

HY118: Διακριτά Μαθηματικά
Εαρινό εξάμηνο 2013
Εξέτασης Ιουνίου (θέματα κατά προσέγγιση από απομνημόνευση)

Θέμα 1ο {Προτασιακός Λογισμός και Κατηγορηματικός Λογισμός}:
(α)

Έστω οι προτάσεις:

$p \rightarrow q$
 $q \rightarrow r$
 $\neg(p \vee r)$
----- (και το συμπέρασμα)
 $\neg r$

Είναι σωστός ο παραπάνω κανόνας εξαγωγής συμπεράσματος; Αν ναι, αποδείξτε τον.
Διαφορετικά, δώστε ένα αντιπαράδειγμα.

(β)

Έστω το προτασιακό σχήμα:

$$(\forall m \exists n P(m, n)) \rightarrow (\exists n \forall m P(m, n))$$

Είναι αληθές το παραπάνω προτασιακό σχήμα;
Αιτιολογήστε κατά πόσο ισχύει αν $P(m, n) = \{0 \leq m \leq n\}$, όπου m, n ακέραιοι αριθμοί.

Θέμα 2ο {Θεώρημα περιστερώνα}

Θέμα 3ο {επαγωγή}:

Να δειχτεί επαγωγικά για $n \geq 1$ ότι ισχύει:

$$\sum_{i=0}^n 3i - 2 = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Θέμα 4ο {Σχέσεις}:

α) Υπολογίστε για A, B την $A \circ B$ (σύνθεση A και B).
{οι σχέσεις A, B δίδονται στην εκφώνηση}

β) Υπολογίστε κλειστότητα της R .
{η σχέση R δίδεται στην εκφώνηση}

γ) Εξετάστε αν η A υποσύνολο B είναι σχέση μερικής διάταξης.
{οι σχέσεις A, B δίδονται στην εκφώνηση}

Θέμα 5ο {Συνδιαστική}:

α) Έστω ότι υπάρχουν 300 βουλευτές από τους οποίους 244 είναι άνδρες και 56 είναι γυναίκες. Πόσες διαφορετικές επιτροπές των 5 ακριβώς ανδρών και 5 ακριβώς γυναικών μπορούμε να εκλέξουμε; Θεωρείστε ότι η σειρά των θέσεων είναι αμελητέα.

β) Έστω ότι υπάρχουν 300 βουλευτές από τους οποίους 244 είναι άνδρες και 56 είναι γυναίκες. Πόσες διαφορετικές 10-μελείς επιτροπές των μπορούμε να εκλέξουμε αν οι γυναίκες πρέπει να είναι το πολύ 3; Θεωρείστε ότι η σειρά των θέσεων είναι αμελητέα.

γ) Ανεξαρτητα από το φύλο, πόσες 10-μελείς επιτροπές μπορούμε να εκλέξουμε;

Θεμα 6ο: {Πιθανότητες}:

α) Έστω ότι ένας φίλος σας, σας προτείνει ένα παιχνίδι το οποίο είναι:

Έστω ένα αμερόληπτο 6-εδρο ζάρι. Το ρίχνετε 4 φορές. Αν και στις 4 υπάρχει έστω και ένα 6-αρι, του δίνεται 1 ευρώ. Διαφορετικά, αν στις 4 υπάρχει δεν υπάρχει ούτε 1 6-αρι, σας δίνει 1 ευρώ. Σας συμφέρει να παίξετε;

β) Ο Παναγιώτης εργάζεται σε μία εταιρία στην οποία μπορεί να πάει με έναν από τρεις εναλλακτικούς τρόπους (α) με το αυτοκίνητό του, (β) με το λεωφορείο και (γ) με το τρένο. Επειδή έχει μεγάλη κίνηση, αν πάει με το αυτοκίνητό του, θα καθυστερήσει με πιθανότητα 50%. Αν χρησιμοποιήσει το λεωφορείο που κινείται σε συγκεκριμένο λεωφορειόδρομο, η πιθανότητα να καθυστερήσει είναι 20%. Το τρένο δεν καθυστερεί σχεδόν ποτέ, οπότε αν το χρησιμοποιήσει έχει πιθανότητα 1% να καθυστερήσει.

1. Ο προϊστάμενος του Παναγιώτη δεν γνωρίζει τίποτε για το πως μετακινείται ο Παναγιώτης και επομένως θεωρεί ότι επιλέγει ένα από τα τρία μέσα μεταφοράς με ίση πιθανότητα. Δεδομένου ότι μια μέρα ο Παναγιώτης άργησε να πάει στη δουλειά του, βοηθείστε τον προϊστάμενό του να εκτιμήσει την πιθανότητα ο Παναγιώτης να χρησιμοποιήσει το αυτοκίνητό του.

2. Ένας συνεργάτης του Παναγιώτη γνωρίζει ότι ο Παναγιώτης δεν χρησιμοποιεί ποτέ λεωφορείο, ότι συνήθως (στο 90% των περιπτώσεων) χρησιμοποιεί το τρένο και ότι μερικές φορές (10% των περιπτώσεων) χρησιμοποιεί το αυτοκίνητό του. Πόσο εκτιμά ο συνεργάτης του Παναγιώτη την πιθανότητα ο Παναγιώτης να χρησιμοποιήσει το αυτοκίνητό του δεδομένου ότι άργησε;

Θέμα 7ο {Γράφοι}:

1α) Έστω ένας γράφος με άθροισμα βαθμού κόμβων 17.

Υπάρχει ο παραπάνω γράφος; Αν ναι “ζωγραφίστε” τον αλλιώς αιτιολογήστε γιατί δεν υπάρχει. Είναι απλός;

1β) Έστω ένας γράφος με άθροισμα βαθμού κόμβων 28.

Υπάρχει ο παραπάνω γράφος; Αν ναι “ζωγραφίστε” τον αλλιώς αιτιολογήστε γιατί δεν υπάρχει. Είναι απλός;

2α) Έστω οι γράφοι:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Είναι απλοί;

2β) Είναι ισομορφικοί μεταξύ τους;
Αιτιολογήστε την απάντησή σας.