ΗΥ119 - ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΑΣΚΗΣΗ 2

Η άσκηση θα παραδοθεί ηλεκτρονικά στη σελίδα του μαθήματος στο http://elearn.uoc.gr/
Η καταληκτική προθεσμία παράδοσης είναι την *Πέμπτη, 27/03/2014 στις 23:55.*

Το παραδοτέο πρέπει να έχει όνομα AM_assign2.zip (ή .rar, .gz κτλ.)

Θεωρητικές Ασκήσεις (80%)

Άσκηση 1

Δείξτε ότι οι απαιτήσεις για ένα διανυσματικό χώρο είναι πράγματι ανεξάρτητες, κατασκευάζοντας

1. ένα υποσύνολο του διδιάστατου χώρου, κλειστό ως προς την πρόσθεση και μάλιστα και ως προς την αφαίρεση διανυσμάτων, όχι όμως ως προς τον πολλαπλασιασμό με αριθμούς.

2. ένα υποσύνολο του διδιάστατου χώρου, διαφορετικό από τα δυο αντίθετα τεταρτημόρια, κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό με αριθμούς, αλλά όχι ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων.

Άσκηση 2

Δείξτε ότι το σύνολο των μη ιδιόμορφων 2 επί 2 πινάκων δεν έιναι διανυσματικός χώρος. Δείξτε επίσης ότι το σύνολο των ιδιόμορφων 2 επί 2 πινάκων δεν είναι διανυσματικός χώρος.

Άσκηση 3

Περιγράψτε το σύνολο των εφικτών δεξιών πλευρών b για το

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

βρίσκοντας τους περιορισμούς για το b που κάνουν την τρίτη εξίσωση 0=0 (μετά την απαλοιφή). Ποια είναι η τάξη; Πόσες είναι οι ελεύθερες μεταβλητές; Πόσες είναι οι λύσεις;

Άσκηση 4

Υπολογίστε την παραγοντοποίηση LU για τον

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Προσδιορίστε ένα σύνολο βασικών μεταβλητών και ένα σύνολο ελεύθερων μεταβλητών και βρείτε τη γενική λύση του $Ax = 0$. Ποια είναι η τάξη του A;

Άσκηση 5

Υπό ποίες συνθήκες για τα b_1 και b_2 (εφ' όσον χρειάζονται) έχει το $Ax = b$ λύση, όταν

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 6

Εντοπίζοντας τους οδηγούς, βρείτε μία βάση του χώρου των στηλών του

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εκφράστε κάθε στήλη που δεν ανήκει στη βάση σαν συνδυασμό των βασικών στηλών. Βρείτε επίσης έναν πίνακα A μ' αυτή την κλιμακωτή μορφή U αλλά με διαφορετικό χώρο στηλών.

Άσκηση 7

Βρείτε τη διάσταση του

1. χώρου των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^4$ των οποίων οι συνιστώσες έχουν άθροισμα 0.
2. μηδενοχώρου του ταυτοτικού 4 επί 4 πίνακα.
3. του χώρου όλων των πινάκων 4 επί 4.

Άσκηση 8

Βρείτε τη διάσταση και μία βάση των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 9

Υποθέστε ότι η μόνη λύση του $Ax = 0$(m εξισώσεις με n αγνώστους) είναι η $x = 0$. Ποιά είναι η τάξη και γιατί;

Άσκηση 10

Βρείτε την τάξη του A και γράψτε τον πίνακα A σαν uv^T:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Προγραμματιστική Άσκηση (20%)

Βήμα 1

Στην άσκηση αυτή καλείστε να υλοποιήσετε μία συνάρτηση matrixanalysis που βρίσκει τη βάση και τη διάσταση των τεσσάρων βασικών υποχώρων ενός τυχαίου πίνακα. Η συνάρτηση θα πρέπει να παίρνει σαν όρισμα ένα πίνακα και να επιστρέφει:

1. Τον πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.
2. Την τάξη του πίνακα.
3. Ένα διάνυσμα με τις διαστάσεις των τέσσάρων βασικών υποχώρων του πίνακα, με την εξής σειρα: (χώρος στηλών, μηδενοχώρος, χώρος γραμμών, αριστερός μηδενοχώρος.
4. Μία βάση για τον υποχώρο στηλών του πίνακα.
5. Μία βάση για το μηδενοχωρο του πίνακα.
6. Μία βάση για τον υποχώρο γραμμών του πίνακα.
7. Μία βάση για τοω αριστερό μηδενοχωρο του πίνακα.

Οι βάσεις θα επιστρέφονται σε πίνακες που θα έχουν για στήλες τα διανύσματα της βάσης.

Βήμα 2

Στο βήμα αυτό θα χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση που υλοποιήσατε στο Βήμα 1, για να βρείτε τις βάσεις των θεμελιωδών υποχώρων ενός πίνακα που σας δίνεται. Ό πίνακας A βρίσκεται στο αρχείο ex2matrix.mat και μπορείτε να τον φορτώσετε στο MATLAB με την εντολή load. Βρείτε μια βαση για κάθε έναν από τους τέσσερις θεμελιώδεις υποχώρους του πίνακα A.

Παραδώστε:

1. Ένα αρχείο [αριθμος μητρώου σας]_ ex2.zip που θα περιλαμβάνει
2. Τη συνάρτηση matrixanalysis.m.

3. Το script analyzematrix.m που θα περιλαμβάνει τις εντολές που τρέξατε στο βήμα 2 της άσκησης.

4. Μία αναφορά (δε χρειάζεται να έιναι ξεχωριστό έγγραφο, μπορείτε να τη συμπεριλάβετε στις λύσεις των θεωρητικών ασκήσεων) που να περιλαμβάνει μία **μικρή** περιγραφη του αλγορίθμου που υλοποιήσατε στο βήμα 1, και την βάση του πίνακα που βρήκατε στο βήμα 2 της άσκησης.