

Γραμμική Άλγεβρα

Αντιστροφή πίνακα 2×2 με τον αλγόριθμο Gauss-Jordan

Ας είναι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $a_{11} \neq 0$. Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Πρώτα κάνουμε απαλοιφή του στοιχείου στη δεύτερη γραμμή και πρώτη στήλη, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή με $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ και προσθέτοντας στη δεύτερη. Προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \end{array} \right].$$

Για να είναι ο πίνακας μη ιδιόμορφος, απαιτείται όπως $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Δ είναι η ορίζουσα του πίνακα. Άρα ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος, εφόσον η ορίζουσά του δεν μηδενίζεται. Στη συνέχεια διαιρούμε κατάλληλα, ώστε στη διαγώνιο του πίνακα που βρίσκεται αριστερά να έχουμε 1. Δηλαδή, διαιρούμε κάθε γραμμή με το διαγώνιο στοιχείο, και παίρνουμε τον πίνακα

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{array} \right].$$

Μετά γίνεται απαλοιφή από κάτω προς τα πάνω και συγκεκριμένα του στοιχείου της πρώτης γραμμής και δεύτερης στήλης, πολλαπλασιάζοντας με $-\frac{a_{12}}{a_{11}}$ τη δεύτερη γραμμή και προσθέτοντάς την στην πρώτη. Παίρνουμε τον πίνακα

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{a_{11}} + \frac{a_{21}a_{12}}{\Delta a_{11}} & -\frac{a_{12}a_{11}}{\Delta a_{11}} \\ 0 & 1 & -\frac{a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{array} \right].$$

Τελικά βρίσκουμε τον αντίστροφο του πίνακα A , εφόσον $\Delta \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$