

**Άσκηση 1**

(α)  $\{\neg P \vee (P \wedge Q)\} / P \rightarrow Q$

- |           |                            |   |
|-----------|----------------------------|---|
| (1)       | $\neg P \vee (P \wedge Q)$ | (Y)                                     |
| (2)       | Υποπαράγωγή                |   |
| (2.1)     | P                          | (YY)                                    |
| (2.2)     | Υποπαράγωγή                |   |
| (2.2.1)   | $\neg P$                   | (YY)                                    |
| (2.2.2)   | Υποπαράγωγή                |   |
| (2.2.2.1) | $\neg Q$                   | (YY)                                    |
| (2.2.2.2) | P                          | (2.1) με επανάληψη                      |
| (2.2.2.1) | $\neg P$                   | (2.2.1) με επανάληψη                    |
| (2.2.3)   | $\neg \neg Q$              | (2.2.2) με εισαγωγή $\neg$              |
| (2.2.4)   | Q                          | (2.2.3) με απαλοιφή $\neg$              |
| (2.3)     | Υποπαράγωγή                |   |
| (2.3.1)   | $P \wedge Q$               | (YY)                                    |
| (2.3.2)   | Q                          | (2.3.1) και απαλοιφή $\wedge$           |
| (2.4)     | Q                          | (1), (2.2) και (2.3) με απαλοιφή $\vee$ |
| (3)       | $P \rightarrow Q$          | (2) με εισαγωγή $\rightarrow$           |

(β)  $\{P, (Q \vee R)\} / (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

- |       |                                  |                                  |
|-------|----------------------------------|----------------------------------|
| (1)   | P                                | (Y)                              |
| (2)   | $(Q \vee R)$                     | (Y)                              |
| (3)   | Υποπαράγωγή                      |                                  |
| (3.1) | Q                                | (YY)                             |
| (3.2) | $P \wedge Q$                     | (1), (3.1) με εισαγωγή $\wedge$  |
| (3.3) | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ | (3.2) με εισαγωγή $\vee$         |
| (4)   | Υποπαράγωγή                      |                                  |
| (4.1) | R                                | (YY)                             |
| (4.2) | $P \wedge R$                     | (1), (4.1) με εισαγωγή $\wedge$  |
| (4.3) | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ | (4.2) με εισαγωγή $\vee$         |
| (5)   | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ | (2), (3), (4) με απαλοιφή $\vee$ |

(γ)  $\{P \wedge Q \rightarrow R, P\} / Q \rightarrow P$

- |       |                   |                                      |
|-------|-------------------|--------------------------------------|
| (1)   | Υποπαράγωγή       |                                      |
| (1.1) | Q                 | (YY)                                 |
| (1.2) | P                 | (Y)                                  |
| (1.3) | $P \wedge Q$      | (1.2), (1.1) με εισαγωγή $\wedge$    |
| (1.4) | R                 | (Y), (1.3) με απαλοιφή $\rightarrow$ |
| (2)   | $Q \rightarrow R$ | (1) με εισαγωγή $\rightarrow$        |

(δ)  $\{\neg(P \vee Q)\} / \neg P \wedge \neg Q$

- |       |                        |                               |
|-------|------------------------|-------------------------------|
| (1)   | Υποπαράγωγή            |                               |
| (1.1) | P                      | (YY)                          |
| (1.2) | $P \vee Q$             | (1.1) με εισαγωγή $\vee$      |
| (2)   | $\neg(P \vee Q)$       | (Y)                           |
| (3)   | $\neg P$               | (1), (2) με εισαγωγή $\neg$   |
| (4)   | Υποπαράγωγή            |                               |
| (4.1) | Q                      | (YY)                          |
| (4.2) | $P \vee Q$             | (4.1) με εισαγωγή $\vee$      |
| (5)   | $\neg Q$               | (4), (2) με εισαγωγή $\neg$   |
| (6)   | $\neg P \wedge \neg Q$ | (3), (5) με εισαγωγή $\wedge$ |

## Άσκηση 2

(α)  $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$

- (1)  $P \vee \neg P$  (αποκλεισμός μέσου)
- (2) Υποπαράγωγη
  - (2.1)  $P$  (YY)
  - (2.2) Υποπαράγωγη
    - (2.2.1)  $Q$  (YY)
    - (2.2.2)  $P$  (2.1) με επανάληψη
  - (2.3)  $Q \rightarrow P$  (2.2) με εισαγωγή  $\rightarrow$
  - (2.4)  $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$  (2.3) με εισαγωγή  $\vee$
- (3) Υποπαράγωγη
  - (3.1)  $\neg P$  (YY)
  - (3.2) Υποπαράγωγη
    - (3.2.1)  $P$  (YY)
    - (3.2.2) Υποπαράγωγη
      - (3.2.2.1)  $\neg Q$  (YY)
      - (3.2.2.2)  $P$  (3.2.1) με επανάληψη
      - (3.2.2.3)  $\neg P$  (3.1) με επανάληψη
    - (3.2.3)  $\neg \neg Q$  (3.2.2) με εισαγωγή  $\neg$
    - (3.2.4)  $Q$  (3.2.3) με απαλοιφή  $\neg$
  - (3.3)  $P \rightarrow Q$  (3.2) με εισαγωγή  $\rightarrow$
  - (3.4)  $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$  (3.3) με εισαγωγή  $\vee$
- (4)  $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$  (1), (2), (3) με απαλοιφή  $\vee$

(β)  $(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

- (1) Υποπαράγωγη
  - (1.1)  $Q \rightarrow R$  (YY)
  - (1.2) Υποπαράγωγη
    - (1.2.1)  $P \rightarrow Q$  (YY)
    - (1.2.2) Υποπαράγωγη
      - (1.2.2.1)  $P$  (YY)
      - (1.2.2.2)  $Q$  (1.2.1), (1.2.2.1) με απαλοιφή  $\rightarrow$
      - (1.2.2.3)  $Q \rightarrow R$  (1.1) με επανάληψη
      - (1.2.2.4)  $R$  (1.2.2.3), (1.2.2.2) με απαλοιφή  $\rightarrow$
    - (1.2.3)  $P \rightarrow R$  (1.2.2) με εισαγωγή  $\rightarrow$
    - (1.3)  $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$  (1.2) με εισαγωγή  $\rightarrow$
  - (2)  $(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$  (1) με εισαγωγή  $\rightarrow$