ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-118, *"Διακριτά μαθηματικά", Α΄ Γραπτή Εξέταση, Ιανουάριος* 2009

ΘΕΜΑ 1ο (15%)

Ποιές από τις εξής λογικές προτάσεις είναι ταυτολογίες;

α) $p \to (q \vee \neg p)$

β) $p \to (q \to p)$

γ) $(\neg p \wedge \neg q) \to \neg(p \vee q)$

Η απάντηση δίνεται από τους πίνακες αληθείας. Π.χ. για το (γ) πρέπει να έχει τις εξής στήλες:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \vee q)$	$\neg(p \vee q)$	$(\neg p \wedge \neg q)$	$(\neg p \wedge \neg q) \to \neg(p \vee q)$

ΘΕΜΑ 2ο (20%)

Αποδείξατε ότι για δύο οποιαδήποτε σύνολα A, B $\subseteq$ U ισχύει ότι, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, (όπου $\overline{X}$ το *συμπλήρωμα* του X $\subseteq$ U, ως προς το U).

Για την απάντηση πρέπει να δείξουμε ότι (α) εάν κάποιο στοιχείο ανήκει στο $\overline{A \cap B}$ ανήκει και στο $\overline{A} \cup \overline{B}$ και (β) το αντίστροφο. Για το (α) λ.χ. λέμε εάν x $\in$ $\overline{A \cap B}$ τότε x $\notin$ A$\cap$B, άρα ή x $\notin$ A ή x $\notin$ x $\notin$ B, δηλαδή ή $x \in \overline{A}$ ή $\overline{B}$, άρα x $\in$ $\overline{A} \cup \overline{B}$. Τα διαγράμματα Venn δεν επαρκούν (ιδίως όταν δεν καλύπτουν όλες τις περιπτώσεις, λ.χ. A=∅? ή A∩B=∅? ή A⊆ B? *κοκ)*

ΘΕΜΑ 3ο (20%)

Σε ένα τηλεπαιχνίδι ο παίκτης (= εσείς) βλέπει 4 κουτιά, 1 από τα οποία περιέχει κάποιο δώρο, ενώ τα υπόλοιπα 3 είναι κενά. Ο παίκτης διαλέγει ένα εξ αυτών. Εφόσον απομένουν 3 κουτιά και έναν μόνον περιέχει το δώρο, 2 εξ αυτών (ή και τα 3) είναι κενά. Ο παρουσιαστής διαλέγει ένα κενό κουτί, το ανοίγει μπροστά στον παίκτη και τον ρωτά εάν θέλει να αναθεωρήσει την απόφασή του επιλέγοντας ένα από τα εναπομείναντα δύο κουτιά. Αν ο παίκτης πάντοτε αλλάζει την απόφασή του, επιλέγοντας ένα από τα δύο εναπομείναντα κουτιά, δείξατε ότι αυξάνει την πιθανότητα να κερδίσει (από το προφανές ¼ που ήταν αρχικά).

Το σκεπτικό είναι απλό: εάν ο παίκτης επιμείνει στην αρχικά τυχαία επιλογή του η πιθανότητα κέρδους είναι φυσικά 1/4 επί '1' (έστω ότι το δώρο αξίζει '1'). Εάν όμως αλλάξει τότε με πιθανότητα 1/4 έχει κέρδος '0' (όταν η αρχική επιλογή του ήταν σωστή), και με πιθανότητα 3/4 × ½ κερδίζει '1', (όταν η αρχική επιλογή του ήταν εσφαλμένη (×3/4) – διότι τότε το δώρο είναι οπωσδήποτε στα δύο υπόλοιπα κουτιά (×1/2). Εάν λοιπόν αλλάζει την επιλογή του, το αναμενόμενο κέρδος είναι 1/4×'0' + 3/4 ×1/2×'1' = 3/8 > 1/4.

ΘΕΜΑ 4ο (15%)

Έστω Π όλα τα κυρτά πολύγωνα (στο επίπεδο). Ορίζουμε σε αυτά την διμελή σχέση Α «χωρά-στό» Β, Α $\Rightarrow$ Β, εάν το Α, (μετακινούμενο ή περιστρεφόμενο, χωρίς καμμία παραμόρφωση όμως), χωρά εντός του Β χωρίς να ακουμπά στο σύνορό του.

α) Είναι αυτή η σχέση μια σχέση διάταξης επί των στοιχείων του Π;

β) Είναι σχέση ολικής διάταξης;

α) Για να είναι σχέση διάταξης πρέπει να ισχύει η μη-ανακλαστική, η αντι-συμμετρική και η μεταβατική ιδιότητα. Η (α) ισχύει διότι ένα σχήμα δεν χωρά στο εσωτερικό του εαυτού του, η αντι-συμμετρική διότι εάν το Α χωρά στο Β τότε το Β δεν χωρά στο Α (αφού έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από αυτό), και η μεταβατική κατά προφανή τρόπο *β) Για να είναι η διάταξη ολική θα πρέπει για δύο οποιαδήποτε κυρτά πολύγωνα το 1ο να χωρά στο 2ο ή το αντίστροφο. Αλλά αυτό δεν συμβαίνει: λ.χ. ένα ισόπλευro τρίγωνο εμβαδού '1' δεν χωράει σε ένα τετράγωνο εμβαδού '1', ούτε το αντίστροφο.*

ΘΕΜΑ 5ο (20%)

α) Δείξατε ότι σε ένα δένδρο με N κόμβους το πλήθος των ακμών είναι πάντοτε N–1.

β) Δείξατε ότι σε ένα γράφημα (χωρίς κατευθύνσεις στις ακμές) υπάρχουν πάντοτε δύο (τουλάχιστον) κόμβοι με τον ίδιο βαθμό.

(Υπόδειξη: θυμηθείτε την «αρχή του περιστερώνα»).

α) Για την απόδειξη αρκεί μια επαγωγή: Έστω K οι κόμβοι και A οι ακμές. Εάν το δένδρο έχει έναν μόνον κόμβο τότε K = 1 και A = 0, και K = A+1. Εάν το δένδρο έχει περισσότερους από ένα κόμβο τότε θα έχει ένα τουλάχιστον κόμβο-φύλλο φ, δηλαδή κόμβο με μία μόνον ακμή να πέφτει σε αυτό. Χωρίς τον φ η σχέση K = A+1 ισχύει. Βάζοντας τον φ στο δένδρο οι κόμβοι γίνονται K+1, οι ακμές A+1, και η σχέση γίνεται (K+1) = (A+1)+1 που ισχύει επίσης αφού πρίν ίσχυε K = A+1.

β) Έστω ότι το γράφημα έχει N κόμβους, Οι πιθανοί βαθμοί των κόμβων είναι 0 έως N–1. Αλλά εάν κάποιος κόμβος χ έχει βαθμό 0 (δηλαδή δεν έχει κανέναν γειτονικό) τότε δεν μπορεί να υπάρχει κανένας κόμβος ψ με βαθμό N–1, διότι τότε ο ψ θα είχε όλους τους άλλους κόμβους γειτονικούς δηλαδή και τον χ, ο οποίος όμως είπαμε ότι δεν έχει κανέναν γειτονικό. Όμοια εάν κάποιος κόμβος έχει βαθμό N–1 τότε κανένας δεν έχει βαθμό 0. Επομένως οι N κόμβοι 1..N αντιστοιχίζονται σε N–1 βαθμούς: είτε από το 0 έως το N–2, είτε από το 1 έως το N–1. Από την αρχή του περιστερώνα δύο τουλάχιστον θα πρέπει να αντιστοιχιστούν σε ίσους βαθμούς.

ΘΕΜΑ 6ο (20%)

α) Εάν με $|X|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων ενός (πεπερασμένου) συνόλου X, δείξατε ότι για δύο πεπερασμένα σύνολα A και B ισχύει ότι $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$.

β) Δείξατε την ανάλογη σχέση για τρία σύνολα: $|A\cup B\cup \Gamma| = |A|+|B|+|\Gamma|-|A\cap B|-$(κλπ-κλπ). Επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε την προηγούμενη σχέση (α).

γ) Έστω ότι ένας αριθμός ν είναι γινόμενο τριών παραγόντων, των πρώτων αριθμών p_1, p_2 και p_3. Γνωρίζουμε ότι αν ένας άλλος αριθμός μ έχει κοινό πρώτο παράγοντα με τον ν, αυτός θα είναι κατ' ανάγκη ο p_1, ή ο p_2, ή ο p_3, δηλαδή το μ θα είναι πολλαπλάσιο του p_1, ή/και του p_2, ή και του p_3. Μπορείτε να δώσετε μια έκφραση για το πλήθος των αριθμών που έχουν κοινό παράγοντα με τον ν, συναρτήσει του ν και των παραγόντων p_1, p_2, p_3;

(Υπόδειξη: εάν το α διαιρεί το ν, υπάρχουν ακριβώς $^{\nu}/_{\alpha}$ πολλαπλάσια του α από το α έως το ν.)

α) Η ένωση $A\cup B$ γράφεται ως ένωση τριών ξένων συνόλων: $(A-B)$, $(A\cap B)$ και $(B-A)$. δηλαδή, $|A\cup B| = |A-B|+|B-A|+|A\cap B|$. Το A γράφεται ως ένωση δύο ξένων δυνόλων, $A-B$ και $A\cap B$ δηλαδή $|A| = |A-B|+|A\cap B| \Rightarrow |A-B| = |A|-|A\cap B|$, και αναλόγως $|B-A| = |B|-|A\cap B|$. Όλα μαζί δίνουν, $|A\cup B| = (|A|-|A\cup B|) +(|B|-|A\cup B|)+|A\cap B| = |A|+|B|-|A\cap B|$.

β) Η ανάλογη σχέση για τρία σύνολα είναι $|A\cup B\cup \Gamma| = |A|+|B|+|\Gamma|-|A\cap B|-|B\cap \Gamma|-|\Gamma\cap A|+|A\cap B\cap \Gamma|$, και προκύπτει από την (α) εάν βάλουμε στη θέση του B το $B\cup \Gamma$:

$$
\begin{aligned}
|A\cup(B\cup \Gamma)| &= |A|+|B\cup\Gamma|-|A\cap(B\cup\Gamma)| \\
&= |A|+|B|+|\Gamma|-|B\cap\Gamma|-|(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)| \quad (\text{από } (\alpha)) \\
&= |A|+|B|+|\Gamma|-|B\cap\Gamma|-|(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)| \\
&= |A|+|B|+|\Gamma|-|B\cap\Gamma|-(|(A\cap B)|+| (A\cap\Gamma)|-|(A\cap B)\cap(A\cap\Gamma)| \\
&= |A|+|B|+|\Gamma|-|B\cap\Gamma|-|(A\cap B)|-| (A\cap\Gamma)|+ |A\cap B\cap\Gamma)|
\end{aligned}
$$

γ) Οι αριθμοί πού έχουν κοινό παράγοντα με το ν θα είναι πολλαπλάσιο του p_1, ή/και του p_2, ή και του p_3. Έστω N_k τα πολλαπλάσια του p_k ως το ν, δηλαδή τα $1p_k$, $2p_k$, $3p_k$, …, $(\nu/p_k)p_k$. Προφανώς $|N_k| = (\nu/p_k)$. Τα πολλαπλάσια λ.χ. του p_1p_3 είναι ν δια p_1p_3. Για να βρούμε το μέγεθος χ του $N_1\cup N_2\cup N_3$ εφαρμόζουμε τον τύπο του (β), για να πάρουμε, $\chi = (\nu/p_1)+(\nu/p_2)+(\nu/p_3)-(\nu/p_1p_2)-(\nu/p_2p_3)-(\nu/p_3p_1)+(\nu/p_1p_2p_3) = \ldots$ κλπ.