1 Μιγαδικοί - Σχεσεις Euler

- $a + jb = \rho e^{j\theta}$, $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$
- $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$ $\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} e^{-j\theta}}{2j}$
- $e^{\pm j\pi} = -1$, $e^{\pm j\pi/2} = \pm j = \mp \frac{1}{i}$
- $e^{\pm j2\pi k} = 1$, $e^{\pm j\pi k} = (-1)^k$

Ενέργεια:
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Ισχύς:
$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \lvert x(t) \rvert^2 dt$$

2.1 Συνάρτηση Δέλτα

$$\bullet \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

- $\delta(t t_0) * x(t t_1) = x(t t_0 t_1)$
- $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$

2.2 Βηματική Συνάρτηση

$\bullet \ u(t) = \ \left\{ \begin{array}{ll} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{array} \right.$

•
$$\frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$$

•
$$\int_{-\infty}^{-\delta(au)d au} = u(t)$$

$\bullet \ \operatorname{Arect}(t/T) = \begin{cases} A, \ -T/2 < t < T/2 \\ 0, \ \text{allow} \end{cases} \\ \bullet \ \operatorname{Arect}(t/T) = \begin{cases} A, \ -T/2 < t < T/2 \\ 0, \ \text{allow} \end{cases} \\ \bullet \ \operatorname{Atri}(t/T) = \begin{cases} A(1-|t|/T), \ \ -T < t < T \\ 0, \ \ \text{allow} \end{cases} \\ \bullet \ |e^{j\theta}| = 1, \ \forall \theta \end{cases}$

- Συνέλιξη: $c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ x(\tau) y(t-\tau) d\tau$

- $\cos(\pi \pm \theta) = -\cos(\theta)$
- Zero-input response $y_{zi}(t)$: Η έξοδος ενός συστήματος απουσία εισόδου, επίδραση μόνο των αρχικών συνθηκών.
- Zero-state response $y_{zs}(t)$: Η έξοδος ενός συστήματος απουσία αρχικών συνθηκών, επίδραση μόνο της εισόδου.
- ullet Κρουστική απόκριση h(t): Η έξοδος ενός συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανίζεται η συνάρτηση $\delta(t)$.
- Εξουσί: Απλή ρίζα: $y(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_k t} u(t)$
- Πολλαπλή ρίζα λ_1 τάξης r: $y(t)=\Bigl(\sum_{l=2}^N c_k e^{\lambda_k t}+\sum_{l=1}^r c_l t^{l-1} e^{\lambda_1 t}\Bigr)u(t)$

4 Ημίτονα

- $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi) = A\Re\{e^{j(2\pi f_0 t + \phi)}\}\$
- Περίοδος: $T_0 = \frac{1}{f_0}$ Συχνότητα: $f_0 = \frac{1}{T_0}$

7 Γενικό τυπολόγιο

- $\int e^{at}dt = \frac{1}{a}e^{at}$ $\int te^{at}dt = \frac{e^{at}}{a}\left(t \frac{1}{a}\right) = e^{at}\left(\frac{at 1}{a^2}\right)$
- $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi r}$, $\operatorname{sinc}(x) = \operatorname{sinc}(-x)$, $\operatorname{sinc}(0) = 1$
- $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

5 Σειρές Fourier

$$\overline{A_0 = X_0}$$

$$-A_k = 2|X_k|$$

•
$$\int_{0}^{T_{0}} e^{j2\pi k/T_{0}t} dt = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ T_{0}, & k = 0 \end{cases}$$

Συντελεστές Fourier

 X_k

 Y_k

 $AX_k + BY_k$

 $X_k e^{-jk2\pi f_0 t_0}$

 X_{k-M} X_{-k}^*

 X_{-k}

 X_k , με περίοδο T_0/a

 $T_0 X_k Y_k$

 $\sum^{\infty} X_l Y_{k-l}$

 $jk2\pi f_0X_k$

 $jk2\pi f_0$

 $\Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\},$

 $\Re\{X_k\}$

 $j\Im\{X_k\}$

Μετασχηματισμός Fourier

X(f)

 $\Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\},\,$

 $X_k = X_{-k}^*,$

 $|X_k| = |X_{-k}|,$ $\angle X_k = -\angle X_{-k}$

Ιδιότητες σειρών Fourier

Περιοδικό σήμα 5 Σειρές Fourier x(t) με T_0 y(t) με T_0

Ax(t) + By(t)

 $x(t-t_0)$

 $e^{j2\pi M f_0 t} x(t)$

 $x^*(t)$

x(-t)

x(at), a > 0

x(t)y(t)

dx(t)

dt

 $x(t) \in \Re$

 $x_e(t) = Ev\{x(t)\}, x(t) \in \Re$

 $x_o(t) = Od\{x(t)\}, x(t) \in \Re$

 $\frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0} |x(t)|^2 dt$

Σήμα

x(t)

 $x(\tau)d\tau$

 $x(\tau)y(t-\tau)d\tau$

• Εκθετική σειρά Fourier:

- Φάσμα πλάτους: άρτια συνάρτηση

Φάσμα φάσης : περιττη συνάρτηση

• $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k), \quad f_k = \frac{1}{T_k}$

$$-x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$-X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

- Περίοδος: $T_0 = \text{ΕΚΠ}\{T_k\}$ ή $f_0 = \text{ΜΚΔ}\{f_k\}$

4 Ημίτονα Για πραγματικά σήματα:

$$-X_k = |X_k|e^{j \angle X_k}$$

$$-X_0=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)dt\in\Re, \text{ \'atan }x(t)\in\Re.$$

- Τριγωνομετρική σειρά Fourier:
- $x(t) = A_0 + \sum_{k} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$
 - 6 Μετασχηματισμός Fourier

•
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

- $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$ $\bullet \ X(f) = |X(f)| e^{j \angle X(f)}$

- $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
- $\cos(\pi/2 \theta) = \sin(\theta)$
- $\cos(\pi/2 + \theta) = -\sin(\theta)$
- Y(f)y(t)Ax(t) + By(t)AX(f) + BY(f)

Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier

- $X(f)e^{\pm j2\pi ft_0}$ $x(t \pm t_0)$ $e^{\pm j2\pi f_0 t}x(t)$ $X(f \mp f_0)$
- $X^*(-f)$ $x^*(t)$
- x(-t)X(-f) $\frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$ x(at)
 - x(t) * y(t)X(f)Y(f)
 - X(t)x(-f)x(t)y(t)X(f) * Y(f)
 - $d^n x(t)$ $(j2\pi f)^n X(f)$
- dt^n
- $\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)\delta(f)}{2}$ $x(\tau)d\tau$ $X(f) = X^*(-f),$
 - $\Re\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\},$ $x(t) \in \Re$ $\Im\{X(f)\} = -\Im\{X(-f)\},\,$
 - |X(f)| = |X(-f)|, $\angle X(f) = -\angle X(-f)$
- $x_e(t) = Ev\{x(t)\}, x(t) \in \Re$ $\Re\{X(f)\}$
- $x_o(t) = Od\{x(t)\}, x(t) \in \Re$ $j\Im\{X(f)\}$
 - $|x(t)|^2 dt$ $|X(f)|^2 df$