HY180 – 2010

Λύσεις 3^{ης} σειράς ασκήσεων

Άσκηση 1

α) Για να ικανοποιείται το P(f(b)) αρκεί το I'(f(b)) να ανήκει στο I(P), δηλαδή I(f) (I(b)) ανήκει στο I(P), οπότε αρκεί το I(f)(1) να ανήκει στο I(P). Είναι I(f)(1)= 1^2=1. Όμως το 1 δεν ανήκει στο I(P), άρα το P(f(b)) είναι ψευδές.

β)) Για να ικανοποιείται το P(g(a,b)) αρκεί το I'(g(a,b)) να ανήκει στο I(P), δηλαδή I(g) (I'(a,b)) ανήκει στο I(P), δηλαδή I(g)(I(a)I(b)) ανήκει στο I(P) οπότε αρκεί το I(g)(0,1) να ανήκει στο I(P). Είναι I(g)(0,1)= 0+1=1. Όμως το 1 δεν ανήκει στο I(P), άρα το P(g(a,b)) είναι ψευδές.

c) Για να ικανοποιείται το Q(c, b) αρκεί το I'(c,b) να ανήκει στο I(Q), δηλαδή (I(c), I(b)) ανήκει στο I(Q). Είναι (I(c),I(b))= (3,1) δεν ανήκει στο I(Q), άρα το 3 δεν διαιρεί το 1. Άρα το Q(c,b) είναι ψευδές.

d) Για να ικανοποιείται το $\forall$xQ(x,x)) αρκεί το I'(Q(x,x)) =D.
Είναι I'(Q((x,x)) = {dϵD | $|=_{D,Id}$ Q(*,*) }
={deD | $|=_{D,Id}$(Id(*),Id(*)) ϵ I(Q)}
={deD | |= (d,d) ϵ I(Q) } διάφορο του D ,αφού το 0 δεν διαιρεί το 0. Άρα το $\forall$xQ(x,x)) είναι ψευδές.

e) Για να ικανοποιείται το $\exists$xQ(x,f(x)) αρκεί το
I'(Q(x,f(x))) διάφορο του κενού.
Είναι I'(Q((x,f(x))) = {deD| $|=_{D,Id}$Q(*,f(*)) }
={deD| $|=_{D,Id}$(Id(*),Id(f(*))) ϵ I(Q)}
={deD| |= (d,I(f)(d)) ϵ I(Q) }
= {deD| |= (d,d2) ϵ I(Q) } διάφορο του κενού ,αφού το 1 διαιρεί το 1^2.

Άσκηση 2

a) Τίποτα από τα 2.
Η ορθότητα της πρότασης εξαρτάται από την εκάστοτε ερμηνεία που χρησιμοποιείται (μπορούμε να βρούμε ερμηνεία για την οποία η πρόταση είναι λογικά αληθής, καθώς επίσης και ερμηνεία για την οποία η πρόταση είναι λογικά ψευδής).
Για παράδειγμα έστω ερμηνεία (D,I), όπου D = {0,1} και I(P) = {0}.
Τότε I'(P(_)) = {dϵD | $|=_{D,Id}$ P(*) } = {0} $\neq$ D
Επομένως $|\neq_{D,Id}$ $\forall$x P(x)

Όμοια I'(¬P(_)) = {dϵD | $|\neq_{D,Id}$ P(*) } = {1} $\neq$ D
Και έτσι $|\neq_{D,Id}$ $\forall$x ¬P(x)
Βλέπουμε ότι γι αυτή την ερμηνεία η πρόταση είναι λογικά ψευδής, δηλαδή

$|\neq_{D,Id} \forall x\, P(x) \lor \forall x\, \neg P(x)$.

Αντίστοιχα αν έχουμε την ερμηνεία (D,I), όπου D = {0,1} και I(P) = {0,1} τότε
Τότε $I'(P(\_)) = \{d \in D \mid\ |=_{D,Id} P(*)\} = \{0,1\} = D$
δηλαδή $|=_{D,Id} \forall x\, P(x)$
Άρα ισχύει ότι $|=_{D,Id} \forall x\, P(x) \lor \forall x\, \neg P(x)$.
Δηλαδή γι αυτή την ερμηνεία η πρόταση γίνεται αληθής.

b) Λογικά αληθής.
Για οποιαδήποτε ερμηνεία (I,D) ισχύει ότι
$|=_{D,Id} \forall x\, P(x)$ ανν $\{d \in D \mid\ |=_{D,Id} P(*)\} = D$, άρα όποιο d και αν διαλέξω, ισχύει P(d)
Δηλαδή $\{d \in D \mid\ |=_{D,Id} P(*)\} \neq \emptyset$ άρα $|=_{D,Id} \exists x\, P(x)$

Επομένως $|=_{D,Id} \forall x\, P(x) \rightarrow \exists x\, P(x)$

c) Λογικά ψευδής
Για οποιαδήποτε ερμηνεία (I,D) ισχύει ότι
$|=_{D,Id} \forall x\, P(x)$ δηλαδή $\{d \in D \mid\ |=_{D,Id} P(*)\} = D$ ή $\{d \in D \mid\ |=_{D,Id} \neg P(*)\} = \emptyset$

Δηλαδή $|=_{D,Id} \neg \exists x\, \neg P(x)$ ή $|\neq_{D,Id} \exists x\, P(x)$

Επομένως $|\neq_{D,Id} \forall x\, P(x) \land \exists x\, \neg P(x)$

<u>Άσκηση 3</u>

α) **$\neg\forall x\, F(x) \models \exists x\, \neg F(x)$**

1. $\neg\forall x\, F(x)$ (υπόθεση παραγωγής)
2. Υποπαραγωγή
   2.1 $\neg\exists x\, \neg F(x)$ (υπόθεση υποπαραγωγής)
   2.2 Υποπαραγωγή
      2.2.1 $\neg F(a)$ (υπόθεση υποπαραγωγής)
      2.2.2 $\exists x\, \neg F(x)$ (από 1.2.1 με εισαγωγή ∃ και x/a)
      2.2.3 $\neg\exists x\, \neg F(x)$ (από 2.1 με επανάληψη)
   2.3 $\neg\neg F(a)$ (από 2.2.1 με εισαγωγή ¬)
   2.4 $F(a)$ (από 2.3 με απαλοιφή διπλής ¬)
   2.5 $\forall x\, F(x)$ (από 2.4 με εισαγωγή ∀ και x/a)
3. $\neg\exists x\, \neg F(x) \rightarrow \forall x\, F(x)$ (από 2 με εισαγωγή συνεπαγωγής) (ΑΤΟΠΟ)
4. $\neg\neg\exists x\, \neg F(x)$ (από 2.1 με εισαγωγή άρνησης)
5. $\exists x\, \neg F(x)$ (από 4 με απαλοιφή διπλής ¬)

Σε αυτή τη λύση αντί για εισαγωγή ∃, ξεκινάμε με την άρνηση του συμπεράσματος και δείχνουμε ότι δεν μπορεί να ισχύει, δηλαδή εφαρμόζουμε απαγωγή σε άτοπο και μετά εφαρμόζουμε τον κανόνα της εισαγωγής άρνησης. Δηλαδή για να δείξω ότι το 2.1 είναι άτοπο πρέπει να συμπεράνω κάτι που είναι αντίθετο της υπόθεσης (βήμα 3).

b) **$\forall x P(x) \rightarrow Q(a)) \models \exists x P(x) \rightarrow Q(a)$**

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(a))$ Υπόθεση παραγωγής
2. $P(b) \rightarrow Q(a)$ (από 1 με απαλοιφή $\forall$ και b/x)
3. $\exists x P(x) \rightarrow Q(a)$ (από 2 με εισαγωγή $\exists$ και x/b)

c) **$\forall x \exists y(P(x) \rightarrow R(x,y)) \models \forall x(P(x) \rightarrow \exists y R(x,y))$**

1. $\forall x \exists y(P(x) \rightarrow R(x,y))$ (Υπόθεση παραγωγής)
2. Υποπαραγωγή
   - 2.1 $P(a)$ (Υπόθεση υποπαραγωγής)
   - 2.2 $\exists y(P(x) \rightarrow R(x,y))$ (από 1 με απαλοιφή $\forall$ και a/x)
   - 2.3 Υποπαραγωγή
     - 2.3.1 $P(a) \rightarrow R(a,b)$ (Υπόθεση υποπαραγωγής)
     - 2.3.2 $P(a)$ (από 2.1 με επανάληψη)
     - 2.3.3 $R(a,b)$ (από 2.3.1, 2.3.2 με απαλοιφή $\rightarrow$)
     - 2.3.4 $\exists y R(a,y)$ (από 2.3.3 με εισαγωγή $\exists$ και y/b)
   - 2.4 $\exists y R(a,y)$ (από 2.2, 2.3 με απαλοιφή $\exists$)
3. $P(a) \rightarrow \exists y R(a,y)$ (από 2 με εισαγωγή $\rightarrow$)
4. $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y R(x,y))$ (από 2 με εισαγωγή $\forall$ και x/a)