(1)

1η Σειρά Ασκήσεων 119

Αλέξανδρος Μάραντος
3329

Άσκηση 1

$u+v+w+z = 8$ (1)

$u + w + z = 5$ (2)

$u + w = 4$ (3)

Ποια η τομή, αν $u = 1$

α) Γνωρίζουμε ότι η τομή των (2) και (3) είναι μία ευθεία (αποδεικνύεται γεωμετρικά). Το επίπεδο (1) // (2) Αν δεν υπάρχει 4η διάσταση. Αφού υπάρχει όμως η (1) περιέχει όλα τα σύνολα του επιπέδου (2) και όλα τα σύνολα της ευθείας (3). Επομένως η τομή των (1),(2),(3) ή τα κοινά τους σημεία είναι η ευθεία που αποτελεί την τομή των (2),(3)

Άρα η τομή είναι μία ευθεία

β)
$$\begin{cases} u+v+w+z=8 \\ u+w+z=5 \\ u+w=4 \\ u=1 \end{cases} \quad \begin{cases} w=3 \\ u=1 \end{cases} \quad \begin{cases} z=1 \\ w=3 \\ u=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{v=3} \\ \boxed{z=1} \\ \boxed{w=3} \\ \boxed{u=1} \end{cases}$$

Άρα η τομή είναι το σημείο του τετραδιάστατου χώρου

A(1, 3, 3, 1)

Ασκηση 2

α)

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \\ 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[\lambda_{3,1}=1]{\lambda_{2,1}=2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\lambda_{3,2}=2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 3/5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda_{2,1}=1}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda_{1,2}=-3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72/5 \\ 7/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72/10 \\ 7/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

$u = 72/10$

$v = 7/5$

$w = 3/5$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda_{2,1}=1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda_{3,1}=2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda_{3,2}=1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda_{2,3}=1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda_{1,3}=1}$$

3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda_{1,2}=1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{u = 1}$

$\boxed{v = 4}$

$\boxed{w = 1}$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\lambda_{3,1}=1]{\lambda_{2,1}=2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -16 \\ -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{γραμμών } 2,3]{\text{εναλλαγή}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 16 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\lambda_{2,3}=1]{\lambda_{1,3}=2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda_{1,2}=2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{γραμμών } 2,3]{\text{επαναφορά εναλλαγής}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{u = 4}$

$\boxed{v = 1}$

$\boxed{w = 2}$

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΜΑΡΑΝΤΟΣ 3329 $1^Η$ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΗΥ 119

Ασκηση 3

α) $$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot 2 + (-2)\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 3\cdot 2 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

β) $$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + (-3)(-2) & 2\cdot(-1) + (-3)\cdot 2 & 2\cdot 1 + 0\cdot(-3) \\ (-2)\cdot 3 + 4\cdot(-2) & (-2)(-1) + 4\cdot 2 & (-2)\cdot 1 + 4\cdot 0 \\ 1\cdot 3 + 2\cdot(-2) & 1\cdot(-1) + 2\cdot 2 & 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & -8 & 2 \\ -14 & 10 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

γ) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 1 \\ 1/2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 1 + 0\cdot 2 & -1 + (-2) + 0 & 1 + 1 + 0 \\ 2\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 6 & -2 + 2 - 3 & 2 - 1 + 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -\frac{11}{2} & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ασκηση 4

Εστω $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & 0 \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix}$

ακολουθώντας τους νόμους του πολ/μου πινάκων

5

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} a_{1,1}\cdot b_{1,1}+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ a_{2,1}\cdot b_{1,1}+a_{2,2}b_{2,1}+0 & 0+a_{2,2}b_{2,2}+0 & 0+0+0 \\ a_{3,1}\cdot b_{1,1}+a_{3,2}b_{2,3}+a_{3,3}b_{3,1} & 0+a_{3,2}b_{2,2}+a_{3,3}b_{3,2} & 0+0+a_{3,3}b_{3,3} \end{bmatrix}$$

1ος νόμος

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1}\cdot b_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1}b_{1,1}+a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,2} & 0 \\ a_{3,1}\cdot b_{1,1}+a_{3,2}b_{2,3}-a_{3,3}b_{3,1} & a_{3,2}b_{2,2}+a_{3,3}b_{3,2} & a_{3,3}b_{3,3} \end{bmatrix}$$

δηλαδή κάτω τριγωνικός

2ος Νόμος

$$= \left[b_{1,1}\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{bmatrix} + b_{2,1}\begin{bmatrix} 0 \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{bmatrix} + b_{3,1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{3,3} \end{bmatrix} \quad 0\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{bmatrix} + b_{2,2}\begin{bmatrix} 0 \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{bmatrix} + b_{2,3}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{3,3} \end{bmatrix} \quad 0\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{bmatrix} + b_{3,3}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{3,3} \end{bmatrix} \right]$$

ο ίδιος κάτω τριγωνικός

3ο Νόμος

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}[b_{1,1}\ 0\ 0] + 0[b_{2,1}\ b_{2,2}\ 0] + 0[0\ 0\ b_{3,3}] \\ a_{2,1}[b_{1,1}\ 0\ 0] + a_{2,2}[b_{2,1}\ b_{2,2}\ 0] + 0[0\ 0\ b_{3,3}] \\ a_{3,1}[b_{1,1}\ 0\ 0] + a_{3,2}[b_{2,1}\ b_{2,2}\ 0] + a_{3,3}[0\ 0\ b_{3,3}] \end{bmatrix}$$

και θα βγει πάλι ο ίδιος κάτω τριγωνικός

4ος Νόμος

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{bmatrix}[b_{1,1}\ 0\ 0] + \begin{bmatrix} 0 \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{bmatrix}[b_{2,1}\ b_{2,2}\ 0] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{3,3} \end{bmatrix}[0\ 0\ b_{3,3}]$$

όπου θα καταλήξει πάλι στον ίδιο κάτω τριγωνικό

Ασκηση 5

a) $$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & 2 \\ 6 & 9 & 8 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\lambda_{3,1}=3} \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ ο U είναι ο $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ και άρα ο $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ασκηση 6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda_{2,1}=1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda_{3,1}=1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ως $D \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ δεν έγιναν εναλλαγές άρα $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΜΑΡΑΝΤΟΣ 3329 1Η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΗΥ 119

(7)

$$\overset{P}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}\cdot\overset{A}{\begin{bmatrix}2&3&3\\0&5&7\\6&9&8\end{bmatrix}}=\overset{L}{\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}}\cdot\overset{D}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

β)

$$A_2=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&6&3\\2&2&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\lambda_{2,1}=3}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&0&0\\2&2&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{γραμμ } 2,3]{\text{εναλλαγή στη}}\begin{bmatrix}1&2&1\\2&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\lambda_{3,1}=2}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-2&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad U=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad L=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}$$

και $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ Άρα $\overset{P}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}}\cdot\overset{A}{\begin{bmatrix}1&2&1\\3&6&3\\2&2&0\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda_{21}=\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 9 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[2,3]{\text{εναλ}} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda_{21}=1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ Άρα } \overset{P}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \overset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}} = \overset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \overset{D}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}} \overset{U}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Άσκηση 7

α)

$$A_1: \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\lambda_{2,1}=1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\lambda_{3,2}=2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{\lambda_{2,3}=1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1/2 \end{array}\right] \text{ Άρα } A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1/2 \\ 1 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

β)

$$A_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\lambda_{2,1}=\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\lambda_{3,1}=-1}$$

9

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\lambda_{2,3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 & 0 & 1 & \text{[illegible]} \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{\lambda_{1,2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & -2/3 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1/12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2/3 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right] \quad A_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 & -1/12 \\ 0 & -2/3 & -1/6 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 8

$$B = (A^2)^{-1} = (A \cdot A)^{-1} \iff B = (A \cdot A)^{-1}$$

$$B = A^{-1} \cdot A^{-1} \quad (\text{ιδιότητα})$$

πολλαπλασιάζω και τα 2 μέλη με A

$$A \cdot B = A \cdot A^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$AB = I \cdot A^{-1}$$

$$\underline{AB = A^{-1}}$$