ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

ΕΞΕΤΑΣΗ ΠΡΟΟΔΟΥ - ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Διάρκεια: 3 ώρες

Ημερομηνία: 2/4/2016

Θέμα 1ο - Κατηγορίες Συστημάτων - 20 μονάδες
Ελέγξτε αναλυτικά αν το παρακάτω σύστημα

$$y(t) = -x(t) + e^{x(2-t)}$$

είναι

(α΄) **(8 μ.)** χρονικά αμετάβλητο

(β΄) **(8 μ.)** ευσταθές

(γ΄) **(4 μ.)** αιτιατό

Λύση:

(α΄) Για είσοδο $x(t-t_0)$, η έξοδος είναι

$$y'(t) = T\{x(t-t_0)\} = -x(t-t_0) + e^{x(2-(t-t_0))}$$

Η καθυστέρηση της εξόδου κατά t_0 δίνεται ως

$$y(t-t_0) = -x(t-t_0) + e^{x(2-(t-t_0))} = y'(t)$$

άρα το σύστημα είναι Χ.Α.

(β΄) Αν η είσοδος είναι φραγμένη

$$|x(t)| < B_x$$

τότε η έξοδος είναι

$$|y(t)| = |-x(t) + e^{x(2-t)}| \leq |x(t)| + |e^{x(2-t)}| < B_x + e^{B_x} = B_y$$

άρα είναι ευσταθές.

(γ΄) Δεν είναι αιτιατό, γιατί για να βρεθεί, για παράδειγμα, η έξοδος $y(t)$ τη χρονική στιγμή $t=0$, απαιτείται η χρονική στιγμή $t=2$ της εισόδου, δηλ.

$$y(0) = -x(0) + e^{x(2)}$$

πράγμα που κάνει το σύστημά μας μη αιτιατό.

Θέμα 2ο - ΓΧΑ συστήματα με μη περιοδική είσοδο - 25 μονάδες
Έστω το σήμα

$$x(t) = -2\textbf{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$$

το οποίο εμφανίζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση

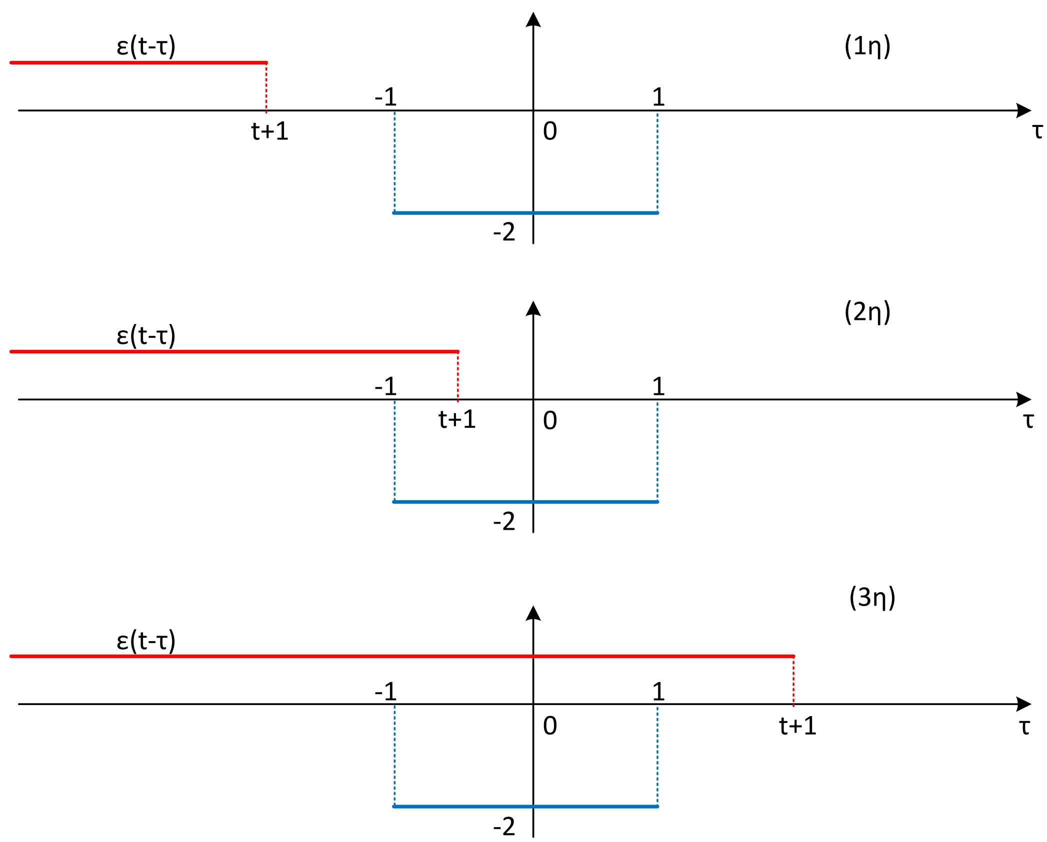
$$h(t) = \epsilon(t+1)$$

(α΄) **(15 μ.)** Υπολογίστε την έξοδο του συστήματος, $y(t)$.

(β΄) **(10 μ.)** Βρείτε τους μετασχηματισμούς Fourier, $X(f)$, $H(f)$, των $x(t), h(t)$, αντίστοιχα.

Λύση:

(α΄) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Περιπτώσεις συνέλιξης

Είναι

$$\begin{aligned}
\bullet y(t) &= 0,\ \ t+1 < -1 \Longleftrightarrow t < -2 \\
\bullet y(t) &= \int_{-1}^{t+1} (-2) \times 1 d\tau = -2\tau\Big|_{-1}^{t+1} \\
&= -2(t+1) + 2 \times (-1) = -2(t+1) - 2 = -2t - 4,\ \ -2 \leq t < 0 \\
\bullet y(t) &= \int_{-1}^{1} (-2) \times 1 d\tau = -2\tau\Big|_{-1}^{1} = -2 \times 1 + 2 \times (-1) = -2 - 2 = -4,\ \ t \geq 0
\end{aligned}$$

Άρα συνολικά

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < -2 \\ -2(t+2), & -2 \leq t < 0 \\ -4, & t \geq 0 \end{cases}$$

(β΄) Είναι (από πίνακες και ιδιοτητες)

$$X(f) = -2 \times 2\text{sinc}(2f) = -4\text{sinc}(2f)$$

και

$$H(f) = \Big(\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}\Big)e^{j2\pi f} = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{e^{j2\pi f}}{j2\pi f}$$

Θέμα 3ο - ΓΧΑ Συστήματα με περιοδική είσοδο - 15 μονάδες
Έστω το σήμα
$$x(t) = 3\cos(4t + \pi/3)$$
το οποίο παρουσιάζεται ως είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα με απόκριση σε συχνότητα
$$H(f) = \frac{4}{4 + (2\pi f)^2}$$
Βρείτε την έξοδο $y(t)$ του συστήματος.

Λύση:
Έχουμε δείξει ότι ένα περιοδικό σήμα σε μορφή αθροίσματος ημιτόνων περνά από ένα ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνότητας $H(f)$ ως
$$y(t) = X_0 H(0) + \sum_{k=1}^{N} 2|X_k||H(f_k)|\cos(2\pi f_k t + \phi_k + \theta(f_k))$$
άρα η έξοδος είναι
$$y(t) = 3 \times |H\Big(\frac{4}{2\pi}\Big)|\cos\Big(4t + \pi/3 + \theta\Big(\frac{4}{2\pi}\Big)\Big)$$
με
$$\Big|H\Big(\frac{4}{2\pi}\Big)\Big| = \frac{1}{5}$$
και
$$\theta\Big(\frac{4}{2\pi}\Big) = 0$$
αφού το $H(f)$ είναι πραγματικό και θετικό $\forall f$. Άρα
$$y(t) = \frac{3}{5}\cos(4t + \pi/3)$$

Θέμα 4ο - Σειρές Fourier και Μετασχηματισμός Fourier - 35 μονάδες

Έστω το περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα $x(t)$ που δίνεται σε μια περίοδό του ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{2t}{T_0}, & 0 \le t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} \le t < T_0 \end{cases}$$

(α΄) **(2.5 μ.)** Σχεδιάστε το $x_{T_0}(t)$ (μια περίοδο) στο χρόνο.

(β΄) **(5 μ.)** Βρείτε το $\dfrac{d}{dt}x_{T_0}(t)$ και σχεδιάστε το.

(γ΄) **(7.5 μ.)** Δείξτε ότι ο μετασχ. Fourier, $X_{T_0}(f)$, του $x_{T_0}(t)$, είναι

$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f}\Big(1 - \mathrm{sinc}\Big(\frac{fT_0}{2}\Big)e^{-j\pi f T_0/2}\Big)$$

Hint: Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα της παραγώγισης.

(δ΄) **(2.5 μ.)** Σχεδιάστε την παράγωγο, $\dfrac{dx(t)}{dt}$, ολόκληρου του περιοδικού σήματος στο χρόνο.

(ε΄) **(5 μ.)** Γράψτε την παράγωγο, $\dfrac{dx(t)}{dt}$, του περιοδικού σήματος ως άθροισμα δυο περιοδικών σημάτων, και σχεδιάστε τα.

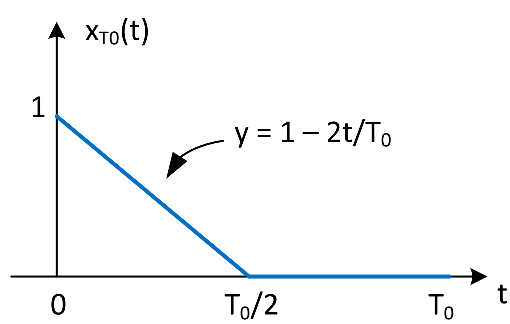
(ϛ΄) **(12.5 μ.)** Δείξτε ότι οι συντελεστές Fourier, X_k, του περιοδικού σήματος $x(t)$ δίνονται ως

$$X_k = \frac{1}{2\pi^2 k^2}\Big(1 - (-1)^k\Big) - j\frac{1}{2\pi k}$$

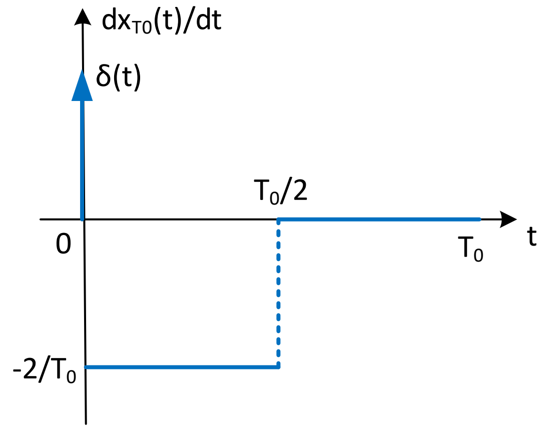
Hint: Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα της παραγώγισης.

Λύση:

(α΄) Η γραφική παράσταση του $x_{T_0}(t)$ φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Σήμα $x_{T_0}(t)$



Σχήμα 3: Σήμα $\frac{dx_{T_0}(t)}{dt}$

(β΄) Το σήμα αποτελείται από μια πλάγια ευθεία, ενώ υπάρχει και μια ασυνέχεια στη θέση $t = 0$. Η παράγωγος λοιπόν θα είναι όπως στο Σχήμα 3. Η παράγωγος γράφεται ως

$$\frac{dx_{T_0}(t)}{dt} = \delta(t) - \frac{2}{T_0}\text{rect}\Big(\frac{t - \frac{T_0}{4}}{\frac{T_0}{2}}\Big)$$

(γ΄) Η παραπάνω παράγωγος έχει μετασχ. Fourier

$$F\{\frac{dx_{T_0}(t)}{dt}\} = F\Big\{\delta(t) - \frac{2}{T_0}\text{rect}\Big(\frac{t - \frac{T_0}{4}}{\frac{T_0}{2}}\Big)\Big\} = 1 - \frac{2}{T_0}\frac{T_0}{2}\text{sinc}\Big(f\frac{T_0}{2}\Big)e^{-j2\pi f\frac{T_0}{4}}$$

δηλ.

$$F\{\frac{dx_{T_0}(t)}{dt}\} = 1 - \text{sinc}\Big(f\frac{T_0}{2}\Big)e^{-j\pi f\frac{T_0}{2}}$$

Από την ιδιότητα της παραγώγισης

$$F\{\frac{dx_{T_0}(t)}{dt}\} = j2\pi f X_{T_0}(f)$$

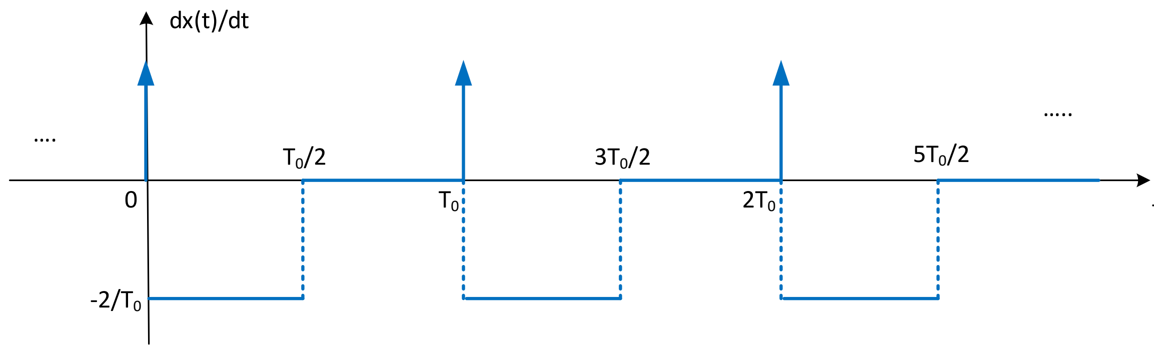
έχουμε

$$X_{T_0}(f) = \frac{1}{j2\pi f}F\{\frac{dx_{T_0}(t)}{dt}\} = \frac{1}{j2\pi f}\Big(1 - \text{sinc}\Big(f\frac{T_0}{2}\Big)e^{-j\pi f\frac{T_0}{2}}\Big)$$

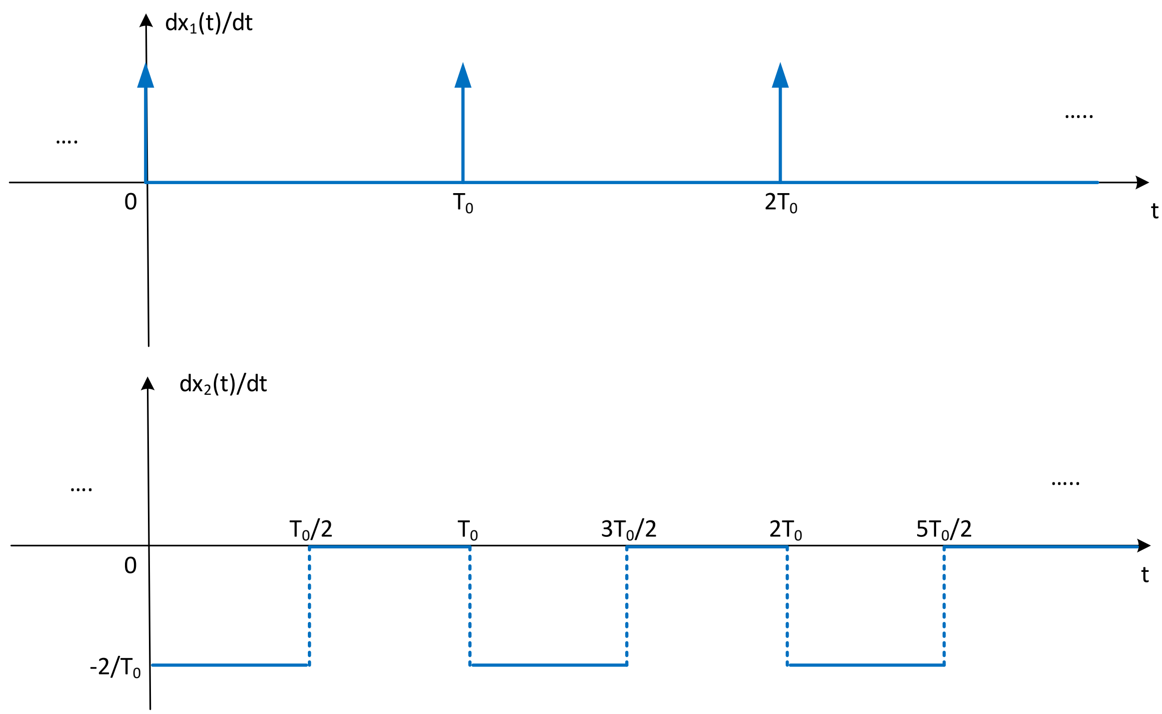
(δ΄) Η παράγωγος ολόκληρου του περιοδικού σήματος φαίνεται στο Σχήμα 4.

(ε΄) Η παράγωγος μπορεί να χωριστεί σε δυο περιοδικά σήματα, όπως αυτά στο Σχήμα 5. Τα σήματα αυτά γράφονται ως

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t - kT_0)\\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Big(-\frac{2}{T_0}\Big)\text{rect}\Big(\frac{t-(4k+1)\frac{T_0}{4}}{T_0/2}\Big)\end{aligned}$$



Σχήμα 4: Σήμα $\frac{dx(t)}{dt}$



Σχήμα 5: Σήματα $\frac{dx_1(t)}{dt}$ και $\frac{dx_2(t)}{dt}$

(ϛ΄) Το περιοδικό σήμα $y(t) = \frac{dx_1(t)}{dt}$ έχει συντελεστές Fourier

$$Y_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \times 1$$

από γνωστή ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα, άρα

$$Y_k = \frac{1}{T_0}$$

Όμοια, οι συντελεστές Fourier του $z(t) = \frac{dx_2(t)}{dt}$ είναι

$$Z_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \Big(-\frac{2}{T_0}\Big)\mathrm{rect}\Big(\frac{t - \frac{T_0}{4}}{T_0/2}\Big) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

δηλ.

$$Z_k = -\frac{2}{T_0^2}\int_0^{T_0/2} e^{-j2\pi k f_0 t}dt = -\frac{2}{T_0^2}\frac{1}{(-j2\pi k f_0)}e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{T_0/2} = \frac{1}{j\pi k T_0}(e^{-j\pi k}-1) = \frac{1}{j\pi k T_0}((-1)^k-1)$$

Οπότε οι συντελεστές Fourier του σήματος της παραγώγου είναι

$$X_k^d = Y_k + Z_k = \frac{1}{T_0} + \frac{1}{j\pi k T_0}((-1)^k - 1)$$

Από την ιδιότητα της παραγώγισης, ξέρουμε ότι οι συντελεστές αυτοί ισούνται με

$$j2\pi k f_0 X_k$$

όπου X_k οι αρχικοί συντελεστές Fourier (της παράγουσας). Άρα

$$X_k = \frac{1}{j2\pi k f_0}\Big(\frac{1}{T_0} + \frac{1}{j\pi k T_0}((-1)^k - 1)\Big) = \frac{1}{j2\pi k} + \frac{1}{j^2 2\pi^2 k^2}((-1)^k - 1)$$

που μπορεί να γραφεί ως

$$X_k = -\frac{j}{2\pi k} - \frac{1}{-2\pi^2 k^2}((-1)^k - 1) = \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1 - (-1)^k) - \frac{j}{2\pi k}$$

Θέμα 5ο - Σειρές Fourier - 25 μονάδες

Έστω το περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα $x(t)$ με συντελεστές Fourier

$$X_k = \frac{2}{\pi^2 k^2} e^{-jk\pi}, \;\; k \neq 0$$

και

$$X_0 = \frac{1}{3}$$

(α΄) **(10 μ.)** Δείξτε ότι η ισχύς, P_x, του περιοδικού σήματος ισούται με $P_x = \frac{1}{5}$.

(β΄) **(15 μ.)** Τι ποσοστό της συνολικής ισχύος του σήματος είναι κατανεμημένο στους τρεις πρώτους όρους της τριγωνομετρικής Σειράς Fourier;

Δίνονται τα εξής:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \qquad \frac{17}{16}\left(\frac{8}{\pi^4}\right) \approx 0.087125 \qquad \frac{1}{9} \approx 0.111$$

Λύση:

(α΄) Η ισχύς του σήματος μπορεί να δοθεί από το θεώρημα του Parseval κατ΄ ευθείαν στο χώρο του Fourier, δηλ.

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = X_0^2 + \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{2}{\pi^2 k^2} e^{-jk\pi}\right|^2$$

Όμως

$$\left|\frac{2}{\pi^2 k^2} e^{-jk\pi}\right|^2 = \frac{4}{\pi^4 k^4}$$

άρα

$$P_x = \frac{1}{9} + \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{\pi^4 k^4} = \frac{1}{9} + \frac{4}{\pi^4} \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{9} + \frac{8}{\pi^4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$$

και από τις δοσμένες σχέσεις, θα είναι

$$P_x = \frac{1}{9} + \frac{8}{\pi^4}\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{9} + \frac{8}{90} = \frac{1}{5}$$

(β΄) Οι τρεις πρώτοι όροι της τριγωνομετρικής σειράς Fourier είναι από 0 ως 2, άρα θα πρέπει να αθροίσουμε την ισχύ των

$$|X_{\pm 1}|, |X_{\pm 2}|, X_0$$

Άρα

$$P_{0\to 2} = X_0^2 + 2|X_1|^2 + 2|X_2|^2 = \frac{1}{9} + 2\frac{4}{\pi^4} + 2\frac{4}{16\pi^4}$$

οπότε, κάνοντας τις πράξεις,

$$P_{0\to 2} = \frac{1}{9} + \frac{8}{\pi^4} + \frac{8}{16\pi^4} = \frac{1}{9} + \frac{8}{\pi^4}\left(1 + \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{9} + \frac{8}{\pi^4}\frac{17}{16} \approx 0.111 + 0.087125 = 0.198$$

Τέλος, το ποσοστό της ισχύς που βρίσκεται στους τρεις πρώτους όρους της τριγωνομετρικής σειράς Fourier είναι

$$P(\%) = \frac{P_{0\to 2}}{P_x} = \frac{0.198}{0.2} = 99\%$$