原 矩阵变换：沿任意方向缩放、镜像、正交投影及切变及其推导

2013年04月09日 10:18:15 曾强 阅读数：10578

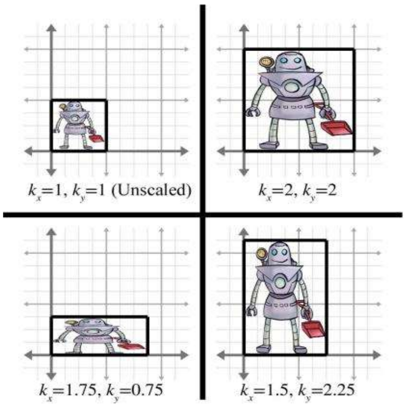
镜像、正交投影和切变的推导都可根据缩放变形而来。在要缩放方向上去缩放因子k,如果|k|<1，物体"收缩"，|k|>1,物体 ……长”；k
影；k<0,镜像； 切变稍有不同。

1. 缩放

01. 沿坐标轴缩放

2D中有两个缩放因子Kx和Ky，p和q是原来的基向量，缩放因子单独影响基向量，得到p`和q`:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= k_x\mathbf{p} &= k_x[1 \quad 0] &= [k_x \quad 0], \\ \mathbf{q}' &= k_y\mathbf{q} &= k_y[0 \quad 1] &= [0 \quad k_y]. \end{aligned}$$



得到缩放矩阵：

$$\mathbf{S}(k_x, k_y) = \begin{bmatrix} -\mathbf{p}'- \\ -\mathbf{q}'- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}.$$

3D中增加缩放因子Kz

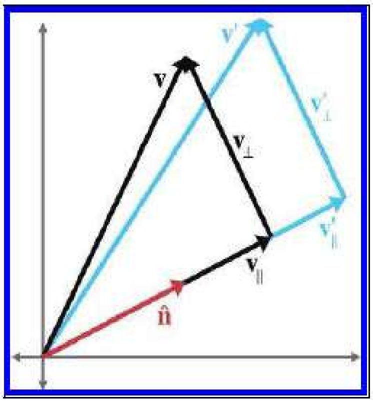
$$\mathbf{S}(k_x, k_y, k_z) = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x x & k_y y & k_z z \end{bmatrix}.$$

02.沿任意方向缩放

设n为平行于缩放方向的单位向量，k为缩放因子，缩放沿着穿过原点的并平行于n的直线（2D中）或平面（3D中）进行。

先讨论2D中的推导过程。我们需要推导一个表达式，给定向量v，可以通过v,n和k来计算v`。将v和v`分解为平行和垂直于n的分向量



$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|} + \mathbf{v}_{\perp},$$

v||是v在n上的投影

$$\mathbf{v}_{\|} = (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})\, \hat{\mathbf{n}},$$

v⊥垂直于n，不会受缩放影响

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_{\perp} &= \mathbf{v}_{\perp} \\ &= \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|} \\ &= \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})\, \hat{\mathbf{n}}, \end{aligned}$$

v`||受缩放因子影响

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_{\|} &= k\mathbf{v}_{\|} \\ &= k\,(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})\, \hat{\mathbf{n}}, \end{aligned}$$

推导得到v`

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \mathbf{v}'_{\perp} + \mathbf{v}'_{\|} \\ &= \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})\, \hat{\mathbf{n}} + k\,(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})\, \hat{\mathbf{n}} \\ &= \mathbf{v} + (k-1)\,(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})\, \hat{\mathbf{n}}. \end{aligned}$$

通过表达式来推导基向量

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{p}' &= \mathbf{p} + (k-1)\,(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}})\, \hat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (k-1) \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (k-1)\, n_x \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k-1)\, {n_x}^2 \\ (k-1)\, n_x n_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + (k-1)\, {n_x}^2 \\ (k-1)\, n_x n_y \end{bmatrix}, \\ \mathbf{q} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{q}' &= \begin{bmatrix} (k-1)\, n_x n_y \\ 1 + (k-1)\, {n_y}^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

通过基向量构建矩阵，得到以单位向量n为缩放方向，以k为缩放因子的缩放矩阵

$$\mathbf{S}(\hat{\mathbf{n}}, k) = \begin{bmatrix} -\mathbf{p}'- \\ -\mathbf{q}'- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + (k-1)\, {n_x}^2 & (k-1)\, n_x n_y \\ (k-1)\, n_x n_y & 1 + (k-1)\, {n_y}^2 \end{bmatrix}.$$

同样的原理运用在3D中

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p}' = \begin{bmatrix} 1+(k-1)\,n_x^2 \\ (k-1)\,n_x n_y \\ (k-1)\,n_x n_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q}' = \begin{bmatrix} (k-1)\,n_x n_y \\ 1+(k-1)\,n_y^2 \\ (k-1)\,n_y n_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}' = \begin{bmatrix} (k-1)\,n_x n_z \\ (k-1)\,n_y n_z \\ 1+(k-1)\,n_z^2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

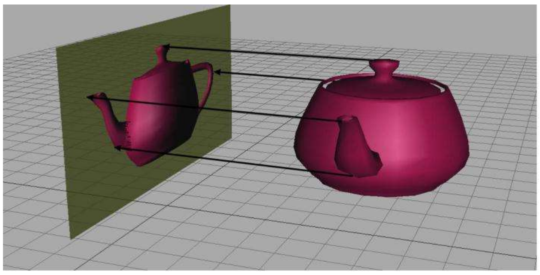
是scale(缩放)的缩写S(n,k)表示缩放矩阵

$$\mathbf{S}(\hat{\mathbf{n}}, k) = \begin{bmatrix} -\mathbf{p}'- \\ -\mathbf{q}'- \\ -\mathbf{r}'- \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+(k-1)\,n_x^2 & (k-1)\,n_x n_y & (k-1)\,n_x n_z \\ (k-1)\,n_x n_y & 1+(k-1)\,n_y^2 & (k-1)\,n_y n_z \\ (k-1)\,n_x n_z & (k-1)\,n_y n_z & 1+(k-1)\,n_z^2 \end{bmatrix}.$$

2.正交投影

投影意味和降维操作，将所有的点拉平到要投影的直线或平面上，从原来的点到投影点的直线相互平行，这就是正交投影。透视投影是
影。



01. 向坐标轴或平面上投影

通过将垂直方向上缩放因子设为0来实现，如将3D点投影到xy平面，则抛弃z分量，通过将z方向上的缩放因子设为0实现。

P是projection(投影)的缩写，2D中，Px表示向x轴投影，Py同理：

$$\mathbf{P}_x = \mathbf{S}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, 0\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_y = \mathbf{S}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, 0\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

3D中，Pxy表示向xy平面投影，其余同理：

$$\mathbf{P}_{xy} = \mathbf{S}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 0\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{xz} = \mathbf{S}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, 0\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{yz} = \mathbf{S}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 0\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

02. 向任意指向或平面投影

投影有垂直于直线或平面的向量n定义，通过使n方向上的缩放因为0就能导出任意方向的投影矩阵。P(n)表示向垂直于向量n的轴或平
阵，S(n,0)表示在n方向上的缩放因子为0的缩放矩阵.

2D：

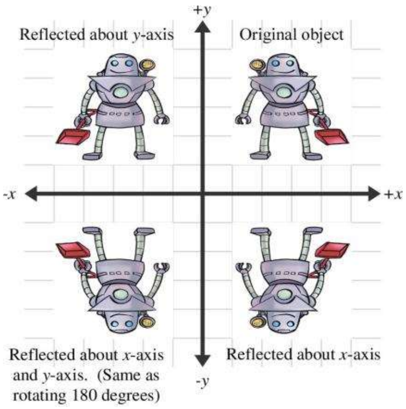
$$\mathbf{P}(\hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{S}(\hat{\mathbf{n}}, 0) = \begin{bmatrix} 1 + (0-1)\,{n_x}^2 & (0-1)\,n_x n_y \\ (0-1)\,n_x n_y & 1 + (0-1)\,{n_y}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - {n_x}^2 & -n_x n_y \\ -n_x n_y & 1 - {n_y}^2 \end{bmatrix}.$$

3D:

$$\mathbf{P}(\hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{S}(\hat{\mathbf{n}}, 0) = \begin{bmatrix} 1 + (0-1)\,{n_x}^2 & (0-1)\,n_x n_y & (0-1)\,n_x n_z \\ (0-1)\,n_x n_y & 1 + (0-1)\,{n_y}^2 & (0-1)\,n_y n_z \\ (0-1)\,n_x n_z & (0-1)\,n_y n_z & 1 + (0-1)\,{n_z}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - {n_x}^2 & -n_x n_y & -n_x n_z \\ -n_x n_y & 1 - {n_y}^2 & -n_y n_z \\ -n_x n_z & -n_y n_z & 1 - {n_z}^2 \end{bmatrix}.$$

3. 镜像

也叫做反射，与正交投影相似，正交投影将缩放值k设为0，而镜像则设为-1.



R是reflect(反射)的缩写。2D:

$$\mathbf{R}(\hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{S}(\hat{\mathbf{n}}, -1) = \begin{bmatrix} 1 + (-1-1)\,{n_x}^2 & (-1-1)\,n_x n_y \\ (-1-1)\,n_x n_y & 1 + (-1-1)\,{n_y}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2{n_x}^2 & -2n_x n_y \\ -2n_x n_y & 1 - 2{n_y}^2 \end{bmatrix}.$$

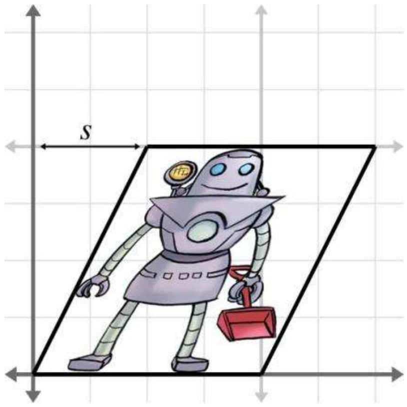
3D:

$$\mathbf{R}(\hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{S}(\hat{\mathbf{n}}, -1) = \begin{bmatrix} 1 + (-1-1)\,{n_x}^2 & (-1-1)\,n_x n_y & (-1-1)\,n_x n_z \\ (-1-1)\,n_x n_y & 1 + (-1-1)\,{n_y}^2 & (-1-1)\,n_y n_z \\ (-1-1)\,n_x n_z & (-1-1)\,n_y n_z & 1 + (-1-1)\,{n_z}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2{n_x}^2 & -2n_x n_y & -2n_x n_z \\ -2n_x n_y & 1 - 2{n_y}^2 & -2n_y n_z \\ -2n_x n_z & -2n_y n_z & 1 - 2{n_z}^2 \end{bmatrix}.$$

4.切变（Shearing）

切变是坐标系的变换，非均匀的拉伸。切变时候，角度变化，但是面积或体积不变。也可以理解为坐标轴间的角度变化，造成的。

如下图，这是x坐标根据y坐标的切变，机器人的y坐标没有变化，只有x坐标变化了，变化后的坐标x`可以理解为将y坐标乘以切变因子的和：x` = x + sy。如果是3D则增加z坐标的切变因子t： x` = x + sy，y` = y + tz



2D中切变矩阵为：

x坐标根据y坐标的切变

$$\mathbf{H}_x(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix},$$

y坐标根据x坐标的切变

$$\mathbf{H}_y(s) = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

x,y坐标被z坐标切变

$$\mathbf{H}_{xy}(s,t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ s & t & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{xz}(s,t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{yz}(s,t) = \begin{bmatrix} 1 & s & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$