ΗΥ-180 - Λογική
Διδάσκων: Δ. Πλεξουσάκης
Εαρινό Εξάμηνο 2010 - 2011

Λύσεις 1ης Σειράς Ασκήσεων

1.

$(\neg P \leftrightarrow ((Q \vee \neg R) \rightarrow \neg S)) \wedge \neg((P \vee Q) \wedge (\neg R \rightarrow S))$

$(\neg P \leftrightarrow (\neg (Q \vee \neg R) \vee \neg S)) \wedge \neg((P \vee Q) \wedge (\neg\neg R \vee S))$

$((\neg P \wedge (\neg (Q \vee \neg R) \vee \neg S)) \vee (P \wedge \neg (\neg (Q \vee \neg R) \vee \neg S))) \wedge \neg((P \vee Q) \wedge (R \vee S))$

$((\neg P \wedge ((\neg Q \wedge R) \vee \neg S)) \vee (P \wedge ((Q \vee \neg R) \wedge S))) \wedge (\neg (P \vee Q) \vee \neg (R \vee S))$

$\mathbf{((\neg P \wedge ((\neg Q \wedge R) \vee \neg S)) \vee (P \wedge ((Q \vee \neg R) \wedge S))) \wedge ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg R \wedge \neg S))}$ **(1)**

DNF

$(((\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee (\neg P \wedge \neg S)) \vee (P \wedge ((Q \wedge S) \vee (\neg R \wedge S)))) \wedge ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg R \wedge \neg S))$

$((\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg S) \vee ((P \wedge (Q \wedge S)) \vee (P \wedge (\neg R \wedge S)))) \wedge ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg R \wedge \neg S))$

$((\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg S) \vee (P \wedge Q \wedge S) \vee (P \wedge \neg R \wedge S)) \wedge ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg R \wedge \neg S))$

$((\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \wedge ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg R \wedge \neg S))) \vee ((\neg P \wedge \neg S) \wedge ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg R \wedge \neg S))) \vee ((P \wedge Q \wedge S) \wedge ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg R \wedge \neg S))) \vee ((P \wedge \neg R \wedge S) \wedge ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg R \wedge \neg S)))$

$((\neg P \land \neg Q \land R) \land (\neg P \land \neg Q)) \lor ((\neg P \land \neg Q \land R) \land (\neg P \land \neg Q)) \lor ((\neg P \land \neg S) \land (\neg P \land \neg Q)) \lor ((\neg P \land \neg S) \land (\neg R \land \neg S)) \lor ((P \land Q \land S) \land (\neg P \land \neg Q)) \lor ((P \land Q \land S) \land (\neg R \land \neg S)) \lor ((P \land \neg R \land S) \land (\neg P \land \neg Q)) \lor ((P \land \neg R \land S) \land (\neg R \land \neg S))$

$(\neg P \land \neg Q \land R \land \neg P \land \neg Q) \lor (\neg P \land \neg Q \land R \land \neg P \land \neg Q) \lor (\neg P \land \neg S \land \neg P \land \neg Q) \lor (\neg P \land \neg S \land \neg R \land \neg S) \lor (P \land Q \land S \land \neg P \land \neg Q) \lor (P \land Q \land S \land \neg R \land \neg S) \lor (P \land \neg R \land S \land \neg P \land \neg Q) \lor (P \land \neg R \land S \land \neg R \land \neg S)$

$(R \land \neg P \land \neg Q) \lor (R \land \neg P \land \neg Q) \lor (\neg S \land \neg P \land \neg Q) \lor (\neg P \land \neg R \land \neg S) \lor (S \land \mathbf{F}) \lor (P \land Q \land \mathbf{F} \land \neg R) \lor (\mathbf{F} \land \neg R \land S \land \neg Q) \lor (P \land \neg R \land \mathbf{F})$

$(R \land \neg P \land \neg Q) \lor (\neg S \land \neg P \land \neg Q) \lor (\neg P \land \neg R \land \neg S) \lor \mathbf{F} \lor \mathbf{F} \lor \mathbf{F} \lor \mathbf{F}$

$\boldsymbol{(R \land \neg P \land \neg Q) \lor (\neg S \land \neg P \land \neg Q) \lor (\neg P \land \neg R \land \neg S)}$ **.**

<u>CNF</u>

Από την

$\boldsymbol{(\neg P \land ((\neg Q \land R) \lor \neg S)) \lor (P \land ((Q \lor \neg R) \land S))) \land ((\neg P \land \neg Q) \lor (\neg R \land \neg S))}$

<u>(1)</u> έχουμε:

$((\neg P \land ((\neg Q \lor \neg S) \land (R \lor \neg S))) \lor (P \land ((Q \lor \neg R) \land S))) \land$
$((\neg P \lor (\neg R \land \neg S)) \land (\neg Q \lor (\neg R \land \neg S)))$

$((\neg P \lor (P \land ((Q \lor \neg R) \land S))) \land (((\neg Q \lor \neg S) \land (R \lor \neg S)) \lor (P \land ((Q \lor \neg R) \land S))))$
$\land ((\neg P \lor \neg R) \land (\neg P \lor \neg S) \land (\neg Q \lor \neg R) \land (\neg Q \lor \neg S))$

$(((\neg P \vee (P \wedge (Q \vee \neg R))) \wedge (\neg P \vee S)) \wedge$

$(((\neg Q \vee \neg S) \vee (P \wedge ((Q \vee \neg R) \wedge S))) \wedge$

$((R \vee \neg S) \vee (P \wedge ((Q \vee \neg R) \wedge S))))$

$\wedge ((\neg P \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg S) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg S))$

$((\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee (Q \vee \neg R)) \wedge (\neg P \vee S)) \wedge$

$(P \vee (\neg Q \vee \neg S)) \wedge (((Q \vee \neg R) \wedge S) \vee (\neg Q \vee \neg S)) \wedge$

$((P \vee (R \vee \neg S)) \wedge ((Q \vee \neg R) \wedge S) \vee (R \vee \neg S)))$

$\wedge ((\neg P \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg S) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg S))$

$((\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee (Q \vee \neg R)) \wedge (\neg P \vee S)) \wedge$

$((P \vee \neg Q \vee \neg S) \wedge ((Q \vee \neg R) \vee (\neg Q \vee \neg S)) \wedge (S \vee (\neg Q \vee \neg S)) \wedge$

$(P \vee (R \vee \neg S) \wedge ((Q \vee \neg R) \vee R) \wedge ((S \vee R \vee \neg S))) \wedge$

$\wedge ((\neg P \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg S) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg S))$

$(\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee S) \wedge$

$(P \vee \neg Q \vee \neg S) \wedge (Q \vee \neg R \vee \neg Q \vee \neg S) \wedge (S \vee \neg Q \vee \neg S) \wedge$

$(P \vee R \vee \neg S) \wedge (Q \vee \neg R \vee R) \wedge (S \vee R \vee \neg S) \wedge$

$(\neg P \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg S) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg S)$

$T \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee S) \wedge$

$(P \vee \neg Q \vee \neg S) \wedge T \wedge T \wedge$

$(P \vee R \vee \neg S) \wedge T \wedge T \wedge$

$(\neg P \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg S) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg S)$

$(\neg P \vee S) \wedge (P \vee R \vee \neg S) \wedge$

$(\neg P \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg S) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg S)$

$\neg P \wedge (P \vee R \vee \neg S) \wedge$

$(\neg P \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg S)$

$\mathbf{(P \vee R \vee \neg S) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg S).}$

2.

α)

S |= A   και S|=A→B τότε S |= B

S |= A

Αν το σύνολο προτάσεων S είναι αληθές, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και η πρόταση A είναι αληθής

S|=A→B

Αν το σύνολο προτάσεων S είναι αληθές, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και η πρόταση A→B ή, ισοδύναμα, η πρόταση ¬A ∨ B είναι αληθής

Άρα αν το σύνολο S είναι αληθές, τότε θα είναι αληθής και η πρόταση A ∧ (¬A ∨ B) ≡ (A ∧ ¬A) ∨ (A ∧ B) ≡ A ∧ B.

Άρα αν το σύνολο S είναι αληθές, τότε θα είναι αληθής η πρόταση A (το οποίο ήδη το γνωρίζουμε) και θα είναι αληθής και η πρόταση B, κάτι το οποίο σημαίνει ότι S |= B.

β)

A |= B   ή   A|=C τότε A |= B ∨C

A |= B   ή   A|=C

Αν η πρόταση A είναι αληθής, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η πρόταση B είναι αληθής, ή ότι η πρόταση C είναι αληθής, άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η πρόταση B ∨ C είναι αληθής, κάτι το οποίο σημαίνει ότι A |= B ∨ C.

Για το δεύτερο ζητούμενο, αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει η $A \models B \vee C$, ξεκινώντας από υπόθεση η οποία δεν ισοδυναμεί με την $A \models B$ ή $A \models C$

Έστω ότι $A \models B$ **και** $A \models C$. Τότε αν η πρόταση A είναι αληθής, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η πρόταση B αληθής, και ότι η πρόταση C είναι αληθής, άρα και ότι η πρόταση $B \vee C$ είναι αληθής, δηλαδή ότι $A \models B \vee C$.

3.

α)

$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv A$

$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$

$\equiv A \wedge (B \vee \neg B)$ (επιμεριστικότητα του $\wedge$ πάνω στο $\vee$ (4β))

$\equiv A \vee F$ (αντινομία)

$\equiv A$ (F ουδέτερο στοιχείο του $\vee$)

β)

$\mathbf{(A \wedge B) \to C \equiv A \to (B \to C)}$

Βάσει του ορισμού του $\to$, έχουμε:

$(A \wedge B) \to C \equiv \neg(A \wedge B) \vee C \equiv \neg A \vee \neg B \vee C$

$\mathbf{A \to (B \to C)} \equiv A \to (\neg B \vee C) \equiv \neg A \vee (\neg B \vee C) \equiv \neg A \vee \neg B \vee C$

4.

Η πρόταση που εξάγεται από τον παραπάνω πίνακα αληθείας είναι:

$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \equiv$

(συνένωση)

$(A \wedge C) \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$

Επαληθεύουμε την παραπάνω πρόταση δημιουργώντας τον πίνακα αληθείας και συγκρίνοντας τον με τον πίνακα που δίνεται στην εκφώνηση.

A	B	C	$(A \wedge C) \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$
α	α	α	α
α	α	ψ	ψ
α	ψ	α	α
α	ψ	ψ	ψ
ψ	α	α	α
ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	α	α
ψ	ψ	ψ	ψ