Συναρτησιακές Εξαρτήσεις

- Μια **συναρτησιακή εξάρτηση** (Functional Dependency) είναι ένας περιορισμός μεταξύ δύο συνόλων γνωρισμάτων.
  - Έστω $A_1, A_2, \dots, A_n$ όλα τα γνωρίσματα μιας σχέσης R. Αν X και Y είναι υποσύνολα του $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, τότε η συναρτησιακή εξάρτηση $X \rightarrow Y$ καθορίζει ότι για οποιεσδήποτε δύο πλειάδες t_1, t_2 της R, αν $t_1[X] = t_2[X]$, τότε πρέπει επίσης να ισχύει ότι $t_1[Y] = t_2[Y]$.

- Δεδομένης μιας συναρτησιακής εξάρτησης $X \rightarrow Y$, λέμε ότι το σύνολο X **προσδιορίζει συναρτησιακά** το σύνολο Y ή ότι το σύνολο Y **εξαρτάται συναρτησιακά** από το σύνολο X

Συναρτησιακές Εξαρτήσεις

- Αν η συναρτησιακή εξάρτηση $X \rightarrow Y$ ισχύει σε μια σχέση R, τότε δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν πλειάδες οι οποίες συμφωνούν στις τιμές όλων των γνωρισμάτων στο X και συγχρόνως δε συμφωνούν στην τιμή κάποιου από τα γνωρίσματα του Y.

- Αν το X είναι κλειδί της R, τότε η εξάρτηση $X \rightarrow Y$ ισχύει για κάθε υποσύνολο Y των γνωρισμάτων της R.

- Η εξάρτηση $X \rightarrow Y$ δε συνεπάγεται την εξάρτηση $Y \rightarrow X$

Συναρτησιακές Εξαρτήσεις

- **Παράδειγμα:** Έστω ότι οι παρακάτω σχέσεις έχουν το περιεχόμενο που φαίνεται στους αντίστοιχους πίνακες. Προσδιορίστε τις συναρτησιακές εξαρτήσεις οι οποίες ισχύουν.

T1

A	B
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_1
x_4	y_1
x_5	y_2
x_6	y_2

T2

A	B
x_1	y_1
x_2	y_4
x_1	y_1
x_3	y_2
x_2	y_4
x_4	y_3

T3

A	B
x_1	y_1
x_2	y_4
x_1	y_1
x_3	y_2
x_2	y_4
x_4	y_4

T1: $A \rightarrow B$

$B \nrightarrow A$

T2: $A \rightarrow B$

$B \rightarrow A$

T3: $A \rightarrow B$

$B \nrightarrow A$

Συναρτησιακές Εξαρτήσεις

- **Παράδειγμα:** Έστω το σχήμα

$$EMPLOYEE\ (emp\_id, emp\_name, emp\_phone, dept\_name)$$
$$DEPARTMENT\ (dept\_id, dept\_name, dept\_phone, dept\_mgrname)$$
$$SKILL\ (skill\_id, skill\_name)$$
$$EMP\_HAS\_SKILL\ (emp\_id, skill\_id, skill\_date, skill\_level)$$

- Οι συναρτησιακές εξαρτήσεις που ισχύουν είναι:

1. $emp\_id \rightarrow emp\_name, emp\_phone, dept\_name$
2. $dept\_name \rightarrow dept\_phone, dept\_mgrname$
3. $skill\_id \rightarrow skill\_name$
4. $emp\_id, skill\_id \rightarrow skill\_date, skill\_level$

Λογικές Συνέπειες Συναρτησιακών Εξαρτήσεων

- **Κανόνας Εγκλεισμού** (Inclusion Rule): Αν X, Y είναι σύνολα γνωρισμάτων από τη σχήμα της σχέσης R και $Y \subseteq X$, τότε $X \rightarrow Y$.

- Μια συναρτησιακή εξάρτηση $X \rightarrow Y$ λέγεται **τετριμμένη** αν ισχύει για κάθε σχέση R της οποίας το σχήμα περιέχει X και Y

- Τετριμμένες εξαρτήσεις εμφανίζονται σαν αποτέλεσμα της εφαρμογής του κανόνα εγκλεισμού

- **Θεώρημα:** Αν $X \rightarrow Y$ είναι τετριμμένη συναρτησιακή εξάρτηση, πρέπει να ισχύει ότι $Y \subseteq X$

Λογικές Συνέπειες Συναρτησιακών Εξαρτήσεων

- **Θεώρημα:** Αν $X \rightarrow Y$ είναι τετριμμένη συναρτησιακή εξάρτηση, πρέπει να ισχύει ότι $Y \subseteq X$
- **Απόδειξη:** Υποθέστε ότι $Y \supset X$. Δημιουργήστε μια σχέση με όλα τα γνωρίσματα των X και Y και θεωρήστε ένα γνώρισμα A του $Y - X$. Εφόσον $A \in Y$ και $A \notin X$, είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε δύο πλειάδες u και v, οι οποίες έχουν κοινές τιμές σε όλα τα γνωρίσματα στο X αλλά έχουν διαφορετικές τιμές στο A. Τότε όμως η τετριμμένη εξάρτηση δεν ισχύει. Άρα, δε μπορεί να υπάρχει τέτοιο γνώρισμα A στο $Y - X$. Επομένως, $Y \subseteq X$.

- Από ένα μικρό αριθμό κανόνων συνεπαγωγής και ένα αρχικό σύνολο συναρτησιακών εξαρτήσεων μπορεί να εξαχθεί ένας αριθμός πρόσθετων συναρτησιακών εξαρτήσεων.

Αξιώματα Armstrong

- Έστω ότι τα σύνολα γνωρισμάτων X, Y, Z περιέχονται στο σχήμα της σχέσης R. Τότε ισχύουν οι παρακάτω κανόνες:

1. **Κανόνας Εγκλεισμού (Inclusion Rule)**

   Αν $Y \subseteq X$ τότε $X \rightarrow Y$

2. **Κανόνας Μεταβατικότητας (Transitivity Rule)**

   Αν $X \rightarrow Y$ και $Y \rightarrow Z$ τότε $X \rightarrow Z$

3. **Κανόνας Επαύξησης (Augmentation Rule)**

   Αν $X \rightarrow Y$ τότε $XZ \rightarrow YZ$

Συνέπειες των Αξιωμάτων

- Θεώρημα: Αν W, X, Y, Z, B περιέχονται στο σχήμα της R, τότε:

1. **Κανόνας Ένωσης (Union Rule)**
   Αν $X \rightarrow Y$ και $X \rightarrow Z$ τότε $X \rightarrow YZ$
2. **Κανόνας Αποσύνθεσης (Decomposition Rule)**
   Αν $X \rightarrow YZ$ τότε $X \rightarrow Y$ και $X \rightarrow Z$
3. **Κανόνας Ψευδομεταβατικότητας (Pseudotransitivity Rule)**
   Αν $X \rightarrow Y$ και $WY \rightarrow Z$ τότε $XW \rightarrow Z$
4. **Κανόνας Συσσώρευσης (Accumulation Rule)**
   Αν $X \rightarrow YZ$ και $Z \rightarrow B$ τότε $X \rightarrow YZB$

Αξιώματα Armstrong

- **Παράδειγμα:** Βρείτε ένα ελάχιστο σύνολο συναρτησιακών εξαρτήσεων οι οποίες ικανοποιούνται στον ακόλουθο πίνακα:

T

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_1	b_1	c_2	d_2
a_2	b_1	c_1	d_3
a_2	b_1	c_3	d_4

1. Σ.Ε. με ένα γνώρισμα στο αριστερό μέλος
   - Οι τετριμμένες εξαρτήσεις $A \rightarrow A, B \rightarrow B, C \rightarrow C, D \rightarrow D$ δεν περιλαμβάνονται στο ελάχιστο σύνολο.
   - Οι εξαρτήσεις $A \rightarrow B, C \rightarrow B, D \rightarrow B$ προκύπτουν από τον πίνακα καθώς όλες οι τιμές του B είναι ίδιες.

Αξιώματα Armstrong

- **Παράδειγμα:** Βρείτε ένα ελάχιστο σύνολο συναρτησιακών εξαρτήσεων οι οποίες ικανοποιούνται στον ακόλουθο πίνακα:

T

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_1	b_1	c_2	d_2
a_2	b_1	c_1	d_3
a_2	b_1	c_3	d_4

1. Σ.Ε. με ένα γνώρισμα στο αριστερό μέλος
    - Τα γνωρίσματα A, C, D έχουν τουλάχιστον δύο διακεκριμένες τιμές. Άρα, $B \nrightarrow A, B \nrightarrow C, B \nrightarrow D$.
    - Όλες οι τιμές του D είναι διαφορετικές Άρα, $D \rightarrow A, D \rightarrow B, D \rightarrow C$.

Αξιώματα Armstrong

- **Παράδειγμα:** Βρείτε ένα ελάχιστο σύνολο συναρτησιακών εξαρτήσεων οι οποίες ικανοποιούνται στον ακόλουθο πίνακα:

T

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_1	b_1	c_2	d_2
a_2	b_1	c_1	d_3
a_2	b_1	c_3	d_4

1. Σ.Ε. με ένα γνώρισμα στο αριστερό μέλος
   - Τα γνωρίσματα A, B, C έχουν τουλάχιστον δύο επαναλαμβανόμενες τιμές. Άρα, $A \nrightarrow D$, $B \nrightarrow D$, C $\nrightarrow D$.
   - $A \nrightarrow C$ και $C \nrightarrow A$, εξαιτίας των πλειάδων 1,2 και 1,3 αντίστοιχα.

Αξιώματα Armstrong

- **Παράδειγμα:** Βρείτε ένα ελάχιστο σύνολο συναρτησιακών εξαρτήσεων οι οποίες ικανοποιούνται στον ακόλουθο πίνακα:

T

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_1	b_1	c_2	d_2
a_2	b_1	c_1	d_3
a_2	b_1	c_3	d_4

1. Σ.Ε. με ένα γνώρισμα στο αριστερό μέλος
   - Άρα ισχύουν οι ακόλουθες Σ.Ε.:

     $A \to B, C \to B, D \to A, D \to B, D \to C$
   - Από τον κανόνα ένωσης: $A \to B, C \to B, D \to ABC$.

Αξιώματα Armstrong

- **Παράδειγμα:** Βρείτε ένα ελάχιστο σύνολο συναρτησιακών εξαρτήσεων οι οποίες ικανοποιούνται στον ακόλουθο πίνακα:

T

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_1	b_1	c_2	d_2
a_2	b_1	c_1	d_3
a_2	b_1	c_3	d_4

2. Σ.Ε. με ζεύγος γνωρισμάτων στο αριστερό μέλος
   - Εξαιτίας της $D \rightarrow ABC$, κάθε ζεύγος που περιέχει το D προσδιορίζει συναρτησιακά όλα τα υπόλοιπα γνωρίσματα (κανόνας επαύξησης). Αυτές οι εξαρτήσεις είναι συνεπαγωγές εξαρτήσεων που ήδη ανήκουν στο ζητούμενο σύνολο.

Αξιώματα Armstrong

- **Παράδειγμα:** Βρείτε ένα ελάχιστο σύνολο συναρτησιακών εξαρτήσεων οι οποίες ικανοποιούνται στον ακόλουθο πίνακα:

T

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_1	b_1	c_2	d_2
a_2	b_1	c_1	d_3
a_2	b_1	c_3	d_4

2. Σ.Ε. με ζεύγος γνωρισμάτων στο αριστερό μέλος
   - Ζεύγη γνωρισμάτων που περιλαμβάνουν το B στο αριστερό μέλος δίνουν είτε τετριμμένες εξαρτήσεις, είτε συνεπαγωγές εξαρτήσεων.

Αξιώματα Armstrong

- **Παράδειγμα:** Βρείτε ένα ελάχιστο σύνολο συναρτησιακών εξαρτήσεων οι οποίες ικανοποιούνται στον ακόλουθο πίνακα:

T

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_1	b_1	c_2	d_2
a_2	b_1	c_1	d_3
a_2	b_1	c_3	d_4

2. Σ.Ε. με ζεύγος γνωρισμάτων στο αριστερό μέλος
   - $AC \rightarrow ABCD$ καθώς το ζεύγος AC έχει διακεκριμένες τιμές σε κάθε πλειάδα. Η μόνη νέα εξάρτηση είναι η $AC \rightarrow D$. Οι εξαρτήσεις $AC \rightarrow A, AC \rightarrow C, AC \rightarrow B$ ήδη εξάγονται από άλλες εξαρτήσεις.

Αξιώματα Armstrong

- **Παράδειγμα:** Βρείτε ένα ελάχιστο σύνολο συναρτησιακών εξαρτήσεων οι οποίες ικανοποιούνται στον ακόλουθο πίνακα:

T

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_1	b_1	c_2	d_2
a_2	b_1	c_1	d_3
a_2	b_1	c_3	d_4

3. Δεν υπάρχουν εξαρτήσεις με 3 ή 4 γνωρίσματα στο αριστερό μέλος οι οποίες ανήκουν σε αυτό το σύνολο.

Το ελάχιστο σύνολο εξαρτήσεων είναι

$$\{A \rightarrow B, C \rightarrow B, D \rightarrow ABC, AC \rightarrow D\}$$

Κλείσιμο (Closure)

- Τα αξιώματα Armstrong και οι συνέπειές τους παράγουν ένα σύνολο το οποίο είναι πολύ μεγαλύτερο από το αρχικό σύνολο των ΣΕ.
- Δεδομένου ενός συνόλου F από ΣΕ, το **κλείσιμο** (closure) F^+ του F ορίζεται σαν το σύνολο των ΣΕ οι οποίες συνεπάγονται από το F.

- **Παράδειγμα:** Θεωρείστε το σύνολο των ΣΕ:

  $F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow E, E \rightarrow F, F \rightarrow G, G \rightarrow H\}$

✓ Από $A \rightarrow B$ και $B \rightarrow C$, συνεπάγεται λόγω μεταβατικότητας η $A \rightarrow C$.

✓ Επίσης: $A \rightarrow D, A \rightarrow E, A \rightarrow F, A \rightarrow G, A \rightarrow BC, A \rightarrow EF$ κ.ο.κ.

✓ Παρόμοια για εξαρτήσεις με B στο αριστερό μέλος κ.ο.κ.

Κάλυψη (Cover)

- Το μέγεθος του κλεισίματος ενός συνόλου ΣΕ μεγαλώνει εκθετικά με αυτό του αρχικού συνόλου.
- Χρειαζόμαστε έναν τρόπο για να αναφερόμαστε στο σύνολο των εξαρτήσεων που συνεπάγονται από ένα αρχικό σύνολο χωρίς να πρέπει να υπολογίσουμε το κλείσιμο του συνόλου αυτού.
- Για κάθε σύνολο ΣΕ μπορούμε να βρούμε ένα «ισοδύναμο» σύνολο το οποίο είναι ελάχιστο.

- Ένα σύνολο F από ΣΕ για μια σχέση R **καλύπτει** ένα άλλο σύνολο G από ΣΕ για την R, αν το σύνολο G μπορεί να εξαχθεί με την εφαρμογή των κανόνων συνεπαγωγής στις ΣΕ του F, δηλαδή αν $G \subseteq F^+$.

Κάλυψη (Cover)

- Αν το F καλύπτει το G και το G καλύπτει το F τότε τα F και G λέγονται **ισοδύναμα** ($F \equiv G$).
- Αν $F \equiv G$, τότε $F^+ = G^+$
- **Παράδειγμα:** Θεωρείστε τα σύνολα ΣΕ

  $F = \{B \to CD, AD \to E, B \to A\}$

  $G = \{B \to CDE, B \to ABC, AD \to E\}$

  Δείξτε ότι το F καλύπτει το G.

Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε ΣΕ του G μπορεί να εξαχθεί από το F με χρήση των κανόνων συνεπαγωγής.

- Η ΣΕ $AD \to E$ είναι ήδη στο F.
- Από την $B \to CD$ και την $B \to A$, εξάγουμε την $B \to ACD$ (κανόνας ένωσης)

Κάλυψη (Cover)

- **Παράδειγμα:** Θεωρείστε τα σύνολα ΣΕ

  $F = \{B \to CD, AD \to E, B \to A\}$

  $G = \{B \to CDE, B \to ABC, AD \to E\}$

  Δείξτε ότι το F καλύπτει το G.

Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε ΣΕ του G μπορεί να εξαχθεί από το F με χρήση των κανόνων συνεπαγωγής.

- Από $B \to ACD$ και $B \to B$, εξάγουμε την $B \to ABCD$ (κανόνας ένωσης)
- Από $B \to ABCD$ εξάγουμε την $B \to AD$ (κανόνας αποσύνθεσης)
- Από $B \to AD$ και $AD \to E$ εξάγουμε την $B \to E$ (κανόνας μεταβατικότητας)

Κάλυψη (Cover)

- **Παράδειγμα:** Θεωρείστε τα σύνολα ΣΕ

  $F = \{B \rightarrow CD, AD \rightarrow E, B \rightarrow A\}$

  $G = \{B \rightarrow CDE, B \rightarrow ABC, AD \rightarrow E\}$

  Δείξτε ότι το F καλύπτει το G.

Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε ΣΕ του G μπορεί να εξαχθεί από το F με χρήση των κανόνων συνεπαγωγής.

- Από $B \rightarrow ABCD$ και $B \rightarrow E$ εξάγουμε την $B \rightarrow ABCDE$ (κανόνας ένωσης)
- Από $B \rightarrow ABCDE$ εξάγουμε την $B \rightarrow CDE$ και την $B \rightarrow ABC$ (κανόνας αποσύνθεσης)