

Sketch Λύσεων 2<sup>ης</sup> Σειράς Ασκήσεων

a)  $P/Q \rightarrow P$

Άσκηση 1

1.  $P$  (συνόθεση παραγωγής)
2. Υποπαγωγή
  - 2.1.  $Q$  (συνόθεση υποπαγωγής)
  - 2.2.  $P$  (από ① με επανάληψη)
3.  $Q \rightarrow P$  (από ② με εισαγωγή  $\rightarrow$ )

b)  $(P \vee Q) \vee R / R \vee (Q \vee P)$

1.  $(P \vee Q) \vee R$  (συνόθεση παραγωγής)
2. Υποπαγωγή
  - 2.1.  $P \vee Q$  (συνόθεση υποπαγωγής)
  - 2.2. Υποπαγωγή
    - 2.2.1.  $P$  (συνόθεση υποπαγωγής)
    - 2.2.2.  $Q \vee P$  (από 2.2.1 με εισαγωγή  $\vee$ )
    - 2.2.3.  $R \vee (Q \vee P)$  (από 2.2.2 με εισαγωγή  $\vee$ )
  - 2.3. Υποπαγωγή
    - 2.3.1.  $Q$  (συνόθεση υποπαγωγής)
    - 2.3.2.  $Q \vee P$  (από 2.3.1 με εισαγωγή  $\vee$ )
    - 2.3.3.  $R \vee (Q \vee P)$  (από 2.3.2 με εισαγωγή  $\vee$ )
  - 2.4.  $R \vee (Q \vee P)$  (από 2.1, 2.2, 2.3 με αναλοισή  $\vee$ )
3. Υποπαγωγή
  - 3.1.  $R$  (συνόθεση υποπαγωγής)
  - 3.2.  $R \vee (Q \vee P)$  (από 3.1 με εισαγωγή  $\vee$ )
4.  $R \vee (Q \vee P)$  (από 1, 2, 3 με αναλοισή  $\vee$ )

c)  $P \rightarrow Q \vee R, Q \rightarrow S, R \rightarrow S / P \rightarrow S$

1.  $P \rightarrow Q \vee R$  (υπόθεση παραγωγής)
2.  $Q \rightarrow S$  (υπόθεση παραγωγής)
3.  $R \rightarrow S$  (υπόθεση παραγωγής)
4. Υποπαράγωγη
  - 4.1  $P$  (υπόθεση υποπαράγωγής)
  - 4.2  $P \rightarrow Q \vee R$  Canό 1 με επανάληψη)
  - 4.3  $Q \vee R$  Canό 4.1, 4.2 με απαλοιφή  $\rightarrow$ )
  - 4.4 Υποπαράγωγη
    - 4.4.1  $Q$  (υπόθεση υποπαράγωγής)
    - 4.4.2  $Q \rightarrow S$  Canό 2 με επανάληψη)
    - 4.4.3  $S$  Canό 4.4.1, 4.4.2 με απαλοιφή  $\rightarrow$ )
  - 4.5 Υποπαράγωγη
    - 4.5.1  $R$  (υπόθεση υποπαράγωγής)
    - 4.5.2  $R \rightarrow S$  Canό 3 με επανάληψη)
    - 4.5.3  $S$  Canό 4.5.1, 4.5.2 με απαλοιφή  $\rightarrow$ )
  - 4.6  $S$  Canό 4.3, 4.4, 4.5 με απαλοιφή  $\vee$ )
5.  $P \rightarrow S$  Canό 4 με εισαγωγή  $\rightarrow$ )

$$d) \neg(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

Άσκηση 2

1. Υποπαράγωγη

1.1  $Q \rightarrow R$  (υπόθεση υποπαράγωγής)

1.2 Υποπαράγωγη

1.2.1  $P \rightarrow Q$  (υπόθεση υποπαράγωγής)

1.2.2 Υποπαράγωγη

1.2.2.1  $P$  (υπόθεση υποπαράγωγής)

1.2.2.2  $P \rightarrow Q$  (από 1.2.1 με επανάληψη)

1.2.2.3  $Q$  (από 1.2.2.1, 1.2.2.2 με απαλοιφή  $\rightarrow$ )

1.2.2.4  $Q \rightarrow R$  (από 1.1 με επανάληψη)

1.2.2.5  $R$  (από 1.2.2.3, 1.2.2.4 με απαλοιφή  $\rightarrow$ )

1.2.3  $P \rightarrow R$  (από 1.2.2 με εισαγωγή  $\rightarrow$ )

1.3  $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$  (από 1.2 με εισαγωγή  $\rightarrow$ )

2.  $(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$  (από 1 με εισαγωγή  $\rightarrow$ )

$$b) (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$$

$$1. Q \vee \neg Q \text{ (Θεώρημα)}$$

$$2. \text{Υποπαράγωγη}$$

$$2.1 Q \text{ (ΥΥ)}$$

$$2.2 \text{Υποπαράγωγη}$$

$$2.2.1 P \text{ (ΥΥ)}$$

$$2.2.2 Q \text{ (επανάληψη)}$$

$$2.3 P \rightarrow Q \text{ (εισαγωγή } \rightarrow \text{ από 2.2)}$$

$$2.4 P \rightarrow Q \vee Q \rightarrow P \text{ (εισαγωγή } \vee)$$

$$3. \text{Υποπαράγωγη}$$

$$3.1 \neg Q \text{ (ΥΥ)}$$

$$3.2 \neg Q \vee P \text{ (εισαγωγή } \vee)$$

$$3.3 \neg Q \vee P \equiv Q \rightarrow P \text{ (Θεώρημα)}$$

$$3.4 Q \rightarrow P \text{ (απαδοική ισοδυναμία από 3.2, 3.3)}$$

$$3.5 P \rightarrow Q \vee Q \rightarrow P \text{ (εισαγωγή } \vee)$$

$$4. P \rightarrow Q \vee Q \rightarrow P \text{ (απαδοική } \vee \text{ 1, 2, 3)}$$

### Άσκηση 3

(α)  $\{P \vee Q, R \vee S\} / P \rightarrow S$

$\neg (1) P \vee Q$   
 $\neg (2) R \vee S$   
 $\neg (3) \neg(P \rightarrow S) \quad (3) [\neg \rightarrow]$   


---

 $(4) P$   
 $(5) \neg S$   


---

 $(6) R \quad (1) [\vee] \quad (7) S \quad (5) [\text{del}]$   


---

 $(8) P \quad (9) Q$

Υπάρχουν ερμηνείες  $I_1 = \{P, \neg S, R\}$ ,  $I_2 = \{P, \neg S, R, Q\}$  που είναι ικανοπ. το αρχικό σύνολο, άρα η εξαγωγή συμπερασμάτων δεν είναι έγκυρη.

(β)  $P \rightarrow Q, P, \neg Q / R$

$\neg (1) P \rightarrow Q$   
 $(2) P$   
 $(3) \neg Q$   
 $(4) \neg R$   


---

 $(5) \neg P \quad (2) [\text{del}] \quad (6) Q \quad (3) [\text{del}]$

Δεν υπάρχει ερμην. που ικανοπ. το αρχικό σύνολο, άρα η εξαγωγή συμπερασμάτων είναι έγκυρη.



(c)  $P \rightarrow Q \wedge R, Q \rightarrow S, R \rightarrow S / P \rightarrow S$

$$\begin{array}{l}
 \text{HYP } P \rightarrow Q \wedge R \\
 \text{HYP } Q \rightarrow S \\
 \text{HYP } R \rightarrow S \\
 \text{HYP } \neg(P \rightarrow S) \\
 \hline
 (4) [\neg \rightarrow] \\
 (5) P \\
 (6) \neg S \\
 \hline
 (7) \neg Q \quad (8) S \quad (2) [\rightarrow] \\
 \hline
 (9) \neg R \quad (10) S \quad (6) [\text{del}] \\
 \hline
 (11) \neg P \quad (12) Q \wedge R \quad (13) Q \quad (14) R \quad (15) [\text{del}] \\
 \hline
 (16) [\text{del}]
 \end{array}$$

Παρατηρώ ότι δεν υπάρχει εφ'ημέτια (έναντι των όποιων οι κλαδοί) που να ικανοποιεί το αρχικό σύνολο, άρα η εξαγωγή συμπέρασματος είναι έγκυρη.

(d)  $P \rightarrow (Q \rightarrow R), P \wedge Q / R$

$$\begin{array}{l}
 \text{HYP } P \rightarrow (Q \rightarrow R) \\
 \text{HYP } P \wedge Q \\
 (3) \neg R \\
 \hline
 (4) P \quad (5) Q \quad (2) [\wedge] \\
 \hline
 (6) \neg P \quad (7) Q \rightarrow R \quad (1) [\rightarrow] \\
 \hline
 (8) \neg Q \quad (9) R \quad (5) [\text{del}] \quad (3) [\text{del}]
 \end{array}$$

δεν υπάρχει εφ'ημέτια. που να ικανοποιεί το αρχικό σύνολο, άρα η εξαγωγή συμπέρασματος είναι έγκυρη.

#### Άσκηση 4

(α)  $\{ \neg Q, P \rightarrow Q \} / \neg P$

Έχω το σύνολο:  $\{ \neg Q, P \rightarrow Q, P \}$ .

Βρίσκω όρους επίλυσης:

$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

Άρα:  $\{ \neg Q, \neg P, Q \}$  και η ακολουθία αναγωγής.

$$\{ \neg P, Q \} \xrightarrow{\neg Q} \neg P \xrightarrow{P} F$$

Άρα η εξαγωγή συμπεράσματος είναι ορθή.

(β)  $\{ P \rightarrow (Q \rightarrow R), P \rightarrow Q, P \} / R$

Έχω το σύνολο:  $\{ P \rightarrow (Q \rightarrow R), P \rightarrow Q, P, \neg R \}$ .

και οι όροι επίλυσης είναι:

$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \equiv \neg P \vee (Q \rightarrow R) \equiv \neg P \vee (\neg Q \vee R)$$

Άρα:  $\{ P, \neg R, \neg P, Q, \neg P, \neg Q, R \}$  και η ακολουθία αναγωγής που προκύπτει είναι:

$$\{ \neg P, \neg Q, R \} \xrightarrow{\neg P, Q} \neg P, R \xrightarrow{P} R \xrightarrow{\neg R} F$$

Άρα η εξαγωγή συμπεράσματος είναι ορθή.

(γ)  $\{ Q \rightarrow R, P \rightarrow Q, \neg P \rightarrow R, R \rightarrow S \} / S$

Έχω το σύνολο:  $\{ Q \rightarrow R, P \rightarrow Q, \neg P \rightarrow R, R \rightarrow S, \neg S \}$ .

και τους όρους επίλυσης:

$$Q \rightarrow R \equiv \neg Q \vee R$$

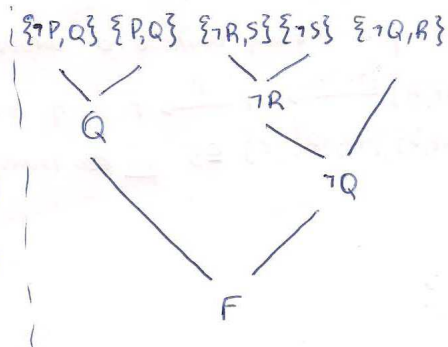
$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

$$\neg P \rightarrow R \equiv \neg \neg P \vee R \equiv P \vee R$$

$$R \rightarrow S \equiv \neg R \vee S$$

Άρα:  $\{ \neg Q, R, \neg P, Q, P, R, \neg R, S, \neg S \}$

και το δέντρο αναγωγής δείχνει ότι η εξαγωγή είναι ορθή



### Άσκηση 5

(α)  $\{ \neg P \vee (P \wedge Q), P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, \neg R \vee P \}$

βρίσκω τους όρους επίλυσης:

$$\neg P \vee (P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee Q) \equiv \neg P \vee Q$$

$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

$$Q \rightarrow R \equiv \neg Q \vee R$$

Άρα:  $\{ \neg P, Q, \neg P, Q, \neg Q, R, \neg R, P \}$

Η ανόλουθια αναγωγής που προκύπτει είναι:

$$\{ \neg R, P \} \xrightarrow{\neg P, Q} \{ \neg R, Q \} \xrightarrow{\neg Q, R} \text{F}$$

Άρα το σύνολο είναι μη ικανοποιήσιμο.

(β)  $\{ \neg P \rightarrow Q, P \vee \neg Q, P \rightarrow Q, \neg P \vee \neg Q \}$

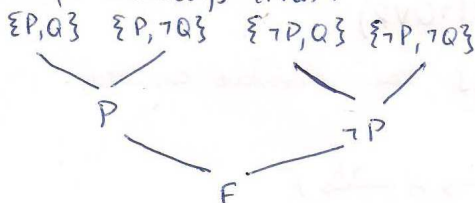
βρίσκω τους όρους επίλυσης:

$$\neg P \rightarrow Q \equiv P \vee Q$$

$$\neg P \rightarrow Q \equiv P \vee Q$$

Άρα έχω το σύνολο:  $\{ P, Q, \neg P, \neg Q, \neg P, Q, \neg P, \neg Q \}$

το δέντρο αναγωγής είναι:



και καθίσταται το σύνολο μη ικανοποιήσιμο.

(γ)  $\{ \neg P \vee A, Q \vee A, \neg P \vee \neg R, P \}$

Το σύνολο σε όρους επίλυσης είναι:

$$\{ \neg P, A, \neg P, A, \neg P, \neg R, P \} = S$$

Και για πιθανή ανόλουθια αναγωγής:

$$\{ \neg P, A \} \xrightarrow{\neg P, \neg R} \neg P \xrightarrow{P} \text{F} \quad \text{η οποία δίνει το}$$

$\{ \neg P, A, \neg P, \neg R, P \} \subseteq S$  μη ικανοποιήσιμο. Άρα και το S μη ικανοποιήσιμο.