ΗΥ-180 - Λογική
Διδάσκων: Δ. Πλεξουσάκης
Εαρινό Εξάμηνο 2010 - 2011

Λύσεις Προόδου

1. Για οποιεσδήποτε προτάσεις A και B και σύνολο προτάσεων S του προτασιακού λογισμού δείξτε με τυπικό τρόπο ότι:

(α) S |= A↔B αν και μόνο αν S∪{A} |= B και S∪{B} |= A

Αν S |= A↔B, τότε S |= A→B και S |= B→A.

Αν επεκτείνουμε το σύνολο S με την πρόταση A, τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις: είτε το νέο σύνολο είναι μη ικανοποιήσιμο (διότι η A αντικρούει κάποια από τις προτάσεις στο S) οπότε από ένα μη ικανοποιήσιμο σύνολο μπορούμε να συμπεράνουμε οποιαδήποτε πρόταση, ή παραμένει ικανοποιήσιμο, οπότε μπορούμε να συμπεράνουμε ό,τι μπορούσαμε και με το S και επιπλέον μπορούμε να συμπεράνουμε και την πρόταση A. Δηλαδή S∪{A} |= A→B και S∪{A} |= A, το οποίο ισοδυναμεί με S∪{A} |= A ∧ (A→B), που τελικά δίνει S∪{A} |= B.

Με τον ίδιο τρόπο αν επεκτείνουμε το σύνολο S με την πρόταση B, θα έχουμε S∪{B} |= B→A και S∪{B} |= B, το οποίο ισοδυναμεί με S∪{B} |= B ∧ (B→A), που τελικά δίνει S∪{B} |= A.

Για το αντίστροφο έχουμε τα εξής:

Αν S∪{A} |= B, τότε έχουμε δύο περιπτώσεις

- Το A είναι ψευδές. Αν A ψευδές, τότε A→B αληθές. Άρα μπορούμε από το σύνολο S να συμπεράνουμε A→B, επομένως S |= A→B.
- Το A είναι αληθές. Άρα από το S μπορούμε να συμπεράνουμε τόσο το A όσο και το B. Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε και το A→B, επομένως S |= A→B.

Άρα και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε στο S |= A→B.

Με τον ίδιο τρόπο έχουμε ότι αν S∪{B} |= A, τότε έχουμε δύο περιπτώσεις

- Το B είναι ψευδές. Αν B ψευδές, τότε B→A αληθές. Άρα μπορούμε από το σύνολο S να συμπεράνουμε B→A, επομένως S |= B→A.
- Το B είναι αληθές. Άρα από το S μπορούμε να συμπεράνουμε τόσο το B όσο και το A. Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε και το B→A, επομένως S |= B→A.

(β) Α |= ¬Β αν και μόνο αν η πρόταση Α^Β είναι αντινομία.

Έστω ότι η πρόταση Α^Β δεν είναι αντινομία. Άρα θα υπάρχει ικανοποιήσιμο σύνολο προτάσεων S τέτοιο ώστε S |= Α^Β. Άρα θα ισχύει ότι S |= Α και S |= Β. Αφού Α |= ¬Β, τότε και S |= ¬Β. Επομένως καταλήξαμε σε άτοπο (συμπεράναμε από το S και το Β και το ¬Β) άρα η υπόθεση είναι λανθασμένη, δηλαδή η Α^Β είναι αντινομία.

Για το αντίστροφο χρησιμοποιούμε πάλι την απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι δεν ισχύει ότι Α |= ¬Β. Τότε εξ' ορισμού ισχύει ότι Α |= Β. Οπότε αν γνωρίζω ότι το Α ισχύει μπορώ να συμπεράνω ότι το Β ισχύει (άρα και ότι το Α^Β ισχύει), άρα η Α^Β δεν είναι αντινομία. Καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε η υπόθεση είναι λανθασμένη, άρα Α |= ¬Β.

2. Έστω η ακόλουθη πρόταση $\left(\boldsymbol{P} \to \left((\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{S}\right)\right) \wedge (\neg\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q} \vee (\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{S}))$. Μετατρέψτε τη σε Διαζευκτική και σε Συζευκτική Κανονική Μορφή. Δείξτε όλα τα βήματα της μετατροπής.

$\left(\boldsymbol{P} \to \left((\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{S}\right)\right) \wedge (\neg\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q} \vee (\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{S})) \equiv$

$(\boldsymbol{P} \to (\neg(\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R}) \vee \boldsymbol{S})) \wedge (\neg\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q} \vee \neg\boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{S}) \equiv$

$\left(\neg\boldsymbol{P} \vee \left((\neg\boldsymbol{Q} \wedge \neg\boldsymbol{R}) \vee \boldsymbol{S}\right)\right) \wedge (\neg\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q} \vee \neg\boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{S})$

$(\neg\boldsymbol{P} \vee (\neg\boldsymbol{Q} \wedge \neg\boldsymbol{R}) \vee \boldsymbol{S}) \wedge (\neg\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q} \vee \neg\boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{S}) \quad \textbf{(1)}$

CNF

$(\neg\boldsymbol{P} \vee \neg\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{S}) \wedge (\neg\boldsymbol{P} \vee \neg\boldsymbol{R} \vee \neg\boldsymbol{S}) \wedge (\neg\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q} \vee \neg\boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{S}) \equiv$

$(\neg\boldsymbol{P} \vee \neg\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{S}) \wedge (\neg\boldsymbol{P} \vee \neg\boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{S}).$

Δεδομένης της σχετικά απλής μορφής της πρότασης σε CNF (μόνο 2 όροι σύζευξης) μας συμφέρει να μην επιστρέψουμε στην πρόταση (1), αλλά να κάνουμε απευθείας επιμερισμό, οπότε έχουμε:

$(\neg\boldsymbol{P} \wedge \neg\boldsymbol{P}) \vee (\neg\boldsymbol{P} \wedge \neg\boldsymbol{R}) \vee (\neg\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{S}) \vee (\neg\boldsymbol{Q} \wedge \neg\boldsymbol{P}) \vee (\neg\boldsymbol{Q} \wedge \neg\boldsymbol{R}) \vee (\neg\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{S})$
$\vee (\boldsymbol{S} \wedge \neg\boldsymbol{P}) \vee (\boldsymbol{S} \wedge \neg\boldsymbol{R}) \vee (\boldsymbol{S} \wedge \boldsymbol{S}) \equiv$

$\neg\boldsymbol{P} \vee (\neg\boldsymbol{P} \wedge \neg\boldsymbol{R}) \vee (\neg\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{S}) \vee (\neg\boldsymbol{Q} \wedge \neg\boldsymbol{P}) \vee (\neg\boldsymbol{Q} \wedge \neg\boldsymbol{R}) \vee (\neg\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{S}) \vee (\boldsymbol{S} \wedge \neg\boldsymbol{R}) \vee \boldsymbol{S} \equiv$

$\neg \boldsymbol{P} \vee (\neg \boldsymbol{Q} \wedge \neg \boldsymbol{R}) \vee \boldsymbol{S}.$

3. Χρησιμοποιείστε μορφολογική παραγωγή για να αποδείξετε τα ακόλουθα:

(α) $\{(\boldsymbol{S} \rightarrow \neg \boldsymbol{P}) \wedge (\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}), \boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{S}, \neg \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{P}\} \vDash \boldsymbol{R}$

(1) $(S \rightarrow \neg P) \wedge (P \rightarrow Q)$

(2) $Q \rightarrow S$

(3) $\neg R \rightarrow P$

(4) Υποπαραγωγή

- (4.1) $\neg R$ (υπόθεση υποπαραγωγής)
- (4.2) P (από (4.1), (3) με απαλοιφή →)
- (4.3) $(S \rightarrow \neg P)$ (από (1) με απαλοιφή ∧)
- (4.4) $(P \rightarrow Q)$ (από (1) με απαλοιφή ∧)
- (4.5) Q (από (4.2), (4.4) με απαλοιφή →)
- (4.6) S (από (2), (4.5) με απαλοιφή →)
- (4.7) $\neg P$ (από (4.6), (4.3) με απαλοιφή →)

(5) $\neg\neg R$ (από (4) με εισαγωγή ¬)

(6) R (από (5) με απαλοιφή ¬)

(β) $\{\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}, \neg \boldsymbol{Q}\} \vDash \boldsymbol{R}$

(1) P

(2) $P \rightarrow Q$

(3) $\neg Q$

(4) Υποπαραγωγή

- (4.1) $\neg R$ (υπόθεση υποπαραγωγής)
- (4.2) P (από (1))
- (4.3) Q (από (1), (2) με απαλοιφή →)
- (4.4) $(P \rightarrow Q)$ (από (1) με απαλοιφή ∧)
- (4.5) Q (από (4.2), (4.4) με απαλοιφή →)

(5) $\neg\neg R$ (από (3), (4) με εισαγωγή ¬)

(6) R (από (5) με απαλοιφή ¬)

(γ) $(\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R}) \to \left((\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}) \to (\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{R})\right)$

(1) Υποπαραγωγή

(1.1) $(Q \to R)$ (υπόθεση υποπαραγωγής)

(1.2) Υποπαραγωγή

(1.2.1) $(P \to Q)$ (υπόθεση υποπαραγωγής)

(1.2.2) Υποπαραγωγή

(1.2.2.1) P (υπόθεση υποπαραγωγής)

(1.2.2.2) Q (από (1.2.1) και απαλοιφή →)

(1.2.2.3) R (από (1.1),(1.2.2.2) και απαλοιφή →)

(1.2.3) $(P \to R)$ (από (1.2.2) και εισαγωγή →)

(1.3) $(P \to Q) \to (P \to R)$ (από (1.2) και εισαγωγή →)

(2) $(Q \to R) \to \left((P \to Q) \to (Q \to R)\right)$ από (1) και εισαγωγή →)