1) $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$

1. Υποπαραγωγή

   1.1 $P \to Q$ (ΥΥ)

   1.2 Υποπαραγωγή

      1.2.1 $\neg Q$ (ΥΥ)

      1.2.2 Υποπαραγωγή

         1.2.2.1 P (ΥΥ)

         1.2.2.2 Q (1.2.2.1), (1.1) με απαλ. $\to$

         1.2.2.3 $\neg Q$ (1.2.1) με επανάληψη

      1.2.3 $\neg P$ (1.2.2) με εισαγωγή $\neg$

   1.3 $\neg Q \to \neg P$ (1.2) με εισαγωγή $\to$

2. $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ (1) με εισαγωγή $\to$

2a) $\{ \overset{Y_1}{P \leftrightarrow Q}, \overset{Y_2}{\neg Q} \} / \neg P$

1. Υποπαραγωγή

   1.1 P (ΥΥ)

   1.2 Q (Y_1), (1.1) και απαλοιφή $\leftrightarrow$

   1.3 $\neg Q$ (Y_2)

2. $\neg P$ (1) και εισαγωγή $\neg$

2b) $\{\overset{Y_1}{P \vee Q}, \overset{Y_2}{P \to R}\} / \neg Q \to R$

1. Υποπαραγωγή

   1.1 $\neg Q$ (ΥΥ)

   1.2 $P \vee Q$ (Y_1)

   1.3 $\neg Q$ (1.1) με επανάληψη

   1.4 P (1.2), (1.3) και απαλοιφή $\vee$ (β' μορφή)

   1.5 R (Y_2), (1.4) και απαλοιφή $\to$

2. $\neg Q \to R$ (1) με εισαγωγή $\to$

2c) $\{\overset{Y_1}{R \to Q}, \overset{Y_2}{S \to (Q \wedge R)}\} / Q \vee \neg S$

1. $S \vee \neg S$ αποκλεισμός μέσου

2. Υποπαραγωγή

   2.1 S (ΥΥ)

   2.2 $Q \wedge R$ (Y_2), (2.1) και απαλοιφή $\to$

   2.3 Q (2.2) με απαλοιφή $\wedge$

   2.4 $Q \wedge \neg S$ (2.3) με εισαγωγή $\vee$

3. Υποπαραγωγή

   3.1 $\neg S$ (ΥΥ)

   3.2 $Q \vee \neg S$ (3.1) με εισαγωγή $\vee$

4. $Q \vee \neg S$ (1), (2), (3) και απαλοιφή $\vee$

3) $\mathfrak{F} \equiv (P \to ((Q \vee R) \to S)) \wedge (\neg P \vee Q \vee (R \to S))$

i) CNF:

$$\mathfrak{F} \equiv (P \to (\neg(Q \vee R) \vee S)) \wedge (\neg P \vee Q \vee (\neg R \vee S)) \quad \text{(αντικ. "}\to\text{")}$$

$$\equiv (\neg P \vee (\neg(Q \vee R) \vee S)) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R \vee S) \quad \text{(—//— \& προσετ. } \vee)$$

$$\equiv (\neg P \vee S \vee (\neg Q \wedge \neg R)) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R \vee S) \quad \text{(de Morgan \& αντιμ. } \vee)$$

$$\equiv ((\neg P \vee S \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee S \vee \neg R)) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R \vee S) \quad \text{(επιμερισμός } \vee \text{ ως προς } \wedge)$$

$$\equiv (\neg P \vee S \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee S \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R \vee S) \quad \text{(προσετ. } \wedge)$$

$$\equiv (\neg P \vee S \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee S \vee \neg R) \quad \text{(απορρόφηση)}$$

ii) DNF:

$$\mathfrak{F} \equiv CNF(\mathfrak{F})$$

$$(\neg P \vee S \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee S \vee \neg R)$$

$$\equiv ((\neg P \vee S) \vee \neg Q) \wedge ((\neg P \vee S) \vee \neg R) \quad \text{(προσετ. } \vee)$$

$$\equiv (\neg P \vee S) \vee (\neg Q \wedge \neg R) \quad \text{(επιμερισμός } \vee, \wedge)$$

$$\equiv \neg P \vee S \vee (\neg Q \wedge \neg R) \quad \text{(προσετ. } \vee)$$

4) S σύνολο προτάσεων και $P \in S$

α) για κάθε πρόταση A, αν $P \models A$ τότε $S \models A$

Έστω <u>τυχαία</u> πρόταση A και ερμηνεία I^* τέτοια ώστε : $P \models_{I^*} A$ και $S \not\models_{I^*} A$. Το $S \not\models_{I^*} A$ σημαίνει ότι η I^* ικανοποιεί όλες τις προτάσεις του S επομένως και την $P \in S$, αλλά όχι την A. Τότε όμως το $P \models_{I^*} A$ δεν ισχύει. Άτοπο
Εφόσον τέλος η A επιλέχθηκε τυχαία, η πρόταση ισχύει για κάθε A.

β) Έστω S ικανοποιήσιμο και $P \in S$. Αν $P \models A$ και αντικατασταθεί η P με A το σύνολο $\{S - \{P\}\} \cup \{A\}$ παραμένει ικανοποιήσιμο.

Πράγματι : αν S ικανοποιήσιμο σημαίνει ότι υπάρχει ερμηνεία I τέτοια ώστε $\models_I \varphi_i \ \forall$ πρόταση $\varphi_i \in S$. Άρα η I ικανοποιεί και την P. Το $P \models A$ σημαίνει ότι η συγκεκριμένη I θα ικανοποιεί και την A. Ικανοποιεί όμως και όλες τις υπόλοιπες προτάσεις του S.
Επομένως $\{S - \{P\}\} \cup \{A\}$ ικανοποιήσιμο.