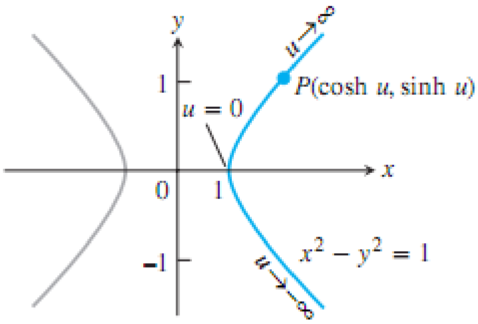
Χειμερινό Εξάμηνο
Ακαδημαϊκό Έτος 2009-2010

Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-110 Απειροστικός Λογισμός Ι
Διδάσκων: Θ. Μουχτάρης
Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Άκσηση 1η: Γιατί «υπερβολικές συναρτήσεις»

Αν διερωτάστε για την προέλευση του όρου υπερβολικό που χρησιμοποιούμε ιδού η απάντηση: Ακριβώς όπως μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τις συναρτήσεις $x = \cos u$ και $y = \sin u$ σε σημεία (x, y) του μοναδιαίου κύκλου, έτσι και οι συναρτήσεις $x = \cosh u$ και $y = \sinh u$ αντιστοιχίζονται σε σημεία (x, y) του δεξιού κλάδου της μοναδιαίας υπερβολής, $x^2 - y^2 = 1$ (σχήμα 1).



Σχήμα 1

Άλλη μία αναλογία μεταξύ υπερβολικών και κυκλικών συναρτήσεων είναι ότι η μεταβλητή u στις συντεταγμένες $(\cosh u, \sinh u)$ των σημείων του δεξιού κλάδου της υπερβολής $x^2 - y^2 = 1$ ισούται με το διπλάσιο εμβαδόν του τομέα AOP που απεικονίζεται στο σχήμα 2. Για να καταστεί αυτό προφανές, εκτελέστε τα παρακάτω:

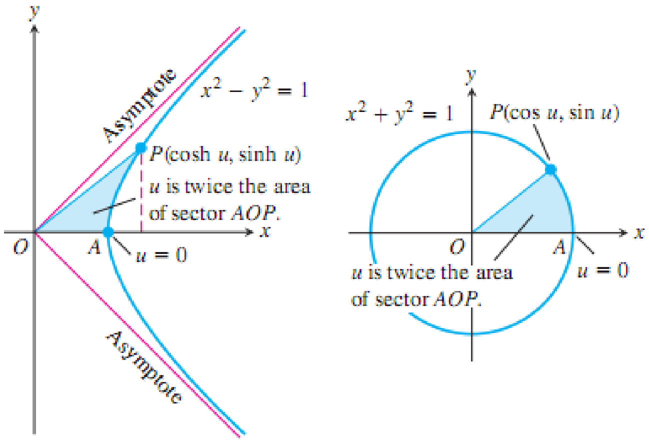
(α) Δείξτε ότι το εμβαδόν $A(u)$ του τομέα AOP ισούται με

$$A(u) = \frac{1}{2}\cosh u \sinh u - \int_1^{\cosh u} \sqrt{x^2 - 1}dx$$

(β) Παραγωγίστε κάθε μέλος της εξίσωσης του ερωτήματος (α) ως προς u για να δείξετε ότι

$$A'(u) = \frac{1}{2}$$

(γ) Λύστε την τελευταί αυτή εξίσωση ως προς A(u). Ποια είναι η τιμή του A(0); Ποια τιμή έχει η σταθερά ολοκλήρωσης C στη λύση σας; Έχοντας προσδιορίσει το C, ποια σχέση μεταξύ των u και A(u) αναδεικνύει η λύση που βρίκατε;



Σχήμα 2

Άσκηση 2η : Ολοκληρώματα με … απαιτήσεις

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των ερωτημάτων 1-10.

1. $\int (\sin^{-1} x^{-1})^2 dx$
2. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+m)}$
3. $\int x \sin^{-1} x \, dx$
4. $\int \sin^{-1} \sqrt{y} \, dy$
5. $\int \frac{dx}{1-\tan^2 x}$
6. $\int \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) dx$
7. $\int \frac{dt}{t-\sqrt{1-t^2}}$
8. $\int \frac{(2e^{2x}-e^x)dx}{\sqrt{3e^{2x}-6e^x-1}}$
9. $\int \frac{dx}{x^4+4}$
10. $\int \frac{dx}{x^6-1}$

Άσκηση 3η: Εύρεση Όγκων

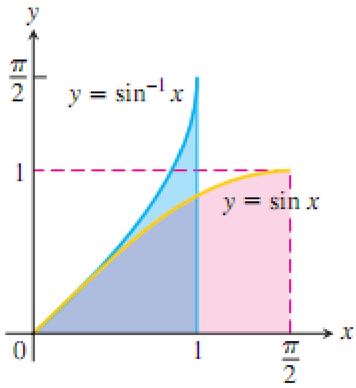
Να βρεθούν οι όγκοι των στερεών εκ περιστροφής που περιγράφονται παρακάτω:

1. Το χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που περικλείεται από τον άξονα x και την καμπύλη $y = 3x\sqrt{1-x}$ περιστρέφεται ως προς τον άξονα y.
2. Το χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που περικλείεται από τον άξονα x, την καμπύλη $y = 5/(x\sqrt{5-x})$ και τις ευθείες x=1 και x=4 περιστρέφεται ως προς τον άξονα x.
3. Το χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που περικλείεται από τους άξονες συντεταγμένων , την καμπύλη $y = e^x$ και την ευθεία x=1 περιστρέφεται ως προς τον άξονα y.

Άσκηση 4η: Μία απρόσμενη ισότητα

Χρησιμοποιήστε το σχήμα 3 για να δείξετε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \sin^{-1} x \, dx$$



Σχήμα 3.

Άσκηση 5η: Παράγωγος Ολοκληρώματος

Βρείτε το $f'(2)$ εάν

$$f(x) = e^{-g(x)}$$

και

$$g(x) = \int_2^x \frac{t}{1+t^4} dt$$

Άκσηση 6η: Όρια

Βρείτε τα όρια στα ερωτήματα 1-6

1. $\lim_{b \to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \tan^{-1} t \, dt$
3. $\lim_{x \to 0^+} \left(\cos \sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
4. $\lim_{x \to \infty} (x + e^x)^{\frac{2}{x}}$
5. $\lim_{x \to \infty} \int_{-x}^{x} \sin t \, dt$
6. $\lim_{x \to 0^+} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt$