Γραμμική Άλγεβρα

Παραγοντοποίηση πίνακα $A = LU$

Ας είναι ο μη ιδιόμορφος πίνακας A με στοιχεία $\{a_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$, για τον οποίο μπορεί να γίνει απαλοιφή χωρίς να χρειάζεται εναλλαγή γραμμών. Η απαλοιφή της πρώτης στήλης από τη δεύτερη μέχρι την τελευταία γραμμή ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του A δεξιά με τον πίνακα

$$E_{.1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο αντίστροφος του πίνακα $E_{.1}$ θα είναι

$$E_{.1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ e_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Κάνοντας απαλοιφή της πρώτης στήλης από τη δεύτερη μέχρι την τελευταία γραμμή παίρνουμε τον πίνακα

$$A^{(1)} = E_{.1}A.$$

Συνεχίζουμε με τον πίνακα $A^{(1)}$ απαλοίφοντας με παρόμοιο τρόπο τη δεύτερη στήλη από την τρίτη μέχρι την τελευταία γραμμή με τον πίνακα

$$E_{.2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο αντίστροφος του πίνακα $E_{.2}$ θα είναι

$$E_{.2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & e_{n2} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι την τελευταία στήλη. Μπορούμε να εκφράσουμε τη διαδικασία των διαδοχικών απαλοιφών που οδηγούν στον άνω τριγωνικό πίνακα U με τον ακόλουθο πολλαπλασιασμό πινάκων

$$E_{.n} \cdots E_{.2}E_{.1}A = U.$$

Επειδή όλοι οι πίνακες $E_{.i}$ είναι αντιστρέψιμοι, παίρνουμε ότι

$$A = E_{.1}^{-1} E_{.2}^{-1} \cdots E_{.n}^{-1} U.$$

Το γινόμενο των αντιστρόφων των πινάκων απαλοιφής δίδει έναν κάτω τριγωνικό πίνακα L, που συγκεκριμένα ισούται με

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ e_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ e_{31} & e_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & e_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως τα στοιχεία του πίνακα L είναι οι συντελεστές που χρησιμοποιήθηκαν για την απαλοιφή, αλλά με αντίθετο πρόσημο.

Η εφαρμογή σε ένα πίνακα 2×2 δίδει

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta}{a_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

με $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Ας θεωρήσουμε τον τριδιαγώνιο πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\rho & 1+\rho^2 \end{bmatrix}.$$

Η παραγοντοποίηση δίδει

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\rho & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$