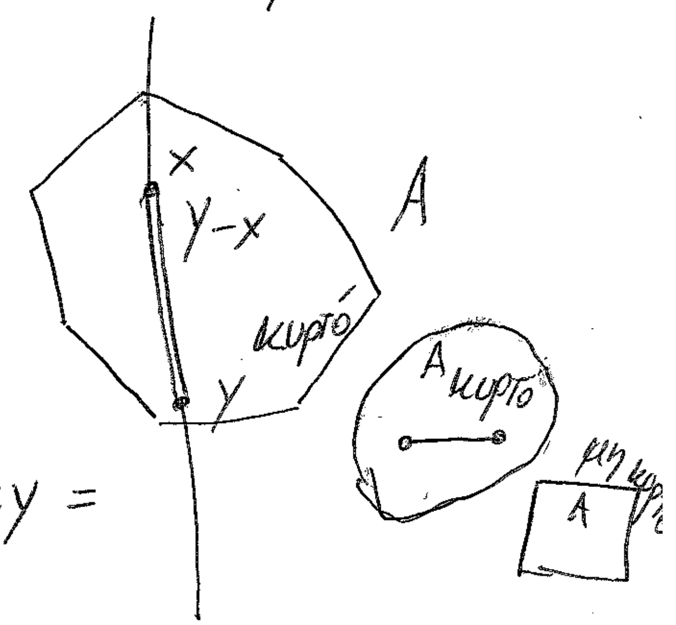
HY-111 (1) 16/3/2015

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

1) Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι σταθερή δηλαδή υπάρχει $c \in \mathbb{R}^m$ ώστε $f(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ τότε η f είναι παντού διαφορίσιμη και $Df(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Αντίστροφα: Έστω ότι $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό και κυρτό σύνολο. <u>Κυρτό</u> σημαίνει ότι για κάθε $x, y \in A$ ισχύει $(1-t)x + t \cdot y \in A$ για κάθε $0 \leq t \leq 1$. Δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα x και y περιέχεται όλο μέσα στο A. Το ευθύγραμμο τμήμα αυτό είναι το ίχνος της παραμετρικής καμπύλης $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ με $\gamma(t) = (1-t)x + ty =$
$= t(y-x) + x$



Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο A με $Df(x) = 0 = (0, 0, \ldots, 0)$ για κάθε $x \in A$

<u>Ερώτημα</u>: Είναι η f σταθερή στο A;

Δηλαδή αν $x, y \in A$ είναι οποιαδήποτε σημεία στο A,

HY-111

ισχύει $f(x) = f(y)$; χρησιμοποιούμε αυτά που ξέρουμε για την κυρτότητα...

Η $F\circ\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$, δηλαδή η $f(\gamma(t)) = f((1-t)x + ty)$, είναι διαφορίσιμη στο $[0,1]$; και πόσο είναι η παράγωγος $(F\circ\gamma)'(t)$; * * *

<u>Ορισμός Κανόνας Αλυσίδας. Chainrule.</u>

<u>Θεώρημα - Κανόνας Αλυσίδας</u>

• Έστω $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτά σύνολα, και $U \xrightarrow{F} V \xrightarrow{G} \mathbb{R}^k$. Αν $x_0 \in U$ και η F είναι διαφορίσιμη στο x_0 και G διαφορίσιμη στο $F(x_0)$, τότε η $G\circ F : U \to \mathbb{R}^k$, είναι διαφορίσιμη στο x_0 $D(G\circ F)(x_0) =$
$= DG(F(x_0)) \cdot DF(x_0)$ (= σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων δηλαδή γινόμενο πινάκων)

$(a,b) \xrightarrow{f} (c,d) \xrightarrow{g} \mathbb{R}$
διαφορίσιμη
$(g\circ f)'(t) = g'(f(t))\, f'(t)$

γινόμενο πινάκων = σύνθεση

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$v \to g'(f(t)) \cdot v$	$u \to f'(t) \cdot u$

* * *

• Εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας και υπολογίζουμε ότι:

$$(f\circ\gamma)'(t) = Df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0, \text{ για κάθε } t \in [0,1]$$

Άρα η $f\circ\gamma$ είναι σταθερή, οπότε $f(x) = f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = y$

HY-111 ② <u>16/3/2015</u>

2) Γενικότερα αν έχουμε: $A \subset R^n$ ένα ανοιχτό σύνολο, $f: A \to R$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση, και $\gamma: I \to A$ μια παραμετρισμένη C^1 καμπύλη, τότε ($I \subset R$, ανοιχτό διάστημα) η $f \circ \gamma$ είναι διαφορίσιμη στο A και:
$(f\circ\gamma)'(t) = Df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$, για κάθε $t \in I$.

• Με συντεταγμένες $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$, τότε

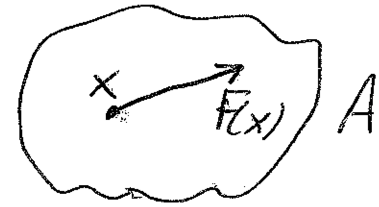
$$(f\circ\gamma)'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\gamma(t)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t))\right)$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t) \cdot \gamma_j'(t)) \right) = \underline{\langle \nabla f(\gamma(t)) \overset{o}{,} \gamma'(t) \rangle}$$

<u>Εφαρμογή:</u> (Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας).

Έστω $A \subset R^n$ ανοιχτό σύνολο και $F: A \to R^3$ ένα πεδίο δυνάμεων:

• Το F λέγεται συντηρητικό αν υπάρχει μια: C^1 συνάρτηση $V: A \to R$ με $F = -\nabla V$, δηλαδή $F(x) = -\nabla V(x), \forall x \in A$, V: Δυναμική ενέργεια



• Η εξίσωση κίνησης του Newton είναι:

$$m \cdot \gamma''(t) = F(\gamma(t)) = -\nabla V(\gamma(t))$$

όπου $\gamma''(t) = (\gamma_1''(t), \gamma_2''(t), \dots, \gamma_i''(t))$ αν $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

• Η μηχανική ενέργεια είναι $E = \overset{\text{κιν. ενεργ.}}{T} + V$, δηλαδή

$$E(\gamma(t)) = \frac{1}{2} m \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + V(\gamma(t))$$

όπου $\gamma: I \to A$ η παραμετρισμένη C^1 καμπύλη

HY-111

που περιγράφει την τροχιά ενός υλικού σημείου μάζας m υπό την επίδραση του πεδίου δυνάμεων F.

- Η μεταβολή (ρυθμός μεταβολής) της Μηχανικής Ενέργειας στη διάρκεια της κίνησης είναι: $(E\circ\gamma)'(t) = \frac{1}{2}m\left[\langle\gamma''(t),\gamma'(t)\rangle + \langle\gamma'(t),\gamma''(t)\rangle\right]$

$$+\langle\nabla V(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle = \langle m\gamma''(t),\gamma'(t)\rangle + \langle\nabla V(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle =$$

$$= \langle m\gamma''(t) + \nabla V(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle = \langle 0,\gamma(t)\rangle = 0$$

- Άρα η μηχανική ενέργεια στη διάρκεια κίνησης υπό την επίδραση συντηρητικών δυνάμεων παραμένει σταθερή.

3) <u>Πρόταση</u>: Έστω $A\subset\mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό σύνολο και $[a,b]\times[c,d]\subset A$.

- Έστω μια συνάρτηση $f: A\to\mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει η $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, για κάθε $(x,y)\in A$ και $\frac{\partial f}{\partial y}: A\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Τέλος, έστω $p, q: [c,d]\to[a,b]$ δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις και $F: [c,d]\to\mathbb{R}$ με $F(y) = \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dx$.

Τότε F διαφορίσιμη και:

$$\boxed{F'(y) = \int_{p(y)}^{q(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(t,y)\,dt + f(q(y),y)\cdot q'(y) - f(p(y),y)\cdot p'(y)}$$

HY-111 ③ 16/3/2015

Απόδειξη: Θεωρούμε συνάρτηση $G: [a,b]\times[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$

με $\bullet\ G(x_1,x_2,x_3)=\int_{x_1}^{x_2} f(t,x_3)\,dt$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής

$F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ διαφορίσιμη και $F'(x)=f(x)$

• Η G είναι C^1 και $F(y)=G(p(y),q(y),y)=$ δηλαδή $=G(\gamma(y))$

όπου $\gamma:[c,a]\to[a,b]\times[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^3$ είναι η διαφορίσιμη παραμετρισμένη καμπύλη:

$$\gamma(y)=(p(y),q(y),y)$$

που έχει ταχύτητα $\gamma'(y)=\begin{pmatrix}p'(y)\\q'(y)\\1\end{pmatrix}$, και από κανόνας αλυσίδας: $F(y)=(G\circ\gamma)'(y)=DG(\gamma(t_1))\gamma'(t)$.

• Έχουμε $\frac{\partial G}{\partial x_1}=-f(x_1,x_3)$, $\frac{\partial G}{\partial x_2}=f(x_2,x_3)$, $\frac{\partial G}{\partial x_3}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x_3}f(t,x_3)\,dt$

• Άρα αντικαθιστώντας βρίσκουμε $F(y)=\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}(p(y),q(y),y),\ \frac{\partial G}{\partial x_2}(p(y),q(y),y),\ \frac{\partial G}{\partial x_3}(p(y),q(y),y)\right)$

$$\begin{pmatrix}p'(y)\\q'(y)\\1\end{pmatrix}=\left(-f(p(y),y),f(q(y),y),\int_{p(y)}^{q(y)}\frac{\partial}{\partial y}f(t,y)\,dt\right)$$

$$\left.\begin{pmatrix}p'(y)\\q'(y)\\1\end{pmatrix}\right)$$

HY-111

4) <u>Παράδειγμα:</u> Έστω $R^2 \xrightarrow{F} R^3 \xrightarrow{G} R^2$ διαφορίσιμες

$\cdot F(0,0) = (2,0,1)$ ενώ $DF(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ενώ

η: $DG(2,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Τότε η $G \circ F$ είναι διαφορίσιμη και:

$$D(G \circ F)(0,0) = DG(F(0,0)) \cdot DF(0,0) =$$
$$= DG(2,0,1) \cdot DF(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

5) <u>Πρόταση:</u> Αν η $f: R^n \to R^m$ είναι γραμμική $(f(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot f(x) + \mu f(y)$, $\forall x, y \in R^n$ τότε η f είναι παντού διαφορίσιμη και η παράγωγος της σε οποιοδήποτε σημείο είναι ίδια:

$\cdot Df(x) = f$, $\forall x \in R^n$ (άρα $Df: R^n \to R^{m \times n}$ είναι σταθερή με τιμή f).

<u>Απόδειξη</u>: πράγματι: $\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x) - f(h)}{\|h\|} \right) =$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{0}{\|h\|} \right) = 0$$

αφού η f υποτίθεται γραμμικά.

6) (α)· Αν $f, g : A \to R^m$ είναι διαφορίσιμες στο $x_0 \in A$ τότε η fog είναι επίσης διαφορίσιμη και η

$$D(f+g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$$

- Επίσης το ίδιο είναι και η $f \cdot g$ και

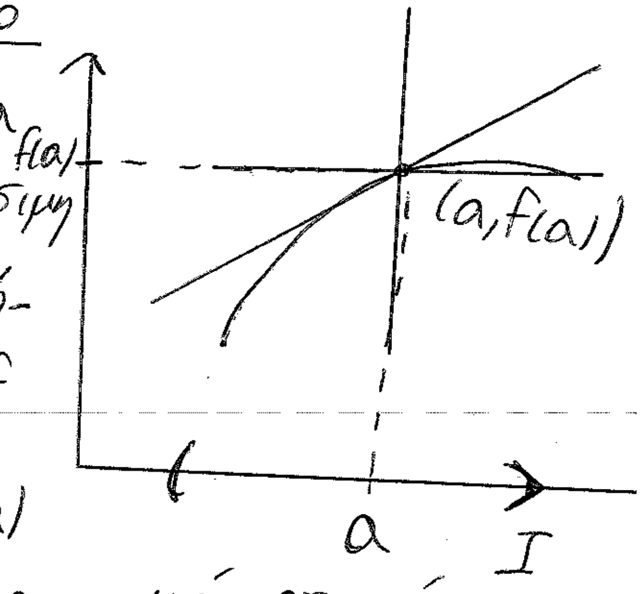
$$D(f \cdot g)(x_0) = g(x_0) \cdot Df(x_0) \cdot f(x_0) \cdot Dg(x_0)$$

(β) Αν $m=1$ και $g(x_0) \neq 0$, τότε η $\frac{f}{g}$ είναι διαφορίσιμη στο x_0 και:

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(x_0) \cdot Df(x_0) - f(x_0) \cdot Dg(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

HY-111 ① 17/3/2015

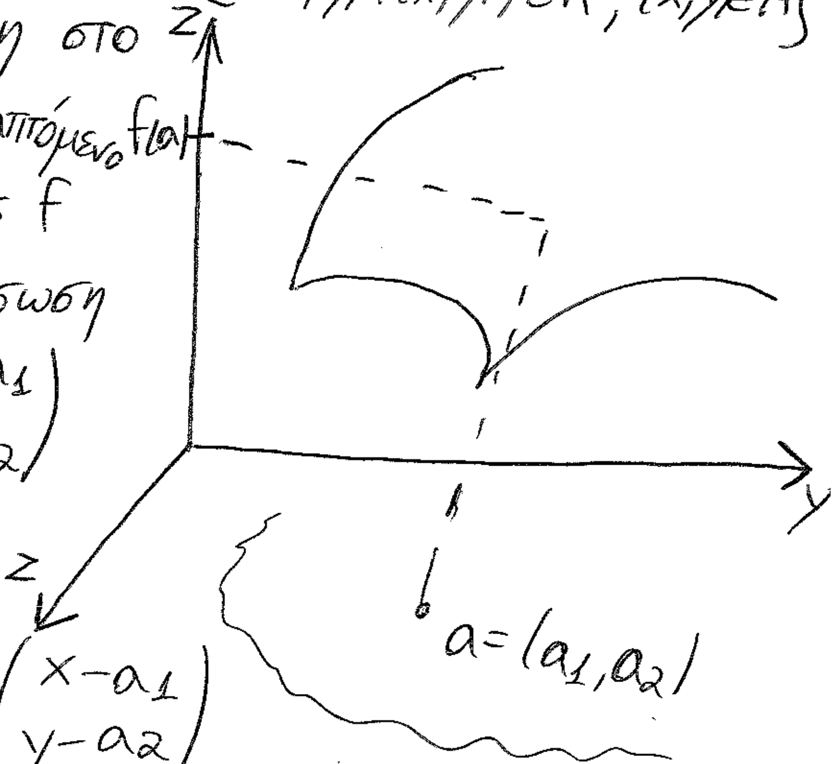
Το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο



Αν $I \subset \mathbb{R}$ είναι ανοιχτό διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση διαφορίσιμη στο $a \in I$, η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας του γραφήματος της f στο $(a, f(a))$ είναι $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

Δηλαδή είναι το γράφημα της γραμμικής απεικόνισης $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $T(u) = f'(a)\cdot u$ στο $\mathbb{R}^2$ με αρχή των αξόνων στο $(a, f(a))$. Όμοια αν έχουμε ένα ανοιχτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^2$ και μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, τότε το γράφημα της f είναι το $\Gamma = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3, (x,y) \in A\}$

Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $a = (a_1, a_2) \in A$ τότε το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της f στο $(a_1, a_2, f(a_1,a_2))$ έχει εξίσωση



$$z - f(a_1,a_2) = Df(a_1,a_2)\begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow z - f(a_1,a_2) =$$

$$= \left(\frac{df}{dx}(a_1,a_2), \frac{df}{dy}(a_1,a_2)\right)\begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z - f(a_1,a_2) = \frac{df}{dx}(a_1,a_2)(x-a_1) + \frac{df}{dy}(a_1,a_2)(y-a_2)}$$

και είναι το γράφημα της γραμμικής απεικόνισης $Df(a_1,a_2): R^2 \to R$ δηλαδή $\epsilon = \{(u,v,w) \in R^3 : w = Df(a_1,a_2)\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\}$ με αρχή των αξόνων στο $(a_1, a_2, f(a_1,a_2))$ που σημαίνει ότι $u = x - a_1$, $v = y - a_2$, $w = z - f(a_1,a_2)$.

Γενικά αν έχουμε $A \subset R^n$ ανοιχτό και μια συνάρτηση $f: A \to R$, το γράφημά της είναι το $\Gamma = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in R^{n+1} \, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A\}$.

Όταν η f είναι διαφορίσιμη στο $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$, το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο του γραφήματος της f στο $(a_1, a_2, \ldots, a_n, f(a_1, a_2, \ldots, a_n))$ έχει εξίσωση

$$x_{n+1} - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = Df(a_1, a_2, \ldots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\frac{df}{dx_1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ldots \frac{df}{dx_n}(a_1, \ldots, a_n)\right)\begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_{n+1} - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n)(x_i - a_i)}$$

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $f: R^2 \to R$ με $f(x,y) = xy^2 + x^3 + x^2 - y^2 + x + y + 3$

Η f είναι C^1 στο R^2 και ειδικά

$$\frac{df}{dx} = y^2 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$\frac{df}{dy} = 2xy - 2y + 1$$

HY-111 ② 17/3/2015

(α) $Df(0,0) = (1 \quad 1)$ και $f(0,0) = 3$. Άρα το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της f στο σημείο $(0,0,f(0,0)) = (0,0,3)$ έχει εξίσωση

$z - 3 = 1(x-0) + 1(y-0) \iff x + y - z = -3$

(β) $Df(1,2) = (10 \quad 1)$ και $f(1,2) = 8$. Άρα το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της f στο σημείο $(1,2,8)$ έχει εξίσωση $z - 8 = 10(x-1) + 1\cdot(y-2) \iff 10x + y - z = 4$

ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \to \mathbb{R}$ μια C^1 συνάρτηση δηλαδή οι $\frac{df}{dx_i}: A \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ υπάρχουν και είναι συνεχείς συναρτήσεις. Αν η $\frac{d}{dx_j}\left(\frac{df}{dx_i}\right)(a)$, $a \in A$ υπάρχει, λέγεται (i,j)-μερική παράγωγος δεύτερης τάξης της f στο a και συμβολίζεται με $\frac{d^2 f}{dx_j dx_i}(a)$.
Η f λέγεται C^2 συνάρτηση στο A αν υπάρχουν οι $\frac{d^2 f}{dx_j dx_i}(a)$, $1 \leq i,j \leq n$ για κάθε $a \in A$, οι συναρτήσεις $\frac{d^2 f}{dx_j dx_i}: A \to \mathbb{R}$, $1 \leq i,j \leq n$ είναι συνεχείς.

Επαγωγικά, ορίζονται (αν υπάρχουν) οι κ-τάξης μερικές παραγώγους

HY-111

$$\frac{d^k f}{dx_{i_k} dx_{i_{k-1}} \cdots dx_{i_1}}(a) = \frac{d}{dx_{i_k}}\left(\frac{d}{d_{i_{k-1}}}\left(\cdots\left(\frac{df}{dx_{i_1}}\right)\cdots\right)\right)(a)$$

$1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k \leq n$

και η f λέγεται C^k συνάρτηση στο A αν οι k-τάξεως μερικές παραγώγους $\frac{d^2 f}{dx_{i_k} \cdots dx_{i_2} dx_{i_1}} : A \to R$, $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n$ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο A.

<u>Ορισμός</u>: Η $f: A \to R$ λέγεται C^∞ στο A αν είναι C^k για κάθε $k \geq 0$ (για $k=0$, η f λέγεται C^0 αν είναι συνεχής στο A.)

Έτσι έχουμε μια ιεραρχία συναρτήσεων

$$C^0 \supset C^1 \supset C^2 \supset \cdots \supset C^k \supset \cdots \supset C^\infty, \text{ δηλαδή } C^\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k$$

<u>Ερώτημα</u> Ισχύει $\frac{d^2 f}{dx_j dx_i}(a) = \frac{d^2 f}{dx_i dx_j}(a)$, όταν υπάρχουν;

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $f: R^2 \to R$ με $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Επειδή $f(0,y) = 0$, $f(x,0) = 0$ για κάθε $x, y \in R$

Έχουμε $\frac{df}{dx}(0,0) = 0$, $\frac{df}{dy}(0,0) = 0$. Υπολογίζουμε τώρα ότι

$$\lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - (0\ 0)\binom{h_1}{h_2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1 h_2(h_1^2-h_2^2)}{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2(h_1^2-h_2^2)}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}$$

και $$\left|\frac{h_1h_2(h_1^2-h_2^2)}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}\right| = \frac{|h_1 h_2|(h_1^2+h_2^2)}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} = \frac{|h_1\cdot h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le \frac{1}{2}\sqrt{h_1^2+h_2^2} \to$$

$\to 0$, όταν $(h_1,h_2)\to(0,0)$ $\qquad (h_1-h_2)^2 \geq 0$

Άρα η f είναι πάντα διαφορίσιμη με $\frac{df}{dx}(0,0)=0$, $\frac{df}{dy}(0,0)=0$

και για $(x,y)\neq(0,0)$ έχουμε $\frac{df}{dx} = \frac{x^4\cdot y^2+3x^2\cdot y^4-y^5+x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$,

$$\frac{df}{dy} = -\frac{x^2\cdot y^4+3x^4y^2-x^5+x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Έχουμε τώρα

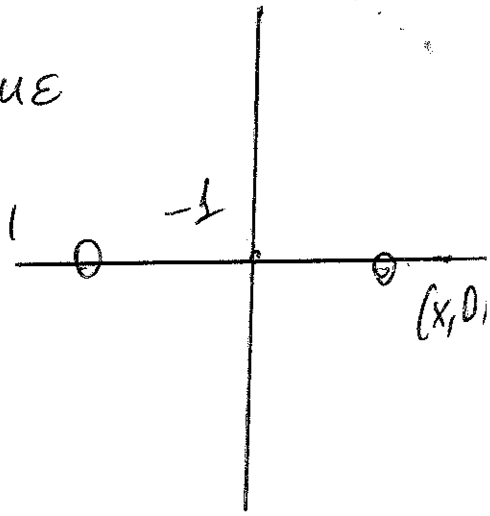
$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2f}{dy\cdot dx}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(\frac{-y^5}{y^4}\right) = -1 \\ \frac{d^2f}{dx\cdot dy}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(-\frac{(-x^5)}{x^4}\right) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d^2f}{dy\cdot dx}(0,0) \neq \frac{d^2f}{dx\, dy}(0,0)$$

<u>Θεώρημα (Schwarz)</u> Έστω $A\subset\mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A\to\mathbb{R}$. Αν η f είναι C^2, τότε $\frac{d^2f}{dy\cdot dx} = \frac{d^2f}{dx\cdot dy}$

παντού στο A.

HY-111

Παράδειγμα (συνέχεια) Για $x \neq 0$ έχουμε $\frac{d^2 f}{dy\,dx}(x,0) = 0$. Άρα η $\frac{df}{dy\,dx} : R^2 \to R$ είναι ασυνεχής στο $(0,0)$. Συνεπώς η f δεν είναι C^2.



Αν $A \subset R^n$ είναι ανοιχτό σύνολο και $f : A \to R$ μια συνάρτηση, και $a \in A$, τότε ο πίνακας

$$H f(a) = \left(\frac{d^2 f}{dx_i \cdot dx_j}(a) \right)_{1 \leq i,j \leq n} \overset{\text{Θεώρημα Schwarz}}{=} \begin{pmatrix} \frac{d^2 f}{dx_1^2} & \frac{d^2 f}{dx_2 dx_1} & \cdots & \frac{d^2 f}{dx_n \cdot dx_1} \\ \frac{d^2 f}{dx_2 \cdot dx_1} & \frac{d^2 f}{dx_2^2} & \cdots & \frac{d^2 f}{dx_n dx_2} \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{d^2 f}{dx_n dx_1} & \frac{d^2 f}{dx_n dx_2} & \cdots & \frac{d^2 f}{dx_n^2} \end{pmatrix}$$

είναι συμμετρικός και λέγεται Εσσιακός πίνακας (Hession matrix) της f στο a.

HY-111 (Φροντιστήριο) ① 19/3/2015

Άσκηση 1 Φυλλάδιο 6

β) $f(x,y) = \begin{cases} x\cdot y \sin\frac{1}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$A = \frac{f((0,0) + t(1,0) - f(0,0))}{t} = \frac{f(t,0)}{t} = 0$

$\lim_{t\to 0} A = 0 \qquad \frac{\theta f}{\theta x}(0,0) = 0$

$B = \ldots = \frac{f(0,t)}{t} = 0$ άρα $\lim_{t\to 0} B = 0$

Άρα $\frac{\theta f}{\theta t}(0,0) = 0$

Βήμα 2ο

$T = \left(\frac{\theta f}{\theta x}(0,0), \frac{\theta f}{\theta y}(0,0)\right) = (0,0)$

$\Gamma = \frac{|f((0,0) + (h_1,h_2)) - f(0,0) - T\cdot h|}{\|h\|} = \frac{|f(h_1,h_2)|}{\|h\|} =$

$= \frac{\left|h_1 \cdot h_2 \cdot \sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \overset{\text{cauchy Schwartz}}{\leq} \frac{|h_1\cdot h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \cdot \left|\sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right| \overset{*}{\leq}$

HY-111 (Φροντιστήριο)

Ανισότητα Cauchy - Schwartz

$$|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$$

(*) $h_1^2 - 2h_1 \cdot h_2 + h_2^2 \geq 0 \Rightarrow h_1 \cdot h_2 \leq \dfrac{h_1^2 + h_2^2}{2}$

$$\overset{(*)}{\leq} \frac{1}{2} \frac{h_1^2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}^2} \cdot \left|\sin \frac{1}{h_1^2 + h_2^2}\right| = \frac{1}{2} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \left|\sin \frac{1}{h_1^2 + h_2^2}\right|$$

Άρα $T \to 0$ γιατί $\left|\sin \dfrac{1}{h_1^2 + h_2^2}\right| \leq 1$

δηλαδή $\lim_{h \to 0} \Gamma = 0$). Άρα f διαφορίσιμη στο $(0,0)$ και $Df(0,0) = 0$

Άσκηση 4

β) $f(x,y,z) = \sin(x \cdot \sin y)$ $\quad Df(x,y,z) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin y \cos(x \cdot \sin y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \cos y \cos(x \sin y)$$

$$(\sin(f(x)))' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$$

ΗΥ-111 (Φροντιστήριο) ② 19/3/2015

δ) $f(x,y,z) = (y^2+z^2, z^2+x^2, x^2+y^2)$

$\frac{\theta f}{\theta x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x \\ 2x \end{pmatrix}$ $\frac{\theta f}{\theta y} = \begin{pmatrix} 2y \\ 0 \\ 2y \end{pmatrix}$ $\frac{\theta f}{\theta z} = \begin{pmatrix} 2z \\ 2z \\ 0 \end{pmatrix}$

$$D_{f(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 0 & 2y & 2z \\ 2x & 0 & 2z \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 5

α) $f(x,y) = \int_0^{x+y} g(t)\,dt$, g συνεχής

Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Άρα ισχύει: $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

π.χ. $\left(\int_0^x \sin^2 t\,dt\right)' = \sin^2 x$

ΗΥ-111 (Φροντιστήριο)

- Η $\frac{\partial f}{\partial x}$ υπάρχει και είναι συνεχής γιατί αν: $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$G(s) = \int_0^s g(t)dt$ έχουμε $\underline{\frac{\partial f}{\partial x} = G'(x+y) \cdot 1 = g(x,y)}$, και:

$\underline{\frac{\partial f}{\partial y} = G'(x+y) \cdot 1 = g(x+y)}$ ← Συνεχείς διότι g συνεχής (δεδ.)

f είναι C' άρα $\boxed{Df(x,y) = (g(x+y), g(x+y))}$

συνεχής και διαφορίσιμη 1 φορά

β) $\int_0^{xy} g(t)dt = f(x,y)$, $f(x,y) = G(x,y)$: θέτω

- $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot G'(xy) = y \cdot g(xy)$

- $\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot G'(xy) = x \cdot g(xy)$

$Df(x,y) = (y \cdot g(xy), x \cdot g(xy))$

HY-111 (Φροντιστήριο) ③ 19/3/2015

7α) $f(x,y) = 2x^2 + y^2$

- Γράφημα της f ονομάζουμε το σύνολο των σημείων x, y, z των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν την $z = f(x,y)$.
- Η γραφική παράσταση 2 μεταβλητών = επιφάνεια σε 3D.
- Ποιο το εφαπτόμενο επίπεδο;

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \text{ ή}$$

$$z - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot (x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot (y - 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$z = 0$

$S = \{ (x, y, 2x^2 + y^2) : \text{για } x, y \in R^2 \}$, Το εφαπτόμενο επίπεδο είναι >0 x, y διότι z=0

Τύπος του Taylor (2ης τάξης)

Θεώρημα Έστω $A \in \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό κυρτό σύνολο (δηλ. $(1-t)x + ty \in A$ για κάθε $0 \leqq t \leqq 1$ $x, y \in A$) και $f : A \to \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση. Τότε για κάθε $x, y \in A$, $x \neq y$, υπάρχει $0 < \xi < 1$ ώστε:

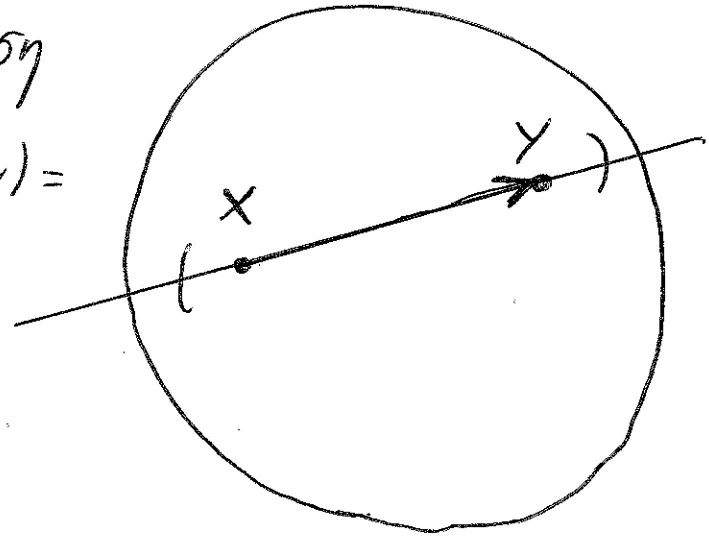
$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2} \langle y - x \,,\, Hf((1-\xi)x + \xi y) \cdot (y - x) \rangle$$

Απόδειξη Θεωρούμε τη συνάρτηση

$g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(t) = f((1-t)x + ty) =$

$= f(x + t(y - x)) = f(\gamma(t))$.

όπου $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$,



Επειδή η f υποτίθεται C^2 και η γ είναι C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη η g είναι επίσης C^2. Υπολογίζουμε το $g'(t)$ και $g''(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$g'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle \nabla f((1-t)x + ty), y - x \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i}((1-t)x + ty) \cdot (y_i - x_i),$$ όπου $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

και $g''(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} \left(\frac{df}{dx_i} \right) ((1-t)x + ty)(y_j - x_j) \right)(y_i - x_i)$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{d^2 f}{dx_j \, dx_i}((1-t)x + ty) \cdot (y_j - x_j)(y_i - x_i) =$$

$$\langle y-x, Hf((1-t)x+ty)(y-x) \rangle$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Taylor για συναρτήσεις μιας μεταβλητής στην g, υπάρχει $0 < \xi < 1$ ώστε $g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(\xi)$. Αφού $g(1) = f(y)$ και $g(0) = f(x)$, άρα αντικαθεστώντας βρίσκουμε τον τύπο:

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \frac{1}{2} \langle y-x \;\; H \;\; f((1-\xi)x + \xi y), (y-x) \rangle.$$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Έστω $X \in R^n$ ένα σύνολο και $f: X \to R$. Η f λέμε ότι έχει τοπικό (γνήσιο) μέγιστο στο $x_0 \in X$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε ($f(x_0) > f(x)$) $f(x_0) \geqq f(x)$ για κάθε $x \in X \cap D(x_0, \delta)$

Η f παίρνει <u>ολικά</u> στο X μέγιστη τιμή στο x_0, όταν $f(x_0) \geqq f(x)$ για κάθε $x \in X$. Αντίστοιχα ορίζεται η έννοια του σημείου τοπικού (γνησίου) ελάχιστου και ολικά ελάχιστου στο X. Σε κάθε περίπτωση λέμε ότι έχουμε τοπικό ακρότατο.

<u>Θεώρημα</u>: Αν $X \subset R^n$ κλειστό και φραγμένο σύνολο τότε κάθε συνεχής συνάρτηση $f: X \to R$ παίρνει ολικά μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλαδή υπάρχει $x_0, y_0 \in X$ ώστε για κάθε $x \in X$: $f(y_0) \leq f(x) \leq f(x_0)$

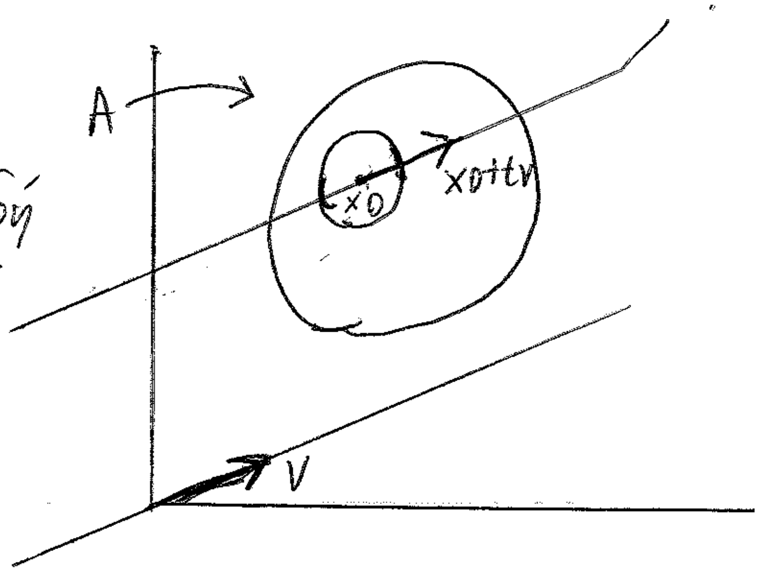
Αναγκαία συνθήκη για τοπικό ακρότατο:

<u>Πρόταση</u>: Έστω $A \subset R^n$ ανοιχτό σύνολο και $f: A \to R$ ανοιχτή συνάρτηση. Έστω ακόμα ότι υπάρχει $x_0 \in A$ στο οποίο η f έχει τοπικό ακρότατο.

Αν $v \in R^n$, $v \neq 0$ και υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f'(x_0; v)$, τότε $f'(x_0; v) = 0$.

ΗΥ-111

- <u>Απόδειξη</u>: Έχουμε $f'(x_0;v) = F'(0)$ όπου $F(t) = f(x_0 + t\cdot v)$, δηλαδή η F είναι ο περιορισμός της f πάνω στην ευθεία που διέρχεται από το x_0 και είναι // στο v.



- Αφού η f έχει τοπικό ακρότατο στο x_0, ειδικά η F έχει τοπικό ακρότατο στο 0. Άρα $F'(0) = 0$

- <u>Πόρισμα</u>: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \to \mathbb{R}$ με τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in A$. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο x_0, τότε $Df(x_0) = 0$ (δηλ. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0, i = 1, 2, \dots, n$)

<u>Απόδειξη</u>: Από την πρόταση έχουμε $Df(x_0)\cdot v = f'(x_0;v) = 0, \forall v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$, άρα $Df(x_0) = 0$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \to \mathbb{R}$ μια C^1 συνάρτηση. Το $x_0 \in A$ λέγεται κρίσιμο σημείο αν $Df(x_0) = 0$. Κάθε σημείο τοπικού ακροτάτου είναι κρίσιμο αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο

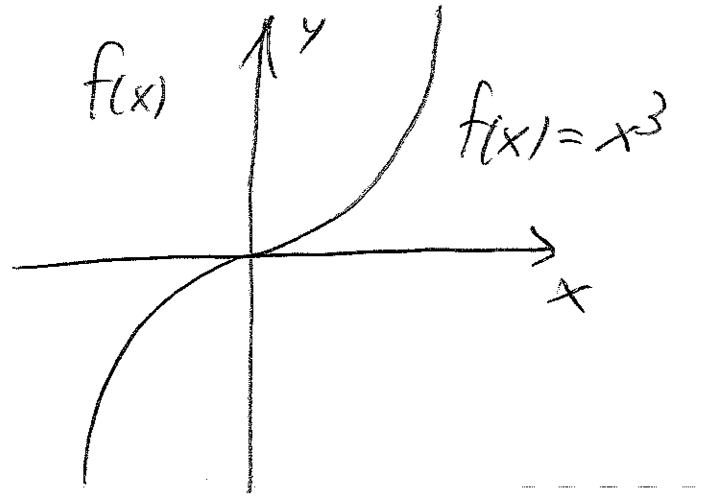
ΗΥ-111

③ 23/3/2015

Παραδείγματα

1) Η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

- Εδώ $f'(0) = 0$, αλλά στο 0 δεν έχει ακρότατο.



2) Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$

→ Θέλουμε να βρούμε κρίσιμα σημεία

Η f είναι C^∞ και τα κρίσιμα σημεία της είναι οι λύσεις της $Df(x,y) = (0\ 0)$, δηλαδή οι λύσεις του συστήματος εξισώσεων:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$ Έχουμε:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x(y-2x^2) + (y-x^2)(-4x) = -6xy + 8x^3$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = (y-2x^2) + (y-x^2) = 2y - 3x^2$

Άρα τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος εξισώσεων

- $$\left.\begin{aligned} -6xy + 8x^3 &= 0 \\ 2y - 3x^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x(-3y + 4x^2) &= 0 \\ y &= \frac{3}{2}x^2 \end{aligned}\right\}$$ αντικατάσταση...

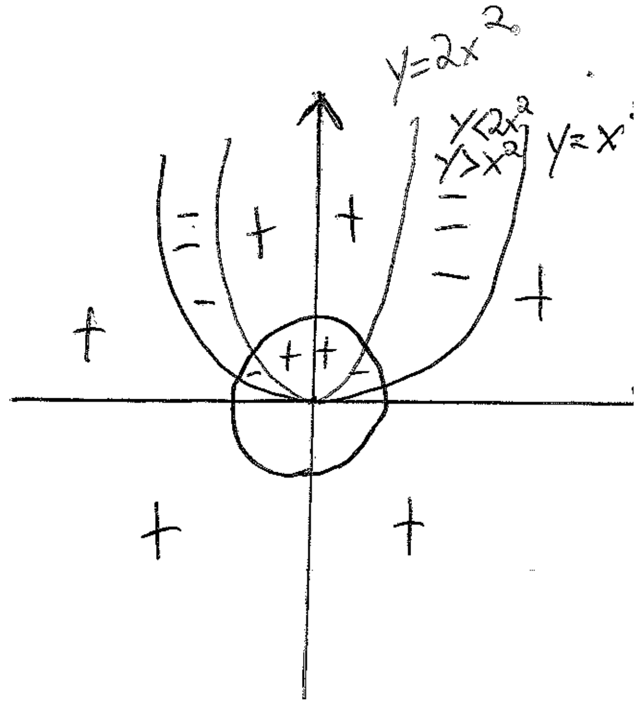
$$x\left(-\frac{9}{2}x^2 + 4x^2\right) = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$$

- Άρα $y = 0$, Άρα μοναδικό κρίσιμο σημείο της f είναι το $(0,0)$.

HY-111

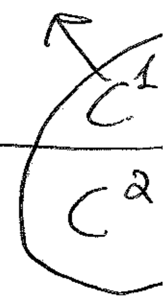
• Εδώ έχουμε $f(0,0)=0$,

Σε οποιαδήποτε μπάλα με κέντρο το $(0,0)$ έχω και αρνητικές και θετικές τιμές!



και $f(x,y) = \begin{cases} >0 \text{ για } y<x^2 \text{ ή } y>2x^2 \\ <0 \quad x^2<y<2x^2 \end{cases}$

• Άρα η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο $(0,0)$.



• <u>Θεώρημα</u>: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \to \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση. Έστω ακόμα $x_0 \in A$ ένα κρίσιμο σημείο της f, δηλαδή η παράγωγος είναι 0: … $\underline{Df(x_0)=0}$.

a) • Αν ο εσσιανός $Hf(x_0)$ πίνακας είναι <u>θετικά ημιορισμένος</u> τότε η f έχει τοπικό γνήσιο ελάχιστο στο x_0.

b) • Αν ο $Hf(x_0)$ έναι <u>αρνητικά ημιορισμένος</u> τότε η f έχει τοπικό γνήσιο μέγιστο στο x_0.

c) • Αν δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ημιορισμένες τότε η f δεν έχει ακρότατο στο x_0.

• Έστω $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας, δηλαδή
$S^t = S$. Έστω $S = (s_{ij})$

• <u>Ορισμός:</u> Ο S λέγεται θετικά ημιορισμένος, όταν
$\langle x, Sx \rangle \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ δηλαδή: $\sum_{i,j=1}^{n} s_{i,j} x_i x_j \geq 0$ $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

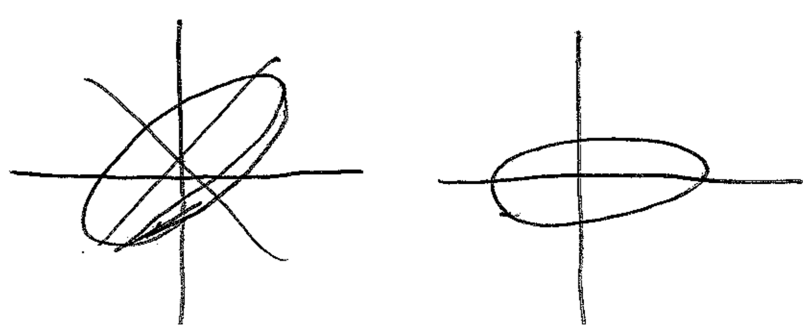
• Αν $\langle x, Sx \rangle$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $Sx > 0$, $x \neq 0$, ο S λέγεται θετικά ορισμένος. Όμοια ορίζεται η έννοια αρνητικά ημιορισμένος και αρνητικά ορισμένος - Φασματικό θεώρημα.

<u>Παρατήρηση:</u> $\forall$ συμμετρικό πίνακα S. $\exists$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}$ από ίδια διανύσματα του S.
Δηλαδή $\exists$ ορθογώνιος πίνακας $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($U^t = U^{-1}$)
ώστε

$$U^{-1} S U = U^t S U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ είναι οι ιδιότητες του S. Ο S είναι θετικά ημιορισμένος όταν και μόνο $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$
ορισμένος $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 > 0, \dots \lambda_n > 0$

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \geq 0, \; \forall \, (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$



<u>Παράδειγμα:</u> Η $f: R^2 \to R$, $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2$

έχει $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -2z$

- Άρα μοναδικό κρίσιμο σημείο το $(0,0,0)$ και $f(0,0,0)=0$
- Όμως $Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, άρα ο $Hf(0,0,0)$

δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ημιορισμένος,

γιατί: $\langle x, Hf(0,0,0)x \rangle = 2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

>0

<0

ΗΥ-111 (1) 24/3/2015

Θεώρημα · Έστω $A \subset R^n$ ανοιχτό και f μια C^2 συνάρτηση.
· Έστω κρίσιμο σημείο $x_0 \in A$ της f δηλ. $Df(x_0)=0$

a) Αν ο $Hf(x_0)$ είναι θετικά ημιορισμένος τότε η f έχει τοπικό (γνήσιο) ελάχιστο στο x_0 ($\langle v, Hf(x_0)v \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in R^n$)

b) Αν ο $Hf(x_0)$ είναι αρνητικά ημιορισμένος τότε η f έχει τοπικό (γνήσιο) μέγιστο στο x_0 ($\langle v, Hf(x_0)v \rangle \leq 0$ για κάθε $x \in R^n$)

c) Αν υπάρχουν $u, v \in R^n$, $u \neq v \neq 0$ ώστε $\langle u, Hf(x_0)u \rangle > 0$ και $\langle v, Hf(x_0)v \rangle < 0$ τότε η f δεν έχει ακρότατο στο x_0.

Ειδικά, έστω $n=2$ (2 μεταβλητές) και $v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in R^2$. Αφού:

· $$Hf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

, θέτω $a = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0)$

$b = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0)$

και $c = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0)$

· Έχουμε $\langle v, Hf(x_0)\cdot v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right\rangle =$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ bv_1 + cv_2 \end{pmatrix} \right\rangle = v_1(av_1 + bv_2) + v_2(bv_1 + cv_2) =$$

$$= av_1^2 + 2 \cdot b \cdot v_1 \cdot v_2 + cv_2^2 =$$

HY-111

$$= \frac{a^2 \cdot v_1^2}{a} + \frac{2 b \cdot a \cdot v_1 \cdot v_2}{a} + \left(b^2 \cdot v_2^2 - b^2 \cdot v_2^2\right)\frac{1}{a} + c \cdot v_2^2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} = \quad (\text{όταν } a \neq 0)$$

$$= \frac{1}{a}\left[(av_1 + bv_2)^2 + (a\cdot c - b^2)\,v_2^2\right] = \frac{1}{a}\left[(a\cdot v_1 + b\cdot v_2^2) + \Delta V_2^2\right]$$

όπου Δ η ορίζουσα του $Hf(x_0)$. $\Delta = \det Hf(x_0) = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$

<u>Πόρισμα</u>: Έστω $A \subset R^2$, f μια C^2 συνάρτηση $f: A \to R$ και $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε $Df(x_0) = 0$

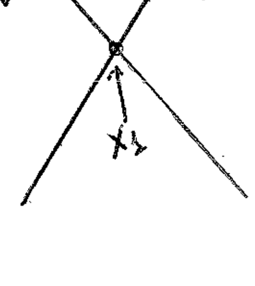
1) Έστω $\Delta = \det Hf(x_0) > 0$, τότε:

αν $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) \underline{> 0}$, η f έχει τοπικό (γνήσιο) <u>ελάχιστο</u> στο x_0

αν $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) \underline{< 0}$, η f έχει τοπικό (γνήσιο) <u>μέγιστο</u> στο x_0

2) Έστω $\Delta = \det Hf(x_0) < 0$, τότε η f δεν έχει ακρότατο στο x_0, αλλά έχει <u>σάγμα (saddle = σαμάρι)</u>

$u, v \in R^2$ όπου στο c του Θεωρήματος



HY-111 ② 24/3/2015

Παράδειγμα: Θέλουμε τα τοπικά ακρότατα της $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

- $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

- Πρώτο βήμα: ΚΡΙΣΙΜΑ ΣΗΜΕΙΑ της f (που είναι C^∞). Έχουμε

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 + 3y^2 - 15 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 6xy - 12 \end{aligned}\right\}$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία της f είναι η λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 - 15 &= 0 \\ 6xy - 12 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5 \\ x \cdot y &= 2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5 \\ y &= 2/x \end{aligned}$$

, Αντικατάσταση... $x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \text{ ή } x^2 = 1$$

$$\boxed{x = \pm 2 \text{ ή } x = \pm 1}$$

Συνεπώς τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $(1,2)$, $(-1,-2)$, $(2,1)$, $(-2,-1)$

- Ο $Hf(x,y)$ είναι:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

$$\det Hf(x,y) = 36(x^2 - y^2)$$

για κάθε σημείο...:

ΗΥ-111

$1^{\underline{o}}$) $H f(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$, στο $(1,2)$: $\Delta = \det Hf(1,2) =$
$= 36 - 144 < 0$

· Άρα η f έχει σάγμα στο $(1,2)$.

$2^{\underline{o}}$) $H f(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$, στο $(-1,-2)$: $\Delta = 36 - 144 < 0$

· Άρα η f έχει σάγμα στο $(-1,-2)$.

$3^{\underline{o}}$) $Hf(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$, στο $(2,1)$: $\Delta = 144 - 36 > 0$

• Αφού $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = 12 > 0$, έχουμε τοπικό γνήσιο ελάχιστο στο $(2,1)$

$4^{\underline{o}}$) $Hf(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$, στο $(-2,-1)$: $\Delta = 144 - 36 > 0$

• Αφού $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,-1) = -12 < 0$, έχουμε τοπικό γνήσιο μέγιστο στο $(-2,-1)$

ΗΥ-111 ③ 24/3/2015

<u>Γεωμετρική εφαρμογή</u>: Έστω $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ένα τρίγωνο με γωνίες A, B, Γ

νδο: $\cos A + \sqrt{2}(\cos B + \cos\Gamma) \leq 2$

<u>Απόδειξη</u>: Αφού έχουμε τρίγωνο πρέπει $A, B, \Gamma < \pi$

και: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \pi$

Άρα: $A = \pi - (B+\Gamma)$ και $\cos A = \cos(\pi - (B+\Gamma)) = \underline{-\cos(B+\Gamma) =}$

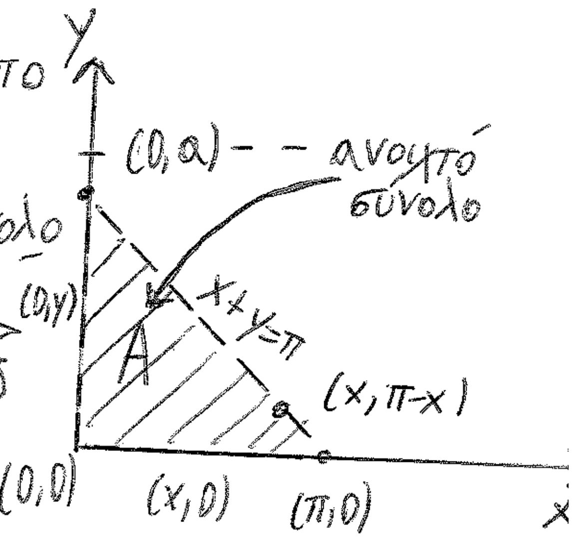
$\underline{= \cos A}$

- Θεωρώ τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$f(x,y) = -\cos(x+y) + \sqrt{2}(\cos x + \cos y)$

και αναζητώ τη μέγιστη τιμή της f στο σύνολο

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0, y>0 \text{ και } x+y<\pi\}$



- Η f είναι φραγμένη στο κλειστό και φραγμένο

$$\bar{A} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq \pi \end{array} \right\}$$

- Μάλιστα η f η συγκεκριμένη είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}^2$ διότι: $|f(x,y)| \leq 1 + \sqrt{2}(1+1) = 1 + 2\sqrt{2}$

- Η f είναι C^∞ και έχει:

HY-111

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(x+y) - \sqrt{2}\sin x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x+y) - \sqrt{2}\sin y$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι η λύση του συστήματος (στο A):

$$\left.\begin{aligned} &\sin(x+y) - \sqrt{2}\sin x = 0 \\ &\sin(x+y) - \sqrt{2}\sin y = 0 \\ &x>0,\ y>0,\ x+y<\pi \end{aligned}\right\} \iff$$

$\iff \sin x = \sin y$ άρα $\boxed{x = y \text{ ή } x = \pi - y}$ ← αποκλείεται

Άρα αντικαθιστώντας: $\sin 2x = \sqrt{2}\sin x \iff$

$\iff 2\sin x \cdot \cos x = \sqrt{2}\sin x \iff \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff$

$\iff \boxed{x = \frac{\pi}{4} = y}$, Άρα μοναδικό κρίσιμο σημείο στο A είναι το $(\pi/4, \pi/4)$. Με $f(\pi/4, \pi/4) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2$

- $$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) - (\cos x)\cdot\sqrt{2} & \cos(x+y) \\ \cos(x+y) & \cos(x+y) - \sqrt{2}\cos y \end{pmatrix}$$

- Ειδικά λοιπόν στο $(\pi/4, \pi/4)$:

$$Hf(\pi/4, \pi/4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- $\det Hf(\pi/4, \pi/4) = +1$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pi/4, \pi/4) = -1 < 0$

Άρα έχει <u>τοπικό</u> γνήσιο μέγιστο στο $(\pi/4, \pi/4)$

Επιπλέον για τα σημεία του ∂A (συνόρου) έχουμε:

- $f(x,0) = -\cos x + \sqrt{2}(\cos x + 1) = (-1+\sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} \leq -1+\sqrt{2}+\sqrt{2} \leq 2\sqrt{2}-1 < 2$
- $f(0,y) < 2$, ομοίως
- $f(x,\pi-x) = -\cos\pi + \sqrt{2}(\cos x + \cos(\pi-x)) = 1 < 2$

Άρα: Το 2 είναι η μέγιστη τιμή στο $\bar{A}$.

Δηλαδή: $\underline{-\cos(x+y) + \sqrt{2}(\cos x + \cos y) \leq 2}$

για κάθε $x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq \pi$

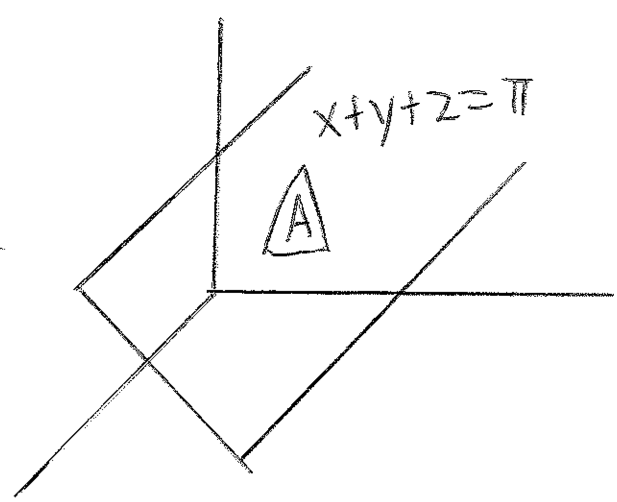
Ιδέα: $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, F(x,y,z) = \cos x + \sqrt{2}(\cos y + \cos z)$

$G(x,y,z)$ στα $x+y+z=\pi$,

και θέλουμε το $\max(F|E)$, όπου E το επίπεδο

- $G(x,y,z) = c$, σταθερά...

πότε μπορώ να λύσω ως προς κάποια μεταβλητή



ΗΥ-111 (Φροντιστήριο) ① 26/3/2015

Άσκηση 7 Φυλλάδιο 6

$f(x,y) = x^2 - 3y^2 + x$ στο σημείο $(1,0,2)$

$$z - f(\overset{1}{x_0},\overset{0}{y_0}) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$z - 2 = 3(x-1) + 0(y-0)$$

$$\Leftrightarrow z - 2 = 3x - 3 \Leftrightarrow \boxed{z = 3x - 1}$$

Άσκηση 3 Φυλλάδιο 7

$$\varphi(x,y) = f(x-y) + g(x+y) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x-y) + \frac{\partial g}{\partial x}(x+y), \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}(x-y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x+y), \quad \frac{\partial \varphi^2}{\partial y^2}$$

Άσκηση 4 Φυλλάδιο 6

$x = (x_1, x_2, x_3)$

$$V(x) = -\frac{1}{\|x\|} \qquad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = 0 \qquad V(x) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

HY-111 (Φροντιστήριο)

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = + \frac{\dfrac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = \frac{x_i}{\|x\|^3} \longrightarrow \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^{\,3}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i} = \frac{\|x\|^3 - x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left((x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}\right)}{\|x\|^6} = \frac{1}{\|x\|^3} - x_i \cdot \frac{1}{\|x\|^6} \cdot 3$$

$$\|x\| \cdot x_i = \frac{1}{\|x\|^3} - \frac{3x_i^2}{\|x\|^5}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = \frac{3}{\|x\|^3} - \frac{3\|x\|^2}{\|x\|^5} = \frac{3}{\|x_i\|^3} - \frac{3}{\|x\|^3} = 0$$

<u>Άσκηση 2 Φυλλάδιο 6</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)}{t} = 0$$

$$T = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0)$$

ΗΥ-111 (Φροντιστήριο) ② 26/3/2015

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f((0,0)+(h_1,h_2)) - f(0,0) - T\cdot h|}{\|h\|} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|f(h_1,h_2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|h_1\cdot h_2|}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{h\to 0} \sqrt{\frac{|h_1\cdot h_2|}{h_1^2+h_2^2}}$$

$$\frac{|h_1\cdot h_2|}{h_1^2+h_2^2} = g(h_1,h_2) \quad g(0,1/n)=0 \quad g(1/n,0)=0$$

$$g\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{\left|\frac{1}{n^2}\right|}{\frac{2}{n^2}} = \frac{\frac{1}{\cancel{n^2}}}{\frac{2}{\cancel{n^2}}} = \frac{1}{2}$$

vavouris@csd.uoc.gr

Άσκηση 6 Φυλλάδιο 7

β) $f(x,y) = x^2+y^2+x+y+xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+1+y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y+1+x$$

$$Df(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = 0$$

$$\begin{cases} 2x+1+y=0 \\ 2y+1+x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ -2x-4y-2=0 \end{cases} \cdot(-2) \ \oplus$$

$$-3y-1=0 \Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{3}} \ \boxed{x=\frac{-1}{3}}$$

HY-111 (Φροντιστήριο)

$Hf\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$ οπότε $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1/3, -1/3) = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$ οπότε $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1/3, -1/3) = 1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$ οπότε $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1/3, -1/3) = 2$

$Hf(-1/3, -1/3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\det Hf(-1/3, -1/3) = 4 - 1 = 3 > 0$

$2 > 0$ και $\det Hf(-1/3, -1/3) > 0$

Τότε στο $(-1/3, -1/3)$ έχουμε τοπικά γνήσια ελάχιστα

α) $f(x,y) = x^4 + x^2 y + y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2y$

$Df(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 + 2xy = 0 \\ x^2 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$(0,0)$ κρίσιμο σημείο

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ άρα:

- $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det Hf(0,0) = 0 \ldots$;!

! Για κάθε $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in R^2$ $\langle v, Hf(0,0) \cdot v \rangle =$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

2x2

$$= \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2v_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2v_2^2 \geq 0$$

- Ο $Hf(0,0)$ δεν είναι θετικά ορισμένος αλλά θετικά ημιορισμένος. αυτό σημαίνει ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο (0,0) που όμως δεν είναι γνήσια κατ'ανάγκη.

HY-111 ① 30/3/2015

$f(x,y,z)$

$g(x,y,z)=c$ σταθερά

Παράδειγμα

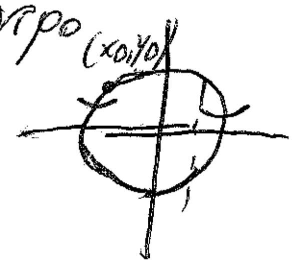
$g(x,y)=c$ σταθερά

$y=\Phi(x)$

$g(x,\Phi(x))=c$

Το γράφημα της φ

Το σύνολο των σημείων του R^2 που ικανοποιούν την εξίσωση $g(x,y)=x^2+y^2=1$ είναι ο κύκλος με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα 1.



Ο κύκλος δεν είναι γράφημα καμιάς συνάρτησης. Αν $(x_0,y_0)\in S$ και $y_0>0$.

Τότε το y_0 βρίσκεται στο βορειο ημικύκλιο

$S^+=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2=1$ και $y>0\}$, που είναι το γράφημα της C^∞ συνάρτησης $\varphi:(-1,1)\to R$ με $\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$

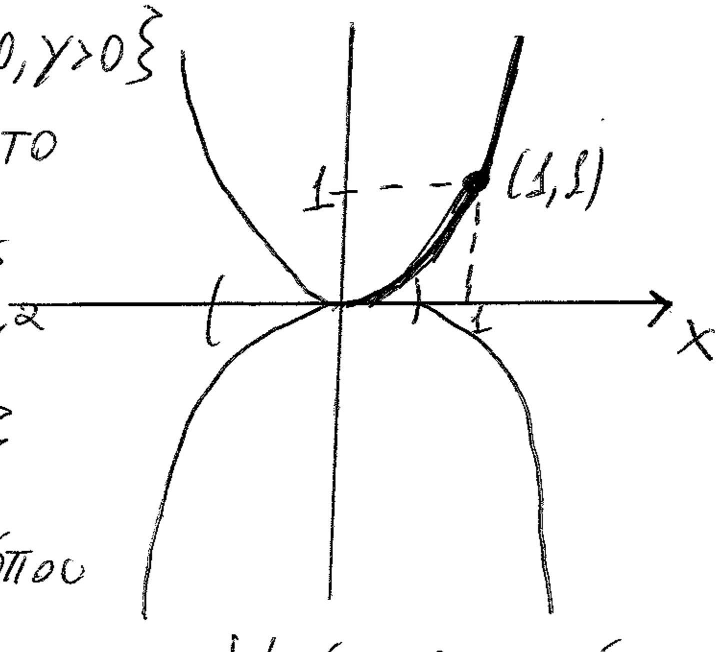
Όμοια αν $y_0<0$, τότε το (x_0,y_0) βρισκεται στο νότιο ημικύκλιο $S^-=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2=1, y<0\}$, που είναι το γράφημα της C^∞ συνάρτησης

$\psi:(-1,1)\to R$ με $\psi(x)=-\sqrt{1-x^2}$

Όμοια αν $x_0>0$ τότε γίνονται τα ίδια πράγματα, δηλαδή το (x_0,y_0) βρίσκεται στο δεξιό ημικύκλιο που είναι το γράφημα της C^∞ συνάρτησης $x:(-1,1)\to\mathbb{R}$ με $x(y)=\sqrt{1-y^2}$. Αντίστοιχα όταν $x_0<0$

<u>Συμπέρασμα:</u> Ο κύκλος S καλύπτεται από γραφήματα C^∞ συναρτήσεων (είτε του x είτε του y)

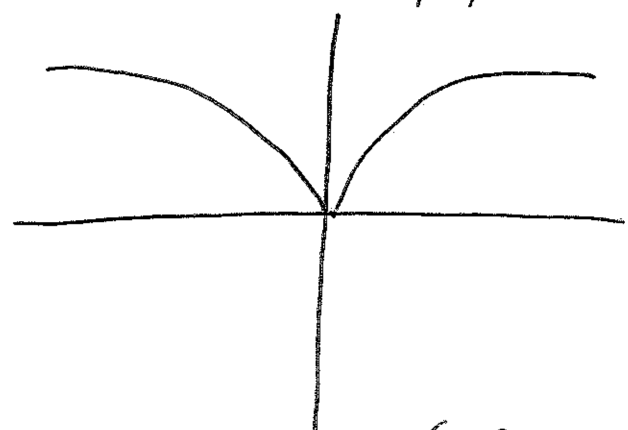
<u>Παράδειγμα 2</u> Έστω $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^4-y^2=0\}=$
$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y=\pm x^2\}$. Τότε $(1,1)\in S$. Το υποσύνολο $\Gamma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^4-y^2=0 \text{ και } x>0, y>0\}$ περιέχει το $(1,1)$ και είναι το γράφημα της C^∞ συνάρτησης $\varphi:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $\varphi(x)=x^2$ δηλαδή $\Gamma=\{(x,x^2),\ x>0\}$



Παρατηρούμε ότι $\Gamma=S\cap W$, όπου $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x>0, y>0\}$ και το W είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}^2$.
Αντίθετα, δεν υπάρχει κανένα ανοιχτό σύνολο V με $(0,0)\in V$ (π.χ. $V=D((0,0),\delta)$, $\delta>0$ όσο πιο μικρό γίνεται) ώστε το $S\cap V$ να είναι γράφημα συνάρτησης του x ή του y.

ΗΥ-111 ② 30/3/2015

Παράδειγμα 3 Έστω $S = \{(x,y) \in R^2 : x^2 - y^3 = 0\} =$
$= \{(x,y) \in R^2 : y = x^{2/3}\}$ στο γράφημα της συνάρτησης $\varphi : R \to R$ με $\varphi(x) = x^{2/3}$. Η φ δεν είναι διαφορίσιμη στο 0.



Θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων (ειδική μορφή)

Έστω $A \subset R^{n+1}$, ένα ανοιχτό σύνολο και $f : A \to R$ μια C^k συνάρτηση $k \geq 1$. Έστω $c \in R$ και $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in A$ ώστε $f(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) = c$. Αν $1 \leq j \leq n$ και $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \ldots, a_{n+1}) \neq 0$, τότε υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $V \in R^n$ και μια μοναδική C^k συνάρτηση $\phi : V \to R$ ώστε

$$f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \phi(x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{n+1}), x_{j+1}, \ldots, x_{n+1}) = c$$

για κάθε $(x_1, x_2, \ldots, x_{j+1}, \ldots, x_{n+1}) \in V$.

με $\varphi(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_{n+1}) = a_j$

HY-111

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $f: R^3 \to R$ με $f(x,y,z) =$

$= x^3 \cdot y^2 \cdot z^6 + 3x^2y^4 - 18z^5 + 12x^2y^2z^3 - 5$

Τότε $f(1,-1,1) = 1+3-18+12-5 = -7$

$(c=-7, (a_1,a_2,a_3) = (1,-1,1))$. Ρωτάμε αν υπάρχει

C^∞ συνάρτηση $\varphi: V \to R$ όπου το $V \subset R^2$ είναι ανοιχτό

και περιέχει το $(1,-1)$ ώστε $f(x,y,\varphi(x,y)) = -7$ για

κάθε $(x,y) \in V$. Έχουμε $\frac{\partial f}{\partial z} = 6x^3y^2z^5 - 90z^4 + 36x^2y^2z^2$,

οπότε $\frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,1) = 6-90+36 = -48 \neq 0$

Απ' το Θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων

τέτοια φ υπάρχει! Η φ δεν ξέρουμε ποια είναι, αλλά

μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγό της

π.χ. στο $(1,-1)$ απ' τον κανόνα της αλυσίδας

Παραγωγίζοντας την εξίσωση $f(x,y,\Phi(x,y)) = -7$

$\Leftrightarrow (f \circ g)(x,y) = -7$, όπου $g(x,y) = (x,y,\Phi(x,y))$

έχουμε από το κανόνα της αλυσίδας

ότι $Df(g(x,y)) \cdot Dg(x,y) = 0$ $\qquad g: V \to R^3$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(x,y)), \frac{\partial f}{\partial y}(g(x,y)), \frac{\partial f}{\partial z}(g(x,y)) \right) \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = (0,0) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(g(x,y)), \right.$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y}(g(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z}(g(x,y)) \right) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}, \text{ όταν } (x,y) \in V$$

(μπορούμε να μικρύνουμε την ανοιχτή περιοχή V του $(1,-1)$ ώστε $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)) \neq 0$ για κάθε $(x,y) \in V$, αφού $\frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,1) \neq 0$ και η f είναι τουλάχιστον C^1)

HY-111

Ειδικά $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,-1) = \dfrac{-\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1,1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,1)} = \dfrac{\cdots}{-7}$,

$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,-1) = \dfrac{-\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1,1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,1)} = \dfrac{\cdots}{-7}$

<u>Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων (γενική μορφή)</u>

Έστω $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ ένα ανοιχτό σύνολο και

$f: A \to \mathbb{R}^m$ μια C^k συνάρτηση $k \geq 1$ Έστω $c \in \mathbb{R}^m$ και

$(a_1, \dots, a_{n+m}) \in A$ με $f(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+m}) = c$

Αν $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_{n+m})\right) \neq 0$, τότε υπάρχει

ένα ανοιχτο σύνολο $V \in \mathbb{R}^n$ και μια μοναδική C^k συνάρτηση $\varphi: V \to \mathbb{R}^m$ ώστε

$f(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)) = c$

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in V$, με $\varphi(a_1, \dots, a_n) = (a_{n+1}, a_{n+m})$

$$Df(\dots) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & \frac{\partial f_m}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{array}\right)$$

$D_x f$: $m \times n$ block

$D_\varphi f$: $m \times m$ block

- Η παράγωγος υπολογίζεται από τον κανόνα της αλυσίδας, θέτοντας

$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n))$

οπότε $\underline{Df(g(x_1, \dots, x_n)) \cdot Dg(x_1, \dots, x_n) = 0}$

<u>Παράδειγμα</u> Έστω δίνονται οι εξισώσεις $2x^2+y^2+z^2+u^2-v^2=0$
$x^2+z^2+2u-v=0$

Υπάρχει C^∞ λύση ως προς u,v συναρτήσεις των x,y,z

δηλαδή $u=u(x,y,z)$ ώστε $u(1,-1,1)=0$
$v=v(x,y,z)$ $v(1,-1,1)=2$

Εδώ έχουμε την C^∞ συνάρτηση $f:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^2=\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^2$
με τύπο $f(x,y,z,u,v)=(2x^2+y^2+z^2+u^2-v^2,\ x^2+z^2-2u-v)$

Έχουμε επίσης $c=(0,0)$ και $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=(1,-1,1,0,2)$

Ο ιακωβιανός πίνακας της f στο (x,y,z,u,v) είναι

$$Df(x,y,z,u,v)=\left(\begin{array}{ccc|cc} 4x & 2y & 2z & 2u & -2v \\ 2x & 0 & 2z & -2 & -1 \end{array}\right)$$

και ειδικά $$Df(1,-1,1,0,2)=\left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & -2 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Αφού $\det\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=-8\neq 0$

απ' το Θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων υπάρχει C^∞ συνάρτηση $\varphi:V\to\mathbb{R}^2$ από το V είναι ανοιχτή περιοχή του $(1,-1,1)\in\mathbb{R}^3$ και $\varphi(1,-1,1)=(0,2)$

Ενώ αν $\varphi(x,y,z)=(u(x,y,z),v(x,y,z))$, τότε

$$2x^2+y^2+z^2+(u(x,y,z))^2-(v(x,y,z))^2=0 \quad \forall (x,y,z)\in V$$
$$x^2+z^2+2u(x,y,z)-v(x,y,z)=0$$

HY-111

* * *

Η παράγωγος της φ στο Θεώρημα

Αν $g(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_n, \varphi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,(x_1,\dots x_n))$
$= (x, \phi(x))$

όπου $X = (x_1,\dots,x_n)$. Επίσης $Y = (x_{n+1},\dots,x_{n+m})$

Αν θέσουμε $D_x f = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$, $D_y f = \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\right)_{\substack{m\leq i\leq n+m \\ 1\leq j\leq m}}$

και παραγωγίζουμε την

$F(g(x)) = f(x, \phi(x)) = c$ βρίσκουμε

$0 = Df(g(x)) \cdot Dg(x) = (D_x f \,\vdots\, D_y f)\begin{pmatrix} I_n \\ \hline D\phi(x)\end{pmatrix} = D_x f + D_y f \cdot D\varphi(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{D\phi(x) = -(D_y f)^{-1} \cdot D_x f}$

* * *

Ο ιακωβιανός πίνακας της φ υπολογίζεται

$$D\Phi(x,y,z) = -\begin{pmatrix} 2u(x,y,z) & -2v(x,y,z) \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4x & 2y & 2z \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

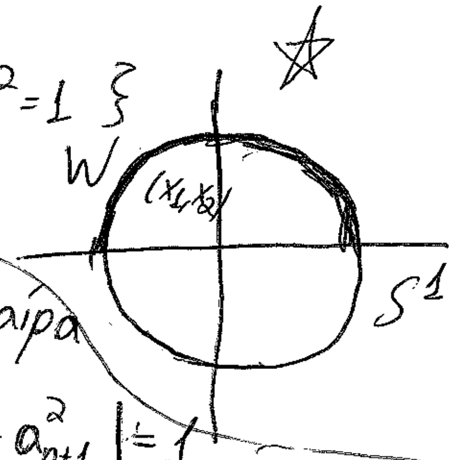
οπότε $D\Phi(1,-1,1) - \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \dots\dots$

Ορισμός: Ένα σύνολο $S \subset R^{n+1}$ λέγεται λεία υπερεπιφάνεια (για $n=2$, επιφάνεια) όταν για κάθε $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in S$ υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $W \subset R^{n+1}$ ώστε το $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in W$ ώστε το $S \cap W$ να είναι το γράφημα μιας C^∞ συνάρτηση n-μεταβλητών $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_{n+1})$.

Παράδειγμα Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$, το $S^n = \{(x_1, \ldots x_n, x_{n+1}) \in R^{n+1} : x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\}$ λέγεται η (μοναδιαία) n-διάστατη σφαίρα (με κέντρο το $(0, \ldots, 0)$)

Για $n=1$, η $S^1 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ είναι ο κύκλος



Για $n=2$, η S^2 είναι η 2-διάστατη σφαίρα

Γενικά αν $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in S^n$ δηλ. $a_1^2 + \ldots + a_n^2 + a_{n+1}^2 = 1$

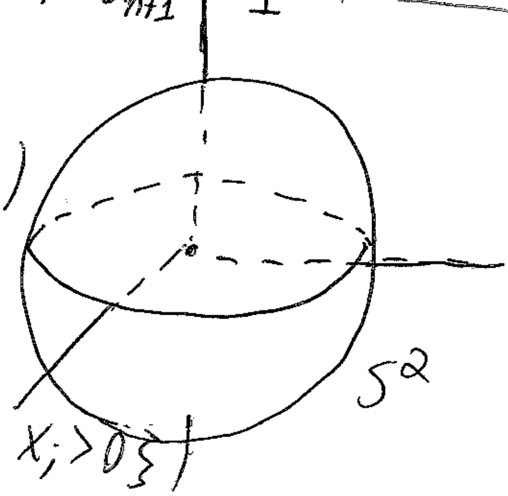
τότε υπάρχει $1 \leq j \leq n+1$ ώστε $a_j \neq 0$

Αν $a_j > 0$ (π.χ. για $n=2$ και $j=3$ δηλ. $a_j > 0$)

τότε το $W = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in R^{n+1} \; x_j > 0\}$

(για $n=2$, $j=3$, το $W = \{(x_1, x_2, x_3) \subset R^3 : x_j > 0\}$)

είναι ανοιχτή περιοχή του $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$



και το $S^n \cap W$ είναι το γράφημα της C^∞ συνάρτησης $\phi : D(0,1) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$\phi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) = \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{j-1}^2 - x_{j+1}^2 - \dots - x_{n+1}^2}$$

Ομοια αν $a_j < 0$, τότε $\varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) =$

$$= - \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{j-1}^2 - x_{j+1}^2 - \dots - x_{n+1}^2}$$

(για $n=2$, $j=3$, $a_j > 0$, έχουμε $\varphi(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$

☆ Για $n=1$ κύκλο: (Προφανώς $S^n = \partial D(0,1)$)

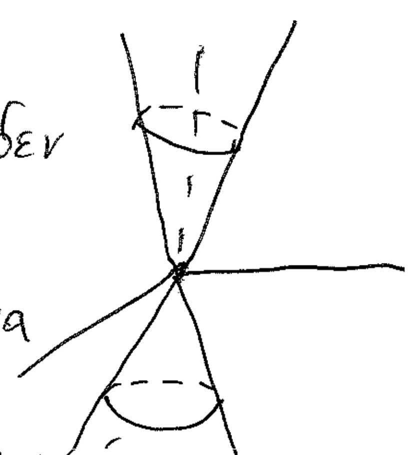
$\phi : (-1,1) \to \mathbb{R}$

$\phi(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$\gamma(t) = (t, \varphi(t)) = (t, \sqrt{1-t^2})$

γ είναι 1-1, $\gamma'(t) \neq \binom{0}{0}$

<u>Παράδειγμα</u>: Το $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ είναι κώνος με την κορυφή στο $(0,0,0)$ δεν είναι λεία επιφάνεια γιατί για καμιά ανοιχτή περιοχή W του $(0,0,0)$ το $C \cap W$ δεν είναι γράφημα συνάρτησης.



Το πάνω χωνί του κώνου είναι το γράφημα της συνάρτησης $z = \varphi(x,y) = \sqrt{z^2 + y^2}$ που δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

HY-111 (Φροντιστήριο) ① 2/4/2015

$\boxed{\text{SOS Ακρότατα!!!}}$

Άσκηση 6 Φυλλάδιο 7

γ) $f(x,y) = (x-1)^4 + (x-y)^4$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 4(x-1)^3 + 4(x-y)^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -4(x-y)^3 \end{aligned}\right\}$$

Σύστημα $4(x-1)^3 + 4(x-y)^3 = 0$

(+) $-4(x-y)^3 = 0$

$4(x-1)^3 = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

Άρα $-4(1-y)^3 = 0$

$\boxed{y=1}$

· $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 0$ διότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12(x-1)^2 + 12(x-y)^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 0$

· $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 0$

$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ άρα

$\det(Hf(1,1)) = 0$

ειδική περίπτωση

· Αφού $f(x,y) \geq 0$, για κάθε $x,y \in R^2$ και $f(1,1) = (0,0)$, τότε $f(x,y) \geq f(1,1)$ άρα το $(1,1)$ είναι ολικό ελάχιστο.

HY-111 (Φροντιστήριο)

Άσκηση 7 Φυλλάδιο 7

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z$

$$\left.\begin{aligned} 2x+y&=0 \\ 2y+x&=0 \\ 2z&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x+y&=0 \\ x&=-2y \\ z&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{x=y=z=0}$$

· Κρίσιμο σημείο το $(0,0,0)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,0) &= 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,0) &= 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0,0,0) &= 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0,0) &= 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0,0,0) &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0,0,0) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det Hf(0,0,0) = 6 > 0$

$\Rightarrow$ Θεωρούμε διάνυσμα $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ τότε:

$$\langle v, Hf(0,0,0) \cdot v \rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2v_1 + v_2 \\ v_1 + 2v_2 \\ 2v_3 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= v_1(2v_1+v_2) + v_2(v_1+2v_2) + v_3(2v_3) =$$
$$= 2v_1^2 + v_1 \cdot v_2 + v_1 \cdot v_2 + 2v_2^2 + 2v_3^2 =$$
$$= v_1^2 + (v_1+v_2)^2 + v_2^2 + 2v_3^2 > 0 \quad \text{, για κάθε } v \neq 0$$

Άρα ο $Hf(0,0,0)$ είναι θετικά ορισμένος άρα η f παίρνει τοπικά γνήσια ελάχιστη τιμή (τοπικό) στο $(0,0,0)$. Επειδή η f δεν έχει άλλο κρίσιμο σημείο είναι ολικό ελάχιστο.

Άσκηση 8 Φυλλάδιο 7

· $f(x,y) = \frac{1}{xy}$, $x \cdot y \neq 0$. σημεία πλησιέστερα στο $(0,0,0)$;

· Η απόσταση του $(x, y, \frac{1}{xy})$ από το $(0,0,0)$ είναι:

$$g(x,y) = \left(\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + \left(\frac{1}{xy} - 0\right)^2}\right)^2 = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 y^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cdot\ \frac{\partial g}{\partial x} &= 2x - \frac{2}{x^3} \cdot \frac{1}{y^2} \\ \cdot\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 2y - \frac{2}{y^3} \cdot \frac{1}{x^2} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 2x - \frac{2}{y^2} \cdot \frac{1}{x^3} &= 0 \\ 2y - \frac{2}{x^2} \cdot \frac{1}{y^3} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x^4 \cdot y^2 - 2 &= 0 \\ 2y^4 \cdot x^2 - 2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^4 \cdot y^2 - 1 &= 0 \\ y^4 \cdot x^2 - 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (x^2 \cdot y - 1)(x^2 \cdot y + 1) &= 0 \\ (y^2 \cdot x - 1)(y^2 \cdot x + 1) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x^2 \cdot y - 1 &= 0 \\ xy^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \ ① \text{ ή } \begin{aligned} x^2 y - 1 &= 0 \\ xy^2 + 1 &= 0 \end{aligned} \ ②$$

$$\begin{aligned} x^2 y + 1 &= 0 \\ &[illegible] \end{aligned} \ ③ \text{ ή } \begin{aligned} x^2 y + 1 &= 0 \\ xy^2 + 1 &= 0 \end{aligned} \ ④$$

HY-111 (Φροντιστήριο)

(1): $\begin{cases} x^2y-1=0 \\ xy^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1/x^2 \\ y^2=1/x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1/x^4 \\ x^4=x \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y=1/x^2 \\ x(x^3-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1/x^2 \\ x=0 \text{ απορρίπτεται}, \ x=1 \end{cases}$ $\rightarrow$ $y=1$

(2): $\left.\begin{matrix} x^2\cdot y-1=0 \\ x\cdot y^2+1=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=1/x^2 \\ y^2=-1/x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=1/x^2 \\ x^4=-x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=1/x^2 \\ x(x^3+1)=0 \end{matrix}\right\}$

$y=1 \leftarrow x=-1$

$\boxed{x=0 \text{ απορρ.}}$

(3): ... ομοίως: $x=1$, $y=-1$

(4): ... ομοίως: $x=-1$, $y=-1$

Θέλουμε: $Hg(1,1)$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1)=8, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,1)=8, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1,1)=4$$

Άρα $Hg(1,1)=\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $\det(Hg(1,1))=48>0$

αφου $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1)=8>0$ το $(1,1,1)$ βρίσκεται

εγγύτερα στο $(0,0,0)$ όμοια και τα $(-1,1,-1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,-1,1)$

ΗΥ-111 ① 20/4/2015

ΛΕΙΕΣ ΥΠΕΡΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

<u>Ορισμός</u>: Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ λέγεται <u>λεία υπερεπιφάνεια</u>. Αν για κάθε $x \in S$ υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $U \in \mathbb{R}^{n+1}$ με $x \in U \cap S$ ώστε το $U \cap S$ να είναι το γράφημα κάποιας C^∞ συνάρτηση, n-μεταβλητών.

<u>Ερώτημα</u>: Αν $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο και $h: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Για $c \in \mathbb{R}$, πότε το

$h^{-1}(c) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in A : h(x_1, \dots, x_{n+1}) = c\}$ είναι λεία υπερεπιφάνεια; ☆☆☆

Το $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in A$ είναι κρίσιμο σημείο της h όταν

$$Dh(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0 \iff \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \dots = \frac{\partial h}{\partial x_{n+1}}(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$$

☆☆☆

$$\boxed{\text{Το } h^{-1}(c) \text{ λέγεται σύνολο στάθμης της τιμής } c \text{ για την } h}$$

$\boxed{\text{☆ Αν το } c \text{ δεν είναι κανονική τιμή της } h \text{ τότε λέγεται κρίσιμο σημείο της } h}$

Το $c \in \mathbb{R}$ λέγεται <u>κανονική τιμή</u> της h αν το $h^{-1}(c)$ δεν περιέχει κρίσιμα σημεία της h, δηλαδή αν ☆

$Dh(x_1, \dots, x_{n+1}) \neq 0$ για κάθε $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in h^{-1}(c)$

HY-111

<u>Αναδιατύπωση του θεωρήματος των πεπλεγμένων συναρτήσεων</u>
(ειδική μορφή). Αν $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ένα ανοιχτό σύνολο, $h: A \to \mathbb{R}$ μια C^∞ συνάρτηση και $c \in \mathbb{R}$ μια κανονική τιμή της h, τότε το $h^{-1}(c)$ είναι λεία υπερεπιφάνεια.

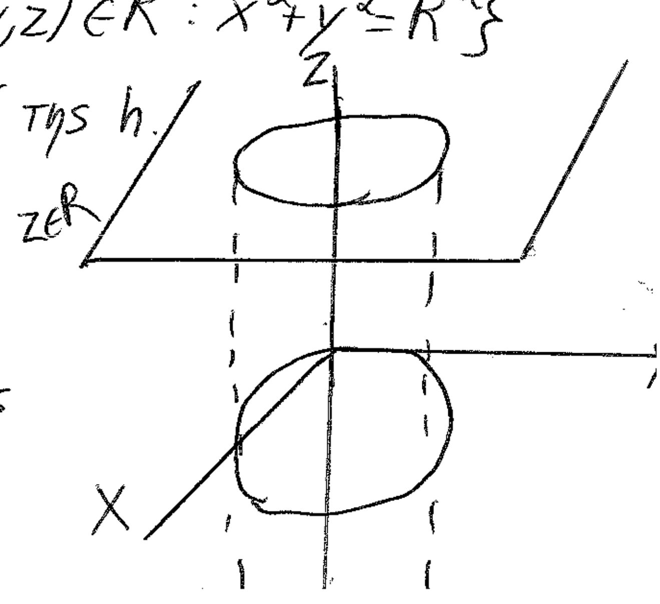
<u>Παραδείγματα</u> 1) Το $R>0$ είναι κανονική τιμή της $h: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ με $h(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2$ γιατί η h έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο το $(0,0,\dots,0)$.
Άρα το $S_R^n = h^{-1}(R^2) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = R^2\}$ είναι λεία υπερεπιφάνεια (n-σφαίρα με ακτίνα $R>0$ και κέντρο το $(0,0,\dots,0)$)

2) Έστω $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $h(x,y,z) = x^2 + y^2$. Εδώ έχουμε

$$Dh(x,y,z) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 0)$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία της h είναι τα $(0,0,\ )$, $z \in \mathbb{R}$
Για $R>0$ έχουμε $h^{-1}(R^2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\}$
οπότε το R^2 είναι κανονική τιμή της h.

και το $h^{-1}(R^2)$ είναι λεία (υπερ.) επιφάνεια. Το $h^{-1}(R^2)$ είναι ο ορθός κυκλικός κύλινδρος με ακτίνα βάσης $R>0$.



ΗΥ-111 ② 20/4/2015

3) Έστω $h: R^3 \to R$ με $h(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$, που είναι C^∞ και $Dh(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)$. Άρα μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0,0,0)$. Άρα το $0 \in R$ είναι κρίσιμη τιμή της h και το $h^{-1}(0) = \{(x,y,z) \in R^2 : x^2+y^2-z^2=0\}$ είναι ο κώνος, που δεν είναι λεία επιφάνεια.
Κάθε $c \neq 0$ είναι κανονική τιμή της h και το $h^{-1}(c)$ είναι λεία επιφάνεια. Εδώ $h^{-1}(c) = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2+y^2-z^2=c\}$

Αν $g: X \to R$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση στο ανοιχτό σύνολο $X \subset R^n$ και το $a = (a_1, \dots, a_n) \in X$, το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο του γραφήματος της g στο $(a_1, \dots, a_n, g(a_1, \dots, a_n))$ έχει εξίσωση $x_{n+1} - g(a_1, \dots, a_n) =$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n)(x_i - a_i)$$

Το $\operatorname{Im} Dg(a_1, \dots, a_n)$ έχει εξίσωση $y_{n+1} =$
$$= \sum \frac{\partial g}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) y_i = Dg(a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Το γράφημα της g είναι το σύνολο
$$\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in R^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in X \text{ και } x_{n+1} = g(x_1, \dots, x_n)\} =$$

$= \{(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)) \in R^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in X\}$

$= \Phi(X)$ όπου $\varphi : X \to R^{n+1}$ είναι η διαφορίσιμη συνάρτηση,

$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n))$

Έχουμε

$$D\varphi(a_1, \dots, a_n) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{\text{στο } (a_1, \dots, a_n)}$$

και $\operatorname{Im} D\varphi(a_1, \dots, a_n) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \in R^{n+1} : \right.$

$\left. D\varphi(a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \text{ για κάποιο } \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in R^n \right\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \in R^{n+1} \text{ υπάρχουν } \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in R^n \text{ ώστε} \right.$

$\left. \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) \cdot z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \right\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \in R^{n+1} : y_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) y_i \right\}$$

Άρα το εφαπτομένο υπερεπίπεδο του γραφήματος της g στο $(a_1, \ldots, a_n, g(a_1, \ldots, a_n))$ ταυτίζεται με Το $\operatorname{Im} D\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ μεταφερόμενο κατά το διάνυσμα $(a_1, \ldots, a_n, g(a_1, \ldots, a_n))$

Έστω ότι $h: A \to R$ μια C^∞ συνάρτηση, $A \subset R^{n+1}$ ανοιχτό και $c \in R$ μια κανονική τιμή της h και $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in h^{-1}(c)$, δηλαδή $h(a_1, \ldots, a_{n+1}) = c$. Υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset R^{n+1}$ ώστε $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in U$ και το $U \cap h^{-1}(c)$ να είναι το γράφημα κάποιας C^∞ συνάρτησης $g: X \to R$ δηλαδή $U \cap h^{-1}(c) = \{(x_1, \ldots, x_n, g(x_1, \ldots, x_n)) \in R^{n+1} : (x_1, \ldots, x_n) \in X\}$, $X \subset R^n$ ανοιχτό (όταν $\frac{\partial h}{\partial x_{n+1}}(a_1, \ldots, a_{n+1}) \neq 0$).

Άρα $h(\varphi(x_1, \ldots, x_n)) = c$ για κάθε $(x_1, \ldots, x_n) \in X$ όπου όπως προηγουμένως $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, g(x_1, \ldots, x_n))$.

ΗΥ-111

Ειδικά $\varphi(a_1,\dots,a_n)=a_{n+1}$ και παραγωγίζοντας απ' τον κανόνα της αλυσίδας βρίσκουμε $0=Dh(\varphi(a_1,\dots,a_n))$.

$D\varphi(a_1,\dots,a_n)_v = Dh(a_1,\dots,a_{n+1})\cdot D\varphi(a_1,\dots,a_n)_v=0$
για κάθε $v\in R^n$

$\Leftrightarrow \operatorname{Im} D\varphi(a,\dots,a_n)\leq \operatorname{Ker} Dh(a_1,\dots,a_{n+1}):|$
$Dh(a_1,\dots,a_{n+1}):R^{n+1}\to R$

Επειδή $Dh(a_1,\dots,a_n)\neq 0 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} h(a_1,\dots,a_{n+1})=n$.

Άρα $\operatorname{Im} D\varphi(a_1,\dots,a_n)=\operatorname{Ker} Dh(a_1,\dots,a_{n+1})=$
$\{u\in R^{n+1}: Dh(a_1,\dots,a_{n+1})\cdot u=0\}=\{a\in R^{n+1}$
$:\langle\nabla h(a_1,\dots,a_{n+1}),u\rangle=0\}=$

$=$ υπερεπίπεδο κάθετο στο $\nabla h(a_1,\dots,a_n)$

ΗΥ-111 ④ 20/4/2015

Ορισμός: Αν το $c \in R$ είναι κανονική τιμή της h, τότε το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο T_aS της υπερεπιφάνειας στάθμης $S = h^{-1}(c)$ στο σημείο $a = (a_1, \ldots, a_{n+1})$ είναι το κάθετο στο $\nabla h(a_1, \ldots, a_{n+1})$ που περνάει απ'το $(a_1, \ldots, a_{n+1})$

Παράδειγμα: Η $S^n = h^{-1}(1) = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in R^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$

δηλαδή: $h(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2$, στο σημείο $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in S^n$ έχει εφαπτόμενο υπερεπίπεδο εξίσωσης:

$$T_a S^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in R^{n+1} : \left\langle \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_n - a_{n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \\ \vdots \\ 2a_{n+1} \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in R^{n+1} : a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_{n+1} \cdot x_{n+1} = 1 \right\} =$$

$$\vdots$$

= Το κάθετο στο $a = (a_1, \ldots, a_{n+1})$ που διέρχεται απ'το $a = (a_1, \ldots, a_{n+1})$.

ΗΥ-111 ① 21/4/2015

<u>Πρόβλημα</u>: Να βρεθούν τα ακρότατα της ποσότητας $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ όταν οι μεταβλητές μας ικανοποιούν την συνθήκη (= περιορισμό) $h(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = c$

<u>Θεώρημα (Lagrange)</u>: Έστω $A \subset R^{n+1}$ ένα ανοιχτό σύνολο και $c \in R$ μια κανονική τιμή της C^{∞} συνάρτησης $h : A \to R$, (οπότε το $S = h^{-1}(c)$ είναι λεία υπερεπιφάνεια στο R^{n+1}). Αν $f : A \to R$ είναι μια C^1 συνάρτηση και η $f|_S$ έχει τοπικό ακρότατο στο $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) \in S$ (δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x) \leqq f(a)$ για κάθε $x \in S \cap D(a, \delta)$ ή $f(x) \geqq f(a)$ για κάθε $x \in S \cap D(a, \delta)$), τότε το $\nabla f(a)$ είναι συγγραμμικό του $\nabla h(a)$ δηλαδή υπάρχει $\lambda \in R$ ώστε $\nabla f(a) = \lambda \nabla h(a)$.

Με άλλα λόγια τα ακρότατα της $f|_S$ είναι λύσεις του συστήματος εξισώσεων

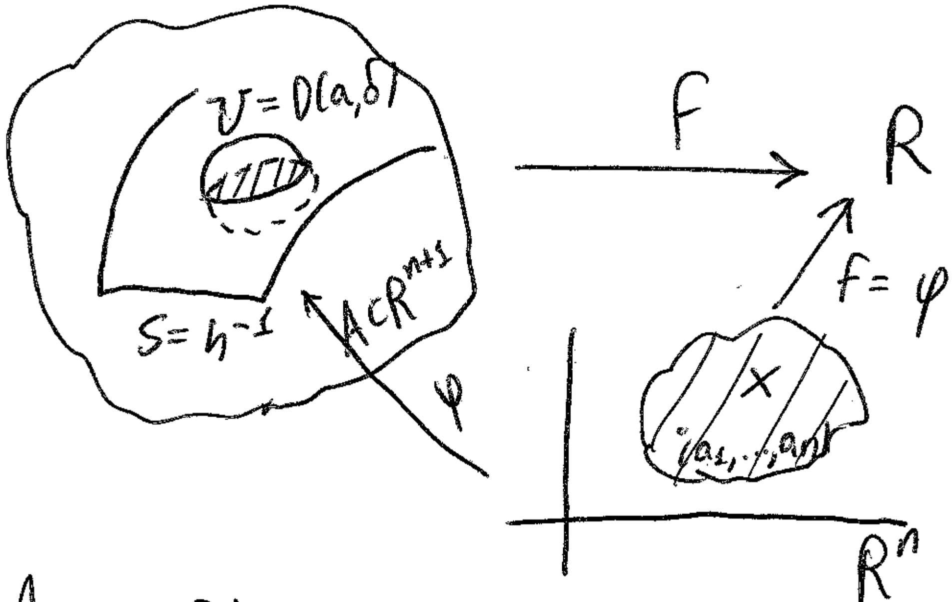
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lambda \frac{\partial h}{\partial x_i}(a), \quad 1 \leqq i \leqq n+1$$

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = c$$

<u>Το λ λέγεται πολλαπλασιαστής Lagrange</u>

ΗΥ-111

<u>Απόδειξη</u> Επειδή το c είναι κανονική τιμή της h και $a \in h^{-1}(c) = S$ υπάρχει ανοιχτό σύνολο $U \subset R^{n+1}$ με $a \in U$ ώστε το $U \cap S$ να είναι το γράφημα μιας C^{∞} συνάρτησης $g : X \to R$, όπου $X \subset R^n$ είναι ανοιχτό.
Δηλαδή $U \cap S = \varphi(X)$, όπου $\varphi : X \to R^{n+1}$ είναι η $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n))$ (όταν $\frac{\partial h}{\partial x_{n+1}}(a) \neq 0$).



Αν η $f|_S$ έχει τοπικό ακρότατο στο $a = (a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = (a_1, \dots, a_n, g(a_1, \dots, a_n))$ τότε η $f \circ \varphi : X \to R$ έχει τοπικό ακρότατο στο $(a_1, \dots, a_n)$

Άρα $0 = D(f \circ \varphi)(a_1, \dots, a_n) = Df(\varphi(a_1, \dots, a_n)) \cdot D\varphi(a_1, \dots, a_n) = Df(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \cdot D\varphi(a_1, \dots, a_n)$

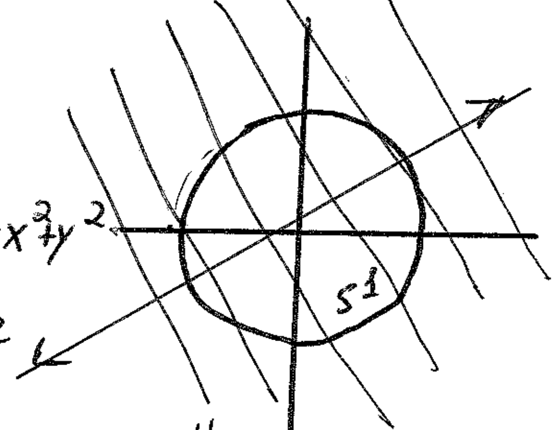
HY-111 ② 21/4/2015

Το κάθετο υπερεπίπεδο στο $\nabla h(a) = T_aS = \operatorname{Im} D\varphi(a_1,\dots,a_n) \subseteq$

$\operatorname{Ker} \nabla h(a) \subseteq \operatorname{Ker} Df(a_1,\dots,a_n,a_{n+1})$ (= το κάθετο υπερεπίπεδο στο $\nabla f(a)$),

Αφού $\dim T_aS = n \Rightarrow$ τα $\nabla f(a), \nabla h(a)$ είναι συγγραμμικά $T = f^{-1}\{a\}$

<u>Παράδειγμα 1)</u> Θέλουμε να βρούμε τα ακρότατα της ποσότητας $4x+3y$ υπό τη συνθήκη $x^2+y^2=1$, δηλαδή θέλουμε τα $\max(f|s^1)$, $\min(f|s^1)$, όπου $f(x,y)=4x+3y$ και $S^1 = h^{-1}(1)$, όπου $h(x,y)=x^2+y^2$.



$a = 4x+3y$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Lagrange οι λύσεις του προβλήματος είναι λύσεις του συστήματος.

$\nabla h\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

$\nabla F\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 4 &= 2\lambda x \\ 3 &= 2\lambda y \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{2}{\lambda} \\ y &= \frac{3}{2\lambda} \end{aligned}$$

$$x^2+y^2=1 \quad \frac{4}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \frac{25}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 5$$

Για $\lambda = \frac{5}{2}$ έχουμε τη λύση $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{3}{5}$

και για $\lambda = -\frac{5}{2}$ έχουμε $x = \frac{-4}{5}$, $y = \frac{-3}{5}$

Επειδή $\underbrace{f\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)}_{\text{μέγιστη τιμή}} = 5 > -5 = \underbrace{f\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)}_{\text{ελάχιστη τιμή}}$

ΗΥ-111

2) Θέλουμε την ελάχιστη τιμή της $f(x,y,z) = -2xy + 2yz + 2xz$ πάνω στη σφαίρα $S^2 = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 = h^{-1}(1,$

Αυτή υλοποιείται σε λύση του συστήματος

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \lambda \frac{\partial h}{\partial z} \\ h(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2=1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} -\cancel{2}y+\cancel{2}z &= \cancel{2}\lambda x \\ -\cancel{2}x+\cancel{2}z &= \cancel{2}\lambda y \\ \cancel{2}y+\cancel{2}x &= \cancel{2}\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 &= 1 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} \lambda x + y - z &= 0 \\ x + \lambda y - z &= 0 \\ x + y - \lambda z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= 1 \end{aligned} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} (\lambda-1)(x-y) &= 0 \\ (\lambda-1)(y+z) &= 0 \\ x+y-\lambda z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= 1 \end{aligned}$$

Έχουμε τώρα δύο περιπτώσεις

1) $\lambda=1$, οπότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} x+y-z=0 &\Rightarrow z=x+y \\ x^2+y^2+z^2&=1 \end{aligned}$$

Σ'αυτή τη περίπτωση η τιμή είναι

$$f(x,y,z) = -2xy + 2y(x+y) + 2(x+y)x$$

$$= 2y^2+2z^2+2xy = y^2+x^2+(x+y$$

ΗΥ-111 ③ 21/4/2015

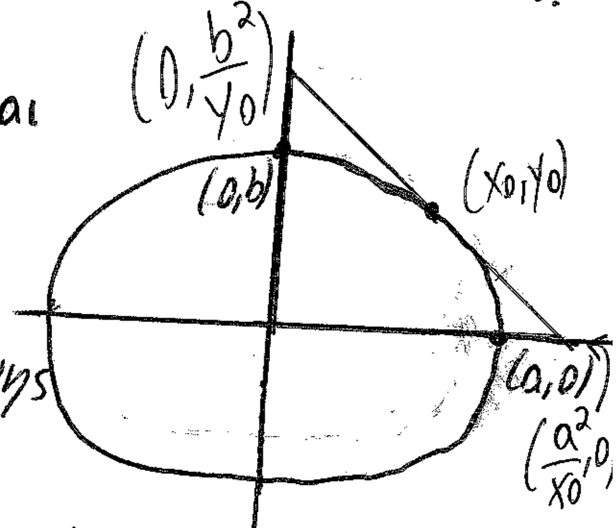
2) $\lambda \neq 1$. Τότε $x=y=-z$ και αντικαθιστώνται στην τελευταία $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ οπότε $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Άρα έχουμε δύο λύσεις, τις $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Έχουμε $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)=f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-2<1$

Συμπέρασμα η ελάχιστη τιμή της $f|_{S^2}$ είναι το -2.

3) <u>Πρόβλημα:</u> Έστω $a>0, b>0$ και

$$S=\left\{(x,y)\in R^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$$



Να βρεθούν τα σημεία της έλλειψης S στα οποία η εφαπτομένη της και οι άξονες σχηματίζουν ένα (ορθογώνιο) τρίγωνο με το ελάχιστο δυνατό εμβαδόν

<u>Λύση</u> $S=h^{-1}(1)$, όπου $h(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$. Αφού $Dh(x,y)=\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2}\right)$ το $1\in R$ είναι κανονική τιμή της h και το S είναι λεία υπερεπιφάνεια στο R^2

Συνεπώς η εφαπτόμενη στο $(x_0,y_0)\in S$ της S, είναι η ευθεία που περνάει απ' το (x_0,y_0)

HY-111

και είναι κάθετη στο $\nabla h(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2x_0/a^2 \\ 2y_0/b^2 \end{pmatrix}$. Άρα έχει εξίσωση $\left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x_0/a^2 \\ 2x_0/b^2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2x \cdot x_0}{a^2} - \frac{2x_0^2}{a^2} + \frac{2y \cdot y_0}{b^2} - \frac{2y_0^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 0}$$

Η εφαπτομένη έχει σημεία τομής με τον άξονα $\left(\frac{a^2}{x_0}, 0\right)$ και $\left(0, \frac{b^2}{y_0}\right)$. Το εμβαδόν του τριγώνου που μας ενδιαφέρει είναι $f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\frac{a^2 \cdot b^2}{|x_0 \cdot y_0|}$

Οι λύσεις του προβλήματος περιέχονται στις λύσεις του συστήματος

$$\frac{a^2b^2}{2y}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2\lambda x}{a^2}$$

$$\frac{a^2 \cdot b^2}{2x}\left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{2\lambda y}{b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot x y^2}{a^2 \cdot b^2 \cdot x^2 \cdot y} = \frac{\frac{a^2 b^2}{x^2 \cdot y}}{\frac{a^2 b^2}{x y^2}} = \frac{x b^2}{y a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{x b^2}{y a^2} \Rightarrow y^2 \cdot a^2 = x^2 \cdot b^2 \Rightarrow$$

$$y^2 = x^2\left(\frac{b^2}{a^2}\right)$$

Αντικαθιστόντας στην τελευταία εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \cdot x^2\left(\frac{b^2}{a^2}\right) = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

Οι 4 λύσεις είναι: $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{-b}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-a}{\sqrt{2}}, \frac{-b}{\sqrt{2}}\right)$