ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ - ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1ο: Περιοδικά Σήματα - 25 μονάδες

Δίνεται το παρακάτω περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα

$$x(t) = 2\cos\left(2\pi 200t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2\pi 500t - \frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(2\pi 600t + \frac{2\pi}{5}\right) \tag{1}$$

(α') **(12.5 μ.)** Βρείτε την περίοδο, T_0, του σήματος και σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης.

(β') **(5 μ.)** Το σήμα $x(t)$ πολλαπλασιάζεται με έναν όρο $e^{j2\pi 200t}$. Πώς μεταβάλλονται τα φάσματα πλάτους και φάσης;[1] Σχεδιάστε τα.

(γ') **(7.5 μ.)** Το σήμα $x(t)$ περνάει από ένα φίλτρο $h(t)$, που έχει μετασχηματισμό Fourier:

$$H(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & f > 530 \text{ Hz} \\ 0, & f \leq 530 \text{ Hz.} \end{cases} \tag{2}$$

Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης του $x(t)$ στην έξοδο του φίλτρου.

Λύση:

(α') Η θεμελιώδης συχνότητα δίνεται από τη σχέση

$$f_0 = \text{Μ.Κ.Δ}\{200, 500, 600\} = 100\text{Hz} \tag{3}$$

και άρα $T_0 = 1/f_0 = 1/100 = 0.01$ δευτερόλεπτα. Το δοθέν σήμα αναπτύσσεται ως

$$x(t) = e^{j2\pi 200t}e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200t}e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 500t}e^{-j\pi/8} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 500t}e^{j\pi/8} + \frac{1}{2}e^{j9\pi/10}e^{j2\pi 600t} + \frac{1}{2}e^{-j9\pi/10}e^{-j2\pi 600t} \tag{4}$$

και το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο Σχήμα 1.

(β') Από την ιδιότητα των Σειρών Fourier

$$e^{j2\pi M f_0 t}x(t) \longleftrightarrow X_{k-M} \tag{5}$$

το φάσμα πλάτους θα μετατοπιστεί κατά 200 Hz δεξιά. Το νέο φάσμα πλάτους φαίνεται στο Σχήμα 2.

(γ') Το φίλτρο κόβει τις συχνότητες μικρότερες των 530 Hz και περνά στην έξοδο τις συχνότητες μεγαλύτερες των 530 Hz, με μεταβολή στο πλάτος τους κατά παράγοντα 0.5. Άρα η έξοδος θα είναι

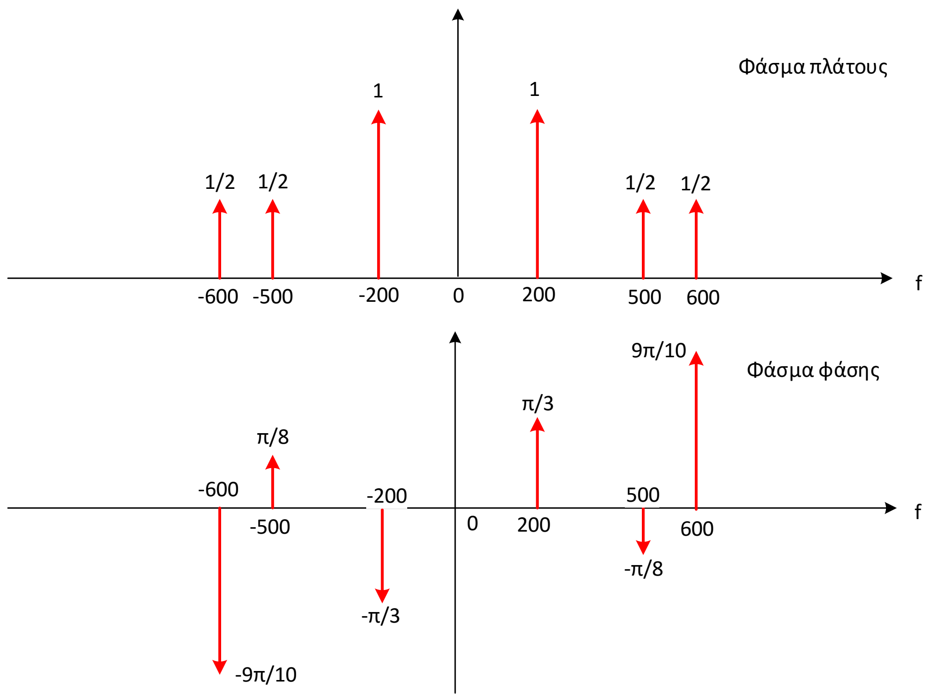
$$y(t) = -\frac{1}{2}\sin\left(2\pi 600t + \frac{2\pi}{5}\right) \tag{6}$$

δηλ. μόνο ο τελευταίος όρος του αθροίσματος περνά από το φίλτρο. Άρα

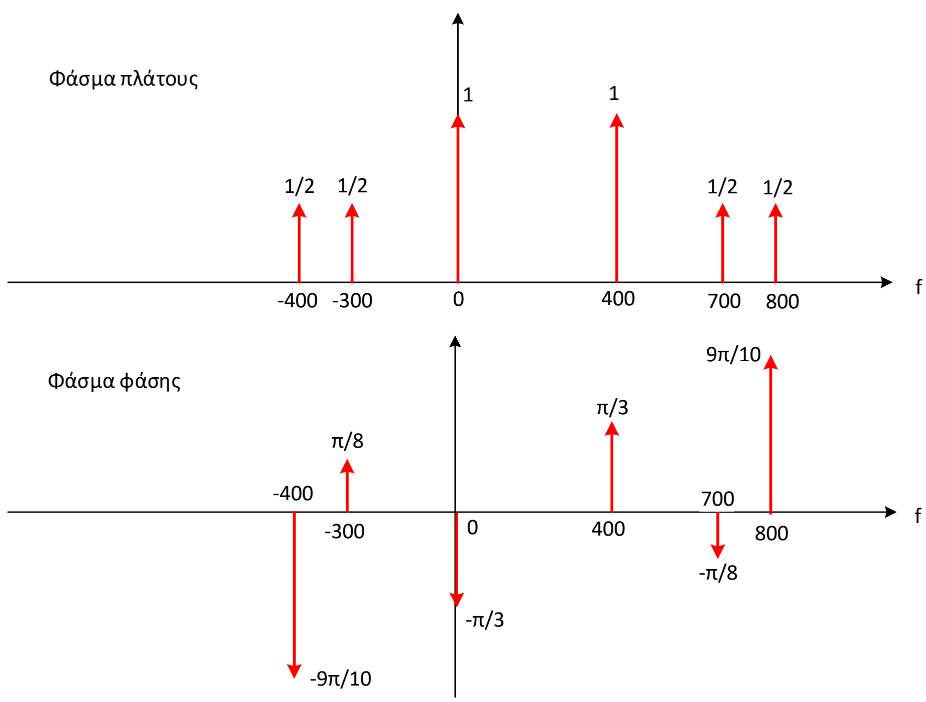
$$y(t) = \frac{1}{4}e^{j9\pi/10}e^{j2\pi 600t} + \frac{1}{4}e^{-j9\pi/10}e^{-j2\pi 600t} \tag{7}$$

Το φάσμα πλάτους και φάσης της εξόδου φαίνεται στο Σχήμα 3.

[1] Δε χρειάζεται καμία πράξη για να απαντήσετε!



Σχήμα 1: Φάσμα πλάτους και φάσης Θέματος 1, ερώτημα (α).



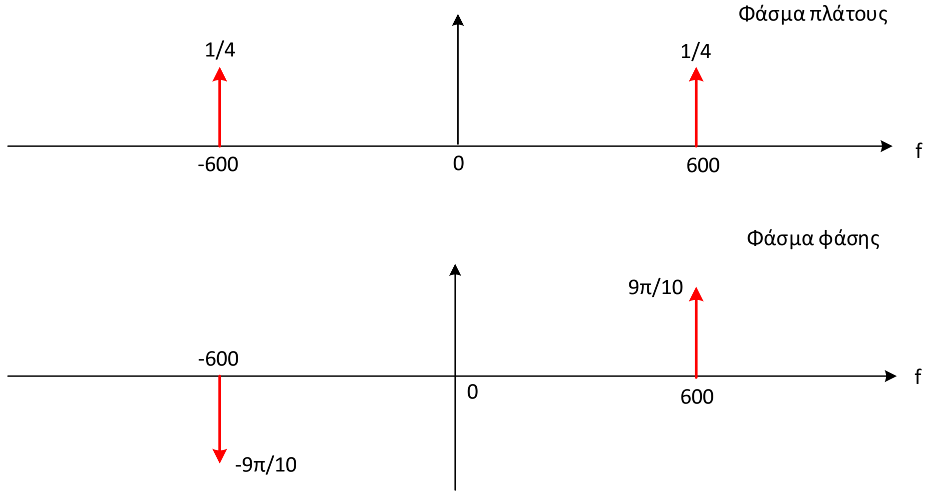
Σχήμα 2: Φάσμα πλάτους και φάσης Θέματος 1, ερώτημα (β).

Θέμα 2ο: Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες - 20 μονάδες

Η Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας, $\Phi_x(f)$, ενός σήματος $x(t)$ δίνεται ως:

$$\Phi_x(f) = 2\mathrm{sinc}(2\mathrm{f}) + \mathrm{sinc}^2(4\mathrm{f}) \tag{8}$$

(α') (**10 μ.**) Βρείτε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, $\phi_x(\tau)$, του σήματος $x(t)$.



Σχήμα 3: Φάσμα πλάτους και φάσης Θέματος 1, ερώτημα (γ).

(β΄) **(10 μ.)** Βρείτε την ενέργεια του σήματος

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Λύση:

(α΄) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης αποτελεί τον αντίστροφο μετασχ. Fourier της Φασματικής Πυκνότητας Ενέργειας. Από γνωστά ζεύγη Fourier, έχουμε

$$\phi_x(\tau) = \text{rect}\left(\frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{4}\text{tri}\left(\frac{\tau}{4}\right) \tag{9}$$

(β΄) Ισχύει ότι

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+0)dt = \phi_x(0) = \text{rect}(0) + \frac{1}{4}\text{tri}(0) = \frac{5}{4} \tag{10}$$

Θέμα 3ο: Διαφορικές Εξισώσεις στο χώρο του μετασχ. Laplace - 30 μονάδες

Δίνεται η παρακάτω διαφορική εξίσωση που περιγράφει ένα *αιτιατό* ΓΧΑ σύστημα:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = 5\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) \tag{11}$$

(α΄) **(10 μ.)** Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$.

(β΄) **(12.5 μ.)** Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$.

(γ΄) **(7.5 μ.)** Μπορείτε να βρείτε το μετασχηματισμό Fourier $H(f)$ του σήματος μέσω του μετασχ. Laplace; Αν ναι, βρείτε τον. Αν όχι, αιτιολογήστε.

Λύση:

(α΄) Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της παραγώγισης, έχουμε

$$s^2Y(s) + 7sY(s) + 12Y(s) = 5sX(s) + 3X(s) \tag{12}$$
$$(s^2 + 7s + 12)Y(s) = (5s + 3)X(s) \tag{13}$$
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5s + 3}{s^2 + 7s + 12} \tag{14}$$
$$H(s) = \frac{5s + 3}{(s + 4)(s + 3)} \tag{15}$$

με $\Re\{s\} > -3$ αφού το σύστημα είναι αιτιατό.

(β΄) Έχουμε

$$H(s) = \frac{5s + 3}{(s + 4)(s + 3)} = \frac{A}{s + 4} + \frac{B}{s + 3} \tag{16}$$
$$= 17\frac{1}{s + 4} - 12\frac{1}{s + 3} \tag{17}$$

και αφού το σήμα είναι αιτιατό

$$h(t) = 17e^{-4t}u(t) - 12e^{-3t}u(t) \tag{18}$$

(γ΄) Αφού ο φανταστικός άξονας $\sigma = 0$ περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης, ο μετασχ. Fourier μπορεί να βρεθεί θέτοντας $s = j2\pi f$ στο μετασχ. Laplace ως

$$H(s)\Big|_{s=j2\pi f} = \frac{5j2\pi f + 3}{(j2\pi f + 4)(j2\pi f + 3)} \tag{19}$$

Θέμα 4ο: Μετασχηματισμός Fourier - 15 μονάδες

Έστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t), & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{20}$$

(α΄) **(10 μ.)** Βρείτε το μετασχ. Fourier, $X(f)$, του παραπάνω σήματος με χρήση συναρτήσεων $\mathrm{sinc}(\cdot)$.

(β΄) **(5 μ.)** Υπολογίστε το $X(0)$ συναρτήσει της συχνότητας f_0.

Λύση:

(α΄) Το σήμα μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\mathrm{rect}\left(\frac{t - 1/2}{1}\right) \tag{21}$$
$$X(f) = \left(\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)\right) * \mathrm{sinc}(f)e^{-j2\pi f\frac{1}{2}} \tag{22}$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(f - f_0)e^{-j\pi(f-f_0)} + \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(f + f_0)e^{-j\pi(f+f_0)} \tag{23}$$

(β') Το $X(0)$ υπολογίζεται ως

$$
\begin{aligned}
X(0) &= \frac{1}{2}\text{sinc}(0-f_0)e^{-j\pi(0-f_0)} + \frac{1}{2}\text{sinc}(0+f_0)e^{-j\pi(0+f_0)} && (24)\\
&= \frac{1}{2}\text{sinc}(-f_0)e^{j\pi f_0} + \frac{1}{2}\text{sinc}(f_0)e^{-j\pi f_0} && (25)\\
&= \text{sinc}(f_0)\cos(\pi f_0) && (26)\\
&= \frac{1}{2\pi f_0}\sin(2\pi f_0) && (27)\\
&= \text{sinc}(2f_0) && (28)
\end{aligned}
$$

λόγω των ιδιοτήτων $\text{sinc}(-x) = \text{sinc}(x)$ και $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Θέμα 5ο: Αυτοσυσχέτιση και Δειγματοληψία - 25 μονάδες

Έστω το σήμα ισχύος

$$
x(t) = \begin{cases} 2\sin(t), & t > 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \qquad (29)
$$

(α') **(5 μ.)** Σχεδιάστε το σήμα $x(t)$.

(β') **(20 μ.)** Θέλουμε να δειγματοληπτήσουμε την *αυτοσυσχέτιση*, $\phi_x(\tau)$, του σήματος $x(t)$. Διαλέξτε μια συχνότητα δειγματοληψίας f_s η οποία να ανακατασκευάζει το σήμα ακριβώς από τα δείγματά του. Αιτιολογήστε την επιλογή σας. Σας δίνεται ότι:

$$
2\sin(\theta)\sin(\phi) = \cos(\theta-\phi) - \cos(\theta+\phi)
$$

<u>Λύση</u>:

Διακρίνοντας τις περιπτώσεις, έχουμε:

- Για $-\tau < 0 \Longleftrightarrow \tau > 0$, είναι

$$
\begin{aligned}
\phi_x(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt && (30)\\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{0}^{T} 4\sin(t)\sin(t+\tau)dt && (31)\\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\Big(\int_{0}^{T}\cos(\tau)dt - \int_{0}^{T}\cos(2t+\tau)dt\Big) && (32)\\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}T\cos(\tau) - \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\Big(\sin(2T+\tau) - \sin(\tau)\Big) && (33)\\
&= \cos(\tau) && (34)
\end{aligned}
$$

  γιατί $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin(x+a) = 0$.

- Για $-\tau > 0 \Longleftrightarrow \tau < 0$, με όμοιο τρόπο βρίσκουμε

$$
\phi_x(\tau) = \cos(\tau) \qquad (35)
$$

Άρα συνολικά

$$
\phi_x(\tau) = \cos(\tau) \quad \forall\tau \qquad (36)
$$

Η συχνότητα του σήματος είναι $f_0 = \frac{1}{2\pi}$, άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Shannon, η συχνότητα δειγματοληψίας πρέπει να είναι μεγαλύτερη από το διπλάσιο αυτής, δηλ.

$$f_s > 2f_0 = \frac{1}{\pi} \tag{37}$$

Επιλέγουμε συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 1$ Hz (ή οποιαδήποτε μεγαλύτερη της f_s).

Συνολικές μονάδες: 115 - Άριστα: 105

Καλή Επιτυχία!