

HY-180 - Λογική
Διδάσκων: Δ. Πλεξουσάκης
Εαρινό Εξάμηνο 2014 - 2015

Φροντιστήριο 4
Τετάρτη 19 Μαρτίου 2015
Δήμητρα Ζωγραφιστού

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αποδείξτε με χρήση της μορφολογικής παραγωγής την εγκυρότητα των ακόλουθων εξαγωγών συμπερασμάτων ή θεωρημάτων:

A) $\{ \neg P \} / \neg(P \wedge Q)$

B) $/(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$ (Θεώρημα)

Γ) $\{ P \rightarrow Q \vee R, Q \rightarrow S, R \rightarrow S \} / P \rightarrow S$

Δ) $\{ P \rightarrow Q, R \vee S, P \wedge S \rightarrow U, R \rightarrow \neg(Q \wedge T) \} / P \wedge (\neg T \rightarrow U) \rightarrow U$

E) $/(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$ (Θεώρημα)

A) $\{ \neg P \} / \neg(P \wedge Q)$

(1) $\neg P$ (Υπόθεση)

(2) Υποπαραγωγή

(2.1) $P \wedge Q$ (Υπόθεση Υποπαραγωγής)

(2.2) P (Από (2.1) με απαλοιφή \wedge)

(2.3) $\neg P$ (Από (1) με επανάληψη)

(3) $\neg(P \wedge Q)$

B) $/(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

(1) Υποπαραγωγή

(1.1) $Q \rightarrow R$ (Υπόθεση Υποπαραγωγής)

(1.2) Υποπαραγωγή

(1.2.1) $P \rightarrow Q$ (Υπόθεση Υποπαραγωγής)

(1.2.2) Υποπαραγωγή

(1.2.2.1) P (Υπόθεση Υποπαραγωγής)

(1.2.2.2) $P \rightarrow Q$ (Από (1.2.1) με επανάληψη)

(1.2.2.3) Q (Από (1.2.2.1), (1.2.2.2) με απαλοιφή \rightarrow)

(1.2.2.4) $Q \rightarrow R$ (Από (1.1) με επανάληψη)

(1.2.2.5) R (Από (1.2.3), (1.2.4) με απαλοιφή \rightarrow)

(1.2.3) $P \rightarrow R$ (Από (1.2.2) με εισαγωγή \rightarrow)

(1.3) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$ (Από (1.2) με εισαγωγή \rightarrow)

(2) $(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

Γ) { $P \rightarrow Q \vee R, Q \rightarrow S, R \rightarrow S$ } / $P \rightarrow S$

- (1) $P \rightarrow Q \vee R$ (Υπόθεση Παραγωγής)
- (2) $Q \rightarrow S$ (Υπόθεση Παραγωγής)
- (3) $R \rightarrow S$ (Υπόθεση Παραγωγής)
- (4) Υποπαραγωγή
 - (4.1) P (Υπόθεση Υποπαραγωγής)
 - (4.2) $P \rightarrow Q \vee R$ (Από (1) με επανάληψη)
 - (4.3) $Q \vee R$ (Από (4.1), (4.2) με απαλοιφή \rightarrow)
 - (4.4) Υποπαραγωγή
 - (4.4.1) Q (Υπόθεση Υποπαραγωγής)
 - (4.4.2) $Q \rightarrow S$ (Από (2) με επανάληψη)
 - (4.4.3) S (Από (4.4.1), (4.4.2) με απαλοιφή \rightarrow)
 - (4.5) Υποπαραγωγή
 - (4.5.1) R (Υπόθεση Υποπαραγωγής)
 - (4.5.2) $R \rightarrow S$ (Από (3) με επανάληψη)
 - (4.5.3) S (Από (4.5.1), (4.5.2) με απαλοιφή \rightarrow)
 - (4.6) S (Από (4.3), (4.4), (4.5) με απαλοιφή \vee)
- (5) $P \rightarrow S$ (Από (4) με εισαγωγή \rightarrow)

Δ) { $P \rightarrow Q, R \vee S, P \wedge S \rightarrow U, R \rightarrow \neg (Q \wedge T)$ } / $P \wedge (\neg T \rightarrow U) \rightarrow U$

- (1) $P \rightarrow Q$ (Υπόθεση)
- (2) $R \vee S$ (Υπόθεση)
- (3) $P \wedge S \rightarrow U$ (Υπόθεση)
- (4) $R \rightarrow \neg (Q \wedge T)$ (Υπόθεση)
- (5) Υποπαραγωγή
 - (5.1) $P \wedge (\neg T \rightarrow U)$ (Υπόθεση Υποπαραγωγής)
 - (5.2) P (Από 5.1 με απαλοιφή \wedge)
 - (5.3) $\neg T \rightarrow U$ (Από 5.1 με απαλοιφή \wedge)
 - (5.4) $P \rightarrow Q$ (Από (1) με Επανάληψη)
 - (5.5) Q ((5.2) (5.4) με απαλοιφή \wedge)
 - (5.6) $R \vee S$ (Από (2) με επανάληψη)
 - (5.7) Υποπαραγωγή
 - (5.7.1) R (Υπόθεση Υποπαραγωγής)
 - (5.7.2) $R \rightarrow \neg (Q \wedge T)$ (Από (4) με επανάληψη)
 - (5.7.3) $\neg (Q \wedge T)$ (Από (5.7.1), (5.7.2) με απαλοιφή \rightarrow)
 - (5.7.4) Υποπαραγωγή
 - (5.7.4.1) T (Υπόθεση Υποπαραγωγής)
 - (5.7.4.2) Q (Από (5.5) με επανάληψη)
 - (5.7.4.3) $Q \wedge T$ (Από (5.7.4.1), (5.7.4.2) με εισαγωγή \wedge)
 - (5.7.4.4) $\neg (Q \wedge T)$ (Από (5.7.3) με επανάληψη)
 - (5.7.5) $\neg T$ (Από (5.7.4) με εισαγωγή \neg)

(5.7.6) $\neg T \rightarrow U$	(Από (5.3) με επανάληψη)
(5.7.7) U	(Από (5.7.5), (5.7.6) με απαλοιφή \rightarrow)
(5.8) Υποπαράγωγη	
(5.8.1) S	(Υπόθεση Υποπαράγωγής)
(5.8.2) P	(Από (5.2) με επανάληψη)
(5.8.3) $P \wedge S$	(Από (5.8.1), (5.8.2) με εισαγωγή \wedge)
(5.8.4) $P \wedge S \rightarrow U$	(Από (3) και επανάληψη)
(5.8.5) U	(Από (5.7.5), (5.7.6) με απαλοιφή \rightarrow)
(5.9) U	(Από (5.6), (5.7), (5.8) με απαλοιφή \wedge)
(6) $P \wedge (\neg T \rightarrow U) \rightarrow U$	(Από (5) Με εισαγωγή \rightarrow)

E) $\neg(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$

- (1) $Q \vee \neg Q$ (Θεώρημα)
- (2) Υποπαράγωγη
 - (2.1) Q (Υπόθεση Υποπαράγωγής)
 - (2.2) Υποπαράγωγη
 - (2.2.1) P (Υπόθεση Υποπαράγωγής)
 - (2.2.2) Q (Από (2.1) με επανάληψη)
 - (2.3) $P \rightarrow Q$ (Εισαγωγή συνεπαγωγής)
 - (2.4) $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$ (Εισαγωγή διάζευξης δεξιά)
- (3) Υποπαράγωγη
 - (3.1) $\neg Q$ (Υπόθεση Υποπαράγωγής)
 - (3.2) $\neg Q \vee P$ (Εισαγωγή διάζευξης)
 - (3.3) Υποπαράγωγη
 - (3.3.1) Q (Υπόθεση Υποπαράγωγής)
 - (3.3.2) P (Από (3.2) και απαλοιφή άρνησης 2)
 - (3.4) $Q \rightarrow P$ (Από (3.3) και εισαγωγή \rightarrow)
 - (3.5) $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$ (Εισαγωγή διάζευξης αριστερά)
- (4) $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$ (Απαλοιφή διάζευξης από (1),(2),(3))