

Σχεσιακός Λογισμός

- Γλώσσα βασισμένη στον Κατηγορηματικό Λογισμό 1^{ης} Τάξης (First Order Predicate Calculus)
- Οι περισσότερες γλώσσες επρώτησης σχεσιακών βάσεων δεδομένων βασίζονται στον Σχεσιακό Λογισμό
- Σχεσιακός Λογισμός και Σχεσιακή Άλγεβρα έχουν την ίδια εκφραστική δύναμη
- Μια γλώσσα επρωτήσεων είναι **πλήρης** αν έχει την **ίδια εκφραστική δύναμη** με τη Σχεσιακή Άλγεβρα ή με τον Σχεσιακό Λογισμό
- Διακρίνεται σε
 - Σχεσιακό Λογισμό Πλειάδων (Tuple Relational Calculus - TRC)
 - Σχεσιακό Λογισμό Πεδίων (Domain Relational Calculus - DRC)

Σχεσιακός Λογισμός

- Μεταβλητές: $x, y, z, X, Y, Z, \dots x_1, x_2, \dots x_k$
 - Οι τιμές των μεταβλητών είναι τιμές γνωρισμάτων των σχεσιακών πινάκων
- Σύμβολα Σχέσεων: R, S, T, \dots ενός *συγκεκριμένου βαθμού*
 - αντιστοιχούν σε *ονόματα σχέσεων*
- Ατομικές ή Βασικές Προτάσεις
 - $R(x_1, x_2, \dots x_k)$ όπου R είναι ένα σύμβολο για σχέση k -βαθμού
 - $R(x_1, x_2, \dots x_k)$ ισοδύναμη έκφραση με $(x_1, x_2, \dots x_k) \in R$
 - επιτρέπεται η χρήση ίδιων μεταβλητών
 - $x \theta y$ όπου x, y είναι μεταβλητές και $\theta \in \{\leq, \geq, \neq, <, =, >\}$
 - $x \theta c$ όπου x είναι μεταβλητή, c είναι μια σταθερά, θ όπως πριν.

Σχεσιακός Λογισμός

- Μεταβλητές
 - Σχεσιακό Λογισμό Πλειάδων: μεταβλητές για **πλειάδες**
 - Σχεσιακό Λογισμό Πεδίων: μεταβλητές για **πεδία**

Προτάσεις Σχεσιακού Λογισμού

- Κάθε ατομική πρόταση, είναι πρόταση σχεσιακού λογισμού.
- Αν οι $F1, F2$ είναι προτάσεις σχεσιακού λογισμού, τότε και οι
 - $(F1 \wedge F2), (F1 \vee F2), \neg F1, (F1 \rightarrow F2)$ είναι προτάσεις σχεσιακού λογισμού
 - $(\exists x F)$ (υπάρχει μια τιμή ώστε η πρόταση F είναι αληθής)
 - $(\forall x F)$ (για κάθε τιμή της x , η πρόταση F είναι αληθής)είναι προτάσεις σχεσιακού λογισμού

Η χρήση ενός ποσοδείκτη (\exists, \forall) δεσμεύει κάθε στιγμιότυπο μιας μεταβλητής μέσα σε μια πρόταση

Προτάσεις Σχεσιακού Λογισμού

➤ Προτεραιότητα τελεστών

1. \neg, \exists, \forall : από αριστερά προς τα δεξιά
2. \wedge (σύζευξη) : από αριστερά προς τα δεξιά
3. \vee (διάζευξη) : από αριστερά προς τα δεξιά

Παράδειγμα:

- ✓ Η πρόταση $(\forall x_1) \neg P(x_1, x_2) \vee Q(x_2) \wedge R(x_1)$ ομαδοποιείται ως
- $$(\forall x_1) (\neg P(x_1, x_2)) \vee (Q(x_2) \wedge R(x_1))$$

Προτάσεις Σχεσιακού Λογισμού

- Οι **προτάσεις** του Σχεσιακού Λογισμού δηλώνουν **σχέσεις** (μπορεί και μη-πεπερασμένες)
- Κάθε πρόταση χρησιμοποιεί ένα σύνολο **μεταβλητών**
 - **Ελεύθερες** (free)
 - **Δεσμευμένες** (bound)

Η χρήση ενός ποσοδείκτη (\exists , \forall) δεσμεύει κάθε στιγμιότυπο της μεταβλητής που εισάγει ο ποσοδείκτης μέσα σε μια πρόταση

Παραδείγματα προτάσεων σχεσιακού λογισμού πεδίων

- Έστω R μια σχέση βαθμού 2
 1. $(\exists x) R(x,x)$
 2. $(\forall x) (\forall y) (\exists z) (R(x,y) \wedge R(y,z))$
 3. $(\exists z_1) (\exists z_2) (R(x, z_1) \wedge R(z_1, z_2) \wedge R(z_2, y))$
 4. $(\exists y) (\exists z) (R(x, y) \wedge R(x,z) \wedge R(y \neq z))$
- Ελεύθερες και Δεσμευμένες Μεταβλητές
 - Στις (1), (2) δεν υπάρχει ελεύθερη μεταβλητή
 - Στην (3) ελεύθερες μεταβλητές είναι οι x,y
 - Στην (4) ελεύθερη μεταβλητή είναι η x

Μια μεταβλητή είναι ελεύθερη αν πρέπει να δεσμευτεί σε μια τιμή ώστε να μπορούμε να κρίνουμε την πρόταση ως αληθή
Οι ελεύθερες μεταβλητές δεν σχετίζονται με ποσοδείκτες.

Προτάσεις Σχεσιακού Λογισμού Πεδίων

- Μια Έκφραση Σχεσιακού Λογισμού Πεδίων έχει τη μορφή

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_k) : F(x_1, x_2, \dots, x_k)\}$$

όπου F είναι μια πρόταση του σχεσιακού λογισμού και x_1, x_2, \dots, x_k είναι ελεύθερες μεταβλητές
- Όταν μια έκφραση Σχεσιακού Λογισμού Πεδίων $\{(x_1, x_2, \dots, x_k) : F(x_1, x_2, \dots, x_k)\}$ αποτιμάται σε μια σχεσιακή βάση I επιστρέφει μια σχέση k -βαθμού η οποία περιέχει όλες εκείνες τις πλειάδες (a_1, a_2, \dots, a_k) που κάνουν αληθή την πρόταση F στη βάση I .

Παράδειγμα:

- Έκφραση $\{(x, z) : \exists y R(x, y) \wedge R(y, z)\}$ επιστρέφει όλα τα ζεύγη τιμών (a, b) για τις οποίες υπάρχει τιμή για την μεταβλητή y ώστε $R(a, y)$ και $R(y, b)$ να είναι αληθή.

Παράδειγμα (1)

Customers (cid, cname, city, discount)

- ✓ «Βρείτε τους κωδικούς και τα ονόματα των πελατών»
 - ✓ Σχέση: Customers
 - ✓ Μεταβλητές: x_1, x_2, x_3, x_4
 - ✓ Ατομική Πρόταση: Customers(x_1, x_2, x_3, x_4)
 - ✓ Έκφραση Σχεσιακού Λογισμού

$\{(x_1, x_2) : (\exists x_3) (\exists x_4) \text{ Customers}(x_1, x_2, x_3, x_4) \}$

Παράδειγμα (2)

Customers (cid, cname, city, discount)

- ✓ «Βρείτε τους κωδικούς και τα ονόματα των πελατών που ζουν στη Νέα Υόρκη»
 - ✓ Σχέση : Customers
 - ✓ Μεταβλητές: x_1, x_2, x_3, x_4
 - ✓ Ατομική Πρόταση: Customers(x_1, x_2, x_3, x_4)
 - ✓ Έκφραση Σχεσιακού Λογισμού

$\{(x_1, x_2): (\exists x_3)(\exists x_4) \text{ Customers}(x_1, x_2, x_3, x_4) \wedge x_3 = \text{'NY'}\}$

Παράδειγμα (3)

Customers (cid, cname, city, discount)

➤ «Βρείτε το αναγνωριστικό των πελατών με έδρα την Νέα Υόρκη που έχουν την μεγαλύτερη έκπτωση»

✓ Σχέση : Customers

✓ Μεταβλητές: x_1, x_2, x_3, x_4

✓ Ατομική Πρόταση: Customers(x_1, x_2, x_3, x_4)

✓ Έκφραση Σχεσιακού Λογισμού

$$\{x_1 : (\exists x_2) (\exists x_3) (\exists x_4) (\text{Customers}(x_1, x_2, x_3, x_4) \wedge x_3 = \text{'NY'} \wedge$$
$$(\forall y_1, y_2, y_3, y_4 (\text{Customers}(y_1, y_2, y_3, y_4) \wedge$$
$$y_3 = \text{'NY'}) \rightarrow y_4 \leq x_4))\}$$

Σχεσιακός Λογισμός: Πράξη Σύζευξης

- Έστω $R(A,B,C)$ και $S(B, C, D)$ δυο σχέσεις βαθμού 3.
- Η πράξη σύζευξης στην Σχεσιακή Άλγεβρα (Σ.Α.) $R \text{ JOIN } S$ εκφράζεται με τη χρήση των τελεστών επιλογής (σ), καρτεσιανού γινομένου (\times) και προβολής (π)

$$R \text{ JOIN } S = \pi_{R.A, R.B, R.C, S.D} (\sigma_{R.B=S.B \wedge R.C=S.C} (R \times S))$$

- Η έκφραση Σχεσιακού Λογισμού (Σ.Λ.) που εκφράζει την πράξη σύζευξης είναι

$$\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : R(x_1, x_2, x_3) \wedge S(x_2, x_3, x_4) \}$$

$$\checkmark (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow \pi_{R.A, R.B, R.C, S.D}$$

$$\checkmark R(....) \wedge S(....) \rightarrow R \times S$$

$$\checkmark \text{χρήση των ίδιων μεταβλητών} \rightarrow \sigma_{R.B=S.B \wedge R.C=S.C}$$

Παράδειγμα (4a)

Products (pid, pname, city, quantity, price)

Orders (orderid, cid, aid, pid, qty, amt)

✓ «Βρείτε τα ονόματα και την τιμή των προϊόντων που παραγγέλνει πελάτης c002.»

✓ Σχέση : Products

✓ Μεταβλητές: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

✓ Σχέση : Orders

✓ Μεταβλητές: $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$

✓ Έκφραση Σχεσιακού Λογισμού

✓ $\{ (x_2, x_5) \mid (\exists x_1) (\exists x_3) (\exists x_4) (\exists y_1) (\exists y_2) (\exists y_3) (\exists y_4) (\exists y_5) (\exists y_6)$

$\text{Products}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \wedge \text{Orders}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \wedge y_2 = \text{“c002”} \wedge$

$x_1 = y_4 \}$

Παράδειγμα (4b)

Products (pid, pname, city, quantity, price)

Orders (orderid, cid, aid, pid, qty, amt)

✓ «Βρείτε τα ονόματα και την τιμή των προϊόντων που παραγγέλνει ο πελάτης c002.»

✓ Σχέση : Products

✓ Μεταβλητές: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

✓ Σχέση : Orders

✓ Μεταβλητές: $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$

✓ Έκφραση Σχεσιακού Λογισμού

✓ $\{ (x_2, x_5) \mid (\exists x_1) (\exists x_3) (\exists x_4) (\exists y_1) (\exists y_3) (\exists y_5) (\exists y_6)$

$\text{Products}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \wedge \text{Orders}(y_1, c002, y_3, x_1, y_5, y_6) \}$

Παράδειγμα (5a)

(P) Products (pid, pname, city, quantity, price)

(O) Orders (orderid, cid, aid, pid, qty, amt)

✓ «Βρείτε τα ονόματα και την τιμή των προϊόντων που παραγγέλνει ο πελάτης c002 μέσω του πράκτορα a01»

✓ Σχέση : Products

✓ Μεταβλητές: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

✓ Σχέση : Orders

✓ Μεταβλητές: $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$

✓ Έκφραση Σχεσιακού Λογισμού

✓ $\{ (x_2, x_5) \mid (\exists x_1) (\exists x_3) (\exists x_4) (\exists y_1) (\exists y_2) (\exists y_3) (\exists y_4) (\exists y_5) (\exists y_6)$

$\text{Products}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \wedge \text{Orders}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \wedge$

$y_2 = \text{"c002"} \wedge y_3 = \text{"a01"} \wedge x_1 = y_4 \}$

Παράδειγμα (5b)

(P) Products (pid, pname, city, quantity, price)

(O) Orders (orderid, cid, aid, pid, qty, amt)

✓ «Βρείτε τα ονόματα και την τιμή των προϊόντων που παραγγέλνει ο πελάτης c002 μέσω του πράκτορα a01»

✓ Σχέση : Products

✓ Μεταβλητές: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

✓ Σχέση : Orders

✓ Μεταβλητές: $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$

✓ Έκφραση Σχεσιακού Λογισμού

✓ $\{ (x_2, x_5) \mid (\exists x_1) (\exists x_3) (\exists x_4) (\exists y_1) (\exists y_5) (\exists y_6) \}$

Products(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \wedge Orders($y_1, c002, a01, x_1, y_5, y_6$)}

Σχεσιακός Λογισμός: Πράξη Διαίρεσης

- ✓ Η πράξη της διαίρεσης στην Σχεσιακή Άλγεβρα (Σ.Α.) $R \div S$ εκφράζεται με τη χρήση των τελεστών καρτεσιανού γινομένου (\times) προβολής (π) και αφαίρεσης ($-$).
 - Έστω σχέσεις R, S με $\text{Head}(R) = \{A_1, A_2, \dots, A_r, B_1, B_2, \dots, B_s\}$ και $\text{Head}(S) = \{B_1, B_2, \dots, B_s\}$ με $r, s \geq 0$.

$$R \div S := \pi_{A_1, A_2, \dots, A_r}(R) - \pi_{A_1, A_2, \dots, A_r}((\pi_{A_1, A_2, \dots, A_r}(R) \times S) - R)$$
 - Η σχέση $T = R \div S$
 - έχει βαθμό $r - s$ όπου r, s είναι οι βαθμοί της R, S αντίστοιχα
 - Περιέχει όλες τις πλειάδες $(a_1, a_2, \dots, a_{r-s})$ τέτοιες ώστε, για κάθε πλειάδα (b_1, b_2, \dots, b_s) της S , υπάρχει η πλειάδα $(a_1, a_2, \dots, a_{r-s}, b_1, b_2, \dots, b_s)$ στην R .
 - Έστω $R(A, B, C, D, E)$ και $S(C, D, E)$ δυο σχέσεις βαθμού 5 και 3.
 - Η έκφραση Σχεσιακού Λογισμού (Σ.Λ.) που εκφράζει την πράξη διαίρεσης για τις $R(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), S(x_3, x_4, x_5)$ είναι

$$\{(x_1, x_2): (\forall x_3)(\forall x_4)(\forall x_5)(S(x_3, x_4, x_5) \rightarrow R(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))\}$$

Σχεσιακή Άλγεβρα → Σχεσιακό Λογισμό Πεδίων

- Θεώρημα 1: Κάθε έκφραση της Σχεσιακής Άλγεβρας (Σ.Α.) μπορεί να εκφραστεί στον Σχεσιακό Λογισμό Πεδίων (Σ.Λ.Π.)
- **Απόδειξη**: Χρησιμοποιώντας επαγωγή στον αριθμό των τελεστών της αλγεβρικής έκφρασης ότι για κάθε έκφραση E της Σ.Α. η οποία ορίζει μια σχέση βαθμού k , υπάρχει μια πρόταση F του Σ.Λ.Π. η οποία ορίζει την ίδια σχέση.
 - Βάση Επαγωγής: Αν E είναι μια σχέση R με βαθμό k , τότε η έκφραση Σ.Λ. είναι $\{(x_1, x_2, \dots, x_k) : R(x_1, x_2, \dots, x_k)\}$
 - Υπόθεση Επαγωγής: Έστω ότι για τις εκφράσεις Σ.Α. E_1, E_2 , οι οποίες ορίζουν σχέσεις βαθμού k , υπάρχουν προτάσεις F_1, F_2 του Σ.Λ. οι οποίες ορίζουν τις ίδιες σχέσεις.
 - Επαγωγικό Βήμα: Θα δείξουμε ότι υπάρχουν προτάσεις του Σ.Λ.Π. οι οποίες ορίζουν τις ίδιες σχέσεις με τις εκφράσεις: $E_1 \cup E_2, E_1 - E_2, \pi_x(E_1), E_1 \times E_2, \sigma_F(E_1)$

Σχεσιακή Άλγεβρα → Σχεσιακό Λογισμό Πεδίων

1. $E = E_1 \cup E_2.$

✓ E_1 είναι σχέση k-βαθμού - αντιστοιχεί στην πρόταση Σ.Λ.Π. $F_1(x_1, x_2, \dots, x_k)$

✓ E_2 είναι σχέση k-βαθμού - αντιστοιχεί στην πρόταση $F_2(x_1, x_2, \dots, x_k)$

όπου x_1, x_2, \dots, x_k Σ.Λ.Π. ελεύθερες μεταβλητές

✓ Έκφραση Σ.Λ.Π. για $E = E_1 \cup E_2.$

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_k) : F_1(x_1, x_2, \dots, x_k) \vee F_2(x_1, x_2, \dots, x_k)\}$$

Σχεσιακή Άλγεβρα → Σχεσιακό Λογισμό Πεδίων

2. $E = E_1 - E_2$

- ✓ E_1 είναι σχέση k-βαθμού - αντιστοιχεί στην πρόταση Σ.Λ.Π. $F_1(x_1, x_2, \dots, x_k)$
- ✓ E_2 είναι σχέση k-βαθμού - αντιστοιχεί στην πρόταση Σ.Λ.Π. $F_2(x_1, x_2, \dots, x_k)$

όπου x_1, x_2, \dots, x_k ελεύθερες μεταβλητές

- ✓ Έκφραση Σ.Λ.Π. για $E = E_1 - E_2$

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_k) : F_1(x_1, x_2, \dots, x_k) \wedge \neg F_2(x_1, x_2, \dots, x_k)\}$$

Σχεσιακή Άλγεβρα → Σχεσιακό Λογισμό Πεδίων

3. $E = E_1 \times E_2$

- ✓ E_1 είναι σχέση n -βαθμού - αντιστοιχεί στην πρόταση Σ.Λ.Π. $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- ✓ E_2 είναι σχέση m -βαθμού - αντιστοιχεί στην πρόταση Σ.Λ.Π. $F_2(y_1, y_2, \dots, y_m)$
- ✓ $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \cap \{y_1, y_2, \dots, y_m\} = \emptyset$.
- ✓ Έκφραση Σ.Λ. για $E = E_1 \times E_2$

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) : F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge F_2(y_1, y_2, \dots, y_m)\}$$

Σχεσιακή Άλγεβρα → Σχεσιακό Λογισμό Πεδίων

4. $E = \pi_{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}}(E_1)$

✓ E_1 είναι σχέση k-βαθμού - αντιστοιχεί στην πρόταση Σ.Λ.Π. $F_1(x_1, x_2, \dots, x_k)$

✓ $\{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}\} \cap \{x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jm}\} = \emptyset$ και

✓ $\{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}\} \cup \{x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jm}\} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$

✓ $\{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}\} \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$

✓ $\{x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jm}\} \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$

✓ Έκφραση Σ.Λ. για $\pi_{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}}(E_1)$

$$\{(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) : (\exists x_{j1}) (\exists x_{j2}) \dots (\exists x_{jm}) F_1(x_1, x_2, \dots, x_k)\}$$

Σχεσιακή Άλγεβρα → Σχεσιακό Λογισμό Πεδίων

5. $E = \sigma_{x_i \theta x_j} (E_1).$

- ✓ είναι σχέση k-βαθμού - αντιστοιχεί στην πρόταση Σ.Λ.Π. $F_1(x_1, x_2, \dots, x_k)$
- ✓ $x_i, x_j \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$
- ✓ Έκφραση Σ.Λ.
- ✓ $\{(x_1, x_2, \dots, x_k) : F_1(x_1, x_2, \dots, x_k) \wedge (x_i \theta x_j)\}$

Πεδίο Τιμών

- Κάθε **μεταβλητή** σε μια πρόταση του σχεσιακού λογισμού πεδίων παίρνει τιμές από ένα **πεδίο τιμών**
 - Περιλαμβάνει τις τιμές που εμφανίζονται στην ίδια την πρόταση σχεσιακού λογισμού πλειάδων και στη βάση δεδομένων
- Το **πεδίο τιμών πρότασης F - $\text{dom}(F)$** - ορίζεται ως η **ένωση**
 - των συνόλων όλων των **σταθερών** που εμφανίζονται στην F
 - τις **προβολές των γνωρισμάτων όλων των σχέσεων** της F
- **$\text{dom}(F)$** : εξαρτάται από τις **σχέσεις** που βρίσκονται στην πρόταση F

Πεδία Τιμών – Παράδειγμα (9)

1. Πρόταση:

$$\text{➤ } F = P(x,y) \wedge Q(y,z) \vee x > 10 = (P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee (x > 10)$$

Πεδίο Τιμών:

$$\text{➤ } \text{dom}(F) = \{10\} \cup \pi_x(P) \cup \pi_y(P) \cup \pi_y(Q) \cup \pi_z(Q)$$

2. Πρόταση:

$$\text{➤ } F = \neg \text{Reserves}(x, y, z)$$

Πεδίο Τιμών:

$$\text{➤ } \text{dom}(F) = \pi_x(\text{Reserves}) \cup \pi_y(\text{Reserves}) \cup \pi_z(\text{Reserves})$$

Διαισθητικά, μια πρόταση λέγεται ανεξάρτητη πεδίου αν η σχέση η οποία την ορίζει δεν μπορεί να περιέχει πλειάδες οι οποίες περιλαμβάνουν σταθερές που δεν ανήκουν στο πεδίο της

Προτάσεις Ανεξάρτητες Πεδίου

- **Ορισμός:** Έστω $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ μια πρόταση του Σ.Λ.Π. και $\text{dom}(F) \subseteq D$ με D ένα σύνολο τιμών.

Ορίζουμε τη **σχέση της F αναφορικά με το σύνολο τιμών D** ως το **σύνολο των πλειάδων (a_1, a_2, \dots, a_n) του D^n** οι οποίες είναι τέτοιες ώστε, όταν κάθε x_i αντικατασταθεί με την τιμή a_i τότε η $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ είναι **αληθής**.

- Πρόταση F λέγεται **ανεξάρτητη πεδίου** αν η σχέση της αναφορικά με το D δεν εξαρτάται από το ίδιο το D .
- Αν η F είναι **ανεξάρτητη πεδίου**, τότε η σχέση της αναφορικά με οποιοσδήποτε σύνολο D , είναι η ίδια με τη σχέση της με το σύνολο $\text{dom}(F)$.

Παραδείγματα (10)

1. Πρόταση:

- $F_1 = \neg R(x, y)$
- **Πεδίο Τιμών:**
 - $\text{dom}(F_1) = \pi_x(R) \cup \pi_y(R)$
- F_1 δεν είναι ανεξάρτητη πεδίου.
 - Αν $D \supseteq \text{dom}(F_1)$, τότε η σχέση που ορίζει η F_1 είναι όλες οι πλειάδες που ανήκουν στο $D \times D$ και δεν ανήκουν στην R .
 - Έστω τιμή a , ανήκει στο D , και δεν ανήκει στο $\text{dom}(F_1)$.
 - Η πλειάδα (a, a) ανήκει στη σχέση που ορίζει η F_1 αναφορικά με το D , αλλά όχι στη σχέση της F_1 αναφορικά με το $\text{dom}(F_1)$.

Παραδείγματα (11)

2. Πρόταση:

➤ $F_2 = (\exists y) (R(x,y) \vee Q(y,z))$

Πεδίο Τιμών:

➤ $\text{dom}(F_2) = \pi_x(R) \cup \pi_y(R) \cup \pi_y(Q) \cup \pi_z(Q)$

➤ Έστω $R = \{(a,b), (c,d)\}$ και $Q = \{(e,f)\}$

➤ $\text{dom}(F_2) = \{a,b,c,d,e,f\}$

➤ F_2 δεν είναι ανεξάρτητη πεδίου.

➤ Αν $D = \{a,b,c,d,e,f,g\} \supseteq \text{dom}(F_2)$ τότε η πλειάδα (a,g) ανήκει στη σχέση που ορίζει η F_2 αναφορικά με το D αλλά όχι στη σχέση που ορίζει αναφορικά με το $\text{dom}(F_2)$.

Παραδείγματα (12)

2. Πρόταση:

$$\triangleright F_3 = (\exists y) (R(x,y) \wedge Q(y,z))$$

Πεδίο Τιμών:

$$\triangleright \text{dom}(F_3) = \pi_x(R) \cup \pi_y(R) \cup \pi_y(Q) \cup \pi_z(Q)$$

$\triangleright F_3$ είναι ανεξάρτητη πεδίου.

1. Έστω (a,b) μια πλειάδα στη σχέση της F_3 αναφορικά με το σύνολο D .
2. Πρέπει να υπάρχει μια τιμή c τέτοια ώστε $R(a,c) \wedge Q(c,b)$ να είναι αληθής -- $(a,c) \in R, (c,b) \in Q$.
3. $a \in \pi_x(P), b \in \pi_z(Q)$, και $\{a, b\} \in \text{dom}(F_3)$.
4. Για οποιοδήποτε $D \supset \text{dom}(F_3)$, το σύνολο των ζευγών τιμών στη σχέση της F_3 αναφορικά με το D θα είναι το ίδιο με τη σχέση της F_3 αναφορικά με το $\text{dom}(F_3)$.

Ασφαλείς Προτάσεις

- Η ανεξαρτησία πεδίου είναι μια έννοια η οποία αφορά τη σημασιολογία των προτάσεων του σχεσιακού λογισμού.
- Δεν υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος αποφασίζει αν μια πρόταση είναι ανεξάρτητη πεδίου
- **Ασφαλείς προτάσεις:** υποσύνολο των προτάσεων που είναι **ανεξάρτητες πεδίου** και ορίζουν **πεπερασμένες σχέσεις**.
 - **Παράδειγμα:** Η έκφραση $\{ (x, y) \mid \neg R(x, y) \}$ ορίζει μια **μη-πεπερασμένη σχέση**
- Υπάρχει ένας αλγόριθμος ο οποίος εξετάζει την σύνταξη των προτάσεων για να αποφασίσει αν μια πρόταση είναι ασφαλής ή όχι.

Ασφαλείς Προτάσεις

➤ **Ορισμός:** Μια πρόταση του Σ.Λ.Π. είναι **ασφαλής** αν:

1. Δεν χρησιμοποιείται ο καθολικός ποσοδείκτης \forall
2. Αν $F = F_1 \vee F_2$ τότε F_1 και F_2 έχουν τις ίδιες ελεύθερες μεταβλητές.
3. Για οποιαδήποτε υπο-πρόταση $F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_m$ της F όλες οι ελεύθερες μεταβλητές των F_i πρέπει να είναι περιορισμένες:

Μια μεταβλητή είναι **περιορισμένη** εάν

- a. είναι **ελεύθερη** σε μια υπο-πρόταση F_i όπου η F_i δεν είναι αριθμητική σύγκριση και δεν προηγείται η άρνηση \neg
- b. αν F_i είναι της μορφής $X = c$ όπου c είναι μια σταθερά τότε η X είναι **περιορισμένη** μεταβλητή
- c. αν F_i είναι της μορφής $X = Y$ και η Y είναι **περιορισμένη**, τότε η X είναι **περιορισμένη**.

4. Η F είναι ασφαλής αν είναι της μορφής $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_j \wedge \neg G \wedge I_1 \wedge I_2 \wedge \dots \wedge I_k$ και οι συζεύξεις ικανοποιούν τον παραπάνω κανόνα και αν **τουλάχιστον ένα από τα H ή I δεν έχει άρνηση**.

Παραδείγματα (13)

1. Πρόταση : $x=y$: δεν είναι ασφαλής
 - ✓ καμία από τις x, y δεν είναι περιορισμένη
2. Πρόταση : $(x=y) \wedge R(x,y)$: είναι ασφαλής
3. Πρόταση : $(x=y) \vee R(x,y)$: δεν είναι ασφαλής
4. Πρόταση : $R(x,y,z) \wedge \neg (Q(x,y) \vee S(y,z))$: δεν είναι ασφαλής
5. Πρόταση : $R(x,y,z) \wedge \neg Q(x,y) \wedge \neg S(y,z)$: ασφαλής
 - ✓ ισοδύναμη με την (4)