1

- $U_1^T \cdot U_2 = -4 \neq 0 \implies U_1, U_2$ δεν είναι καδετα μεταξυ τους

- $U_1^T \cdot U_3 = -4 \neq 0 \implies U_1, U_2$ δεν είναι καδετα μεταξυ τους

- $U_2^T \cdot U_3 = 32 \neq 0 \implies U_2, U_3$ δεν είναι καδετα μεταξυ τους.

2

- διαννστα x ορδογώνιο στον χώρο γραμμων

Αρτει να βρω ενα διαννστα στο $N(A)$ αφου

$C(A^T) \perp N(A)$

Αρχικα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Οποτε

$$Ax = 0 \implies \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\implies x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Ένα διάνυσμα y ορθογώνιο στο χώρο στηλών

Αρκεί να βρω ένα διάνυσμα στο $N(A^T)$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot y = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0 \\ \\ y_2 + y_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -y_3 \\ \\ y_2 = -y_3 \end{cases}$$

μια λύση είναι $y = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3

Ευθεια $x + 2y = 0$, παιρνω ενα σημειο
Της ευθειας π.χ. ~~~~~ $a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

και αντικαθιστω στον τυπο:

$$P = \frac{a \cdot a^T}{a^T \cdot a} = \begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$
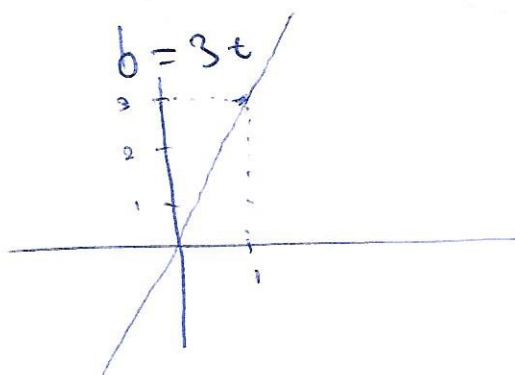
4

Το προβλημα μας ειναι το

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Προσεγγιστικη λυση του D:

$$\hat{x} = \frac{a^T \cdot b}{a^T \cdot a} = \frac{[1 \ 2]\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}}{4 + 1} = 3$$

Επομενως η βελτιστη ευθεια

$b = 3t$

[5]

a) Αρκει να δειξω ότι

    1) $P^T = P$

    2) $P^2 = P$

$- P^T = (P^T \cdot P)^T = P^T (P^T)^T = P^T \cdot P = P$

$- P^2 = P \cdot P = P^T \cdot P = P$

β) $P_p = P \cdot b = 0 \quad , \forall b$ επομένως προβάλει στο μηδενικό διανυσμα.

[6]

Ενα σημείο της ευθειας $x + y = 0$

$$\binom{x}{y} = \binom{1}{-1}$$

αρα:

$$P = \frac{a \cdot a^T}{a^T \cdot a} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

⑦ $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

• $q_1 = \dfrac{a_1}{\|a_1\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

• $q_2' = a_2 - (q_1^T \cdot a_2) \cdot q_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$q_2 = \dfrac{a_2'}{\|q_2'\|} = \sqrt{2/3} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$

• $q_3' = a_3 - (q_1^T a_3)\, q_1 - (q_2^T a_3)\, q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$q_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Επομένως τα μη-μηδενικα διανυσματα και η διασταση του υποχωρου ειναι 2.

⑧ Ομοια με 7.

$q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\Bigg\}$ $\Rightarrow$ $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$q_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A = QR \Leftrightarrow Q^T A = Q^T Q R \Leftrightarrow R = Q^T \cdot A \ \epsilon)$

$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Αρα $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$