ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ280 – «Θεωρία υπολογισμού» – Α΄γραπτή εξέταση – Ιανουάριος 2013

Απαντήστε τα παρακάτω με τις απαραίτητες εξηγήσεις εκ μέρους σας:

ΘΕΜΑ 1ο: Πεπερασμένα αυτόματα και ομαλές γλώσσες.

(1) 10% Έστω Λ μια ομαλή (= κανονική) γλώσσα επί ενός αλφαβήτου Σ, και έστω $Λ_α$ οι λέξεις της Λ που έχουν άρτιο μήκος, δηλαδή: $Λ_α = \{ λ: λ \in Λ,$ και $|λ| = 2ν \}$. Είναι η γλώσσα $Λ_α$ επίσης ομαλή;

Για να αποσπάσουμε από την Λ όσες (*και μόνον*) λέξεις έχουν άρτιο πλήθος συμβόλων, αρκεί να την τμήσουμε με την γλώσσα Α = { λ ∈ Σ*, μήκος(λ) = άρτιο }. Αυτή η γλώσσα είναι ομαλή (την αναγνωρίζει ένα απλό αυτόματο με 2 καταστάσεις). Από θ. κλειστότητας και η $Λ_α = Λ \cap Α$ είναι ομαλή.

(2) 10% Έστω ότι η Λ είναι ομαλή γλώσσα, και $Χ \subseteq Λ$. Είναι και η γλώσσα Χ επίσης κατ' ανάγκην ομαλή;

Η γλώσσα {α, β}* είναι ομαλή (προφανώς! – ένα αιτιοκρατικό αυτόματο με μία μόνον κατάσταση αρκεί...) αλλά το υποσύνολο της $\{ α^{(κ)}β^{(κ)}: κ \geq 1\}$ δεν είναι (βλ. σημειώσεις). Άρα η πρόταση δεν ισχύει κατ' ανάγκην.

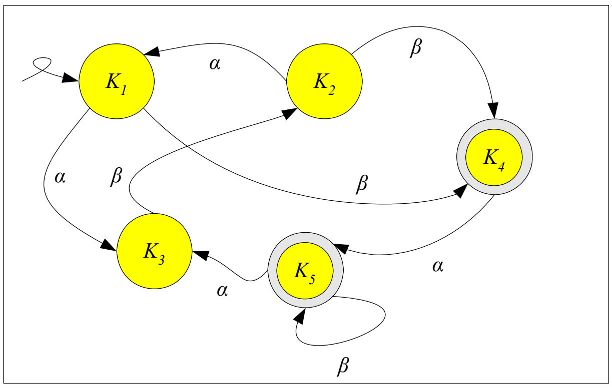
(3) 10% Έστω Σ = { α, β }. Είναι η γλώσσα $Λ = \{ α^{(κ)}β^{(λ)} : κ+λ = ν, ν \geq 2 \}$ [1] ομαλή;

Ναι: η γλώσσα Λ περιέχει οποιαδήποτε (!) λέξη, αρκεί αυτή να έχει μήκος κ+λ από 2 και πάνω, και τα «α» να προηγούνται των «β». Μια ομαλή περιγραφή της είναι {ααα*β*, αββ*, βββ*}.

(4) 10% Έστω Σ = { 1, 2, 4, 5, 7, 9} και Λ = { λ: λ ∈ Σ*, και η λ ως δεκαδικός διαιρείται ακριβώς δια 7 }. Είναι η γλώσσα Λ ομαλή;

Είναι: Θα ορίσουμε γι' αυτήν ένα αυτόματο που έχει τις καταστάσεις 0, 1, 2, ..., 6 (τα πιθανά υπόλοιπα δια 7), με την «0» ως αρχική (και μόνη αποδεκτική) κατάσταση, τέτοιο ώστε μια λέξη λ να το οδηγεί στην κατάσταση υ εάν και μόνον εάν η λ ως δεκαδικός (δηλαδή ο αριθμός *τιμή(λ)*), διαιρούμενος δια 7 δίδει υπόλοιπο = υ. Εάν με την λ πάμε στην κατάσταση (λ.χ.) υ = 3, τότε τιμή(λ) = 7κ+3. Αν στη συνέχεια διαβάσουμε το ψηφίο '4' ∈ Σ, η νέα τιμή του λ' = λ 4, είναι η: 10 τιμή(λ) + 4 = 10 (7κ+3) + 4 = 7(10κ) + 34 = 7(10κ+4) + 6, και το νέο υπόλοιπο είναι «6», άρα από «υ=3» μέσω σ = '4', μεταβαίνουμε στο «υ=6». Παρόμοια προσθέτουμε όλες τις άλλες μεταβάσεις για σ = 1, 2, 5, 7, 9.

(5) 10% Είναι το παρακάτω αυτόματο αιτιοκρατικό ή όχι; Αν όχι, μπορείτε να το τρέψετε σε αιτιοκρατικό με την προσθήκη ενός κόμβου-κατάσταση και οσωνδήποτε ακμών, χωρίς να αλλάξει η γλώσσα που ορίζει;



Δεν έχουμε κενές μεταβάσεις, και από κάθε κατάσταση φεύγει ακριβώς από μια ακμή για κάθε ένα σύμβολο – με εξαίρεση τις καταστάσεις Κ3 (δεν φεύγει «α»), και Κ4 (δεν φεύγει «β»). Προσθέτουμε μια νέα (μη-αποδεκτική) κατάσταση Κ, και τις μεταβάσεις $Κ_3$ –(α)–> Κ, $Κ_4$ –(β)–> Κ, Κ –(α)–> Κ, Κ –(β)–> Κ, και το νέο αυτόματο αποδέχεται την ίδια γλώσσα και είναι αιτιοκρατικό.

[1] $σ^{(κ)}$: το σύμβολο «σ» σε κ το πλήθος επαναλήψεις.

ΘΕΜΑ 2ο: Ασυμφραστικές γλώσσες και γραμματικές.

(1) 10% Έστω Γ η εξής γραμματική επί του αλφαβήτου $\Sigma = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \}$, με αφετηριακό σύμβολο το Ι:

$$\mathrm{I} \to \mathrm{X} \mid \Upsilon, \quad \mathrm{X} \to \alpha\, \beta\, \gamma\, \mathrm{Z}\, \mathrm{I}, \quad \Upsilon \to \alpha\, \beta\, \delta\, \mathrm{Z}\, \mathrm{I}, \quad \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}\, \varepsilon \mid \zeta$$

Γράψτε την ασυμφραστική γραμματική Γ σε αιτιοκρατική μορφή.

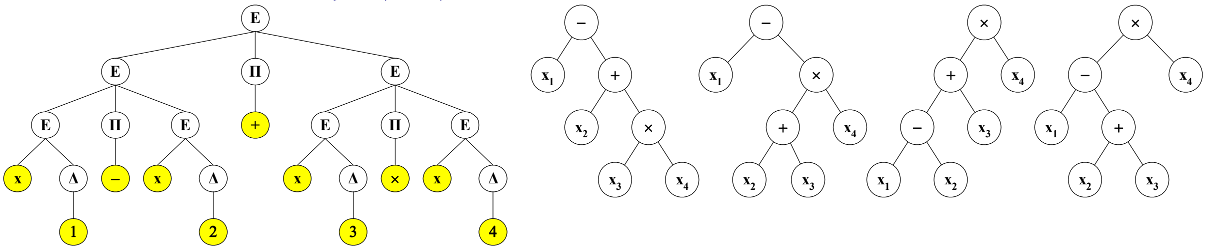
Απαλείφουμε το «δίλημμα» των Χ , Υ αντικαθιστώντας τον κανόνα $\mathrm{I} \to \mathrm{X} \mid \Upsilon$ με τους $\mathrm{I} \to \alpha\, \beta\, \Delta$, και $\Delta \to \gamma\, \mathrm{Z}\, \mathrm{I} \mid \delta\, \mathrm{Z}\, \mathrm{I}$.
Απαλείφουμε την «αριστερή αναδρομή» $\mathrm{Z} \to \mathrm{Z}\, \varepsilon \mid \zeta$, αντικαθιστώντας την με τους $\mathrm{Z} \to \zeta\, \mathrm{Z}'$, $\mathrm{Z}' \to \varepsilon\, \mathrm{Z}' \mid \varnothing$.

(2) 10% Έστω Γ η εξής γραμματική επί του $\Sigma = \{ x, +, -, \times, \div, 1, 2, \dots, 9 \}$, με αφετηριακό σύμβολο το Ε:

$$\mathrm{E} \to \mathrm{E}\, \Pi\, \mathrm{E} \mid x\, \Delta, \quad \Pi \to + \mid - \mid \times \mid \div, \quad \Delta \to 1 \mid 2 \mid \dots \mid 9$$

α) Δώστε ένα συντακτικό δένδρο για τη λέξη $\lambda = x_1 - x_2 + x_3 \times x_4$.
β) Δώστε όλα τα δυνατά συντακτικά δένδρα για την λ.

α) Ένα Σ.Δ. είναι το εξής (αριστερά),



β) και τα υπόλοιπα αντιστοιχούν (*συνοπτικά*) στα παραπάνω 4 (δεξιά).

(3) 10% Έστω ότι η Λ είναι μια ασυμφραστική γλώσσα επί του $\Sigma = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \}$, και $\Lambda' = \{ \lambda : \lambda \in \Lambda$, και η λ περιέχει τα σύμβολα α ή β (μόνον) μέχρις ενός σημείου, και τα σύμβολα γ ή δ (μόνον) από αυτό το σημείο και μετά$\}$. Είναι η γλώσσα Λ′ επίσης ασυμφραστική;

Η γλώσσα $\mathrm{T} = \{ \alpha, \beta \}^* \{ \gamma, \delta \}^*$ είναι ομαλή, άρα η τομή της με την ασυμφραστική Λ είναι επίσης ασυμφραστική, (βλ. σημειώσεις, κλειστότητα ασυμφραστικών γλωσσών). Η τομή $\Lambda \cap \mathrm{T}$ είναι η γλώσσα Λ′.

(4) 10% Γράψτε την εξής γραμματική (με αφετηριακό σύμβολο το Ι) σε κανονική μορφή Chomsky:

$$\mathrm{I} \to \alpha\, \beta\, \mathrm{K}, \quad \mathrm{K} \to \Lambda\, \mathrm{K}\, \mathrm{M} \mid \varnothing, \quad \Lambda \to \mathrm{I}\, \alpha, \quad \mathrm{M} \to \beta\, \mathrm{I}$$

Τελικά σύμβολα: $\mathrm{I} \to \mathrm{ABK}$, $\mathrm{K} \to \Lambda\mathrm{KM} \mid \varnothing$, $\Lambda \to \mathrm{IA}$, $\mathrm{M} \to \mathrm{BI}$, $\mathrm{A} \to \alpha$, $\mathrm{B} \to \beta$.
Απαλειφή $\mathrm{X} \to \varnothing$: $\mathrm{I} \to \mathrm{ABK} \mid \mathrm{AB}$, $\mathrm{K} \to \Lambda\mathrm{KM} \mid \Lambda\mathrm{M}$, $\Lambda \to \mathrm{IA}$, $\mathrm{M} \to \mathrm{BI}$, $\mathrm{A} \to \alpha$, $\mathrm{B} \to \beta$.
Μόνο διπλά σύμβολα: $\mathrm{I} \to \mathrm{SK} \mid \mathrm{AB}$, $\mathrm{S} \to \mathrm{AB}$, $\mathrm{K} \to \mathrm{TM} \mid \Lambda\mathrm{M}$, $\mathrm{T} \to \Lambda\mathrm{K}$, $\Lambda \to \mathrm{IA}$, $\mathrm{M} \to \mathrm{BI}$, $\mathrm{A} \to \alpha$, $\mathrm{B} \to \beta$.

(5) 10% Δώστε μια ασυμφραστική γραμματική για τη γλώσσα επί του $\Sigma = \{ (,), \alpha, \beta, \gamma \}$, που περιέχει όλες και μόνον τις λέξεις με την εξής μορφή: (α … β γ (β) (γ γ) β) (α (γ β) γ … α (β) α β), δηλαδή ένα κείμενο με *ισορροπημένες* παρενθέσεις, που περιέχει και οποιεσδήποτε υπολέξεις από τα σύμβολα α, β, γ *ανάμεσα σε ένα οποιοδήποτε ζεύγος συνταιριασμένων παρενθέσεων και μόνον εκεί* – (π.χ. η λέξη (α) β (γ) δεν επιτρέπεται, λόγω της εμφάνισης του β).

Ένας τρόπος σκέψης είναι ο εξής:
η γραμματική των ισορροπημένων παρενθέσεων έχει την μορφή $\mathrm{I} \to \mathrm{I}\,(\,\mathrm{I}\,) \mid \varnothing$. Ένα οποιοδήποτε κείμενο Κ δίδεται από τους κανόνες $\mathrm{K} \to \alpha\, \mathrm{K} \mid \beta\, \mathrm{K} \mid \gamma\, \mathrm{K} \mid \varnothing$. Για να βάλουμε κείμενο _οπουδήποτε_ αρκεί να τροποποιήσουμε τους κανόνες σε $\mathrm{I} \to \mathrm{K\, I\, K}\,(\,\mathrm{K\, I\, K}\,)\,\mathrm{K} \mid \varnothing$– αλλά αυτό που θα πάρουμε πρέπει να το κλείσουμε σε παρενθέσεις για να είμαστε ΟΚ, και μετά ας το πάρουμε όσες φορές θέλουμε. Άρα οι κανόνες (με αρχικό σύμβολο το Π) είναι:

$$\Pi \to \Pi\, \Pi \mid (\,\mathrm{I}\,) \mid \varnothing$$
$$\mathrm{I} \to \mathrm{K\, I\, K}\,(\,\mathrm{K\, I\, K}\,)\,\mathrm{K} \mid \varnothing$$
$$\mathrm{K} \to \alpha\, \mathrm{K} \mid \beta\, \mathrm{K} \mid \gamma\, \mathrm{K} \mid \varnothing$$