ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ 2016 ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΙ

ΘΕΜΑ 1ο. (2) Εστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}, & \text{όταν } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{όταν } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$ και να ευρεθεί η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου του γραφήματος της f στο σημείο $(0,0,0)$.

(β) Να αποδειχθεί οτι το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ δεν υπάρχει. Είναι η f συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2$.

ΘΕΜΑ 2ο. (1.5) Εστω οτι $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση και $h:(0,+\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$h(r,\phi)=f(r\cos\phi,r\sin\phi).$$

Να αποδειχθεί οτι

$$\left(\frac{\partial h}{\partial r}(r,\phi)\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial h}{\partial\phi}(r,\phi)\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2$$

για κάθε $r>0$, $\phi\in\mathbb{R}$, όπου $x=r\cos\phi$ και $y=r\sin\phi$.

ΘΕΜΑ 3ο. (1) Να ευρεθούν τα σημεία τοπικού μεγίστου, τοπικού ελαχίστου, καθώς και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με

$$f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y$$

ΘΕΜΑ 4ο. (1.5) Εστω $R>0$. Να ευρεθούν πραγματικοί αριθμοί $x\geq 0$, $y\geq 0$ και $z\geq 0$ με σταθερό άθροισμα τετραγώνων $x^2+y^2+z^2=R^2$ τέτοιοι ώστε το γινόμενό τους xyz να είναι το μέγιστο δυνατό.

ΘΕΜΑ 5ο. (1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_B(2y-\frac{1}{2}x)dxdy$, όπου B είναι το τρίγωνο στο $\mathbb{R}^2$ με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(1,1)$ και $(0,2)$.

ΘΕΜΑ 6ο. (1.5) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού

$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x-1)^2+y^2\leq 1,\quad 0\leq z\leq x,\quad y\geq 0\}.$$

ΘΕΜΑ 7ο. (1.5) Αν $R>0$ και

$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2\leq R^2,\quad 0\leq y\leq x,\quad z\geq 0\},$$

να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_K z\,dxdydz.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΠΕΙΡ. ΛΟΓ ΙΙ ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΘΕΜΑ 1ο (α) Προφανώς $f(x,0)=0,\ f(0,y)=0\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Άρα $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Έχουμε τώρα

$$\frac{\left|f(h_1,h_2)-f(0,0)-(0\ 0)\binom{h_1}{h_2}\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\frac{h_1^2h_2^2}{(h_1^2+h_2^4)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\leq$$

$$\leq\frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\leq\frac{h_1^2+h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\sqrt{h_1^2+h_2^2}\quad\forall (h_1,h_2)\neq(0,0)$$

γιατί $\frac{x^2y^2}{x^2+y^4}\leq y^2$ για κάθε $(x,y)\neq(0,0)$.

Άρα η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ και $Df(0,0)=(0,0)$. Το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της f στο $(0,0,0)$ έχει εξίσωση $z=0$, δηλαδή είναι το οριζόντιο επίπεδο.

(β) Για $(x,y)\neq(0,0)$ έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2xy^2(x^2+y^4)-x^2y^2\cdot 2x}{(x^2+y^4)^2}=\frac{2xy^6}{x^2+y^4}.$$

Επειδή $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=0$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(y^2,y)=\frac{2y^8}{(2y^4)^2}=\frac{1}{2}\neq 0$,

το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ δεν υπάρχει. Συνεπώς η $\frac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ δεν είναι συνεχής. Άρα η f δεν είναι συνεχώς διαφορίσιμη.

ΘΕΜΑ 2ο Αν $g(r,\varphi)=(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $g:(0,+\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ τότε $h=f\circ g$. Η f υποτίθεται διαφορίσιμη και η g είναι C^∞, άρα η h είναι διαφορίσιμη και από τον κανόνα αλυσίδας,

$$Dh(r,\varphi)=Df(g(r,\varphi))\cdot Dg(r,\varphi)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi,\ -r\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right)\quad \text{Άρα}$$

$$\frac{\partial h}{\partial r}=\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial h}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y},\ \text{οπότε}$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial h}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\cos\varphi \frac{\partial h}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + \left(-\sin\varphi \frac{\partial h}{\partial x} + \cos\varphi \frac{\partial h}{\partial y}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2.$$

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u> Η f είναι C^∞ και $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2-3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2-12$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι οι λύσεις του συστήματος εξισώσεων

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 \\ y^2 &= 4 \end{aligned} \Rightarrow (x,y) = (1,2) \text{ ή } (1,-2) \text{ ή } (-1,2) \text{ ή } (-1,-2).$$

Επίσης $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

(α) $Hf(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, τοπικό ελάχιστο στο $(1,2)$

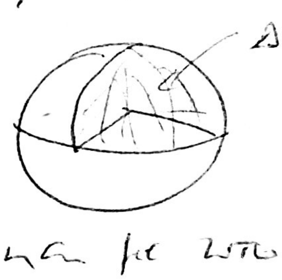
(β) $Hf(1,-2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ σάγμα στο $(1,-2)$

(γ) $Hf(-1,2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ σάγμα στο $(-1,2)$

(δ) $Hf(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ τοπικό μέγιστο στο $(-1,-2)$

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u> Παρατηρούμε, ότι $f(x,y,z) = xyz$, και η f μηδενίζεται αν $x=0$ ή $y=0$ ή $z=0$. Άρα η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο εσωτερικό του συμπαγούς τεμαχίου

$$\Delta = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=R^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}$$



Εφαρμόζουμε λοιπόν το θεώρημα του Lagrange γιατί το $\Delta^\circ = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=R^2,\ x>0, y>0, z>0\}$ είναι λεία επιφάνεια. Ακριβέστερα $\Delta^\circ = h^{-1}(R^2)$, όπου $h: A\to\mathbb{R}$ είναι η C^∞ συνάρτηση με τύπο $h(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ και $A\subset\mathbb{R}^3$ είναι το ανοικτό σύνολο

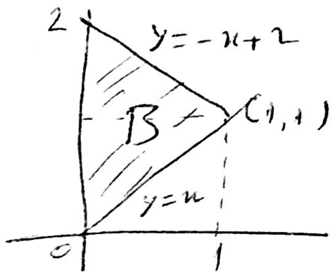
$$A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x>0, y>0, z>0\}.$$

Άρα η λύση του προβλήματος ικανοποιεί τις εξισώσεις του Lagrange

$yz = 2\lambda x$, $xz = 2\lambda y$, $xy = 2\lambda z$ και $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x>0, y>0, z>0$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} xyz = 2\lambda x^2 \\ xyz = 2\lambda y^2 \\ xyz = 2\lambda z^2 \\ x^2+y^2+z^2 = R^2, \ x>0, y>0, z>0 \end{cases} \quad \Rightarrow 3xyz = 2\lambda R^2 \Rightarrow 2\lambda = \frac{3}{R^2} xyz$$

Αντικαθιστώντας έχουμε $yz = \frac{3}{R^2} x^2 yz \Rightarrow x^2 = \frac{R^2}{3} \Rightarrow$ $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$, αφού $yz \neq 0$, $x>0$. Όμοια $y = \frac{R}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{R}{\sqrt{3}}$ και η μέγιστη τιμή είναι $\frac{R^3}{3\sqrt{3}}$.



ΘΕΜΑ 5ο Έχουμε $\displaystyle\int_B \left(2y - \frac{1}{2}x\right) dx\,dy$

$$= \int_0^1 \left(\int_x^{-x+2} \left(2y - \frac{1}{2}x\right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[2\int_x^{-x+2} y\,dy - \frac{1}{2}x \int_x^{-x+2} dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[(x-2)^2 - x^2\right] dx - \frac{1}{2}\int_0^1 x(-x+2-x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 5x + 4)\,dx = \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = \frac{11}{6}.$$

ΘΕΜΑ 6ο Αν $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, \ y \geq 0\}$ τότε $I(K) = \displaystyle\int_B x\,dx\,dy$ και μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες θέτοντας

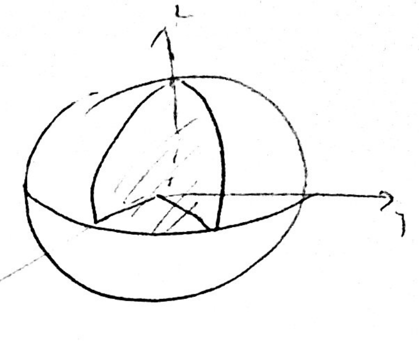
$x = 1 + r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
όπου $0 \leq r \leq 1$ και $0 \leq \varphi \leq \pi$, αφού $y \geq 0$

Άρα $I(K) = \displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^1 (1 + r\cos\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi$

$$= \frac{\pi}{2} + \left(\int_0^1 r^2\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{\pi} \cos\varphi\,d\varphi\right) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

ΘΕΜΑ 7ο Μαθηματικά|2η Σειρά

σε σφαιρικές συντεταγμένες



$$\int_K z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{R} \rho\cos\theta\,\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\int_0^R \rho^3\,d\rho\right)\cdot\left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\right) = \frac{\pi R^4}{32}\cdot\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\pi R^4}{64}\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\,d(2\theta) = \frac{\pi R^4}{64}\int_0^{\pi}\sin t\,dt = \frac{\pi R^4}{32}$$

Με κυλινδρικές συντεταγμένες το ΘΕΜΑ 7ο

$(x,y,z)\in K \iff 0\le r=\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{R^2-z^2},\ 0\le z\le R$ και $0\le\sin\varphi\le\cos\varphi$, δηλαδή $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$. Άρα

$$\int_K z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/4}\int_0^{R}\left(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} z\cdot r\,dr\right)dz\,d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^R z\left(\frac{R^2-z^2}{2}\right)dz = \frac{\pi}{4}\left[\int_0^R \frac{R^2}{2}z\,dz - \int_0^R \frac{z^3}{2}\,dz\right]$$

$$= \frac{\pi R^4}{8}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right] = \frac{\pi R^4}{32}.$$

Με πολικές συντεταγμένες το ΘΕΜΑ 6ο

$(x,y)\in B \iff x^2-2x+1+y^2\le 1$ και $y\ge 0 \iff 0\le r^2\le 2r\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

Άρα $I(K) = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos\varphi} r^2\cos\varphi\,dr\right)d\varphi = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4\varphi\,d\varphi$

$$= \frac{8}{3}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi - \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\varphi\,d\varphi\right]$$

$$= \frac{8}{3}\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos 2\varphi\,d\varphi - \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi\right] = \left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{16}\right)\frac{8}{3} = \frac{8}{3}\cdot\frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{2}$$