Γραμμική Άλγεβρα

Παράδειγμα λύσης εξίσωσης διαφορών

Θεωρούμε την ακόλουθη εξίσωση διαφορών

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n - \Delta_{n-1}, n \geq 2, \Delta_1 = 1, \Delta_2 = 0.$$

Γράφουμε

$$\begin{bmatrix} \Delta_{n+1} \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_n \\ \Delta_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Θέτουμε

$$\mathbf{u}_{n-1} = \begin{bmatrix} \Delta_{n+1} \\ \Delta_n \end{bmatrix},$$

οπότε θα είναι

$$\mathbf{u}_n = A\mathbf{u}_{n-1}, n \geq 1, A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Για τη λύση αυτής της εξίσωσης διαφορών απαιτείται η εύρεση των χαρακτηριστικών μεγεθών του πίνακα A. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι: $\lambda^2 - \lambda + 1$. Επομένως οι ιδιοτιμές θα είναι:

$$\lambda_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}, \lambda_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Η λύση της εξίσωσης διαφορών θα είναι

$$u_n = c_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^n\mathbf{v}_2,$$

όπου

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} -\lambda_2 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Κατόπιν όλων αυτών

$$\Delta_{n+1} = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(-\lambda_2\lambda_1^n + \lambda_1\lambda_2^n\right).$$

Επειδή $\lambda_1\lambda_2 = 1$

$$\Delta_n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(-\lambda_1^{n-2} + \lambda_2^{n-2}\right).$$

Για τις ιδιοτιμές που έχουν βρεθεί ανωτέρω

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 2i\sin\frac{\pi}{3} \quad \text{και} \quad \lambda_1^n - \lambda_2^n = 2i\sin\frac{n\pi}{3}.$$

Άρα

$$\Delta_n = -\frac{\sin\frac{(n-2)\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}.$$

Επομένως η Δ_n είναι περιοδική με περίοδο 6 και παίρνει στη σειρά τις τιμές: $1, 0, -1, -1, 0, 1$.