Προτεινόμενες λύσεις 1ης σειράς ασκήσεων

1. Μετατρέψτε την παρακάτω πρόταση σε Διαζευκτική και σε Συζευκτική Κανονική Μορφή δείχνοντας όλα τα βήματα της μετατροπής:

$$P \leftrightarrow ((Q \vee \neg R) \rightarrow S)) \wedge \neg(\neg P \wedge Q \wedge (R \rightarrow \neg S)) \tag{1}$$

Λύση

Βήμα 1. Αντικαθιστούμε τις συνεπαγωγές και τις ισοδυναμίες

$$\begin{aligned} & (P \leftrightarrow ((Q \vee \neg R) \rightarrow S)) \wedge \neg(\neg P \wedge Q \wedge (R \rightarrow \neg S) \\ \equiv\ & [(P \wedge (\neg(Q \vee \neg R) \vee S)) \vee (\neg P \wedge \neg(\neg(Q \vee \neg R) \vee S))] \wedge \neg(\neg P \wedge Q \wedge (\neg R \vee \neg S)) \end{aligned}$$

Βήμα 2. Ελαχιστοποιούμε το πεδίο των αρνήσεων

$$\equiv [(P \wedge ((\neg Q \wedge R) \vee S)) \vee (\neg P \wedge ((Q \vee \neg R) \wedge \neg S))] \wedge (P \vee \neg Q \vee (R \wedge S)) \tag{2}$$

Βήμα 3. Χρησιμοποιούμε την επιμεριστικότητα της διάζευξης προς την σύζευξη, καθώς επίσης διαγράφουμε τις πλεονάζουσες παρενθέσεις.

$$\begin{aligned} \equiv\ & [((P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge S)) \vee (\neg P \wedge ((Q \vee \neg R) \wedge \neg S))] \wedge (P \vee \neg Q \vee (R \wedge S)) \\ \equiv\ & [((P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge S)) \vee (\neg P \wedge ((Q \wedge \neg S) \vee (\neg R \wedge \neg S)))] \\ & \wedge(P \vee \neg Q \vee (R \wedge S)) \\ \equiv\ & [((P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge S)) \vee ((\neg P \wedge Q \wedge \neg S) \vee (\neg P \wedge \neg R \wedge \neg S))] \\ & \wedge(P \vee \neg Q \vee (R \wedge S)) \\ \equiv\ & [(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg S) \vee (\neg P \wedge \neg R \wedge \neg S)] \\ & \wedge(P \vee \neg Q \vee (R \wedge S)) \\ \equiv\ & (P \wedge P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge P \wedge S) \vee (P \wedge \neg P \wedge Q \wedge \neg S) \vee (P \wedge \neg P \wedge \neg R \wedge \neg S) \\ & \vee(\neg Q \wedge P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge P \wedge S) \vee (\neg Q \wedge \neg P \wedge Q \wedge \neg S) \\ & \vee(\neg Q \wedge \neg P \wedge \neg R \wedge \neg S) \vee (R \wedge S \wedge P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (R \wedge S \wedge P \wedge S) \\ & \vee(R \wedge S \wedge \neg P \wedge Q \wedge \neg S) \vee (R \wedge S \wedge \neg P \wedge \neg R \wedge \neg S) \end{aligned}$$

Βήμα 4. Αφαιρούμε τα διπλά γράμματα από μέγιστους όρους, διπλούς *μέγιστους* όρους, αντικαθιστούμε ταυτολογίες και αντινομίες και εφαρμόζουμε τους κανόνες απορρόφησης και συνένωσης. Κατόπιν διαγράφουμε επαναλαμβανόμενους όρους και, όπου είναι δυνατόν, χρησιμοποιούμε τους κανόνες απορρόφησης και συνένωσης.

$$\begin{aligned}
&\equiv (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (P \wedge \neg P \wedge Q \wedge \neg S) \vee (P \wedge \neg P \wedge \neg R \wedge \neg S) \\
&\quad \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge P \wedge S) \vee (\neg Q \wedge \neg P \wedge Q \wedge \neg S) \\
&\quad \vee (\neg Q \wedge \neg P \wedge \neg R \wedge \neg S) \vee (S \wedge P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (R \wedge P \wedge S) \\
&\quad \vee (R \wedge S \wedge \neg P \wedge Q \wedge \neg S) \vee (R \wedge S \wedge \neg P \wedge \neg R \wedge \neg S)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee \mathbf{F} \vee \mathbf{F} \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge P \wedge S) \\
&\quad \vee \mathbf{F} \vee (\neg Q \wedge \neg P \wedge \neg R \wedge \neg S) \vee (S \wedge P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (R \wedge P \wedge S) \vee \mathbf{F} \vee \mathbf{F}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge P \wedge S) \\
&\quad \vee (\neg Q \wedge \neg P \wedge \neg R \wedge \neg S) \vee (S \wedge P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (R \wedge P \wedge S)
\end{aligned}$$

$$\equiv (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (\neg Q \wedge \neg P \wedge \neg R \wedge \neg S)$$

, τύπος που προέκυψε είναι σε κανονική διαζευτική μορφή.

Για να βρούμε την κανονική συζευκτική μορφή της πρότασης (1) επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 και 2 της προηγούμενης μετατροπής, όπου και καταλήγουμε στην πρόταση (2).

Βήμα 3. Χρησιμοποιούμε την επιμεριστικότητα της σύζευξης προς την διάζευξη, καθώς επίσης διαγράφουμε τις πλεονάζουσες παρενθέσεις.

$$\begin{aligned}
&\equiv [(P \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (R \vee S)) \vee (\neg P \wedge ((Q \vee \neg R) \wedge \neg S))] \\
&\quad \wedge [P \vee ((\neg Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee S))]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv [(P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg S) \wedge (\neg Q \vee S \vee \neg P) \\
&\quad \wedge (\neg Q \vee S \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee S \vee \neg S) \wedge (R \vee S \vee \neg P) \\
&\quad \wedge (R \vee S \vee Q \vee \neg R) \wedge (R \vee S \vee \neg S)] \wedge [(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee S)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv (P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg S) \wedge (\neg Q \vee S \vee \neg P) \\
&\quad \wedge (\neg Q \vee S \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee S \vee \neg S) \wedge (R \vee S \vee \neg P) \\
&\quad \wedge (R \vee S \vee Q \vee \neg R) \wedge (R \vee S \vee \neg S) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee S)
\end{aligned}$$

Βήμα 4. Αφαιρούμε τα διπλά γράμματα από *μέγιστους* όρους, διπλούς *μέγιστους* όρους, αντικαθιστούμε ταυτολογίες και αντινομίες και εφαρ*μόζουμε* τους κανόνες απορρόφησης και συνένωσης. Κατόπιν διαγράφουμε επαναλαμβανόμενους όρους και, όπου είναι δυνατόν, χρησιμοποιούμε τους κανόνες απορρόφησης και συνένωσης.

$$\begin{aligned}
&\equiv \mathbf{T} \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg S) \wedge (\neg Q \vee S \vee \neg P) \wedge \mathbf{T} \wedge \mathbf{T} \wedge (R \vee S \vee \neg P) \\
&\quad \wedge \mathbf{T} \wedge \mathbf{T} \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee S)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg S) \wedge (\neg Q \vee S \vee \neg P) \wedge (R \vee S \vee \neg P) \\
&\quad \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee S)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg S) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (R \vee S \vee \neg P) \\
&\quad \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee S)
\end{aligned}$$

, ο τύπος που προέκυψε είναι σε κανονική συζευκτική μορφή.

$\square$

2. Έστω S ένα σύνολο προτάσεων του Προτασιακού Λογισμού και A, B, C προτασιακά σχήματα. Αποδείξτε ότι:

α) Αν $S \cup \{B\} \models A$ και $S \cup \{B\} \models \neg A$ τότε $S \models \neg B$.

β) Για οποιαδήποτε προτασιακά σχήματα A, B, C έχουμε $\{A \to B, B \to C\} \models A \vee B \to C$ και $\{A \to B, A \to C\} \models A \to B \wedge C$.

Λύση

α) Εφόσον $S \cup \{B\} \models A$ τότε $S \models B \to A$. Έστω αποτίμηση V των μεταβλητών η οποία ικανοποιεί το σύνολο υποθέσεων S τότε θα πρέπει, επειδή ισχύει η εξαγωγή συμπεράσματος, για την αποτίμηση του $B \to A$ να έχουμε $V(B \to A) = \mathbf{T}$, το οποίο ισχύει είτε για $V(B) = \mathbf{F}$ είτε για $V(A) = \mathbf{T}$. Εν συνεχεία καθώς $S \cup \{B\} \models \neg A$ έχουμε $S \models B \to \neg A$. Ομοίως με πριν η αποτίμηση V που ικανοποιεί τις υποθέσεις του S θα δίνει την αποτίμηση $V(B \to \neg A) = \mathbf{T}$, για το $B \to \neg A$, το οποίο ισχύει είτε για $V(B) = \mathbf{F}$ είτε για $V(\neg A) = \mathbf{T}$. Παρατηρούμε ότι οι προϋποθέσεις της εκφώνησης ισχύουν ταυτόχρονα για $V(B) = \mathbf{F}$, δηλαδή $V(\neg B) = \mathbf{T}$. Καταλήγουμε δηλαδή ότι για την αποτίμηση V που ικανοποιεί τις υποθέσεις του S έχουμε ότι $V(\neg B) = \mathbf{T}$. Άρα $S \models \neg B$.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$ είναι ταυτολογία.

$$
\begin{array}{lll}
 & ((A \to B) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C) & [\text{Αντικατάσταση } \to] \\
\equiv & \neg((A \to B) \wedge (B \to C)) \vee ((A \vee B) \to C) & [\text{Αντικατάσταση } \to] \\
\equiv & \neg((\neg A \wedge B) \wedge (\neg B \wedge C)) \vee (\neg(A \vee B) \wedge C) & [\text{De Morgan}] \\
\equiv & ((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C)) \vee ((\neg A \wedge \neg B) \vee C) & [\text{Επιμερισμός } \vee \text{ στο } \wedge] \\
\equiv & ((A \vee B) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg C)) & \\
 & \vee((\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)) & [\text{Ταυτολογία}] \\
 & & [\text{Απορρόφηση}] \\
\equiv & (A \vee B \vee \neg A \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg C \vee \neg A \vee C) & \\
 & \wedge(A \vee \neg C \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee \neg A \vee C) & \\
 & \wedge(\neg B \vee \neg C \vee \neg B \vee C) & [\text{Ταυτολογία}] \\
 & & [\text{Απορρόφηση}] \\
\equiv & \mathbf{T} &
\end{array}
$$

Για την απόδειξη της εξαγωγής συμπεράσματος $\{A \to B, A \to C\} \models A \to B \wedge C$ θα χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική προσέγγιση. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι για κάθε αποτίμηση κατα την οποία οι τύποι του $\{A \to B, A \to C\}$ ο $A \to B \wedge C$ είναι επίσης αληθής. Οι αποτιμήσεις V κατά τις οποίες αληθεύουν οι υποθέσεις μας είναι είτε $V(A) = \mathbf{F}$ είτε $V(A) = \mathbf{T}$, $V(B) = \mathbf{T}$ και $V(A) = \mathbf{T}$, $V(C) = \mathbf{T}$. Στην πρώτη περίπτωση, όπου $V(A) = \mathbf{T}$, παίρνουμε $V(A \to B \wedge C) = \mathbf{T}$. Στην δεύτερη περίπτωση, όπου $V(B) = \mathbf{T}$ και $V(A) = \mathbf{T}$, $V(C) = \mathbf{T}$, θα έχουμε $V(B \wedge C) = \mathbf{T}$. Άρα $V(A \to B \wedge C) = \mathbf{T}$. Συνεπώς αποδείξαμε την ζητούμενη εξαγωγή συμπεράσματος[1].

[1] Παρατηρείστε ότι για να θεωρηθεί η απόδειξη ολοκληρωμένη πρέπει να καλύψουμε όλες τις περιπτώσεις όπου αληθεύουν οι υποθέσεις.

$\square$

3. Γράψτε μια πρόταση για τη στήλη X του παρακάτω πίνακα αλήθειας και επαληθεύστε την απάντησή σας. Φροντίστε η πρόταση αυτή να είναι όσο πιο απλή γίνεται και αιτιολογείστε την όποια μετατροπή κάνετε με τις γνωστές ισοδυναμίες του προτασιακού λογισμού.

A	**B**	**C**	**X**
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	T

Λύση

Η πρόταση που εξάγεται από τον πινακα αλήθειας είναι

$$\begin{array}{lll}
 & (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) & [\text{Επιμερισμός } \wedge \text{ στο} \vee] \\
\equiv & \neg C \wedge ((A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) & [\text{Επιμερισμός } \wedge \text{ στο} \vee] \\
\equiv & \neg C \wedge ((A \wedge (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \wedge (B \vee \neg B))) & [\text{Ταυτολογία}] \\
\equiv & \neg C \wedge ((A \wedge \mathbf{T}) \vee (\neg A \wedge \mathbf{T})) & [\text{Απορρόφηση}] \\
\equiv & \neg C \wedge (A \vee \neg A) & [\text{Ταυτολογία}] \\
\equiv & \neg C \wedge \mathbf{T} & [\text{Απορρόφηση}] \\
\equiv & \neg C &
\end{array}$$

Συνεπώς $X \equiv \neg C$. Η επαλήθευση επιβεβαιώνει το αποτέλεσμα μας με απλή παρατήρηση του πίνακα αλήθειας που δίνεται από την εκφώνηση. $\square$