

**ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ**  
στο Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών περιόδου Σεπτεμβρίου 2014

**ΘΕΜΑ 1ο.** (1) Να ευρεθεί το σύνολο λύσεων του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned}x + y + z &= a \\ ax + y + 2z &= 2 \\ x + ay + z &= 4\end{aligned}$$

για τις διάφορες τιμές του  $a \in \mathbb{R}$ . Πόση είναι η τάξη του πίνακα των συντελεστών του συστήματος; Πως παριστάνεται γεωμετρικά το σύνολο λύσεων στην περίπτωση που δεν είναι πεπερασμένο;

**ΘΕΜΑ 2ο.** (2) Εστω  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  η γραμμική απεικόνιση με

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y + 2z + 4w \\ -6x + 9y - z - 24w \\ 4x + 6y - z + 20w \end{pmatrix}.$$

- (α) Να ευρεθεί ο πίνακας της  $f$ .
- (β) Να ευρεθεί ο πυρήνας  $\text{Ker} f$  της  $f$  και μία βάση του.
- (γ) Να ευρεθεί η εικόνα  $\text{Im} f$  της  $f$  και μία βάση της. Είναι η  $f$  επιμορφισμός;

**ΘΕΜΑ 3ο.** (1) Να ευρεθεί, αν υπάρχει, ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

**ΘΕΜΑ 4ο.** (2) Εστω

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -10 & -5 \\ 2 & 14 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- (α) Να ευρεθούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και οι ιδιοτιμές του  $A$ .
- (β) Να ευρεθούν οι ιδιόχωροι του  $A$ .
- (γ) Είναι ο  $A$  διαγωνοποιήσιμος; Αν ναι, να ευρεθεί ένας αντιστρέψιμος πίνακας  $R$  ώστε ο  $RAR^{-1}$  να είναι διαγώνιος.

**ΘΕΜΑ 5ο.** (2) Εστω  $W$  ο διανυσματικός υπόχωρος του  $\mathbb{R}^4$  που παράγεται από τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (α) Να ευρεθεί μία βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος  $W^\perp$  του  $W$ .  
(β) Να κατασκευαστεί μία ορθογώνια βάση του  $\mathbb{R}^4$  που αποτελείται από δύο διανύσματα στο  $W$  και δύο διανύσματα στο  $W^\perp$ .

**ΘΕΜΑ 6ο.** (2) Εστω

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Να ευρεθεί ένας ορθογώνιος πίνακας  $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , ώστε ο  $U^t A U$  να είναι διαγώνιος.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ