

# Διαίρεση

- *Ορισμός (13):* Έστω σχέσεις  $R, S$  με  $Head(R) = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ,  $B_1, B_2, \dots, B_k\}$  και  $Head(S) = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$  με  $n, k \geq 0$ . Το αποτέλεσμα της διαίρεσης  $R \div S$  είναι μια σχέση  $T$ :
  - με σχήμα  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$
  - με πλειάδες  $t$  τέτοιες ώστε, για κάθε πλειάδα  $s \in S$ , η πλειάδα  $t \parallel s$  ανήκει στην  $R$

# Διαίρεση (1) - $R \div S$

*R*

A	B	C
a1	b1	c1
a2	b1	c1
a1	b2	c1
a1	b2	c2
a2	b1	c2
a1	b2	c3
a1	b2	c4
a1	b1	c5

*S*

C
c1



*Temp*

A	B
a1	b1
a2	b1
a1	b2



$R \div S$

A	B
a1	b1
a2	b1
a1	b2

## Διαίρεση (2)

*R*

A	B	C
a1	b1	c1
a2	b1	c1
a1	b2	c1
a1	b2	c2
a2	b1	c2
a1	b2	c3
a1	b2	c4
a1	b1	c5

*S*

C
c1
c2

*Temp*

A	B
a1	b1
a2	b1
a1	b2

*R ÷ S*

A	B
a2	b1
a1	b2

# Διαίρεση (3)

*R*

A	B	C
a1	b1	c1
a2	b1	c1
a1	b2	c1
a1	b2	c2
a2	b1	c2
a1	b2	c3
a1	b2	c4
a1	b1	c5

*S*

C
c1
c2
c3
c4

*Temp*

A	B
a1	b1
a2	b1
a1	b2

*R ÷ S*

A	B
a1	b2

## Διαίρεση (4)

*R*

A	B	C
a1	b1	c1
a2	b1	c1
a1	b2	c1
a1	b2	c2
a2	b1	c2
a1	b2	c3
a1	b2	c4
a1	b1	c5

*S*

B	C
b1	c1



*Temp*

A
a1
a2



*R ÷ S*

A
a1
a2

## Διαίρεση (4)

*R*

A	B	C
a1	b1	c1
a2	b1	c1
a1	b2	c1
a1	b2	c2
a2	b1	c2
a1	b2	c3
a1	b2	c4
a1	b1	c5

*S*

B	C
b1	c1
b2	c1



*Temp*

A
a1
<del>a2</del>



*R ÷ S*

A
a1

# Διαίρεση

- Η διαίρεση μπορεί να θεωρηθεί ως το αντίστροφο του καρτεσιανού γινομένου
  - Αν  $T := R \div S$  τότε  $T \times S$  δίνει μια σχέση με σχήμα συμβατό με αυτό της  $R$  και μπορεί να ισχύει ότι  $T \times S = R$
  - Γενικά, αν  $T := R \div S$  τότε  $T$  είναι το μέγιστο δυνατό σύνολο πλειάδων ώστε  $T \times S \subseteq R$

# Διαίρεση

- **Θεώρημα 1:** Έστω  $T, S$  σχέσεις με σχήματα  $A_1, A_2, \dots, A_n$  και  $B_1, B_2, \dots, B_m$  αντίστοιχα. Αν  $R = T \times S$  τότε  $T := R \div S$
- **Απόδειξη:**  $\text{Head}(R) = \{A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_m\}$ . Αρκεί να αποδειχτεί ότι  $T \subseteq R \div S$  και  $R \div S \subseteq T$ 
  - $T \subseteq R \div S$ . Έστω  $W := R \div S$  και  $\text{Head}(W) = \{A_1, A_2, \dots, A_n\} = \text{Head}(T)$ .

Έστω  $t$  μια οποιαδήποτε πλειάδα της  $T$ . Τότε για κάθε πλειάδα  $s \in S$ , η  $t \parallel s$  ανήκει στην  $T \times S$ . Συνεπώς η  $t$  ανήκει στην  $R = T \times S$  άρα στην  $R \div S$  (βάση ορισμού). Άρα η  $t$  ανήκει στην  $W$  και άρα  $T \subseteq W$ .

- $R \div S \subseteq T$ . Έστω  $W = R \div S$  και Έστω  $w$  οποιαδήποτε πλειάδα της  $W$ . Τότε για κάθε πλειάδα  $s \in S$ , η  $w \parallel s$  ανήκει στην  $R$ . Από την υπόθεση,  $R = T \times S$  δηλαδή κάθε πλειάδα της  $R$  προκύπτει από τη συνένωση μιας πλειάδας της  $T$  και μιας της  $S$ . Αφού  $\text{Head}(W) = \text{Head}(T)$  τότε πρέπει να υπάρχει πλειάδα  $t \in T$  τέτοια ώστε  $t = w$ . Άρα η  $w$  ανήκει στην  $T$  και  $W \subseteq T$ .



## Διαίρεση (5)

(P) Products (pid, pname, city, quantity, price)

(C) Customers (cid, cname, city, discount)

(O) Orders (ord, cid, aid, pid, qty, amt)

- «Βρείτε όλους τους κωδικούς των πελατών που έχουν κάνει παραγγελία για όλα τα προϊόντα που παραγγέλλει ο πελάτης c001»
  - Κωδικοί προϊόντων που έχει παραγγείλει ο πελάτης c001
    - $T1 := \pi_{pid} (\sigma_{cid = c001} (O))$
  - Βρείτε τους πελάτες που έχουν κάνει παραγγελία για όλα τα προηγούμενα προϊόντα
    - $T2 := \pi_{cid, pid} (O) \div T1$

$$\pi_{pid, cid} (O) \div (\pi_{pid} (\sigma_{cid = c001} (O)))$$

# Διαίρεση (5)

ord	cid	aid	pid	qty	amt
o001	c001	a001	p001	1	1000
o002	c001	a002	p002	2	2000
o003	c003	a003	p001	3	3000
o004	c003	a004	p002	4	4000
o005	c004	a004	p001	5	5000

**Orders**

$$\pi_{pid,cid}(\mathcal{O}) \div (\pi_{pid}(\sigma_{cid=c001}(\mathcal{O})))$$

$$\pi_{pid,cid}(\mathcal{O})$$

$$\pi_{pid}(\sigma_{cid=c001}(\mathcal{O}))$$

$$\pi_{pid,cid}(\mathcal{O}) \div (\pi_{pid}(\sigma_{cid=c001}(\mathcal{O})))$$

cid	pid
c001	p001
c001	p002
c003	p001
c003	p002
c004	p001

pid
p001
p002

cid
c001
c003

## Διαίρεση (5)

(P) Products (pid, pname, city, quantity, price)

(C) Customers (cid, cname, city, discount)

(O) Orders (ord, cid, aid, pid, qty, amt)

$$\triangleright \pi_{pid, cid} (O) \div (\pi_{pid} (\sigma_{cid = c001} (O)))$$

$$\triangleright \text{Σωστή λύση ?} \rightarrow \pi_{pid, cid} (O \div (\pi_{pid} (\sigma_{cid = c001} (O))))$$

# Διαίρεση (5)

ord	cid	aid	pid	qty	amt
o001	c001	a001	p001	1	1000
o002	c001	a002	p002	2	2000
o003	c003	a003	p001	3	3000
o004	c003	a004	p002	4	4000
o005	c004	a004	p001	5	5000

$$\pi_{pid} (\sigma_{cid = c001} (O))$$

pid
p001
p002

$$\pi_{cid} (O \div \pi_{pid} (\sigma_{cid = c001} (O)))$$


cid

Η λύση  $\pi_{cid} (O \div (\pi_{pid} (\sigma_{cid = c001} (O))))$  προϋποθέτει ότι οι πλειάδες που αντιστοιχούν στις παραγγελίες όλων των προϊόντων του πελάτη c001 έχουν τις ίδιες τιμές για όλα τα γνωρίσματα τα της **Orders(orderid, cid, aid, qty, amt)**.

## Διαίρεση (6)

(P) Products (pid, pname, city, quantity, price)

(C) Customers (cid, cname, city, discount)

(O) Orders (ord, cid, aid, pid, qty, amt)

- «Βρείτε τα ονόματα των πελατών που παραγγέλνουν όλα τα προϊόντα»
  - Κωδικοί προϊόντων  $T1 := \pi_{pid} (P)$
  - Πελάτες που παραγγέλνουν όλα τα προϊόντα της σχέσης  $T1$  :  
 $T2 := \pi_{pid, cid} (O) \div T1$
  - Ονόματα των πελατών στη σχέση  $T2$ :  $\pi_{cname} (C \text{ JOIN } T2)$

$\pi_{cname} ( C \text{ JOIN } ( \pi_{pid, cid} (O) \div \pi_{pid} (P) ) )$

# Διαίρεση

- **Θεώρημα 2:** Η διαίρεση μπορεί να εκφραστεί χρησιμοποιώντας τις πράξεις  $\times$ ,  $\pi$ ,  $-$ .
- **Απόδειξη:** Έστω  $R, S$  σχέσεις με σχήματα  $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_m$  και  $B_1, B_2, \dots, B_m$  αντίστοιχα. Έστω  $R \div S := \pi_{A_1, A_2, \dots, A_n}(R) - \pi_{A_1, A_2, \dots, A_n}((\pi_{A_1, A_2, \dots, A_n}(R) \times S) - R)$ , και  $W := \pi_{A_1, A_2, \dots, A_n}(R) - \pi_{A_1, A_2, \dots, A_n}((\pi_{A_1, A_2, \dots, A_n}(R) \times S) - R)$ .
  - ✓ Έστω  $u$  πλειάδα που ανήκει στην  $W$ . Τότε η  $u$  ανήκει στην  $\pi_{A_1, A_2, \dots, A_n}(R)$  και δεν ανήκει στην  $\pi_{A_1, A_2, \dots, A_n}((\pi_{A_1, A_2, \dots, A_n}(R) \times S) - R)$ . Έστω ότι υπάρχει πλειάδα  $s \in S$  τέτοια ώστε η πλειάδα  $u || s$  να μην ανήκει στην  $R$ . Αυτό σημαίνει ότι η  $u$  θα ανήκει στην  $\pi_{A_1, A_2, \dots, A_n}((\pi_{A_1, A_2, \dots, A_n}(R) \times S) - R)$ , το οποίο είναι άτοπο. Επομένως για κάθε πλειάδα  $s \in S$ , η πλειάδα  $u || s$  ανήκει στην  $R \div S$ .
  - ✓ Αντίστροφα, έστω  $u$  πλειάδα που ανήκει στην  $R \div S$ . Τότε ανήκει στην  $\pi_{A_1, A_2, \dots, A_n}(R)$  και δεν ανήκει στην  $\pi_{A_1, A_2, \dots, A_n}((\pi_{A_1, A_2, \dots, A_n}(R) \times S) - R)$ . Αν ίσχυε αυτό, θα σήμαινε ότι υπάρχει πλειάδα  $s \in S$  τέτοια ώστε η πλειάδα  $u || s$  να ανήκει στην  $\pi_{A_1, A_2, \dots, A_n}(R) \times S$  αλλά όχι στην  $R$ . Επομένως η  $u$  θα ανήκει στην  $\pi_{A_1, A_2, \dots, A_n}(R) - \pi_{A_1, A_2, \dots, A_n}((\pi_{A_1, A_2, \dots, A_n}(R) \times S) - R)$ .

# Διαίρεση (7)

➤ Παράδειγμα:  $R \div S = \pi_{A,B}(R) - \pi_{A,B}((\pi_{A,B}(R) \times S) - R)$

$R$

A	B	C
a1	b1	c1
a2	b1	c1
a1	b2	c1
a1	b2	c2
a2	b3	c2
a1	b4	c3
a1	b2	c4
a1	b1	c5

$S$

C
c1

$T1 := \pi_{A,B}(R)$

A	B
a1	b1
a2	b1
a1	b2
a2	b3
a1	b4

$T3 := T2 - R$

A	B	C
a2	b3	c1
a1	b4	c1

$T2 := T1 \times S$

A	B	C
a1	b1	c1
a2	b1	c1
a1	b2	c1
a2	b3	c1
a1	b4	c1

$T4 := \pi_{A,B}(T3)$

A	B
a2	b3
a1	b4

# Διαίρεση (7)

➤ Παράδειγμα:  $R \div S = \pi_{A,B}(R) - \pi_{A,B}((\pi_{A,B}(R) \times S) - R)$

$T1 := \pi_{A,B}(R)$

A	B
a1	b1
a2	b1
a1	b2
a2	b3
a1	b4

$T3 := T2 - R$

A	B	C
a2	b3	c1
a1	b4	c1

$T2 := T1 \times S$

A	B	C
a1	b1	c1
a2	b1	c1
a1	b2	c1
a2	b3	c1
a1	b4	c1

$T4 := \pi_{A,B}(T3)$

A	B
a2	b3
a1	b4

$S$

C
c1

$T5 := T1 - T4$

A	B
a2	b3
a1	b4



# Διαίρεση (7)

➤ Παράδειγμα:  $R \div S = \pi_{A,B}(R) - \pi_{A,B}((\pi_{A,B}(R) \times S) - R)$

*R*

A	B	C
a1	b1	c1
a2	b1	c1
a1	b2	c1
a1	b2	c2
a2	b3	c2
a1	b4	c3
a1	b2	c4
a1	b1	c5

*S*

C
c1



*Temp*

A	B
a1	b1
a2	b1
a1	b2
<del>a2</del>	<del>b3</del>
<del>a1</del>	<del>b4</del>



$R \div S$

A	B
a1	b1
a2	b1
a1	b2

## Διαίρεση (8)

(P) Products (pid, pname, city, quantity, price)

(C) Customers (cid, cname, city, discount)

(O) Orders (ord, cid, aid, pid, qty, amt)

- «Βρείτε τα ονόματα των πελατών που παραγγέλλουν όλα τα προϊόντα με τιμή 0.50\$»
  - Προϊόντα με τιμή 0.50\$.  $T1 := \sigma_{\text{price}=0.50} (P)$
  - Κωδικοί προϊόντων  $T2 := \pi_{\text{pid}} (T1)$
  - Κωδικοί πελατών και προϊόντων που παραγγέλλουν  $T3 := \pi_{\text{cid}, \text{pid}} (O)$
  - Κωδικοί πελατών που παραγγέλλουν όλα τα προϊόντα στη σχέση  $T2$ :  
 $T4 := T3 \div T2$
  - Ονόματα πελατών:  $T5 := \pi_{\text{cname}} (C \text{ JOIN } T4)$

$\pi_{\text{cname}} (C \text{ JOIN } (\pi_{\text{pid}, \text{cid}} (O) \div \pi_{\text{pid}} (\sigma_{\text{price}=0.50} (P))))$

## Διαίρεση (9)

(P) Products (pid, pname, city, quantity, price)

(C) Customers (cid, cname, city, discount)

(O) Orders (ord, cid, aid, pid, qty, amt)

- ✓ «Βρείτε τους κωδικούς των πελατών που παραγγέλνουν όλα τα προϊόντα»

$$\pi_{pid, cid} (O) \div \pi_{pid} (P)$$

- ✓ «Βρείτε τους κωδικούς προμηθευτών που παίρνουν παραγγελίες από όλα τα προϊόντα που παραγγέλνει ο πελάτης c004

$$\pi_{aid, pid} (O) \div \pi_{pid} (\sigma_{cid='c004'} (O))$$

# Σχεσιακή Άλγεβρα - Παραδείγματα

(P) Products (pid, pname, city, quantity, price)

(C) Customers (cid, cname, city, discount)

(O) Orders (orderid, cid, aid, pid, qty, \$)

(A) Agents (aid, aname, city, percent)

✓ «Βρείτε τα ονόματα των πελατών που δεν κάνουν καμία παραγγελία μέσω του πράκτορα a03»

✓ πελάτες που κάνουν παραγγελίες μέσω του πράκτορα a03:

$$T1 := \pi_{cid} ( \sigma_{aid='a03'} (O) )$$

✓ Υπόλοιποι πελάτες

$$T2 := \pi_{cid} (C) - T1$$

✓ ονόματα των παραπάνω πελατών:  $\pi_{cname} (T2 \text{ JOIN } C)$

$$\pi_{cname} ( ( \pi_{cid} (C) - \pi_{cid} ( \sigma_{aid='a03'} (O) ) ) \text{ JOIN } C )$$

# Σχεσιακή Άλγεβρα - Παραδείγματα

(P) Products (pid, pname, city, quantity, price)

(C) Customers (cid, cname, city, discount)

(O) Orders (orderid, cid, aid, pid, qty, \$)

(A) Agents (aid, aname, city, percent)

- ✓ «Βρείτε τους πελάτες που κάνουν παραγγελίες μόνο μέσω του πράκτορα a03»
- ✓ πελάτες που δεν κάνουν παραγγελίες μέσω του πράκτορα a03:

$$T1 := \pi_{cid} ( \sigma_{aid \neq 'a03'} (O) )$$

- ✓ Υπόλοιποι πελάτες

$$T2 := \pi_{cid} (O) - T1$$

$$\pi_{cid} (O) - \pi_{cid} ( \sigma_{aid \neq 'a03'} (O) )$$

# Σχεσιακή Άλγεβρα - Παραδείγματα

(P) Products (pid, pname, city, quantity, price)

(C) Customers (cid, cname, city, discount)

(O) Orders (orderid, cid, aid, pid, qty, \$)

(A) Agents (aid, aname, city, percent)

- ✓ «Βρείτε τα προϊόντα που δεν έχουν παραγγελθεί ποτέ από πελάτη στη Νέα Υόρκη μέσω ενός πράκτορα που έχει έδρα τη Βοστώνη»

$$\pi_{pid}(P) - \pi_{pid}((\sigma_{city='NY'}(C)) \text{ JOIN } O \text{ JOIN } (\sigma_{city='Boston'}(A)))$$

# Σχεσιακή Άλγεβρα - Παραδείγματα

(P) Products (pid, pname, city, quantity, price)

(C) Customers (cid, cname, city, discount)

(O) Orders (orderid, cid, aid, pid, qty, \$)

(A) Agents (aid, aname, city, percent)

- ✓ «Βρείτε τα προϊόντα που δεν παραγγέλλονται από οποιονδήποτε πελάτη ζει σε πόλη της οποίας το όνομα ξεκινάει με D.

- ✓ Πελάτες που ζουν σε πόλη της οποίας το όνομα ξεκινάει από D:

$T1 := \sigma_{city < E \wedge city \geq D} (C)$

- ✓ Παραγγελίες των παραπάνω πελατών:  $T2 := O \text{ JOIN } T1$

- ✓ Κωδικοί παραπάνω προϊόντων:  $T3 := \pi_{pid} (T2)$

$\pi_{pid} (P) - \pi_{pid} (O \text{ JOIN } (\sigma_{city \leq E \wedge city \geq D} (C)))$

# Σχεσιακή Άλγεβρα - Παραδείγματα

(P) Products (pid, pname, city, quantity, price)

(C) Customers (cid, cname, city, discount)

(O) Orders (orderid, cid, aid, pid, qty, \$)

(A) Agents (aid, aname, city, percent)

- ✓ «Βρείτε τους πελάτες που παραγγέλνουν και το προϊόν p01 και το προϊόν p07.

$$\pi_{cid}(\sigma_{pid='p01'}(O)) \cap \pi_{cid}(\sigma_{pid='p07'}(O))$$

- ✓ Η πράξη της τομής μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν οι συνθήκες της επιλογής αναφέρονται σε μονότιμα γνωρίσματα (π.χ. αναγνωριστικό της σχέσης). Αν οι συνθήκες της επιλογής αναφέρονται σε πλειότιμα γνωρίσματα τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η πράξη της σύζευξης στη συνθήκη, όπως και η πράξη της τομής.