HY118-Διακριτά Μαθηματικά

Τρίτη, 03/06/2014

Θέματα Προόδου

Αντώνης Α. Αργυρός
e-mail: argyros@csd.uoc.gr

Θέμα 1, ερώτημα 1

- Έστω *p* η πρόταση "Είμαι πλούσιος", *e* η πρόταση "Είμαι ευτυχισμένος" και *y* η πρόταση "Είμαι υγιής". Γράψτε προτάσεις σε προτασιακό λογισμό με βάση τις *p*, *e* και *y*, που να εκφράζουν το νόημα των παρακάτω προτάσεων:

1. Δεν είμαι ούτε πλούσιος ούτε ευτυχισμένος $\neg p \wedge \neg e$
2. Για να είμαι ευτυχισμένος, πρέπει να είμαι υγιής και πλούσιος $p \wedge y \rightarrow e$
3. Είμαι είτε πλούσιος και υγιής, είτε ευτυχισμένος και υγιής, αλλά όχι και τα δύο. $(p \wedge y) \oplus (e \wedge y)$
4. Είμαι ευτυχισμένος αν και μόνο αν είμαι υγιής.

$$e \leftrightarrow y$$

Θέμα 1, ερώτημα 2

- Κάποιος είπε πως «Εάν η λογική δεν είναι ταυτόχρονα και χρήσιμη και ενδιαφέρουσα, τότε είναι άχρηστη ή αδιάφορη». Έχει δίκιο; Αν ναι, αποδείξτε το με τυπικό τρόπο, αν όχι αναφέρετε γιατί.
- **Λύση**
- Έστω e η πρόταση «η λογική είναι ενδιαφέρουσα»
- Έστω x η πρόταση «η λογική είναι χρήσιμη»

$$\neg(x \wedge e) \rightarrow (\neg x \vee \neg e) \Rightarrow$$

$$(\neg x \vee \neg e) \rightarrow (\neg x \vee \neg e) \Rightarrow$$

$$p \rightarrow p \Rightarrow T$$

- Επομένως η πρόταση είναι ταυτολογία και επομένως αυτός που τη λέει έχει δίκιο!

Θέμα 2

- Για καθεμία από τις παρακάτω εκφράσεις, αν αποτελεί πρόταση, καθορίστε την αλήθεια της. Οι μεταβλητές *x*, *y*, *z* ορίζονται στο σύνολο A={1, 2, 3}. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
- (1) $\exists x \forall y,\ x^2<y+1$
- (2) $\forall x \exists y,\ x^2+y^2<2z^2$
- (3) $\forall x \forall y,\ x^2+y^2 <12$
- (4) $\exists x \forall y \exists z,\ x^2+y^2<2z^2$
- (5) $\exists x \exists y \forall z,\ x^2+y^2<2z^2$

Θέμα 2

- Για καθεμία από τις παρακάτω εκφράσεις, αν αποτελεί πρόταση, καθορίστε την αλήθεια της. Οι μεταβλητές *x*, *y*, *z* ορίζονται στο σύνολο Α={1, 2, 3}. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
- (1) $\exists x \forall y, x^2<y+1$ Αληθής
- (2) $\forall x \exists y, x^2+y^2<2z^2$
- (3) $\forall x \forall y, x^2+y^2 <12$
- (4) $\exists x \forall y \exists z, x^2+y^2<2z^2$
- (5) $\exists x \exists y \forall z, x^2+y^2<2z^2$

Θέμα 2

- Για καθεμία από τις παρακάτω εκφράσεις, αν αποτελεί πρόταση, καθορίστε την αλήθεια της. Οι μεταβλητές *x*, *y*, *z* ορίζονται στο σύνολο Α={1, 2, 3}. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
- (1) $\exists x \forall y,\ x^2<y+1$ Αληθής
- (2) $\forall x \exists y,\ x^2+y^2<2z^2$ Δεν είναι πρόταση!
- (3) $\forall x \forall y,\ x^2+y^2<12$
- (4) $\exists x \forall y \exists z,\ x^2+y^2<2z^2$
- (5) $\exists x \exists y \forall z,\ x^2+y^2<2z^2$

Θέμα 2

- Για καθεμία από τις παρακάτω εκφράσεις, αν αποτελεί πρόταση, καθορίστε την αλήθεια της. Οι μεταβλητές *x*, *y*, *z* ορίζονται στο σύνολο A={1, 2, 3}. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
- (1) $\exists x \forall y,\ x^2<y+1$ Αληθής
- (2) $\forall x \exists y,\ x^2+y^2<2z^2$ Δεν είναι πρόταση!
- (3) $\forall x \forall y,\ x^2+y^2 <12$ Ψευδής
- (4) $\exists x \forall y \exists z,\ x^2+y^2<2z^2$
- (5) $\exists x \exists y \forall z,\ x^2+y^2<2z^2$

Θέμα 2

- Για καθεμία από τις παρακάτω εκφράσεις, αν αποτελεί πρόταση, καθορίστε την αλήθεια της. Οι μεταβλητές *x*, *y*, *z* ορίζονται στο σύνολο $A=\{1, 2, 3\}$. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
- (1) $\exists x \forall y,\ x^2<y+1$ Αληθής
- (2) $\forall x \exists y,\ x^2+y^2<2z^2$ Δεν είναι πρόταση!
- (3) $\forall x \forall y,\ x^2+y^2 <12$ Ψευδής
- (4) $\exists x \forall y \exists z,\ x^2+y^2<2z^2$ Αληθής
- (5) $\exists x \exists y \forall z,\ x^2+y^2<2z^2$

Θέμα 2

- Για καθεμία από τις παρακάτω εκφράσεις, αν αποτελεί πρόταση, καθορίστε την αλήθεια της. Οι μεταβλητές *x*, *y*, *z* ορίζονται στο σύνολο A={1, 2, 3}. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
- (1) $\exists x \forall y,\ x^2<y+1$ Αληθής
- (2) $\forall x \exists y,\ x^2+y^2<2z^2$ Δεν είναι πρόταση!
- (3) $\forall x \forall y,\ x^2+y^2 <12$ Ψευδής
- (4) $\exists x \forall y \exists z,\ x^2+y^2<2z^2$ Αληθής
- (5) $\exists x \exists y \forall z,\ x^2+y^2<2z^2$ Ψευδής

Θέμα 3, ερώτημα 1

- Έστω τρία σύνολα A, B, C, υποσύνολα ενός συνόλου U. Αποδείξτε χωρίς να κάνετε χρήση διαγραμμάτων Venn ότι εάν $A \cap B = A \cap C$ και $\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap C$, τότε $B = C$.

Λύση

- $A \cap B = A \cap C$ (1)
- $\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap C$ (2)
- Από (1) και (2)

$$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cap C) \cup (\overline{A} \cap C) \Rightarrow$$

$$(A \cup \overline{A}) \cap B = (A \cup \overline{A}) \cap C \Rightarrow$$

$$U \cap B = U \cap C \Rightarrow$$

$$B = C$$

Θέμα 3, ερώτημα 2

- Έστω ότι $\Delta = \{\varnothing, \delta\}$. Κατασκευάστε τα παρακάτω σύνολα: (1) $\Delta - \varnothing$
- (2) $\{\varnothing\} - \Delta$
- (3) $\Delta \cup P(\Delta)$
- (4) $\Delta \cap P(\Delta)$
- (5) $\Delta \oplus P(\Delta)$

Θέμα 3, ερώτημα 2

- Έστω ότι *Δ* = {∅, δ}. Κατασκευάστε τα παρακάτω σύνολα:
  (1) *Δ*-∅ =Δ
- (2) {∅}-*Δ*
- (3) *Δ*∪P(*Δ*)
- (4) *Δ*∩P(*Δ*)
- (5) *Δ*⊕P(*Δ*)

Θέμα 3, ερώτημα 2

- Έστω ότι $\Delta = \{\varnothing, \delta\}$. Κατασκευάστε τα παρακάτω σύνολα:
  (1) $\Delta - \varnothing$ $= \Delta$
- (2) $\{\varnothing\} - \Delta$ $= \{\varnothing\} - \{\varnothing, \delta\} = \varnothing$
- (3) $\Delta \cup P(\Delta)$
- (4) $\Delta \cap P(\Delta)$
- (5) $\Delta \oplus P(\Delta)$

Θέμα 3, ερώτημα 2

- Έστω ότι $\Delta = \{\varnothing, \delta\}$. Κατασκευάστε τα παρακάτω σύνολα:
  (1) $\Delta - \varnothing$ $\qquad = \Delta$
- (2) $\{\varnothing\} - \Delta$ $\qquad = \{\varnothing\} - \{\varnothing, \delta\} = \varnothing$
- (3) $\Delta \cup P(\Delta)$ $\qquad P(\Delta) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\delta\}, \{\varnothing, \delta\}\}$. Άρα
  $\Delta \cup P(\Delta) = \{\varnothing, \delta\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\delta\}, \{\varnothing, \delta\}\}$
  $= \{\delta, \varnothing, \{\varnothing\}, \{\delta\}, \{\varnothing, \delta\}\}$
- (4) $\Delta \cap P(\Delta)$
- (5) $\Delta \oplus P(\Delta)$

Θέμα 3, ερώτημα 2

- Έστω ότι $\Delta = \{\varnothing, \delta\}$. Κατασκευάστε τα παρακάτω σύνολα:
  (1) $\Delta - \varnothing$ $\quad = \Delta$
- (2) $\{\varnothing\} - \Delta$ $\quad = \{\varnothing\} - \{\varnothing, \delta\} = \varnothing$
- (3) $\Delta \cup P(\Delta)$ $\quad P(\Delta) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\delta\}, \{\varnothing, \delta\}\}$. Άρα
  $\Delta \cup P(\Delta) = \{\varnothing, \delta\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\delta\}, \{\varnothing, \delta\}\}$
  $= \{\delta, \varnothing, \{\varnothing\}, \{\delta\}, \{\varnothing, \delta\}\}$
- (4) $\Delta \cap P(\Delta)$ $\quad = \{\varnothing, \delta\} \cap \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\delta\}, \{\varnothing, \delta\}\} = \{\varnothing\}$
- (5) $\Delta \oplus P(\Delta)$

Θέμα 3, ερώτημα 2

- Έστω ότι $\mathit{\Delta} = \{\emptyset, \delta\}$. Κατασκευάστε τα παρακάτω σύνολα:
  (1) $\mathit{\Delta}-\emptyset$ $=\Delta$
- (2) $\{\emptyset\}-\mathit{\Delta}$ $=\{\emptyset\}-\{\emptyset, \delta\} = \emptyset$
- (3) $\mathit{\Delta}\cup P(\mathit{\Delta})$ $P(\mathit{\Delta}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\delta\}, \{\emptyset,\delta\}\}$. Άρα
  $\mathit{\Delta}\cup P(\mathit{\Delta}) = \{\emptyset, \delta\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\delta\}, \{\emptyset,\delta\}\}$
  $= \{\delta, \emptyset, \{\emptyset\}, \{\delta\}, \{\emptyset,\delta\}\}$
- (4) $\mathit{\Delta}\cap P(\mathit{\Delta})$ $= \{\emptyset, \delta\} \cap \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\delta\}, \{\emptyset,\delta\}\} = \{\emptyset\}$
- (5) $\mathit{\Delta}\oplus P(\mathit{\Delta})$ $= \{\emptyset, \delta\} \oplus \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\delta\}, \{\emptyset,\delta\}\}$
  $= \{\delta, \{\emptyset\}, \{\delta\}, \{\emptyset,\delta\}\}$

Θέμα 4

- Τα μέλη μίας ομάδας 100 ατόμων ερωτήθηκαν σχετικά με το ποια θεωρούν πως είναι μια καλή ποδοσφαιρική ομάδα. Από αυτούς, 32 ψήφισαν τον «ΟΦΗ», 20 ψήφισαν τον «ΕΡΓΟΤΕΛΗ», 45 ψήφισαν τον «ΑΤΡΟΜΗΤΟ», 15 ψήφισαν και τον «ΟΦΗ» και τον «ΑΤΡΟΜΗΤΟ», 7 ψήφισαν και τον «ΟΦΗ» και τον «ΕΡΓΟΤΕΛΗ», 10 ψήφισαν και τον «ΕΡΓΟΤΕΛΗ» και τον «ΑΤΡΟΜΗΤΟ» και 30 δεν ψήφισαν καμία από τις τρεις αυτές ομάδες.
- (1) Βρείτε τον αριθμό των ατόμων που ψήφισαν και τις τρεις αυτές ομάδες.
- (2) Βρείτε τον αριθμό των ατόμων που ψήφισαν ακριβώς μία από τις παραπάνω ομάδες.

Θέμα 4, ερώτημα 1

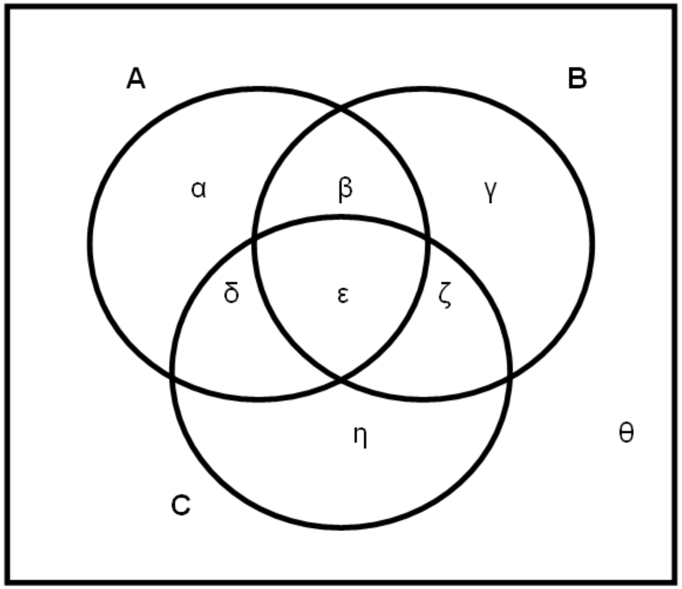
- Έστω A = «αυτοί που θεωρούν τον ΟΦΗ καλή ομάδα», B = «αυτοί που θεωρούν τον ΕΡΓΟΤΕΛΗ καλή ομάδα», C=«αυτοί που θεωρούν τον ΑΤΡΟΜΗΤΟ καλή ομάδα».

Λύση

- Μας δίνεται:
- Σύνολο ψηφισάντων = 100, $|A| = 32$, $|B| = 20$, $|C| = 45$, $|A \cap C| = 15$, $|A \cap B| = 7$, $|B \cap C| = 10$ και $|(\neg A) \cap (\neg B) \cap (\neg C)| = |(\neg(A \cup B \cup C)| = 30$.
- Έχουμε $|A \cup B \cup C| = 100 - |(\neg(A \cup B \cup C)| = 70$ και η αρχή του εγκλεισμού μας δίνει:
- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \Rightarrow$
- $70 = 32 + 20 + 45 – 15 – 7 – 10 + |A \cap B \cap C| \Rightarrow |A \cap B \cap C| = 70 – 65 = 5$
- Άρα αυτοί που θεωρούν και τις τρεις ομάδες καλές είναι 5.

Θέμα 4, ερώτημα 2

- $|A \cup B \cup C| = \alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta = 70$
- $|A| = \alpha+\beta+\delta+\varepsilon = 32$
- $|B| = \beta+\varepsilon+\gamma+\zeta = 20$
- $|C| = \delta+\varepsilon+\zeta+\eta = 45$
- $|A \cap B \cap C| = \varepsilon=5$
- $|A \cap C| = \delta+\varepsilon=15 \Rightarrow \delta=10$
- $|A \cap B| = \beta+\varepsilon= 7 \Rightarrow \beta = 2$
- $|B \cap C| = \zeta+\varepsilon=10 \Rightarrow \zeta = 5$



- Από τα παραπάνω δεδομένα (8 εξισώσεις με 8 αγνώστους, μπορεί να προκύψει η τιμή για καθένα από τα α, β, γ, δ, ε, ζ, η, και θ) και επομένως και για το α+γ+η το οποίο ζητάμε (=48).

- Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής: Ζητάμε το $\alpha+\gamma+\eta = (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta) – (\beta+\delta+\varepsilon+\zeta) = |A \cup B \cup C|$ -(2+10+5+5)=70-22=48.

Θέμα 5

1. Αποδείξτε επαγωγικά ότι $\forall n \geq 1$, ($n \in N$), ισχύει ότι ο n^3-n διαιρείται ακριβώς από τον αριθμό 3.
2. Αποδείξτε την ίδια πρόταση με αυτή του προηγούμενου ερωτήματος, χωρίς να κάνετε χρήση επαγωγής.

Λύση (1), επαγωγική απόδειξη

- Για n=1, $n^3-n = 1-1 = 0$, διαιρείται ακέραια με το 3.
- Έστω ότι ο $k^3-k = 3z$ για κάποιο ακέραιο z
- Θα δείξω ότι $(k+1)^3-(k+1) = 3\mu$ για κάποιο ακέραιο μ
- Πράγματι $(k+1)^3-(k+1) = (k+1)\,(k+1)^2 - k-1 = (k+1)\,(k^2+2k+1) - k-1 =$

$= k^3+2k^2+k+k^2+2k+1-k-1 = (k^3-k) + 3(k^2+k) = 3z + 3(k^2+k) = 3(z+k^2+k)$.

Άρα, όντως υπάρχει $\mu = z+k^2+k$ τέτοιο ώστε $(k+1)^3-(k+1) = 3\mu$

Θέμα 5

1. Αποδείξτε επαγωγικά ότι $\forall n \geq 1$, ($n \in N$), ισχύει ότι ο n^3-n διαιρείται ακριβώς από τον αριθμό 3.
2. Αποδείξτε την ίδια πρόταση με αυτή του προηγούμενου ερωτήματος, χωρίς να κάνετε χρήση επαγωγής.

Λύση (2), μη επαγωγική απόδειξη

- $k^3-k = k(k^2-1) = (k-1)k(k+1)$
- Επομένως, ο k^3-k είναι το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων, κάποιος από τους οποίους είναι υποχρεωτικά ακέραιο πολλαπλάσιο του 3. και επομένως και ο k^3-k είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 3.

Θέμα 6

- Έστω οι παρακάτω σχέσεις που είναι ορισμένες επί του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Δείξτε κατά πόσον έχουν την ανακλαστική, συμμετρική, αντισυμμετρική και μεταβατική ιδιότητα. Αν κάποια σχέση έχει μία ιδιότητα, αποδείξτε το. Αν δεν την έχει, δώστε ένα αντιπαράδειγμα.
- (1) Σχέση S όπου “ $(x,y) \in S$ αν και μόνο αν $x^2 = y^2$ ”
- (2) Σχέση T όπου “$(x,y) \in T$ αν και μόνο αν $x-y \leq 3$ ”

Θέμα 6, ερώτημα 1

(1) Σχέση S όπου “ $(x,y) \in S$ αν και μόνο αν $x^2 = y^2$ ”

- Ανακλαστική
- Συμμετρική
- Αντισυμμετρική
- Μεταβατική

Θέμα 6, ερώτημα 1

(1) Σχέση S όπου “ $(x,y) \in S$ αν και μόνο αν $x^2 = y^2$ ”

• Ανακλαστική	Ναι
• Συμμετρική	Ναι
• Αντισυμμετρική	Όχι
• Μεταβατική	Ναι

Θέμα 6, ερώτημα 2

(2) Σχέση T όπου “$(x,y) \in T$ αν και μόνο αν $x-y \leq 3$”

- Ανακλαστική Ναι
- Συμμετρική Όχι
- Αντισυμμετρική Όχι
- Μεταβατική Όχι

Θέμα 6, ερώτημα 2

(2) Σχέση Τ όπου “$(x,y) \in T$ αν και μόνο αν $x\text{-}y \leq 3$”

- Ανακλαστική
- Συμμετρική
- Αντισυμμετρική
- Μεταβατική

Θέμα 7

(1) Πόσες είναι όλες οι δυνατές διμελείς σχέσεις που μπορούν να οριστούν επί ενός συνόλου A με |A|=5;

(2) Έστω *Z* το σύνολο των ακεραίων, και έστω η σχέση *S* επί του *Z* που ορίζεται ως:
“ a S b αν και μόνο αν ο 3a+b είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4”.

(α) Αποδείξτε ότι η σχέση *S* είναι σχέση ισοδυναμίας.

(b) Βρείτε την κλάση ισοδυναμίας του 0.

Θέμα 7, ερώτημα 1

(1) Πόσες είναι όλες οι δυνατές διμελείς σχέσεις που μπορούν να οριστούν επί ενός συνόλου Α με |Α|=5;

Λύση

Μία διμελής σχέση επί του Α είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του ΑxΑ.

Επομένως, ψάχνουμε πόσα είναι τα δυνατά υποσύνολα του ΑxΑ, τα οποία ξέρουμε ότι είναι $2^{|A\times A|}$.

Επομένως, στην περίπτωση μας, 2^{25}

Θέμα 7, ερώτημα 2

(2) *S* επί του *Z* που ορίζεται ως:
" a S b αν και μόνο αν ο 3a+b είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4".

(α) Αποδείξτε ότι η σχέση *S* είναι σχέση ισοδυναμίας.

Λύση

- **Ανακλαστική**: 3a+a = 4a, ακέραιο πολλαπλάσιο του 4, άρα aSa για κάθε a
- **Συμμετρική**: Για κάθε a, b, θα πρέπει αν 3a+b = 4k τότε 3b+a = 4m.

  Πράγματι, εφόσον 3a+b = 4k => b = 4k-3a.
  Επομένως, 3b+a = 3(4k-3a) + a = 12k-9a + a = 12k – 8a = 4(3k-2a) = 4m
- **Μεταβατική**: Θα πρέπει για κάθε a, b, c, αν 3a+b = 4k (1)
  και 3b+c = 4m (2) τότε 3a + c = 4z. Πράγματι, προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2), 3a+b + 3b +c = 4k + 4m => 3a + c = 4k + 4m – 4b
  = 4(k+m-b) = 4z.
- Εφόσον η σχέση έχει τις παραπάνω ιδιότητες, είναι σχέση ισοδυναμίας.

Θέμα 7, ερώτημα 2

(2) *S* επί του *Z* που ορίζεται ως:
“ a S b αν και μόνο αν ο 3a+b είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4”.

(b) Βρείτε την κλάση ισοδυναμίας του 0.

Λύση

- Όλοι οι ακέραιοι που σχετίζονται με το 0, επομένως, όλοι οι ακέραιοι b για τους οποίους ισχύει: 3 x 0 + b = 4k => b = 4k, δηλαδή τα ακέραια πολλαπλάσια του 4.