ΕΜΒΟΛΙΜΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2015 ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΙ

ΘΕΜΑ 1ο. (1,5) (α) Να αποδειχθεί οτι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{όταν } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{όταν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$.
(β) Να υπολογιστούν όλες οι κατευθυνόμενες παράγωγοι της f στο σημείο $(0,0)$, αν υπάρχουν.
(γ) Είναι η f διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$;

ΘΕΜΑ 2ο. (1,5) Να ευρεθούν τα σημεία τοπικών ακροτάτων και τα σαμάρια της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 - 2x - y.$$

ΘΕΜΑ 3ο. (2) Να αποδειχθεί οτι το σύνολο $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - xy - 1 = 0\}$ είναι λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και να ευρεθούν τα σημεία της που βρίσκονται πλησιέστερα στο $(0,0,0)$.

ΘΕΜΑ 4ο. (1,5) Αν $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_B (x^2+y^2)\,dxdy.$$

ΘΕΜΑ 5ο. (2) Αν $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}$ να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_K (x+y+z)\,dxdydz.$$

ΘΕΜΑ 6ο. (1,5) Αν $R > 0$, να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \quad \text{και} \quad 0 \leq y \leq x, \quad z \geq 0\}.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ