ΗΥ118: Διακριτά Μαθηματικά

Εαρινό εξάμηνο 2008

Λύσεις Θεμάτων Προόδου, 12/04/2008

Θέμα 1$^{\text{ο}}$: [10 μονάδες]

Έστω *p* η πρόταση "Παρακολουθώ τα μαθήματα", *d* η πρόταση "Διαβάζω πολύ" και *g* ή πρόταση "Γράφω καλά στις εξετάσεις".

(1) **[5]** Γράψτε προτάσεις σε προτασιακό λογισμό με βάση τις *p*, *d* και *g*, που να εκφράζουν το νόημα των παρακάτω προτάσεων:

(a) Παρακολουθώ τα μαθήματα, διαβάζω πολύ και γράφω καλά στις εξετάσεις

(b) Αν παρακολουθώ τα μαθήματα και διαβάζω πολύ, γράφω καλά στις εξετάσεις

(c) Για να γράφω καλά στις εξετάσεις, αρκεί είτε να διαβάζω πολύ είτε να παρακολουθώ τα μαθήματα.

(d) Γράφω καλά στις εξετάσεις αν και μόνο αν παρακολουθώ τα μαθήματα και διαβάζω πολύ.

(e) Είτε παρακολουθώ τα μαθήματα είτε διαβάζω πολύ αλλά όχι και τα δύο. Με αυτή την τακτική, γράφω καλά στις εξετάσεις.

(2) **[5]** Αποδώστε σε όσο το δυνατόν πιο απλή φυσική γλώσσα το νόημα των παρακάτω προτάσεων προτασιακού λογισμού:

(a) $g \rightarrow p \oplus d$

(b) $d \leftrightarrow \neg p$

(c) $(p \wedge d) \oplus (p \vee d)$

(d) $(p \oplus d) \wedge (p \vee d)$

(e) $(p \oplus d) \rightarrow (p \vee d)$

Λύση

(1)

(f) $\mathrm{p} \wedge \mathrm{d} \wedge \mathrm{g}$

(g) $\mathrm{p} \wedge \mathrm{d} \rightarrow \mathrm{g}$

(h) $\mathrm{p} \vee \mathrm{d} \rightarrow \mathrm{g}$

(i) $\mathrm{G} \leftrightarrow \mathrm{p} \wedge \mathrm{d}$

(j) $p \oplus d \rightarrow g$

(2)

(f) Αν γράφω καλά στις εξετάσεις, τότε παρακολουθώ τα μαθήματα και διαβάζω πολύ.

(g) Διαβάζω πολύ αν και μόνο αν δεν παρακολουθώ τα μαθήματα

(h) Ή παρακολουθώ τα μαθήματα, ή διαβάζω πολύ αλλά όχι και τα δύο (δέστε τον πίνακα αληθείας σε σχέση με τις *p*, *d*)

(i) Ή παρακολουθώ τα μαθήματα, ή διαβάζω πολύ αλλά όχι και τα δύο (δέστε τον πίνακα αληθείας σε σχέση με τις *p*, *d*)

(j) Αληθές (δέστε τον πίνακα αληθείας. Εφόσον είναι ταυτολογία, ο πιο εύκολος τρόπος να το πούμε είναι αυτός!)

Θέμα 2ο : [12 μονάδες]

(1) **[6]** Αποδείξτε *χωρίς την χρήση πινάκων αληθείας* ότι η πρόταση $((p\rightarrow q)\wedge(\neg p\rightarrow q))\rightarrow q$ αποτελεί ταυτολογία.

(2) **[6]** Κάποιος είπε πως «Εάν η λογική δεν είναι ταυτόχρονα και χρήσιμη και ενδιαφέρουσα, τότε είναι είτε άχρηστη, είτε αδιάφορη». Έχει δίκιο; Αν ναι, αποδείξτε το, αν όχι αναφέρετε γιατί.

Λύση

(1)

$((p\rightarrow q)\wedge(\neg p\rightarrow q))\rightarrow q$

$\Leftrightarrow ((\neg p\vee q)\wedge(p\vee q))\rightarrow q$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge p)\vee q\rightarrow q$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{F}\vee q\rightarrow q$

$\Leftrightarrow q\rightarrow q$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{T}$

(2)

Έστω προτάσεις p= «Η λογική είναι χρήσιμη» *και* q = «Η λογική είναι ενδιαφέρουσα». Η διατύπωση της πρότασης του ερωτήματος στον προτασιακό λογισμό είναι η ακόλουθη: $\neg(p\wedge q)\rightarrow\neg p\vee\neg q$. Για να αποδείξουμε την πρόταση πρέπει να δείξουμε ότι πρόκειται για ταυτολογία. Πράγματι αυτό ισχύει και μπορούμε να το δείξουμε είτε με τον πίνακα αληθείας της είτε διαπιστώνοντας ότι

$\neg(p\wedge q)\rightarrow\neg p\vee\neg q$

$\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)\rightarrow\neg(p\wedge q)$

Θέτοντας $r=\neg(p\wedge q)$ η παραπάνω πρόταση γίνεται $r\rightarrow r$ το οποίο προφανώς ισχύει.

Θέμα 3^{ο} : [10 μονάδες]

Έστω *Α*, *Β*, *Γ*, *Δ* και *Ε* τα παρακάτω κατηγορήματα, με τη μεταβλητή *x* να ορίζεται στο σύνολο όλων των διαφορετικών αυτοκινήτων, την μεταβλητή *y* να ορίζεται στο σύνολο των επαγγελμάτων και την μεταβλητή *z* στο σύνολο {Αντώνης, Κώστας, Γιάννης}:

$A(x)$ = «Το αυτοκίνητο *x* κατασκευάστηκε στην Ευρώπη»

$B(x)$ = «Το αυτοκίνητο *x* εισάχθηκε στην Ευρώπη»

$C(x)$ = «Το αυτοκίνητο *x* κατασκευάστηκε πριν το 2000»

$D(x)$ = «Το αυτοκίνητο *x* κοστίζει τουλάχιστον 7,000 Ευρώ»

$E(x, y)$= «Ο ιδιοκτήτης του αυτοκινήτου *x* έχει το επάγγελμα *y*»

$Z(x, z)$= «Ο ιδιοκτήτης του αυτοκινήτου *x* ονομάζεται *z*»

Γράψτε προτάσεις του κατηγορηματικού λογισμού για τις ακόλουθες προτάσεις:

(1) «Υπάρχει αυτοκίνητο που κατασκευάστηκε στην Ευρώπη μετά το 2000 και κοστίζει τουλάχιστον 7,000 ευρώ»

(2) «Κανένας ποδοσφαιριστής δεν έχει αυτοκίνητο που να κοστίζει λιγότερο από 7,000 ευρώ»

(3) «Ένα αυτοκίνητο έχει εισαχθεί στην Ευρώπη και κοστίζει λιγότερο από 7,000 ευρώ αν και μόνο αν κατασκευάστηκε πριν το 2000»

(4) «Ο Κώστας έχει ένα μόνο αυτοκίνητο, και αυτό κοστίζει τουλάχιστον 7,000 ευρώ»

(5) «Ο Κώστας έχει ένα μόνο αυτοκίνητο που να κοστίζει τουλάχιστον 7,000 ευρώ»

Λύση

(1) $\exists x(A(x) \wedge \neg C(x) \wedge D(x))$

(2) $\forall x(E(x,$ «Ποδοσφαιριστής»$) \rightarrow D(x))$

(3) $\forall x((B(x) \wedge \neg D(x)) \leftrightarrow C(x))$

(4) $(!\exists x(Z(x,$ «Κώστας»$))) \wedge (\forall r\ (Z(r,$ «Κώστας»$) \rightarrow D(r)))$

(5) $!\exists x((Z(x,$ «Κώστας»$) \wedge D(x))$

Θέμα 4^{ο} : [16 μονάδες]

(1) **[4]** Δύο ακέραιοι λέμε ότι έχουν το ίδιο «parity» αν και οι δύο είναι άρτιοι ή αν και οι δύο είναι περιττοί. Έστω ότι είναι αποδεδειγμένο πως ένας ακέραιος είναι είτε άρτιος, είτε περιττός. Αποδείξτε το παρακάτω θεώρημα: «Αν *x* και *y* είναι δύο ακέραιοι τέτοιοι ώστε ο $x+y$ να είναι άρτιος ακέραιος, τότε οι *x* και *y* έχουν το ίδιο parity».

(2) **[6]** Αποδείξτε ότι εάν ο n είναι θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε είτε $n \bmod 4 = 2$ είτε $n \bmod 4 = 3$, τότε ο n δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Υπενθυμίζεται ότι η πράξη "mod" δίνει το υπόλοιπο της ακεραίας διαίρεσης, π.χ., 14 mod 3 = 2.

(3) **[6]** Αποδείξτε ότι ο αριθμός $\log_{10} 3$ είναι άρρητος

Λύση

(1)

Έστω δύο ακέραιοι x και y όπου x+y άρτιος αριθμός. Έστω επίσης ότι δεν έχουν το ίδιο parity. Αυτό σημαίνει πως ο ένας είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.

(a) Έστω ότι ο άρτιος είναι ο x και ο περιττός είναι ο y. Τότε x+y=(2k)+(2l+1)= 2(k+l)+1 ο οποίος είναι περιττός (άτοπο). Άρα, οι x, y έχουν το ίδιο parity.

(b) (A) Έστω ότι ο άρτιος είναι ο y και ο περιττός είναι ο x. Τότε x+y=(2k+1)+(2l)= 2(k+l)+1 ο οποίος είναι περιττός (άτοπο). Άρα, οι x, y έχουν το ίδιο parity.

Άρα αν x+y – άρτιος, τότε οι x, y έχουν το ίδιο parity.

(2)

Αρκεί να δείξουμε ότι αν ο n είναι τέλειο τετράγωνο, τότε n mod 4 = 0 ή n mod 4 = 1. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ακέραιος k τέτοιος ώστε $n = k^2$. Υπάρχουν τέσσερεις περιπτώσεις:

1. Εάν k mod 4 = 0, τότε k=4q, για κάποιον ακέραιο q. Τότε, $n=k^2=16q^2=4(4q^2)$, δηλαδή n mod 4 = 0.
2. Εάν k mod 4 = 1, τότε k=4q+1, για κάποιο ακέραιο q. Τότε, $n=k^2=16q^2+8q+1 = 4(4q^2+2q)+1$, δηλαδή n mod 4 = 1.
3. Εάν k mod 4 = 2, τότε k=4q+2, για κάποιο ακέραιο q. Τότε, $n = k^2 = 16 q^2 + 16 q + 4 = 4(4 q^2 + 4 q + 1)$, i.e. n mod 4 = 0.
4. Εάν k mod 4 = 3, τότε k = 4q + 3, για κάποιο ακέραιο q. Τότε, $n=k^2=16q^2 +24 q + 9 = 4(4 q^2 + 6 q + 2) + 1$, δηλαδή n mod 4 = 1.

(3)

Έστω ότι ο $\log_{10} 3$ είναι ρητός. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κλάσμα m/n ακεραίων m>0 και n>0 τέτοιο ώστε $\log_{10} 3 = \frac{m}{n}$. Αυτό όμως σημαίνει ότι

$$\log_{10} 3 = \frac{m}{n} \Rightarrow 10^{\frac{m}{n}} = 3 \Rightarrow 10^m = 3^n.$$

Όμως, η τελευταία ισότητα δεν μπορεί να ισχύει γιατί ενώ ο 10^m είναι άρτιος για κάθε ακέραιο m μεγαλύτερο ή ίσο της μονάδας, ο 3^n είναι περιττός για κάθε ακέραιο n μεγαλύτερο ή ίσο της μονάδας. Επομένως, ο $\log_{10} 3$ δεν είναι ρητός.

Θέμα $5^{ο}$: [13 μονάδες]

(1) **[8]** Τα μέλη μίας ομάδας 100 ατόμων ερωτήθηκαν σχετικά με το ποια θεωρούν πως είναι μια καλή ποδοσφαιρική ομάδα. Από αυτούς, 32 ψήφισαν τον «ΟΦΗ», 20 ψήφισαν τον «ΕΡΓΟΤΕΛΗ», 45 ψήφισαν τον «ΑΤΡΟΜΗΤΟ», 15 ψήφισαν και τον «ΟΦΗ» και τον «ΑΤΡΟΜΗΤΟ», 7 ψήφισαν και τον «ΟΦΗ» και τον «ΕΡΓΟΤΕΛΗ», 10 ψήφισαν και τον «ΕΡΓΟΤΕΛΗ» και τον «ΑΤΡΟΜΗΤΟ» και 30 δεν ψήφισαν καμία από τις τρεις αυτές ομάδες.

(a) Βρείτε τον αριθμό των ατόμων που ψήφισαν και τις τρεις αυτές ομάδες.

(b) Βρείτε τον αριθμό των ατόμων που ψήφισαν ακριβώς μία από τις παραπάνω ομάδες.

(2) **[5]** Έστω τα σύνολα $A=\{\{1,2,3\},\{2,3\},\{a,b,c\}\}$ και $B=\{\{a,b,c\},\{1,2\}\}$. Βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς. Εξηγείστε σύντομα την απάντησή σας. (1)$\{a,b\}\subseteq B$, (2)$\{a,b\}\in B$, (3)$\{\{1,2,3\}\}\subseteq A$, (4)$B\subseteq A$, (5)$\varnothing\in A$, (6)$1\in A$, (7)$\{2,3\}\in A$, (8)$\varnothing\in\varnothing$, (9)$\varnothing\subseteq\varnothing$, (10)$\varnothing\subset\varnothing$

Λύση

(1)

Έστω A = 'αυτοί που θεωρούν τον ΟΦΗ καλή ομάδα', B = 'αυτοί που θεωρούν τον ΕΡΓΟΤΕΛΗ καλή ομάδα', C=' αυτοί που θεωρούν τον ΑΤΡΟΜΗΤΟ καλή ομάδα'.

Μας δίνεται:

Σύνολο ψηφισάντων = 100, $|A| = 32$, $|B| = 20$, $|C| = 45$, $|A\cap C| = 15$, $|A\cap B| = 7$, $|B\cap C| = 10$ και $|(\neg A)\cap(\neg B)\cap(\neg C)| = |(\neg(A\cup B\cup C)| = 30$.

(α) Έχουμε

$|A\cup B\cup C| = 100 - |(\neg(A\cup B\cup C)| = 70$ και η αρχή του εγκλεισμού μας δίνει:

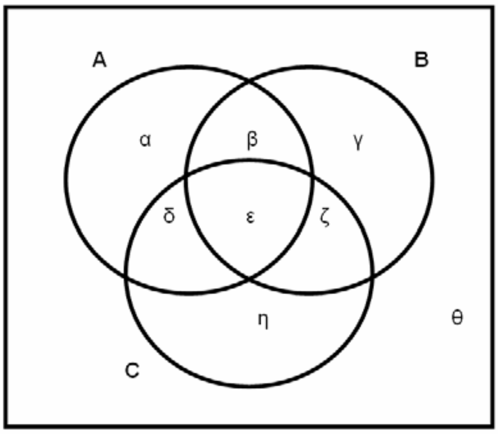
$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C| \Rightarrow$

$70 = 32 + 20 + 45 – 15 – 7 – 10 + |A\cap B\cap C|\Rightarrow$

$|A\cap B\cap C|= 70 – 65 = 5$

Άρα αυτοί που θεωρούν και τις τρεις ομάδες καλές είναι 5.

(β)



Σχήμα 1

Έστω το σχήμα 1 που περιγράφει τα σύνολα A, B και C του προηγούμενου ερωτήματος. Στο σχήμα αυτό φαίνονται οι οκτώ περιοχές στις οποίες τα τρία σύνολα χωρίζουν το επίπεδο. Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει ότι:

$|A \cup B \cup C| = \alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta = 70$

$|A| = \alpha+\beta+\delta+\varepsilon = 32$

$|B| = \beta+\varepsilon+\gamma+\zeta = 20$

$|C| = \delta+\varepsilon+\zeta+\eta = 45$

$|A \cap B \cap C| = \varepsilon = 5$

$|A \cap C| = \delta+\varepsilon = 15 \Rightarrow \delta = 10$

$|A \cap B| = \beta+\varepsilon = 7 \Rightarrow \beta = 2$

$|B \cap C| = \zeta+\varepsilon = 10 \Rightarrow \zeta = 5$

Από τα παραπάνω δεδομένα (8 εξισώσεις με 8 αγνώστους, μπορεί να προκύψει η τιμή για καθένα από τα α, β, γ, δ, ε, ζ, η, και θ) και επομένως και για το α+γ+η το οποίο ζητάμε (=48).

Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής:

Ζητάμε το $\alpha+\gamma+\eta = (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta) - (\beta+\delta+\varepsilon+\zeta) = |A \cup B \cup C| - (2+10+5+5) = 70-22 = 48$.

(2)

(1) Όχι (τα a, b δεν ανήκουν στο B)

(2) Όχι (το σύνολο {a, b} δεν είναι στοιχείο του B)

(3) Ναι (το σύνολο {1, 2, 3} είναι στοιχείο του A κι επομένως το {{1, 2, 3}} είναι υποσύνολο του A)

(4) Όχι (το {1,2} ανήκει στο B αλλά όχι στο A)

(5) Όχι (το κενό σύνολο δεν είναι στοιχείο του A)

(6) Όχι (το 1 δεν είναι στοιχείο του A)

(7) Ναι

(8) Όχι (το κενό σύνολο δεν έχει κανένα στοιχείο)

(9) Ναι (το κενό σύνολο είναι υποσύνολο όλων των συνόλων)

(10) Όχι (το κενό σύνολο είναι υποσύνολο του εαυτού του, αλλά όχι γνήσιο υποσύνολο.

Θέμα 6^o : [14 μονάδες]

(1) **[7]** Έστω τρία σύνολα A, B, C, υποσύνολα ενός συνόλου U. Αποδείξτε ότι εάν $A \cap B = A \cap C$ και $\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap C$, τότε $B=C$.

(2) **[7]** Έστω ότι $A=\{\varnothing, b\}$. Κατασκευάστε τα παρακάτω σύνολα: (1)$A-\varnothing$, (2)$\{\varnothing\}-A$, (3)$A \cup \mathrm{P}(A)$, (4)$A \cap \mathrm{P}(A)$, (5)$A \oplus \mathrm{P}(A)$.

Λύση

(1)

$A \cap B = A \cap C$ και $\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap C$ επομένως,

$$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cap C) \cup (\overline{A} \cap C) \Rightarrow$$
$$((A \cap B) \cup \overline{A}) \cap ((A \cap B) \cup B) = ((A \cap C) \cup \overline{A}) \cap ((A \cap C) \cup C) \Rightarrow$$
$$((A \cup \overline{A}) \cap (B \cup \overline{A})) \cap ((A \cup B) \cap (B \cup B)) = ((A \cup \overline{A}) \cap (C \cup \overline{A})) \cap ((A \cup C) \cap (C \cup C)) \Rightarrow$$
$$(B \cup \overline{A}) \cap B = (C \cup \overline{A}) \cap C \Rightarrow$$
$$B = C$$

(2)

1. $A - \varnothing = A$
2. $\{\varnothing\} - A = \varnothing$
3. $A \cup P(A) = \{\varnothing, b\} \cup \{ \varnothing, \{\varnothing\}, \{b\}, \{\varnothing, b\}\} = \{\varnothing, b, \{\varnothing\}, \{b\}, \{\varnothing, b\}\}$
4. $A \cap P(A) = \{\varnothing, b\} \cap \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{b\}, \{\varnothing, b\}\} = \{\varnothing\}$
5. $A \oplus P(A) = \{\varnothing, b\} \oplus \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{b\}, \{\varnothing, b\}\} = \{ b, \{\varnothing\}, \{b\}, \{\varnothing, b\}\}$

Θέμα $7^{ο}$: [11 μονάδες]

Αποδείξτε επαγωγικά ότι $\forall n \geq 1$, ($n \in$ N), ισχύει ότι ο $3^{n} > n^{2}$.

Λύση

Βάση της επαγωγής: Για n=1, 3>1, ισχύει.

Επαγωγική υπόθεση: έστω ότι $3^{k} > k^{2}$

Επαγωγικό βήμα: Πρέπει να δείξουμε ότι $3^{k+1} > (k+1)^{2}$

$3^{k+1} - (k + 1)^2 = 3 \times 3^k - (k + 1)^2$

$= 3(3^k - k^2 + k^2) - (k + 1)^2$

$= 3(3^k - k^2) + 3k^2 - k^2 - 2k - 1$

$= 3(3^k - k^2) + k^2 + k^2 - 2k - 1$

$= 3(3^k - k^2) + k^2 + (k - 1)^2 - 2$.

$= 3(3^k - k^2) + (k - 1)^2 + (k^2 - 2) > 0$ γιατί

- Ο πρώτος όρος είναι θετικός εξαιτίας της επαγωγικής υπόθεσης
- Ο $2^{ος}$ όρος είναι τετράγωνο κι επομένως είναι κι αυτός θετικός.
- Εάν k >= 2 τότε και το $k^2 - 2$ είναι θετικό.

Επομένως $3^{k+1} - (k + 1)^2 > 0$ κι επομένως, $3^{k+1} > (k+1)^{2}$

Επομένως, από την αρχή της επαγωγής, προκύπτει ότι $\forall n \geq 1$, ($n \in$ N), ισχύει ότι $3^{n} > n^{2}$.

Θέμα $8^{ο}$: [14 μονάδες]

Αποδείξτε επαγωγικά ότι $\forall n \geq 1$ ($n \in$ N), ισχύει:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Λύση

Για n=1 ισχύει αφού $\sum_{j=1}^{1} \frac{1}{j^2} = 1 \leq 1 = 2 - \frac{1}{1}$

Έστω ότι ισχύει για n=k, δηλαδή $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{k}$

Πρέπει να δείξουμε ότι $\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{k+1}$

Πράγματι, $\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{j^2}=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\leq 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$

$$\leq 2-\frac{(k+1)^2-k}{k(k+1)^2}\leq 2-\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}\leq 2-\frac{k^2+k}{k(k+1)^2}=2-\frac{k(k+1)}{k(k+1)^2}=2-\frac{1}{(k+1)^2}$$