ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013 ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
στο Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΘΕΜΑ 1ο. (2) Να ευρεθεί $a \in \mathbb{R}$ ώστε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} 3y - 3z - 5w &= a \\ 2x - y + z - w &= 2 \\ x - 2y + 2z + 2w &= 1 \\ x + y - z - 3w &= 1 \end{aligned}$$

να έχει τουλάχιστον μια λύση. Για αυτή την τιμή του a να περιγραφεί το σύνολο των λύσεων ως σύμπλοκο ενός κατάλληλου υπόχωρου του $\mathbb{R}^4$. Πόση είναι η τάξη του πίνακα των συντελεστών του συστήματος;

ΘΕΜΑ 2ο. (2) Εστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση με

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y + 3z \\ x - 5y + 5z \\ 2x - y + 4z \end{pmatrix}.$$

(α) Να ευρεθεί ο πίνακας της f ως προς τη διατεταγμένη κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.
(β) Να ευρεθούν ο πυρήνας $\mathrm{Ker}f$ και η εικόνα $\mathrm{Im}f$ της f, βρίσκοντας από μια βάση για το καθένα.
(γ) Είναι η f ισομορφισμός;

ΘΕΜΑ 3ο. (1) Να υπολογιστεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ΘΕΜΑ 4ο. (2,5) Εστω a, b, $c \in \mathbb{R}$. Να ευρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ b & 1 & a \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

διαγωνοποιήσιμος.

ΘΕΜΑ 5ο. (2,5) Να κατασκευαστεί μια ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}^4$ που περιέχει το διάνυσμα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ