Λύσεις 1ου Σετ Ασκήσεων στο ΗΥ180

Άσκηση 1

Μετατρέψτε την παρακάτω πρόταση σε Διαζευκτική και σε Συζευκτική Κανονική Μορφή δείχνοντας όλα τα βήματα της μετατροπής:
$(P \rightarrow ((Q \vee R) \rightarrow S)) \wedge \neg(\neg P \vee Q \vee (R \rightarrow S))$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Σε Διαζευκτική Κανονική Μορφή (DNF)

Βήμα 1: Αντικαθιστούμε τις ισοδυναμίες και συνεπαγωγές, ξεκινώντας από τις πιο εσωτερικές.

$(P \rightarrow ((Q \vee R) \rightarrow S)) \wedge \neg(\neg P \vee Q \vee (R \rightarrow S)) \equiv$
$(P \rightarrow (\neg(Q \vee R) \vee S)) \wedge \neg(\neg P \vee Q \vee (\neg R \vee S)) \equiv$
$(\neg P \vee (\neg(Q \vee R) \vee S)) \wedge \neg(\neg P \vee Q \vee (\neg R \vee S)) \equiv$

Βήμα 2: Σπρώχνουμε τις πιο εξωτερικές αρνήσεις εσωτερικά.

$(\neg P \vee (\neg(Q \vee R) \vee S)) \wedge \neg(\neg P \vee Q \vee (\neg R \vee S))$
$(\neg P \vee ((\neg Q \wedge \neg R) \vee S)) \wedge (\neg\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg(\neg R \vee S)) \equiv$
$(\neg P \vee ((\neg Q \wedge \neg R) \vee S)) \wedge (\neg\neg P \wedge \neg Q \wedge (\neg\neg R \wedge \neg S)) \equiv$

Απαλείφουμε τις διπλές αρνήσεις.

$(\neg P \vee ((\neg Q \wedge \neg R) \vee S)) \wedge (P \wedge \neg Q \wedge (R \wedge \neg S)) \equiv$
$(\neg P \vee ((\neg Q \wedge \neg R) \vee S)) \wedge (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S) \equiv$

Βήμα 3: Χρησιμοποιούμε την επιμεριστικότητα της σύζευξης πάνω στην διάζευξη.

$(\neg P \vee ((\neg Q \wedge \neg R) \vee S)) \wedge (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S) \equiv$
$(\neg P \wedge (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S)) \vee (((\neg Q \wedge \neg R) \vee S) \wedge (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S)) \equiv$
$(\neg P \wedge (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S)) \vee (\neg Q \wedge \neg R \wedge (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S)) \vee (S \wedge (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S)) \equiv$

Απαλοιφή περιττών παρενθέσεων.

$(\neg P \wedge P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S) \vee (\neg Q \wedge \neg R \wedge P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S) \vee (S \wedge P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S) \equiv$

Βήμα 4: Αφαιρούμε διπλά γράμματα.

$(\neg P \wedge P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S) \vee (\neg Q \wedge \neg R \wedge P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S) \vee (S \wedge P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S) \equiv$
$(\neg P \wedge P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S) \vee (\neg Q \wedge \neg R \wedge P \wedge R \wedge \neg S) \vee (S \wedge P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S) \equiv$

Δεν έχουμε διπλούς ελάχιστους όρους, οπότε αντικαθιστούμε Αντινομίες με F.

$(\neg P \wedge P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S) \vee (\neg Q \wedge \neg R \wedge P \wedge R \wedge \neg S) \vee (S \wedge P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S) \equiv$
$(\mathbf{F} \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S) \vee (\neg Q \wedge \mathbf{F} \wedge P \wedge \neg S) \vee (\mathbf{F} \wedge P \wedge \neg Q \wedge R \wedge) \equiv$

Ξέρουμε ότι: $F \wedge S \equiv F$, οπότε:
$\mathbf{F} \vee \mathbf{F} \vee \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$

Οπότε η πρόταση είναι Αντινομία και ισχύει και για Συζευκτική Κανονική Μορφή (**CNF**).

Σε Συζευκτική Κανονική Μορφή (CNF)
Βήμα 1: Αντικαθιστούμε τις ισοδυναμίες και συνεπαγωγές, ξεκινώντας από τις πιο εσωτερικές.
$(P \rightarrow ((Q \lor R) \rightarrow S)) \land \neg (\neg P \lor Q \lor (R \rightarrow S)) \equiv$
$(P \rightarrow (\neg (Q \lor R) \lor S)) \land \neg (\neg P \lor Q \lor (\neg R \lor S)) \equiv$
$(\neg P \lor (\neg (Q \lor R) \lor S)) \land \neg (\neg P \lor Q \lor (\neg R \lor S)) \equiv$

Βήμα 2: Σπρώχνουμε τις πιο εξωτερικές αρνήσεις εσωτερικά.
$(\neg P \lor (\neg (Q \lor R) \lor S)) \land \neg (\neg P \lor Q \lor (\neg R \lor S)) \equiv$
$(\neg P \lor ((\neg Q \land \neg R) \lor S)) \land (\neg \neg P \land \neg Q \land \neg (\neg R \lor S)) \equiv$
$(\neg P \lor ((\neg Q \land \neg R) \lor S)) \land (\neg \neg P \land \neg Q \land (\neg \neg R \land \neg S)) \equiv$

Απαλείφουμε τις διπλές αρνήσεις.
$(\neg P \lor ((\neg Q \land \neg R) \lor S)) \land (P \land \neg Q \land (R \land \neg S)) \equiv$
$(\neg P \lor ((\neg Q \land \neg R) \lor S)) \land (P \land \neg Q \land R \land \neg S) \equiv$

Βήμα 3: Χρησιμοποιούμε την επιμεριστικότητα της διάζευξης πάνω στην σύζευξη.
$(\neg P \lor ((\neg Q \land \neg R) \lor S)) \land (P \land \neg Q \land R \land \neg S) \equiv$
$(\neg P \lor ((\neg Q \lor S) \land (\neg R \lor S)) \land (P \land \neg Q \land R \land \neg S) \equiv$
$(\neg P \lor (\neg Q \lor S)) \land (\neg P \lor (\neg R \lor S)) \land (P \land \neg Q \land R \land \neg S) \equiv$

Απαλοιφή περιττών παρενθέσεων.
$(\neg P \lor \neg Q \lor S) \land (\neg P \lor \neg R \lor S) \land P \land \neg Q \land R \land \neg S \equiv$

Βήμα 4: Αφαιρούμε διπλά γράμματα από τους όρους.
(Δεν έχουμε)

Αφαιρούμε διπλούς μέγιστους όρους.
(Δεν έχουμε)

Αντικαθιστούμε τις Ταυτολογίες με T.
(Δεν έχουμε)

Εφαρμόζουμε τις Απορροφήσεις.
$(\neg P \lor \neg Q \lor S) \land (\neg P \lor \neg R \lor S) \land P \land \neg Q \land R \land \neg S \equiv$
$\neg Q \land (\neg P \lor \neg R \lor S) \land P \land R \land \neg S \equiv$

Ελέγχουμε για τυχόν Αντινομίες.
$\neg Q \land (\neg P \lor \neg R \lor S) \land P \land R \land \neg S \equiv$
$\neg Q \land (\neg P \lor \neg R \lor S) \land \neg(\neg P \lor \neg R \lor S) \equiv$
$\neg Q \land F \equiv \mathbf{F}$

Οπότε η πρόταση είναι Αντινομία και ισχύει και για Διαζευκτική Κανονική Μορφή (**DNF**).

Άσκηση 3

Γράψτε μια πρόταση για τη στήλη X του παρακάτω πίνακα αλήθειας και επαληθεύστε την απάντησή σας. Φροντίστε η πρόταση αυτή να είναι όσο πιο απλή γίνεται και αιτιολογείστε την όποια μετατροπή κάνετε με τις γνωστές ισοδυναμίες του προτασιακού λογισμού.

A	**B**	**C**	**X**
α	α	α	α
α	α	ψ	ψ
α	ψ	α	ψ
α	ψ	ψ	α
ψ	α	α	ψ
ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ	α

Λύση

Για να μπορέσουμε να εξάγουμε μια πρόταση από έναν πίνακα αληθείας, παρατηρούμε για ποιές τιμές των A,B,C η πρόταση είναι αληθής (δηλ. η τιμή του X να είναι (α)).
Οπότε έχουμε την παρακάτω:

$$(A \land B \land C) \lor (A \land \neg B \land \neg C) \lor (\neg A \land B \land \neg C) \lor (\neg A \land \neg B \land \neg C) \equiv$$

$$(A \land B \land C) \lor (A \land \neg B \land \neg C) \lor \underbrace{\mathbf{(\neg A \land B \land \neg C) \lor (\neg A \land \neg B \land \neg C)}}_{\text{Συνένωση}} \equiv$$

$$(A \land B \land C) \lor \underbrace{\mathbf{(A \land \neg B \land \neg C) \lor (\neg A \land \neg C)}}_{\text{Επιμερισμός}} \equiv$$

$$(A \land B \land C) \lor \underbrace{\mathbf{((\neg A \lor (A \land \neg B \land \neg C)) \land (\neg C \lor (A \land \neg B \land \neg C)))}}_{\text{Επιμερισμός του V στο Λ}} \equiv$$

$$(A \land B \land C) \lor (\underbrace{\mathbf{(\neg A \lor A)}}_{\text{Ταυτολογία}} \land (\neg A \lor \neg B) \land (\neg A \lor \neg C) \land (\neg C \lor A) \land (\neg C \lor \neg B) \land (\neg C \lor \neg C)) \equiv$$

$$(A \land B \land C) \lor (\mathbf{T} \land (\neg A \lor \neg B) \land (\neg A \lor \neg C) \land (\neg C \lor A) \land (\neg C \lor \neg B) \land \underbrace{\mathbf{(\neg C \lor \neg C)}}_{\text{Αυτοπάθεια V}}) \equiv$$

$$(A \land B \land C) \lor (\underbrace{\mathbf{T \land (\neg A \lor \neg B)}}_{\text{Απορροφηθεί η ταυτολογία}} \land (\neg A \lor \neg C) \land (\neg C \lor A) \land (\neg C \lor \neg B) \land (\neg C)) \equiv$$

$$(A \land B \land C) \lor ((\neg A \lor \neg B) \land (\neg A \lor \neg C) \land (\neg C \lor A) \land \underbrace{(\neg C \lor \neg B) \land (\neg C)}_{\text{Απορρόφηση}}) \equiv$$

$$(A \land B \land C) \lor ((\neg A \lor \neg B) \land (\neg A \lor \neg C) \land \underbrace{(\neg C \lor A) \land (\neg C)}_{\text{Απορρόφηση}}) \equiv$$

$$(A \land B \land C) \lor ((\neg A \lor \neg B) \land \underbrace{(\neg A \lor \neg C) \land (\neg C)}_{\text{Απορρόφηση}}) \equiv$$

$$(A \land B \land C) \lor \underbrace{((\neg A \lor \neg B) \land (\neg C))}_{\text{Νόμος De Morgan}} \equiv$$

$$(A \land B \land C) \lor (\neg(A \land B) \land (\neg C)) \equiv$$

$$((A \land B) \land C) \lor (\neg(A \land B) \land (\neg C)) \equiv$$

$$(A \land B) \leftrightarrow C \qquad \textbf{(1)}$$

Για να επαληθεύσουμε ότι η πρόταση είναι σωστή δημιουργούμε έναν άλλο πίνακα για την σχέση **(1)** και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα μας με τον αρχικό πίνακα που μας δίνεται από την εκφώνηση.

A	**B**	**C**	(A ∧ B)	(A ∧ B) <-> C
α	α	α	α	α
α	α	ψ	α	ψ
α	ψ	α	ψ	ψ
α	ψ	ψ	ψ	α
ψ	α	α	ψ	ψ
ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	ψ	α	ψ	ψ
ψ	ψ	ψ	ψ	α

Συγκρίνοντας τους δύο πίνακες αληθείας,συμπεραίνουμε ότι η πρόταση αυτή είναι αληθής.

2) α) Εφόσον P|= A , τότε είτε : α) υπάρχει ερμηνεία I η οποία ικανοποιεί το P και το A είτε β)δεν υπάρχει ερμηνεία I που ικανοποιεί το P. Στην πρώτη περίπτωση για την συγκεκριμένη ερμηνεία I θα ισχύει ότι S|=A αφού η I ικανοποιεί το A. Αντίστοιχα στην δεύτερη περίπτωση, εφόσον δεν υπάρχει ερμηνεία που να ικανοποιεί το P, δεν θα υπάρχει ερμηνεία που να ικανοποιεί το S, δεδομένου του ότι P είναι υποσύνολο του S. Συνεπώς, το S δεν μπορεί ποτέ να είναι αληθές και επομένως θα ισχύει ότι S|=A .

β) Εφόσον το S είναι ικανοποιήσιμο, τότε υπάρχει τουλάχιστον μία ερμηνεία I που καθιστά όλους τους όρους του αληθείς. Αφού το P ανήκει στο S, τότε η συγκεκριμένη ερμηνεία θα ικανοποιεί και το P. Αντίστοιχα η συγκεκριμένη ερμηνεία, εφόσον ισχύει ότι P|= A θα ικανοποιεί και το A. Συνεπώς, αν αφαιρέσουμε το P από το S και προσθέσουμε το A ,και πάλι για την συγκεκριμένη ερμηνεία I το S θα ικανοποιείται.

γ) Αν p|=q τότε δεν γίνεται ταυτόχρονα να ισχύει ότι p και ¬q. Συνεπώς είναι αδύνατον να ικανοποιηθούν και οι δύο όροι της συζευκτικής σχέσης p ⋀ ¬q και, επομένως, αυτή θα είναι αντινομία.
Αντιστρόφως, εάν η σχέση p ⋀ ¬q είναι αντινομία δεν γίνεται πότε να είναι το p αληθές και το q ψευδές, και συνεπώς θα ισχύει ότι p|=q.