ΗΥ-119

Αλεξανδρος Μαραντος 3329

4η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 4.2.9

(α) $\det Q = \det Q^T$

Άρα: $\det(Q^T \cdot Q) = \det(I) \underset{\text{ιδιοτητα 9}}{\overset{\text{ιδιοτητα 3}}{\Longleftrightarrow}} (\det Q)^2 = 1 \Leftrightarrow \det Q = \pm 1$.

(β) Αφού ο πίνακας ορθογώνιος και $\det(Q) \neq 0$ τότε δεν είναι συνευθειακά, σχηματίζεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

Άσκηση 4.2.16

$$A=\begin{bmatrix}1&1&3\\0&4&6\\1&5&8\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&1&3\\0&4&6\\0&4&5\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&1&3\\0&4&6\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

Απ: $\det(A)=-1\cdot4\cdot1=-4$.

$$B=\begin{bmatrix}1&1&3\\0&4&6\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Απ: $\det(B)=1\cdot4\cdot1=4$

$$C=\begin{bmatrix}1&1&3\\0&4&6\\1&5&9\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&1&3\\0&4&6\\0&4&6\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&1&3\\0&4&6\\0&4&6\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&1&3\\0&4&6\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Απ: $\det(C)=0$ ιδιόμορφος ο C.

Άσκηση 4.3.4

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\0&0&0&1\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}=U\quad,\quad L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\det(A)=1\cdot1\cdot1\cdot1=1$$

Άσκηση 4.4.1

$\det A = 1 \cdot 4 \cdot 5 = 20$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{\sigma\upsilon\mu} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \\ -12 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{T}_{\sigma\upsilon\mu} = \begin{bmatrix} 20 & -10 & -12 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{T}_{\sigma\upsilon\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & -10 & -12 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det A \cdot I$$

-ΙΣΧΥΕΙ-

$$A^{-1} = \frac{1}{20} A_{\sigma\upsilon\mu} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -3/5 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 4.4.5

(α) $\alpha x + by = 1$
$cx + dy = 0.$ $\quad \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{d}{\alpha d - bc} \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{-c}{\alpha d - bc}$$

(b) $x + 4y - z = 1$
$x + y + z = 0$
$2x + 3z = 0.$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}} = 3 \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}} = -2.$$

Άρα: $\boxed{x=3}$, $\boxed{y=-1}$, $\boxed{z=-2}$

Άσκηση 5.1.6

Έστω $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Αφού ο A τριγωνικός έχει φανερές ιδιοτιμές:

$$\det(A-\lambda\cdot I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda).$$

Άρα: $\boxed{\lambda_1=1}, \boxed{\lambda_2=3}$

Πολλαπλασιάζω την $1^{η}$ γραμμή του A με 1 και προσθέτω στην $2^{η}$.

Έχω: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

$$\det(A-\lambda\cdot I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(5-\lambda)-2=5-\lambda-5\lambda+\lambda^2-2=\lambda^2-6\lambda+3$$

$$\Delta=36-4\cdot3=24$$

$$\lambda'_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{24}}{2}=\frac{6\pm2\sqrt{6}}{2}=\begin{cases}\boxed{\lambda'_1=3+\sqrt{6}}\\ \boxed{\lambda'_2=3-\sqrt{6}}\end{cases}$$

Παρατηρώ ότι: $\lambda_1\neq\lambda'_1$ ΚΑΙ $\lambda_2\neq\lambda'_2$

Άσκηση 5.1.13 ②

ο B έχει ιδιοτιμές 1,2,3   Ποιες οι ιδιοτιμές του:
ο C έχει ιδιοτιμές 4,5,6
ο D έχει ιδιοτιμές 7,8,9.

$$A=\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix};$$

$$\det(A-\lambda\cdot I) = \left|\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda\cdot I & 0 \\ 0 & \lambda I \end{bmatrix}\right| =$$

$$= \left|\begin{bmatrix} B-\lambda I & C \\ 0 & D-\lambda\cdot I \end{bmatrix}\right| = |B-\lambda\cdot I||D-\lambda\cdot I| - \cancel{|0||C|} =$$

$$= |B-\lambda\cdot I||D-\lambda\cdot I|$$

Για να βρω ιδιοτιμές του A θα πρέπει:

$$\det(A-\lambda\cdot I)=0 \Rightarrow |B-\lambda\cdot I||D-\lambda\cdot I|=0 \Rightarrow$$

$|B-\lambda I|=0$ ή $|D-\lambda\cdot I|=0$.

Ξέρω όμως ότι ο B έχει ιδιοτιμές 1,2,3 και ο D 7,8,9

<u>Άρα</u>: οι ιδιοτιμές του A θα είναι 1,2,3 Η 7,8,9.

Άσκηση 5.2.9

$$A=\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha q+b\cdot s & \alpha r+b\cdot t \\ cq+d\cdot s & cr+d\cdot t \end{bmatrix}$$ Έχω: $trace(AB)=\alpha q+b\cdot s+c\cdot r+d\cdot t$.

$$B\cdot A=\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q\cdot\alpha+r\cdot c & q\cdot b+r\cdot d \\ s\cdot\alpha+t\cdot c & s\cdot b+t\cdot d \end{bmatrix}$$ Έχω: $trace(BA)=q\alpha+r\cdot c+s b+t d$

$trace(AB)=trace(B\cdot A)$.

$$AB-BA=\begin{bmatrix} \alpha q+b\cdot s & \alpha r+b\cdot t \\ cq+d\cdot s & cr+d\cdot t \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} q\alpha+r\cdot c & q b+r\cdot d \\ s\cdot\alpha+t\cdot c & s b+t d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} bs-r\cdot c & \alpha r+b t-q b-r d \\ cq+d\cdot s-s\alpha-tc & cr-sb \end{bmatrix}$$

$AB-BA=I \Rightarrow$
$trace(AB-B\cdot A)=trace(I) \Rightarrow b\cancel{s}-r\cancel{c}+\cancel{c}r-s\cancel{b}=2 \Rightarrow 0=2$ −ΑΔΥΝΑΤΗ−

Άσκηση 5.3.8

$$A=\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & 0,4 \end{bmatrix}$$

(α) $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 0,2-\lambda & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2-\lambda & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & 0,4-\lambda \end{vmatrix}=(0,2-\lambda)\left[(0,2-\lambda)(0,4-\lambda)-0,3\cdot 0,4\right]+0,4\left[(0,3\cdot 0,4)-(0,4)(0,4-\lambda)\right]$

$+0,3\left[0,4\cdot 0,4-(0,2-\lambda)\cdot 0,4\right]=(0,2-\lambda)^2\cdot(0,4-\lambda)-0,12(0,2-\lambda)+0,048-0,16(0,4-\lambda)+0,048-0,12(0,2-\lambda)=$

$=(\lambda^2-0,4\lambda+0,04)(0,4-\lambda)-\cancel{0,024}+0,12\lambda+0,048-0,064+0,16\lambda+\cancel{0,048}-\cancel{0,024}+0,12\lambda$

$=0,4\lambda^2-\lambda^3-\cancel{0,16\lambda}+0,4\lambda^2+\cancel{0,016}-0,04\lambda+0,12\lambda+\cancel{0,048}-\cancel{0,064}+\cancel{0,16\lambda}+0,12\lambda=$
$=-\lambda^3+0,8\lambda^2+0,2\lambda=\lambda(-\lambda^2+0,8\lambda+0,2)$

$\Delta = (0{,}8)^2 - 4 \cdot 0{,}2 = 1{,}44$

$$\lambda_{2,3} = \frac{0{,}8 \pm 1{,}2}{2} = \begin{cases} \boxed{\lambda_2 = 1} \\ \boxed{\lambda_3 = -0{,}2} \end{cases} \qquad \boxed{\lambda_1 = 0}$$

$$(A - \lambda_1 I) \cdot X = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\text{Άρα}}: X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(β) Από (α) οι ιδιοτιμές του A: $\boxed{\lambda_1 = 0}$, $\boxed{\lambda_2 = 1}$, $\boxed{\lambda_3 = -0{,}2}$

(γ) $u_0 = (0, 10, 0)$ βρείτε το όριο των $A^k u_0$ για $k \to \infty$.

Η σταθερά κατάσταση είναι το ιδιοδιάνυσμα του A. που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\boxed{\lambda_2 = 1}$

$$\underline{\text{Έχω}}: (A - \lambda I) X = \begin{bmatrix} -0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & -0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & -0{,}6 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\text{Άρα}}: X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

Γνωρίζω ότι η λύση του $A^k u_0$ τείνει προς ένα πολλαπλάσιο $k \in \mathbb{R}$ του $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4/3 \end{bmatrix}$ που είναι η σταθερά κατάσταση u_∞

Για να βρώ το σωστό πολλαπλάσιο k του X_2, χρησιμοποιώ το γεγονός ότι αν το πολλαπλασιάσω με τον A^T θα παραμείνει ίδιο.

$$\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix}^T \cdot k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4/3 \end{bmatrix} = \quad \text{Για } \boxed{k = \frac{15}{8}} \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15/8 \\ 15/8 \\ 5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/8 \\ 15/8 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

$\underline{\text{Άρα}}$: η σταθερά κατάσταση u_∞ είναι $\begin{bmatrix} 15/8 \\ 15/8 \\ 5/2 \end{bmatrix}$

Άσκηση 5.3.9

$b: 0,5b + 0 \cdot l + 0,5 \cdot s$
$l: 0 \cdot b + 0,5 l + 0,5 \cdot s$
$s: 0,5b + 0,5 l + 0.5$.

b = Βοστώνη
l = Λος Άντζελες
s = Σικάγο

Άρα: $A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$

Η σταθερή κατάσταση είναι το κατάλληλο πολλαπλάσιο του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\boxed{\lambda = 1}$

$(A - \lambda \cdot I) \cdot x = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -1 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Άρα: $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Η σταθερή κατάσταση είναι το

$u_{\infty} = k \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, για κάποιο $k \in \mathbb{R}$.

Το k το βρίσκουμε από τον αρχικό πληθυσμό και είναι τέτοιο ώστε αρχικός πληθυσμός φορτηγών:

$k + k + k = 3k$.