ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ 2016 ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΙ

ΘΕΜΑ 1ο. (2) Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}, & \text{όταν } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{όταν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$ και να ευρεθεί η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου του γραφήματος της f στο σημείο $(0,0,0)$.

(β) Να αποδειχθεί οτι το όριο $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ δεν υπάρχει. Είναι η f συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2$;

ΘΕΜΑ 2ο. (1,5) Εστω οτι $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση και $h : (0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$h(r,\phi) = f(r\cos\phi, r\sin\phi).$$

Να αποδειχθεί οτι

$$\left(\frac{\partial h}{\partial r}(r,\phi)\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial h}{\partial \phi}(r,\phi)\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2$$

για κάθε $r > 0$, $\phi \in \mathbb{R}$, όπου $x = r\cos\phi$ και $y = r\sin\phi$.

ΘΕΜΑ 3ο. (1) Να ευρεθούν τα σημεία τοπικού μεγίστου, τοπικού ελαχίστου, καθώς και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y.$$

ΘΕΜΑ 4ο. (1,5) Εστω $R > 0$. Να ευρεθούν πραγματικοί αριθμοί $x \geq 0$, $y \geq 0$ και $z \geq 0$ με σταθερό άθροισμα τετραγώνων $x^2+y^2+z^2 = R^2$ τέτοιοι ώστε το γινόμενό τους xyz να είναι το μέγιστο δυνατό.

ΘΕΜΑ 5ο. (1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_B (2y - \frac{1}{2}x)dxdy$, όπου B είναι το τρίγωνο στο $\mathbb{R}^2$ με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(1,1)$ και $(0,2)$.

ΘΕΜΑ 6ο. (1,5) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq x, \quad y \geq 0\}.$$

ΘΕΜΑ 7ο. (1,5) Αν $R > 0$ και

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2, \quad 0 \leq y \leq x, \quad z \geq 0\},$$

να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_K z dxdydz.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ