ΗΥ119 - ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΑΣΚΗΣΗ 1

Η άσκηση θα παραδοθεί ηλεκτρονικά στη σελίδα του μαθήματος στο http://elearn.uoc.gr/.
Η καταληκτική προθεσμία παράδοσης είναι την Πέμπτη, 06/03/2014 στις 23:55.

Θεωρητικές Ασκήσεις

Άσκηση 1

Περιγράψτε την τομή των τριών επιπέδων $u + v + w + z = 6$ και $u + w + z = 4$ και $u + w = 2$ (όλα στον τετραδιάστατο χώρο). Είναι μια ευθεία, ένα σημειο ή το κενό σύνολο; Ποια είναι η τομή εάν συμπεριληφθεί το τέταρτο επίπεδο $u = -1$;

Άσκηση 2

Οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} \alpha x + 2y &= 0 \\ 2x + \alpha y &= 0 \end{aligned}$$

έχουν σίγουρη λύση $x = y = 0$. Για ποιές τιμές του α υπάρχει ολόκληρη ευθεία λύσεων;

Άσκηση 3

Λύστε με τη μέθοδο της απαλοιφής το σύστημα:

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 3x + 6y &= 18 \end{aligned}$$

Σχεδιάστε το σχήμα που παριστά κάθε εξίσωση σαν μία ευθεία του επιπέδου x, y. Οι ευθείες τέμνονται στη λύση. Προσθέστε επίσης ακόμα μια ευθεία, το γράφημα της νέας δεύτερης εξίσωσης που προκύπτει με την απαλοιφή.

Άσκηση 4

Χρησιμοποιήστε απαλοιφή για να λύσετε τα

$$\begin{aligned} u + v + w &= 6 \\ u + 2v + 2w &= 11 \\ 2u + 3v - 4w &= 3 \end{aligned} \qquad \text{και} \qquad \begin{aligned} u + v + w &= 7 \\ u + 2v + 2w &= 10 \\ 2u + 3v - 4w &= 3 \end{aligned}$$

Άσκηση 5

Υπολογίστε το γινόμενο

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Βρείτε μία λύση x του συστήματος $Ax = 0$ γιάυτόν τον πίνακα A και με μηδενικά στη δεξιά πλευρά των τριών εξισώσεων. Μπορείτε να βρείτε περισσότερες από μία λύσεις·

Άσκηση 6

Το γινόμενο δύο κάτω τριγωνικών πινάκων είναι πάλι κάτω τριγωνικός (όλα τα στοιχεία υπεράνω της διαγωνίου είναι μηδέν). Επαληθεύστε το με ένα παράδειγμα 3 επί 3 και εξηγείστε πώς αυτό έπεται από τους νόμους του πολλαπλασιασμού πινάκων.

Άσκηση 7

Παραγοντοποιήστε τον A σε LU, και γράψτε το άνω τριγωνικό σύστημα $Ux = c$ που εμφανίζεται μετά την απαλοιφή, για το

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 8

Ποιες τιμές των a, b, c οδηγούν σε εναλλαγές γραμμών και ποιές κάνουν τους πίνακες ιδιόμορφους·

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 8 & 3 \\ 0 & b & 5 \end{bmatrix} \text{ και } A = \begin{bmatrix} c & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 9

Βρείτε τους αντίστροφους (δεν απαιτείται ειδικό σύστημα) των

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Άσκηση 10

Υπό ποιες συνθήκες για τα στοιχεία του είναι ο A αντιστρέψιμος αν

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ f & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ή} \quad A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$$

Προγραμματιστική άσκηση

Στην άσκηση αυτή θα φτιάξετε μια συνάρτηση στο MATLAB που κάνει πολυωνυμική παρεμβολή. Η πολυωνυμική παρεμβολή είναι μία επέκταση της γραμμικής παρεμβολής.

Ας υποθέσουμε ότι θέλετε να βρείτε ένα πολυώνυμο βαθμού 3 που να περνάει από τα σημεια $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ και (x_4, y_4). Δηλαδή, θέλετε ένα πολυώνυμο με συντελεστές $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$:

$$P_3(x) = \alpha_3 x^3 + a_4 x^2 + \alpha_1 x + a_0$$

για το οποιο να ισχύει:

$$\begin{aligned} \alpha_3 x_1^3 + \alpha_2 x_1^2 + \alpha_1 x_1 + \alpha_0 = y_1 \\ \alpha_3 x_2^3 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_1 x_2 + \alpha_0 = y_2 \\ \alpha_3 x_3^3 + \alpha_2 x_3^2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_0 = y_3 \\ \alpha_3 x_4^3 + \alpha_2 x_4^2 + \alpha_1 x_4 + \alpha_0 = y_4 \end{aligned}$$

Για να βρούμε τους συντελεστές αυτούς, πρέπει να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

Στη γενική περίπτωση, για να βρει κανείς το πολυώνυμο βαθμού n $P_n(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ που περνάει από τα σημεία $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1})$ θα πρέπει να λύσει το γραμμικό σύστημα:

$$Aw = y, \text{ όπου}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \ldots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \ldots & x_{n+1} & 1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} \text{ και } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$$

Βήμα 1

Στην άσκηση αυτή, πρέπει να υλοποιήσετε τη συνάρτηση fitPolynomial(x, y). Η συνάρτηση αυτή θα πάιρνει σαν όρισμα τις συντεταγμένες των σημείων $(x_1, y_1) \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ με τη μορφή διανυσμάτων $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]^T$ και $[y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}]^T$ και θα επιστρέφει τους συντελεστές το πολυωνύμου βαθμού n για το οποίο $P_n(x_i) = y_i$ για $i = 1, \ldots, n+1$. Συγκεκριμένα, η συνάρτηση θα παιρνει σαν όρισμα:

1. Ένα διάνυσμα-στήλη με $(n+1)$ γραμμές που αντιστοιχούν σε $(n+1)$ τιμές των x_i.

2. Ένα διάνυσμα-στήλη με $(n+1)$ γραμμές που αντιστοιχούν σε $(n+1)$ τιμές των y_i.

Η συνάρτηση θα πρέπει:

1. Να κασκευάζει τον πίνακα A,

$$A = \begin{bmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \ldots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \ldots & x_{n+1} & 1 \end{bmatrix}$$

2. Να λύνει το γραμμικό σύστημα $Aw = y$.

3. Να επιστρέφει το διάνυσμα w με τους $n+1$ συντελεστές του πολυωνύμου $P_n(x)$.

Ενα παράδειγμα κλήσης της συνάρτησης είναι: w = fitPolynomial([1;3;4], [6;14;21]); Το w που επιστρέφει ο αλγόριθμος θα πρέπει να έιναι οι συντελεστες του πολυωνύμου $P_2(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ για το οποιο

$$\begin{aligned} \alpha_2 * 1^2 + \alpha_1 * 1 + \alpha_0 &= 6 \\ \alpha_2 * 3^2 + \alpha_1 * 3 + \alpha_0 &= 14 \\ \alpha_2 * 4^2 + \alpha_1 * 4 + \alpha_0 &= 21 \end{aligned}$$

δηλαδή στην περίπτωση αυτή, ο αλγόριθμος θα πρέπει να επιστρέψει

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Η συνάρτηση σας θα πρέπει να λύνει το σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε έτοιμες συναρτήσεις που κάνουν παρεμβολή.

hint: Δείτε τις συναρτήσεις size, inv, transpose

Βήμα 2

Ένας προγραμματιστής έγραψε έναν αλγόριθμο για να κάνει απαλοιφή Gauss. Στη συνέχεια, θέλησε να δει πόσο γρήγορος είναι ο αλγόριθμος του: τον έτρεξε για προβλήματα διαφόρων μεγεθών και κατέγραψε τους χρόνους και το μέγεθος των προβλημάτων. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πλήθος εξισώσεων και αγνώστων	χρόνος
3	6.5
8	184.5
12	650.9
30	10590.5

Ο προγραμματιστής πιστέυει, οτι ο αλγόριθμός του τρέχει σε πολυωνυμικό χρόνο, και μάλιστα ότι το πολυώνυμο είναι τρίτου βαθμού, και θέλει να βρει τους συντελεστές του πολυωνύμου.

1. Χρησιμοποιείστε τη συνάρτηση που φτιάξατε στο Βήμα 1 για να βρείτε το πολυωνυμο που ψάχνει ο προγραμματιστής.
2. Κάντε plot το πολυώνυμο που επέστρεψε ο αλγόριθμός σας για όλες τις ακέραιες τιμες από 2 έως 200.
3. Σύμφωνα με τις προβλέψεις σας, πόσο χρόνο θα χρειαστεί ο αλγόριθμος του προγραμματιστή για να κάνει απαλοιφή Gauss σε ένα σύστημα με 123 εξισώσεις και 123 αγνώστους;

Παραδώστε:

1. Ένα αρχείο [αριθμος μητρώου σας]_ $ask1.zip$ που θα περιλαμβάνει
   (α′) Τη συνάρτηση fitPolynomial.m.
   (β′) Το script helpProgrammer.m που θα περιλαμβάνει τις εντολές που τρέξατε στο βήμα 2 της άσκησης.
   (γ′) Μία αναφορά (δε χρειάζεται να είναι ξεχωριστό έγγραφο, μπορείτε να τη συμπεριλάβετε στις λύσεις των θεωρητικών ασκήσεων) που να περιλαμβάνει μία **μικρή** περιγραφη του αλγορίθμου που υλοποιήσατε στο βήμα 1, το plot που κάνατε στο βήμα 2 και την απάντηση σας στο ερώτημα 3 του βήματος 2.