

HY180 – Λογική
Εαρινό Εξάμηνο 2012

Λύσεις 2^{ης} Σειράς Ασκήσεων

1. [25 μονάδες] Δείξτε με χρήση μορφολογικής παραγωγής ότι οι ακόλουθες εξαγωγές συμπερασμάτων είναι έγκυρες:

(α) [5] $\{P \vee Q, P \rightarrow R\} / \neg Q \rightarrow R$

1. Υποπαραγωγή
 - 1.1 $\neg Q$ (υπόθεση υποπαραγωγής)
 - 1.2 $P \vee Q$ (υπόθεση υποπαραγωγής)
 - 1.3 P (από (1.1), (1.2) με απαλοιφή άρνησης 2)
 - 1.4 $P \rightarrow R$ (υπόθεση)
 - 1.5 R (από (1.3), (1.4) με απαλοιφή συνεπαγωγής)
2. $\neg Q \rightarrow R$ (από (1) με εισαγωγή συνεπαγωγής)

(β) [10] $\{R \rightarrow Q, S \rightarrow (Q \wedge R)\} / Q \vee \neg S$

1. $S \vee \neg S$ (αποκλεισμός μέσου)
2. Υποπαραγωγή
 - 2.1 S (υπόθεση υποπαραγωγής)
 - 2.2 $S \rightarrow (Q \wedge R)$ (υπόθεση)
 - 2.3 $Q \wedge R$ (από (2.1), (2.2) με απαλοιφή συνεπαγωγής)
 - 2.4 Q (από (2.3) με απαλοιφή σύζευξης)
 - 2.5 $Q \vee \neg S$ (από (2.4) με εισαγωγή διάζευξης)
3. Υποπαραγωγή
 - 3.1 $\neg S$ (υπόθεση υποπαραγωγής)
 - 3.2 $Q \vee \neg S$ (από (3.1) με εισαγωγή διάζευξης)
4. $Q \vee \neg S$ (από (1), (2), (3) με απαλοιφή διάζευξης)

(γ) [10] $\{P, Q \vee R\} / (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

1. $Q \vee R$ (υπόθεση)
2. Υποπαραγωγή
 - 2.1 Q (υπόθεση υποπαραγωγής)
 - 2.2 P (υπόθεση υποπαραγωγής)
 - 2.3 $P \wedge Q$ (από (2.1), (2.2) με εισαγωγή σύζευξης)
 - 2.4 $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (από (2.3) με εισαγωγή διάζευξης δεξιά)
3. Υποπαραγωγή
 - 3.1 R (υπόθεση υποπαραγωγής)
 - 3.2 P (υπόθεση υποπαραγωγής)
 - 3.3 $P \wedge R$ (από (3.1), (3.2) με εισαγωγή σύζευξης)
 - 3.4 $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (από (3.3) με εισαγωγή διάζευξης αριστερά)
4. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (από (1), (2), (3) με απαλοιφή διάζευξης)

2. [20 μονάδες] Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της Μορφολογικής Παραγωγής αποδείξτε τα παρακάτω θεωρήματα

(α) $(P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg (P \rightarrow Q)$

1. Υποπαραγωγή

- 1.1 $P \wedge \neg Q$ (υπόθεση υποπαραγωγής)
- 1.2 P (από (1.1) με απαλοιφή σύζευξης)
- 1.3 $\neg Q$ (από (1.1) με απαλοιφή σύζευξης)
- 1.4 Υποπαραγωγή
 - 1.4.1 $P \rightarrow Q$ (υπόθεση υποπαραγωγής)
 - 1.4.2 P (από (1.2) με επανάληψη)
 - 1.4.3 Q (από (1.4.1), (1.4.2) με απαλοιφή συνεπαγωγής)
 - 1.4.4 $\neg Q$ (από (1.3) με επανάληψη)
- 1.5 $\neg (P \rightarrow Q)$ (από (1.4) με εισαγωγή άρνησης)

(β) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

1. Υποπαραγωγή

- 1.1 $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ (υπόθεση υποπαραγωγής)
- 1.2 Υποπαραγωγή
 - 1.2.1 $P \rightarrow Q$ (υπόθεση υποπαραγωγής)
 - 1.2.2 Υποπαραγωγή
 - 1.2.2.1 P (υπόθεση υποπαραγωγής)
 - 1.2.2.2 $Q \rightarrow R$ (από (1.1), (1.2.2.1) με απαλοιφή συνεπαγωγής)
 - 1.2.2.3 Q (από (1.2.1), (1.2.2.1) με απαλοιφή συνεπαγωγής)
 - 1.2.2.4 R (από (1.2.2.2), (1.2.2.3) με απαλοιφή συνεπαγωγής)
 - 1.2.3 $P \rightarrow R$ (από (1.2.2) με εισαγωγή συνεπαγωγής)
- 1.3 $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$ (από (1.2) με εισαγωγή συνεπαγωγής)
- 2. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$ (από (1) με εισαγωγή συνεπαγωγής)

3. [10 μονάδες] Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο της Κατασκευής Μοντέλων για να εξετάσετε την ικανοποιησιμότητα του συνόλου:

$$\{ (P \leftrightarrow (Q \rightarrow R)) \wedge (P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow \neg R), \neg(((P \rightarrow Q) \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg Q) \}$$

$$C_0 = \{ \{ (P \leftrightarrow (Q \rightarrow R)) \wedge (P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow \neg R), \neg(((P \rightarrow Q) \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg Q) \} \}$$

$$C_1 = \{ \{ P \leftrightarrow (Q \rightarrow R), P \leftrightarrow Q, Q \leftrightarrow \neg R, \neg(\neg((P \rightarrow Q) \rightarrow \neg Q)) \vee \neg Q \} \}$$

$$C_2 = \{ \{ P \leftrightarrow (Q \rightarrow R), P \leftrightarrow Q, Q \leftrightarrow \neg R, ((P \rightarrow Q) \rightarrow \neg Q) \wedge \neg \neg Q \} \}$$

$$C_3 = \{ \{ P \leftrightarrow (Q \rightarrow R), P \leftrightarrow Q, Q \leftrightarrow \neg R, (P \rightarrow Q) \rightarrow \neg Q, Q \} \}$$

$$C_4 = \{ \{ P \leftrightarrow (Q \rightarrow R), P, Q, Q \leftrightarrow \neg R, (P \rightarrow Q) \rightarrow \neg Q, Q \} \} \quad [\leftrightarrow]$$

$$C_5 = \{ \{ P \leftrightarrow (Q \rightarrow R), P, Q, Q \leftrightarrow \neg R, (P \rightarrow Q) \rightarrow \neg Q \} \} \quad [\text{del}]$$

$$C_6 = \{ \{ P \leftrightarrow (Q \rightarrow R), P, Q, Q, \neg R, (P \rightarrow Q) \rightarrow \neg Q \} \} \quad [\leftrightarrow]$$

$$C_7 = \{ \{ P \leftrightarrow (Q \rightarrow R), P, Q, \neg R, (P \rightarrow Q) \rightarrow \neg Q \} \} \quad [\text{del}]$$

$$C_8 = \{ \{ P \leftrightarrow (Q \rightarrow R), P, Q, \neg R, \neg(P \rightarrow Q) \} \} \quad [\rightarrow]$$

$$C_9 = \{ \{ P \leftrightarrow (Q \rightarrow R), P, Q, \neg R, \neg(P \rightarrow Q) \} \} \quad [\text{del}]$$

$$C_{10} = \{ \{ P \leftrightarrow (Q \rightarrow R), P, Q, \neg R, P, \neg Q \} \} \quad [\neg \rightarrow]$$

$$C_{11} = \{ \} \quad [\text{del}]$$

Άρα το σύνολο είναι μη-ικανοποιήσιμο.