ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΙ

ΘΕΜΑ 1ο. (1,5) Να αποδειχθεί οτι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{όταν } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{όταν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$. Ποιά είναι η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου του γραφήματος της f στο σημείο $(0,0,0)$; Είναι η f συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2$;

ΘΕΜΑ 2ο. (2) Να ευρεθούν τα σημεία τοπικών ακροτάτων και τα σαμάρια της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = x^3 - 2y^2 - 4xy + x.$$

ΘΕΜΑ 3ο. (1,5) Εστω a_1, a_2,...,$a_n \in \mathbb{R}$. Να ευρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

πάνω στην $(n-1)$-διάστατη μοναδιαία σφαίρα

$$S^{n-1} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

ΘΕΜΑ 4ο. (1,5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_B xydxdy$, όπου B είναι το τρίγωνο στο $\mathbb{R}^2$ με κορυφές τα σημεία $(1,0)$, $(0,1)$ και $(1,2)$.

ΘΕΜΑ 5ο. (1,5) Αν $R > 0$ και $0 < a < \frac{\pi}{2}$, να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2, \quad x^2+y^2 \leq z^2 \cdot \tan^2 a, \quad z \geq 0\}.$$

ΘΕΜΑ 6ο. (2) Αν $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 4y^2 \leq 12, \quad x \geq 0\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_B xy^2 dxdy.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ