# ΗΥ180 – Λογική
# Εαρινό Εξάμηνο 2017
# 3η Σειρά Ασκήσεων
# Προτεινόμενες Λύσεις

1. [**20 μονάδες] Αποδείξτε με χρήση μορφολογικής παραγωγής ότι οι ακόλουθες εξαγωγές συμπερασμάτων είναι έγκυρες:**

   a) **[5 μονάδες] $\forall x\ (P(x)\rightarrow Q(a))$ / $\exists x\ P(x)\rightarrow Q(a)$**

   1) $\forall x\ (P(x)\rightarrow Q(a))$ (Υπόθεση)
   2) Υποπαραγωγή
      2.1) $\exists x\ P(x)$ (Υπόθεση υποπαραγωγής)
      2.2) Υποπαραγωγή
         2.2.1) $P(b)$ (Υπόθεση υποπαραγωγής)
         2.2.2) $P(b)\rightarrow Q(a)$ (Απο (1) με απαλοιφή $\forall$ και x/b)
         2.2.3) $Q(a)$ (Από (2.2.1), (2.2.2) και απαλοιφή $\rightarrow$)
      2.3) $Q(a)$ (Από (2.1), (2.2) και απαλοιφή $\exists$ )
   3) $\exists x\ P(x)\rightarrow Q(a)$ (Από (2) με εισαγωγή $\rightarrow$)

   b) **[10 μονάδες] $P(a)$ / $\forall x\ ( R(x,a) \rightarrow \exists y\ (P(y) \wedge R(x,y)) )$**

   1) $P(a)$ (Υπόθεση)
   2) Υποπαραγωγή
      2.1) $R(b,a)$ (Υπόθεση υποπαραγωγής)
      2.2) $P(a)$ (Από (1) με επανάληψη)
      2.3) $P(a) \wedge R(b,a)$ (Από (2.1), (2.2) και εισαγωγή $\wedge$)
      2.4) $\exists y\ ( P(y) \wedge R(b,y) )$ (Από (2.3) με εισαγωγή $\exists$ και a/y)
   3) $R(b,a) \rightarrow \exists y\ ( P(y) \wedge R(b,y) )$ (Από (2) με εισαγωγή $\rightarrow$)
   4) $\forall x\ ( R(x,a) \rightarrow \exists y\ (P(y) \wedge R(b,y)) )$ (Από (3) με εισαγωγή $\forall$ )

   c) **[5 μονάδες] $\forall x \exists y\ R(x,y)$ / $\exists x \exists y\ R(x,y)$**

   1) $\forall x \exists y\ R(x,y)$ (Υπόθεση)
   2) $\exists y\ R(a,y)$ (Από (1) με απαλοιφή $\forall$ και x/a)
   3) $\exists x \exists y\ R(x,y)$ (Από (2) με εισαγωγή $\exists$ και x/a)

2. **[15 μονάδες] Ελέγξτε την ικανοποιησιμότητα των παρακάτω συνόλων χωρίς να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο κατασκευής μοντέλων:**

a) **[7 μονάδες] { $\forall x\ (P(x) \lor Q(x))$ , $\neg \exists x\ P(x)$ , $Q(a)$ }**

Διαισθητικά το σύνολο είναι μη ικανοποιήσιμο. Στο 2ο σχήμα έχουμε $\neg \exists x P(x)$ δηλ. $\forall x \neg P(x)$. Από τα 2 πρώτα σχήματα καταλήγουμε στο ότι $\forall x Q(x)$ άρα για κανένα 'a' δεν μπορούμε να έχουμε το 3ο σχήμα $\neg Q(a)$.

Έστω (D, I) ερμηνεία που ικανοποιεί τα 2 πρώτα σχήματα του συνόλου ($\vDash_{D,I} \forall x\ (P(x) \lor Q(x))$ και ($\vDash_{D,I} \neg \exists x\ P(x)$). Άρα έχουμε απ' το πρώτο σχήμα ($\vDash_{D,I}$ P(_) ή $\vDash_{D,I}$ Q(_)) και απ' το 2ο σχήμα I'(P(_)) = $\varnothing$. Εφόσον I'(P(_)) = $\varnothing$ στο 2ο σχήμα η 1η περίπτωση του 1ου σχήματος ($\vDash_{D,I}$ P(_)) δεν ισχύει άρα $\vDash_{D,I}$ Q(_). Όμως για να ικανοποιείται το 3ο σχήμα θα πρέπει I'(¬Q(_)) $\neq \varnothing$ που δεν ισχύει. Άρα το σύνολο είναι μη ικανοποιήσιμο.

b) **[8 μονάδες] { $\exists x\ P(x)$ , $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ , $\forall x\ \neg Q(x)$ }**

Διαισθητικά φαίνεται ότι το σύνολο είναι μη-ικανοποιήσιμο γιατί αν υπάρχει x που ικανοποιεί το P(x), τότε θα ικανοποιείται και το Q(x) και άρα δε θα ικανοποιείται το τελευταίο σχήμα.

Πιο τυπικά, έστω (D, I) η ερμηνεία που ικανοποιεί τα δύο πρώτα σχήματα του συνόλου ($\vDash_{D,I} \exists x\ P(x)$ και $\vDash_{D,I} \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ ). Άρα I'(P (_)) $\neq \varnothing$, από το πρώτο σχήμα και από το δεύτερο $\nvDash_{D,I}$ P (_) ή ($\vDash_{D,I}$ P(_) και $\vDash_{D,I}$ Q(_)). Εφόσον I'(P (_)) $\neq \varnothing$, η πρώτη περίπτωση δεν ισχύει, άρα $\vDash_{D,I}$ P(_) και $\vDash_{D,I}$ Q(_). Όμως για να ικανοποιείται και το τρίτο σχήμα από την ίδια ερμηνεία θα πρέπει I'(Q (_)) = $\varnothing$, που είναι αντίθετο με το $\vDash_{D,I}$ Q(_). Συνεπώς το σύνολο είναι μη-ικανοποιήσιμο.

3. **[15 μονάδες] Με χρήση της μεθόδου της κατασκευής μοντέλων στον Κατηγορηματικό Λογισμό δείξτε την εγκυρότητα των εξαγωγών συμπερασμάτων της ερώτησης 1.**

a) $\boldsymbol{\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(a))\ /\ \exists x\, P(x) \rightarrow Q(a)}$

Θέλω ν.δ.ο το σύνολο $C_0$ είναι μη ικανοποιήσιμο

$C_0 = \{\, \{\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(a))\,,\ \underline{\neg(\exists x\, P(x) \rightarrow Q(a))}\}\, \}$
$C_1 = \{\, \{\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(a))\,,\ \underline{\exists x\, P(x)}\,,\ \neg Q(a)\}\, \}$ [¬→]
$C_2 = \{\, \{\underline{\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(a))}\,,\ P(b)\,,\ \neg Q(a)\}\, \}$ [∃x, b/x]
$C_3 = \{\, \{\underline{P(b) \rightarrow Q(a)}\,,\ \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(a))\,,\ P(b)\,,\ \neg Q(a)\}\, \}$ [∀x, b/x]
$C_4 = \{\, \{\cancel{\neg P(b)}\,,\ \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(a))\,,\ \cancel{P(b)}\,,\ \neg Q(a)\}\,,$
$\{\cancel{Q(a)}\,,\ \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(a))\,,\ P(b)\,,\ \cancel{\neg Q(a)}\}\, \}$ [→]
$C_5 = \{\, \{\}\, \}$ [del, del]

Άρα έγκυρη εξαγωγή συμπεράσματος

b) $\boldsymbol{P(a)\ /\ \forall x\, (\, R(x,a) \rightarrow \exists y\, (P(y) \wedge R(x,y))\, )}$

Θέλω ν.δ.ο το σύνολο $C_0$ είναι μη ικανοποιήσιμο

$C_0 = \{\, \{P(a)\,,\ \underline{\neg \forall x}\, (\, R(x,a) \rightarrow \exists y\, (P(y) \wedge R(x,y))\, )\}\, \}$
$C_1 = \{\, \{P(a)\,,\ \underline{\exists x\, \neg}(\, R(x,a) \rightarrow \exists y\, (P(y) \wedge R(x,y))\, )\}\, \}$ [¬∀x]
$C_2 = \{\, \{P(a)\,,\ \underline{\neg(\, R(b,a) \rightarrow \exists y\, (P(y) \wedge R(b,y))\, )}\}\, \}$ [∃x, b/x]
$C_3 = \{\, \{P(a)\,,\ R(b,a)\,,\ \underline{\neg \exists y}\, (P(y) \wedge R(b,y))\, \}\, \}$ [¬→]
$C_4 = \{\, \{P(a)\,,\ R(b,a)\,,\ \underline{\forall y\, \neg(P(y) \wedge R(b,y))}\, \}\, \}$ [¬∃y]
$C_5 = \{\, \{P(a)\,,\ R(b,a)\,,\ \underline{\neg(P(a) \wedge R(b,a))}\,,\ \forall y\, \neg(P(y) \wedge R(b,y))\}\, \}$ [∀y, a/y]
$C_6 = \{\, \{\cancel{P(a)}\,,\ R(b,a)\,,\ \cancel{\neg P(a)}\,,\ \forall y\, \neg(P(y) \wedge R(b,y))\}\,,$
$\{P(a)\,,\ \cancel{R(b,a)}\,,\ \cancel{\neg R(b,a)}\,,\ \forall y\, \neg(P(y) \wedge R(b,y))\}\, \}$ [¬∧]
$C_7 = \{\, \{\}\, \}$ [del]

Άρα έγκυρη εξαγωγή συμπεράσματος

c) $\boldsymbol{\forall x \exists y\, R(x,y)\ /\ \exists x \exists y\, R(x,y)}$

Θέλω ν.δ.ο το σύνολο $C_0$ είναι μη ικανοποιήσιμο

$C_0 = \{\, \{\forall x \exists y\, R(x,y)\,,\ \underline{\neg \exists x} \exists y\, R(x,y)\}\, \}$
$C_1 = \{\, \{\forall x \exists y\, R(x,y)\,,\ \underline{\forall x} \neg \exists y\, R(x,y)\}\, \}$ [¬∃x]
$C_2 = \{\, \{\forall x \exists y\, R(x,y)\,,\ \underline{\neg \exists y}\, R(a,y)\,,\ \forall x \neg \exists y\, R(x,y)\}\, \}$ [¬∀x, a/x]
$C_3 = \{\, \{\underline{\forall x} \exists y\, R(x,y)\,,\ \forall y\, \neg R(a,y)\,,\ \forall x \neg \exists y\, R(x,y)\}\, \}$ [¬∃y]
$C_4 = \{\, \{\underline{\exists y\, R(a,y)}\,,\ \forall x \exists y\, R(x,y)\,,\ \forall y\, \neg R(a,y)\,,\ \forall x \neg \exists y\, R(x,y)\}\, \}$ [¬∀x, a/x]
$C_5 = \{\, \{R(a,b)\,,\ \forall x \exists y\, R(x,y)\,,\ \underline{\forall y}\, \neg R(a,y)\,,\ \forall x \neg \exists y\, R(x,y)\}\, \}$ [∃y, b/y]
$C_6 = \{\, \{\cancel{R(a,b)}\,,\ \forall x \exists y\, R(x,y)\,,\ \cancel{\neg R(a,b)}\,,\ \forall x \neg \exists y\, R(x,y)\}\, \}$ [∀y]
$C_7 = \{\, \{\}\, \}$ [del]

Άρα έγκυρη εξαγωγή συμπεράσματος