

**HY 180 - Λογική
Εαρινό Εξάμηνο 2004**

Διδάσκων: Δημήτρης Πλεξουσάκης

Τελική Εξέταση

18 Ιουνίου 2004

Διάρκεια: 3 ώρες

1. [25] Συντακτικό και σημασιολογία του Προτασιακού Λογισμού.

- a. [10] Έστω ϕ μια πρόταση του Προτασιακού Λογισμού, c ο αριθμός των δυαδικών συνδετικών στην ϕ και s ο αριθμός των προτασιακών μεταβλητών στην ϕ . Δείξτε με τυπικό τρόπο ότι $s = c+1$
- b. [5] Έστω ϕ και ψ προτάσεις του Προτασιακού Λογισμού. Δείξτε τυπικά ότι η ϕ λογικά συνεπάγεται την ψ αν και μόνο αν η πρόταση $\phi \wedge \neg\psi$ είναι αντινομία.
- c. [10] Έστω Σ ένα σύνολο προτάσεων του Προτασιακού Λογισμού και α, β προτάσεις του Προτασιακού Λογισμού. Εξετάστε αν τα παρακάτω είναι αληθή (αποδείξτε τα ή δώστε αντιπαράδειγμα):
 - i. Αν το Σ λογικά συνεπάγεται την α ή το Σ λογικά συνεπάγεται την β , τότε το Σ λογικά συνεπάγεται την $\alpha \vee \beta$.
 - ii. Αν το Σ λογικά συνεπάγεται την $\alpha \vee \beta$ τότε το Σ λογικά συνεπάγεται την α ή το Σ λογικά συνεπάγεται την β .

2. [15] Μορφολογική παραγωγή στον Προτασιακό Λογισμό. Αποδείξτε με χρήση μορφολογικής παραγωγής το θεώρημα:

$$((P \rightarrow Q) \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow P) \rightarrow P)$$

3. [20] Κατασκευή Μοντέλων και Μέθοδος Επίλυσης για τον Προτασιακό Λογισμό.

Χρησιμοποιείτε τις μεθόδους της Κατασκευής Μοντέλων και της Επίλυσης για να εξετάσετε την ικανοποιησιμότητα του συνόλου:

$$\{(P \leftrightarrow (Q \rightarrow R)) \wedge (P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow \neg R), \neg(((P \rightarrow Q) \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg Q)\}$$

4. [20] Σημασιολογία του Κατηγορηματικού Λογισμού.

- a. Για την πρόταση $\forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow \exists z (P(x,z) \wedge P(z,y)))$ δώστε μια ερμηνεία η οποία να την καθιστά ψευδή.
- b. Για την πρόταση $\neg \forall y \exists x (Q(y) \wedge \neg P(x))$ δώστε μια ερμηνεία η οποία να την καθιστά αληθή.

Θεωρείστε ως πεδίο των ζητούμενων ερμηνειών τους φυσικούς αριθμούς.

5. [20] Μορφολογική παραγωγή στον Κατηγορηματικό Λογισμό.

Αποδείξτε με χρήση μορφολογικής παραγωγής ότι οι ακόλουθες εξαγωγές συμπερασμάτων είναι έγκυρες:

- a. $\forall x \exists y \forall z P(x,y,z) / \forall x \exists y P(x,y,x)$
- b. $\forall x (P(x) \rightarrow \exists y R(x,y)) / \forall x \exists y (P(x) \rightarrow R(x,y))$