ΛΥΣΕΙΣ 1ου ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ 1

$$\left.\begin{aligned} u+v+w+z&=8\\ u+w+z&=5\\ u+w&=4 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} u+w&=4\\ z&=1\\ v&=3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ Άρα η τομή τους είναι η ευθεία $u+w=4$.

Για $u=1$ τότε η λύση είναι ένα σημείο στο υπερεπίπεδο, το $\begin{bmatrix} u\\ v\\ w\\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\ 3\\ 3\\ 1 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 2:

α) $$\left.\begin{aligned} 2u-3v&=9\\ 4u-5v+w&=16\\ 2u-v-3w&=10 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0\\ 4 & -5 & 1\\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u\\ v\\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9\\ 16\\ 10 \end{bmatrix}$$

Απαλοιφή Gauss:

$$[A\ b] = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 9\\ 4 & -5 & 1 & 16\\ 2 & -1 & -3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftarrow r_3 - r_1]{r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 9\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\lambda_{32} = \frac{2}{1} = 2]{r_3 \leftarrow r_3 - 2r_2} \begin{bmatrix} \boxed{2} & -3 & 0 & 9\\ 0 & \boxed{1} & 1 & -2\\ 0 & 0 & \boxed{-5} & 5 \end{bmatrix}$$

Ανάδρομη αντικατάσταση:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 9\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3/(-5)} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 9\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - r_3} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 9\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftarrow r_1 + 3r_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftarrow r_1/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ Άρα $x = \begin{bmatrix} 3\\ -1\\ -1 \end{bmatrix}$

β) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6\\ 1 & 2 & 2 & 11\\ 2 & 3 & -4 & 10 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & -6 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 6\\ 0 & \boxed{1} & 1 & 5\\ 0 & 0 & \boxed{-7} & -7 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ Άρα $x = \begin{bmatrix} 1\\ 4\\ 1 \end{bmatrix}$

γ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & -8 & -16 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 10 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & -16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ Άρα $x = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 3:

• $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ • $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -8 & 2 \\ -14 & 10 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

• $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 1 \\ 1/2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -11/2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 4:

Έστω: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ → κάτω τριγωνικός πίνακας.

ΑΣΚΗΣΗ 5:

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ Άρα: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{U}$

$\lambda_{21} = 0$ $\lambda_{32} = 0$

$\lambda_{31} = 3$

ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΚΑΙ ΑΛΛΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΕΙΣ!

ΑΣΚΗΣΗ 6:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{U}$$

$\lambda_{31} = 2 \qquad \lambda_{32} = 3/2$

$\lambda_{21} = 0$

Άρα:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{D} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U'}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ ΙΔΙΟΜΟΡΦΟΣ: ΔΕΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΕΙΤΑΙ!

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Άρα:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}}_{D} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U'}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7:

A1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{άρα} \quad A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

A2)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & -1/3 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & -3/4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 & -3/4 & 3/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & -3/4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & -3/4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & -3/4 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \; \overbrace{\begin{matrix} 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ 1/2 & -1 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & -3/4 \end{matrix}}^{A_2^{-1}}\right]$$

A3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow A_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 8:</u>

$B = (A \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot A^{-1}$

άρα:

$A \cdot B = \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1} = A^{-1}$

Υπάρχουν και άλλες λύσεις!

MATLAB:

```
A = [1 2 ;1 -1 ;0 1 ];
B = [1 2 -1;-1 0 7];
% A*B

[lenX_A lenY_A] = size(A);
[lenX_B lenY_B] = size(B);

matrix = zeros(lenX_A,lenY_B);

if lenY_A == lenX_B
    for i=1:lenX_A
        for j=1:lenY_B
            athroisma = 0;
            for k=1:lenY_A
                athroisma = athroisma + A(i,k)*B(k,j);
            end
            matrix(i,j) = athroisma;
        end
    end
else
    %do nothing
end

C = A*B
matrix
```