Άσκηση 1

CNF

$(\neg P \wedge (Q \vee R \vee \neg S)) \leftrightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow (S \wedge P)))$

Βήμα 1ο Αντικαθιστούμε τις συνεπαγωγές και τις ισοδυναμίες.

$(\neg P \wedge (Q \vee R \vee \neg S)) \leftrightarrow (Q \rightarrow (\neg R \vee (S \wedge P))) \equiv$
$(\neg P \wedge (Q \vee R \vee \neg S)) \leftrightarrow (\neg Q \vee (\neg R \vee (S \wedge P))) \equiv$
$((\neg P \wedge (Q \vee R \vee \neg S)) \wedge (\neg Q \vee (\neg R \vee (S \wedge P)))) \vee$
$(\neg(\neg P \wedge (Q \vee R \vee \neg S)) \wedge \neg(\neg Q \vee (\neg R \vee (S \wedge P)))) \equiv$

Βήμα 2ο: Σπρώχνουμε τις πιο εξωτερικές αρνήσεις εσωτερικά

$((\neg P \wedge (Q \vee R \vee \neg S)) \wedge (\neg Q \vee (\neg R \vee (S \wedge P)))) \vee$
$((P \vee (\neg Q \wedge \neg R \wedge S)) \wedge (Q \wedge (R \wedge (\neg S \vee \neg P)))) \equiv$

Βήμα 3ο: Χρησιμοποιούμε την επιμεριστικότητα της διάζευξης.

$(\neg P \wedge (Q \vee R \vee \neg S) \wedge (\neg Q \vee ((\neg R \vee S) \wedge (\neg R \vee P)))) \vee$
$((P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R) \wedge (P \wedge S) \wedge Q \wedge R \wedge (\neg S \vee \neg P)) \equiv$
$(\neg P \wedge (Q \vee R \vee \neg S) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee P)) \vee$
$((P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R) \wedge (P \vee S) \wedge Q \wedge R \wedge (\neg S \vee \neg P)) \equiv$

Βήμα 4ο: Διαγράφουμε τους διπλούς όρους και αντικαθιστούμε με T τις ταυτολογίες οι οποίες απορροφώνται από τους μέγιστους όρους στη συνέχεια.

$(\overset{T}{\cancel{\neg P \vee P}} \vee \neg Q) \wedge (\overset{T}{\cancel{\neg P \vee P}} \vee \neg R) \wedge (\overset{T}{\cancel{\neg P \vee P}} \vee S) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge$
$(\neg P \vee \neg S \vee \neg P) \wedge (Q \vee R \vee \neg S \vee \overset{T}{P} \vee \neg Q) \wedge (Q \vee R \vee \neg S \vee \overset{T}{P} \vee \neg R) \wedge$
$(Q \vee R \vee \neg S \vee P \vee S) \wedge (Q \vee R \vee \neg S \vee Q) \wedge (Q \vee R \vee \neg S \vee R) \wedge$
$(Q \vee R \vee \neg S \vee \neg S \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee S \vee P \vee \neg Q) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee S \vee P \vee \neg R) \wedge$

$\rightarrow$

$$(\neg Q \lor \neg R \lor S \lor P \lor S) \land (\neg Q \lor \neg R \lor \overset{T}{S} \lor Q) \land (\neg Q \lor \neg R \lor \overset{T}{S} \lor R) \land$$
$$(\neg Q \lor \neg R \lor S \lor \overset{T}{\neg S} \lor \neg P) \land (\neg Q \lor \neg R \lor P \lor P \lor \neg Q) \land (\neg Q \lor \neg R \lor P \lor P \lor \neg R)$$
$$\land (\neg Q \lor \neg R \lor P \lor P \lor S) \land (\neg Q \lor \neg R \lor \overset{T}{P} \lor Q) \land (\neg Q \lor \neg R \lor \overset{T}{P} \lor R) \land$$
$$(\neg Q \lor \neg R \lor \overset{T}{P} \lor \neg S \lor \neg P) \equiv$$

$$T \land T \land T \land (\neg P \lor R) \land (\neg P \lor \neg S) \land T \land T \land T \land (Q \lor R \lor \neg S) \land$$
$$(Q \lor R \lor \neg S \lor \neg P) \land (\neg Q \lor \neg R \lor S \lor P) \land T \land T \land T \land (\neg Q \lor \neg R \lor P)$$
$$\land T \land T \land T \equiv$$

$$(\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor R) \land (\neg P \lor \neg S) \land (Q \lor R \lor \neg S) \land (Q \lor \overset{\text{απορρ.}}{R} \lor \neg S \lor \neg P)$$
$$\land (\neg Q \lor \overset{\text{απορρ.}}{\neg R} \lor S \lor P) \land (\neg Q \lor \neg R \lor P) \equiv$$

$$(\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor R) \land (\neg P \lor \neg S) \land (Q \lor R \lor \neg S) \land (\neg Q \lor \neg R \lor P)$$

DNF

Ξεκινάμε από το 2ο βήμα της μετατροπής σε CNF και χρησιμοποιούμε την επιμεριστικότητα της σύζευξης.

$((\neg P \land (Q \land R \land \neg S)) \land (\neg Q \lor (\neg R \lor (S \land P)))) \lor$
$((P \lor (\neg Q \land \neg R \land S)) \land (Q \land (R \land (\neg S \lor \neg P))))) \equiv$

$(((\neg P \land Q) \lor (\neg P \land R) \lor (\neg P \land \neg S)) \land (\neg Q \lor (\neg R \lor (S \land P)))) \lor$
$((P \lor (\neg Q \land \neg R \land S)) \land (Q \land ((R \land \neg S) \lor (R \land \neg P))))) \equiv$

$(((\neg P \land Q) \lor (\neg P \land R) \lor (\neg P \land \neg S)) \land (\neg Q \lor \neg R \lor (S \land P))) \lor$
$((P \lor (\neg Q \land \neg R \land S)) \land ((Q \land R \land \neg S) \lor (Q \land R \land \neg P))) \equiv$

$(\neg P \land Q \land \neg Q) \lor (\neg P \land Q \land \neg R) \lor (\neg P \land Q \land S \land P) \lor (\neg P \land R \land \neg Q) \lor$
$(\neg P \land R \land \neg R) \lor (\neg P \land R \land S \land P) \lor (\neg P \land \neg S \land \neg Q) \lor (\neg P \land \neg S \land \neg R) \lor$
$(\neg P \land \neg S \land S \land R) \lor (P \land Q \land R \land \neg S) \lor (P \land Q \land R \land \neg P) \lor$
$(\neg Q \land \neg R \land S \land Q \land R \land \neg S) \lor (\neg Q \land \neg R \land S \land Q \land R \land \neg P) \equiv$

$F \lor (\neg P \land Q \land \neg R) \lor F \lor (\neg P \land R \land \neg Q) \lor F \lor F \lor (\neg P \land \neg S \land \neg Q) \lor$
$(\neg P \land \neg S \land \neg R) \lor F \lor (P \land Q \land R \land \neg S) \lor F \lor F \lor F \equiv$

Οι αντινομίες απορροφούνται από τους ελάχιστους όρους

$(\neg P \land Q \land \neg R) \lor (\neg P \land R \land \neg Q) \lor (\neg P \land \neg S \land \neg Q) \lor$
$(\neg P \land \neg S \land \neg R) \lor (P \land Q \land R \land \neg S)$

Άσκηση 2

[20 μονάδες] Θεωρείστε τα σύνολα προτάσεων Σ1 = { P -> -Q, P -> -R, P ^ Q, R } Σ2 = { P -> Q, P -> R, R ^ Q, -P }

(α) Εξετάστε αν τα σύνολα αυτά είναι ικανοποιήσιμα.

(β) Ένα σύνολο προτάσεων ονομάζεται ελάχιστα μη-ικανοποιήσιμο αν είναι μη-ικανοποιήσιμο αλλά όλα τα γνήσια υποσύνολά του είναι ικανοποιήσιμα. Εξετάστε αν κάποιο από τα Σ1, Σ2 είναι ελάχιστα μη-ικανοποιήσιμο σύνολο.

Λύση

a)

Σ1 = { P -> -Q, P -> -R, P ^ Q, R }

Το P -> -Q είναι ισοδύναμο με -P V -Q

Το P -> -R είναι ισοδύναμο με -P V -R

P	Q	R	-P	-R	P-> -Q	P-> -R	P^Q	Σ1
T	T	T	F	F	F	F	T	F
T	T	F	F	T	F	T	T	F
T	F	T	F	F	T	F	F	F
T	F	F	F	T	T	T	F	F
F	T	T	T	F	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T	F	F

Το σύνολο Σ1 είναι μη ικανοποιήσιμο αφού δεν υπάρχει ερμηνεία που να καθιστά όλες τις προτάσεις ταυτόχρονα αληθές. Αυτό σημαίνει πως δεν υπάρχει συνδυασμός τιμών για την Σ1 που να την κάνουν αληθή.

Σ2 = { P -> Q, P -> R, R ^ Q, -P }

Το P -> Q είναι ισοδύναμο με -P V Q

Το P -> R είναι ισοδύναμο με -P V R

P	Q	R	-P	R-> Q	P-> R	R^Q	Σ2
T	T	T	F	T	T	T	F
T	T	F	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	F	F
F	F	F	T	T	T	F	F

Το σύνολο Σ2 είναι ικανοποιήσιμο διότι σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα υπάρχει έστω μία ερμηνεία για την οποία οι όροι του συνόλου Σ2 είναι ταυτόχρονα αληθείς .

b)

Ένα σύνολο προτάσεων ονομάζεται ελάχιστα μη-ικανοποιήσιμο όταν είναι μη-ικανοποιήσιμο αλλά όλα τα γνήσια υποσύνολα του είναι ικανοποιήσιμα. Οπότε σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό το Σ2 **ΔΕΝ** είναι ελάχιστα μη-ικανοποιήσιμο αφού από το a) ερώτημα προέκυψε ότι είναι ικανοποιήσιμο. Άρα εξετάζουμε μόνο την περίπτωση Σ1 που είναι μη-ικανοποιήσιμο.

Το Σ1 δεν είναι ελάχιστα μη-ικανοποιήσιμο γιατί παρατηρούμε ότι τα υποσύνολα **{ P -> -Q, P -> -R, P ^ Q,}** ή **{ P -> -Q, P ^ Q}** δεν είναι ικανοποιήσιμα.

Άσκηση 3

[10 μονάδες] Γράψτε μια πρόταση για τη στήλη X του παρακάτω πίνακα αλήθειας και επαληθεύστε την απάντησή σας. Φροντίστε η πρόταση αυτή να είναι όσο πιο απλή γίνεται και αιτιολογείστε την όποια μετατροπή κάνετε με τις γνωστές ισοδυναμίες του προτασιακού λογισμού.

A	B	C	X
α	α	α	ψ
α	α	ψ	ψ
α	ψ	α	α
α	ψ	ψ	α
ψ	α	α	ψ
ψ	α	ψ	ψ
ψ	ψ	α	α
ψ	ψ	ψ	ψ

Λύση

Με βάση τον πίνακα αληθείας , παρατηρούμε ότι 3 γραμμές αναδεικνύουν την στήλη X ως αληθής. Με βάση αυτές μπορούμε να γράψουμε την ακόλουθη έκφραση :

$(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \equiv$

$\underline{(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)} \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \equiv$ *(ΣΥΝΕΝΩΣΗ)*

$(\neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \equiv$ *(ΕΠΙΜΕΡΙΣΜΟΣ)*

$((\neg B) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C)) \wedge ((C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \equiv$ *(ΕΠΙΜΕΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ∨ ΣΤΟ ∧)*

$((\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg C)) \wedge ((C \vee A) \wedge (C \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg C)) \equiv$

(ΑΥΤΟΠΑΘΕΙΑ), (ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΑ)

$((\neg B \vee A) \wedge \neg B \wedge (\neg B \vee \neg C)) \wedge ((C \vee A) \wedge (C \vee \neg B)) \equiv$ *(ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗ)*

$((\neg B \vee A) \wedge \neg B \wedge (C \vee A) \wedge (C \vee \neg B)) \equiv$ *(ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗ)*

$(\neg B \wedge (C \vee A) \wedge (C \vee \neg B)) \equiv (\neg B \wedge (C \vee \neg B) \wedge (C \vee A)) \equiv$ *(ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗ)*

$(\neg B \wedge (C \vee A))$

Για να επαληθεύσουμε την εγκυρότητα του αποτελέσματος δημιουργούμε έναν νέο πίνακα αληθείας ο οποίος και επιβεβαιώνει τα αρχικά δεδομένα.

A	B	C	¬B	C ∨ A	¬B ∧ (C ∨ A)
α	α	α	ψ	α	ψ
α	α	ψ	ψ	α	ψ
α	ψ	α	α	α	α
α	ψ	ψ	α	α	α
ψ	α	α	ψ	α	ψ
ψ	α	ψ	ψ	ψ	ψ
ψ	ψ	α	α	α	α
ψ	ψ	ψ	α	ψ	ψ