015

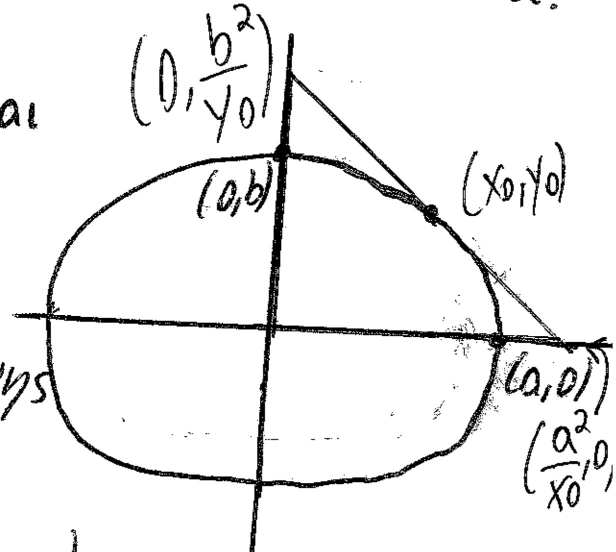
2) $\lambda \neq 1$. Τότε $x = y = -z$ και αντικαθιστώνται στην τελευταία $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ οπότε $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Άρα έχουμε δύο λύσεις, τις $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Έχουμε $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -2 < 1$

Συμπέρασμα η ελάχιστη τιμή της $f|_{S^2}$ είναι το -2.

3) <u>Πρόβλημα:</u> Έστω $a > 0, b > 0$ και

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$$



Να βρεθούν τα σημεία της έλλειψης S στα οποία η εφαπτομένη της και οι άξονες σχηματίζουν ένα (ορθογώνιο) τρίγωνο με το ελάχιστο δυνατό εμβαδόν

<u>Λύση</u> $S = h^{-1}(1)$, όπου $h(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. Αφού $Dh(x,y) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right)$ το $1 \in \mathbb{R}$ είναι κανονική τιμή της h και το S είναι λεία υπερεπιφάνεια στο $\mathbb{R}^2$

Συνεπώς η εφαπτόμενη στο $(x_0, y_0) \in S$ της S, είναι η ευθεία που περνάει απ' το (x_0, y_0)

HY-111

και είναι κάθετη στο $\nabla h(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2x_0/a^2 \\ 2y_0/b^2 \end{pmatrix}$. Άρα έχει εξίσωση $\left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x_0/a^2 \\ 2x_0/b^2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2x\cdot x_0}{a^2} - \frac{2x_0^2}{a^2} + \frac{2y\cdot y_0}{b^2} - \frac{2y_0^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x\cdot x_0}{a^2} + \frac{y\cdot y_0}{b^2} = 0}$$

Η εφαπτομένη έχει σημεία τομής με τον άξονα $\left(\frac{a^2}{x_0}, 0\right)$ και $\left(0, \frac{b^2}{y_0}\right)$. Το εμβαδόν του τριγώνου που μας ενδιαφέρει είναι $f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\frac{a^2 b^2}{|x_0\cdot y_0|}$

Οι λύσεις του προβλήματος περιέχονται στις λύσεις του συστήματος

$$\frac{a^2b^2}{2y}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2\lambda x}{a^2}$$

$$\frac{a^2\cdot b^2}{2x}\left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{2\lambda y}{b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a^2\cdot b^2\cdot x y^{\cancel{2}}}{a^2\cdot b^2\cdot x^{\cancel{2}}\cdot \cancel{y}} = \frac{\frac{\cancel{a^2b^2}}{x^2y}}{\frac{\cancel{a^2b^2}}{xy^2}} = \frac{xb^2}{ya^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{xb^2}{ya^2} \Rightarrow y^2\cdot a^2 = x^2\cdot b^2 \Rightarrow$$

$$y^2 = x^2\left(\frac{b^2}{a^2}\right)$$

Αντικαθιστόντας στην τελευταία εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}\cdot x^2\left(\frac{b^2}{a^2}\right) = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

Οι 4 λύσεις είναι: $\left(\frac{a}{\sqrt2}, \frac{b}{\sqrt2}\right), \left(\frac{a}{\sqrt2}, \frac{-b}{\sqrt2}\right), \left(\frac{-a}{\sqrt2}, \frac{b}{\sqrt2}\right), \left(\frac{-a}{\sqrt2}, \frac{-b}{\sqrt2}\right)$

Άσκηση 9 Φυλλάδιο 7

Έστω $S=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : x+y+z=a$ και $x,y,z\geq 0\}$
και $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ με $f(x,y,z)=x\cdot y\cdot z$

Άρα, αν $x=0$ ή $y=0$ ή $z=0$ τότε $f(x,y,z)=0$

Άρα, η f δεν έχει τοπικό μέγιστο σ' αυτά τα σημεία.

Συνεπώς $\max f|_S = \max f|\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=a,\ x,y,z>0\}$

Αφού, $z=a-x-y$ το πρόβλημα γίνεται ισοδύναμο με την εύρεση των ακροτάτων (μέγιστων) της συνάρτησης $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $g(x,y)=x\cdot y\cdot(a-x-y)$ στο σύνολο $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ y>0$ και $x+y<a\}$. Έχουμε $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=ay-2xy-y^2$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=ax-x^2-2xy$$

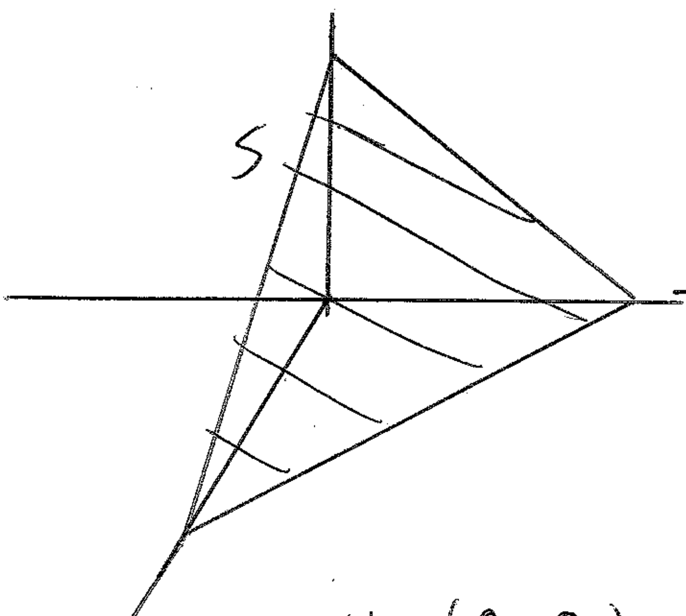
Κρίσιμα σημεία της g στο A

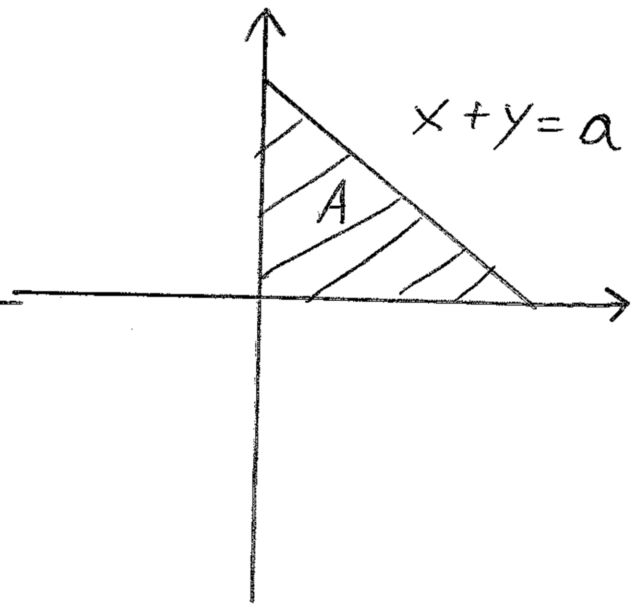
$$\left\{\begin{array}{l} ay-2xy-y^2=0 \\ ax-x^2-2xy=0 \\ \left(\begin{array}{l} x>0 \\ y>0 \\ x+y<a \end{array}\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a-2x-y=0 \\ a-x-2y=0 \\ \left(\begin{array}{l} x,y>0 \\ x+y<a \end{array}\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

HY-111 (Φροντιστήριο)

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x+y=a \\ x+2y=a \\ \left(\begin{array}{c} x>0,\ y>0 \\ x+y<a \end{array} \right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=\frac{a}{3} \\ y=\frac{a}{3} \end{array}$$

άρα και $z=\frac{a}{3}$





Πίνακας $Hg\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$

$$Hg\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2a}{3} & -\frac{a}{3} \\ -\frac{a}{3} & -\frac{2a}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \det\left(Hg\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)\right) = \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{9} = \frac{1}{3}a^2 > 0$$

και $\left(-\frac{2a}{3} < 0\right)$. Άρα έχει μέγιστο στο $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$

Άρα η λύση είναι $x=y=z=\frac{a}{3}$

Άσκηση 1 Φυλλάδιο 8

Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $f(x,y) = 2xe^{y}+y+1=0$ ορίζει ακριβώς μια C^1 συνάρτηση $g: I \to R$ όπου το I είναι ανοιχτό διάστημα που περιέχει το 0 ώστε $g(0)=-1$ και $f(x,g(x))=0$ για κάθε $x \in I$. Να υπολογιστεί η g'.

$$Df(x,y) = (2e^{y}, 2xe^{y}+1), \quad Df(0,-1) = \left(\frac{2}{e}, 1\right) \neq 0$$

$(0,-1) \to$ κρίσιμο σημείο (critical point)

$$0 = Df(x,g(x)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x,g(x)), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x,g(x))\right) \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x) \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} g' \Rightarrow g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x,g(x))}{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x,g(x))} =$$

$$= -\frac{2e^{g(x)}}{2x \cdot e^{g(x)}+1}$$

Άρα, $g'(0) = -\dfrac{2e^{g(0)}}{1} = -2e^{-1} = -\dfrac{2}{e}$

ΗΥ-111 (Φροντιστήριο)

Άσκηση 2 Φυλλάδιο 8

Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $f(x,y)=1+x\cdot y-\log(e^{xy}+e^{-xy})=0$ ορίζει ακριβώς μια C^1 συνάρτηση $g: I\to R$ όπου το I είναι ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το 1, ώστε $g(1)=-\frac{1}{2}\log(e-1)$ και $f(x,g(x))=0$ για κάθε $x\in I$. Να υπολογιστεί η $g'(1)$.

$$Df(x,y)=\left(y-\frac{y\cdot e^{xy}-y\cdot e^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}},\ x-\frac{x\cdot e^{xy}-x\cdot e^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}\right)$$

$$0=Df(x,g(x))\cdot\begin{pmatrix}1\\ g'(x)\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x,g(x)),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x,g(x))\right)\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}1\\ g'(x)\end{pmatrix}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot g'(x)\Rightarrow g'(x)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x,g(x))}{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x,g(x))}\Rightarrow$$

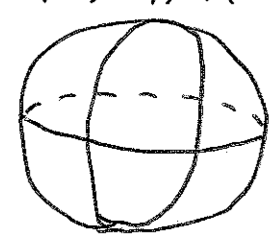
$$\Rightarrow g'(x)=-\frac{g(x)-\dfrac{g(x)\cdot e^{xg(x)}-g(x)\cdot e^{-xg(x)}}{e^{xg(x)}+e^{-x\cdot g(x)}}}{x-\dfrac{x\cdot e^{x\cdot g(x)}-xe^{-xg(x)}}{e^{xg(x)}+e^{-x\cdot g(x)}}}$$

$$g'(1)=\frac{g(1)-\dfrac{g(1)\cdot e^{g(1)}-g(1)\cdot e^{-g(1)}}{e^{g(1)}+e^{-g(1)}}}{1-\dfrac{e^{g(1)}-e^{-g(1)}}{e^{g(1)}+e^{-g(1)}}}$$

HY-111 (1) 27/4/2015

Πρόβλημα Έστω $A \in R^{n\times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας και $f: R^n \to R$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή $f(x) = \langle Ax, x\rangle$ ή $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, όπου $A = (a_{ij})$. $(a_{ij} = a_{ji})$

Ζητούνται η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f στην $(n-1)$-σφαίρα $S^{n-1} = \{x \in R^n, \|x\| = 1\} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n : x_1^2 + \dots + x^2 = 1\}$.



Υπολογισμός: Για κάθε $x \in R^n$, $v \in R^n$, $v \neq 0$ η κατευθυνόμενη παράγωγος $f(x;v)$ είναι η $F'(0)$ όπου $F(t) = f(x + t\cdot v) = \langle A(x + t\cdot v), x + t\cdot v\rangle$

$$= \langle Ax + t\cdot A\cdot v, x + t\cdot v\rangle = \langle Ax, x\rangle + t\langle Ax, v\rangle + t\,\overbrace{\langle Av, x\rangle}^{\langle Ax, v\rangle} + t^2\langle Av, v\rangle$$

$$= t^2\langle Av, v\rangle + 2t\langle Ax, v\rangle + \langle Ax, x\rangle$$

Άρα $Df(x)\cdot v = f'(x;v) = \langle 2Ax, v\rangle$

Οπότε έχουμε $\langle \nabla f(x), v\rangle = Df(x)\cdot v = \langle 2Ax, v\rangle \ \forall v \in R^n$

$\iff \langle \nabla f(x) - 2Ax, v\rangle \ \forall v \in R^n \iff \nabla f(x) = 2Ax$.

2ο τρόπος λύσης πίσω

<u>Αλλιώς</u> (με συντεταγμένες έχουμε $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{x_n} \end{pmatrix}$ και

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_k \cdot x_j\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot x_i \cdot x_k\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot x_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \cdot x_i = 2 \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot x_j = 2(a_{k1}\, a_{k2} \cdots a_{kn}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Έχουμε $S^{n-1} = h^{-1}(1)$ όπου $h(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ και έχει $\nabla h(x) = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 2x$. Απ' το Θεώρημα του Lagrange τα σημεία της S^{n-1}, που η $f|_{S^{n-1}}$ παίρνει ακρότατες τιμές, είναι λύσεις του συστήματος

$$\left.\begin{matrix} \nabla f(x) = \lambda \nabla h(x) \\ h(x) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} 2Ax = 2\lambda x \\ h(x) = 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} Ax = \lambda x \\ \|x\| = 1 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ Ο πολλαπλασιαστής Lagrange λ είναι ιδιοτιμή του A και το x είναι αντίστοιχο ιδιοδάνυσμα με μήκος 1.

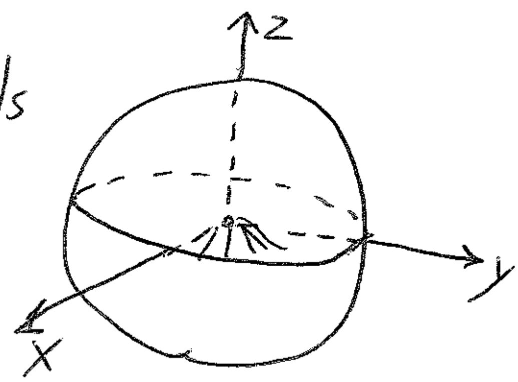
Η αντίστοιχη τιμή της f είναι $f(x) = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2 = \lambda$

<u>Συμπέρασμα</u> η μέγιστη τιμή της $f|_{S^{n-1}}$ είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του A και η ελάχιστη (μικρότερη) ιδιοτιμή του!

Hy-111 ② 27/4/2015

Παράδειγμα Να ευρεθεί η μέγιστη τιμής της $f(x,y,z) =$
$= \log x + \log y + 3\log z = \log(xyz^3)$ πάνω στο σφαιρικό χωρίο $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 5R^2,\ x>0, y>0, z>0\}$. όπου $R>0$

Αρκεί να βρούμε τη μέγιστη τιμή της $f|_S$ όπου $f(x,y,z) = xyz^3$



Υπολογισμός **1ος τρόπος** Απ' το θεώρημα του Lagrange τα σημεία στα ~~όμοια~~ οποία η $f|_S$ παίρνει μέγιστη τιμή, είναι λύσεις του συστήματος

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz^3 = \lambda \cdot 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz^3 = \lambda 2y$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3xyz^2 = \lambda 2z$$
$$x^2+y^2+z^2 = 5R^2,\ x>0, y>0, z>0$$

$$\begin{matrix} yz^3 = 3x^2yz \\ xz^3 = 3xy^2z \\ 3xyz = 2\lambda \end{matrix} \iff \begin{matrix} z^2 = 3x^2 \\ z^2 = 3y^2 \end{matrix} \iff x^2 = y^2 = \frac{1}{3}z^2$$

και αντικαθιστώνται στην τελευταία

$$x^2 + x^2 + 3x^2 = 5R^2 \underset{x>0}{\iff} x = R$$

Άρα μοναδική λύση $(x,y,z) = (R, R, R\sqrt{3})$

Έχουμε $f(R,R,R\sqrt{3}) = R^5\sqrt{27} = 3\sqrt{3}R^5$ που είναι η μέγιστη τιμή της $f|_S$.

Εφαρμογή Για κάθε $a,b,c>0$ ισχύει $abc^3 \le \sqrt{27\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{5}\right)^5}$

Για κάθε $x,y,z>0$ με $x^2+y^2+z^2 = 5R^2$ ισχύει

$$xyz^3 \le R^5\sqrt{27}$$

ΗΥ-111

Εφαρμόζουμε αυτόν τον υπολογισμό για

$x = \frac{\sqrt{5}a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $y = \frac{\sqrt{5}b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $z = \frac{\sqrt{5}c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ και $R=1$, αφού

$$\left(\frac{\sqrt{5}a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2 = 5\cdot 1^2$$

<u>2ος τρόπος</u> Η επιφάνεια S είναι το γράφημα της C^∞ συνάρτησης $z=\sqrt{5R^2-x^2-y^2}$, οπότε αρκεί να βρούμε τα σημεία ακροτάτων της $g: A \to \mathbb{R}$ με $g(x,y) = xy(5R^2-x^2-y^2)^{3/2}$ όπου $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<5R^2, x>0, y>0\}$ και κάνουμε τα γνωστά.

<u>Πρόβλημα</u> Θέλουμε τα σημεία ακροτάτων και τα σάγματα της $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(x,y) = 2y^2 - x(x-1)^2$

Κρίσιμα σημεία οι λύσεις: $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-(x-1)^2-2x(x-1)=0 \\ 4y=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-x^2+2x-1-2x^2+2x=0 \\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x^2+4x-1=0 \\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}=0 \\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1 \text{ ή } x=1/3 \\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(1,0)$ ή $(x,y)=(\frac{1}{3},0)$

HY-111 ③ 27/4/2015

Ο Εσσιανός πίνακας της f στο (x,y) είναι $Hf(x,y)=\begin{pmatrix}-6x+4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

<u>1ος</u> για $(x,y)=(1,0)$ έχουμε $Hf(1,0)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ και $\det Hf(1,0)=$
$=-8<0$. Η f έχει στο $(1,0)$ σάγμα.

<u>2ος</u> για $(x,y)=(\frac{1}{3},0)$ έχουμε $Hf(\frac{1}{3},0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ και $\det Hf(\frac{1}{3},0)=$
$=8>0$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{3},0)=2>0$.

Άρα η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $(\frac{1}{3},0)$

<u>2ος τρόπος</u>. Έστω $f:R^2\to R$ με $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)=(0,0)\\ 0, & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$

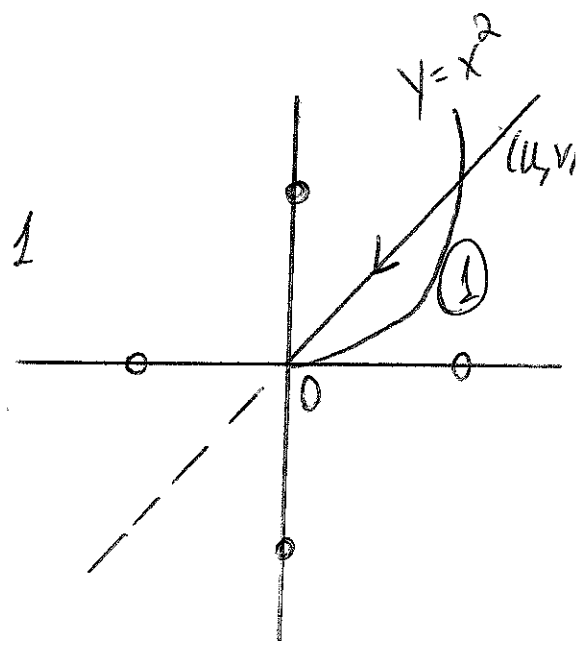
Είναι η f συνεχής στο $(0,0)$;

Αν $(u,v)\neq(0,0)$ τότε $f(t\cdot u,t\cdot v)=\frac{2t^3\cdot u^2\cdot v}{t^4\cdot u^4+t^2\cdot v^2}=\frac{2tuv}{t^2\cdot u^4+v^2}$,
για $t\neq 0$ οπότε,

$$\lim_{t\to 0} f(tu,tv)=0=f(0,0).$$

Για $y=x^2\neq 0$ έχουμε $f(x,x^2)=\frac{2x^4}{x^4+x^4}=1$

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$

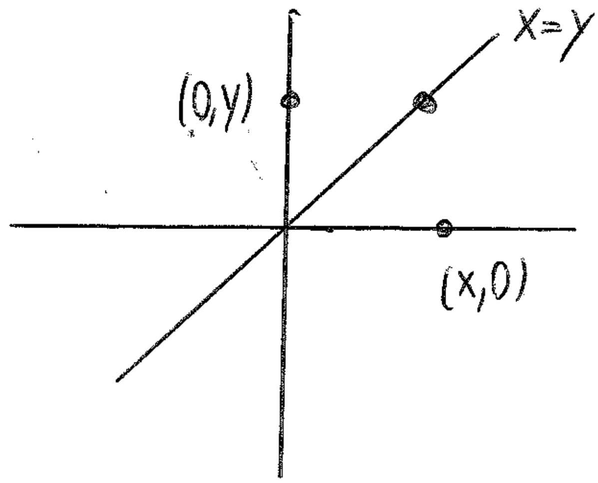


ΗΥ-111

⑧ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} (x-y)^2 \sin\frac{1}{x-y}, & x \neq y \\ 0, & \text{για } x=y \end{cases}$

Έχουμε $f(x,0) = x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}$, για $x \neq 0$, $f(0,0)=0$

$f(0,y) = -y^2 \sin\frac{1}{y}$



Άρα $f(x,0) = \varphi(x)$, $f(0,y) = -\varphi(y)$,

όπου $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση

$\varphi(t) = \begin{cases} t^2 \sin\frac{1}{t}, & t \neq 0 \\ 0, & t=0 \end{cases}$ και

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \varphi'(0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -\varphi'(0)$

Όμως $\varphi'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \cdot \sin\frac{1}{h}}{h} = 0$ Άρα $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0}$

Επιπλέον για $x \neq 0$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \varphi'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + \cancel{x^2}(\cos\frac{1}{x})\cdot(-\frac{1}{\cancel{x^2}}) =$

$= 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$. Προφανώς το $\lim_{x\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x})$

δεν υπάρχει!

Άρα η f δεν είναι <u>συνεχώς</u> διαφορίσιμη

HY-111 ④ 27/4/2015

Έλεγχος διαφορισιμότητας στο (0,0)

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)-0-(0,0)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(h_1-h_2)^2\sin\frac{1}{h_1-h_2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

διότι

$$\left| \frac{(h_1-h_2)^2\sin\frac{1}{h_1-h_2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right| \leq \frac{|h_1-h_2|^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \frac{(|h_1|+|h_2|)^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq$$

$$\leq \frac{\left(2\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 4(h_1^2+h_2^2)^{3/2} \to 0$$

όταν $(h_1,h_2)\to(0,0)$

$$|h_1-h_2| \leq |h_1|+|h_2|$$

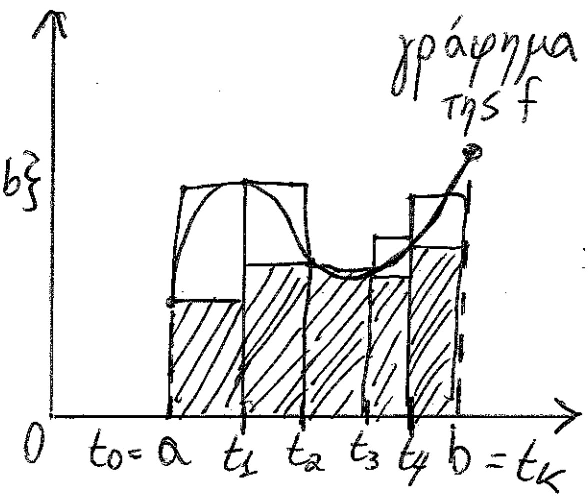
Συμπέρασμα η f είναι διαφορίσιμη στο (0,0)

ΗΥ-111

① 28/4/2015

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη

Για κάθε διαμέριση $P=\{a=t_0<t_1<\ldots<t_k=b\}$ του $[a,b]$ ορίζεται το κάτω και το άνω άθροισμα ως εξής:



$$L(f,P)=\sum_{j=1}^{k} m_j(t_j-t_{j-1})$$

$$U(f,P)=\sum_{j=1}^{k} M_j(t_j-t_{j-1})$$, όπου $m_j=\inf\{f(x): t_{j-1}\leqq x\leqq t_j\}$

$M_j=\sup\{f(x): t_{j-1}\leqq x\leqq t_j\}$

inf = μέγιστο κάτω φράγμα = infimum
sup = ελάχιστο άνω φράγμα = supremum

Θέτουμε $\underline{\int_a^b} f=\sup\{L(f,P): P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}=$

= κάτω ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$

$\overline{\int_a^b} f=\inf\{U(f,P): P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}=$

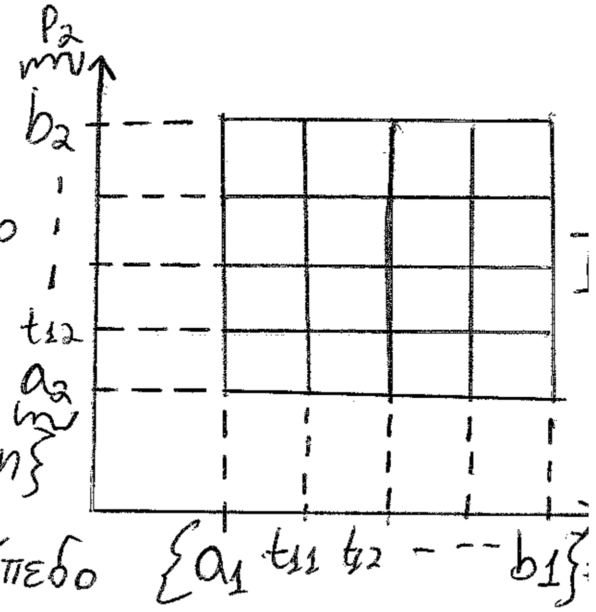
= άνω ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$

<u>Ορισμός</u> Η f λέγεται ολοκληρώσιμη (κατά Darboux-Riemann), όταν $\overline{\int_a^b} f=\underline{\int_a^b} f$. Η τιμή αυτή λέγεται ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a,b]$ και συμβολίζεται με $\int_a^b f$ ή $\int_a^b f(x)\,dx$.

ΗΥ-111

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

n - ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ



Αν $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, το σύνολο

$I = [a_1 b_1] \times [a_2 b_2] \times \ldots \times [a_n b_n] =$

$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : a_i \leq x_i \leq b_i, 1 \leq i \leq n\}$

λέγεται ορθογώνιο n- παραλληλεπίπεδο

Ο μη-αρνητικός αριθμός $\mu(I) = (b_n - a_n) \ldots (b_2 - a_2) \cdot (b_1 - a_1)$ λέγεται n- διάστατος όγκος του I.

Μια διαμέριση του I είναι ένα καρτεσιανό γινόμενο $P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$ όπου η P_i είναι διαμέριση του διαστήματο (=ακμή του I) $[a_i, b_i]$. Τα σημεία του P είναι οι κορυφές ορθογωνίων παραλληλεπίπεδο που περιέχονται στο I, καλύπτουν το I και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία. Ένα τέτοιο είναι της μορφής

$$[t_{1, j_1 - 1}, t_{1, j_1}] \times \ldots \times [t_{n, j_n - 1}, t_{n, j_n}]$$

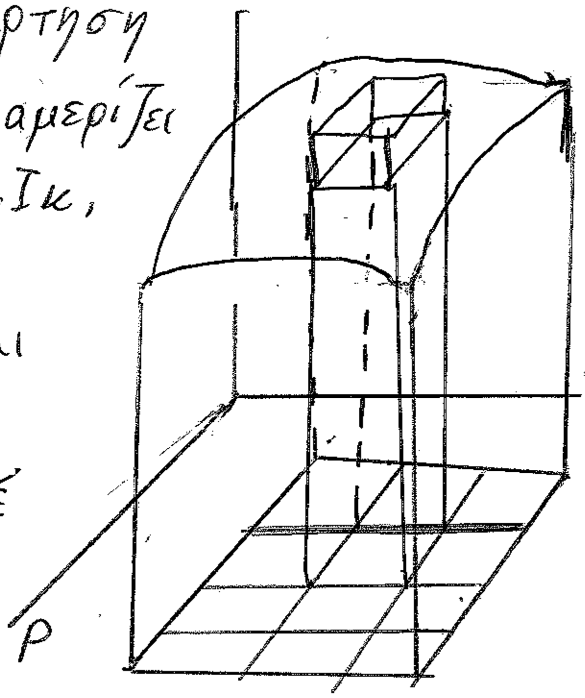
όπου $t_{1, j_1 - 1}, t_{1, j_1} \in P_1, \ldots,$

$t_{n, j_{n-1}}, t_{n, j_n} \in P_n$

ΗΥ-111 ② 28/4/2015

Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Για κάθε διαμέριση P του I, που διαμερίζει το I σε υπο-παραλληλεπίπεδα $I_1, \dots, I_k$, θέτουμε $m_i = \inf\{f(x) : x \in I_i\}$

$M_i = \sup\{f(x) : x \in I_i\}$ και



$$-M\mu(I) \leq \underset{\text{κάτω άθροισμα της } f \text{ ως προς } P}{L(f,P)} = \sum_{i=1}^{k} m_i \, \mu(I_i) \leq$$

$$\leq \underset{\text{άνω άθροισμα της } f \text{ ως προς } P}{U(f,P)} = \sum_{i=1}^{k} M_i \, \mu(I_i) \leq M\mu(I)$$

Θέτουμε $\underline{\int_I} f = \sup\{L(f,P) : P \text{ διαμέριση του } I\} =$

= το κάτω ολοκλήρωμα της f

και $\overline{\int_I} f = \inf\{U(f,P) : P \text{ διαμέριση του } I\} =$

= το άνω ολοκλήρωμα της f.

<u>Ορισμός:</u> Η f λέγεται <u>ολοκληρώσιμη</u> κατά Riemann στο I αν $\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$ και ο αριθμός

$\int_I f = \int_I f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1, \dots, dx_n = \underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$ λέγεται

<u>ολοκλήρωμα Riemann της f στο I.</u>

ΗΥ-111

<u>Λήμμα</u> Αν P, Q είναι δύο διαμερίσεις του I και $P < Q$, τότε $L(f,P) \leq L(f,Q)$ και $U(f,P) \geq U(f,Q)$

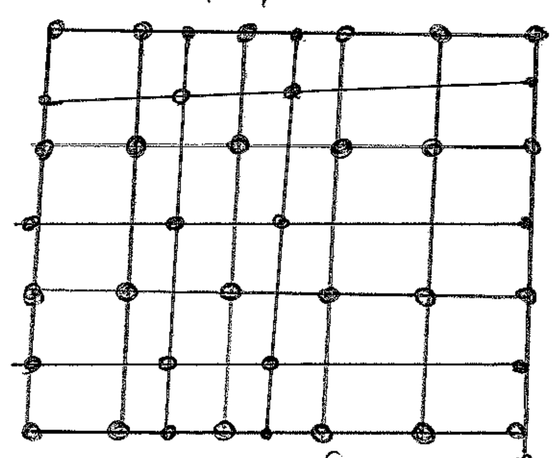
<u>Απόδειξη</u> Κάθε παραλληλοεπίπεδο J της P διαμερίζεται σε παραλληλοεπίπεδα $S_1, \ldots, S_k$ της Q, γιατι $P \subset Q$ οπότε $\mu(J) = \mu(S_1) + \ldots + \mu(S_k)$. Επιπλέον $m(J) = \inf\{f(x) : x \in J\}$ $\geq m(S_i) = \inf\{f(x) : x \in S_i\}$, αφού $S_i \subset J$

Άρα $m(J)\mu(J) \geq m(S_1)\mu(S_1) + \ldots + m(S_k)\mu(S_k)$

$\Rightarrow$ (αθροίζοντας για όλα τα J) παίρνουμε $L(f,P) \geq L(f,Q)$

<u>Πόρισμα</u> Αν P, Q είναι δυο οποιεσδήποτε διαμερίσεις του I, τότε $L(f,P) \leq U(f,Q)$

<u>Απόδειξη</u>: Η $T = P \cup Q$ είναι διαμέριση του I και $P \subset T$, $Q \subset T$. Άρα
$L(f,P) \leq L(f,T) \leq U(f,T) \leq U(f,Q)$
απ'το Λήμμα



διαμεριση P
διαμέριση Q

<u>Κριτήριο ολοκληροσίματος</u>: Η φραγμένη $f: I \to R$ είναι ολοκληρώσιμη τότε και μόνον τότε όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια διαμέριση P του I ώστε
$U(f,P) - L(f,P) \leq \varepsilon$.

ΗΥ-111 ③ 28/4/2015

Από είζη ($\Leftarrow$) Είναι προφανές γιατί $0 \leq \overline{\int_I} f - \underline{\int_I} f \leq$
$\leq U(f,P) - L(f,P)$ για κάθε διαμέριση P. Άρα $\forall \varepsilon > 0$:
$0 \leq \overline{\int_I} f - \underline{\int_I} f \leq \varepsilon \Rightarrow \overline{\int_I} f = \underline{\int_I} f$.

($\Rightarrow$). Αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε $\int_I f =$
$\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$, οπότε $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P του I
ώστε: $\int_I f - L(f,P) < \varepsilon/2$ και διαμέριση Q του I
ώστε $U(f,Q) - \int_I f < \frac{\varepsilon}{2}$, Άρα: $U(f,T) - L(f,T) \leq$
$\leq U(f,Q) - L(f,P) < \varepsilon$, όπου $T = P \cup Q$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος:

1) Αν οι φραγμένες $f, g: I \to R$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε η $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ είναι επίσης: $\int_I \lambda f + \mu g = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$ για κάθε $\lambda, \mu \in R$

2) Αν $f: I \to R$ ολοκληρώσιμη και $f \geq 0$, τότε $\int_I f \geq 0$.

3) Αν f ολοκληρώσιμη, τότε η $|f|$ είναι επίσης και: $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$

4) Αν $I = I_1 \cup I_2$ με τα I_1, I_2 να είναι παραλληλοεπίπεδα χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία, τότε

$$\int_I f = \int_{I_1} f = \int_{I_2} f$$

HY-111

<u>Θεώρημα (Foubini):</u>

Έστω $I \subset R^n$, $I \subset R^m$ δύο ορθογώνια παραλληλοεπίπεδα. (Οπότε το $I \times I \subset R^n \times R^m = R^{n+m}$ είναι ορθογώνιο παραλληλοεπίπεδο). Έστω ότι $f: I \times .. \to R$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε η $\varphi: I \to R$, $\psi: T \to R$ με: $\varphi(x) = \int_J f(x,y)\,dy$, $\psi(y) = \int_I f(x,y)\,dx$ είναι επίσης ολοκληρώσιμες, και:

$$\int_I \varphi = \int_{I \times J} f = \int_J \psi \text{, δηλαδή: } \int_I \left(\int_J f(x,y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_{I \times J} f(x,y)\,dx\,dy = \int_J \left(\int_I f(x,y)\,dx \right) dy$$

ΗΥ-111 ① 4/5/2015

Η ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Θεώρημα: Έστω $I \subset R^n$ ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και $f: I \to R$ μια φραγμένη συνάρτηση. Αν η f είναι συνεχής παντού στο I, τότε υπάρχει το ολοκλήρωμα Riemann $\int_I f$.

Λήμμα: Για την απόδειξη χρειάζεται το παρακάτω.

Αν το $K \subset R^n$ είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο και η $f: K \to R$ είναι συνεχής, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ για κάθε $x, y \in K$ με $\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Απόδειξη: Με απαγωγή στο άτοπο. Αν δεν ισχύει αυτό τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x_\delta, y_\delta \in K$: $\|x_\delta - y_\delta\| < \delta$ αλλά $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$

Για $\delta = \frac{1}{k}$, $k \in N$, παίρνουμε δύο ακολουθίες $(x_k)_{k\in N}$, $(y_k)_{k\in N}$ στο K ώστε $\|x_k - y_k\| < \frac{1}{k}$ και $|f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon$ για κάθε $k \in N$. Επειδή το K είναι κλειστό και φραγμένο από το θεώρημα Bolzano-Weiestrass

HY-111

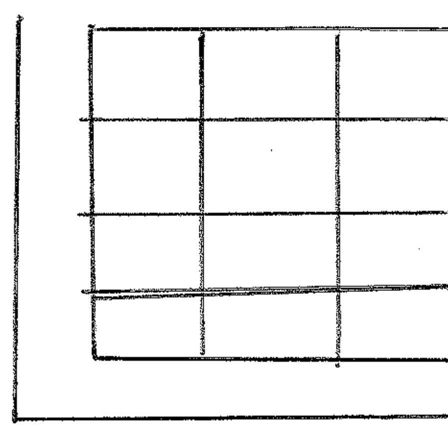
Υπάρχουν $k_m \to +\infty$, $m \in N$ και σημεία $x, y \in K$ ώστε $\lim_{m\to+\infty} x_{k_m} = x$ και $\lim_{m\to+\infty} y_{k_m} = y$. Αλλά τότε $\|x-y\| = \lim_{m\to\infty} \|x_{k_m} - y_{k_m}\| = 0$. Άρα $x=y$ και

$$0 = |f(x) - f(x)| = \lim_{m\to+\infty} |f(x_{k_m}) - f(y_{k_m})|,$$ επειδή η f είναι συνεχής και ταυτόχρονα $|f(x_{k_m}) - f(y_{k_m})| \geqq \varepsilon$ για κάθε $m \in N$

Αυτά τα δύο αντιφάσκουν.

<u>Κριτήριο Riemann</u>: Η φραγμένη $f: I \to R$ είναι ολοκληρώσιμη τότε και μόνον τότε όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση του I: $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

<u>Απόδειξη του Θεωρήματος</u>



I

Εφαρμόζουμε το κριτήριο του Riemann. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η f υποτίθεται συνεχής και το I είναι κλειστό και φραγμένο, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I, απ' το Λήμμα, δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $x, y \in I$ και $\|x-y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(I)}$. Επιλέγουμε οποιαδήποτε διαμέριση P του I που διαμερίζει το I σε υπορθογώνια παραλληλεπίπεδα $I_1, I_2, \ldots, I_m$ ώστε το μήκος της διαγωνίου καθενός I_i να είναι $< \delta$.

Συνεπώς για κάθε $x, y \in I_j$ ισχύει $\|x-y\| < \delta$ και κατά συνέπεια $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(I)}$, οπότε

$f(x) < f(y) + \frac{\varepsilon}{2\mu(I)}$ για κάθε $x, y \in I_j$

Άρα $M_j = \sup\{f(x) : x \in I_j\} \leq f(y) + \frac{\varepsilon}{2\mu(I)}$ για κάθε $y \in I_j$ και συνεπώς $M_j - \frac{\varepsilon}{2\mu(I)} \leq \inf\{f(y) : y \in I_j\} = m_j$.

Με άλλα λόγια $0 \leq M_j - m_j \leq \frac{\varepsilon}{2\mu(I)}$

Έχουμε τώρα $U(f,P) - L(f,P) = \sum_{j=1}^{m} (M_j - m_j)\mu(I_j) \leq$
$\sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2\mu(I)} \mu(I_j) = \frac{\varepsilon}{2\mu(I)} \sum_{j=1}^{m} \mu(I_j) = \frac{\varepsilon}{2\mu(I)} \mu(I) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

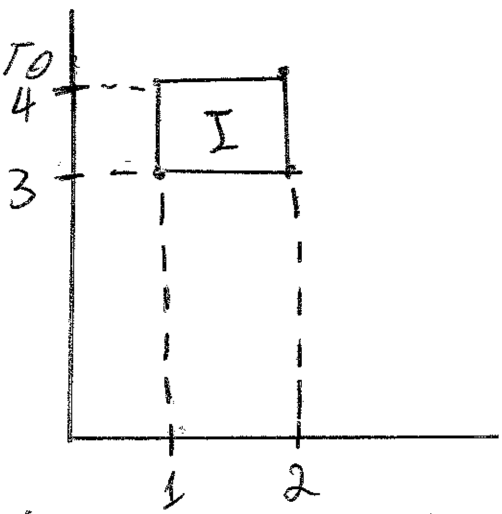
<u>Πόρισμα</u>: Αν $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, όπου $a_j < b_j$ και $f : I \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση τότε

$$\int_I f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_2 = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1)\, dx_2) \dots dx_n$$

(ή με οποιαδήποτε άλλη σειρά)

ΗΥ-111

Παράδειγμα: Θέλουμε να υπολογίσουμε το



$$\int_{(1,2)\times(3,4)} \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy$$

Έχουμε (απ'το θεώρημα της διαδοχικής ολοκλήρωσης του Fubini)

$$\int_{(1,2)\times(3,4)} \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy = \int_3^4 \left(\int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}\,dx \right) dy = \int_3^4 \left(-\frac{1}{y+2} + \frac{1}{y+1} \right) dy$$

$$= \int_3^4 \frac{1}{y+1}\,dy - \int_3^4 \frac{1}{y+2}\,dy = \log\frac{5}{4} - \log\frac{6}{5} = \log\frac{25}{24}$$

ή εναλλακτικά

$$\int_{(1,2)\times(3,4)} \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2}\,dy \right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left[-\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+3} \right] dx = \int_1^2 \frac{1}{x+3}\,dx - \int_1^2 \frac{1}{x+4}\,dx =$$

$$= \log\frac{5}{4} - \log\frac{6}{5} = \log\frac{25}{24}$$

ΗΥ-111 ③ 4/5/2015

<u>Παράδειγμα</u>: Αν $I=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$, $a_j<b_j$, $j=1,2,\ldots,n$

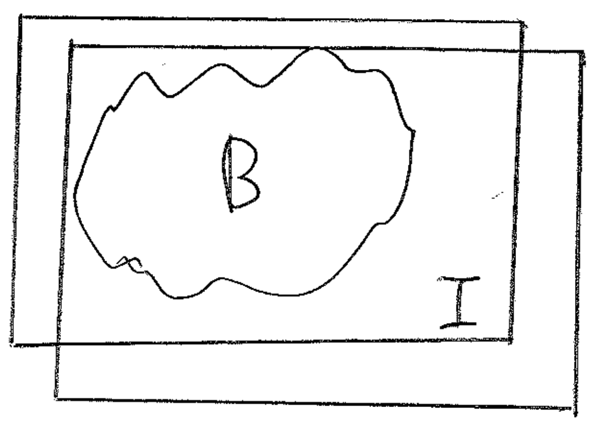
τότε $\int_I 1 = \int_{a_n}^{b_n}\cdots\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} 1\, dx_1\right)dx_2\right)\ldots dx_n$

$= \int_{a_n}^{b_n}\cdots\left(\int_{a_2}^{b_2}(b_1-a_1)dx_2\right)\ldots dx_n = \int_{a_n}^{b_n}\cdots\left(\int_{a_3}^{b_3}(b_2-a_2)(b_1-a_1)dx_3\right)\ldots dx_n$

$= \ldots = (b_n-a_n)\ldots(b_2-a_2)(b_1-a_1) = \mu(I)$.

<u>ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΕ ΦΡΑΓΜΕΝΑ ΥΠΟΣΥΝΟΛΑ ΤΟΥ R^n, $n\geq 1$</u>

Έστω $B\subset R^n$ ένα φραγμένο σύνολο. Τότε υπάρχει ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ώστε $B\subset I$. Έστω $f: B\to R$ μια φραγμένη συνάρτηση.



Θεωρούμε της $\tilde{f}: I\to R$ με

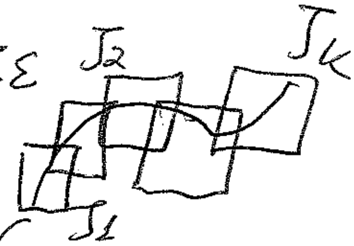
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x\in B \\ 0, & x\in I,\ x\notin B \end{cases}$$

<u>Ορισμός:</u> Η f λέγεται ολοκληρώσιμη (κατά Riemann) στο B αν η $\tilde{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο I και θέτουμε

$\int_B f = \int_B f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n \underset{\text{άρα}}{=} \int_I \tilde{f}$. Ο ορισμός δεν εξαρτάται απ' την επιλογή του I (δηλ. είναι "καλός ορισμός").

HY-111

<u>Ορισμός</u>: Ένα σύνολο $C \subset R^n$ φραγμένο λέμε ότι έχει περιεχόμενο 0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν ορθογώνια παραλληλεπίπεδα $J_1, \dots, J_k$ ώστε $C \subset J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_k$ με $\sum_{j=1}^{n} \mu(I_j) < \varepsilon$

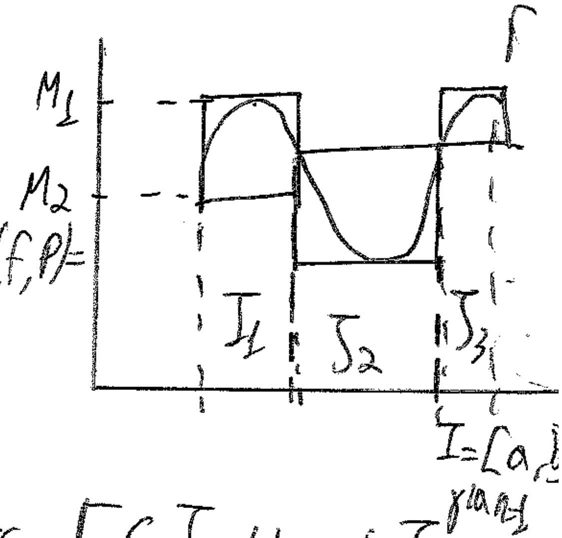


<u>Παράδειγμα</u>: Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του R^n έχει περιεχόμενο 0. Γενικότερα αν τα $C_1, \dots, C_m$ είναι φραγμένα και έχω περιεχόμενο 0, τότε το $C_1 \cup \dots \cup C_m$ έχει περιεχόμενο C.

<u>Θεώρημα</u> Έστω $I \subset R^n$ ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και $f: I \to R$ μια φραγμένη συνάρτηση. Αν το σύνολο $D = \{x \in I : \text{η } f \text{ <u>δεν</u> είναι συνεχής στο } R\}$ έχει περιεχόμενο 0, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη κατα Riemann

<u>Πρόταση</u>: Έστω $I \subset R^n$ ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και $f: I \to R$ μια φραγμένη συνάρτηση. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο I. τότε το γράφημα $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in I\} \subset R^{n+1}$ έχει περιεχόμενο 0 στον R^{n+1}.

HY-111 ④ 4/5/2015



<u>Απόδειξη</u> Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει διαμέριση $P=\{J_1,\ldots,J_k\}$ του I ώστε $U(f,P)-L(f,P)=$
$=\sum_{j=1}^{k}(M_j-m_j)\mu(I_j)<\varepsilon$

Αν θέσουμε $I_j=J_j\times[m_j,M_j]$, τότε $\Gamma\subset I_1\cup\ldots\cup I_k$ και $\mu(I_j)=(M_j-m_j)\mu(J_j)$, $j=1,2,\ldots,k$, οπότε

$$\sum_{j=1}^{k}\mu(I_j)=U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

Αυτό δείχνει ότι το Γ έχει περιεχόμενο 0.

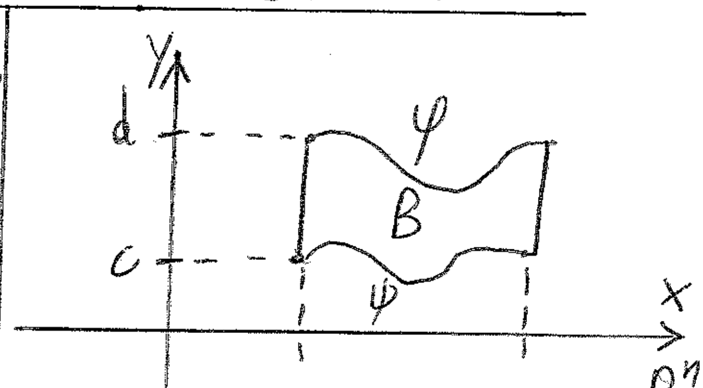
ΗΥ-111 ① 5/5/2015

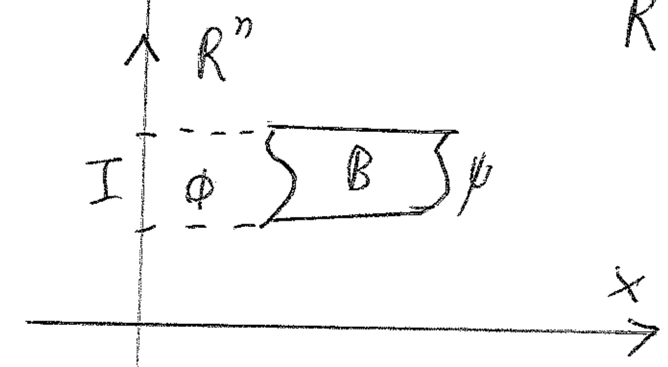
<u>Ορισμός:</u> Αν $B \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα φραγμένο σύνολο ώστε το ∂B να έχει περιεχόμενο μηδέν, τότε ο $\mu(B) = \int_B 1$ λέγεται η-διάστατος όγκος του B.

<u>Παρατήρηση:</u> ΔΕΝ ορίζεται όγκος η-διάστατος, για όλα τα φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Αυτό γιατί υπάρχουν φραγμένα υποσύνολα $B \subset \mathbb{R}^n$ που το ολοκλήρωμα $\int_B$, δεν υπάρχει.

ΔΙΑΔΟΧΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΑΚΡΑ

- Έστω $I \subset \mathbb{R}^n$ ένα ορθογώνιο παρ/δο (συνήθως I κλειστό διάστημα)
- Έστω $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις με $\varphi(x) \geq \psi(x)$ $\forall x \in I$.
- Αφού I κλειστό και φραγμένο, οι φ, ψ είναι φραγμένες, δηλαδή υπάρχουν $c, d \in \mathbb{R}$ /
  $c \leq \psi(x) \leq \varphi(x) \leq d$ $\forall x \in I$.





- Άρα το $B = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} : x \in I \text{ και } \psi(x) \leq y \leq \varphi(x)\}$, είναι φραγμένο, αφού $B \subset I \times [c,d]$

για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : B \to \mathbb{R}$, η επέκταση $\hat{f} : I \times [c,d] \to \mathbb{R}$, ως :

HY-111

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{όταν } (x,y)\in B \\ 0, & \text{όταν } (x,y)\in I\times[c,d],\ (x,y)\notin B \end{cases}$$

είναι ασυνεχής μόνο στα σημεία του γραφήματος της φ και ψ που είναι σύνολα περιεχομένου 0. Άρα $\tilde{f}$ ολοκληρώσιμη και:

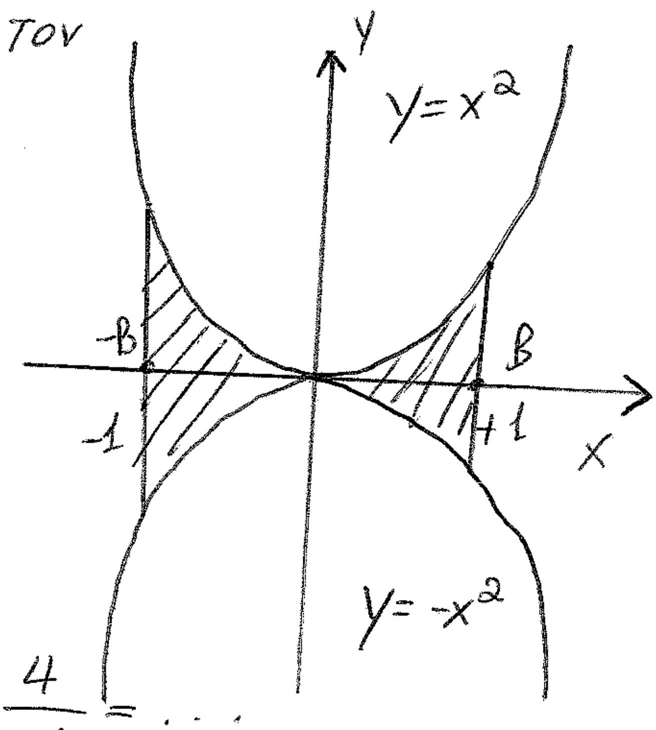
- $$\int_B f(x,y)\,dxdy = \int_{I\times[c,d]} \tilde{f}(x,y)\,dxdy = \int_I \left(\int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_I \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

- Από το Θεώρημα του Foubini (με αυτή τη σειρά!)

<u>1ο Παράδειγμα</u>: Έστω $B=\{(x,y)\in R: -1\leq x\leq 1, -x^2\leq y\leq x^2\}$, και θέλουμε να υπολογίσουμε το: $\int_B (x^2+y^2)\,dxdy$

- Εδώ έχουμε $I=[-1,1]\subset R$, και οι $\varphi,\psi: I\to R$ είναι οι $\varphi(x)=x^2$, $\psi(x)=-x^2$. Εφαρμόζοντας τον τύπο διαδοχικής με μεταβλητά άκρα:



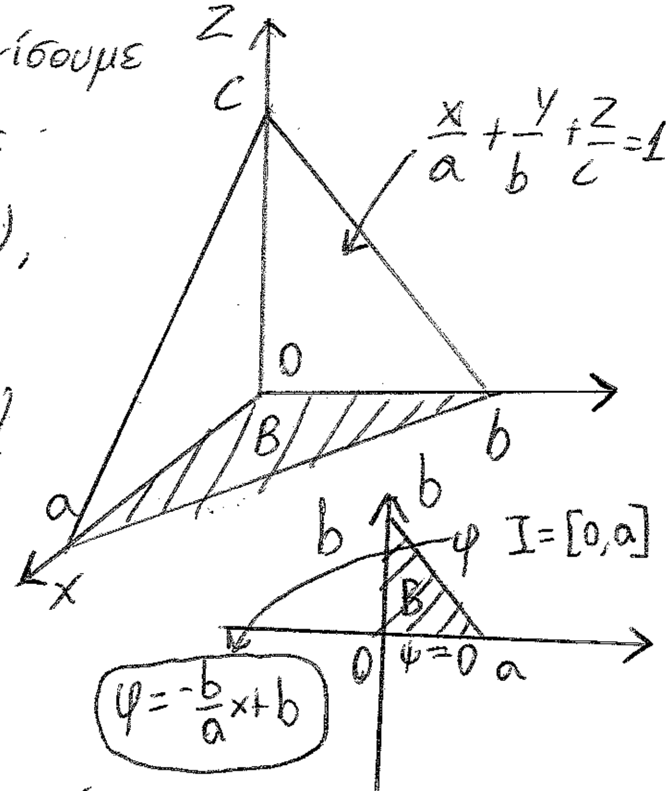
$$\int (x^2+y^2)\,dxdy =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-x^2}^{x^2} (x^2+y^2)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(x^2-2x^2+\frac{x^6}{3}+\frac{x^6}{3}\right)dx = \frac{4}{5}+\frac{4}{21} = \ldots$$

ΗΥ-111 ② 5/5/2015

2ο Παράδειγμα: Θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο του τετραέδρου στο R^3 με κορυφές τα σημεία: $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$. Αυτό είναι το σύνολο: $(a>0,\ b>0,\ c>0)$



$$\Delta=\left\{(x,y,z)\in R^3 : \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\le 1,\ x>0,\ y>0,\ z>0\right\}$$

• Η έδρα με κορυφές τα 3 τελευταία σημεία, περιέχεται στο επίπεδο με εξίσωση $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Leftrightarrow z=c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$ και συνεπώς είναι το γράφημα της συνεχούς συνάρτησης $f: B\to R$ με: $f(x,y)=c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$, όπου: B η βάση του τετραέδρου, δηλαδή η έδρα με κορυφές: $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$, ή με άλλα λόγια:

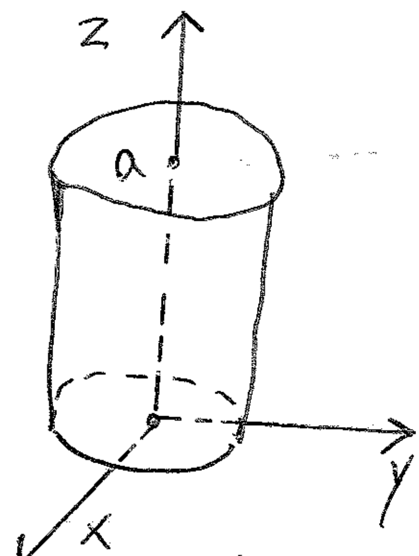
$$B=\left\{(x,y)\in R^3 : 0\le x\le a,\ 0\le y\le -\frac{b}{a}x+b\right\}.$$

Από τον τύπο διαδοχικής ολοκλήρωσης με μεταβλητά άκρα έχουμε:

$$\mu(B)=\int_B f=\int_B c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dx\,dy=$$

$$=\int_0^a\left(\int_0^{b(1-x/a)} c\left(1-x/a-y/b\right)dy\right)dx=\ldots=a\cdot bc/6$$

ΗΥ-111



Παράδειγμα 3 : Τον κύλινδρο με ακτίνα βάσης $R>0$ δηλαδή εξίσωσης $x^2+y^2=R^2$, τον "κόβουμε στο σημείο $(0,0,a)$ με το επίπεδο: $y+z=a$, και θέλουμε τον όγκο του κυλίνδρου με οροφή το επίπεδο και βάση το οριζόντιο επίπεδο $z=0$. Ο όγκος αυτός είναι το ολοκλήρωμα $\int_B f$, όπου $B=D(0,R)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq R^2\}$ και η $f:B\to\mathbb{R}$, έχει τύπο $f(x,y)=a-y$, $(z=a-y)$.

Έχουμε όμως: $B=D(0,R)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -R\leq x\leq R, -\sqrt{R^2-x^2}\leq y\leq\sqrt{R^2-x^2}\}$

Οπότε από την διαδοχική ολοκλήρωση με μεταβλητά άκρα:

$$\int_B f=\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}(a-y)\,dy\right)dx=\int_{-R}^{R}\left(2a\sqrt{R^2-x^2}-\left(\frac{R^2-x^2}{2}-\frac{R^2-x^2}{2}\right)\right)dx$$

$$=2a\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx=2a\cdot R\int_{-R}^{R}\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}\,dx=\ldots\begin{pmatrix}\text{θέτοντας}\\ x/R=\sin t\end{pmatrix}=$$

$$=\pi\cdot a\cdot R^2$$

ΗΥ-111 ③ 5/5/2015

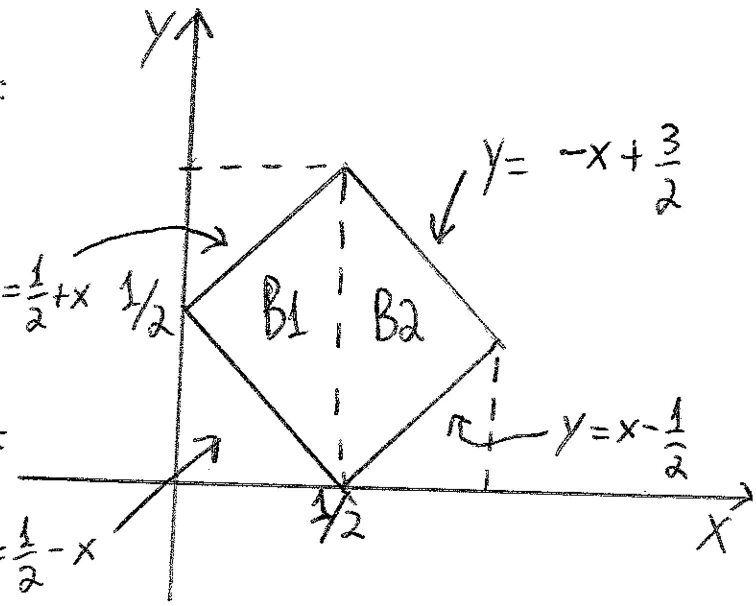
4ο Παράδειγμα: Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\int_B x\,dx\,dy$, όπου B είναι το τετράγωνο στο R^2 με κορυφές τα σημεία $(\frac{1}{2},0), (1,\frac{1}{2}), (\frac{1}{2},1), (0,\frac{1}{2})$

• Το B είναι η ένωση των δύο τριγώνων $B1, B2$ του σχήματος, οπότε:

$$\int_B x\,dx\,dy = \int_{B1} x\,dx\,dy + \int_{B2} x\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{1/2}\left(\int_{1/2-x}^{1/2+x} x\,dy\right)dx + \int_{1/2}^{1}\left(\int_{x-1/2}^{-x+3/2} x\,dy\right)dx =$$

$$= \ldots$$



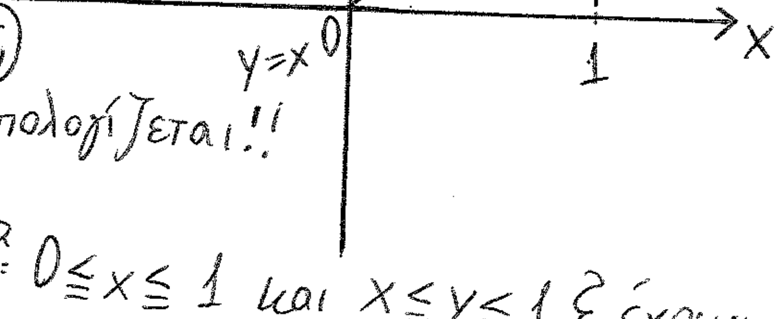
5ο Παράδειγμα: Έστω $B = \{(x,y) \in R^2 : 0 \leq x \leq y \text{ και } 0 \leq y \leq 1\}$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε: $\int_B e^{-(x-1)^2}dx\,dy$

Έχουμε $\int_B e^{-(x-1)^2}dx\,dy =$

$$= \int_0^1\left(\int_0^y e^{-(x-1)^2}dx\right)dy = \ldots ;$$

δεν υπολογίζεται!!



Επειδή όμως $B = \{(x,y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ και } x \leq y \leq 1\}$ έχουμε και:

$$\int_B e^{-(x-1)^2}dx\,dy = \int_0^1 \int_x^1 \left(e^{-(x-1)^2}dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \ldots (1-x)\,e^{-(x-1)^2}dx = \ldots = \frac{1}{2}(1 - 1/e)$$

ΗΥ-111 (Φροντιστήριο) ① 7/5/2015

Ασκ. 1 Φυλλ. 9

Να βρεθεί το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με το μέγιστο δυνατό όγκο, του οποίου οι ακμές είναι παράλληλη προς τους άξονες και είναι εγγεγραμένο στο ελλειψοειδές του R^3 με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, όπου $a, b, c > 0$

Θ Εάν $(x,y,z)=(a,b,c)$ είναι μια λύση στο πρόβλημα μεγιστοποίησης της $f(x,y,z)$ η οποία περιορίζεται από μια $g(x,y,z)=k$, τότε $\exists$ ένας αριθμός λ του $\nabla f(x,y,z)=\lambda \nabla g(x,y,z)$ → πολλαπλασιαστής Lagrange

$$V = 8xyz = f(x,y,z)$$

$$\begin{cases} 8yz-\lambda\frac{2x}{a^2}=0 \\ 8xz-\lambda\frac{2y}{b^2}=0 \\ 8xy-\lambda\frac{2z}{c^2}=0 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\lambda x}{a^2}&=4yz \\ \frac{\lambda y}{b^2}&=4xz \\ \frac{\lambda z}{c^2}&=4xy \end{aligned}\right\} \longrightarrow \lambda = 12\underbrace{xyz}_{x,y,z>0}>0$$

$$x = 4a^2\frac{yz}{\lambda} = \frac{4a^2}{\lambda}\cdot\frac{4c^2}{\lambda}\cdot xy^2 \Leftrightarrow x\left(1-\frac{16a^2c^2}{\lambda^2}y^2\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$y = 4b^2\frac{xz}{\lambda} = \frac{4b^2}{\lambda}\cdot\frac{4c^2}{\lambda}\cdot x^2y \Leftrightarrow y\left(1-\frac{16b^2c^2}{\lambda^2}x^2\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$z = 4c^2\frac{xy}{\lambda} \quad (1)$$

HY-111 (Φροντιστήριο)

$(x \neq 0)$

$\Leftrightarrow \quad y = \dfrac{\lambda}{4ac}$ $\qquad$ $(1) \Leftrightarrow \dfrac{4c^2}{\lambda} \cdot \dfrac{\lambda}{4bc} \cdot \dfrac{\lambda}{4ac} = \dfrac{\lambda}{4ab}$

$(y \neq 0)$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{\lambda}{4bc}$

Αντικαθιστούν σαν εξίσωση του ελλειψοειδούς

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\lambda^2}{16b^2c^2} + \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\lambda^2}{16a^2 \cdot c^2} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\lambda^2}{16a^2 \cdot b^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 \cdot \frac{3}{16a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{4}{\sqrt{3}} abc}$$

$$x = \frac{4}{\sqrt{3}} a \cdot b \cdot c \cdot \frac{1}{4bc} = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

Ασκηση 1 Φυλλάδιο 10

$$\int_{[0,\pi]\times[0,\pi]} \sin^2 x \cdot \sin^2 y \, dx\, dy = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin^2 x \cdot \sin^2 y \, dx \right) dy =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin^2 y \, dy \cdot \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \left(\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx \right)^2$$

ΗΥ-111 (Φροντιστήριο) ② 7/5/2015

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\frac{1-\cos(2x)}{2} = \sin^2 x$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos y$$

$$= \left(\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2}\, dx\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(2x)\,dx\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

Άσκηση 2 Φυλλάδιο 10

$$\int_I \left(\frac{z}{1-|x|\cdot y}\right)^2 dx\,dy\,dz = \int_1^2 \left(\int_{-1}^0 \left(\int_0^3 \frac{z^2}{(1-|x|\cdot y)^2} dz\right) dy\right) dx =$$

$$= 9\int_1^2 \left(\int_{-1}^0 \frac{1}{[1-|x|y]^2} dy\right) dx = 9\int_{-1}^2 \left(\frac{-1}{|x|}\int_{-1}^0 \frac{1}{[1-|x|\cdot y]^2}\, d(1-|x|y)\right) dx =$$

$$= 9\int_{-1}^2 \frac{-1}{|x|}\left[-\frac{1}{1-|x|y}\right]_{y=1}^{y=0} dx =$$

HY-111 (Φροντιστήριο)

$$= 9\int_{-1}^{2}\frac{1}{1+|x|}dx = 9\left[\int_{-1}^{0}\frac{1}{1-x}dx + \int_{0}^{2}\frac{1}{1+x}dx\right] =$$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$1-x=t \quad dx=-dt$

$= 9 \quad =$

$x=0 \to t=1$

$x=-1 \to t=2$

$$= 9\left[\int_{1}^{2}\frac{1}{t}(dt) + \int_{1}^{3}\frac{1}{t}dt \quad = 9\log 6\right.$$

$1+x=t$

$dx=dt$

$x=0 \to t=1$

$x=2 \to t=3$

$9\ln 6$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 10

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

(α) $\int_I (ax+by+c)\,dxdy$, (β) $\int_I x^m y^n\,dxdy$, (γ) $\int_I y e^{xy}\,dxdy$, στο $I=[0,1]\times[0,1]$

(δ) $\int_I y e^{-xy}\,dxdydz$, (ε) $\int_I \sin(x+y+z)\,dxdydz$, στο $I=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$

(στ) $\int_I \sin^2 x \cdot \sin^2 y\,dxdy$, στο $I=[0,\pi]\times[0,\pi]$.

2. Να αποδειχθεί ότι $\int_I \left(\frac{z}{1-|x|\cdot y}\right)^2 dxdydz = 9\log 6$, $I=[-1,2]\times[-1,0]\times[0,3]$

3. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από τα επίπεδα που ορίζουν οι άξονες στον $\mathbb{R}^3$, τα επίπεδα με εξισώσεις $x=1$, $y=1$ και το γράφημα της συνάρτησης $f(x,y)=x^2+y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_B f(x,y)\,dxdy$, όταν

(α) $f(x,y)=x+y$, $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq a^2,\ y\geq 0\}$, $a>0$.

(β) $f(x,y)=x^2-xy$, $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y^2\leq 4x,\ x\leq 4\}$

(γ) $f(x,y)=x^2+y$, $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\geq x^2$ και $x\geq y^2\}$.

5. Να υπολογιστεί το $\int_B x^3 y\,dxdy$, όπου $B\subset\mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο που φράσσεται από τον άξονα των y και την παραβολή $x=-4y^2+3$.

6. Να υπολογιστεί το $\int_B (x^2-xy)\,dxdy$, όπου B είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ και $(1,0)$.

7. Να υπολογιστεί ο όγκος του $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+3y^2\leq z\leq 4-y^2\}$.

8. Να υπολογιστεί το $\int_B x\,dxdydz$, όταν

$B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leq a^2,\ x,y,z\geq 0\}$, $a>0$.

9. Να υπολογιστεί το $\int_B (xy+yz+zx)\,dxdydz$, όταν

$B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1,\ x,y,z\geq 0\}$, $a,b,c>0$.

10. Να αποδειχθεί ότι ο όγκος της μπάλας στο $\mathbb{R}^3$ με κέντρο το $(0,0,0)$ και ακτίνα $R>0$ είναι ίσος με $\frac{4}{3}\pi R^3$.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΕ ΦΡΑΓΜΕΝΑ ΣΥΝΟΛΑ (συνέχεια)

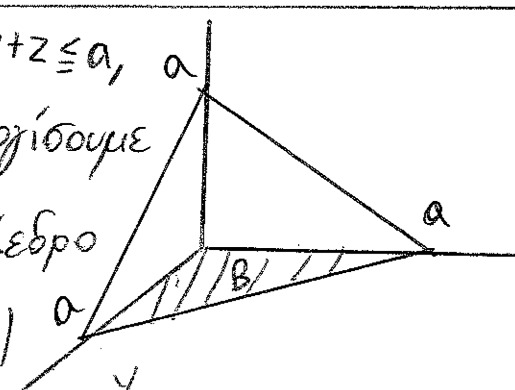
Έστω $I \subset R^n$ ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και $\psi_1, \psi_1 : I \to R$ δύο συνεχείς συναρτήσεις με $\psi_1(x) \leqq \varphi_1(x)$ θέτουμε

$$B = \{(x,y) \in R^n \times R : x \in I, \text{ και } \psi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_1(x)\}$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε και δύο ακόμα συνεχείς συναρτήσεις $\psi_2, \varphi_2 : B \to R$ με $\psi_2(x,y) \leqq \varphi_2(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in B$. Θέτουμε $\Delta = \{(x,y,z) \in R^n \times R \times R : x \in I$, $\psi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_1(x)$ και $\psi_2(x) \leqq z \leqq \varphi_2(x)\}$ οπότε το $\partial\Delta$ στο $R^n \times R \times R$ έχει περιεχόμενο 0.

Αν τώρα $f : \Delta \to R$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε

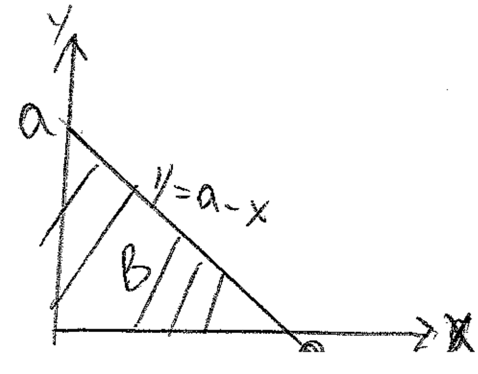
$$\int_\Delta f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_I \left(\int_{\psi_1(x)}^{\varphi_1(x)} \left(\int_{\psi_2(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$



<u>Παράδειγμα</u> Έστω $\Delta = \{(x,y,z) \in R^3 : x+y+z \leqq a, x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0\}, a>0$ και θέλουμε να υπολογίσουμε $\int_\Delta (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$. Το Δ είναι το τετράεδρο με κορυφές $(0,0,0), (a,0,0), (0,a,0), (0,0,a)$

Έχουμε $\Delta = \{(x,y,z) \in R^3 : \underset{\psi_2(x,y)}{\overset{\shortparallel}{0}} \leqq z \leqq \underbrace{a-x-y}_{\varphi_2(x,y)},$

$\underset{\psi_1(x)}{0} \leqq y \leqq \underset{\varphi_1(x)}{a-x}, \ 0 \leqq x \leqq a\}$



Άρα $\int_\Delta (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \int_0^a \left(\int_0^{a-x} \left(\int_0^{a-x-y} (x^2+y^2+z^2)\,dz \right) dy \right) dx = \ldots$

ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Αν $a<b$ και $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια C^1 συνάρτηση, τότε

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,dt \text{ για κάθε συνεχείς } f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

Πράγματι αν F είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f, δηλαδή $F'=f$ τότε $f(g(t))\cdot g'(t) = F'(g(t))\,g'(t) = (F\circ g)'(t)$, οπότε

$$\int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,dt = \int_a^b (F\circ g)'(t)\,dt = F(g(b))-F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Έστω ότι η g είναι 1-1, οπότε η g είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα.

(α) Αν η g είναι γνήσια αύξουσα, τότε $g([a,b])=[g(a),g(b)]$

οπότε $\displaystyle\int_{g([a,b])} f = \int_{[a,b]} (f\circ g)\,g' = \int_{[a,b]} (f\circ g)\,|g'|$

(β) Αν η g είναι γνήσια φθίνουσα, τότε $g([a,b])=[g(b),g(a)]$

οπότε $\displaystyle\int_{g([a,b])} f = \int_{g(b)}^{g(a)} f = -\int_{g(a)}^{g(b)} f = -\int_a^b (f\circ g)\,g' =$

$\displaystyle = \int_a^b (f\circ g)(-g') = \int_a^b (f\circ g)\cdot|g'|$

Άρα αν η g είναι "1-1", τότε $\displaystyle\int_{g([a,b])} f = \int_{[a,b]} (f\circ g)\,|g'|$

ΗΥ-111 @ 11/5/2015

(Τύπος αλλαγής μεταβλητής) Θεώρημα Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $B \subset A$ ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο, ώστε το ∂B να έχει περιεχόμενο 0. Υποθέτουμε ότι η $g: A \to \mathbb{R}^n$ είναι C^1 απεικόνιση με τις παρακάτω ιδιότητες.

(i) Υπάρχει ένα σύνολο $N \subset B$ ώστε το N έχει περιεχόμενο 0 και η $g|_{B \setminus N}$ είναι "1-1" απεικόνιση.

(ii) $\det Dg(x) \neq 0$ για κάθε $x \in B \setminus N$ (δηλ. η $Dg(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικός ισομορφισμός) Τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: g(B) \to \mathbb{R}$ ισχύει

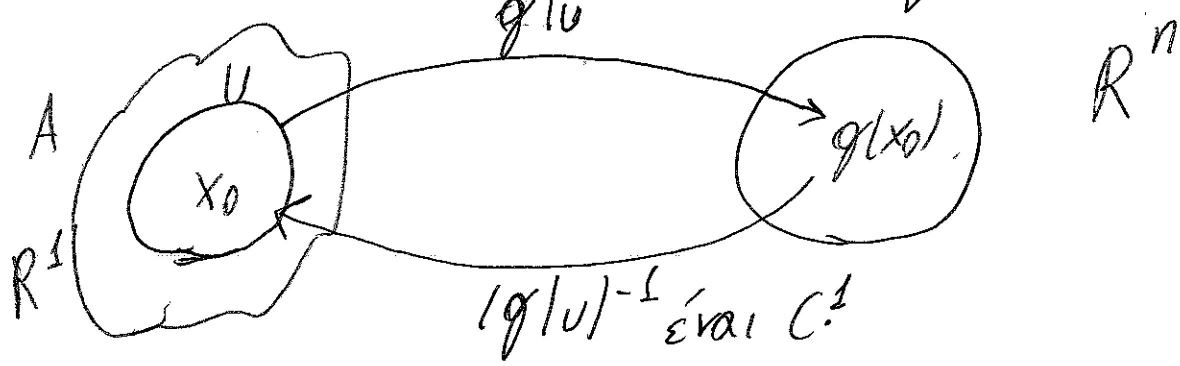
$$\int_{g(B)} f = \int_B (f \circ g) \, |\det Dg| : \text{δηλαδή} \int_{g(B)} f(x)\,dx =$$

$$= \int_B f(g(x)) \, |\det Dg(x)| \, dx$$

Παρατήρηση: Η υπόθεση (ii) συνδέεται με το θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης.

Θεώρημα (ως αντίστροφες συναρτήσεις): Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $g: A \to \mathbb{R}^n$ μια C^1 συνάρτηση. Αν $x_1 \in A$ και $\det Dg(x_0) \neq 0$ ($\Leftrightarrow$) η $Dg(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικός ισομορφισμός), τότε υπάρχουν ανοιχτά σύνολα $U \subset A \subset \mathbb{R}^n$ και $V \subset \mathbb{R}^n$ ώστε $x_0 \in U$ / $g(x_0) \in V$ και:

και η $g(U)=V$ με την $g|_U : U \to V$ να είναι 1-1, επί με την $(g|_U)^{-1} : V \to V$ C^1 απεικόνιση



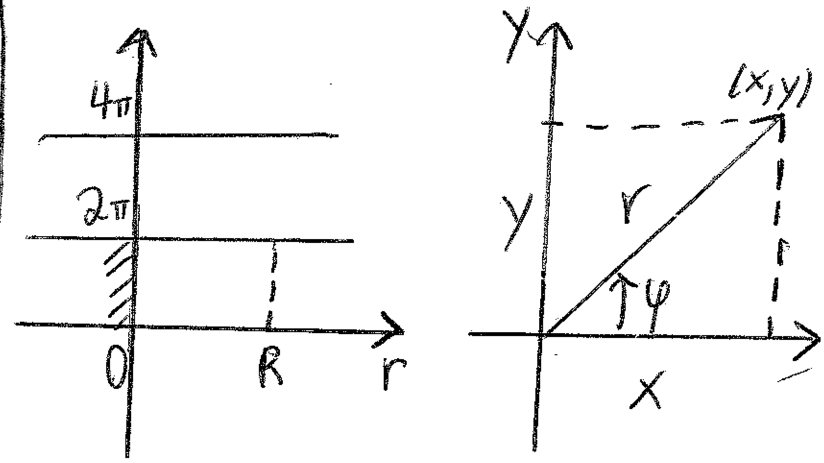
Πολικές συντεταγμένες

$\forall (x,y) \in R^2$ υπάρχει $(r \geq 0) \wedge (\varphi \in R))$

$x = \cos\varphi \cdot r$

$y = \sin\varphi \cdot r$

οπότε $r = \sqrt{x^2+y^2}$



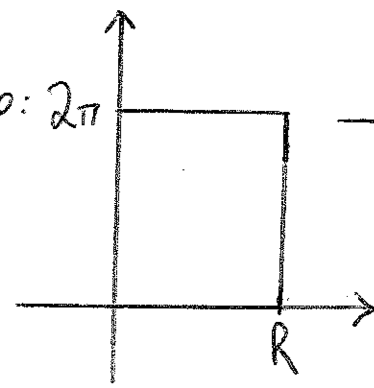
Η $g : R^2 \to R$ με $g(r,\varphi) = (r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)$ είναι C^1 απεικόνιση και:

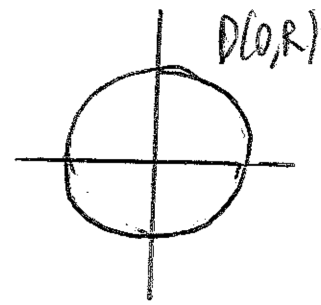
- $Dg(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\cdot\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cdot\cos\varphi \end{pmatrix}$, οπότε $\det Dg(r,\varphi) = r \geq 0$

- Συνεπώς το $N = \{(r,\varphi) \in R^2 : \det Dg(r,\varphi) = 0\} = \{0\} \times R$ που η τομή του με κάθε κλειστό και φραγμένο $B \subset R^2$ έχει περιεχόμενο 0.

HY-111 ③ 11/5/2015

Η φ στο $(0,+\infty)\times(0,2\pi)$ είναι "1-1" και απεικονίζει το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $[0,R]\times[0,2\pi]$ στον δίσκο στο R^2 με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $R>0$

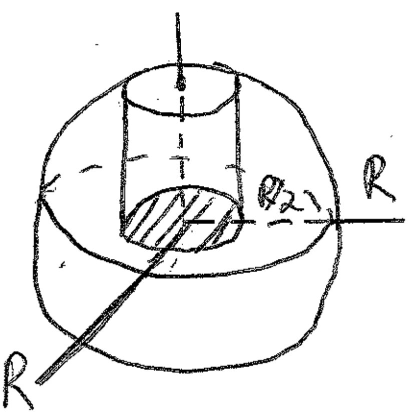




<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $R>0$ και θέλουμε το:

$$V=\int \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,\quad K=D((0,0),R/2)$$

(= ο όγκος του στερεού που είναι το κοινό μέρος της σφαίρας $x^2+y^2+z^2\leqq R^2$ και του άνω κυλίνδρου $x^2+y^2\leqq (R/2)^2,\ z\geqq 0$)



· Μετασχηματίζουμε σε πολικές συντεταγμένες:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{R/2}\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\cdot dr\cdot d\varphi = 2\pi\int_0^{R/2}(R^2-r^2)^{1/2}\,d(r^2)=$$

$$=\pi\int_0^{R^2/4}(R^2-s)^{1/2}\,ds=\dots=\frac{1}{12}(8-3\sqrt{3})\pi R^3$$

ΗΥ-111 ① 12/5/2015

Τύπος αλλαγής μεταβλητής: $\int_{g(K)} f = \int_K (f\circ g)\,|\det Dg|$

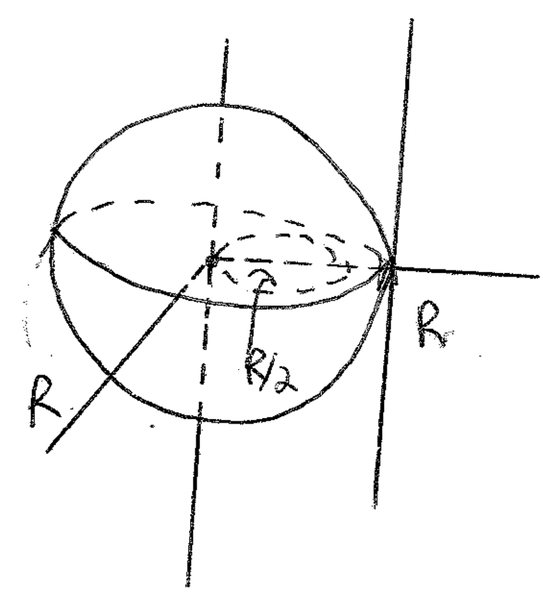
- Πολικές συντεταγμένες στο $\mathbb{R}^2$: $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$, $g(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$\det Dg(r,\varphi) = r$, $\int_{g(K)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_K f(r\cdot\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$

Παράδειγμα 2ο Αν $R>0$, θέλουμε το:

$V = \int_B \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy$, όπου:

$B = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2 + \left(y - \frac{R}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2\right\}$



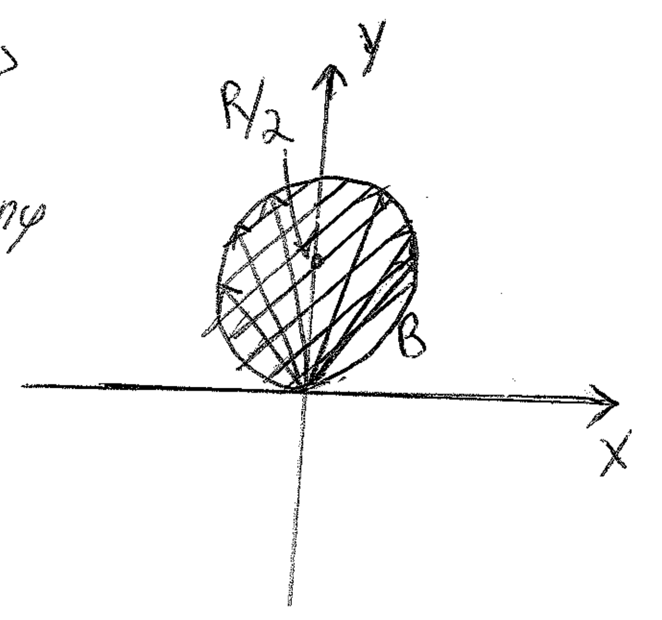
Μετασχηματίζουμε σε πολικές συντεταγμένες:

1η εκδοχή: $x^2 + \left(y - \frac{R}{2}\right)^2 \leq \frac{R^2}{4} \iff$

$\iff x^2 - Ry + y^2 \leq 0 \iff x^2 + y^2 \leq Ry \iff$

$\iff r^2 \leq R\cdot r\sin\varphi \iff 0 \leq r \leq R\cdot\sin\varphi$

και $0 \leq \varphi \leq \pi$



HY-111

Άρα: $\int \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{R\cdot\sin\varphi}\sqrt{R^2-r^2}\; r\,dr\right)d\varphi =$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{R\cdot\sin\varphi}(R^2-r^2)^{1/2}\cdot d(R^2-r^2)\right)d\varphi = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\frac{(R^2-r^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{R\cdot\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\left[(R^2-R^2\cdot\sin^2\varphi)^{3/2}-(R^2)^{3/2}\right]d\varphi = \frac{R^3}{3}\int_0^{\pi}\left[1-|\cos^3\varphi|\right]d\varphi =$$

$$= \frac{R^3}{3}\left(\int_0^{\pi/2}(1-\cos^3\varphi)\,d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi}(1+\cos^3\varphi)\,d\varphi\right) = \ldots = \frac{2R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

<u>2^{η} Ευδοχη</u> : $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = \frac{R}{2} + r\sin\varphi$, οπότε $x^2+\left(y-\frac{R}{2}\right)^2 \leq \frac{R^2}{4} \iff$

$\iff 0 \leq r \leq R/2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, οπότε: $V = \int_B \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy =$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{R/2}\sqrt{R^2-R^2\cdot\cos^2\varphi-\left(\frac{R}{2}+r\cdot\sin\varphi\right)^2}\cdot r\,dr\right)d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{R/2}\sqrt{R^2-R^2\cos^2\varphi-\frac{R^2}{4}+R\cdot r\sin\varphi-r^2\sin^2\varphi}\cdot r\cdot dr\right)d\varphi =$$

ΗΥ-111 ② 12/5/2015

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{R/2}\sqrt{(R^2-r^2)\sin^2\varphi + R\cdot r\cdot\sin\varphi - \frac{R^2}{4}}\cdot r\cdot dr\right)d\varphi,$$ δύσκολα υπολογίσιμο ολοκλήρωμα

Παράδειγμα 3ο : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

$$\int_I\int_I f(x)g(y)dxdy = \int_I f(x)dx \cdot \int_I g(y)dy$$

· Υπολογισμός, έχουμε: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx$

· Παρατηρούμε ότι: $\int_{[-R,R]\times[-R,R]} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{-R}^{R}\left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2-y^2}dx\right)dy =$

$$= \int_{-R}^{R}\left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}dx\right)dy = \int_{-R}^{R} e^{-y^2}dy\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\right)^2$$

· Άρα θέλουμε το $\lim_{R\to+\infty}\int_{[-R,R]\times[-R,R]} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{R\to+\infty}\int_{D(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

(διότι $D(0,R) \subset [-R,R]\times[-R,R] \subset D(0,R)$).

HY-111

· Μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες:

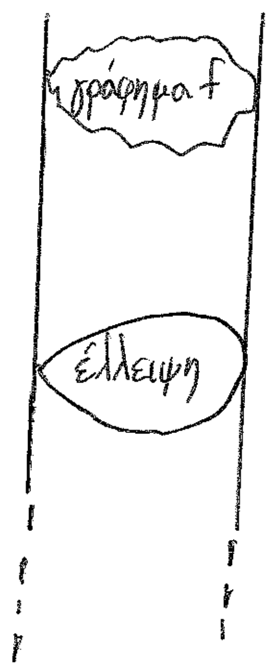
$$\int_{D(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^R e^{-r^2}\cdot r\cdot dr d\varphi = \pi\int_0^R e^{-r^2}d(r^2) =$$

$= \pi[1-e^{-R^2}]$, και συνεπώς το: $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{D(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy =$

$$= \lim_{R\to+\infty} \pi(1-e^{-R^2}) = \pi \quad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi$$

<u>Παράδειγμα 4ο</u>: Έστω:

$$B = \left\{(x,y)\in R^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1,\ a>0,\ b>0\right\}$$



και: $f: B\to R$ συνεχής, και θέλουμε τον όγκο του στερεού με βάση B και οροφή το γράφημα της f, δηλαδή το:

$$V = \int_B f(x,y)\,dxdy$$

· Μετασχηματίζουμε σε πολικές συντεταγμένες ως εξής:

$\frac{x}{a} = r\cdot\cos\varphi$, $\frac{y}{b} = r\cdot\sin\varphi$ άρα $\begin{array}{l} x = a\cdot r\cdot\cos\varphi \\ y = b\cdot r\cdot\sin\varphi \end{array}$,

δηλαδή: $g(r,\varphi) = (a\cdot r\cdot\cos\varphi,\ b\cdot r\cdot\sin\varphi)$ και:

ΗΥ-111 ③ 12/5/2015

• $Dg(r,\varphi) = \begin{pmatrix} a\cos\varphi & -a\cdot r\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\cdot r\cos\varphi \end{pmatrix}$, οπότε $\det Dg(r,\varphi) = a\cdot b\cdot r$

• Άρα $V = \int_B f(x,y)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 f(ar\cos\varphi, br\sin\varphi)\,a\cdot b\cdot r\,dr\right)d\varphi$

Παράδειγμα 5º : Θέλουμε το $\int_B xy\,dxdy$, όπου:

$B = \{(x,y)\in R^2 : x^2 - xy - 2y^2 \leq 1\}$

• Έχουμε $x^2 - xy + 2y^2 - 2x\cdot\frac{1}{2}y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{4} + 2y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$,

Δηλαδή: $B = \left\{(x,y)\in R^2 : \left(x-\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}y\right)^2 \leq 1\right\}$

• Κάνουμε το μετασχηματισμό: $\begin{matrix} u = x - \frac{y}{2} \\ v = \frac{\sqrt{7}}{2}y \end{matrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{matrix} x = u + \frac{1}{\sqrt{7}}v \\ y = \frac{2}{\sqrt{7}}v \end{matrix}$ δηλαδή:

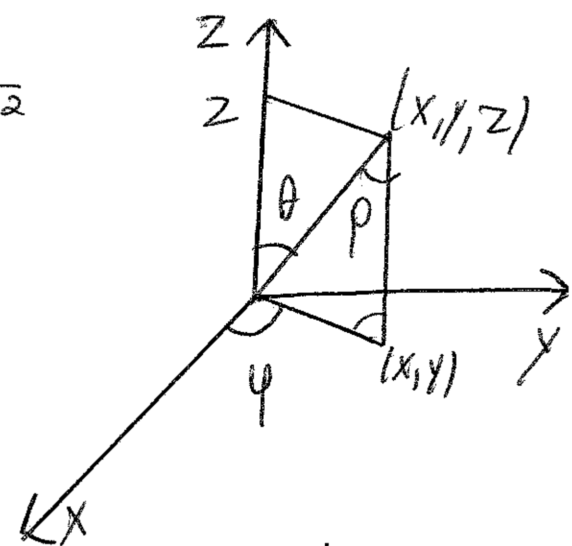
$g(u,v) = \left(u + \frac{1}{\sqrt{7}}v, \frac{2}{\sqrt{7}}v\right)$, (γραμμική) και $Dg(u,v)=\begin{pmatrix}1 & 1/\sqrt{7}\\ 0 & 2/\sqrt{7}\end{pmatrix}$, $\det Dg(u,v)=2/\sqrt{7}$

$B=g(D(0,1))$

Άρα $\int_B xy\,dx\,dy=\int_{D(0,1)}\left(u+\frac{1}{\sqrt{7}}v\right)\frac{2}{\sqrt{7}}v\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\,du\,dv=$

$$=\frac{4}{7}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(r\cdot\cos\varphi+\frac{1}{\sqrt{7}}r\cdot\sin\varphi\right)r\cdot\sin\varphi\cdot r\,dr\right)d\varphi \ \ldots\ldots$$

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



• Έστω $(x,y,z)\in R^3$. Θέτουμε $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

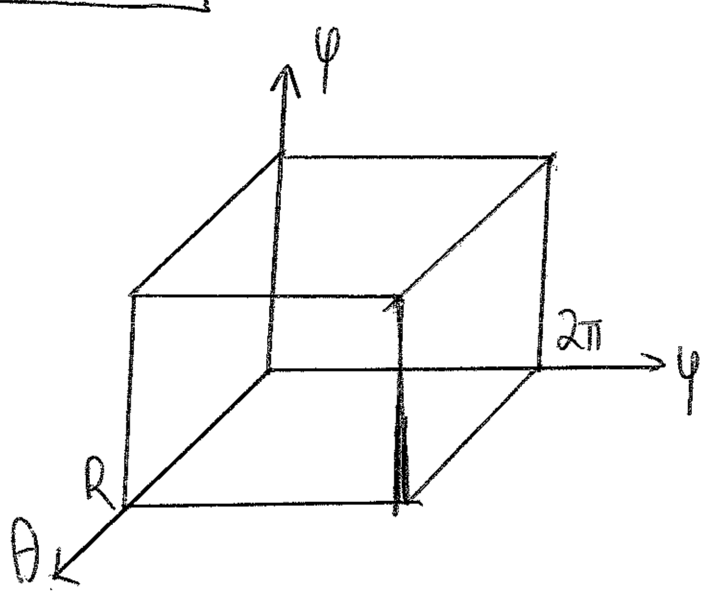
• ∃ γωνίες θ,φ ώστε:

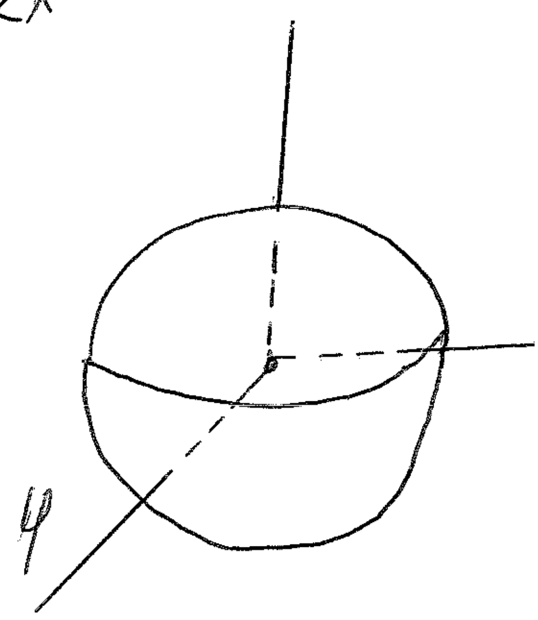
$$\boxed{\begin{aligned}x&=\rho\sin\theta\cdot\cos\varphi\\ y&=\rho\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi\\ z&=\rho\cdot\cos\theta\end{aligned}}$$

Προφανώς:

$\varphi\geq 0$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$

$0\leq\theta\leq\pi$





HY-111 ④ 12/5/2015

Εδώ έχουμε $g(\rho,\varphi,\theta) = (\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)$, οπότε:

$$Dg(\rho,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Det} Dg(\rho,\varphi,\theta) = -\rho^2\sin\theta$, Άρα αν $D(0,R) = \left\{ \begin{matrix} (x,y,z) \in R^3 \\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \end{matrix} \right\}$

Τότε: $$\int_{D(0,R)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta) \cdot \rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta,$$

για κάθε συνεχή f.

<u>Παράδειγμα</u>: Ο όγκος μιας σβούρας με οροφή $x^2+y^2+z^2=9$, και κανονική επιφάνεια: $3(x^2+y^2)=z^2$

Δηλαδή: $K = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 9$ και $3(x^2+y^2) = z^2\}$

Μετασχηματίζουμε με σφαιρικές συντεταγμένες, οπότε:

$0 \leq \rho \leq 3$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ και $0 \leq \theta \leq \theta_0$, όπου η θ_0 είναι η λύση της εξίσωσης

$$3(\rho^2\sin^2\theta_0\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta_0 \cdot \sin^2\varphi) = \rho^2 \cdot \cos^2\theta_0$$

ΗΥ-111

$$\Leftrightarrow 3\sin^2\theta_0 = \cos^2\theta_0 \Leftrightarrow \cos^2\theta_0 = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{\theta_0 = \pi/6}$$

• Άρα ο όγκος του K είναι το:

$$\int_K 1 \cdot dxdydz = \int_0^{\pi/6}\int_0^{2\pi}\int_0^{3} \rho^2 \sin\theta \; d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

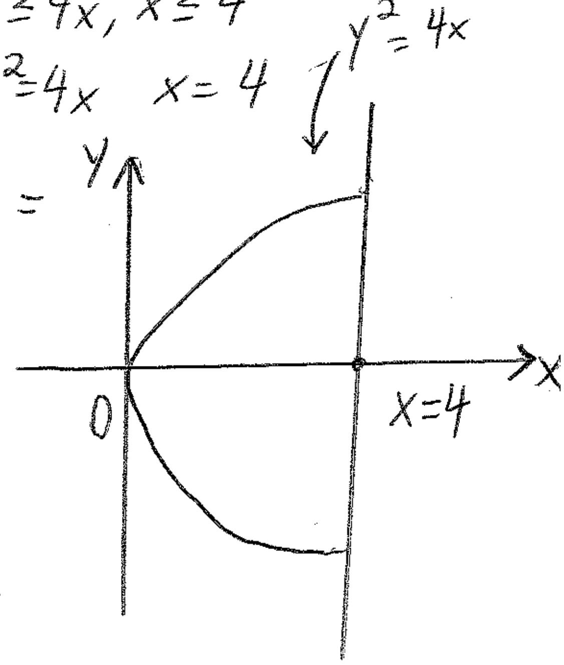
ΗΥ-111 (Φροντιστήριο) ① 14/5/2015

Άσκηση 4 Φυλλάδιο 10

β) $f(x,y) = x^2 - xy$ $\quad B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq 4x,\ x \leq 4 \}$

$y^2 = 4x \quad x = 4$

$$\int_B (x^2 - xy)\,dx\,dy = \int_0^4 \left(\int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (x^2 - xy)\,dy \right) dx =$$



$$\boxed{\begin{array}{c} 0 \leq x \leq 4 \\ -2\sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x} \end{array}}$$

$$= \int_0^4 \left[x^2 y - \frac{xy^2}{2} \right]_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dx = \int_0^4 4x^2\sqrt{x}\,dx =$$

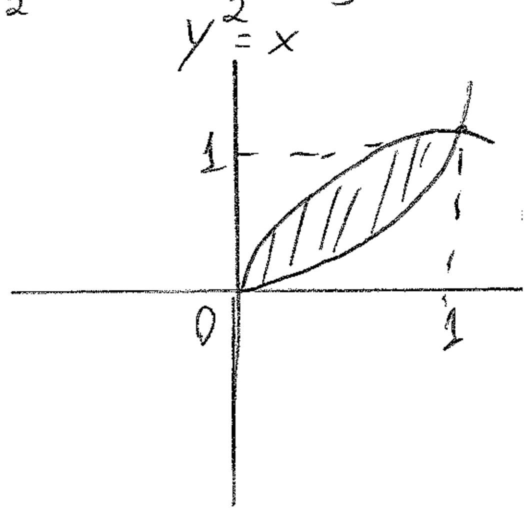
$$= \left[\frac{4x^{7/2}}{\frac{7}{2}} \right]_0^4 = \frac{1024}{7}$$

γ) $f(x,y) = x^2 + y$ $\quad B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 \text{ και } x \geq y^2 \}$

$y = x^2$

$y^2 = x$

$$\boxed{\begin{array}{c} x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array}}$$



$$\int_B (x^2 + y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y)\,dy \right) dx =$$

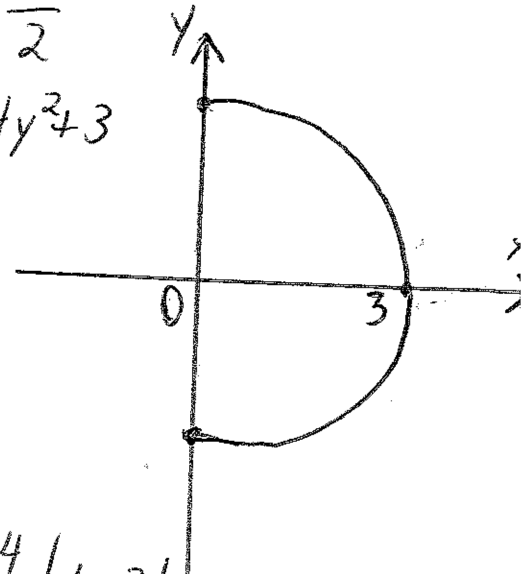
$$= \int_0^1 \left[x^2(\sqrt{x} - x^2) + \frac{x}{2} - \frac{x^4}{2} \right] dx$$

$$= \int_0^1 (x^{5/2} + \frac{x}{2} - \frac{3}{2}x^4\,dx = \frac{33}{140}$$

ΗΥ-111 (Φροντιστήριο)

Άσκηση 5 Φυλλάδιο 10.

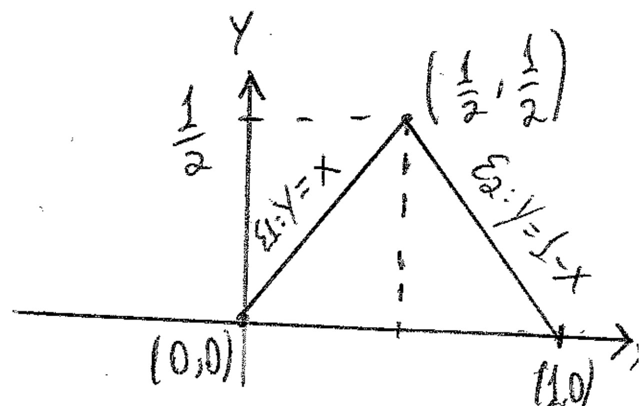
$$\int_B x^3 y \, dx\, dy = \qquad x = -4y^2+3 \qquad 0 \le x \le -4y^2+3 \qquad -\frac{\sqrt{3}}{2} \le y \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$= \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \left[\int_0^{-4y^2+3} (x^3 y)\, dx \right] dy =$$

$$= \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} y \frac{(-4y^2+3)^4}{4} dy = \frac{1}{8} \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} (3-4y^2)^4 d(y^2) = \ldots$$

Άσκηση 6 Φυλλάδιο 10



$$\int_B (x^2 - xy)\, dx\, dy$$

$(1/2, 1/2) \in \varepsilon_2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\lambda + \beta$

$(1, 0) \in \varepsilon_2 \Rightarrow 0 = \lambda + \beta \Rightarrow \boxed{\lambda = -\beta}$ $\qquad y = \lambda x + \beta$

$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\beta + \beta \Rightarrow \beta = 1 \qquad$ Άρα $y = 1 - x$

$0 \le y \le$

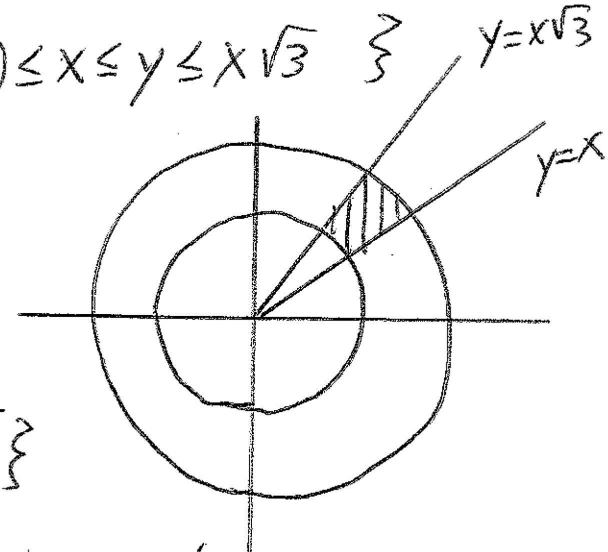
$y \le x \le 1-y$

$$= \int_0^{1/2} \left[\int_y^{1-y} (x^2 - xy)\, dx \right] dy = \frac{5}{96}$$

HY-111 (Φροντιστήριο) ② 14/5/2015

Άσκηση 1 Φυλλάδιο 11

γ) $\int_K (x^2+y^2)\,dx\,dy$ $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 4$ και $0\le x\le y\le x\sqrt{3}\}$



$K=\{(r,\varphi): 1\le r\le 2$ και $0\le \cos\varphi\le \sin\varphi \le \cos\varphi\sqrt{3}\}=$

$=\{(r,\varphi): 1\le r\le 2$ και $\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}\}$

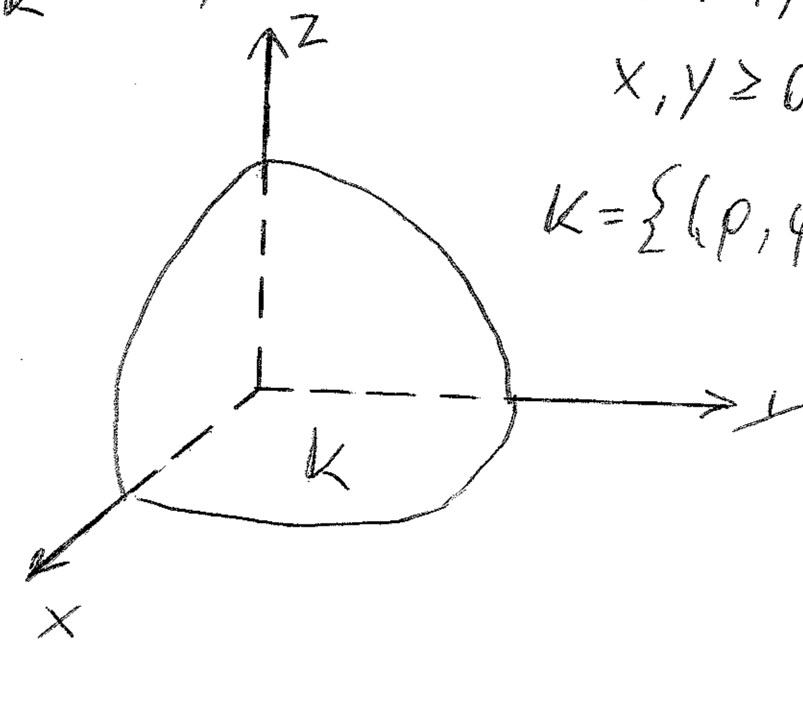
$$\int_K (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{\pi/4}^{\pi/3}\int_1^2 r\cdot r\,dr\,d\varphi = \left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{2^3}{3}-\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{12}\cdot\frac{7}{3}=\frac{7\pi}{36}$$

Άσκηση 4 Φυλλάδιο 11

$\int_K x\,dx\,dy\,dz$ $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2\le a^2,$
$x,y\ge 0$ και $0\le z\le b\}$

$K=\{(\rho,\varphi,\theta)\in\mathbb{R}^3, 0\le\rho\le a,$
$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ και $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$



HY-111 (Φροντιστήριο)

$$\int_K x\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} \rho\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi\,\rho^2\cdot\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta =$$

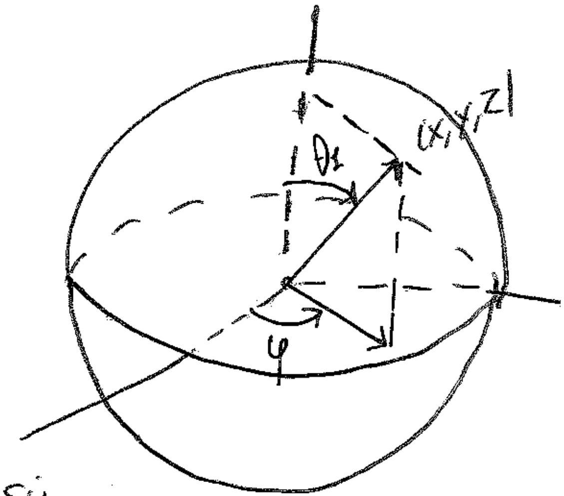
$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cdot\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta = \frac{a^4}{4}\left(\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\right)$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\,d\theta - \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos 2\theta\,d(2\theta)$$

Άρα $\int_K x\,dx\,dy\,dz = \frac{a^4}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}a^4$

HY-111 ① 18/5/2015

Σφαιρικές Συντεταγμένες



$x = \rho \cos\varphi \sin\theta$

$y = \rho \sin\varphi \sin\theta, \quad g: R^3 \to R^3$

$z = \rho \cos\theta$

$$g(\rho,\varphi,\theta) = (\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)$$

$$|\det Dg(\rho,\varphi,\theta)| = \rho^2 \sin\theta$$

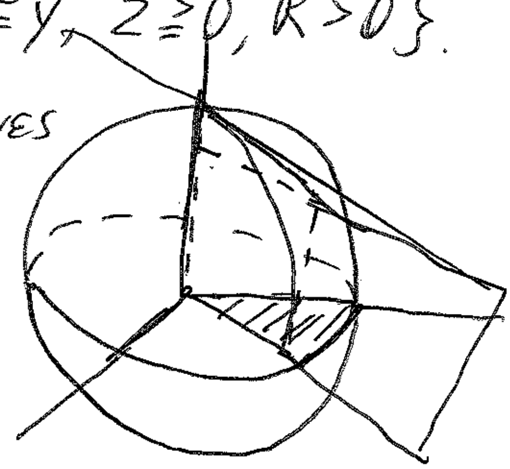
Παράδειγμα Ο όγκος μιας μπάλλας με ακτίνα $R>0$ (και κέντρο 0) είναι ίσος με $\int_{D(0,R)} 1\, dxdydz = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta =$

$$= 2\pi \left(\int_0^R \rho^2 d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\right) = 2\pi \frac{R^3}{3}\cdot 2 = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$D(0,R) = \{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2 = R\}$$

Παράδειγμα 2 Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\int_K 4z\, dxdydz$, όπου $K = \{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ 0\leq x\leq y,\ z\geq 0,\ R>0\}$.

Μετασχηματίζουμε σε σφαιρικές συντεταγμένες (ρ,φ,θ) οπότε $x^2+y^2+z^2 \leq R \Leftrightarrow 0\leq \rho\leq R$



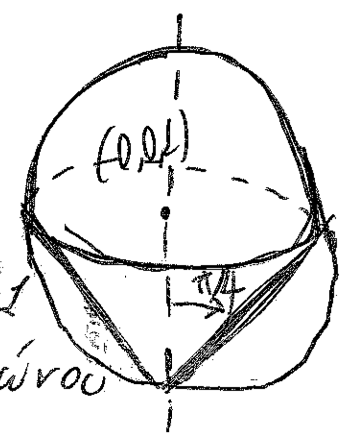
$$z \geq 0 \Leftrightarrow 0\leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0\leq x\leq y \qquad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Άρα $I = \int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^R 4\rho\cos\theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \frac{\pi}{4}\left(\int_0^R \rho^3 d\rho\right) \cdot$

$\cdot\left(\int_0^{\pi} 2\cdot\underbrace{\sin\theta\cdot\cos\theta}_{\sin(2\theta)} \, d2\theta\right) = \frac{\pi R^4}{8}$

<u>Παράδειγμα 3</u> Ζητείται ο όγκος μιας σβούρας που φράσσεται από πάνω από τη σφαίρα $x^2+y^2+z^2=2z$ και από κάτω από τον κώνο $z=\sqrt{x^2+y^2}$



Έχουμε $x^2+y^2+z^2=2z+1=1 \iff x^2+y^2+(z-1)^2=1$

Άρα η σφαίρα έχει κέντρο το $(0,0,1)$ και ακτίνα 1

Τα κοινά σημεία της σφαίρας και του κώνου είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεων

$x^2+y^2+z^2=2z$
$z=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$ $\Rightarrow \cancel{2}z^2=\cancel{2}z \Rightarrow z=1$ (ή 0) $\Rightarrow$

και $\rho^2 = 2\rho\cos\theta = 2\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta} =$
$= 2\rho\sin\theta$

$\Rightarrow \cos\theta=\sin\theta \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$. Άρα το θ μεταβάλλεται στο $[0,\frac{\pi}{4}]$

Απ' την πρώτη έχουμε ότι $x^2+y^2+z^2\leq 2z \iff \rho^2\leq 2\rho\cos\theta$

$\Rightarrow \boxed{0\leq\rho\leq 2\cos\theta}$

HY-111 ② 18/5/2015

Άρα $V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\cos\theta} \rho^2 \sin\theta \, d\rho \right) d\theta \right) d\varphi =$

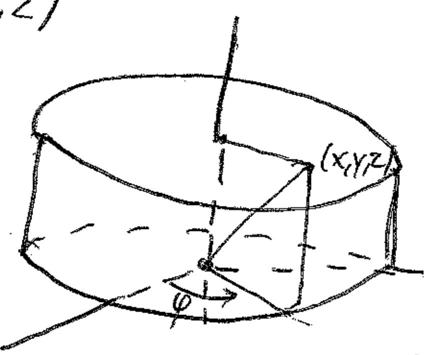
$= 2\pi \int_0^{\pi/4} \sin\theta \, \frac{8\cos^3\theta}{3} \, d\theta = \ldots = \pi$

Κυλινδρικές συντεταγμένες

$x = r\cos\varphi$ Εδώ $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$ και $Dg(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$



$\Rightarrow \det Dg(r,\varphi,z) = r$

Άρα $\int_{g(K)} f \, dx\,dy\,dz = \int_K f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \cdot r \, dr\,d\varphi\,dz$

<u>Παράδειγμα 4</u> Θέλουμε το $\int_B (x^2+y)\,dx\,dy\,dz$,

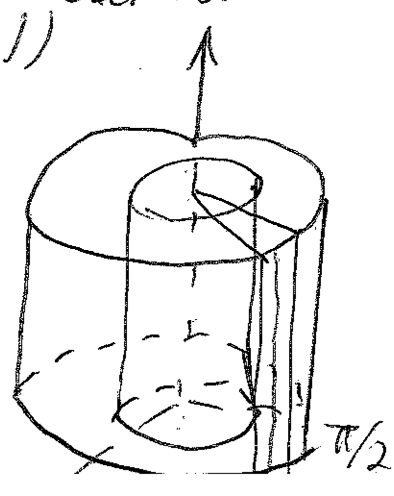
$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq x \leq y,\ 0 \leq z \leq 1\}$

Έχουμε $1 \leq x^2+y^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow$ το (x,y,z) βρίσκεται στον ενδιάμεσο χώρο μεταξύ του κυλίνδρου με ακτίνα βάσης 1 και 2 (και κοινό κέντρο (0,0,0))

Έχουμε $1 \leq x^2+y^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow 1 \leq r \leq 2$

$0 \leq x \leq y \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$0 \leq z \leq 1 \qquad 0 \leq z \leq 1$



Άρα $\int_K (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_1^2 r^2 \cdot r \,dr\,d\varphi\,dz = \frac{\pi}{4}\left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right) \cdots$

<u>Παράδειγμα 5</u> Θέλουμε το $\int_B z\,dx\,dy\,dz$,

$B = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 2,\ x^2+y^2 \leq z\}$

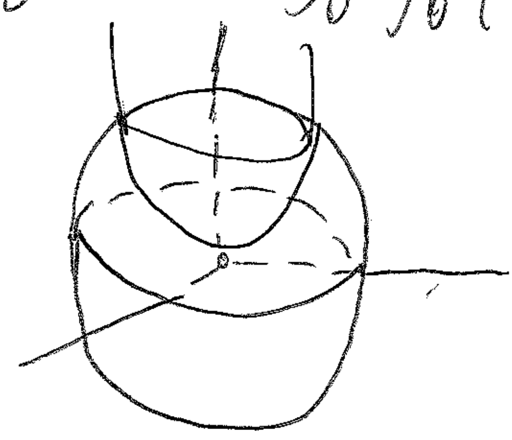
Μετασχηματίζουμε σε κυλινδρικές συντεταγμένες

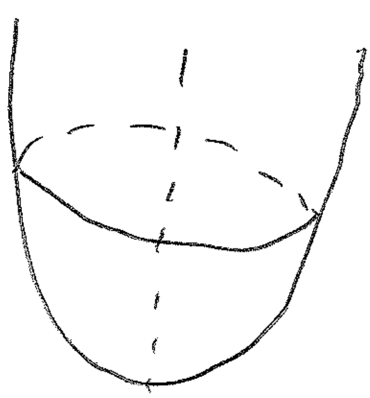
οπότε $x^2+y^2+z^2 \leq 2$

$r^2 = x^2+y^2 \leq z \iff r^2 \leq z \leq \sqrt{2-r^2}$,

Το $0 \leq r \leq r_0$, όπου το r_0 είναι λύση της εξίσωσης $r_0^2 = z = \sqrt{2-r_0^2} \iff r_0 = 1$. Δηλαδή $0 \leq r \leq 1$. Άρα, αφού $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\int_B z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} z\,dz\right) dr\,d\varphi = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{2-r^2}{2} - \frac{r^4}{2}\right] dr = \frac{7\pi}{12}$$





$z = x^2+y^2$

HY-111 ③ 18/5/2015

Παράδειγμα 6 (απ' τα παλιά) Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\int_B e^{x+y}\,dxdy$ όπου: $B=\left\{ \begin{matrix} (x,y)\in \mathbb{R}^2 \\ |x|+|y|\le 1 \end{matrix} \right\}$

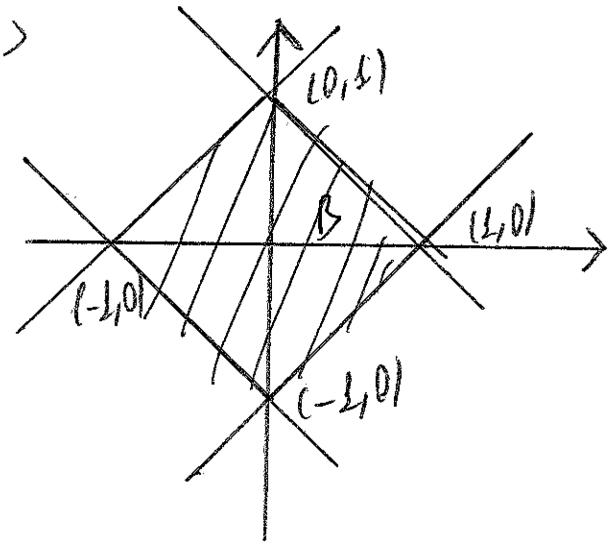
· Εδώ έχουμε $|x|+|y|=1 \iff$

$\iff x+y=1$

ή $-x+y=1$

ή $x-y=1$

ή $-x-y=1$



Άρα το B είναι το τετράγωνο με κορυφές (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)

Άρα $\int_B e^{x+y}dxdy = \int_1^0 \left(\int_{-x+1}^{1+x} e^{x+y}dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{1-x} e^{x+y}dy \right) dx = \frac{e^3}{2} + \frac{e^3}{2e}$

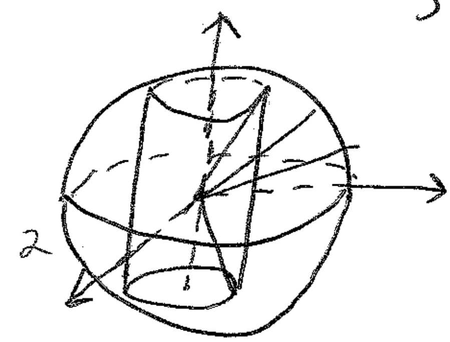
Δεύτερος τρόπος $g(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\det Dg(x,y)=1$

ΗΥ-111 ① 19/5/2015

Άσκηση

Θέλουμε το $\int_B \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ όπου: $B=\left\{ \begin{array}{l}(x,y,z)\in R^3: \\ x^2+y^2+z^2 \text{ και } x^2+y^2\geq 1\end{array}\right\}$

• Μετασχηματίζουμε σε σφαιρικές συντεταγμένες, οπότε $x^2+y^2+z^2\leq 4 \Leftrightarrow \varphi\leq 2,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi$



• Επίσης $x^2+y^2\geq 1 \Leftrightarrow \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta\geq 1$

$\Leftrightarrow \rho^2\sin^2\theta\geq 1 \Leftrightarrow \rho\geq\frac{1}{\sin\theta}$ άρα $\boxed{\frac{1}{\sin\theta}\leq\rho\leq 2}$

• Τέλος $\theta_0\leq\theta\leq\pi-\theta_0$ όπου το θ_0 αντιστοιχεί στα σημεία που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2+z^2=4\\ x^2+y^2=1\end{array}\right\} z^2=3 \Rightarrow \begin{array}{c}\rho^2\cos^2\theta_0=3\\ \text{και}\\ \rho^2=4\end{array} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\theta_0=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ άρα $\theta_0=30$ και $\frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\pi-\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\boxed{\frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{5\pi}{6}}$

• Συνεπώς $\int_B \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\left(\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\left(\int_{1/\sin\theta}^{2}\frac{1}{\cancel{\rho^2}}\cancel{\rho^2}\sin\theta\, d\rho\right)d\theta\right)d\varphi=$

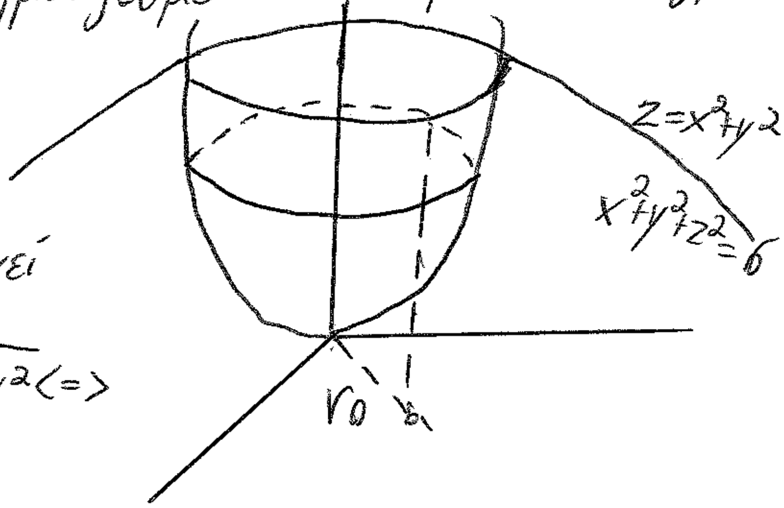
$$= 2\pi\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\sin\theta\left[2-\frac{1}{\sin\theta}\right]d\theta = \ldots = 4\pi\sqrt{\pi}-\frac{4}{3}\pi^2$$

HY-111

Άσκηση

- Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού $K=\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2 \leq z \leq \sqrt{6-x^2-y^2}\}$

$\mu(K) = \int_K 1\, dxdydz$. Μετασχηματίζουμε σε κυλινδρικές συντεταγμένες



$r^2 \leq z \leq \sqrt{6-r^2}$. Επίσης

$0 \leq r \leq r_0$, όπου το r_0 αντιστοιχεί στα σημεία που $x^2+y^2 = z = \sqrt{6-x^2-y^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r_0^3 = z = \sqrt{6-r_0^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r_0^4 + r_0^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow (r_0^2+3)(r_0^2-2)=0 \Leftrightarrow r_0 = \sqrt{2}\ (r_0>0)$.

- Δηλαδή $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, άρα $\mu(K) = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} r\, dz\right)dr\right)d\varphi =$

$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r\left[\sqrt{6-r^2} - r^2\right]dr = \ldots$

- Εναλλακτικά (μάλιστα ισοδύναμα), το B είναι το στερεό που φράσσεται από πάνω από το γράφημα της $f(x,y)=\sqrt{6-x^2-y^2}$, και από κάτω από το γράφημα της $g(x,y)=x^2+y^2$, όπου $g,f: D(0,\underset{r_0}{\sqrt{2}}) \to R$

Άρα $\mu(K) = \int_{D(0,\sqrt{2})} f(x,y)dxdy - \int_{D(0,\sqrt{2})} g(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{6-r^2}\cdot r\, dr d\varphi -$

$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cdot r\, dr d\varphi =$

HY-111 ② 19/5/2015

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r\left[\sqrt{6-r^2} - r^2\right] dr = \dots \text{(ίδιο)}$$

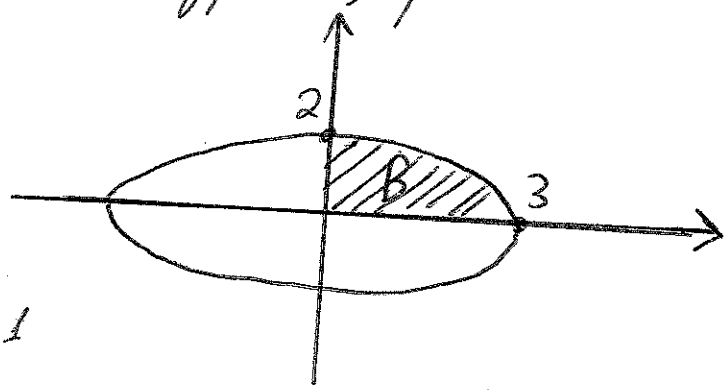
Άσκηση

Να υπολογισθεί το $\int_B (3x+y)\,dx\,dy$, $B=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : 4x^2+9y^2 \leq 36, x\geq 0, y \geq 0\}$

• Έχουμε $4x^2+9y^2 \leq 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \leq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 1$

• Μετασχηματίζουμε σε πολικές συντεταγμένες, άρα:

$\frac{x}{3} = r\cdot\cos\varphi$, $\frac{y}{2} = r\cdot\sin\varphi$, οπότε: $0\leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$



• Άρα $\int_B (3x+y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 9\cdot r\cdot\cos\varphi + 2r\cdot\sin\varphi \cdot 3\cdot 2\cdot r\,dr\right) d\varphi = \dots$

Άσκηση

• Αν $a>0, b>0, c>0$, $K=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\right\}$ και $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής, νδο $\int_K f\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}\right) dx\,dy\,dz =$

$$= 4\pi\, a b c \int_0^1 t^2 f(t)\,dt$$

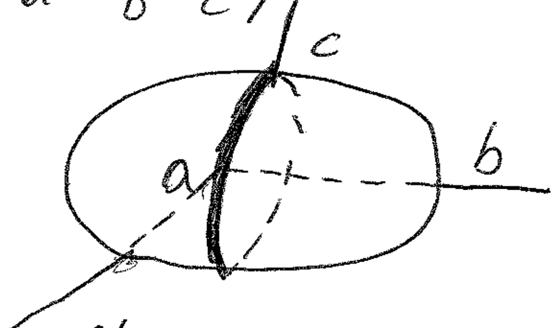
ΗΥ-111

Απόδειξη:

Μετασχηματίζουμε σε: $g\begin{pmatrix}\rho\\ \varphi\\ \theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\rho\cos\varphi\sin\theta \\ b\cdot\rho\sin\varphi\sin\theta \\ c\rho\cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, οπότε:

$|\det D(\rho,\varphi,\theta)| = a\cdot b\cdot c\rho^2\sin\theta$, άρα $\int_K f\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}\right)dxdydz =$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^1 abc\rho^2\sin\theta\, d\rho\right)d\theta\right)d\varphi =$$



$$= 2\pi\cdot a\cdot b\cdot c\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\cdot\int_0^1\rho^2 f(\rho)\,d\rho = 4\pi abc\int_0^1\rho^2 f(\rho)\,d\rho$$

Άσκηση:

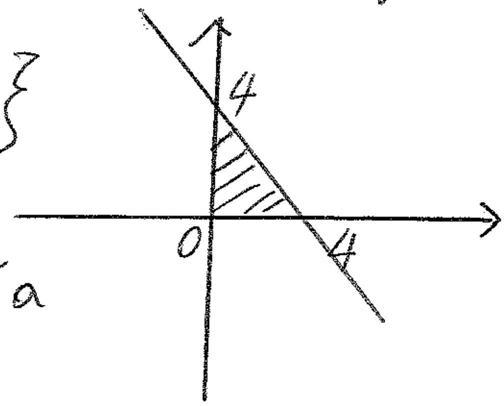
Υπολογίστε το: $\int_B yz\,dxdydz$, $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ 0\le y\le x,\ z^2\le x\le\sqrt{z},\ 0\le z\le 1\}$

· Έχουμε $\int_B yz\,dxdydz =$

$$= \int_0^1\left(\int_{z^2}^{\sqrt{z}}\left(\int_0^x yz\,dy\right)dx\right)dz = \dots$$

ΗΥ-111 ③ 19/5/2015

Πρόβλημα: Να βρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της: $f: R^2 \to R$ με τύπο: $f(x,y) = x^2 \cdot y \cdot e^{-(x+y)}$, στο κλειστό και φραγμένο σύνολο: $K = \{(x,y) \in R^2 : x+y \leqq 4, x \geqq 0, y \geqq 0\}$



• Η f είναι C^∞ και έχει κρίσιμα σημεία τις λύσεις του:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2xye^{-(x+y)} - x^2 y \cdot e^{-(x+y)} = 0 \\ x^2 \cdot e^{-(x+y)} - x^2 \cdot ye^{-(x+y)} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} xy(2-x) = 0 \\ x^2(1-y) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} x=0 \text{ ή } x=2 \text{ ή } y=0 \\ x=0 \text{ ή } y=1 \end{array}$$

• Αν $x=0$, τότε: το y μπορεί να είναι οτιδήποτε, άρα όλα τα σημεία $(0,y)$, $y \in R$ είναι κρίσιμα σημεία της f.

• Αν $y=0$, τότε: $x=0$, οπότε το $(0,0)$ είναι κρίσημο σημείο της f.

• Αν $x=2$, τότε: $y=1$, οπότε το $(2,1) \in K$ στο εσωτερικό του K.

Συμπέρασμα, το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f στο εσωτερικό του K είναι το $(2,1)$.

Έχουμε ότι $f(x,y) \geqq 0$ $\forall (x,y) \in K$ και $f(0,y) = f(x,0) = 0$

$\forall$ $0 \leqq x \leqq 4$, $0 \leqq y \leqq 4$

Άρα η ελάχιστη τιμή της f στο K είναι το 0. Αφού $f(2,1) = 4/e^3 > 0$ πρέπει να συγκρίνουμε αυτή την τιμή με τις τιμές της f πάνω στην υποτείνουσα του K.

· Δηλαδή θέτουμε τις τιμές $f(x, 4-x) = x^2(4-x)e^{-4}$

· Η C^∞ συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με παράγωγο: $g'(x) = (8x - 3x^2)e^{-4}$, οπότε $g'(x) = 0$, όταν: $x = 0$ ή $x = \frac{8}{3}$. Προφανώς $g(0) = 0$ και $0 \leq \frac{8}{3} \leq 4$, η g έχει μέγιστο στο $8/3$, $g\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{64}{9}\left(4 - \frac{8}{3}\right)e^{-4} = \frac{256}{27e^4} < f(2,1)$

Άρα συμπέρασμα: Η μέγιστη τιμή της f στο K είναι $\frac{4}{e^3}$

Γεωμετρικο πρόβλημα: ΝΔΟ: $\forall$ τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, με γωνίες A, B, και Γ, ισχύει: $\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{\Gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$, και να βρεθούν τα τρίγωνα για τα οποία ισχύει η ισότητα.

· Βάζουμε $A + B + \Gamma = \pi \Leftrightarrow \Gamma = \pi - A - B$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\left(\frac{\pi - x - y}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{f(x,y) = \sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{y}{2}\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}$. Όπου $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; \begin{matrix} 0 < x < \pi \\ 0 < y < \pi \\ 0 < x+y < \pi \end{matrix} \right\}$

.... βρίσκουμε ότι η μέγιστη τιμή είναι το $1/8$.