

Χειμερινό Εξάμηνο  
Ακαδημαϊκό Έτος 2009-2010

Πανεπιστήμιο Κρήτης  
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών  
ΗΥ-110 Απειροστικός Λογισμός Ι  
Διδάσκων: Θ. Μουχτάρης  
Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

**Άσκηση 1<sup>η</sup> : Εύρεση ορίων**

Στα ερωτήματα a-d να υπολογιστούν τα όρια για  $x \rightarrow +\infty$  και για  $x \rightarrow -\infty$

a)  $f(x) = \frac{2x+3}{5x+7}$

b)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$

c)  $f(x) = \frac{1-12x^3}{4x^2+12}$

d)  $f(x) = \frac{7x^3}{x^3-3x^2+6x}$

Στα ερωτήματα e-h να υπολογιστούν τα ζητούμενα όρια

e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$

f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-1} + x^{-4}}{x^{-2} - x^{-3}}$

g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 7}{x^{\frac{8}{5}} + 3x + \sqrt{x}}$

h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{2x + x^{\frac{2}{3}} - 4}$

i)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin(x - \sin x)$

j)  $\lim_{t \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos(\tan t)\right)$

k)  $\lim_{y \rightarrow 1} \sec(y - \sec^2 y - \tan^2 y - 1)$

l)  $\lim_{\theta \rightarrow 1} \tan\left(\frac{\pi}{4} \cos\left(\sin \theta^{\frac{1}{3}}\right)\right)$

Οι συναρτήσεις των ερωτημάτων i-l είναι συνεχείς στο σημείο υπολογισμού κάθε ορίου;

### Άσκηση 2<sup>η</sup>: Όρια και συνέχεια

Έστω ότι οι  $f(t)$  και  $g(t)$  είναι ορισμένες για κάθε  $t$  και ότι  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = -7$  και  $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = 0$ . Βρείτε τα όρια των ακόλουθων συναρτήσεων καθώς  $t \rightarrow t_0$ .

- a)  $3f(t)$
- b)  $(f(t))^2$
- c)  $f(t)g(t)$
- d)  $\frac{f(t)}{g(t)-7}$
- e)  $\cos(g(t))$
- f)  $|f(t)|$
- g)  $f(t) + g(t)$
- h)  $\frac{1}{f(t)}$

### Άσκηση 3<sup>η</sup>: Μία συνάρτηση ασυνεχής παντού

- a) Με βάση το γεγονός ότι κάθε μη κενό διάστημα πραγματικών αριθμών περιέχει τόσο ρητούς όσο και άρρητους αριθμούς δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο.

- b) Υπάρχει κανένα σημείο όπου η  $f$  είναι συνεχής από αριστερά ή από δεξιά;

### Άσκηση 4<sup>η</sup>: Η ιδιότητα συνεχών συναρτήσεων να διατηρούν το πρόσημό τους

Έστω ότι η  $f$  ορίζεται σε διάστημα  $(a, b)$  και ότι  $f(c) \neq 0$  για κάποιο σημείο  $c$  στο οποίο η  $f$  είναι συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει μία περιοχή  $(c-\delta, c+\delta)$  γύρω από το  $c$  όπου η  $f$  έχει το ίδιο πρόσημο με την  $f(c)$ .

### Άσκηση 5<sup>η</sup>: Αντικείμενο που πέφτει από πύργο

Αντικείμενο αφήνεται να πέσει ελεύθερα από την κορυφή πύργου ύψους 100m. Μετά από  $t$  sec, το ύψος του ισούται με  $100 - 4.9t^2$  m. Πόσο γρήγορα πέφτει κα'τα τη χρονική στιγμή 2 sec μετά την έναρξη της πτώσης του;

### Άσκηση 6<sup>η</sup>: «Σκέφτομαι και γράφω»

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις, αιτιολογώντας πάντα τις απαντήσεις σας.

- a) Έχουμε λόγο να πιστεύουμε ότι θα πρέπει να υπάρχει πάντα ένα ζεύγος διαμετρικά αντίθετων σημείων στον ισημερινό της Γης, των οποίων οι θερμοκρασίες θα είναι οι ίδιες;
- b) Πόσες οριζόντιες ασύμπτωτες μπορεί να έχει η γραφική παράσταση μιας ρητής συναρτήσεως; Πόσες κατακόρυφες;
- c) Γιατί η εξίσωση  $\cos x = x$  διαθέτει τουλάχιστον μία λύση;

### Άσκηση 7<sup>η</sup>: Κατασκευή μηχανικών κυλίνδρων

Προκειμένου να κατασκευάσετε μηχανικούς κυλίνδρους εμβαδού διατομής  $9\text{cm}^2$ , χρειάζεται να γνωρίζεται πόση απόκλιση από την ιδανική διάμετρο του κυλίνδρου  $x_0 = 3.385\text{cm}$  είναι επιτρεπτ, ώστε το εμβαδόν της διατομής να μην διαφέρει περισσότερο από  $0.01\text{cm}^2$  από την απαιτούμενη τιμή  $9\text{cm}^2$ . Για να απαντήσετε στο ερώτημα αυτό θέστε  $A = \pi(x/2)^2$  και ερευνήστε σε ποιο διάστημα τιμών πρέπει να περιορίσετε το  $x$  έτσι ώστε  $|A-9| \leq 0.01$ . Ποιό διάστημα βρίκατε;