ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1

1. Δείξτε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν τα παρακάτω:

(α) $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)$

(β) $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

2. Βρείτε την γωνία που σχηματίζουν τα παρακάτω διανύσματα του $\mathbb{R}^3$

(α) $(-1,1,0)$ και $(1,-1,0)$ (β) $(0,-1,3)$ και $(0,4,0)$ (γ) $(-1,2-3)$ και $(-1,-3,4)$.

3. Να ευρεθεί ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ με μήκος 1, που σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{6}$ με τ $e_1 = (1,0,0)$ και ίσες γωνίες με τα $e_2 = (0,1,0)$ και $e_3 = (0,0,1)$.

4. Έστω $x \in \mathbb{R}^2$ με $x \neq 0$. Το σύνολο $E(x) = \{tx : t \in \mathbb{R}\}$ είναι η ευθεία που παράγει το x. Αν $y \in \mathbb{R}^2$, να αποδειχθεί ότι η απόσταση του y από την ευθεία $E(x)$ είναι ίση με $\left\|\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}\cdot x - y\right\|$.

5. Στο σύνολο $C[0,1] = \{f \mid f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής$\}$ ορίζεται η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός με πραγματικό αριθμό ως εξής:

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \quad \text{και} \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t) \quad , t \in [0,1].$$

Έτσι το $C[0,1]$ γίνεται διανυσματικός χώρος. Στο $C[0,1]$ ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

(α) Δείξτε ότι το εσωτερικό γινόμενο στον $C[0,1]$ έχει τις ίδιες ιδιότητες που έχει το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή,

$\langle f, f\rangle \geq 0$ και $\langle f, f\rangle = 0$ μόνον όταν $f = 0$,

$\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$ και

$\langle \lambda f + \mu g, h\rangle = \lambda\langle f, h\rangle + \mu\langle g, h\rangle$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε ζεύγος συνεχών $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\left|\int_0^1 f(t)g(t)\,dt\right| \leq \left(\int_0^1 (f(t))^2\,dt\right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 (g(t))^2\,dt\right)^{1/2}.$$

6. Έστω $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $C(x,r) = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : |x_k - y_k| < r,\ k = 1,2,\ldots,n\}$ όπου $r > 0$. Να αποδειχθεί ότι

$$C\left(x, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \subset D(x,r) \subset C(x,r)$$

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το $C(x,r)$ και τις σχέσεις αυτές για $n=2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2

1. Να αποδειχθεί ότι οποιαδήποτε ένωση ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο. Να αποδειχθεί ότι η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο. Να δειχθεί μ' ένα παράδειγμα ότι η τομή άπειρου πλήθους ανοιχτών συνόλων δεν είναι πάντα ανοιχτό σύνολο.

2. Να εξεταστεί ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά.

(α) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 + x_2 > 0\}$ (δ) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$

(β) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_2 \geqq 0\}$ (ε) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 < x_1^2 + x_2^2 < 4\}$

(γ) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x_1 + x_2 \leqq 1\}$ (στ) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \cdot x_2 \neq 0\}$

3. Να αποδειχθεί ότι τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά και να ευρεθούν τα σύνορά τους.

(α) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 > 1\}$ (γ) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \cdot x_2 < 1\}$

(β) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \neq 0$ ή $x_2 \neq 0\}$ (δ) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 > x_1^2\}$

4. Είναι το $\mathbb{Q}$ ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$; Ποια είναι τα συνοριακά του σημεία;

5. Να εξεταστεί αν υπάρχει το $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1, x_2)$ στα

(α) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{για } 0 \leqq x_2 \leqq x_1^2 \\ 0, & \text{για } (x_1, x_2) \text{ αλλιώς} \end{cases}$ (β) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{x_1} \cdot \sin(x_1 \cdot x_2), & \text{για } x_1 \neq 0 \\ x_2, & \text{για } x_1 = 0. \end{cases}$

6. Αν η $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ έχει τύπο

$$f(x_1, x_2) = \frac{2 x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2},$$

υπάρχει το $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1, x_2)$;

7. Υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \dfrac{\cos x_1 - 1 + \frac{x_1^2}{2}}{x_1^4 + x_2^4}$;

8. Υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{e^{x_1} \cdot x_2}{x_1 + x_2} \ ;$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3

1. Να αποδειχθεί ότι $\|\|x\| - \|y\|\| \leq \|x-y\|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$.

2. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$.

(α) Να αποδειχθεί ότι $\partial A = \partial(\mathbb{R}^n \setminus A)$.

(β) Να αποδειχθεί ότι το A είναι ανοιχτό τότε και μόνον τότε όταν $A \cap \partial A = \phi$.

(γ) Να αποδειχθεί ότι το A είναι κλειστό τότε και μόνον τότε όταν το $\mathbb{R}^n \setminus A$ είναι ανοιχτό.

3. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f : A \to \mathbb{R}^m$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο A τότε και μόνον τότε όταν για κάθε ανοιχτό σύνολο $V \subset \mathbb{R}^m$, το $f^{-1}(V)$ είναι ανοιχτό στον $\mathbb{R}^n$.

4. Υπάρχει το

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{\sin 2x_1 - 2x_1 + x_2}{x_1^3 + x_2} \quad ;$$

5. Να υπολογιστεί το μήκος του τόξου της παραβολής $x^2 = 2py$, $p>0$, από το σημείο $(0,0)$ στο $\left(a, \frac{a^2}{2p}\right)$, $a>0$.

6. Αν η C^1 καμπύλη $\gamma : (\alpha_0, \beta_0) \to \mathbb{R}^2$ έχει πολικές συντεταγμένες $(r(t), \varphi(t))$, $\alpha_0 < t < \beta_0$, να αποδειχθεί ότι το μήκος της από το $\gamma(a)$ στο $\gamma(b)$, όπου $\alpha_0 < a < b < \beta_0$ είναι ίσο με

$$\int_a^b \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t))^2 \cdot (\varphi'(t))^2}\, dt .$$

7. Να αποδειχθεί ότι το μήκος του λημνίσκου του Bernulli $r^2 = 2a^2 \cos 2\phi$, $k\pi - \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq k\pi + \frac{\pi}{4}$, $a>0$ (σε πολικές συντεταγμένες) είναι ίσο με

$$4a\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\phi}}\, d\phi$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4

1. Να υπολογιστεί το μήκος της επίπεδης καμπύλης $y = \log \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, $0 < a \leq x \leq b$.

2. Να υπολογιστεί το μήκος της αστεροειδούς καμπύλης
$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad , a > 0.$$
(Υπόδειξη: Θεωρείστε την παραμέτριση $\gamma(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.)

3. Να υπολογιστεί το μήκος της κυκλικής στερεάς έλικα $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ με $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, ct)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $a, c > 0$.

4. Να υπολογιστεί το μήκος της τομής της σφαίρας $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ και της κυλινδρικής επιφάνειας $x_1^2 + x_2^2 = x_1$.
(Υπόδειξη: Θεωρείστε την παραμέτριση $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin t\cos t, \sin t)$.)

5. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο
$$f(t) = \begin{cases} t^2 \sin\frac{1}{t} & , \text{ για } t \neq 0 \\ 0 & , \text{ για } t = 0 \end{cases}$$

(α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη.
(β) Εστω $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ η καμπύλη που παραμετρίζει το γράφημα της f, δηλαδή $\gamma(t) = (t, f(t))$. Να αποδειχθεί ότι η $\gamma|[0,1]$ είναι ευθυγραμμίσιμη.

6. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο
$$f(t) = \begin{cases} t\sin\frac{1}{t} & , \text{ για } t \neq 0 \\ 0 & , \text{ για } t = 0. \end{cases}$$

(α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής.
(β) Αν η $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ παραμετρίζει το γράφημα της f, είναι η $\gamma|[0,1]$ ευθυγραμμίσιμη;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5

1. Εστω $\gamma_1, \gamma_2 : (a,\beta) \to \mathbb{R}^n$ δυο C^1 καμπύλες. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f : (a,\beta) \to \mathbb{R}$ με $f(t) = \langle \gamma_1(t), \gamma_2(t) \rangle$ είναι C^1 και
$$f'(t) = \langle \gamma_1'(t), \gamma_2(t) \rangle + \langle \gamma_1(t), \gamma_2'(t) \rangle.$$

2. Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι της f (σε κάθε σημείο) όταν
(α) $f(x_1,x_2) = x_1 \cdot \cos x_1 \cdot \cos x_2$ (b) $f(x_1,x_2) = x_1 \cdot e^{x_1^2+x_2^2}$

3. Να υπολογιστούν οι κατευθυνόμενες παράγωγοι $f'(a;v)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, της $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, όταν
(α) $f(x) = \langle a, x \rangle$, (b) $f(x) = \|x\|^4$.

4. Εστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας, δηλαδή $a_{ij} = a_{ji}$.
(α) Να αποδειχθεί ότι $\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$.
(β) Να υπολογιστούν οι κατευθυνόμενες παράγωγοι της $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \langle x, Ax \rangle$.

5. Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο
$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2+x_2^2}, & \text{όταν } (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{όταν } (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$$
(α) Να αποδειχθεί ότι η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.
(β) Υπάρχουν οι $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)$ και $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)$;

6. Να υπολογιστεί η παράγωγος της $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$f(x) = \int_0^2 [x^2 y + x y^3]\, dy$$

7. Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι της $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$f(x,y) = \int_0^1 [e^{t^2} + t \sin(xy^2)]\, dt$$

8. Εστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση ώστε $f'(x;v) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι σταθερή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6

1. Να υπολογιστεί η παράγωγος της $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ στο $(0,0)$ όταν

(α) $f(x,y)=\begin{cases} x^2y^2\log(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ (β) $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

2. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

3. Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(x)|\leq\|x\|^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι διαφορίσιμη στο 0.

4. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων.

(α) $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, στο $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (γ) $f(x,y)=(x+y,x-y,xy)$ στο $\mathbb{R}^2$

(β) $f(x,y,z)=\sin(x\sin y)$, στο $\mathbb{R}^3$ (δ) $f(x,y,z)=(y^2+z^2,z^2+x^2,x^2+y^2)$ στο $\mathbb{R}^3$.

5. Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Να υπολογιστεί η παράγωγος της $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, όταν

(α) $f(x,y)=\int_0^{x+y}g(t)\,dt$ (β) $f(x,y)=\int_0^{xy}g(t)\,dt$

6. Έστωσαν $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις. Να υπολογιστεί η παράγωγος της $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $\varphi(x,y)=f(x,y,g(x,y))$.

7. Να ευρεθεί η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στο γράφημα της

(α) $f(x,y)=2x^2+y^2$, στο σημείο $(0,0,0)$

(β) $f(x,y)=x^2-3y^2+x$, στο σημείο $(1,0,2)$

(γ) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$, στο σημείο $(1,0,2)$

8. (Euler) Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μία ομογενής συνάρτηση βαθμού p, δηλαδή $f(tx)=t^pf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ και $t\in\mathbb{R}$. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $a\in\mathbb{R}^n$, να αποδειχθεί ότι $Df(a)\cdot a=pf(a)$. (Υπόδειξη: Θεωρείστε την συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(t)=f(ta)$ και υπολογίστε το $g'(1)$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7

1. Εστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{όταν } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{όταν } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(α) Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι σε κάθε σημείο διαφορετικό από (0,0)

(β) Να δειχθεί ότι $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

(γ) Να αποδειχθεί ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1\neq-1=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Πως εξηγείται αυτό;

2. Εστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση και $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ μια C^2 καμπύλη. Να υπολογιστεί η $(f\circ\gamma)''(t)$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$.

3. Εστωσαν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο C^2 συναρτήσεις και $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $\phi(x,y)=f(x-y)+g(x+y)$. Να αποδειχθεί ότι $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$.

4. Εστω $V:\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ το δυναμικό της βαρύτητας $V(x)=-\frac{1}{\|x\|}$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}=0.$$

5. Εστωσαν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο C^2 συναρτήσεις και $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $F(x,y)=f(x+g(y))$. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

6. Να ευρεθούν τα ακρότατα (αν υπάρχουν) της $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ όταν

(α) $f(x,y)=x^4+x^2y+y^2$ (γ) $f(x,y)=(x-1)^4+(x-y)^4$

(β) $f(x,y)=x^2+y^2+x+y+xy$ (δ) $f(x,y)=y^2-x^3$

7. Να ευρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xy$$

8. Να ευρεθούν τα σημεία του γραφήματος της συνάρτησης $f(x,y)=\frac{1}{xy}$, $xy\neq0$, που είναι πλησιέστερα στο σημείο $(0,0,0)$ του $\mathbb{R}^3$

9. Εστω $a>0$. Να ευρεθούν $x,y,z\geqq0$ με άθροισμα a, ώστε το γινόμενο $x\cdot y\cdot z$ να είναι το μέγιστο δυνατό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8

1. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x,y) = 2xe^y + y + 1 = 0$ ορίζει ακριβώς μία C^1 συνάρτηση $g: I \to \mathbb{R}$, όπου το I είναι ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το 0, ώστε $g(0) = -1$ και $f(x, g(x)) = 0$ για κάθε $x \in I$. Να υπολογιστεί η g'.

2. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x,y) = 1 + xy - \log(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$ ορίζει ακριβώς μία C^1 συνάρτηση $g: I \to \mathbb{R}$, όπου το I είναι ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το 1, ώστε $g(1) = -\frac{1}{2}\log(e-1)$ και $f(x, g(x)) = 0$ για κάθε $x \in I$. Να υπολογιστεί η $g'(1)$.

3. Να εξεταστεί αν πληρούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος των πεπλεγμένων συναρτήσεων για την εξίσωση

$$f(x,y) = \left(e^{y(1+x)} - 1\right)^7 + \sin x \cdot \sin\left(y^6 (1-x)\right) = 0$$

στο σημείο $(0,0)$.

4. Να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις ορίζουν λείες καμπύλες στο $\mathbb{R}^2$.

(α) $y^2 + y + 3x + 1 = 0$ (γ) $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(β) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ (δ) $x^3 + y^3 = 3xy$

5. Να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις ορίζουν λείες επιφάνειες στο $\mathbb{R}^3$.

(α) $2xe^y + y + z = -1$ (β) $x^2 + y^2 + z^2 - xyz = 1$

(γ) $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 1$, όπου ο $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9

1. Να ευρεθεί το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με τον μέγιστο δυνατό όγκο, του οποίου οι ακμές είναι παράλληλες προς τους άξονες και είναι εγγεγραμμένο στο ελλειψοειδές του $\mathbb{R}^3$ με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad , \text{ όπου } a>0,\ b>0,\ c>0$$

2. Να ευρεθούν οι διαστάσεις του ορθογώνιου παραλληλογράμμου που είναι εγγεγραμμένο στην έλλειψη του $\mathbb{R}^2$ με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \text{ όπου } a>0,\ b>0 \text{ και}$$

(α) έχει το μέγιστο δυνατόν εμβαδόν,

(β) έχει την μέγιστη δυνατή περίμετρο.

3. Να ευρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1^2+\dots+x_n^2,$$

όταν $\dfrac{x_1^2}{a_1^2}+\dots+\dfrac{x_n^2}{a_n^2}=1$, όπου $a_1>a_2>\dots>a_n>0$.

4. Να ευρεθούν οι διαστάσεις του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με τον μέγιστο δυνατόν όγκο, που είναι εγγεγραμμένο στην σφαίρα με ακτίνα 1.

5. Να ευρεθούν τα σημεία του συνόλου $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z^2-xy=1\}$ που βρίσκονται πλησιέστερα στο σημείο $(0,0,0)$.

6. Δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a>0$, $b>0$: S

(α) Να ευρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της S στο $(x_0,y_0)\in S$.

(β) Να ευρεθούν τα σημεία της S στα οποία η εφαπτομένη ευθεία της S και οι άξονες σχηματίζουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο με το ελάχιστο εμβαδόν.

7. Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας και $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)=\langle x, Ax\rangle$. Να αποδειχθεί ότι η ελάχιστη τιμή της $f|S^{n-1}$, όπου $S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|=1\}$ είναι ίση με την μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα A.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 11

1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_K x\,dx\,dy$, $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\le x^2+y^2\le 4\}$

(β) $\int_K e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1\}$

(γ) $\int_K (x^2+y^2)\,dx\,dy$, $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\le x^2+y^2\le 4$ και $0\le x\le y\le x\sqrt{3}\}$

2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_K (x+y+y^2)\,dx\,dy$, όπου $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+2y^2-2x-8y+5\le 0\}$.

3. Να αποδειχθεί ότι ο όγκος του υποσυνόλου του $\mathbb{R}^3$ που περικλείεται από το οριζόντιο επίπεδο, τον κύλινδρο με ελλειπτική βάση $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$, $a,b>0$ και το γράφημα της συνάρτησης $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}$, $p,q>0$ είναι ίσος με $\frac{1}{4}\pi ab\left(\frac{a^2}{p^2}+\frac{b^2}{q^2}\right)$.

4. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:
(α) $\int_K x\,dx\,dy\,dz$, (β) $\int_K xy\,dx\,dy\,dz$, (γ) $\int_K xyz\,dx\,dy\,dz$, όταν $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\le a^2,\ x,y\ge 0$ και $0\le z\le b\}$, $a,b>0$, και όταν $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le a^2,\ x,y,z\ge 0\}$, $a>0$.

5. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_K z\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, όπου K είναι το υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ που περιορίζεται από την μπάλλα ακτίνας $a>0$ με κέντρο $(0,0,0)$ και έχει βάση στο επίπεδο με εξίσωση $z=b$, όπου $b<a$.
(Υπόδειξη: Μετασχηματίζουμε σε κυλινδρικές συντεταγμένες και το αποτέλεσμα που βρίσκουμε είναι ίσο με $\frac{\pi}{2}\left[a^2-b^2-\sin(a^2-b^2)\right]$).

6. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_K \frac{yz}{1+x}\,dx\,dy\,dz$, όπου $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ x,y,z\ge 0\}$. (Απάντηση: $\frac{19-24\log 2}{36}$)

7. Έστω $a>0$, $I_a=[-a,a]\times[-a,a]$ και $D_a=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le a^2\}$.

(α) Να αποδειχθεί ότι $\int_{D_a} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\pi(1-e^{-a^2})$ και $\int_{I_a} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\left[\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right]^2$.

(β) Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{D_a} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\lim_{a\to+\infty}\int_{I_a} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\pi .$$

Συνεπώς $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\equiv\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$.

(Υπόδειξη: Για το (β) παρατηρούμε ότι $D_a\subset I_a\subset D_{2a}$ και εφαρμόζουμε το (α)).

1ος Ατυπος έλεγχος γνώσεων στον Απειροστικό Λογισμό ΙΙ

Ονοματεπώνυμο:

Πρόβλημα. Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{όταν } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{όταν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(α) Είναι η f συνεχής στο σημείο $(0,0)$;
(β) Να υπολογιστούν όλες οι κατευθυνόμενες παράγωγοι της f στο σημείο $(0,0)$, αν υπάρχουν.
(γ) Είναι η f διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$;

Απάντηση:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ — ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

2ος Ατυπος έλεγχος γνώσεων στον Απειροστικό Λογισμό ΙΙ

Ονοματεπώνυμο: Παναγιώτης Ζερβάκης

Πρόβλημα 1. Να ευρεθούν τα σημεία τοπικών ακροτάτων και τα σάγματα της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 - 2x - y.$$

Πρόβλημα 2. Να αποδειχθεί οτι το σύνολο $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - xy - 1 = 0\}$ είναι λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και να ευρεθούν τα σημεία της που βρίσκονται πλησιέστερα στο $(0,0,0)$.

Απαντήσεις:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3x^2 + y^2 - 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2xy - 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad = 0$$

$$3x^2 + y^2 - 2 = 0$$

$$2xy = 1$$

$$x = \frac{1}{2y}$$

$$3\frac{1}{4y^2} + y^2 - 2 = 0$$

$$3x^2 + y^2 - 2 = 2xy - 1$$

$$3x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$$

$$2x^2 + x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$$

$$2x^2 - 1 + (x-y)^2 = 0$$

$$\frac{3}{4y^2} + y^2 - 2 = 0 \Rightarrow \frac{3 + 4y^4 - 8y^2}{4y^2} = 0 \Rightarrow$$

3ος Ατυπος έλεγχος γνώσεων στον Απειροστικό Λογισμό ΙΙ

Ονοματεπώνυμο:

Πρόβλημα 1. Αν $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_B (x^2 + y^2)\,dxdy.$$

Πρόβλημα 2. Αν $R > 0$, να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \quad \text{και} \quad 0 \leq y \leq x, \quad z \geq 0\}.$$

Απαντήσεις: