ΗΥ-111 ① 9/2/2015

athanako@math.uoc.gr

www.math.uoc.gr/~athanako

Διανυσματικος Λογισμός

J. Marsden - A. Tromba

· Τελική Εξέταση 100%

Ο n-διάστατος Ευκλείδειος χωρίς R^n

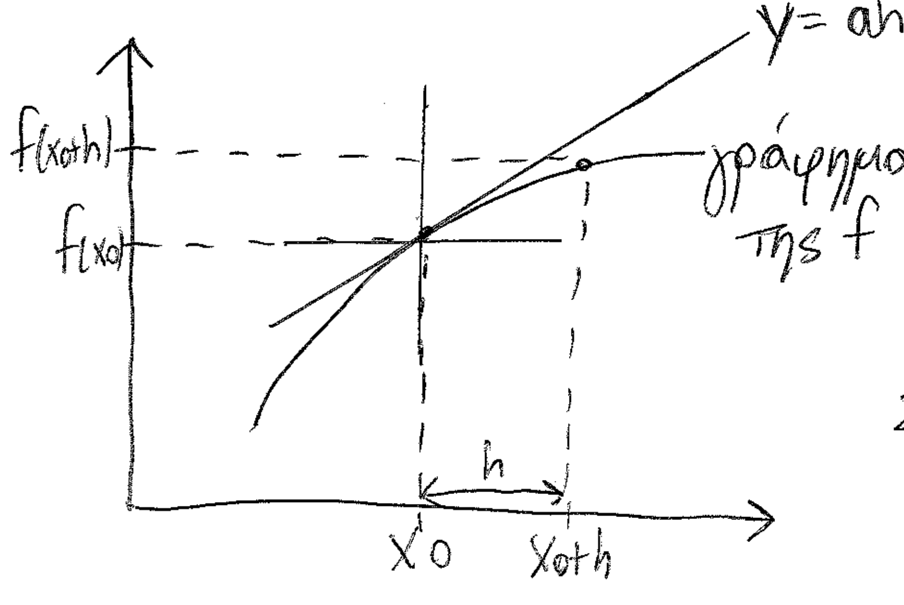
Είναι το καρτεσιανό γινόμενο

$$R^n = R \times \ldots \times R = \{ \underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{\text{διατεταγμένη } n\text{-αδα}} \mid \underbrace{x_1, \ldots x_n}_{\text{συντεταγμένες του } (x_1,\ldots,x_n)} \in R \}$$

$a<b$ Η $f\ (a,b) \to R$

έχει παράγωγο $f'(x_0)=a$ στο $x_0 \in (a,b)$ στα

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a \iff \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-a\cdot h}{h} = 0$$



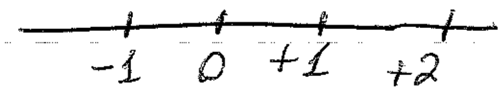
Η εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι

$z - f(x_0) = a(z - x_0)$, ($h = z_0 - x_0$)

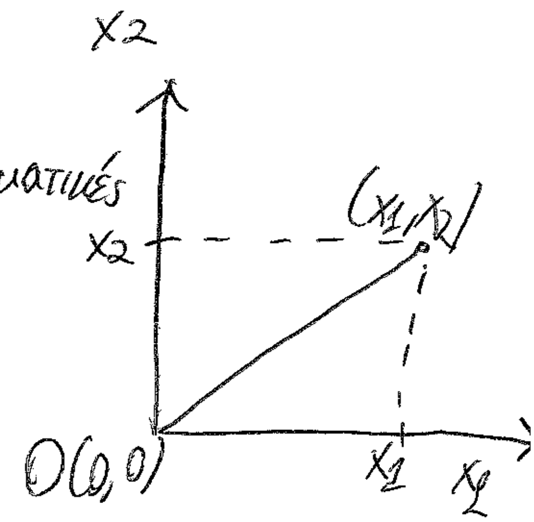
HY-111

Στο R^n ορίζεται η πρόσθεση $(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots y_n) = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$ και ο πολλαπλασιασμός επί πραγματικός αριθμός $\lambda\cdot(x_1,x_2,\dots,x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n)$

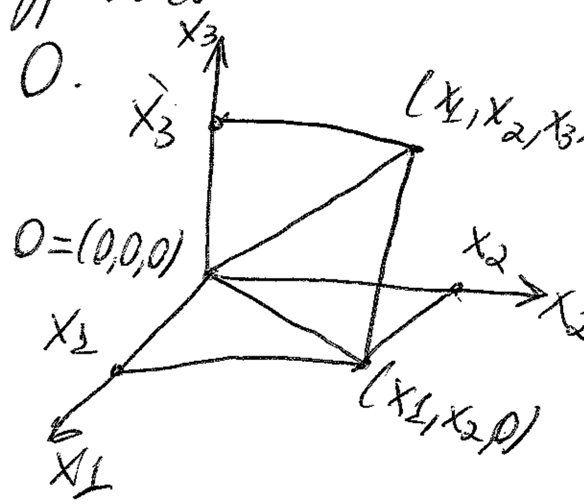
Για $n=1$ ο R παριστάνεται γεωμετρικά από μια (προσανατολισμένη) ευθεία



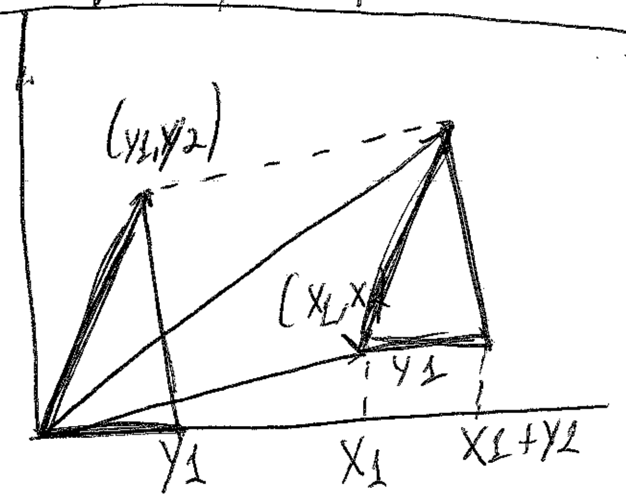
Για $n=2$ το R^2 παριστάνεται από ένα επίπεδο που παράγεται από δυο πραγματικές ευθείες με κοινή αρχή ένα σημείο O

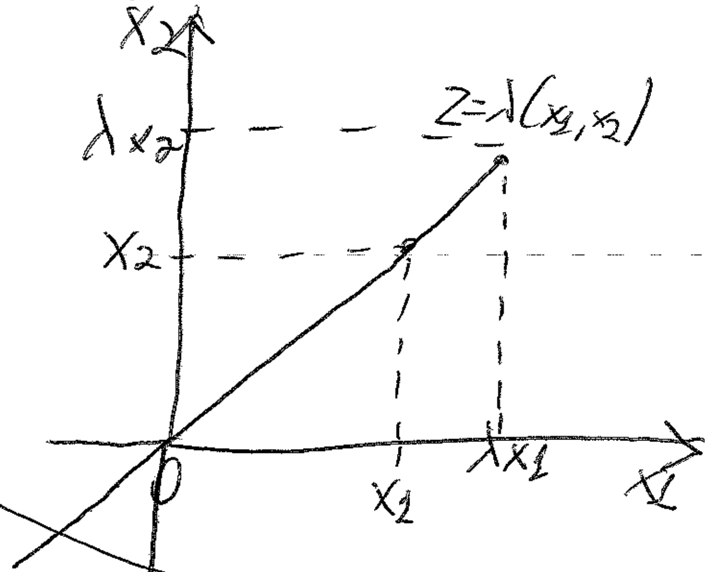


Για $n=3$ το R^3 παριστάνεται από ένα επίπεδο που παράγεται από τρεις πραγματικές ευθείες με κοινή αρχή ένα σημείο O.



Γεωμετρική παράσταση του πολλαπλασιασμού επί πραγματικό αριθμό λ είναι απλώς μια ομοιότητα με λόγο ομοιότητας λ.





Γεωμετρική παράσταση της πρόσθεσης

Το άθροισμα των $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ παίρνει γεωμετρικά τη η "συνισταμένη" των διανυσμάτων με κορυφές τα $x,y\in R^n$ $a^{\frac{1}{x}}$ τον κανόνα του παραλληλογράμμου

Ιδιότητες

1) $x+(y+z)=(x+y)+z$, $x,y,z\in R^n$

2) $x+y=y+x$

3) Υπάρχει το $0=(0,\dots,0)\in R^n$ που είναι το μοναδικό με την ιδιότητα $x+0=0+x=x$ $\forall$ $x\in R^n$

4) Για κάθε $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n$ υπάρχει το $-x=(-x_1,\dots,-x_n)\in R^n$ που είναι το μοναδικό με την ιδιότητα $x+(-x)=-x+x=0$

HY-111

5) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$, $\lambda, \mu \in R$, $x \in R^n$

6) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$, $\lambda \in R$, $x, y \in R^n$

7) $(\lambda \mu) x = \lambda(\mu x)$, $\lambda, \mu \in R$, $x \in R^n$

8) $1 \cdot k = k$, $0 \cdot k = 0$, $\forall x \in R^n$

Δηλαδή ο R^n είναι διανυσματικός χώρος

Το <u>ευκλίδιο εσωτερικό</u> γινόμενο:

Αν $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in R^n$, τότε ο πραγματικό αριθμός $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 \cdot y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$ λέγεται (ευκλείδεια) εσωτερικό γινόμενο του x, y

<u>Ιδιότητες</u>

1) $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$

$\langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$

$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle$, $\lambda \in R$

2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

3) $\langle x, x \rangle \geq 0$ και $\langle x, x \rangle = 0$ τότε και μόνον τότε όταν $x = 0 = (0, \ldots, 0)$

HY-111 ③ 9/2/2015

<u>Ορισμός</u>: Τα $x, y \in R^n$ λέγονται κάθετα όταν $\langle x, y \rangle = 0$

<u>Παράδειγμα</u> α) Τα $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $1 \leq i \leq n$ είναι κάθετα ανά δύο μεταξύ τους. i-συντεταγμένη

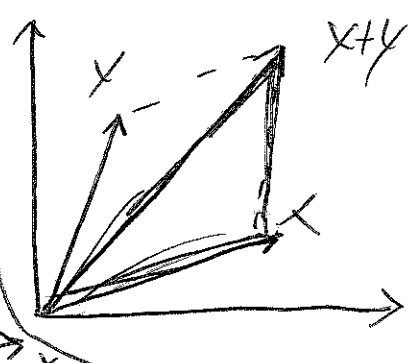
β) Αν $x = (-2, 3)$, $y = (3, 2)$ είναι κάθετα στο R^2 γιατί $\langle x, y \rangle = (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 0$

<u>Ορισμός</u>: Ο μη-αρνητικός πραγματικός αριθμός

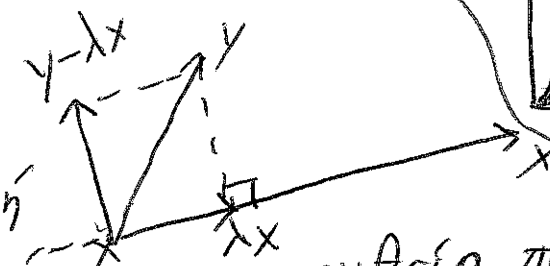
$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

<u>Άρα</u>

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x+y, x \rangle + \langle x+y, y \rangle$$
$$= \langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$
$$= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$



<u>Η ορθή προβολή</u>



Έστω $x, y \in R^n$, $x \neq 0$

Αν $\lambda \cdot x$ είναι η ορθή προβολή του y πάνω στην ευθεία που παράγει το x, τότε $0 = \langle y - \lambda x, \lambda x \rangle = \langle y, \lambda x \rangle + \langle -\lambda x, \lambda x \rangle =$

$$= \lambda \langle y, x \rangle - \lambda^2 \langle x, x \rangle \Rightarrow \lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2}$$

(όταν $\lambda \neq 0$, δηλαδή το y δεν είναι ήδη κάθετο στο x, οπότε η ορθή προβολή του είναι το 0).

ΗΥ-111

Αν θ είναι η οξεία γωνία που σχηματίζουν το x, y τότε $\cos\theta = \frac{\|\lambda x\|}{\|y\|} = \frac{\cancel{\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}\|x\|}}{\|y\|} =$

$= \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$ δηλαδή $\langle x,y\rangle = \|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\theta$

Ιδιότητες του μήκους

1) $\|x\| \geq 0$ και $\|x\| = 0$ τότε και μόνον τότε όταν $x=0$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\cdot\|x\| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$

3) Ανισότητα Cauches-Schwart : Αν $x, y \in \mathbb{R}^n$ τότε $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$ δηλαδή $x = (x_1, \dots x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ τότε $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$

Απόδειξη τα 3 Έχουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$

$0 \leq \|tx+y\|^2 = t^2\|x\|^2 + 2t\langle x,y\rangle + \|y\|^2$

Που είναι ένα τρίγωνο που διατηρεί πρόσημο

Συνεπώς έχει μη-θετική διακρίνουσα

δηλαδή $(2\langle x,y\rangle)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow \langle x,y\rangle^2 \leq \|x\|^2\cdot\|y\|^2$

4) Τριγωνομετρική ανισότητα $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, γιατί

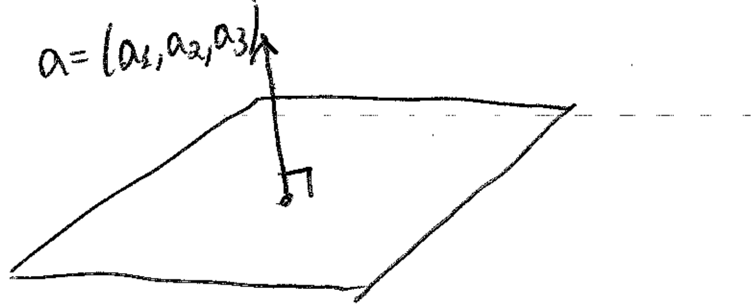
$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 =$

$= (\|x\| + \|y\|)^2$

HY-111 ① 10/2/2015

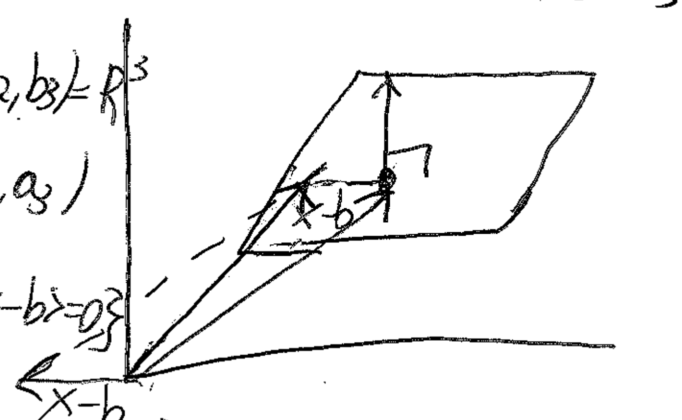
Υπερεπίπεδα στο R^3

Για $n=3$ ένα επίπεδο στο R^3 καθορίζεται από ένα σημείο απ' το οποίο διέρχεται και ένα κάθετο (μη-μηδενικό) διάνυσμα



Δηλαδή το επίπεδο P είναι κάθετο στο $a=(a_1,a_2,a_3)$ και διέρχεται απ' το $O=(0,0,0)$, δηλαδή την αρχή των αξόνων είναι το σύνολο $P=\{x\in R^3, \langle a,x\rangle=0\} = \{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \; a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0\}$

Γενικότερα το επίπεδο P που περνάει από το σημείο $b=(b_1,b_2,b_3)\in R^3$ και είναι κάθετο στο $a=(a_1,a_2,a_3)$ είναι το σύνολο $P=\{x\in R^3, \langle a,x-b\rangle=0\}$



$=\{x\in R^3, \langle a,x\rangle=\langle a,b\rangle\}$

$=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \; a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\}$

<u>Συμπέρασμα</u> Η εξίσωση ενός επιπέδου στο R^3 είναι "γενικά" της μορφής $a_1\cdot x_1+a_2x_2+a_3\cdot x_3=c$, όπου $a_1,a_2,a_3,c\in R$

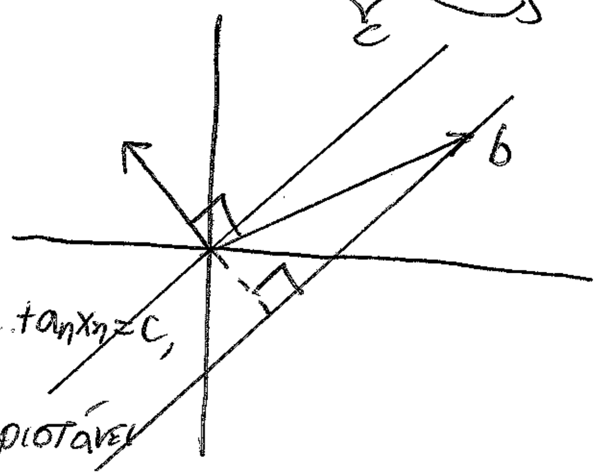
Το επίπεδο περνάει απ' το $O\in R$ όταν $c=0$

HY-111

<u>Παράδειγμα</u> Η εξίσωση $2x-y+5z=4$ παριστάνει το επίπεδο στο R^3 που είναι κάθετο στο $(2,-1,5)$ και περνάει απ' το σημείο $(2,0,0)$

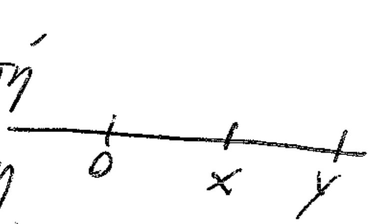
Όμοια για $n=2$ η ευθεία στο R^2 που περνάει απ' το σημείο $b=(b_1,b_2)\in R^2$ και είναι κάθετη στο $a=(a_1,a_2)$ είναι το σύνολο
$$\epsilon=\{x\in R^2, \langle a,x\rangle=\langle a,b\rangle\}$$
$$=\{(x_1,x_2)\in R^2, a_1x_1+a_2x_2=\underbrace{a_1b_1+a_2b_2}_{c}\}$$

"Γενικά" μια ευθεία στο R^2 έχει εξίσωση $a_1x_1+a_2x_2=c$



Στο R^n η εξίσωση $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=c$, όπου $a_1,a_2,\dots,a_n\in R, c\in R$ παριστάνει ένα "υπερεπίπεδο". Δηλαδή ένα υπερεπίπεδο στο R^n είναι το σύνολο λύσεων μιας τέτοιας εξίσωσης περιέχει το $0=(0,0,\dots,0)$ ακριβώς τότε όταν $c=0$

Για $n=1$ και $x\in R$ έχουμε $\|x\|=|x|$ η γνωστή απόλυτη τιμή. Αν $x,y\in R$ τότε η απόσταση του x από το y είναι ο μη-αρνητικός $|x-y|$



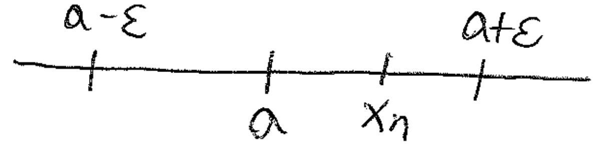
Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in N}$ στο R συγκλίνει στο $a\in R$ όταν $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in N$ τ/ω: $|x_n-a|<\varepsilon\ \forall n\geq n_0$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in N$

HY-111 ② 10/2/2015

$\{x \in R \ , \ |x-a| < \varepsilon\}$

$\{x \in R \quad a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}$



Σύγκλιση στο R^n

Έστω $(x_k)_{k\in N}$ μια ακολουθία σημείων τα R^N. Λέμε ότι η $(x_k)_{k\in N}$ συγκλίνει στο $a \in R^n$ όταν

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in N \quad \|x_k - a\| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$

<u>Ορισμός:</u> Αν $a \in R^n$ και $\varepsilon > 0$, το σύνολο $D(a,\varepsilon) =$ $= \{x \in R^n, \|x-a\| < \varepsilon\}$ λέγεται ανοιχτή n-μπάλλα με κέντρο το a και ακτίνα ε

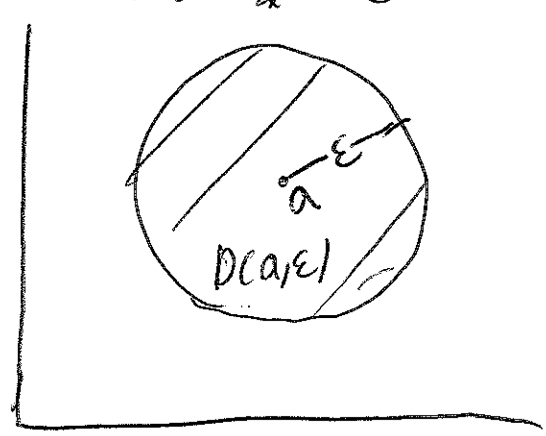
Για n=1, έχουμε το ανοιχτο διάστημα $D(a,\varepsilon)$ με κέντρο a και ακτίνα ε $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

Για n=2 το $D(a,\varepsilon)$ ☆ Αν $x=(x_1,x_2)$; $a=(a_1,a_2)$ τότε

$\|x-a\|^2 = (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2$

☆ είναι $D(a,\varepsilon) = \{(x_1,x_2) \in R^2, (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 < \varepsilon^2$

Είναι ο κυκλικός ανοιχτός δίσκος με κέντρο $a=(a_1,a_2)$ και ακτίνα $\varepsilon>0$



HY-111

Για $n=3$ το $D(a,\varepsilon)=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \quad (x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2<\varepsilon^2\}$

είναι η ανοιχτή μπάλα με κέντρο $a=(a_1,a_2,a_3)$ και ακτίνα $\varepsilon>0$

Η ακολουθία $(x_k)_{k\in N}$ συγκλίνει στο $a\in R^n$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\ k_0\in N \quad x_k\in D(a,\varepsilon)\ \forall k\geq k_0$

Έστω $(x_k)_{k\in N}$ μια ακολουθία στο R^n, Αν $x_k=(x_{k1},x_{k2},\dots x_{kn})$ τότε οι $(x_{ki})_{k\in N}$, $i=1,2,\dots,n$ είναι η ακολουθία στο R

Τότε η ακολουθία $(x_k)_{k\in N}$ συγκλίνει στο $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in R^n$ ακριβώς τότε όταν η $(x_{ki})_{k\in N}$ συγκλίνει στο a_i για κάθε $i=1,2,\dots,n$. Πράγματι Αν η $(x_k)_{k\in N}$ συγκλίνει στο a τότε

$x_1=(x_{11},x_{12},\dots,x_{1n})$

$x_2=(x_{21},x_{22},\dots,x_{2n})$

$\vdots$

$x_k=(x_{k1},x_{k2},\dots x_{kn})$

$$0\leq(x_{ki}-a_i)^2\leq\sum_{j=1}^{n}(x_{kj}-a_j)^2=\|x_k-a\|^2\longrightarrow 0 \text{ όταν } k\to+\infty$$

οπότε $\lim\limits_{k\to+\infty}|x_{ki}-a_i|=0$, δηλαδή $\lim\limits_{k\to+\infty}x_{ki}=a_i$, $i=1,2,\dots n$

Αντίστροφα αν $\lim\limits_{k\to+\infty}x_{ki}=a_i$ για κάθε $i=1,2,\dots,n$ τότε

Προφανώς $\|x_k-a\|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_{ki}-a_i)^2\longrightarrow 0$

HY-111 3 10/2/2015

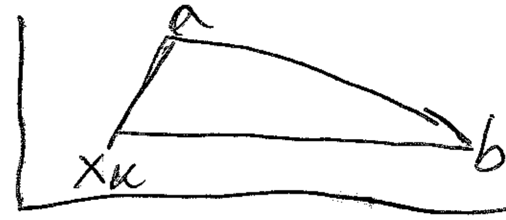
Αν η $(x_\kappa)_{\kappa\in N}$ συγκλίνει στο a τότε το a είναι μοναδικό μ' αυτή την ιδιότητα και λέγεται όριο του $(x_\kappa)_{\kappa\in N}$. Γράφουμε $\lim\limits_{\kappa\to+\infty} x_\kappa = a$.

Απόδειξη

Αν η $(x_\kappa)_{\kappa\in N}$ συγκλίνει στο a και το b στο R^n, τότε

$0 \leq \|a-b\| \leq \|(a-x_\kappa)+(x_\kappa-b)\| \leq \|a-x_\kappa\| + \|x_\kappa-b\| \to 0+0\to 0$

Άρα $\|a-b\|=0 \Rightarrow a=b$



Ορισμός Το $A\subset R^n$ λέγεται φραγμένο αν υπάρχει $\rho>0$ τέτοιο ώστε $\|x\|<\rho$ για κάθε $x\in A$ δηλαδή $A\subset D(0,\rho)$

Η ακολουθία $(x_\kappa)_{\kappa\in N}$ λέγεται φραγμένη, όταν υπάρχει $\rho>0$ τέτοιο ώστε $\|x_\kappa\|<\rho$ για κάθε $\kappa\in N$

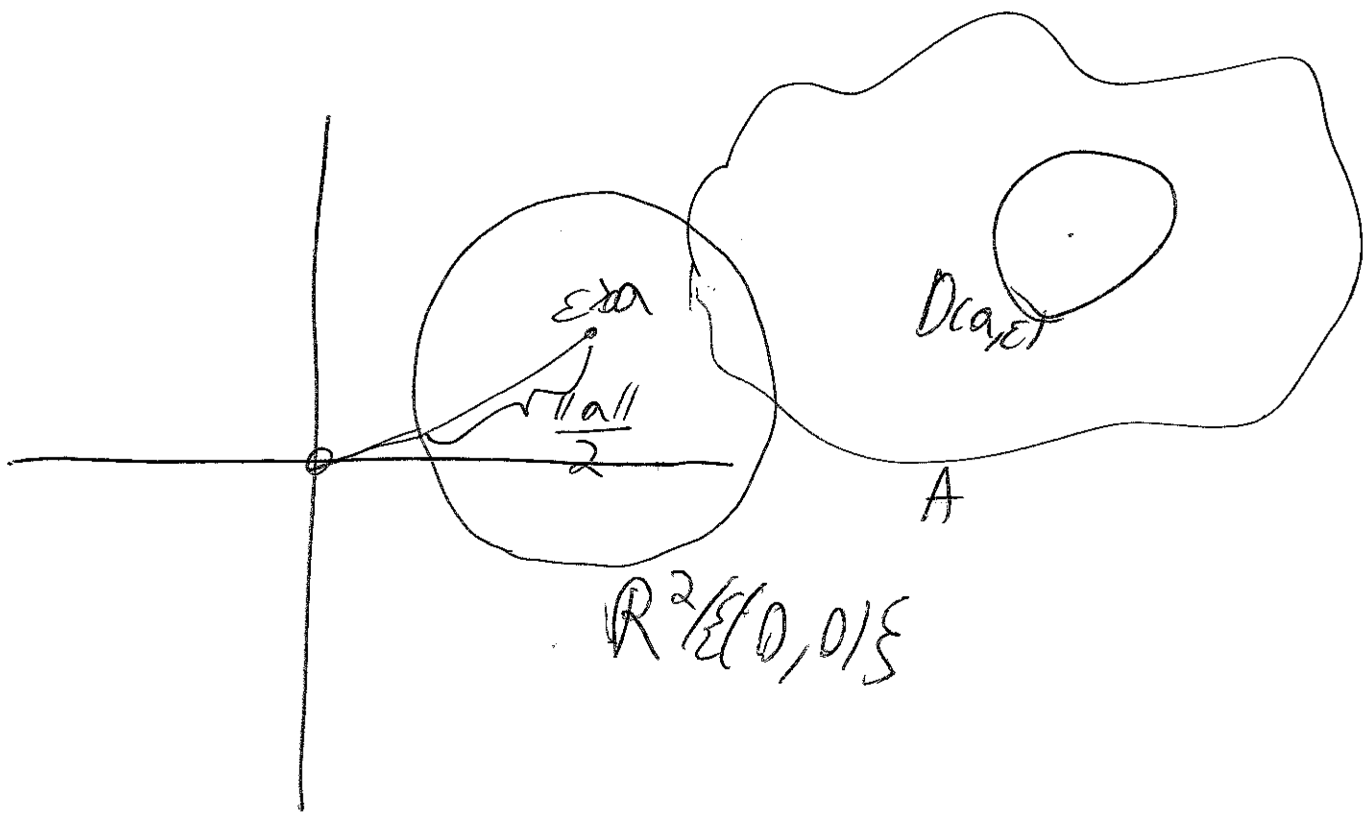
Θεώρημα (Bolzano-Weierstrass) Κάθε φραγμένη ακολουθία στο R^n έχει υπακολουθία που συγκλίνει

Ορισμός: Το σύνολο $A\subset R^n$ λέγεται ανοιχτό όταν για κάθε $a\in A$ υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $D(a,\varepsilon)\subset A$

Παράδειγμα Το $R^2-\{(0,0)\}$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του R^2

Πράγματι αν $a\in R^2\setminus\{(0,0)\}$ τότε $D\left(a,\frac{\|a\|}{2}\right)\subset A$

HY-111



ΗΥ-111 (Φροντιστήριο) ① 12/2/2015

zervouma@gmail.com

$$\|x\|^2 = \langle x,x\rangle \ , \ \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \langle x,x\rangle^{1/2}$$

Άσκηση 1η

α) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 =$

$= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

β) $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x,y\rangle$

Άσκηση 2η

α) $(-1,1,0)$ και $(1,-1,0)$ Ισχύει $\langle x,y\rangle = \|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\theta$

$u=(-1,1,0)$ $\quad \|u\| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

$y=(1,-1,0)$ $\quad \|y\| = \sqrt{2}$

$\langle u,y\rangle = (-1,1,0)\cdot(1,-1,0)$

$= -1-1+0 = -2$

$$\cos\theta = \frac{\langle u,y\rangle}{\|u\|\cdot\|y\|} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{Άρα } \theta=\pi$$

γ) $x=(-1,2,-3)$, $\quad y=(-1,-3,4)$

$\langle x,y\rangle = -17$, $\|x\| = \sqrt{14}$, $\|y\| = \sqrt{26}$

$$\cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} = \frac{-17}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}} = \frac{-17}{\sqrt{364}} = \frac{-17}{2\sqrt{91}}$$

$$\theta = \text{arc}\left(\cos\left(\frac{-17}{2\sqrt{91}}\right)\right)$$

ΗΥ-111 (Φροντιστήριο)

Άσκηση 3

Έστω $u = (x, y, z)$ $\quad \|u\| = 1 \Rightarrow \|(x,y,z)\| = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$e_1 = (1,0,0)$ γωνία $\pi/6$ και με $e_2 = (0,1,0)$ και $e_3 = (0,0,1)$ ίσες γωνίες

$$u = (x,y,z) = \underbrace{\langle u_1, e_1 \rangle}_{x} e_1 + \underbrace{\langle u, e_2 \rangle}_{y} e_2 + \underbrace{\langle u, e_3 \rangle}_{z} e_3$$

$$x = \langle u_1, e_1 \rangle = \|u\| \cdot \|e_1\| \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\|e_1\| = 1, \ \|e_2\| = 1, \ \|e_3\| = 1$

$\|u\| = 1$

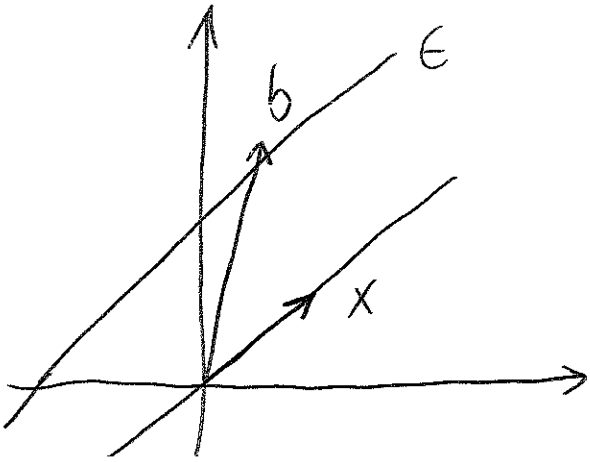
$$y = \langle u, e_2 \rangle = \cancel{\|u\|}^{1} \cdot \cancel{\|e_2\|}^{1} \cdot \cos\theta$$
$$z = \langle u, e_3 \rangle = \cancel{\|u\|}^{1} \cdot \cancel{\|e_3\|}^{1} \cdot \cos\theta$$

Άρα $\boxed{y = z}$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow \frac{3}{4} + 2y^2 = 1 \Rightarrow 2y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{y = \frac{\sqrt{2}}{4}} \quad \text{άρα } u = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

Άσκηση 4



Έστω ένα y. Τότε η απόσταση του y από την ϵ είναι η ελάχιστη τιμή της ποσότητας $\|tx - y\|$

Θεωρούμε $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ με τύπο

$$f(\ ) = \|tx - y\|^2 = t^2\|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle t + \|y\|$$

ΗΥ-111 (Φροντιστήριο) ② 12/2/2015

Η f παραγωγίσιμη ως πολυώνυμο

(*) $\langle tx-y, tx-y\rangle = \langle tx, tx\rangle - \langle tx, y\rangle - \langle y, tx\rangle + \langle y, y\rangle =$

$f'(t) = 2t\|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle \qquad f'(t) = 0$

$f'(t) = 0 \Rightarrow 2t\|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2t\|x\|^2 = 2\langle x, y\rangle \Rightarrow t = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2}$

$f\left(\dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2}\right) = \left\|\dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2}x - y\right\|^2$

$\sqrt{f\left(\dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2}\right)} = \left\|\dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2}x - y\right\|$

Άσκηση 5

$C[0,1] = \{f : f[0,1] \to \mathbb{R}\} \quad \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\cdot g(t)\,dt$

$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \quad (\lambda f)(t) = \lambda \cdot f(t),\ t \in [0,1]$

- $\langle f, f\rangle \geq 0$

$\langle f, f\rangle = \int_0^1 f(t)\cdot f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)^2\,dt \geq 0$

- $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$

$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$

$\langle g, f\rangle = \int_0^1 g(t)\cdot f(t)\,dt$

HY-111 (Φροντιστήριο)

eirinitrail@gmail.com

- $\langle \lambda f + \mu g, h \rangle = \int_0^1 (\lambda f(t) + \mu g(t)) \cdot h(t) dt =$

$= \int_0^1 (\lambda f(t) \cdot h(t) + \mu \cdot g(t) \cdot h(t)) dt = \lambda \int_0^1 f(t) \cdot h(t) dt + \mu \int_0^1 g(t) h(t) dt$

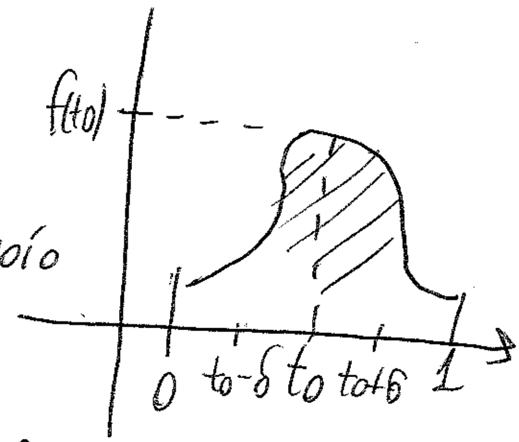
- $\langle f, f \rangle = 0$ μόνο όταν $f = 0$

Θα το δείξω με απαγωγή εις άτοπο

Θα δείξουμε ότι $f(t) = 0$

Έστω ότι υπάρχει ένα $t_0 \in [0,1]$ για το οποίο

$f(t_0) \neq 0 \quad (f(t_0))^2 > 0$



Επειδή η f είναι συνεχής και η $f^2(t)$ είναι συνεχής. Άρα υπάρχει ένα $\delta > 0$ για το οποίο

$f(t) \neq 0 \qquad f(t)^2 > \frac{f(t^2)}{2} > 0 \quad t \in \underbrace{[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [0,1]}_{(t_0-\delta,\, t_0+\delta) \in [0,1]}$

Ανισότητα Cauchy - Schwartz

$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\| \iff \left| \int_0^1 f(t) \cdot g(t) dt \right| \leq$

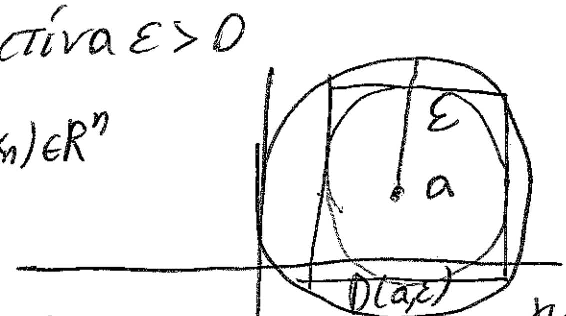
$\left(\int_0^1 f^2(t) dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 g^2(t) dt \right)^{1/2}$

HY-111 ① 16/2/2015

Σύγκλιση Ακολουθιών

Αν $(x_k)_{k\in N}$ είναι μια ακολουθία σημείου του R^n, λέμε ότι αυτή συγκλίνει στο $a\in R^n$ και γράφουμε $\lim_{k\to+\infty} x_k = a$. αν $\forall \varepsilon>0$ υπάρχει $k_0\in N$ ώστε $\|x_k - a\| < \varepsilon$ $\forall k\geq k_0$ $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ υπάρχει $k_0\in N$ ώστε $x_k\in D(a,\varepsilon)$ $\forall k\geq k_0$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{k\to+\infty} x_{ki} = a_i$ για κάθε $i = 1,2,\dots,m$, όπου $a=(a_1,a_2,\dots a_n)$ και $x_k = (x_{k1}, x_{k2},\dots,x_{kn})$ $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ υπάρχει $k_0\in N$ ώστε $|x_{ki}-a_i|<\varepsilon$ $\forall k\geq k_0$. Το a λέγεται όριο της ακολουθίας.

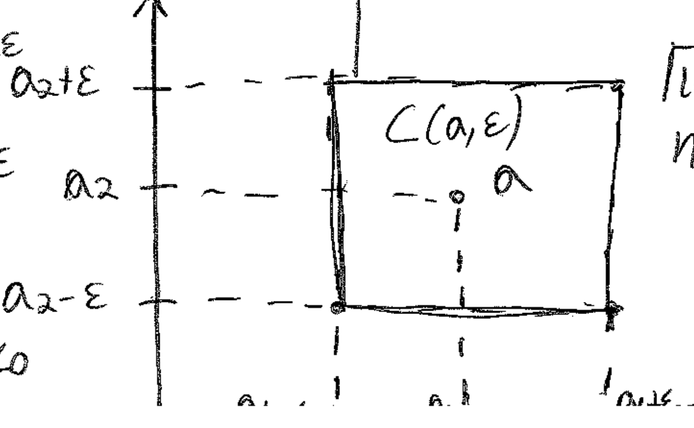
Το $D(a,\varepsilon) = \{x\in R^n \ \|x-a\|<\varepsilon\}$ λέγεται ανοιχτή μπάλα με κέντρο a και ακτίνα $\varepsilon>0$



για n=2

<u>Παρατήρηση</u> το $C(a,\varepsilon) = \{x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$
$|x_i - a_i| < \varepsilon,\ i=1,2,\dots,n\}$
όπου $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ είναι ο n-κύβος.
με κέντρο το a και ακμή 2ε

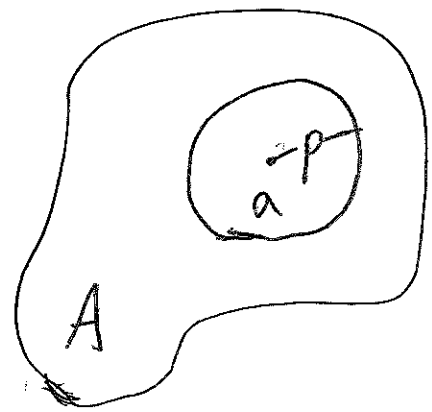
Άρα $\lim_{k\to+\infty} x_k = a$ ακριβώς τότε όταν $\forall i>0$ υπάρχει $k_0\in N$ ώστε $x_k\in C(a,\varepsilon)$ $\forall k\geq k_0$



Για n=2

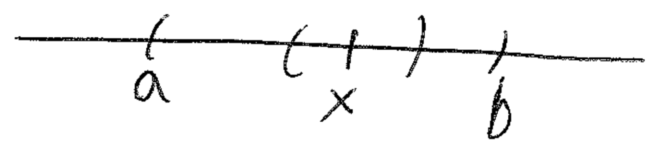
HY-111

<u>Ορισμός</u> Ένα σύνολο $A \in \mathbb{R}^n$ λέγεται <u>ανοιχτό</u> αν για κάθε $a \in A$ υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $D(a,\rho) \subset A$.

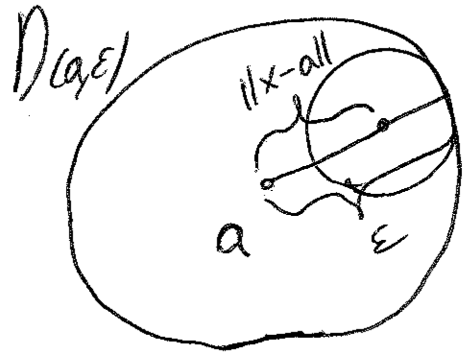


<u>Παραδείγματα</u> i) Για $n=1$, κάθε ανοιχτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ είναι ανοιχτό σύνολο.
Πράγματι αν $a<b$ και $x \in (a,b)$ για $\rho = \min\{\frac{b-2}{2}, \frac{x-a}{2}\} > 0$ έχουμε

$D(x,\rho) = (x-\rho, x+\rho) \subset (a,b)$



ii) Για κάθε $a \in \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$, η ανοιχτή μπάλα $D(a,\varepsilon)$ είναι ανοιχτό σύνολο. Αν $x \in D(a,\varepsilon)$ τότε $\|x-a\| < \varepsilon$

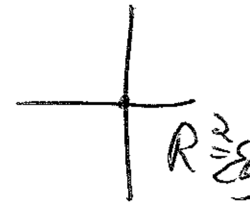


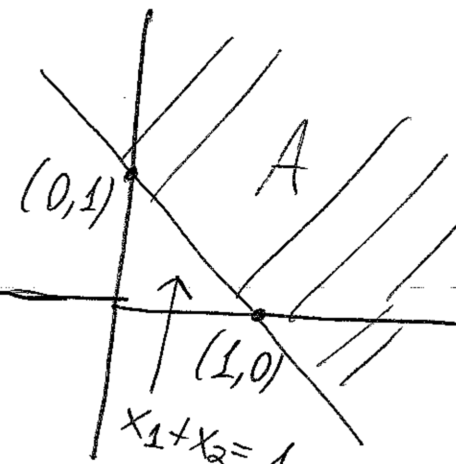
Αν $\rho = \varepsilon - \|x-a\|$ τότε ισχύει $\rho > 0$ και $D(x,\rho) \subset D(a,\varepsilon)$
Πράγματι για κάθε $y \in D(x,\rho)$ έχουμε
$\|x-y\| < \rho$ οπότε $\|y-a\| = \|(y-x)+(x-a)\| \leq \|x-y\| + \|x-a\| <$
$\rho + \|x-a\| = \varepsilon - \|x-a\| + \|x-a\| = \varepsilon$. Άρα $y \in D(a,\varepsilon)$.
Αυτό δείχνει ότι $D(x,\rho) \subset D(a,\varepsilon)$

(γ) Το σύνολο $\mathbb{R}^n - \{0\}$, $(0 = (0,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και δεν είναι ανοιχτή μπάλα.

HY-111 ② 16/2/2015

(δ) Το $A = \{ x = (x_1, x_2) \in R^2 : x_1 + x_2 > 1 \}$
είναι ανοιχτό υποσύνολο του R





Ορισμός Ένα σύνολο $F \subset R^n$
λέγεται κλειστό αν το
$R^n \setminus F = \{ x \in R^n : x \notin F \}$ είναι ανοιχτό

Πρόταση Ένα σύνολο $F \in R^n$ είναι κλειστό τότε και μόνον τότε όταν για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $(x_k)_{k\in N}$ σημείων του F ισχύει και $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k \in F$

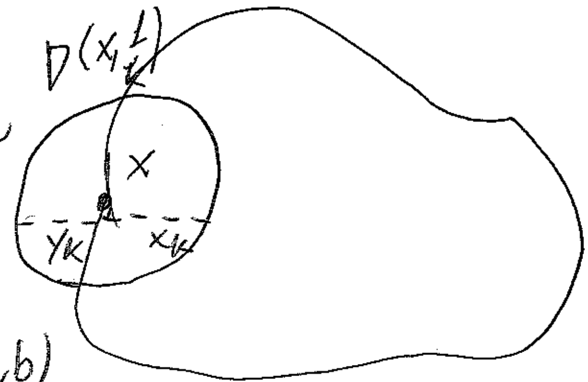
Αν $F = \{ x = (x_1, x_2) \in R^2, x_1 + x_2 = 1 \}$
τότε $R^2 \setminus F = \{ z = (x_1, x_2) \in R^2 : x_1 + x_2 < 1 \} \cup \{ x = (x_1, x_2) \in R^2, x_1 + x_2 > 1 \}$
Εδώ $R^2 \setminus A = F \cup \{ x = (x_1, x_2) \in R^2 : x_1 + x_2 < 1 \} =$
$= \{ x = (x_1, x_2) \in R^2 : x_1 + x_2 \leq 1 \}$
είναι κλειστό σύνολο.

Αναδιατύπωση Bolzano-Weierstrass
Ένα σύνολο $C \in R^n$ είναι κλειστό και φραγμένο τότε και μόνον τότε κάθε ακολουθία σημείων του C έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

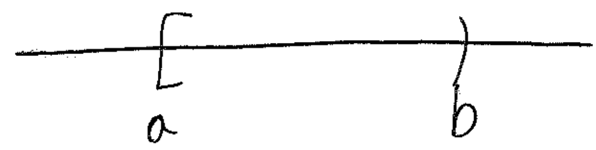
Ορισμός: Αν $B \subset R^n$, το $x \in R^n$ λέγεται συνοριακό σημείο του B, αν $D(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ και $D(x, \varepsilon) \cap (R^n \setminus B) \neq \emptyset$ $\forall \varepsilon > 0$
$\Leftrightarrow$ (για $\varepsilon = \frac{1}{k}$) $D(x, \frac{1}{k}) \cap B \neq \emptyset$ και $D(x, \frac{1}{k}) \cap (R^n - B) \neq \emptyset$ $\forall k \in N$
Αν επιλέξουμε $x_k \in D(x, \frac{1}{k}) \cap B$ και $y_k \in D(x, \frac{1}{k})$, τότε
$\| x - x_k \| < \frac{1}{k}$, $\| x - y_k \| < \frac{1}{k}$, οπότε $\lim x_k = x$
$\lim y_k = x$

HY-111

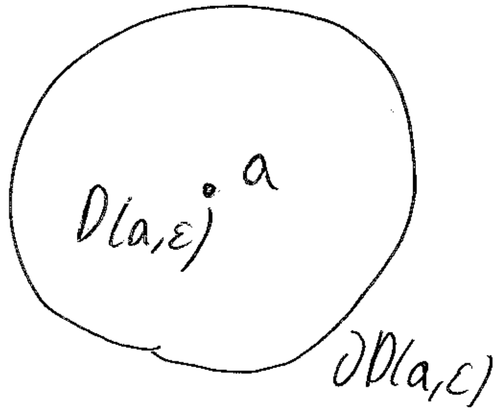
Το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων του B λέγεται σύνορο του B. και συμβολίζεται ∂B



<u>Παράδειγμα</u> (α) Για $n=1$ και $B=[a,b)$, $a<b$ έχουμε $\partial[a,b)=\{a,b\}$, δηλαδή το διάστημα B έχει συνοριακά σημεία τα άκρα του.



(β) Αν $a\in R^n$ και $\varepsilon>0$, τότε
$\partial D(a,\varepsilon)=\{x\in R^n, \|x-a\|<\varepsilon\}$ που είναι η $(n-1)$-σφαίρα με κέντρο το a και ακτίνα ε.



(γ) $\partial(R^n-\{0\})=\{0\}$

(δ) Αν $A=\{x=(x_1,x_2)\in R^2 : x_1+x_2>1\}$, τότε $\partial A=\{x=(x_1,x_2)\in R^2 : x_1+x_2=1\}$

- Παρατηρήσαμε ότι το $A\cup\partial A=\{x=(x_1,x_2)\in R^2 : x_1+x_2\geq 1\}$ είναι κλειστό σύνολο

<u>Πρόταση</u> Για κάθε σύνολο $B\in R^n$ το σύνολο $\overline{B}=B\cup\partial B$ είναι κλειστό σύνολο και μάλιστα είναι το ελάχιστο κλειστό σύνολο που περιέχει το B.

Το $\overline{B}$ λέγεται κλειστό στη R του B.

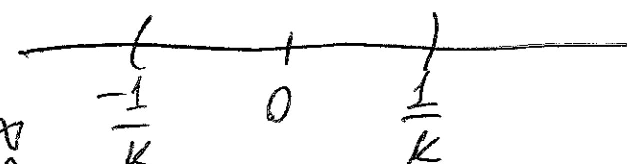
<u>Πόρισμα</u> Το $B\subset R^n$ είναι κλειστό τότε και μόνον τότε όταν $B=\overline{B}$

Ιδιότητες των ανοιχτών και κλειστών συνόλων

Ανοιχτά σύνολα	Κλειστά σύνολα
1) Αν A_j, $j \in I$ είναι μια οικογένεια ανοιχτών συνόλων, τότε η $\bigcup_{j\in I} A_j$ είναι ανοιχτό σύνολο.	1) Αν F_j, $j \in I$ είναι μια οικογένεια κλειστού συνόλου, τότε η $\bigcap_{j\in I} F_j$ είναι κλειστό σύνολο.
2) Αν $A_1, \ldots, A_m$ είναι ένα πεπερασμένο πλήθος από ανοιχτά σύνολα, τότε το $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$ είναι ανοιχτό σύνολο	2) Αν $F_1, \ldots, F_m$ είναι ένα πεπερασμένο πλήθος από κλειστά σύνολα τότε το $F_1 \cup \ldots \cup F_m$ είναι κλειστό σύνολο.

__Παράδειγμα__ Για $n=1$, τα $A_k = \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = D\left(0, \frac{1}{k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$ είναι ανοιχτό αλλά το $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{0\}$ που δεν είναι ανοιχτό σύνολο

Επίσης για $F_k = \left[0, 1 - \frac{1}{k}\right]$



$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_1 = [0, 1)$ που δεν είναι κλειστό

$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \ldots$

Άρα η ιδιότητα 2 δεν ισχύει για μη-πεπερασμένες οικογένειες.

__Πρόταση__ Για κάθε $B \subset \mathbb{R}^n$ ισχύει

$\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^n :$ υπάρχει ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ σημείων του B με $\lim x_k = x\}$

(Αν $x \in \overline{B} = B \cup \partial B$, τότε $x \in B$ ή $x \in \partial B$. Αν $x \in B$, αρκεί να πάρουμε $x_k = x$, $k \in \mathbb{N}$. Αν $x \in \partial B$, τότε υπάρχει $x_k \in D\left(x, \frac{1}{k}\right) \cap$
B, $k \in \mathbb{N}$ ... $\lim x_k = x$

HY-111 ① 17/2/2015

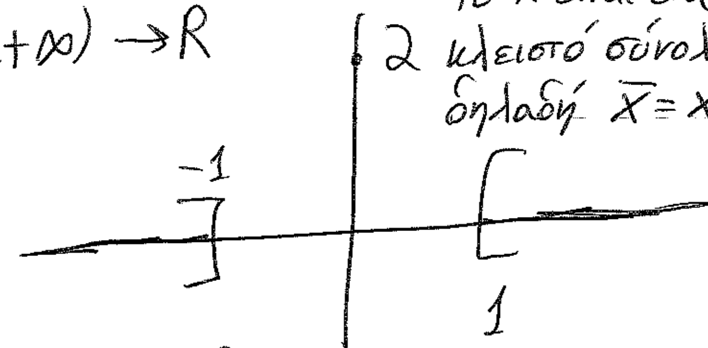
ΟΡΙΑ

1. $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ έχει έννοια, $f(x) = \dfrac{1}{x}$

2. $f: (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty) \to \mathbb{R}$

Το X είναι ένα κλειστό σύνολο δηλαδή $\overline{X} \equiv X$

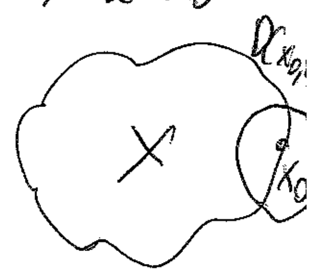
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1}, & |x| \geq 1 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$



$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ δεν υφίσταται επειδή δεν είναι σημείο συσσώρευσης.

Έστω $X \subset \mathbb{R}^n$. Το $x_0 \in \mathbb{R}^n$ λέγεται <u>σημείο συσσώρευσης</u> του X αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\left(D(x, \varepsilon) \setminus \{x_0\} \right) \cap X \neq \emptyset$ δηλαδή υπάρχει $x_k \in X \cap D(x_0, \varepsilon)$ με $x_k \neq x_0$.

Ισοδύναμα υπάρχει μια ακολουθία $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ με, $x_k \neq x_0$ $x_k \in X$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = x_0$



Προφανώς αν το $x_0 \in X$ είναι σημείο συσσώρευσης του X, τότε $x_0 \in X \cup \partial X = \overline{X}$

Έστω $f: X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ένα σημείο συσσώρευσης του X

HY-111

Το $a \in \mathbb{R}^m$ λέγεται όριο της f του $x \in X$ τείνοντως στο x_0 και γράφουμε $\lim_{x \to x_0} f(x)$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$: $0 < \|x - x_0\| < \delta, x \in X \Rightarrow \|f(x) - a\| < \varepsilon$

<u>Πρόταση</u> Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$

(ii) για κάθε ακολουθία $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ με $x_k \in X$, $x_k \neq x_0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ με $\lim_{k \to +\infty} x_k = x_0$ ισχύει $\lim_{k \to +\infty} f(x_k) = a$

<u>Απόδειξη</u> <u>(i) => (ii)</u> Έστω $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ με $x_k \in X$, $x_k \neq x_0$ με $\lim_{k \to +\infty} x_k = x_0$

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$: $0 < \|x - x_0\| < \delta, x \in X \Rightarrow \|f(x) - a\| < \varepsilon$. Υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \|x_k - x_0\| < \delta$ για κάθε $k \geq k_0$. Άρα $\|f(x_k) - a\| < \varepsilon$ για κάθε $k \geq k_0$

Αυτό δείχνει ότι $\lim_{k \to +\infty} f(x_k) = a$

<u>(ii) => (i)</u> Προχωράμε με απαγωγή στο άτοπο. Δηλαδή υποθέτουμε το (ii) και ότι <u>δεν</u> ισχύει το (i).

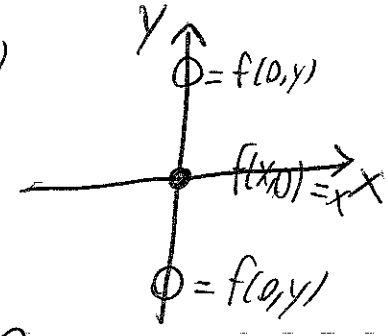
Δηλαδή υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x_\delta \in X$ με $0 < \|x_\delta - x_0\| < \delta$ αλλά $\|f(x_\delta) - a\| \geq \varepsilon$

Παίρνοντας $\delta = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_k \in X$ με $0 < \|x_k - x_0\| < \frac{1}{k}$ και $\|f(x_k) - a\| \geq \varepsilon$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα $\lim_{k \to +\infty} x_k = x_0$, αλλά $\|f(x_k) - a\| \geq \varepsilon$ $\forall k \in \mathbb{N}$, που σημαίνει ότι η $f(x_k)$ δεν συγκλίνει

ΗΥ-111 ② 17/2/2015

<u>Παράδειγμα</u> (α) Έστω ότι $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ με

$f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$. Βρείτε το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$



Για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε

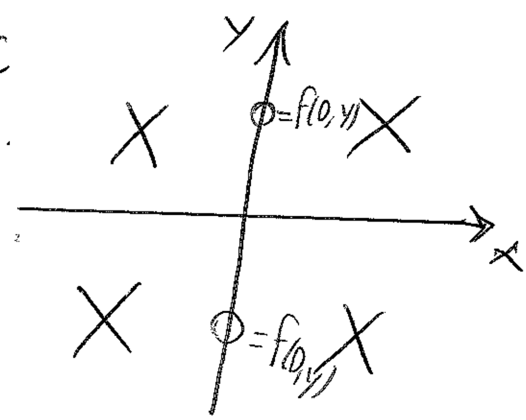
Αν το όριο υπάρχει τότε αναγκαστικά το 0, διότι $f(0,y) = 0$ για κάθε $y \neq 0$

Για $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε $|f(x,y) - 0| = \left| \dfrac{x^3}{x^2+y^2} \right| =$

$$= \frac{|x|\cdot x^2}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|\cdot \cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = |x|$$

Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ αν πάρουμε $\delta = \varepsilon$, τότε $0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon$

Αυτό δείχνει ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$



(β) Έστω $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ και $f: X \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x \sin\frac{1}{y}$

Βρείτε το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Επειδή $f(0,y) = 0$ για κάθε $y \neq 0$, αν υπάρχει το όριο είναι αναγκαστικά το 0.

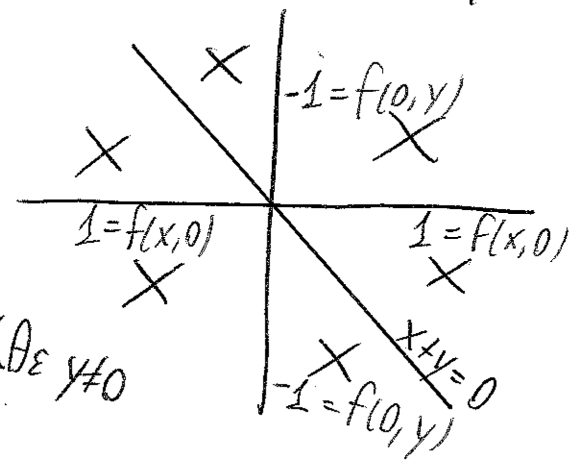
Για $(x,y) \in X$ έχουμε $|f(x,y) - 0| = \left|x \cdot \sin\frac{1}{y}\right| = |x| \cdot \left|\sin\frac{1}{y}\right| \leq$
$\leq |x| \cdot 1 = |x|$ Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (π.χ. $\delta = \varepsilon$) ώστε για κάθε $(x,y) \in X$ με $0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta = \varepsilon \Rightarrow$

HY-111

(γ) Έστω $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \neq 0\}$ και $f: X \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

Βρείτε το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$



Εδώ έχουμε $f(0,y) = -1$ για κάθε $y \neq 0$
και $f(x,0) = 1$ για κάθε $x \neq 0$

Άρα το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει διότι

$$\lim_{k\to+\infty} f\left(0, \frac{1}{k}\right) = -1 \neq 1 = \lim_{k\to+\infty} f\left(\frac{1}{k}, 0\right) \text{ και } \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{k}, 0\right) =$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\left(0, \frac{1}{k^{20}}\right) = (0,0) \ , \quad \left(\frac{1}{k}, 0\right) \neq (0,0)$$

$$\left(0, \frac{1}{k}\right) \neq (0,0) \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}$$

<u>Παρατήρηση</u> Σε καμία περίπτωση δεν ισχύει

$$\cancel{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)}$$

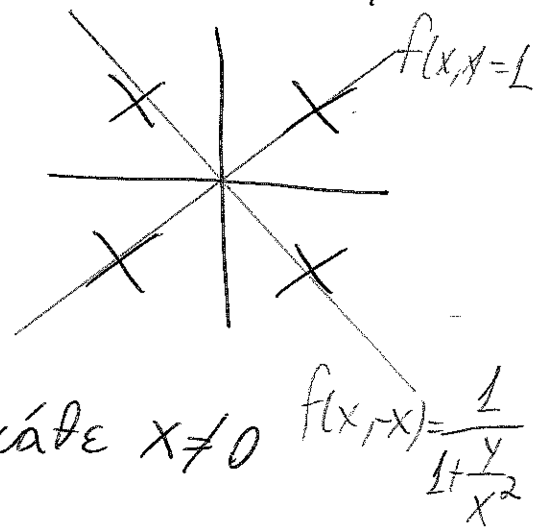
Για παράδειγμα, στο (β) έχουμε $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \sin\frac{1}{y} = 0$ αλλά
το $\lim\limits_{y\to 0} x \sin\frac{1}{y}$ δεν υπάρχει (για $x \neq 0$)

HY-111

③ 17/2/2015

(δ) Έστω $X = \{(x,y) \in R^2 : xy \neq 0\}$ και $f: X \to R$ με

$$f(x,y) = \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 \cdot y^2 + (x-y)^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2}$$



Βρείτε το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Παρατηρούμε ότι $f(x,x) = 1$ για κάθε $x \neq 0$

και $f(x,-x) = \dfrac{1}{1+\frac{y}{x^2}}$ για κάθε $x \in X$. Άρα

$$\lim_{k\to+\infty} f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = 1 \neq 0 = \lim f\left(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\right)$$

και το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει

Παρ' όλα αυτά $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0$

ΗΥ-111 (Φροντιστήριο) ① 19/2/2015

3ο Φυλλάδιο

Άσκηση 1η Αποδείξτε ότι $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq |x-y| \ (\leq |x| + |y|)$

- $\|x-y\| + \|y\| \geq \|x-y+y\| = \|x\| \Rightarrow \boxed{\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|}$

Όμοια: $\|x-y\| + \|x\| = \|y-x\| + \|x\| \geq \|y-x+x\| = \|y\| \Rightarrow$ ①

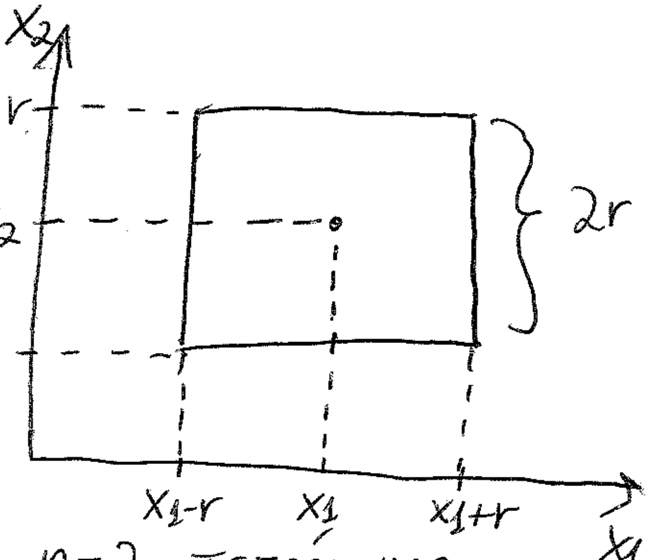
$\boxed{\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|}$ ②

Από ①, ②: $\Rightarrow \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|$

Άσκηση 6 Φυλλάδιο 1ο

$|x_k - y_k| < r$ με $k = 1, 2, \dots, n$

$C\left(x, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \subset D(x,r) \subset C(x,r)$



Έστω $y = (y_1, \dots, y_n) \in D(x,r)$

δηλαδή $\|x-y\| < r$ με

$(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2 < r^2$

$n=2$ τετράγωνο

$n=3$ κύβος με ακμή $2r$

Συνεπώς $(x_i-y_i)^2 < (x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2 < r^2$

άρα $|x_i - y_i| < r$ για $\forall i = 1, 2, \dots n$ $D(x,r) \subset C(x,r)$

Έστω $z = (z_1, z_2, \dots) z_n \in C\left(x, \frac{r}{\sqrt{n}}\right)$ δηλαδή $|x_i - z_i| < \frac{r}{\sqrt{n}}$

για κάθε $i = 1, \dots, n$. Τότε $\|x-z\|^2 = (x_1-z_1)^2 + \dots + (x_n-z_n)^2 <$

$\underbrace{\left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{r^2}{n} + \dots + \frac{r^2}{n}}_{n - \text{φορές}} = \cancel{n} \frac{r^2}{\cancel{n}} = r^2$

$\|x-z\|^2 \ r^2 \ \zeta \ D(x,r)$ Άρα $z \in D(x,r)$

HY-111 (Φροντιστήριο)

2ο Φυλλάδιο

Wolfram : (plot)

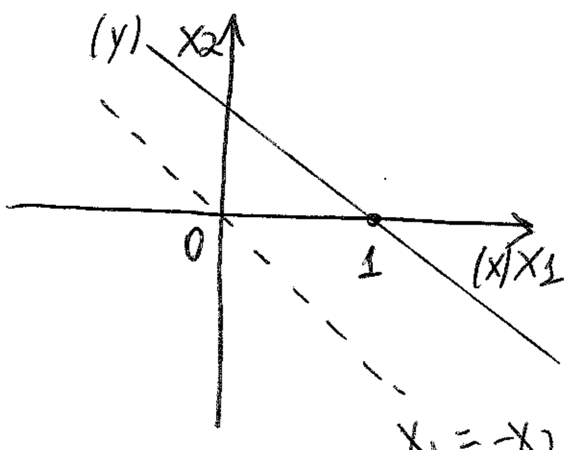
Άσκηση 2η

Ορισμός Ανοιχτού Συνόλου: Έστω (X,d) μετρικός χώρος ☆ και $A \subset X$. Το A λέγεται ανοιχτό αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε: $D(x,\varepsilon) \subset A$

☆ Ορισμός: Ένας μετρικός χώρος είναι ένα ζευγάρι (x,d) όπου X είναι ένα σύνολο και d μια συνάρτηση $d: X \times X \to [0,+\infty)$. $d(x,y)=0 \iff x=y$

(α) $\{(x_1,x_2) \in R^2 : x_1+x_2>0\}$

(γ) $A = \{(x_1,x_2) \in R^2 : 0 < x_1+x_2 \leq 1$



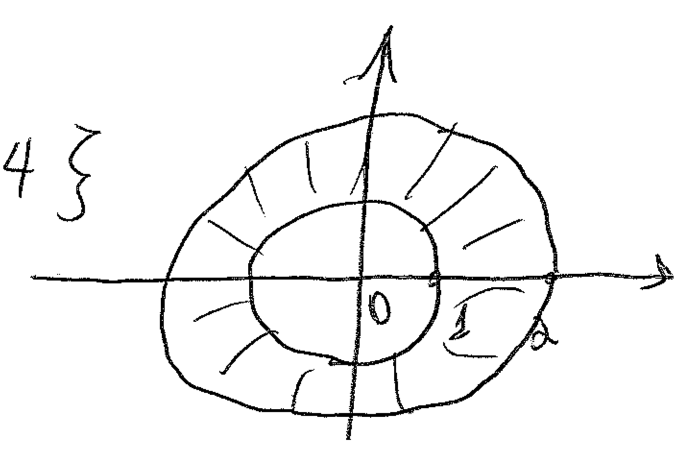
Το A δεν είναι ανοιχτό γιατί το (1, 0) δεν είναι κέντρο κανενός δίσκου που περιέχεται σ' αυτό

(δ) $A = \{(x_1,x_2,x_3) \in R^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ (μοναδιαία σφαίρα)

Δεν είναι ανοιχτό σύνολο

(ε) $(x_1,x_2) \in R^2 : 1 < x_1^2+x_2^2 < 4\}$

Είναι ανοιχτό σύνολο



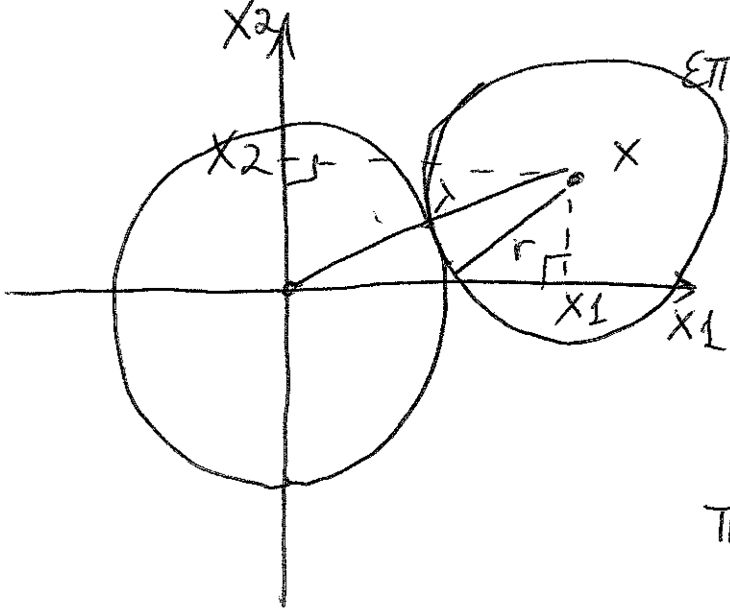
HY-111 (Φροντιστήριο) ② 19/2/2015

2ο Φυλλάδιο

Άσκηση 3η

ⓐ $\{(x_1,x_2)\in R^2 : \overbrace{x_1^2+x_2^2>1}^{\|x\|>1}\}$

Σύνορο: $x_1^2+x_2^2=1$



Είναι ανοιχτό

Επειδή: ΠΘ: $\lambda^2=x_1^2+x_2^2$

$r=\underbrace{\|x\|}_{x_1^2+x_2^2=\lambda^2}-1$

Νδο $D(x,\|x\|-1)\subset A$

Αν $y\in D(x,\|x\|-1)$

Τότε $\|x-y\|<\|x\|-1=$

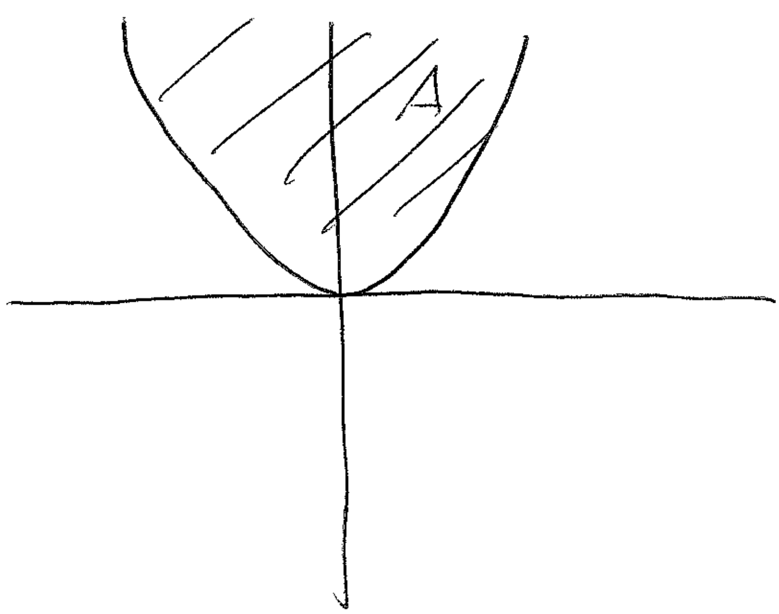
$=\|x-y+y\|-1$

$\overset{\text{τριγων. ανισ.}}{\le}\|x-y\|+\|y\|-1$

Άρα $0<\|y\|-1\Rightarrow\|y\|>1$

που σημαίνει $y\in A$

(β) $\{(x_1,x_2)\in R^2: x_2>x_1^2\}$ $y=x^2$



HY-111 (Φροντιστήριο)

Άσκηση 5

α) $f(x_1,x_2) = \begin{cases} 1, & \text{για } 0 \leq x_2 \leq x_1^2 \\ 0, & \text{αλλιώς για } (x_1,x_2) \end{cases}$ Αν $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2)$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},0\right) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(0,\frac{1}{n}\right) = 0$$

β) $f(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{1}{x_1}\cdot\sin(x_1\cdot x_2), & \text{για } x_1 \neq 0 \\ x_2, & \text{για } x_1 = 0 \end{cases}$

$$|f(x_1,x_2)| = \frac{1}{|x_1|}\cdot|\sin(x_1\cdot x_2)| \leq \frac{1}{|x_1|}\cdot|x_1\cdot x_2|$$

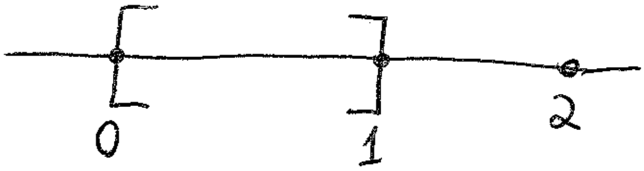
$\sin a \leq a$
$[0,+\infty$

$$= \frac{1}{\cancel{|x_1|}}\cdot\cancel{|x_1|}\cdot|x_2| \quad \text{άρα } |f(x_1,x_2)| \leq |x_2| \ (1)$$

Υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $\|(x_1,x_2)\|\leq\delta$ να έχουμε ότι ισχύει η (1). Άρα έχουμε ότι $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2) = 0$ αφού για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $\|(x_1,x_2)\|<\delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |f(x_1,x_2)| \leq |x_2| \leq \|(x_1,x_2)\| \leq \varepsilon$$

HY-111 ① 24/2/2015



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

$f : [0,1] \cup \{2\} \to \mathbb{R}$ $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \to x_0} x)$

Συνεχεις Συναρτήσεις

Ορισμός: Έστω $X \subset \mathbb{R}^n$ και $f : X \to \mathbb{R}^m$ μια συνάρτηση. Η f λέγεται συνεχής στο $x_0 \in X$ αν για κάθε ακολουθία $(x_\kappa)_{\kappa \in \mathbb{N}}$ σημείων του X με $\lim_{\kappa \to +\infty} x_\kappa = x_0$ ισχύει και $\lim_{\kappa \to +\infty} f(x_\kappa) = f(x_0)$. Δηλαδή $\lim_{\kappa \to \infty} f(x_\kappa) = f(\lim_{\kappa \to +\infty} x_\kappa)$

Παράδειγμα Αν $X = [0,1] \cup \{2\}$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$ Τότε η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ γιατί κάθε ακολουθία $(x_\kappa)_{\kappa \in \mathbb{N}}$ με $x_\kappa \in X$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$ με $\lim_{\kappa \to +\infty} x_\kappa = 2$ είναι τελικά σταθερή $x_\kappa = 2$ (για κάθε $\kappa \ge \kappa_0$ και κάποιο $\kappa_0 \in \mathbb{N}$), οπότε η ακολουθία των τιμών $(f(x_\kappa))_{\kappa \in \mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή $f(x_\kappa) = 1 = f(2)$ και άρα συγκλίνει στο $f(2)$.

Πρόταση: Αν $X \subset \mathbb{R}^n$ και $f : X \to \mathbb{R}^m$, για το $x_0 \in X$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

(i) Η f είναι συνεχής στο x_0

(ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $x \in X$,

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

HY-111

<u>Απόδειξη</u>: (i) => (ii) Με απαγωγή στο άτοπο. Τότε υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε για κάθε $\delta>0$ υπάρχει $x_\delta \in X$ ώστε $\|x_\delta - x_0\| < \delta$ αλλά $\|f(x_\delta) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$

Παίρνοντας $\delta = \frac{1}{k}$, σχηματίζεται μια ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ σημείων του X με $\|x_k - x_0\| < \frac{1}{k}$ και $\|f(x_k) - f(x_\delta)\| \geq \varepsilon$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα $\lim_{k\to+\infty} x_k = x_0$ αλλά η $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ <u>δεν</u> συγκλίνει στο $f(x_0)$. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το (i).

(ii) => (i). Έστω $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία σημείων του X με $\lim_{k\to+\infty} x_k = x_0$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = f(x_0)$

Έστω $\boxed{\varepsilon>0}$. Αφού ισχύει το (ii) υπάρχει $\delta>0$ ώστε

$x \in X,\ \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$

Υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|x_k - x_0\| < \delta$ για κάθε $k \geq k_0$, οπότε και $\|f(x_k) - f(x_0)\| < \varepsilon$ για κάθε $k \geq k_0$. Άρα $\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = f(x_0)$

Αν $X \subset \mathbb{R}^n$ και $f: X \to \mathbb{R}^m$, τότε $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$, όπου οι $f_1, f_2, \ldots, f_m : X \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις και λέγονται οι συντεταγμένες συναρτήσεως της f.

Η f είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ τότε και μόνον τότε όταν όλες οι $f_1, \ldots, f_m$ είναι συνεχείς στο x_0 για

$$\|f(x) - f(x_0)\|^2 = \sum_{i=1}^{m} (f_i(x) - f_i(x_0))^2$$

ΗΥ-111 ② 24/9/2015

Παράδειγμα Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Ερώτημα Είναι η f συνεχής στο $(0,0)$;

Έχουμε $|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| = \frac{|x| \cdot x^2}{x^2+y^2} \leq \frac{|x| \cdot x^2}{x^2}$

$= |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y) - (0,0)\|$ (για $(x,y) \neq (0,0)$)

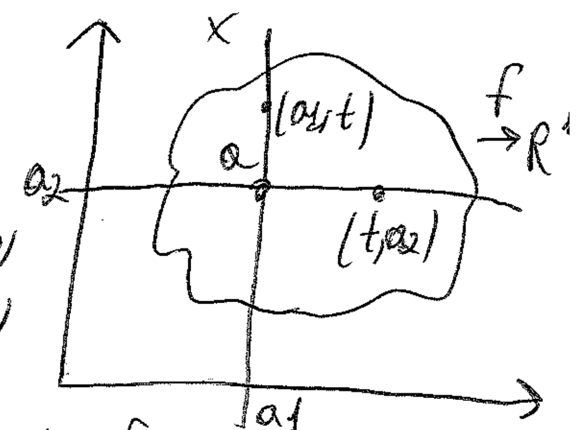
δηλαδή $\|f(x,y) - f(0,0)\| \leq \|(x,y) - (0,0)\|$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Άρα η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Έστω $f: X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ και $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in X$

Θεωρούμε την $g_j(t) = f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)$ (όπου ορίζεται), $1 \leq j \leq n$. Αν η f είναι συνεχής στο a τότε η g_j είναι συνεχής στο a_j, για κάθε $1 \leq j \leq n$

Το αντίστροφο δεν ισχύει

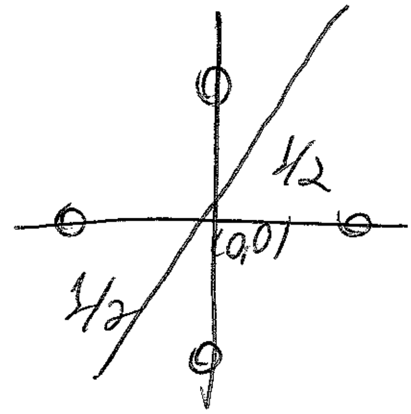


Παράδειγμα Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Εδώ για $a = (0,0)$ οι συναρτήσεις $g_1(t) = f(t,0) = 0$ και $g_2(t) = f(0,t) = 0$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του $t \in \mathbb{R}$

Όμως $f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$ για $x \neq 0$



Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$, αφού $\lim_{x \to 0} f(x,x) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$

<u>Άσκηση</u> Η $f: R^2 \to R$ με $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ <u>δεν</u> είναι συνεχής στο $(0,0)$

<u>Ιδιότητες</u> (των συνεχών συναρτήσεων)

1) Αν οι $f,g : X \to R^m$, $X \subset R^n$ είναι συνεχείς τότε η $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ είναι συνεχής για κάθε $\lambda, \mu \in R$, όπως επίσης και η $h: X \to R$ με $h(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$

2) Αν οι $f: X \to Y$, $g: Y \to R^k$, $X \subset R^n$, $Y \subset R^m$ είναι συνεχής τότε η $g \circ f : X \to R^k$ είναι συνεχής

Η f είναι συνεχής στο x_0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $x \in X$, $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$

Το δ εξαρτάται <u>από το ε αλλά</u> <u>και το x_0</u>!

<u>Ορισμός</u>: Η $f: X \to R^m$, $X \subset R^n$ λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X, δηλαδή για κάθε $x_0 \in X$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$: $x \in X$ $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

ΗΥ-111 ③ 24/2/2015

Όταν το δ εξαρτάται μόνο από το ε και όχι από το x_0, τότε η f λέγεται <u>ομοιόμορφα συνεχής</u>

<u>Ορισμός</u> Η $f: X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται ομοιόμορφα συνεχής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ για κάθε $x, y \in X$, $\|x-y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$

<u>Θεώρημα</u> Έστω $X \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό και φραγμένο και $f: X \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(α) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(β) Το $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ είναι επίσης κλειστό και φραγμένο

<u>Πόρισμα</u> Αν το $X \subset \mathbb{R}^n$ είναι κλειστό και φραγμένο και η $f: X \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο X, δηλαδή υπάρχουν $x_0, y_0 \in X$ ώστε $f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0)$ για κάθε $x \in X$

<u>Παράδειγμα</u> Η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν είναι <u>ομοιόμορφα συνεχής</u>

Πράγματι για $x = k + \frac{1}{k}$, $y = k$, $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $|x-y| = |k + \frac{1}{k} - k| = \frac{1}{k}$, αλλά $|f(x) - f(x)|$ $= |f(k+\frac{1}{k}) - f(k)| = |\cancel{k^2} + 2k\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} - \cancel{k^2}| = 2 + \frac{1}{k^2} > 2$

Άρα για $\varepsilon = 2$ δεν ισχύει ο ορισμός

HY-111 (Φροντιστήριο) ① 26/2/2015

Άσκηση 6 Φυλλάδιο 2ο

$f: R^2 \setminus \{0,0\} \to R$

$$f(x_1,x_2) = \frac{2x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{x},0\right) = 0 \\ f\left(0,\frac{1}{x}\right) = 0 \end{array}\right\} \text{Άρα } \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x},0\right) = \lim_{x\to+\infty} f\left(0,\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{x}\right) = \frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\cancel{2}}{\cancel{x^2}}}{\frac{\cancel{2}}{\cancel{x^2}}} = 1$$

οπότε το όριο δεν υπάρχει

Άσκηση 7 Φυλλάδιο 2ο

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\cos x_1 - 1 + \frac{x_1^2}{2}}{x_1^2 + x_2^2}}_{f(x_1,x_2)}$$

Αφού $f(0,x_2)=0$ για κάθε $x_2 \neq 0$ τότε $\lim_{x\to+\infty} f\left(0,\frac{1}{x}\right) = 0$

Θέτουμε $x_1 = x_2 = t = \frac{1}{x}$ $\quad t = \frac{1}{x} = 0$

$x \to +\infty,\ t \to 0$

$$f(t,t) = \frac{\cos t - 1 + \frac{t^2}{2}}{2t^4}$$

De L'Hospital

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) \overset{DL'H}{=} \lim_{t\to 0}\frac{-\sin t + t}{8t^3} \overset{DL'H}{=} \lim_{t\to 0}\frac{-\cos t + 1}{24t^2} \overset{DL'H}{=}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{48t} \overset{DL'H}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{48} = \frac{1}{48}$$

Άρα το όριο δεν υπάρχει

HY-111 (Φροντιστήριο)

Άσκηση 8 Φυλλάδιο 2ο

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{e^{x_1}\cdot x_2}{x_1+x_2} \qquad f(x_1,0)=0 \text{ για κάθε } x_1\neq 0$$

$$f(0,x_2)=1$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f\left(\tfrac{1}{x},0\right) &= 0 \\ \lim_{x\to+\infty} f\left(0,\tfrac{1}{x}\right) &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ Άρα δεν υπάρχει το όριο}$$

Άσκηση 4 Φυλλάδιο 3ο

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{\sin 2x_1 - 2x_1 + x_2}{x_1^3 + x_2}$$

$f(0,x_2)=1$ για $x_2\neq 0$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} f(0,\frac{1}{x})=1$

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{x} = t \qquad \frac{1}{x}=t$$

Όταν $x\to+\infty$ το $t\to 0$

Άρα $$\lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t - 2t}{t^3} \overset{DL'H}{=} \lim_{t\to 0}\frac{2t'\cos t - 2}{3t^2} =$$

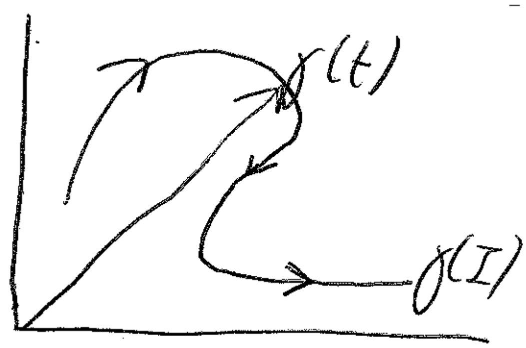
$$\overset{DL'H}{=} \lim_{t\to 0}\frac{-4\sin 2t}{6t} = \lim_{t\to 0}\frac{8\cdot\cos 2t}{6} = -\frac{8}{6} = \frac{-4}{3}$$

Άρα δεν υπάρχει το όριο.

ΗΥ-111 ① 2/3/2015

ΚΑΜΠΥΛΕΣ

Μια συνεχής συνάρτηση $\gamma: I \to R^n$, όπου το $I \subset R$ είναι κάποιο <u>διάστημα</u> λέγεται <u>παραμετρική καμπύλη</u>. Το $\gamma(I) = \{\gamma(t) : t \in I\}$ λέγεται <u>ίχνος</u> της γ.

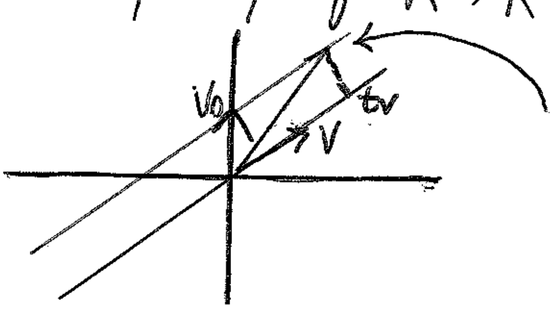


Αν $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, τότε η $\gamma_j: I \to R$, $i \leq j \leq n$ είναι συνεχείς διαφορίσημες r-φορές δηλαδή υπάρχουν οι $\gamma_j', \gamma_j'', \dots, \gamma_j^{(r)}: I \to R$, $i \leq j \leq n$ και είναι συνεχείς, τότε η γ λέγεται <u>Παραμετρισμένη C^r καμπύλη</u> $(1 \leq r \leq \infty)$

<u>Παραδείγματα</u> ια) Η "γενική" εξίσωση ευθείας στο R^2 είναι $a \cdot x + b \cdot y = c$, $a, b, c \in R$. Αν $b \neq 0$, τότε $y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \frac{c}{b}$, οπότε τα σημεία της ευθείας είναι

$$(x, y) = \left(x, \left(-\frac{a}{b}\right)x + \frac{c}{b}\right) = x \cdot \left(1, -\frac{a}{b}\right) + \left(0, \frac{c}{b}\right), x \in R$$

Αν τώρα θέσουμε $V = \left(1, \frac{-a}{b}\right)$, $v_0 = \left(0, \frac{c}{b}\right)$, τότε η ευθεία είναι το ίχνος της παραμετρισμένης C^∞ καμπύλης $\gamma: R \to R^2$ με τύπο $\boxed{\gamma(t) = t \cdot v + v_0}$

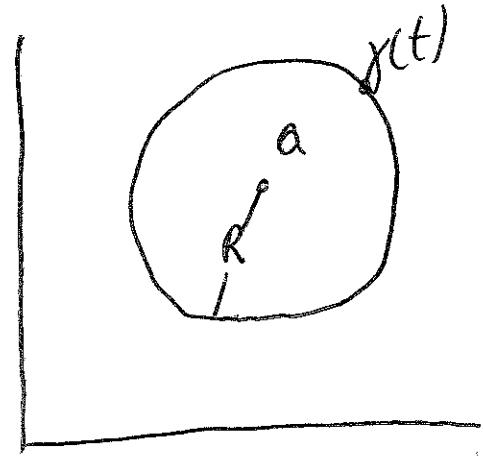


$\gamma(t) = t \cdot v + v_0$

Η ευθεία αυτή είναι η μοναδική που περνάει απ' το $V_0 \in R^2$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $v \in R^2, v \neq 0$

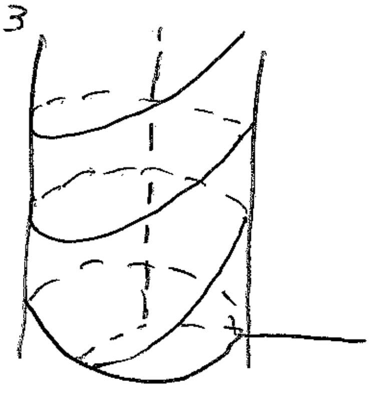
Γενικά, η ευθεία στο R^n που περνάει από το $V_0 \in R^n$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $v \in R^n, v \neq 0$ είναι το ίχνος της παραμετρισμένης, C^∞ καμπύλης $\gamma: R \to R^n$; $\gamma(t) = t \cdot v + v_0$

(β) Ο κύκλος στο R^2 με κέντρο το $a \in R^2$ και ακτίνα $R > 0$, είναι το σύνολο $C = \{x \in R^2 : \|a - x\|^2 = R^2\}$ και είναι το ίχνος της παραμετρισμένης C^∞ καμπύλης

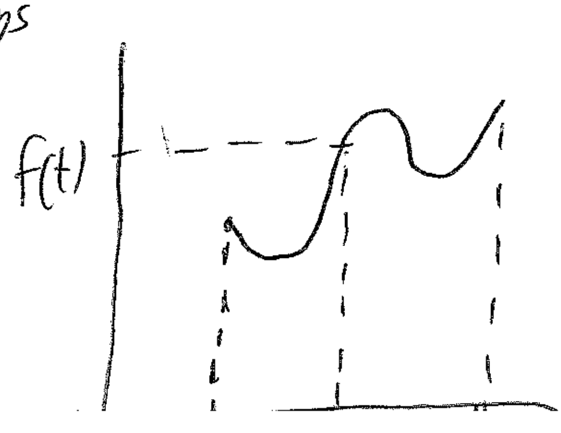


$\gamma: [0, 2\pi] \to R^2$ με $\gamma(t) = (a_1 + R\cos t,\ a_2 + R\sin t)$, όπου $a = (a_1, a_2)$

(γ) Η παραμετρισμένη C^∞ καμπύλη $\gamma: R \to R^3$ με $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, bt)$ όπου $R, b > 0$ έχει ίχνος που λέγεται (δεξιόστροφη) έλικα

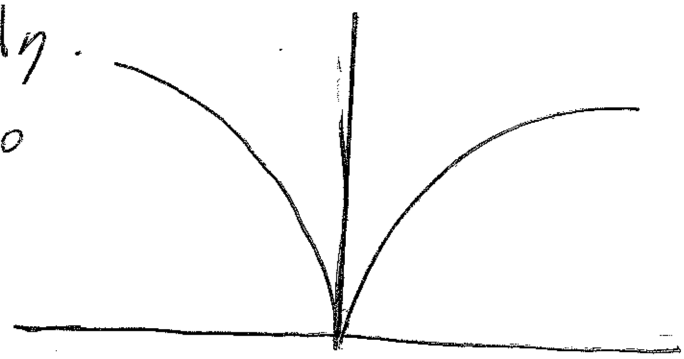


(δ) Αν $a < b$ και $f: [a,b] \to R$ είναι μια C^r συνάρτηση τότε το γράφημα της f είναι το ίχνος της παραμετρισμένης C^r καμπύλης $\gamma: [a,b] \to R^2$ με $\gamma(t) = (t, f(t))$



HY-111 ② 2/3/2015

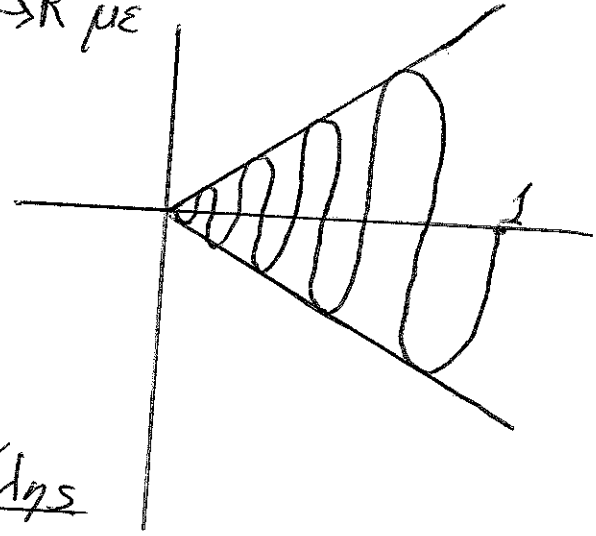
(ε) Η $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ είναι μια παραμετρισμένη C^∞ καμπύλη. Το ίχνος της γ ταυτίζεται με το γράφημα της C^∞ συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^{2/3}$



(στ) Η συνεχής συνάρτηση $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(t) = \begin{cases} t \cos \dfrac{\pi}{2t}, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

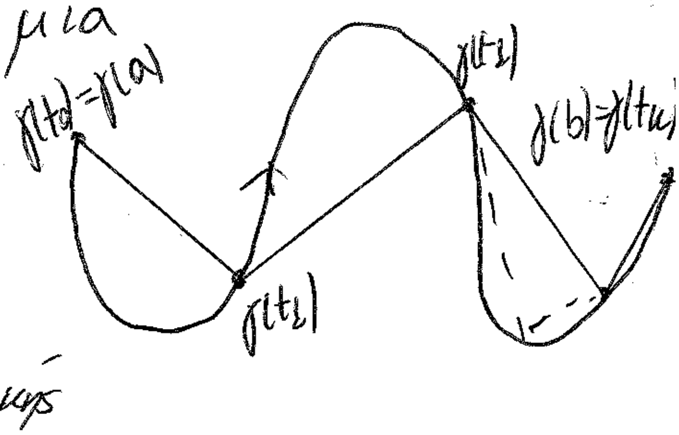
έχει γράφημα όπως στο σχήμα.



Το μήκος παραμετρισμένης καμπύλης

Έστω $a < b$ και $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ μια παραμετρισμένη καμπύλη

Έστω $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$.



Το μήκος της τεθλασμένης πολυγωνικής γραμμής με διαδοχικές κορυφές τα σημεία $\gamma(t_0) = \gamma(a), \gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots, \gamma(t_k) = \gamma(b)$ είναι ίσο με

$$L(\gamma, P) = \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \geq 0$$

ΗΥ-111

Το $L(\gamma) = \sup\{L(\gamma, P) : P$ διαμέριση του $[a,b]\}$ = Το ελάχιστο άνω φραγμένη όλων των $L(\gamma,P)$ λέγεται μήκος της γ αν $L(\gamma) < +\infty$. Σ' αυτή την περίπτωση δηλαδή όταν $L(\gamma) < +\infty$, η γ λέγεται <u>ευθύγραμμίσιμη</u>

<u>Θεώρημα</u> Κάθε παραμετρισμένη C^1 καμπύλη $\gamma : [a,b] \to R^n$ (δηλαδή υπάρχει η ταχύτητα $\gamma' : [a\, b] \to R^n$ και είναι συνεχής) είναι ευθυγραμμίσιμη και

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Θα δείξουμε ότι η γ είναι ευθυγραμμίσιμη, όταν είναι C^1

Έστω ότι $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$. Συμβολίζουμε

$$\int_a^b \gamma = \left(\int_a^b \gamma_1(t) dt, \int_a^b \gamma_2(t) dt, \ldots, \int_a^b \gamma_n(t) dt \right)$$

<u>Λημμα</u> $\left\| \int_a^b \gamma \right\| = \int_a^b \|\gamma\|$

<u>Απόδειξη του Λήμματος</u> Για ευκολία θέτουμε

$$x_j = \int_a^b \gamma(t) dt, \quad i \leq j \leq n \quad \text{και} \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_a^b \gamma$$

$$\left(\int_a^b \gamma \right)^2 = \int_a^b \left(\int_a^b \gamma \right) \gamma$$

Έχουμε $\left\|\int_a^b \gamma\right\|^2 = \|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$

$$= x_1 \int_a^b \gamma_1 + \ldots + x_n \int_a^b \gamma_n$$

$$= \int_a^b x_1 \gamma_1 + \ldots + \int_a^b x_n \gamma_n = \int_a^b \sum_{i=1}^n x_i \gamma_i$$

$$= \int_a^b \langle x_i, \gamma_i(t) \rangle dt \leq \int_a^b \|x\| \cdot \|\gamma(t)\| dt =$$

$$= \|x\| \int_a^b \|\gamma(t)\| dt$$

$$\|x\| \left\| \int_a^b \gamma \right\| = \left\| \int_a^b \gamma \right\|^2 \leq \|x\| \int_a^b \|\gamma(t)\| dt$$

Αν $x \neq 0$ τότε $\|x\| > 0$, οπότε $\left\| \int_a^b \gamma \right\| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\| dt$

Αν $x = \int_a^b \gamma = 0$, τότε η ανισότητα είναι τετριμένη.

Έστω τώρα ότι η γ είναι C' και $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$

Τότε $\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt$

για κάθε $1 \leq i \leq k$ (από το λήμμα)

Άρα $L(\gamma, P) = \sum_{i=1}^k \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

Άρα το $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ είναι άνω φράγμα του

$$\{ L(\gamma, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b] \}$$

HY-111

<u>Παράδειγμα:</u> Αν η $f:[a,b]\to R$ είναι C^1 συνάρτηση και $\gamma:[a,b]\to R^2$ η παραμέτρηση $\gamma(t)=(t,f(t))$ του γραφήματος της f, τότε $\gamma'(t)=(1,f'(t))$, οπότε $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{1+(f'(t))^2}$, άρα το μήκος του γραφήματος είναι:

$$L(\text{γραφήματος της } f)=\int_a^b\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt$$

HY-111 ① 3/3/2015

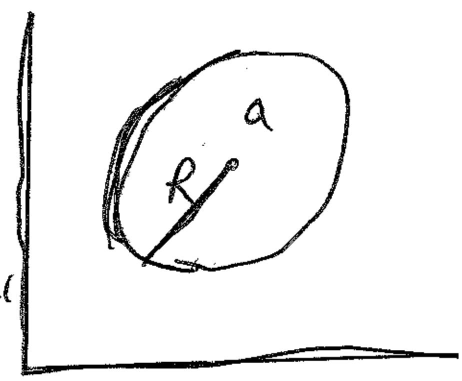
<u>Θεώρημα</u>: Κάθε παραμετρισμένη C^1 καμπύλη $\gamma:[a,b]\to R$, όπου $a<b$, είναι ευθυγραμμίσιμη και $L(\gamma)=\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$, $(\gamma'=(\gamma_1',\gamma_2',\dots,\gamma_n')$ αν $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)$

<u>Παραδείγματα</u> 1) Ο κύκλος με κέντρο $a\in R^2$ και ακτίνα $R>0$ είναι το ίχνος της παραμετρισμένης C^∞ καμπύλης $\gamma:[0,2\pi]\to R^2$ με

$\gamma(t)=(a_1+R\cos t, a_2+R\sin t)$, όπου $a=(a_1,a_2)$

Η ταχύτητα της γ είναι $\gamma'(t)=(-R\sin t, R\cos t)$ και έχει μήκος $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}=R$

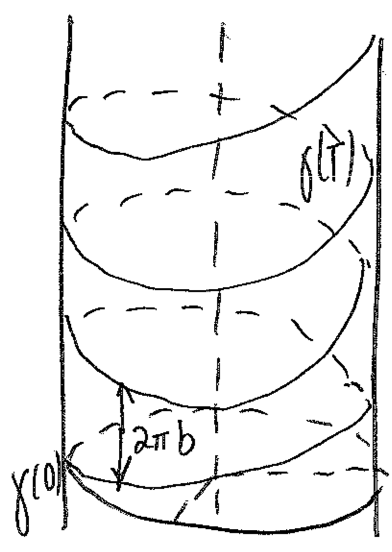
Άρα το μήκος της περιφέρειας του κύκλου είναι



2) Έστω $R>0, b>0$ και $\gamma: R\to R^3$ η έλικα με $\gamma(t)=(R\cos t, R\sin t, bt)$

Η ταχύτητα της γ είναι $\gamma'(t)=(-R\sin t, R\cos t, b)$

Το μήκος της έλικας απ' το σημείο $\gamma(0)$ μέχρι το $\gamma(T)$, $T>0$ ένα $L(\gamma|[0,T])=\int_0^T \sqrt{R^2\sin^2 t+R\cos^2 t+b^2}\,dt=\sqrt{R^2+b^2}\,T$

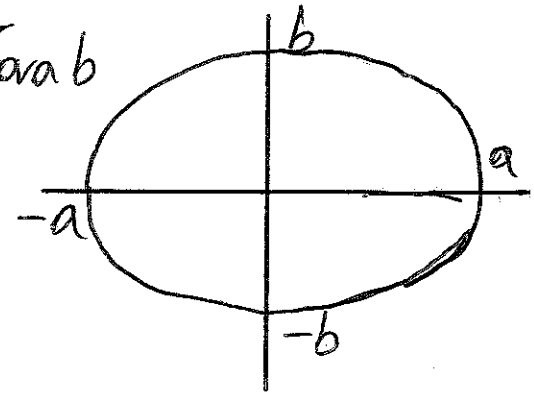


ΗΥ-111

3) Το μήκος της περιφέρειας έλλειψης στο R^2

Έστω $a>b>0$. Η έλλειψη με κέντρο το $O=(0,0)$ και μεγάλο ημιάξονα a και μικρό ημιάξονα b είναι το ίχνος της παραμετρισμένης C^∞ καμπύλης $\gamma:[0,2\pi]\to R^2$ με

$$\gamma(t)=(a\cos t,\ b\sin t)$$



Η ταχύτητα της γ είναι $\gamma'(t)=(-a\sin t, b\cos t)$ οπότε

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}=\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t+b^2\cos^2 t}=$$

$$=\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}=a\sqrt{1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\cos^2 t}=a\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t},$$

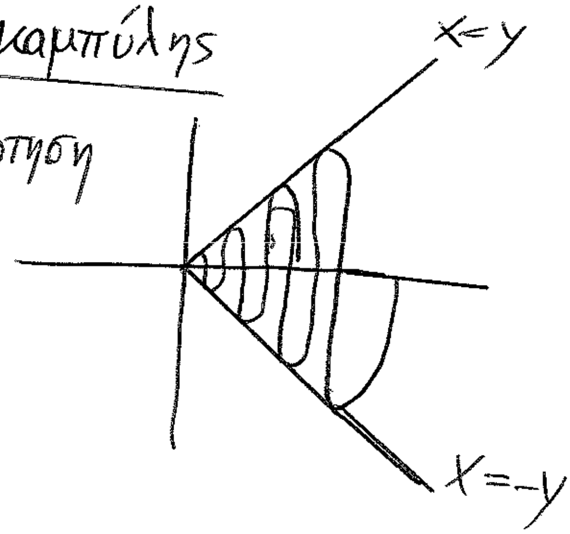
όπου $0<\varepsilon=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1$ (Το ε λέγεται εκκεντρότητα της έλλειψης). Άρα το μήκος της ελλειπτικής περιφέρεια είναι $L(\gamma)=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt,\ 0<\varepsilon<1$

Αυτό το ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται! Λέγεται ελλειπτικό ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα μη-ευθυγραμμίσιμης καμπύλης

Έστω $f:[0,1]\to R$ η συνεχής συνάρτηση

$$f(t)=\begin{cases} t\cos\frac{\pi}{2t}, & 0<t\le 1\\ 0, & t=0\end{cases}$$



και $\gamma:[0,1]\to R^2$ η παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma(t)=(t,f(t))$ που έχει ίχνος το γράφημα της f.

Για κάθε $k\in N$ θεωρούμε την διαμέριση

$$P_k=\left\{0<\frac{1}{4k}<\frac{1}{4k-1}<\frac{1}{4k-2}<\dots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1\right\}$$

Έχουμε $f(0)=0$ και

$$f\left(\frac{1}{4m}\right)=\frac{1}{4m}\cos\frac{\pi}{2\frac{1}{4m}}=\frac{1}{4m}\cos 2m\pi=\frac{1}{4m} \qquad 1\le m\le k$$

$$f\left(\frac{1}{4m-1}\right)=\dots\dots=\frac{1}{4m-1}\cos(4m-1)\frac{\pi}{2}=0$$

$$f\left(\frac{1}{4m-2}\right)=\dots\dots=\frac{1}{4m-2}\cos(4m-2)\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{4m-2}$$

και $f\left(\frac{1}{4m-3}\right)=0$

Άρα $f(P_k)=\left\{0,\frac{1}{4k},0,-\frac{1}{4k-2},0,\dots,\frac{1}{4},0,-\frac{1}{2},0\right\}$

Το μήκος της πολυγωνικής γραμμής που προσεγγίζει το γράφημα της f είναι

$$L(\gamma,P_k)=\sum_{i=1}^{4k}\|\underbrace{\gamma(t_i)}_{(t_i,f(t_i))}-\underbrace{\gamma(t_{i-1})}_{(t_{i-1},f(t_{i-1}))}\|=$$

$$=\sum_{i=1}^{4k}\sqrt{(t_i-t_{i-1})^2+(f(t_i)-f(t_{i-1}))^2}=$$

$$=\sum_{i=1}^{4k}|f(t_i)-f(t_{i-1})|=\left|0-\frac{1}{4k}\right|+\left|0-\frac{1}{4k}\right|+\left|\frac{1}{4k-2}-0\right|+\left|0+\frac{1}{4k-2}\right|$$

$$+\dots+\left|\frac{-1}{2}-0\right|+\left|0+\frac{1}{2}\right|=2\left(\frac{1}{4k}+\frac{1}{4k-2}+\dots+\frac{1}{2}\right]=$$

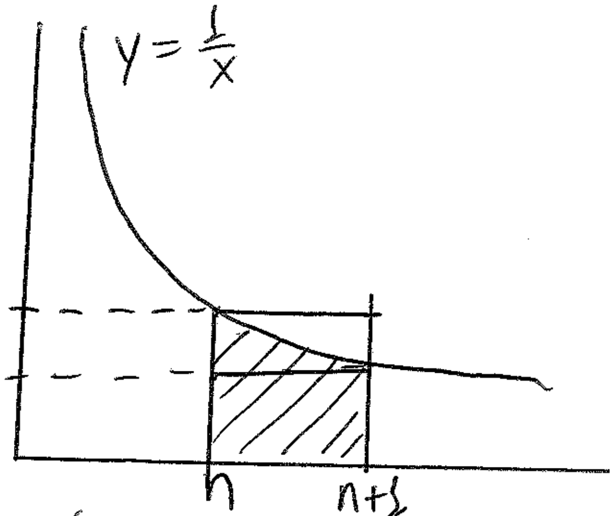
$$=\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k-1}+\dots+1=\sum_{n=1}^{2k}\frac{1}{n}$$

HY-111

Θέλουμε το $\sup\{L(\gamma, P_k)\ k\in\mathbb{N}\} = \lim_{k\to+\infty} L(\gamma, P_k) \geq$

$\geq \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{2k} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Άρα η γ

δεν είναι ευθυγραμμίσιμη, γιατί $L(\gamma) \geq \sup\{L(\gamma, P_k) : k\in\mathbb{N}\} = +\infty$



Λήμμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Απόδειξη Έχουμε $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{n}$

Άρα $\log(k+1) = \int_n^{k+1} \frac{1}{x} dx =$

$= \sum_{n=1}^{k} \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \geq \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+1}$, Αφού $\log(k+1) \to +\infty$, για

$k\to+\infty$, προκύπτει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

ΗΥ-111 ③ 3/3/2015

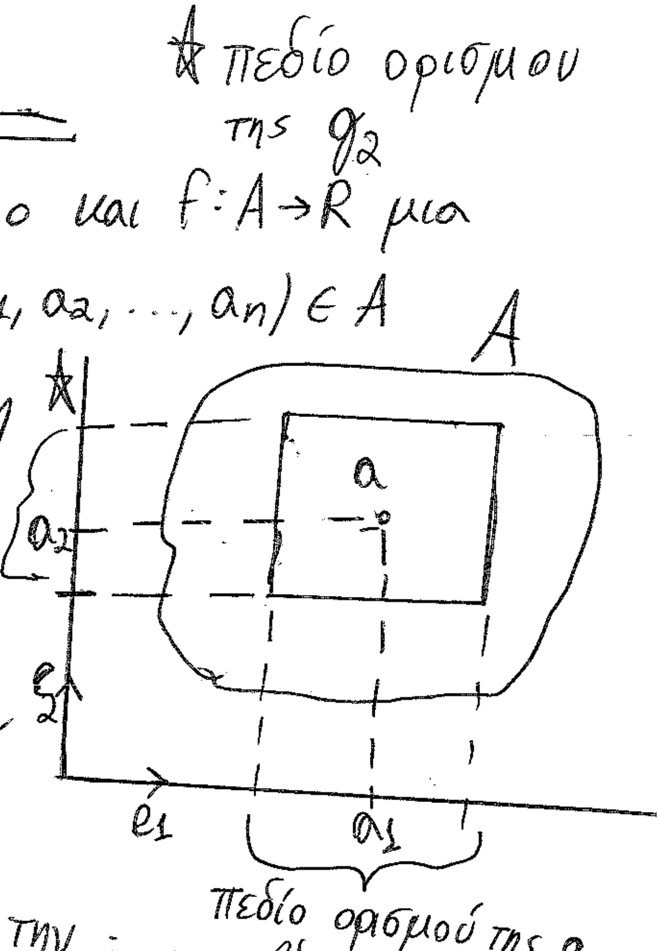
ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Έστω ακόμα $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$

Έστω $1 \leq j \leq n$ και g_j η συνάρτηση

$$g_j(t) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

Η g_j ορίζεται σ' ένα ανοιχτό διάστημα περί το a_j γιατί το A είναι ανοιχτό



Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς την j-μεταβλητή είναι η $g_j'(a_j)$, αν υπάρχει. Όμως $g_j'(a_j) = \lim_{h \to 0} \frac{g_j(a_j+h) - g_j(a_j)}{h}$

δηλαδή $g_j'(a_j) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j+h, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h e_j) - f(a)}{h}$$

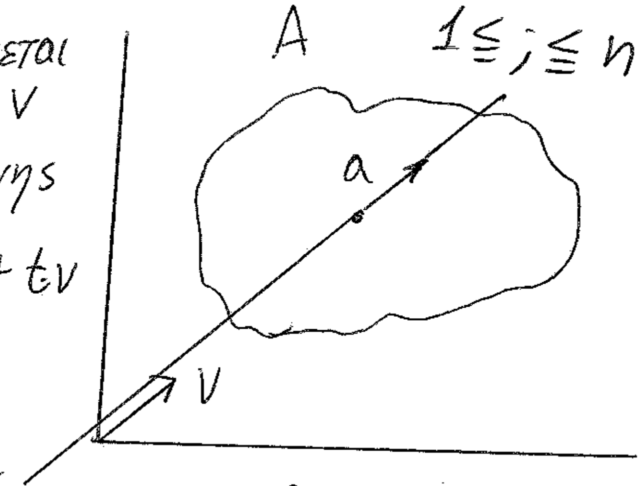
γιατί $(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j+h, a_{j+1}, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_n) + (0, \ldots, 0, \underset{j\text{-θέση}}{h}, 0, \ldots, 0)$

$$= (a_1, \ldots, a_n) + h \cdot (0, \ldots, 0, \underset{j\text{-θέση}}{1}, 0, \ldots, 0) = a + h \cdot e_j$$

$$e_j = (0, \ldots, 0, \underset{j\text{-θέση}}{1}, 0, \ldots, 0)$$

HY-111

<u>Ορισμός</u> Ο $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = g_j'(a_j) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h\cdot e_j) - f(a)}{h}$ λέγεται μερική παράγωγος της f στο a ως προς την j-μεταβλητή, $1 \leq j \leq n$



• Αν $v \in R^n$, $v \neq 0$, η ευθεία που διέρχεται απ' το a και είναι παράλληλη στο v είναι το ίχνος της παραμετρισμένης C^∞ καμπύλης $\gamma : R \to R^n$ με $\gamma(t) = a + tv$

<u>Ορισμός</u>: Η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο a κατά την διεύθυνση του v είναι η

$$f'(a;v) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h\cdot v) - f(0)}{h}, \text{ (αν υπάρχει)}$$

δηλαδή: $f'(a;v) = F'(0)$, $F(t) = f(a + t\cdot v)$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $f : R^n \to R$, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) =$
$= (x_1^2 + x_2, + \dots +, x_n^2) = \|x\|$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

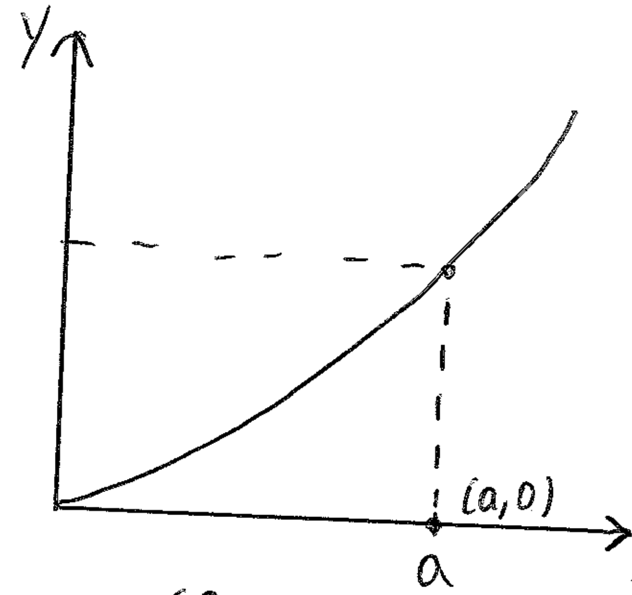
Έχουμε $F(t) = f(a + t\cdot v) = \|a + t\cdot v\|^2 = \langle a + t\cdot v, a + t\cdot v \rangle =$
$= \|a\|^2 + 2\cdot t \langle a, v \rangle + t^2 \|v\|^2$

Άρα $f'(a;v) = 2\langle a, v\rangle$. Ειδικά $\dfrac{df}{dk_j}(a) = 2a_j$

Προφανώς $\dfrac{df}{dk_j}(a) = f'(a; e_j)$, $1 \leq j \leq n$.

HY-111 (Φροντιστήριο) 1 5/3/2015

Φυλλάδιο 3 άσκηση 5



$y=\frac{1}{2\rho}x^2,\ \rho\neq 0 \quad (x, f(x))$

$f(x)=y=\frac{1}{2\rho}x^2$

$(x)'=1$

$(f(x))'=\left(\frac{1}{2\rho}x^2\right)'=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\rho}=\frac{x}{\rho}$

$L=\int_0^a\sqrt{1^2+\left(\frac{x}{\rho}\right)^2}\,dx=\int_0^a\sqrt{1+\frac{x^2}{\rho^2}}\,dx=\int_0^a\sqrt{\frac{\rho^2+x^2}{\rho^2}}=$

$=\int_0^a\frac{\sqrt{\rho^2+x^2}}{\sqrt{\rho^2}}\,dx=\frac{1}{\rho}\int_0^a\sqrt{\rho^2+x^2}\,dx=\frac{1}{\rho}\int_0^a$

Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $\boxed{x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{\rho^2}{t}\right)}$ (1)

$2x=t-\frac{\rho^2}{t} \Rightarrow 2xt=t^2-\rho^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2-2xt-\rho^2=0$ (Δευτεροβάθμια)

$\Delta=\beta^2-4a\gamma=4x^2-4(-\rho^2)=4x^2+4\rho^2=4(x^2+\rho^2)$

$t_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2x\pm 2\sqrt{x^2+\rho^2}}{2}=x\pm\sqrt{x^2+\rho^2}$ Επιλέγω $t=x+\sqrt{x^2+\rho^2}$

$x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{\rho^2}{t}\right)\Rightarrow dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\rho^2}{t}\right)d \Rightarrow$

HY-111 (Φροντιστήριο)

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\rho^2}{t^2}\right)dt$$

$$\sqrt{\rho^2+x^2} = \sqrt{\rho^2+\left(\frac{1}{2}\left(t-\frac{\rho^2}{t}\right)\right)^2} = \sqrt{\rho^2+\frac{1}{4}\left(t-\frac{\rho^2}{t}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\rho^2+\frac{1}{4}\left(t^2-\frac{2\rho^2\cancel{t}}{\cancel{t}}+\frac{\rho^4}{t^2}\right)} = \sqrt{\rho^2+\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}\rho^2+\frac{\rho^4}{4t^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\rho^2+\frac{1}{4}t^2+\frac{\rho^4}{4t^2}} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(2\rho^2+t^2+\frac{\rho^4}{t^2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(t+\frac{\rho^2}{t}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t+\frac{\rho^2}{t}\right)$$

$$L = \frac{1}{\rho}\int_0^a \sqrt{\rho^2+x^2}\,dx$$

$$\int \sqrt{\rho^2+x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}\left(t+\frac{\rho^2}{t}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{\rho^2}{t^2}\right)dt =$$

$$= \int \frac{1}{4}\left(t+\frac{\rho^2}{t}\right)\left(1+\frac{\rho^2}{t^2}\right)dt = \frac{1}{4}\int\left(t+\frac{2\rho^2}{t}+\frac{\rho^4}{t^3}\right)dt =$$

$$= \int\left(\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{t}+\frac{1}{4}\frac{\rho^4}{t^3}\right)dt = \frac{1}{4}\int t\,dt+\frac{\rho^2}{2}\int\frac{1}{t}\,dt+\frac{\rho^4}{4}\int\frac{1}{t^3}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{t^2}{2}+\frac{\rho^2}{2}\ln t-\frac{\rho^4}{4}\frac{1}{2t^2} = \frac{1}{8}t^2+\frac{\rho^2}{2}\ln t-\frac{\rho^4}{8t^2} =$$

$$= \frac{1}{8}\left(t^2-\frac{\rho^4}{t^2}\right)+\frac{\rho^2}{2}\ln t = \frac{1}{8}\left(t-\frac{\rho^2}{t}\right)\left(t+\frac{\rho^2}{t}\right)+\frac{\rho^2}{2}\ln t =$$

ΗΥ-111 (Φροντιστήριο) ② 5/3/2015

$$= \frac{1}{8}\left(t - \frac{\rho^2}{t}\right)\cdot\left(t + \frac{\rho^2}{t}\right) + \frac{\rho^2}{2}\ln t$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{1}{8}\left(x + \sqrt{x^2+\rho^2} - \frac{\rho^2}{x+\sqrt{x^2+\rho^2}}\right)\left(x+\sqrt{x^2+\rho^2} + \frac{\rho^2}{x+\sqrt{x^2+\rho^2}}\right) +$$

$$+ \frac{\rho^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\rho^2}\right) = \frac{1}{8}x\sqrt{x^2+\rho^2} + \frac{\rho^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\rho^2}\right)$$

$$L = \frac{1}{\rho}\int_0^a \sqrt{\rho^2+x^2}\,dx = \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{8}\cdot x\cdot\sqrt{x^2+\rho^2} + \frac{\rho^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\rho^2}\right)\right]_0^a =$$

$$= \frac{1}{8\rho}\left(a\sqrt{a^2+\rho^2}\right) + \frac{1}{2\rho}\left[\rho^2\ln\left(a+\sqrt{a^2+\rho^2}\right) - \rho^2\ln\rho\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left(a\sqrt{a^2+\rho^2}\right) + \frac{\rho}{2}\left(\ln\left(a+\sqrt{a^2+\rho^2}\right) - \ln\rho\right)$$

Φυλλάδιο 3 Άσκηση 6

$$r(t) = \sqrt{[\gamma_1(t)]^2 + [\gamma_2(t)]^2}, \quad \gamma_1(t) = r(t)\cos\varphi(t)$$

$$\gamma_2(t) = r(t)\sin\varphi(t)$$

$$\gamma_1'(t) = -\varphi'(t)\cdot r(t)\sin\varphi(t) + r'(t)\cdot\cos\varphi(t)$$

$$\gamma_2'(t) = r'(t)\cdot\sin\varphi(t) + r(t)\cdot\varphi'(t)\cdot\cos\varphi(t)$$

HY-111 (Φροντιστήριο)

$[\gamma_1'(t)]^2 = \dots$

$[\gamma_2'(t)]^2 = \dots$

$[\gamma_1'(t)]^2 + [\gamma_2'(t)]^2 = (r'(t))^2 + (r(t))^2(\varphi'(t))^2$

Αντικαθιστώ στην (1) και έχω το $L = \int_a^b \sqrt{(\quad)}\, dt$

Άσκηση 1 Φυλλάδιο 4

$L(t) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt \rightarrow$ μήκος καμπύλης

$\log e = \ln$ $\quad f(x) = y = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$ $\quad \sigma = (x, f(x))$

$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$ $\quad f(x) = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$ $\quad \sigma' = (1, f'(x))$ $\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$\ln(f(x)) = (\ln'(f(x))) \cdot f'(x)$

$f'(x) = \frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x-1}} \left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)' = \frac{e^x-1}{e^x+1}\left(\frac{e^x(e^x-1) - e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^2}\right) =$

$= \frac{-2e^x}{(e^x+1)(e^x-1)}$

HY-111 (Φροντιστήριο) ③ 5/3/2015

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\frac{4e^{2x}}{(e^x+1)^2(e^x-1)^2}}\,dx=\int_a^b \frac{\sqrt{e^{4x}-2e^{2x}+1+4e^{2x}}}{e^{2x}-1}\,dx=$$

$$=\int_a^b \frac{\sqrt{(e^{2x}+1)^2}}{e^{2x}-1}\,dx=\int_a^b \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,dx$$

Θέτω $e^{2x}=s$ $\quad 2e^{2x}dx=ds \quad x=a:b$

$$dx=\frac{ds}{2e^{2x}}=\frac{ds}{2s} \quad s=e^{2a}:e^{2b}$$

$$L=\frac{1}{2}\int_{e^{2a}}^{e^{2b}} \frac{1}{s}\cdot\frac{s+1}{s-1}\,ds$$

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{s+1}{s-1}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}$$

$$\frac{A(s-1)}{s(s-1)}+\frac{B\cdot s}{s(s-1)}=\frac{s+1}{s(s-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(s-1)+B\cdot s=s+1$$

Για $s=0$ $\quad -A=1 \Rightarrow A=-1$

Για $s=1$ $\quad B=2$

$$L=\frac{1}{2}\int_{e^{2a}}^{e^{2b}}\frac{s+1}{s(s-1)}\,ds=\frac{1}{2}\int_{e^{2a}}^{e^{2b}}-\frac{1}{s}\,ds+\frac{1}{2}\int_{e^{2a}}^{e^{2b}}\frac{2}{s-1}\,ds=$$

$$=\frac{1}{2}\Big[-\ln s\Big]_{e^{2a}}^{e^{2b}}+\Big[\ln(s-1)\Big]_{e^{2a}}^{e^{2b}}=$$

$$= -\frac{1}{2}\ln e^{2b} + \frac{1}{2}\ln e^{2a} + \ln(e^{2b}-1) - \ln(e^{2a}-1) =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln e^{2a} - \ln e^{2b}) = (a-b+\ln\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}$$