ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ 2015 ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΙ

ΘΕΜΑ 1ο. (2) Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{όταν } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{όταν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η f είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$.
(β) Για κάθε $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, με $(u,v) \neq (0,0)$, να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος $f'((0,0);(u,v))$.
(γ) Είναι η f διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$;

ΘΕΜΑ 2ο. (1,5) Να ευρεθούν τα σημεία τοπικών ακροτάτων και τα σάγματα της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = x^2 + 1 - 2x\cos y.$$

ΘΕΜΑ 3ο. (2,5) Να αποδειχθεί οτι το σύνολο

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

είναι λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και να ευρεθούν τα σημεία του με την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $(0,0,0)$.

ΘΕΜΑ 4ο. (1,5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_B (x+y)dxdy$, όπου B είναι το τραπέζιο στο $\mathbb{R}^2$ με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(3,0)$, $(2,1)$ και $(1,1)$.

ΘΕΜΑ 5ο. (1,5) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z \leq 9, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0\}.$$

ΘΕΜΑ 6ο. (1,5) Αν $R > 0$ και

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2, \quad z \geq R, \quad 0 \leq y \leq x\},$$

να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_K \frac{1}{z^2} dxdydz.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Φροντιστήριο Απ 2

Ιούλιος 2015

Cauchy Schwartz: $|x\cdot y| \le |x|\cdot|y|$

ταυτότητες: $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

$\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

Θέμα 1ο

$$f(x,y)\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Το $x_0\,y_0$ είναι το (

α. νδο f συνεχής στο (0,0) (- γενικά f συνεχής στο (x_0,y_0)

αν $|f(x,y)-f(x_0,y_0)| \le \|(x,y)-(x_0,y_0)\|$

αφού είναι 0!

άρα $$\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x^3-y^3|}{x^2+y^2} = \frac{|(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)|}{x^2+y^2}$$

και σύμφωνα με την ανισότητα $$\le \frac{|x-y|\cdot|x^2+xy+y^2|}{x^2+y^2}$$

Γενικά $|x-y| \le |x|+|y|$

άρα $$\le \frac{(|x|+|y|)(x^2+y^2+|xy|)}{x^2+y^2}$$

$$\le \frac{(|x|+|y|)\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}} = |x|+|y|$$

β. κατευθυνόμενη παράγωγος

Γενικά θέτουμε $F(t)=f((x_0,y_0)+t(u,v))=f(x_0+tu,\ y_0+tv)$

Τότε από ορισμός $f'((x_0,y_0),(u,v)) = F'(0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x_0+tu,\ y_0+tv)}{t}$

$F(t)=f(tu,tv)$

$$F'(0)=\lim \frac{f(tu,tv)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^3u^3-t^3v^3}{t(t^2u^2+t^2v^2)} \overset{t^3(\dots)}{=} \dots = \frac{u^3-v^3}{u^2+v^2}$$

κατευθυνόμενη παράγωγος.

γ. διαφορίσιμη η f στο (0,0)

Γενικά : Βήμα 1:° Υπολογίζω $\frac{df}{dx}(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((x_0,y_0)+t(1,0))-f(}{t}$, $\forall t\neq$

$\frac{df}{dy}(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((x_0,y_0)+t(0,1))-f(x_0,}{t}$ $\forall t\neq$

Βήμα 2:° Ορίζω $T=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$ και $h=(h_1,h_2)\neq 0$ ό/

τότε, θέλω $\lim_{h\to(x_0,y_0)}\frac{\left\| f((x_0,y_0)+(h_1,h_2))-f(x_0,y_0)-T\cdot\binom{h_1}{h_2}\right\|}{\|h\|}$ -

, $\|h\|=\sqrt{h_1^2+h_2^2}$

$$\frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t}=\frac{f(t,0)}{t}=\frac{\frac{t^3}{t^2}}{\frac{t}{1}}=1$$

άρα $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$

→ μερική παράγωγος στο y

$\frac{f(0,t)}{t}=-1$ άρα $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1$

άρα αφού υπάρχουν (όχι ∞) οι μερικές παράγωγοι μπορώ να πάω στο επόμενο βή

Ορίζω $T=(1,-1)$

$$\frac{\left|f((0,0)+(h_1,h_2))-f(0,0)-(1,-1)\binom{h_1}{h_2}\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\frac{\left|f(h_1,h_2)-(h_1-h_2)\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

παίρνω ευθ

$f(0,t)$

$f(t,0)$

$f(\frac{1}{t},\frac{1}{t})$

⋮

$$=\frac{\left|\frac{h_1^3-h_2^3}{h_1^2+h_2^2}-(h_1-h_2)\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\frac{\frac{\left|h_1^3-h_2^3-(h_1-h_2)(h_1^2+h_2^2)\right|}{|h_1^2+h_2^2|}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$\nexists$

$$\leq\frac{|(h_1-h_2)h_1\cdot h_2|}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}$$

απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$ στο lim.

Για $h_1=2h_2$ $f(2h_2,h_2)=\frac{2h_2^2}{(5h_2^2)^{3/2}}=$

Για $h_1=0$ $f(h_1,h_2)=f(0,h_2)=0$

Το όριο ∄ άρα η f δεν είναι διαφορίσιμη

Θεμα 2°

$$f(x,y) = x^2 + 1 - 2x\cos y$$

Τοπικά ακρότατα:

Γενικά, **Β1°** Βρίσκουμε τα $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ και λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} \frac{df}{dx} = 0 \\ \frac{df}{dy} = 0 \end{cases}$

για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία (x_0, y_0)

Β2° Βρίσκουμε τον πίνακα $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{d^2f}{dx^2} & \frac{d^2f}{dxdy} \\ \frac{d^2f}{dxdy} & \frac{d^2f}{dy^2} \end{pmatrix}$ Εσσιανός πίνακας

και μετά βρίσκουμε τον πίνακα

$\forall$ κρίσιμο σημείο δηλ. τον $Hf(x_0,y_0)$

Β3° Βρίσκουμε το $\det Hf(x_0,y_0)$ $\forall (x_0,y_0)$

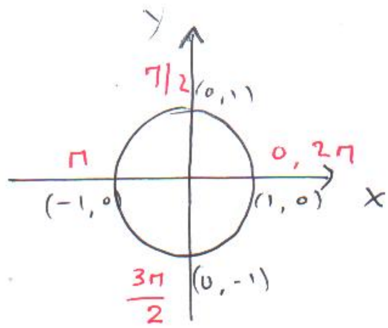
Β4°

- Αν $\det Hf(x_0,y_0) > 0$ και $\frac{dF}{dxdy} > 0$ έχω ελάχιστο!
- Αν $\det Hf(x_0,y_0) > 0$ και $\frac{d^2f}{dxdy} < 0$ έχω μέγιστο
- Αν $\det Hf(x_0,y_0) <$ έχουμε σαγματικό σημείο (σάγμα)
- Αν $\det Hf(x_0,y_0) = 0$ Δεν συμπεραίνουμε!

↗

$f(x,y) = x^2 + 1 - 2x\cos y$

το ημ αντιστ στο y
το συν αντιστ στο x
$(x,y) = (\cos, \sin)$



$$\frac{df}{dx} = 2x - 2\cos y \quad , \quad \frac{df}{dy} = 2x\sin y$$

$$\begin{cases} 2x = 2\cos y \\ 2x\sin y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ x = 0 \text{ ή } \sin y = 0 \end{cases}$$

- Αν $x=0$: $\cos y = 0 \Rightarrow y = \pm\pi/2$ $\quad (0, \pi/2)$, $(0, -\pi/2)$

- Αν $\sin y = 0$: $y = 0$ ή $\cancel{y=\pi}$ απορριπτ. $\qquad$ κρίσιμα σημεία

  $y=0$: $x = \cos 0 \Rightarrow x = 1$ $\quad$ αρα το κρισιμο σημειο είναι το $(1,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2\sin y, \quad Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2\sin y \\ 2\sin y & 2x\cos y \end{pmatrix}$$

$$\det Hf(x,y) = 2 \cdot 2x\cos y - 2\sin^2 y = 4x\cos y - 4\sin^2 y$$

- $\det Hf(0, \pi/2) = -4$ Σαγμα
- $\det Hf(0, -\pi/2) = -4$ ιι—
- $\det Hf(1,0) = 4 > 0$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 > 0$ $\quad$ αρα εχω Ελάχιστο

Θέμα 3=°

Λεία επιφάνεια : $S = \{ (x, y, z \dots) \in \mathbb{R}^n : h(x, y \dots) = c \}$, c : σταθερά

Βήμα 1=° Βρίσκω τα κρίσιμα σημεία λύνοντας το σύστημα $\frac{dh}{dx} = 0$, $\frac{dh}{dy} = 0$

Βήμα 3=° Αν το κρίσιμο σημείο $(x_0, y_0 \dots) \notin$ δηλ $h(x_0, y_0 \dots) \neq c$ τότε S λεί

Πλησιέστερο σημείο: Αν $(x_1, y_1 \dots)$ το σημείο από το οποίο ψάχνουμε την απόσταση

ορίζουμε : $f(x_1, y_1 \dots) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + \dots$

Από Θ. Lagrange : $\frac{df}{dx} = \lambda \frac{dh}{dx}$, $\frac{df}{dy} = \lambda \frac{dh}{dy}$ ...

$h(x, y, z) = 4x^2 + y^2 - z^2$

$\frac{dh}{dx} = 8x$, $\frac{dh}{dy} = 2y$, $\frac{dh}{dz} = -2z$ $\longrightarrow$ $8x = 0$ $2y = 0$ $-2z = 0$

$x = 0$ $y = 0$ $z = 0$

Άρα κρίσιμο σημείο το $(0, 0, 0)$

$4 \cdot 0^2 + 0^2 - 0^2 = 1 \Rightarrow 0 = 1$ άτοπο ! άρα S λεία

• έδειξα ότι είναι λείο, τώρα θέλω να βρω το πλησιέστερο σημείο.

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \lambda \frac{dh}{dx} \\ \frac{df}{dy} &= \lambda \frac{dh}{dy} \\ \frac{df}{dz} &= \lambda \cdot \frac{dh}{dz} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 2x &= 8\lambda x \\ 2y &= 2\lambda y \\ 2z &= -2\lambda z \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x \cdot (1 - 4\lambda) &= 0 \\ y(1 - \lambda) &= 0 \\ z(1 + \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

$h(x, y, z) = c$

• Αν $\lambda = 0$: $x = y = z$

$h(0,0,0) = 1 \Rightarrow 0 = 1$ άτοπ

άρα $\lambda \neq 0$

• Αν $y = z = 0$, $x \neq 0$ $x = \pm 1/2$

Αν $x = z = 0$, $y \neq 0$ $y = \pm 1$

Αν $x = y = 0$ $z^2 = -1$ αδύνατο!

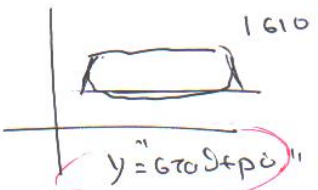
$f(\pm 1/2, 0, 0) = \frac{1}{4}$

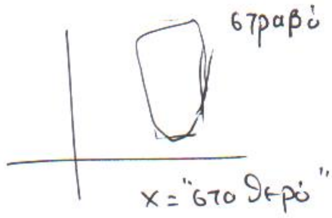
$f(0, \pm 1, 0) = 1$

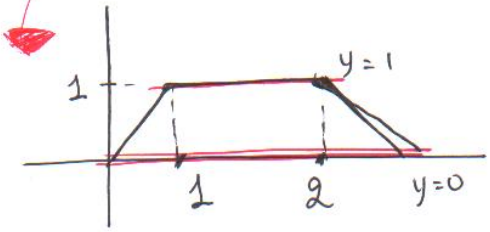
$\frac{1}{4} < 1$ άρα το $(\pm 1/2, 0, 0)$ είναι το πλησιέστερο στο $(0, 0, 0)$

Θέμα 4ο

σελ 45 Calcul part 3
για τετράγωνο.







$(0,0)\quad(3,0)\quad(2,1)\quad(1,1)$

$(\varepsilon)\quad y=\lambda x+\beta$

$(0,0)\in(\varepsilon): 0=0+\beta \Rightarrow \boxed{\beta=0}$

$(3,0)\in(\varepsilon): 0=3\lambda+\beta^0 \Rightarrow \boxed{\lambda=0}\qquad y=0$

$\cdot\ (3,0)\in(\varepsilon): 0=3\lambda+\beta$

$(2,1)\in(\varepsilon): \underline{1=2\lambda+\beta}$

$-1=\lambda \quad\rightarrow\quad \boxed{\lambda=-1},\ \boxed{\beta=3}\qquad \boxed{y=-x+3}$

$\left.\begin{array}{ll}(0,0) & :\ \beta=0\\ (1,1) & \ \ \lambda=1\end{array}\right\}\boxed{y=x}\quad (y=\lambda x+\beta).$

$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le y\le 1$

$\quad \text{και}\quad y\le x\le 3-y\ \}$

$$\int_B (x+y)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_y^{3-y}(x+y)\,dx\right)dy=\cancel{\frac{23}{6}}\ 2$$

$xy\quad \frac{y^2}{2}$

Θέμα 5ο

Πολικές

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le a^2\}, \ a>0$

$x = r\cos\phi$
$y = r\sin\phi$

$D(r,\phi) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\phi} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\phi} \end{pmatrix}$

$g(B) = \{(r,\phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le r \le a, \ 0 \le \phi \le 2\pi\}$ $\boxed{\det D(r,\phi) = r}$

Κυλινδρικές

φραγμένο z

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le a^2, \ x,y \ge 0, \ 0 \le z \le b\}, \ a,b>0$

$x = r\cos\phi$
$y = r\sin\phi$
$z = z$

$\boxed{\det = r}$

$g(B) = \{(r,\phi,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le r \le a, \ 0 \le \phi \le 2\pi, \ 0 \le z \le b\}$

Σφαιρικές

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le a^2 \ \ x,y,z \ge 0\}$

$x = \rho\cos\phi\sin\theta$
$y = \rho\sin\phi\sin\theta$
$z = \rho\cos\theta$

$\boxed{\det = r^2\sin\theta}$

πάντα έτσι.

$g(B) = \{(r,\phi,\theta) \in \mathbb{R} : 0 \le r \le a, \ 0 \le \phi \le 2\pi, \ -\pi/2 \le \theta \le \pi/2\}, \ a>0$

• <u>Θέμα 5</u>

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z \leq 9 , \ x \geq 0 , \ y \geq 0 \ \ z \geq 0\}$$

Θα κάνω κυλινδρικές! (Έχω ένα z ξεκάθαρο...)

$$K = \{ 0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2 , \ x, y \geq 0 \}$$

$x = r\cos\phi$
$y = r\sin\phi$
$z = z$

$$0 \leq z \leq 9 - (r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi)$$

$0 \leq z \leq 9 - r^2$ φράζουμε το z (έχουμε το dz)

$0 \leq 9 - r^2 \Rightarrow r^2 \leq 9 \Rightarrow 0 \leq r \leq 3$ ($r \geq 0$ είναι ακτίνα!)

το κάνω ισότητα! (για να βρω γωνίες.)

$x = 0 \Rightarrow r\cos\phi = 0 \Rightarrow \cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$

$y = 0 \Rightarrow \sin\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$

$$\boxed{0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 \left(\int_0^{9-r^2} 1 r \, dz \right) dr \right) d\phi = \frac{81\pi}{4}$$

Θεμα 6ο

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2, \ z \geq R, \ 0 \leq y \leq x\}$$

θα κάνω σφαιρικές!

$x = \rho \cos\phi \sin\theta$

$y = \rho \sin\phi \sin\theta$

$z = \rho \cos\theta$

• Το ρ, φ, θ που θα βρω θα είναι το J(B)

αντικατάσταση!

$$\rho^2 \cos^2\phi \sin^2\theta + \rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta + \rho^2 \cos^2\theta \leq 4R^2$$

και $z \geq R \Rightarrow \rho\cos\theta \geq R$

$$\rho^2 \sin^2\theta + \rho^2 \cos^2\theta \leq 4R^2 \Rightarrow \rho^2 \leq 4R^2$$

άρα $\frac{R}{\cos\theta} \leq \rho \leq 2R$

$$0 \leq \rho \sin\phi \sin\theta \leq \rho\cos\phi \sin\theta$$

παίρνω την ~~z = R~~ $\rho\cos\theta = R$

$$\rho \sin\phi \cancel{\sin\theta} = \rho \cos\phi \cancel{\sin\theta}$$

$$\sin\phi = \cos\phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

• $0 = \rho \sin\phi \sin\theta \Rightarrow \sin\phi \sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\phi = 0$ ή $\sin\theta = 0$; $\phi = 0$ ή $\theta = 0$

$$\boxed{\text{Άρα } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}}$$

$0 \leq \theta \leq \theta_0$

$z = R$ για $\rho = 2R$ έχουμε $\rho\cos\theta_0 = R \Rightarrow 2R\cos\theta_0 = R$

$$\Rightarrow \cos\theta_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{\text{Άρα } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}}$$

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/3} \left(\int_{\frac{R}{\cos\theta}}^{2R} \frac{\rho^2 \sin\theta}{\rho^2 \cos\theta} \, d\rho \right) d\theta \, d\phi = \frac{\pi R}{8}$$

Να μην ξεχνάω την det!

Something extra

$K = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 4y^2 \leq 12 , \ x \geq 0 \}$

$= \{ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} \leq 1, \ x \geq 0 \}$

2^2 $(\sqrt{3})^2$

Θα κάνω πολικές συντεταγμένες.

$x = 2r\cos\phi$
$y = \sqrt{3}\, r\cos\phi$

υπολογίζω ξανά την ορίζουσα $\det = 2\sqrt{3}\, r$

και όλα τα άλλα κανονικά $(\phi \dots)$

• $3^{\underline{o}}$ PDF