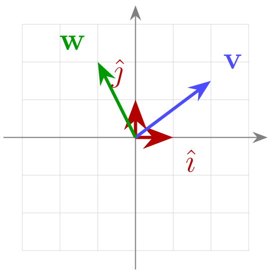
انجمن علمی دانشکده فیزیک

انجمن علمی فیزیک دانشگاه صنعتی شریف

جبر خطی
ذات جبر خطی

یادداشت‌های درسی جامع

با تأکید بر شهود هندسی و کاربردهای عملی



بر اساس مجموعه ویدیویی

Algebra Linear of Essence

اثر Grant Sanderson

کانال یوتیوب: 3Blue1Brown

۱۸ دی ۱۴۰۴

انجمن علمی دانشکده فیزیک

انجمن علمی فیزیک دانشگاه صنعتی شریف

با تشکر از:

ابراهیم خسروانی

محمدحسن شیری

زهرا امیری

امین عزیزی

بیتا قربانی

یاسمین یزدانی

سپهر طلایی

بر اساس مجموعه ویدیویی «ذات جبر خطی» از کانال 3Blue1Brown

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

این یادداشت‌ها بر اساس مجموعه ویدیویی معروف «ذات جبر خطی» (Essence of Linear Algebra) اثر Grant Sanderson از کانال 3Blue1Brown تهیه شده است. هدف اصلی این مجموعه، ارائه درکی شهودی و هندسی از مفاهیم جبر خطی است.

ویژگی‌های این یادداشت‌ها

- **شهود هندسی:** تأکید بر درک تصویری مفاهیم، نه فقط محاسبات
- **تعاریف دقیق:** ارائه فرمول‌های ریاضی استاندارد
- **مثال‌های کاربردی:** کاربرد در فیزیک، علوم کامپیوتر و مهندسی
- **تمرین‌ها:** مسائل متنوع برای تثبیت یادگیری

پیش‌نیازها

- آشنایی با مفاهیم پایه ریاضیات (جبر دبیرستانی)
- آشنایی با دستگاه مختصات دکارتی
- علاقه به درک عمیق ریاضیات!

نحوه استفاده

هر درس شامل بخش‌های زیر است:

تعاریف: مفاهیم کلیدی با نمادگذاری ریاضی

شهود هندسی: توضیحات تصویری (در کادرهای آبی)

کاربرد عملی: مثال‌های واقعی (در کادرهای سبز)

تمرین‌ها: مسائل برای تمرین

با آرزوی موفقیت در یادگیری جبر خطی

فصل ۱

مقدمه‌ای بر بردارها

بردار، سنگ بنای اصلی جبر خطی است. در این درس با سه دیدگاه متفاوت به بردار آشنا می‌شویم: دیدگاه فیزیک، دیدگاه علوم کامپیوتر، و دیدگاه ریاضیات. همچنین عملیات‌های پایه‌ای جمع برداری و ضرب اسکالری را یاد می‌گیریم.

۱.۱ سه دیدگاه به بردار

مفهوم بردار بسته به رشته تحصیلی، معانی متفاوتی دارد. درک این سه دیدگاه به ما کمک می‌کند تا تصویر کاملی از بردارها داشته باشیم.

۱.۱.۱ دیدگاه فیزیک

تعریف ۱.۱ (بردار از دیدگاه فیزیک)**.** بردار یک **پیکان** در فضا است که با دو ویژگی تعریف می‌شود:

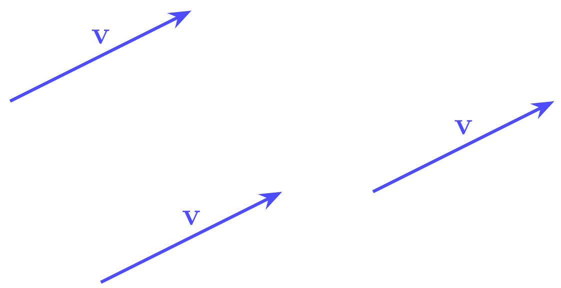
۱. **طول** (اندازه یا بزرگی)

۲. **جهت**

تا زمانی که این دو ویژگی ثابت بماند، بردار را می‌توان در فضا جابجا کرد و همچنان همان بردار باقی می‌ماند.

شهود هندسی

یک پیکان روی کاغذ رسم کنید. حالا آن را به نقطه دیگری منتقل کنید بدون اینکه بچرخانید یا اندازه‌اش را عوض کنید. از نظر فیزیکدان‌ها، این همان بردار اولی است!
به عنوان مثال، نیروی گرانش روی یک سیب، همیشه رو به پایین است با اندازه‌ای ثابت - مهم نیست سیب کجای اتاق باشد.



همه اینها یک بردار هستند

۲.۱.۱ دیدگاه علوم کامپیوتر

تعریف ۲.۱ (بردار از دیدگاه علوم کامپیوتر). بردار یک **لیست مرتب از اعداد** است. برای مثال:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

در این دیدگاه، «بردار» تقریباً مترادف با «لیست» است.

کاربرد عملی

مثال: مدل‌سازی قیمت مسکن
فرض کنید می‌خواهید خانه‌ها را بر اساس دو ویژگی مدل کنید:

- متراژ (بر حسب متر مربع)
- قیمت (بر حسب میلیون تومان)

هر خانه یک بردار دوبعدی است:

$$\text{خانه}_۱ = \begin{bmatrix} ۸۵ \\ ۲۵۰۰ \end{bmatrix}, \quad \text{خانه}_۲ = \begin{bmatrix} ۱۲۰ \\ ۴۲۰۰ \end{bmatrix}, \quad \text{خانه}_۳ = \begin{bmatrix} ۶۵ \\ ۱۸۰۰ \end{bmatrix}$$

نکته مهم: ترتیب اعداد اهمیت دارد! $\begin{bmatrix} ۸۵ \\ ۲۵۰۰ \end{bmatrix}$ با $\begin{bmatrix} ۲۵۰۰ \\ ۸۵ \end{bmatrix}$ فرق دارد.

۳.۱.۱ دیدگاه ریاضیات

تعریف ۳.۱ (بردار از دیدگاه ریاضیات). ریاضیدان بردار را به صورت انتزاعی تعریف می‌کند: بردار هر چیزی است که بتوان دو عملیات زیر را روی آن انجام داد:

۱. **جمع دو بردار**

۲. **ضرب بردار در یک عدد (اسکالر)**

جزئیات این تعریف را در درس آخر (فضاهای برداری انتزاعی) بررسی خواهیم کرد.

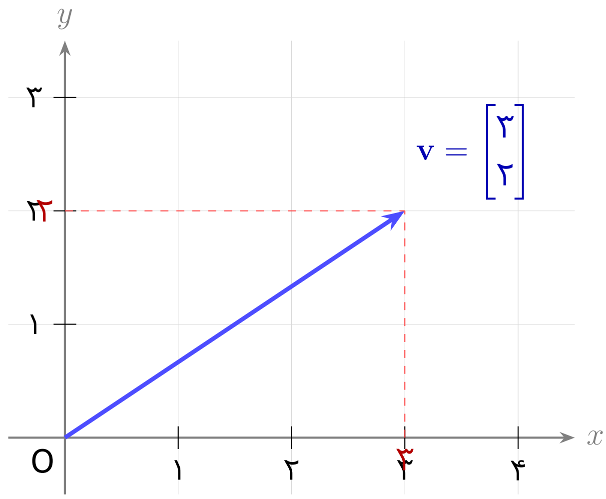
نکته مهم

در سراسر این دوره، ما بردار را به صورت یک **پیکان در دستگاه مختصات** تصور می‌کنیم که **دُم آن روی مبدأ** قرار دارد. این دیدگاه هندسی به ما کمک می‌کند مفاهیم را بهتر درک کنیم.

۲.۱ دستگاه مختصات و نمایش بردار

تعریف ۴.۱ (دستگاه مختصات دکارتی دوبعدی)**.** دستگاه مختصات شامل:

- محور افقی: **محور** x
- محور عمودی: **محور** y
- نقطه تقاطع: **مبدأ** (Origin)



تعریف ۵.۱ (مختصات بردار)**.** **مختصات** یک بردار، زوجی از اعداد است که نحوه رسیدن از مبدأ به نوک بردار را توصیف می‌کند:

- عدد اول: چقدر در راستای محور x حرکت کنیم (راست مثبت، چپ منفی)
- عدد دوم: چقدر در راستای محور y حرکت کنیم (بالا مثبت، پایین منفی)

شهود هندسی

مختصات $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ یعنی:

۱. از مبدأ، ۳ واحد به راست برو

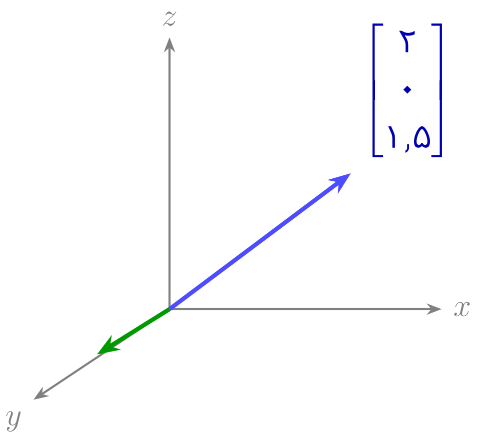
۲. سپس ۲ واحد به بالا برو

۳. نوک بردار همین‌جاست!

۳.۱ فضای سه‌بعدی

تعریف ۶.۱ (بردار سه‌بعدی)**.** در فضای سه‌بعدی، یک محور سوم به نام **محور** z اضافه می‌شود که بر هر دو محور x و y عمود است. هر بردار با سه عدد مشخص می‌شود:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$



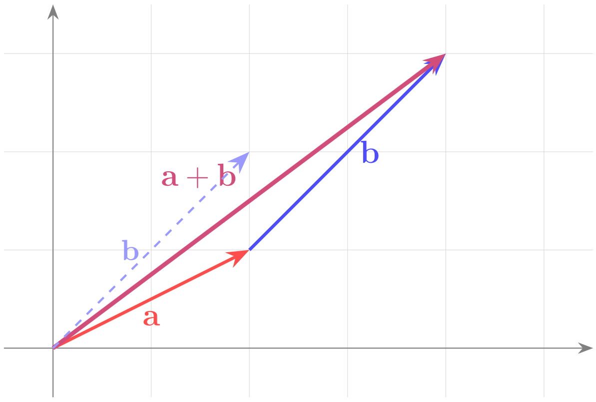
۴.۱ جمع برداری

تعریف ۷.۱ (جمع دو بردار - روش هندسی)**.** برای جمع دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$:

۱. بردار $\mathbf{a}$ را رسم کنید

۲. بردار $\mathbf{b}$ را طوری جابجا کنید که دُم آن روی نوک $\mathbf{a}$ قرار گیرد

۳. بردار حاصل‌جمع از مبدأ (دُم $\mathbf{a}$) تا نوک $\mathbf{b}$ کشیده می‌شود



تعریف ۸.۱ (جمع دو بردار - روش جبری)**.** اگر $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_۱\\a_۲\end{bmatrix}$ و $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_۱\\b_۲\end{bmatrix}$ باشند:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\begin{bmatrix}a_۱+b_۱\\a_۲+b_۲\end{bmatrix}$$

یعنی مؤلفه‌های متناظر را با هم جمع می‌کنیم.

مثال ۱.۱.

$$\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳\\-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱+۳\\۲+(-۱)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴\\۱\end{bmatrix}$$

شهود هندسی

جمع برداری را می‌توان به صورت **پیمودن مسیر** تفسیر کرد:

- اگر ابتدا بردار $\mathbf{a}$ را طی کنید
- سپس بردار $\mathbf{b}$ را طی کنید
- اثر نهایی مثل این است که بردار $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ را مستقیم طی کرده باشید

مثل راه رفتن: اگر ۲ قدم به راست و سپس ۵ قدم به راست بروید، مثل این است که ۷ قدم به راست رفته باشید.

کاربرد عملی

مثال: سرعت هواپیما در باد

یک هواپیما با سرعت $\begin{bmatrix}۵۰۰\\۰\end{bmatrix}$ کیلومتر بر ساعت به سمت شرق پرواز می‌کند (جهت مثبت x). باد با سرعت $\begin{bmatrix}۰\\۵۰\end{bmatrix}$ کیلومتر بر ساعت به سمت شمال می‌وزد (جهت مثبت y).

سرعت واقعی هواپیما نسبت به زمین:

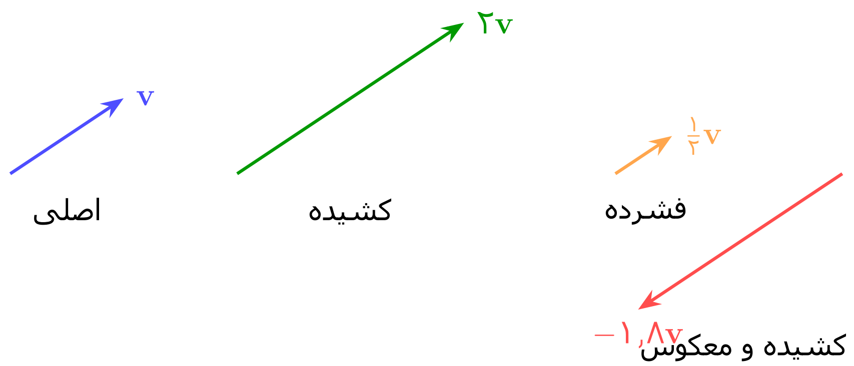
$$\mathbf{v}_{\text{واقعی}} = \begin{bmatrix} ۵۰۰ \\ ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۵۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵۰۰ \\ ۵۰ \end{bmatrix}$$

هواپیما هم به شرق و هم کمی به شمال حرکت می‌کند.

۵.۱ ضرب اسکالری (ضرب عددی)

تعریف ۹.۱ (ضرب اسکالر در بردار)**.** ضرب یک عدد (اسکالر) c در بردار $\mathbf{v}$، بردار را به نسبت c **مقیاس** می‌کند:

$$c \cdot \begin{bmatrix} v_۱ \\ v_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cdot v_۱ \\ c \cdot v_۲ \end{bmatrix}$$



نکته مهم

اثرات ضرب اسکالری:

- $c > ۱$: بردار **کشیده** می‌شود
- $۰ < c < ۱$: بردار **فشرده** می‌شود
- $c < ۰$: بردار **معکوس** می‌شود و سپس مقیاس می‌شود
- $c = ۰$: بردار صفر می‌شود
- $c = ۱$: بردار بدون تغییر می‌ماند

هشدار

اگر $c < ۰$ باشد، بردار علاوه بر تغییر اندازه، **جهتش نیز معکوس** می‌شود!

مثال ۲.۱. اگر $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۴ \\ -۲ \end{bmatrix}$ باشد:

$$۲\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۸ \\ -۴ \end{bmatrix} \qquad \text{(دو برابر شده)}$$

$$-\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -۴ \\ ۲ \end{bmatrix} \qquad \text{(معکوس شده)}$$

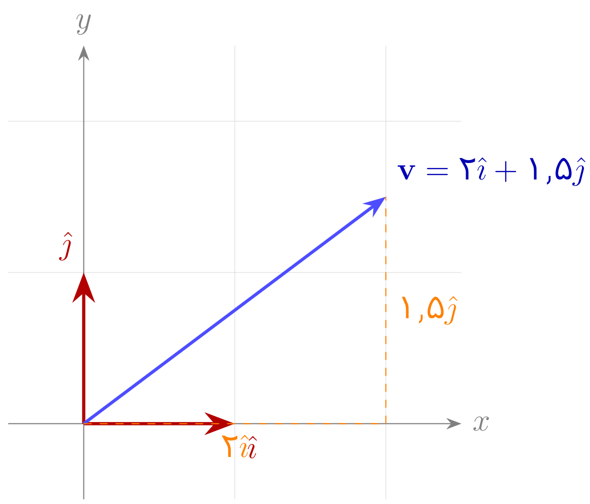
$$\frac{۱}{۲}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} \qquad \text{(نصف شده)}$$

تعریف ۱۰.۱ (اسکالر)**.** در جبر خطی، به اعدادی که در بردارها ضرب می‌شوند **اسکالر** گفته می‌شود. این نام از فعل «مقیاس کردن» (to scale) گرفته شده است. واژه «اسکالر» تقریباً مترادف «عدد» است.

۶.۱ بردارهای پایه

تعریف ۱۱.۱ (بردارهای پایه استاندارد در $\mathbb{R}^۲$)**.** دو بردار پایه استاندارد عبارتند از:

$$\hat{\imath} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \hat{\jmath} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$



قضیه ۱.۱. هر بردار در $\mathbb{R}^۲$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه نوشت:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} = a\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

شهود هندسی

وقتی می‌نویسیم $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ ، در واقع داریم می‌گوییم:

«۳ تا از $\hat{\imath}$ بردار و ۲ تا از $\hat{\jmath}$ را با هم جمع کن»

یعنی:

$$\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} = ۳\hat{\imath} + ۲\hat{\jmath} = ۳ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + ۲ \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

۷.۱ ارتباط دیدگاه‌ها

خلاصه

قدرت جبر خطی در توانایی ترجمه بین دیدگاه‌های مختلف است:

- **تحلیل‌گر داده:** می‌تواند لیست‌های طولانی اعداد را به صورت بردار در فضا تجسم کند
- **فیزیکدان:** می‌تواند حرکت و نیروها را با اعداد توصیف کند
- **برنامه‌نویس گرافیک:** می‌تواند تبدیلات هندسی را با ماتریس‌ها پیاده‌سازی کند

۸.۱ تمرین‌ها

تمرین ۱.۱. بردارهای زیر را در دستگاه مختصات رسم کنید:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۴ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۳ \end{bmatrix}$$

تمرین ۲.۱. حاصل جمع و تفاضل بردارهای زیر را محاسبه کنید:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

[

$\mathbf{a} + \mathbf{b}$

$\mathbf{a} - \mathbf{b}$

$۲\mathbf{a}+۳\mathbf{b}$

تمرین ۳.۱. اگر $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}۴\\-۲\end{bmatrix}$ باشد، بردارهای زیر را محاسبه و رسم کنید:

(آ) $۲\mathbf{v}$

(ب) $-\mathbf{v}$

(ج) $\frac{۱}{۲}\mathbf{v}$

(د) $-۲{,}۵\mathbf{v}$

تمرین ۴.۱ (کاربردی)**.** یک کشتی با سرعت ۳۰ کیلومتر بر ساعت به سمت شمال حرکت می‌کند. جریان آب با سرعت ۱۰ کیلومتر بر ساعت به سمت شرق است. سرعت واقعی کشتی نسبت به ساحل چیست؟

تمرین ۵.۱. نشان دهید که برای هر بردار $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=\mathbf{۰}$$

که در آن $\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}=\mathbf{۰}$ بردار صفر است.

تمرین ۶.۱. ثابت کنید که جمع برداری خاصیت جابجایی دارد:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$$

تمرین ۷.۱ (چالشی)**.** سه نقطه $A(۱,۲)$، $B(۴,۶)$ و $C(۷,۲)$ داده شده‌اند. نشان دهید که این سه نقطه یک مثلث متساوی‌الساقین تشکیل می‌دهند.

راهنمایی: طول بردار $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ برابر است با $\sqrt{a^۲+b^۲}$.

مسئله ۱.۱. در فضای سه‌بعدی، بردار $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}۲\\۳\\-۱\end{bmatrix}$ داده شده است. بردارهای زیر را محاسبه کنید:

(آ) $۳\mathbf{v}$

(ب) $\mathbf{v}+\begin{bmatrix}۱\\-۱\\۲\end{bmatrix}$

(ج) $-\frac{۱}{۲}\mathbf{v}$

فصل ۲

ترکیبات خطی، فضای پوشش و پایه

در این درس با مفاهیم کلیدی «ترکیب خطی»، «فضای پوشش» (span)، و «پایه» آشنا می‌شویم. این مفاهیم پایه و اساس درک عمیق جبر خطی هستند و به ما امکان می‌دهند بفهمیم چگونه بردارها فضا را «پر می‌کنند».

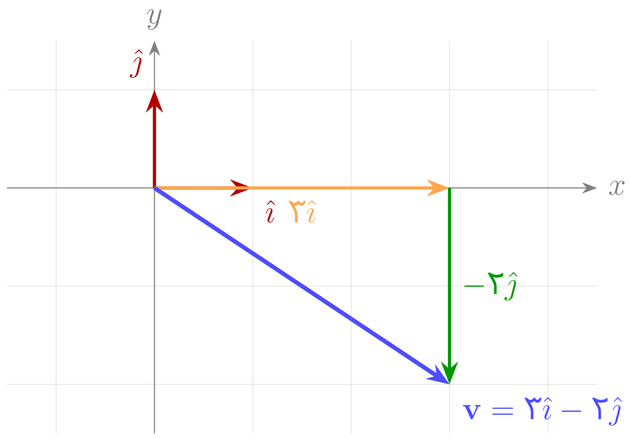
۱.۲ نگاه جدید به مختصات

در درس قبل، مختصات بردار را به عنوان «دستورالعمل حرکت» معرفی کردیم. اما نگاه دیگری وجود دارد که بسیار مهم است.

شهود هندسی

وقتی می‌نویسیم $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$، به جای فکر کردن به «۳ واحد راست، ۲ واحد پایین»، اینطور فکر کنید:

- عدد ۳ یک **اسکالر** است که بردار $\hat{\imath}$ را مقیاس می‌کند
- عدد ۲− یک **اسکالر** است که بردار $\hat{\jmath}$ را مقیاس می‌کند
- بردار نهایی، **مجموع** این دو بردار مقیاس‌شده است



۲.۲ ترکیب خطی

تعریف ۱.۲ (ترکیب خطی)**.** **ترکیب خطی** دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ عبارت است از:

$$a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$$

که در آن a و b اسکالرهای دلخواه هستند.

به طور کلی، ترکیب خطی n بردار $\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \dots, \mathbf{v}_n$ برابر است با:

$$c_۱\mathbf{v}_۱ + c_۲\mathbf{v}_۲ + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \sum_{i=۱}^{n} c_i\mathbf{v}_i$$

شهود هندسی

نام «خطی» از کجا می‌آید؟ اگر یکی از اسکالرها را ثابت نگه دارید و دیگری را تغییر دهید، نوک بردار حاصل روی یک **خط راست** حرکت می‌کند.

برای مثال، اگر $b = ۱$ ثابت باشد و a تغییر کند، بردار $a\mathbf{v} + \mathbf{w}$ روی خطی موازی با $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند.

مثال ۱.۲. فرض کنید $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$. چند ترکیب خطی:

$$۲\mathbf{v} + ۱\mathbf{w} = ۲\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} + ۱\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$-۱\mathbf{v} + ۳\mathbf{w} = -\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} + ۳\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ -۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۹ \\ -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ \\ -۵ \end{bmatrix}$$

$$۰\mathbf{v} + ۰\mathbf{w} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} = \mathbf{۰}$$

۳.۲ فضای پوشش (Span)

تعریف ۲.۲ (فضای پوشش). **فضای پوشش** (Span) مجموعه‌ای از بردارها، مجموعه تمام ترکیبات خطی ممکن آن بردارهاست:

$$\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} = \{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n \mid c_i \in \mathbb{R}\}$$

شهود هندسی

سؤال کلیدی: با داشتن چند بردار و استفاده از دو عملیات اصلی (جمع و ضرب اسکالری)، به چه بردارهایی می‌توان رسید؟
پاسخ: **فضای پوشش** آن بردارها.

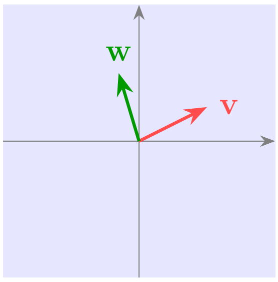
۱.۳.۲ فضای پوشش در دو بعد

قضیه ۱.۲. برای دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ در $\mathbb{R}^2$، سه حالت ممکن است:

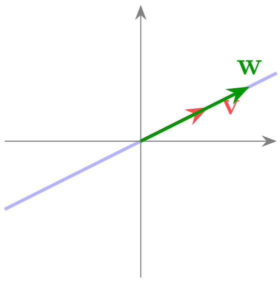
۱. اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ در یک راستا نباشند: $\mathrm{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} = \mathbb{R}^2$ (کل صفحه)

۲. اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ در یک راستا باشند (ولی غیرصفر): $\mathrm{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ یک خط است

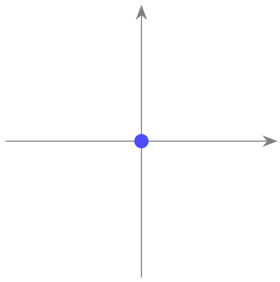
۳. اگر هر دو صفر باشند: $\mathrm{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} = \{0\}$ (فقط مبدأ)



حالت ۱: کل صفحه



حالت ۲: خط یک



حالت ۳: فقط مبدأ

۲.۳.۲ فضای پوشش در سه بعد

قضیه ۲.۲. برای بردارها در $\mathbb{R}^3$:

- **یک بردار غیرصفر:** فضای پوشش یک **خط** است
- **دو بردار غیر همراستا:** فضای پوشش یک **صفحه** است
- **سه بردار که در یک صفحه نباشند:** فضای پوشش کل $\mathbb{R}^3$ است

شهود هندسی

دو بردار در فضای سه‌بعدی را تصور کنید. ترکیبات خطی آنها یک صفحه تخت از مبدأ می‌سازد. حالا اگر بردار سومی اضافه کنید که روی این صفحه نباشد، مثل این است که صفحه را در فضا «جارو» می‌کنید و کل فضا را پوشش می‌دهید.

۴.۲ استقلال و وابستگی خطی

تعریف ۳.۲ (وابستگی خطی)**.** مجموعه‌ای از بردارها **وابسته خطی** است اگر بتوان یکی از آنها را حذف کرد بدون اینکه فضای پوشش تغییر کند. به عبارت دیگر، حداقل یکی از بردارها «اضافی» است.

به بیان ریاضی: بردارهای $\mathbf{v}_۱, \dots, \mathbf{v}_n$ وابسته خطی هستند اگر و تنها اگر اسکالرهای غیرهمه‌صفر $c_۱, \dots, c_n$ وجود داشته باشند که:

$$c_۱\mathbf{v}_۱ + c_۲\mathbf{v}_۲ + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{۰}$$

تعریف ۴.۲ (استقلال خطی)**.** مجموعه‌ای از بردارها **مستقل خطی** است اگر هیچ‌کدام از آنها اضافی نباشد - یعنی هر بردار بعدی جدیدی به فضای پوشش اضافه می‌کند.

به بیان ریاضی: بردارهای $\mathbf{v}_۱, \dots, \mathbf{v}_n$ مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر:

$$c_۱\mathbf{v}_۱ + c_۲\mathbf{v}_۲ + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{۰} \implies c_۱ = c_۲ = \cdots = c_n = ۰$$

مثال ۲.۲. بردارهای $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

این دو بردار **وابسته خطی** هستند زیرا $\mathbf{w} = ۲\mathbf{v}$. می‌توان نوشت:

$$۲\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{۰} \quad \text{یعنی} \quad ۲\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

مثال ۳.۲. بردارهای $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ مستقل خطی هستند.

اگر $a\mathbf{v} + b\mathbf{w} = \mathbf{۰}$:

$$a\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

پس $a = ۰$ و $b = ۰$. تنها راه رسیدن به بردار صفر، صفر بودن همه ضرایب است.

هشدار

در فضای n-بعدی، حداکثر n بردار می‌توانند مستقل خطی باشند. اگر بیش از n بردار داشته باشید، حتماً وابسته خطی هستند.

۵.۲ پایه (Basis)

تعریف ۵.۲ (پایه)**.** **پایه** یک فضای برداری، مجموعه‌ای از بردارها است که:

۱. **مستقل خطی** باشند

۲. کل فضا را **پوشش دهند** (span کنند)

قضیه ۳.۲. پایه استاندارد $\mathbb{R}^۲$ عبارت است از:

$$\left\{\hat{\imath} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \hat{\jmath} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}\right\}$$

و پایه استاندارد $\mathbb{R}^۳$:

$$\left\{\hat{\imath} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \hat{\jmath} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \hat{k} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}\right\}$$

شهود هندسی

پایه مثل یک «زبان» برای توصیف بردارهاست. وقتی می‌گوییم $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$، در واقع داریم می‌گوییم «۳ تا از اولین بردار پایه و ۲ تا از دومی.»
اگر پایه متفاوتی انتخاب کنیم، همان بردار مختصات متفاوتی خواهد داشت - مثل ترجمه یک جمله به زبان دیگر.

۱.۵.۲ پایه‌های غیراستاندارد

مثال ۴.۲. مجموعه زیر نیز یک پایه برای $\mathbb{R}^۲$ است:

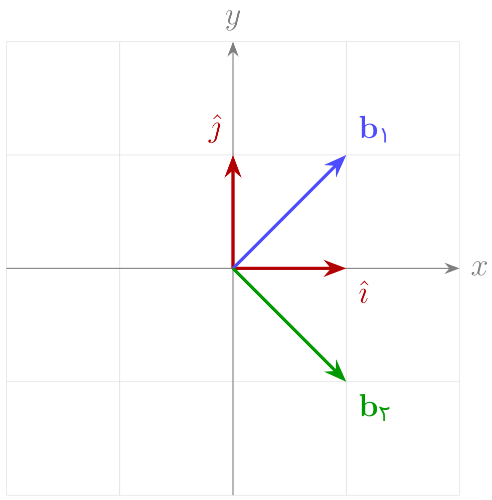
$$\mathcal{B} = \left\{\mathbf{b}_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \mathbf{b}_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}\right\}$$

اثبات استقلال خطی: اگر $a\mathbf{b}_۱ + b\mathbf{b}_۲ = ۰$:

$$a\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

پس $a + b = ۰$ و $a - b = ۰$، که نتیجه می‌دهد $a = b = ۰$.

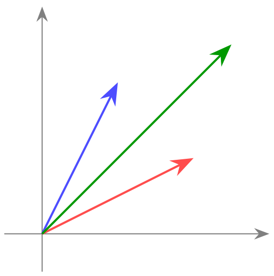
پوشش کل صفحه: چون دو بردار مستقل خطی داریم و در $\mathbb{R}^۲$ هستیم، کل صفحه پوشش داده می‌شود.



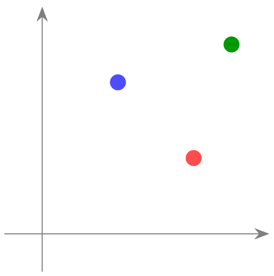
۶.۲ بردارها به عنوان نقاط

نکته ۱.۲. گاهی به جای فکر کردن به بردار به عنوان پیکان، راحت‌تر است آن را به عنوان **نقطه** در نظر بگیریم - نقطه‌ای که نوک بردار در آن قرار دارد.

- وقتی به یک بردار خاص فکر می‌کنید: آن را **پیکان** تصور کنید
- وقتی به مجموعه‌ای از بردارها فکر می‌کنید: آنها را **نقاط** تصور کنید



پیکان عنوان به بردار



نقطه عنوان به بردار

۷.۲ خلاصه مفاهیم کلیدی

خلاصه

ترکیب خطی: $c_۱\mathbf{v}_۱ + c_۲\mathbf{v}_۲ + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$ با اسکالرهای دلخواه

فضای پوشش: مجموعه همه ترکیبات خطی ممکن

استقلال خطی: هیچ برداری اضافی نیست

وابستگی خطی: حداقل یک بردار می‌تواند حذف شود

پایه: مجموعه مستقل خطی که کل فضا را پوشش می‌دهد

۸.۲ تمرین‌ها

تمرین ۱.۲. بردار $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ \end{bmatrix}$ را به صورت ترکیب خطی از $\hat{\imath}$ و $\hat{\jmath}$ بنویسید.

تمرین ۲.۲. آیا بردارهای زیر مستقل خطی هستند؟ توضیح دهید.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۶ \end{bmatrix}$$

تمرین ۳.۲. آیا بردارهای زیر مستقل خطی هستند؟

$$\mathbf{v}_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_۳ = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

راهنمایی: در $\mathbb{R}^۲$ حداکثر چند بردار می‌توانند مستقل خطی باشند؟

تمرین ۴.۲. فضای پوشش بردارهای زیر را توصیف کنید:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

تمرین ۵.۲ (چالشی)**.** نشان دهید که مجموعه زیر یک پایه برای $\mathbb{R}^۲$ است:

$$\left\{ \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} \right\}$$

سپس مختصات بردار $\begin{bmatrix} ۵ \\ ۷ \end{bmatrix}$ را در این پایه جدید پیدا کنید.

تمرین ۶.۲. سه بردار در $\mathbb{R}^۳$ داده شده است:

$$\mathbf{v}_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_۲ = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_۳ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

آیا این بردارها مستقل خطی هستند؟ فضای پوشش آنها چیست؟

مسئله ۱.۲. ثابت کنید که اگر $\{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^۲$ باشد، آنگاه $\{۲\mathbf{v}_۱, ۳\mathbf{v}_۲\}$ نیز یک پایه است.

مسئله ۲.۲. آیا می‌توان سه بردار در $\mathbb{R}^۲$ یافت که مستقل خطی باشند؟ چرا؟

فصل ۳

تبدیلات خطی و ماتریس‌ها

تبدیلات خطی قلب جبر خطی هستند. در این درس می‌آموزیم که چگونه هر تبدیل خطی را می‌توان با یک ماتریس نمایش داد، و ضرب ماتریسی چگونه با ترکیب تبدیلات مرتبط است.

۱.۳ تبدیل چیست؟

تعریف ۱.۳ (تبدیل)**.** **تبدیل** (Transformation) تابعی است که بردارها را به بردارهای دیگر می‌برد:

$$T : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$$

یعنی هر بردار ورودی را به یک بردار خروجی نگاشت می‌کند.

شهود هندسی

به جای «تابع» از واژه «تبدیل» استفاده می‌کنیم چون می‌خواهیم به **حرکت** فکر کنیم. تصور کنید هر بردار در فضا به جایی جدید «منتقل» می‌شود.
شبکه خطوط مختصات را تصور کنید. یک تبدیل این شبکه را می‌کشد، می‌فشارد، می‌چرخاند، یا به شکل دیگری تغییر می‌دهد.

۲.۳ تبدیل خطی

تعریف ۲.۳ (تبدیل خطی)**.** تبدیل T یک **تبدیل خطی** است اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشد:

۱. **جمع‌پذیری:** $T(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$

۲. **همگنی:** $T(c\mathbf{v}) = c \cdot T(\mathbf{v})$

برای هر بردارهای $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ و هر اسکالر c.

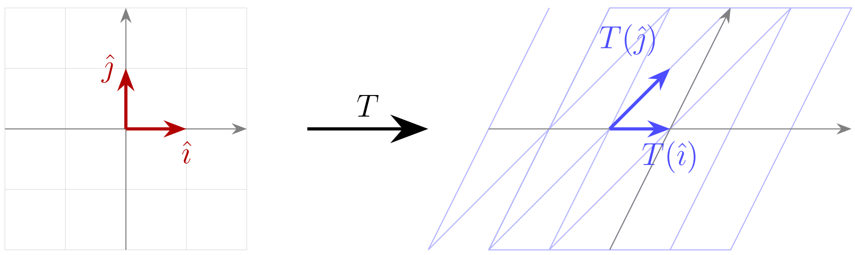
شهود هندسی

یک تبدیل خطی را می‌توان با دو ویژگی هندسی شناخت:

۱. **خطوط راست، راست می‌مانند** (خم نمی‌شوند)

۲. **مبدأ در جای خود می‌ماند**

اگر خطوط شبکه بعد از تبدیل همچنان موازی و با فاصله یکنواخت باقی بمانند، تبدیل خطی است.



تبدیل از قبل		تبدیل از بعد

۳.۲ ماتریس یک تبدیل خطی

قضیه ۱.۳ (قضیه اساسی). هر تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ کاملاً با دانستن اینکه T بردارهای پایه $\hat{\imath}$ و $\hat{\jmath}$ را به کجا می‌برد، مشخص می‌شود.

اثبات. هر بردار $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را می‌توان نوشت: $\mathbf{v} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$
با استفاده از خطی بودن:

$$T(\mathbf{v}) = T(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) = xT(\hat{\imath}) + yT(\hat{\jmath})$$

پس اگر $T(\hat{\imath})$ و $T(\hat{\jmath})$ را بدانیم، می‌توانیم $T(\mathbf{v})$ را برای هر $\mathbf{v}$ محاسبه کنیم. □

تعریف ۳.۳ (ماتریس تبدیل). اگر $T(\hat{\imath}) = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ و $T(\hat{\jmath}) = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ باشد، **ماتریس تبدیل** T برابر است با:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ستون اول محل فرود $\hat{\imath}$ و ستون دوم محل فرود $\hat{\jmath}$ است.

نکته مهم

قانون طلایی: ستون‌های ماتریس = محل فرود بردارهای پایه

۴.۳ ضرب ماتریس در بردار

تعریف ۴.۳ (ضرب ماتریس در بردار)**.**

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

شهود هندسی

ضرب ماتریس در بردار یعنی:

۱. مؤلفه x بردار ورودی را در ستون اول ضرب کن

۲. مؤلفه y بردار ورودی را در ستون دوم ضرب کن

۳. نتایج را جمع کن

این دقیقاً همان ترکیب خطی بردارهای پایه جدید است!

مثال ۱.۳. تبدیل چرخش ۹۰ پادساعتگرد:

$$T(\hat{\imath}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(\hat{\jmath}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

پس ماتریس چرخش:

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بررسی: $\square \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

۵.۳ مثال‌های تبدیلات مهم

۱.۵.۳ چرخش (Rotation)

تعریف ۵.۳ (ماتریس چرخش)**.** چرخش به اندازه زاویه θ پادساعتگرد:

$${}_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

مثال ۲.۳. چرخش ۴۵:

$${}_{45} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

۲.۵.۳ مقیاس‌گذاری (Scaling)

تعریف ۶.۳ (ماتریس مقیاس)**.** مقیاس‌گذاری با ضرایب s_x در راستای x و s_y در راستای y:

$$= \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

کاربرد عملی

کاربرد در گرافیک کامپیوتری: برای بزرگ یا کوچک کردن تصویر:

- $s_x = s_y = 2$: تصویر دو برابر بزرگ می‌شود
- $s_x = 1, s_y = 0{,}5$: تصویر در راستای عمودی فشرده می‌شود

۳.۵.۳ برش (Shear)

تعریف ۷.۳ (ماتریس برش افقی)**.**

$$= \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن k مقدار برش است.

اصلی   با برش $k = 1$

۴.۵.۳ انعکاس (Reflection)

مثال ۳.۳. انعکاس نسبت به محور x:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

انعکاس نسبت به خط $y = x$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۶.۳ ضرب ماتریس‌ها = ترکیب تبدیلات

قضیه ۲.۳ (ترکیب تبدیلات)**.** اگر A ماتریس تبدیل $T_۱$ و B ماتریس تبدیل $T_۲$ باشد، آنگاه:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \text{ماتریس تبدیل}(T_۲ \circ T_۱)$$

یعنی اول $T_۱$ و سپس $T_۲$ اعمال شود.

هشدار

ترتیب مهم است! $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ در حالت کلی.
اول چرخش و بعد برش $\neq$ اول برش و بعد چرخش

تعریف ۸.۳ (ضرب دو ماتریس)**.**

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

شهود هندسی

برای محاسبه ستون‌های BA:

- ستون اول: B ضرب در ستون اول A = محل فرود $\hat{\imath}$ پس از هر دو تبدیل
- ستون دوم: B ضرب در ستون دوم A = محل فرود $\hat{\jmath}$ پس از هر دو تبدیل

مثال ۴.۳. چرخش ۹۰ و سپس برش:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}}_{\text{برش}} \underbrace{\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}}_{\text{چرخش}} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

بررسی: $\hat{\imath} \to \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ $\square$

۷.۳ کاربردهای عملی

کاربرد عملی

گرافیک کامپیوتری و بازی‌های ویدیویی
هر شیء در بازی با مجموعه‌ای از بردارها (رأس‌ها) توصیف می‌شود. برای حرکت، چرخش، یا تغییر اندازه شیء، کافی است ماتریس مناسب را در همه رأس‌ها ضرب

کنیم.
یک انیمیشن = دنباله‌ای از ضرب ماتریس‌ها

کاربرد عملی

پردازش تصویر
فیلترهای تصویر مثل تار کردن، تیز کردن، و تشخیص لبه با ضرب ماتریسی پیاده‌سازی می‌شوند.

۸.۳ تمرین‌ها

تمرین ۱.۳. ماتریس تبدیلی که $\hat{\imath}$ را به $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و $\hat{\jmath}$ را به $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ می‌برد، بنویسید.

تمرین ۲.۳. حاصل ضرب زیر را محاسبه کنید:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \end{bmatrix}$$

تمرین ۳.۳. ماتریس چرخش ۱۸۰ را بنویسید و نشان دهید که برابر است با $-\mathbf{I}$.

تمرین ۴.۳. دو ماتریس زیر را در هم ضرب کنید (به هر دو ترتیب) و نشان دهید که $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

تمرین ۵.۳ (چالشی)**.** ماتریسی پیدا کنید که انعکاس نسبت به خط $y = ۲x$ باشد.
راهنمایی: این خط با محور x زاویه $\arctan(۲)$ می‌سازد.

مسئله ۱.۳. نشان دهید که ترکیب دو چرخش با زاویه‌های α و β برابر است با چرخش به زاویه $\alpha + \beta$.

مسئله ۲.۳. اگر $\mathbf{A}^۲ = \mathbf{A}$ (یعنی $\mathbf{A}$ یک ماتریس تصویر باشد)، چه تفسیر هندسی‌ای دارد؟

فصل ۴

تبدیلات سه‌بعدی و دترمینان

دترمینان عددی است که میزان «کشیدگی» یا «فشردگی» فضا توسط یک تبدیل خطی را اندازه می‌گیرد. در این درس معنای هندسی دترمینان و نحوه محاسبه آن را می‌آموزیم.

۱.۴ تبدیلات در فضای سه‌بعدی

تعریف ۱.۴ (ماتریس تبدیل سه‌بعدی)**.** یک تبدیل خطی در $\mathbb{R}^۳$ با ماتریس ۳×۳ نمایش داده می‌شود:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

ستون‌ها محل فرود $\hat{\imath}$، $\hat{\jmath}$ و $\hat{k}$ هستند.

شهود هندسی

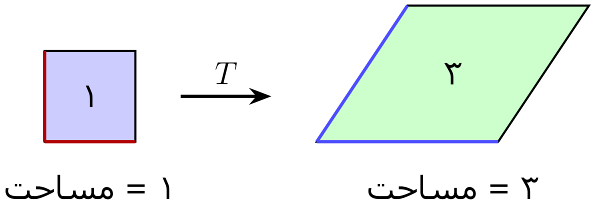
همان منطق دوبعدی در سه بعد هم کار می‌کند. شبکه سه‌بعدی را تصور کنید که کشیده، فشرده، چرخیده، یا برش می‌خورد. خطوط همچنان راست می‌مانند و مبدأ ثابت است.

۲.۴ دترمینان: معنای هندسی

تعریف ۲.۴ (دترمینان - تعریف هندسی)**.** **دترمینان** یک ماتریس، ضریبی است که نشان می‌دهد تبدیل متناظر، مساحت (در دو بعد) یا حجم (در سه بعد) را چند برابر می‌کند.

اگر $\mathbf{A}$ ماتریس تبدیل T باشد:

$$\det(\mathbf{A}) = \frac{\text{مساحت/حجم بعد از تبدیل}}{\text{مساحت/حجم قبل از تبدیل}}$$



نکته مهم

دترمینان = ضریب تغییر مساحت/حجم
اگر $\det(\mathbf{A}) = ۳$، هر شکل پس از تبدیل، ۳ برابر بزرگ‌تر می‌شود.

۳.۴ علامت دترمینان

قضیه ۱.۴ (معنای علامت دترمینان)**.** $\det(\mathbf{A}) > ۰$: جهت‌گیری فضا حفظ می‌شود

- $\det(\mathbf{A}) < ۰$: جهت‌گیری فضا معکوس می‌شود (مثل آینه)
- $\det(\mathbf{A}) = ۰$: فضا به بعد پایین‌تر فشرده می‌شود

شهود هندسی

در دو بعد، اگر $\hat{\jmath}$ نسبت به $\hat{\imath}$ در سمت چپ باشد، جهت‌گیری «مثبت» است. اگر تبدیل این رابطه را عوض کند (مثلاً انعکاس)، دترمینان منفی می‌شود.
در سه بعد، قاعده دست راست: اگر انگشتان از $\hat{\imath}$ به $\hat{\jmath}$ بچرخند و شست به $\hat{k}$ اشاره کند، جهت‌گیری مثبت است.

۴.۴ محاسبه دترمینان

۱.۴.۴ دترمینان ماتریس ۲×۲

تعریف ۲.۴.

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

مثال ۱.۴.

$$\det \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = ۳ \times ۲ - ۱ \times ۰ = ۶$$

مساحت هر شکل ۶ برابر می‌شود.

۲.۴.۴ دترمینان ماتریس ۳ × ۳

تعریف ۴.۴ (قاعده ساروس یا بسط)**.**

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

شهود هندسی

دترمینان ۳ × ۳ برابر است با حجم متوازی‌السطوح ساخته شده از سه بردار ستونی ماتریس (با علامت).

مثال ۲.۴.

$$\det \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= ۱(۵ \times ۹ - ۶ \times ۸) - ۲(۴ \times ۹ - ۶ \times ۷) + ۳(۴ \times ۸ - ۵ \times ۷) \\ &= ۱(۴۵ - ۴۸) - ۲(۳۶ - ۴۲) + ۳(۳۲ - ۳۵) \\ &= ۱(-۳) - ۲(-۶) + ۳(-۳) \\ &= -۳ + ۱۲ - ۹ = ۰ \end{aligned}$$

دترمینان صفر یعنی سه ستون در یک صفحه هستند!

۵.۴ خواص دترمینان

قضیه ۲.۴ (خواص اصلی دترمینان)**.** $\det(\mathbf{I}) = ۱$.۱

۲. $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$

۳. $\det(\mathbf{A}^\top) = \det(\mathbf{A})$

۴. $\det(c\mathbf{A}) = c^n \det(\mathbf{A})$ برای ماتریس $n \times n$

۵. اگر یک سطر/ستون صفر باشد: $\det(\mathbf{A}) = ۰$

۶. اگر دو سطر/ستون برابر باشند: $\det(\mathbf{A}) = ۰$

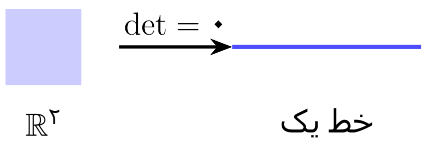
شهود هندسی

خاصیت $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$ بسیار مهم است:
اگر $\mathbf{A}$ مساحت را ۳ برابر کند و $\mathbf{B}$ مساحت را ۲ برابر کند، ترکیب آنها مساحت را $۶ = ۳ \times ۲$ برابر می‌کند.

۶.۴ دترمینان صفر: فشردگی فضا

قضیه ۳.۴. $\det(\mathbf{A}) = ۰$ اگر و تنها اگر:

- ستون‌های $\mathbf{A}$ وابسته خطی باشند
- تبدیل متناظر، فضا را به بعد پایین‌تر ببرد



کاربرد عملی

تشخیص وابستگی خطی:
می‌خواهید بدانید آیا سه بردار در فضا مستقل خطی هستند؟ آنها را ستون‌های یک ماتریس قرار دهید. اگر $\det \neq ۰$، مستقل هستند.

۷.۴ مثال‌های کاربردی

کاربرد عملی

محاسبه مساحت مثلث با رأس‌های مشخص
اگر رأس‌های مثلث $(x_۱, y_۱)$، $(x_۲, y_۲)$، $(x_۳, y_۳)$ باشند:

$$\text{مساحت} = \frac{۱}{۲} \left| \det \begin{bmatrix} x_۱ & y_۱ & ۱ \\ x_۲ & y_۲ & ۱ \\ x_۳ & y_۳ & ۱ \end{bmatrix} \right|$$

کاربرد عملی

فیزیک: گشتاور و نیرو
دترمینان در محاسبه ضرب خارجی بردارها استفاده می‌شود که در محاسبه گشتاور،

تکانه زاویه‌ای، و میدان‌های الکترومغناطیسی کاربرد دارد.

۸.۴ تمرین‌ها

تمرین ۱.۴. دترمینان ماتریس‌های زیر را محاسبه کنید:

(آ) $\begin{bmatrix} ۳ & ۷ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} ۲ & ۶ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & -۶ \end{bmatrix}$

تمرین ۲.۴. اگر $\det(\mathbf{A}) = ۵$ و $\det(\mathbf{B}) = -۲$، مقدار $\det(\mathbf{AB})$ چیست؟

تمرین ۳.۴. مساحت متوازی‌الاضلاع با رأس‌های $(۰,۰)$، $(۳,۱)$، $(۱,۴)$، $(۴,۵)$ را محاسبه کنید.

تمرین ۴.۴. دترمینان ماتریس چرخش θ را محاسبه کنید و نتیجه را تفسیر کنید.

تمرین ۵.۴ (چالشی)**.** ثابت کنید که برای هر ماتریس $\mathbf{A}$:

$$\det(\mathbf{A}^{-۱}) = \frac{۱}{\det(\mathbf{A})}$$

(فرض کنید $\mathbf{A}$ معکوس‌پذیر است)

مسئله ۱.۴. حجم متوازی‌السطوح ساخته شده از بردارهای زیر را محاسبه کنید:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

فصل ۵

ماتریس معکوس، فضای ستونی و فضای پوچ

در این درس با مفهوم ماتریس معکوس، حل دستگاه معادلات خطی، و فضاهای مهم مرتبط با ماتریس (فضای ستونی، فضای پوچ، و رتبه) آشنا می‌شویم.

۱.۵ دستگاه معادلات خطی

تعریف ۱.۵ (دستگاه معادلات به فرم ماتریسی)**.** دستگاه معادلات خطی:

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + \cdots + a_{۱n}x_n = b_۱ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + \cdots + a_{۲n}x_n = b_۲ \\ \vdots \\ a_{m۱}x_۱ + a_{m۲}x_۲ + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

را می‌توان به صورت $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ نوشت.

شهود هندسی

معادله $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ را اینگونه تفسیر کنید:

«چه برداری x پس از اعمال تبدیل A به b می‌رسد؟»

یا به عبارتی: تبدیل A را «برعکس» کنید تا از b به x برسید.

۲.۵ ماتریس معکوس

تعریف ۲.۵ (ماتریس معکوس)**.** ماتریس $\mathbf{A}^{-1}$ **معکوس** ماتریس $\mathbf{A}$ است اگر:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

که $\mathbf{I}$ ماتریس همانی است.

شهود هندسی

اگر $\mathbf{A}$ یک تبدیل باشد، $\mathbf{A}^{-1}$ تبدیلی است که اثر $\mathbf{A}$ را خنثی می‌کند:

- اگر $\mathbf{A}$ چرخش ۹۰ باشد، $\mathbf{A}^{-1}$ چرخش $-$۹۰ است
- اگر $\mathbf{A}$ مقیاس ۲ برابر باشد، $\mathbf{A}^{-1}$ مقیاس $\frac{۱}{۲}$ است

قضیه ۱.۵ (حل دستگاه با ماتریس معکوس)**.** اگر $\mathbf{A}$ معکوس‌پذیر باشد، جواب یکتای $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

۱.۲.۵ فرمول معکوس ماتریس ۲ × ۲

قضیه ۲.۵. اگر $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $\det(\mathbf{A}) \neq ۰$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{۱}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثال ۱.۵.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}, \quad \det(\mathbf{A}) = ۱۲ - ۲ = ۱۰$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰,۴ & -۰,۱ \\ -۰,۲ & ۰,۳ \end{bmatrix}$$

۳.۵ شرط وجود معکوس

قضیه ۳.۵. ماتریس $\mathbf{A}$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $\det(\mathbf{A}) \neq ۰$.

شهود هندسی

اگر $\det(\mathbf{A}) = ۰$، تبدیل $\mathbf{A}$ فضا را فشرده می‌کند (مثلاً صفحه به خط). چنین تبدیلی برگشت‌پذیر نیست - اطلاعات از دست رفته قابل بازیابی نیست.
مثل این است که چند عدد را جمع کنید: از حاصل‌جمع نمی‌توانید اعداد اصلی را پیدا کنید.

۴.۵ فضای ستونی (Column Space)

تعریف ۳.۵ (فضای ستونی)**. فضای ستونی** ماتریس $\mathbf{A}$، که با $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ نمایش داده می‌شود، فضای پوشش ستون‌های $\mathbf{A}$ است:

$$\mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathrm{span}\{\text{ستون‌های}\,\mathbf{A}\}$$

شهود هندسی

فضای ستونی = مجموعه همه خروجی‌های ممکن تبدیل $\mathbf{A}$
سؤال: «معادله $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ جواب دارد؟» معادل است با «آیا $\mathbf{b}$ در فضای ستونی $\mathbf{A}$ است؟»

مثال ۲.۵.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۶ \end{bmatrix}$$

ستون دوم = ۳ برابر ستون اول، پس:

$$\mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}\right\} = \text{یک خط از مبدأ}$$

۵.۵ فضای پوچ (Null Space)

تعریف ۴.۵ (فضای پوچ)**. فضای پوچ** (یا هسته) ماتریس $\mathbf{A}$، مجموعه تمام بردارهایی است که $\mathbf{A}$ آنها را به صفر می‌برد:

$$\mathrm{Null}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = ۰\}$$

شهود هندسی

فضای پوچ = بردارهایی که تبدیل $\mathbf{A}$ آنها را «له» می‌کند
اگر $\det(\mathbf{A}) \neq ۰$: فقط بردار صفر له می‌شود، پس $\mathrm{Null}(\mathbf{A}) = \{۰\}$
اگر $\det(\mathbf{A}) = ۰$: یک خط یا صفحه کامل به مبدأ فشرده می‌شود

مثال ۳.۵. برای ماتریس $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$:

حل $\mathbf{Ax} = ۰$:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

معادله: $x + ۲y = ۰$، پس $x = -۲y$

فضای پوچ: $\text{Null}(\mathbf{A}) = \left\{ t \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ (یک خط)

۶.۵ رتبه (Rank)

تعریف ۵.۵ (رتبه)**.** **رتبه** ماتریس A برابر است با:

- بعد فضای ستونی
- تعداد ستون‌های مستقل خطی
- تعداد سطرهای مستقل خطی

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = \dim(\text{Col}(\mathbf{A}))$$

قضیه ۴.۵ (قضیه رتبه-پوچی)**.** برای ماتریس $m \times n$:

$$\text{rank}(\mathbf{A}) + \dim(\text{Null}(\mathbf{A})) = n$$

(تعداد ستون‌ها)

شهود هندسی

رتبه = ابعادی که تبدیل حفظ می‌کند
$\dim(\text{Null}(\mathbf{A}))$ = ابعادی که از دست می‌رود
جمع این دو = ابعاد فضای ورودی

۷.۵ ماتریس‌های غیرمربعی

تعریف ۶.۵ (تبدیل بین ابعاد مختلف)**.** ماتریس $m \times n$ تبدیلی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ را نمایش می‌دهد:

- $m > n$: تبدیل از بعد کمتر به بعد بیشتر
- $m < n$: تبدیل از بعد بیشتر به بعد کمتر

مثال ۴.۵. ماتریس ۳ × ۲:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix} ۱ - ۱$$

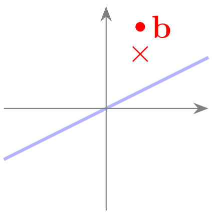
تبدیلی از $\mathbb{R}^۳$ به $\mathbb{R}^۲$ است. فضای سه‌بعدی را روی صفحه «پروژه» می‌کند.

۸.۵ حالت‌های مختلف دستگاه معادلات

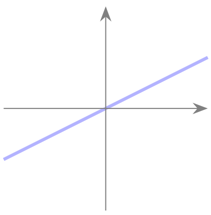
قضیه ۵.۵ (تحلیل جواب دستگاه $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$). ۱. **جواب یکتا:** اگر $\det(\mathbf{A}) \neq ۰$

۲. **بی‌نهایت جواب:** اگر $\det(\mathbf{A}) = ۰$ و $\mathbf{b} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$

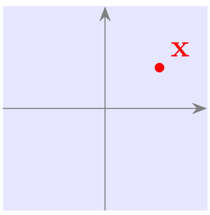
۳. **بدون جواب:** اگر $\mathbf{b} \notin \mathrm{Col}(\mathbf{A})$



بدون جواب
$\mathbf{b} \notin \mathrm{Col}$



بی‌نهایت جواب
$\det = ۰$، $\mathbf{b} \in \mathrm{Col}$



یکتا جواب
$\det \neq ۰$

۹.۵ تمرین‌ها

تمرین ۱.۵. معکوس ماتریس زیر را محاسبه کنید:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

تمرین ۲.۵. دستگاه زیر را با استفاده از ماتریس معکوس حل کنید:

$$\begin{cases} ۲x + ۳y = ۷ \\ x + ۲y = ۴ \end{cases}$$

تمرین ۳.۵. فضای پوچ ماتریس زیر را پیدا کنید:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

تمرین ۴.۵. رتبه ماتریس زیر را تعیین کنید:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۶ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

تمرین ۵.۵ (چالشی)**.** نشان دهید که $(\mathbf{AB})^{-۱} = \mathbf{B}^{-۱}\mathbf{A}^{-۱}$ (اگر معکوس‌ها وجود داشته باشند).

مسئله ۱.۵. برای چه مقادیر k، ماتریس زیر معکوس‌پذیر نیست؟

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & ۲ \\ ۳ & k \end{bmatrix}$$

فصل ۶

ضرب داخلی و دوگانگی

ضرب داخلی (ضرب نقطه‌ای) یکی از عملیات‌های بنیادین جبر خطی است. در این درس با تعریف، خواص، و مفهوم عمیق دوگانگی آشنا می‌شویم که ارتباط بین بردارها و تابع‌های خطی را نشان می‌دهد.

۱.۶ تعریف ضرب داخلی

تعریف ۱.۶ (ضرب داخلی)**.** **ضرب داخلی** (Dot Product) دو بردار $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

در فضای n-بعدی:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

نکته مهم

ضرب داخلی دو بردار، یک **عدد** (اسکالر) است، نه بردار!

مثال ۱.۶.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \times 1 + 2 \times 4 = 3 + 8 = 11$$

۲.۶ تفسیر هندسی

قضیه ۱.۶ (فرمول هندسی ضرب داخلی)**.**

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\| \cos\theta$$

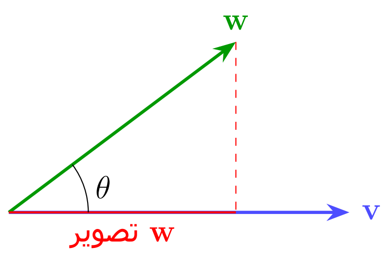
که θ زاویه بین دو بردار است.

شهود هندسی

ضرب داخلی را می‌توان به دو صورت تفسیر کرد:

۱. طول $\mathbf{v}$ ضرب در طول تصویر $\mathbf{w}$ روی $\mathbf{v}$

۲. طول $\mathbf{w}$ ضرب در طول تصویر $\mathbf{v}$ روی $\mathbf{w}$



۳.۶ خواص ضرب داخلی

قضیه ۲.۶ (خواص اصلی)**.** **۱. جابجایی:** $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}$

۲. **توزیع‌پذیری:** $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}+\mathbf{u}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$

۳. **همگنی:** $(c\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = c(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$

۴. **مثبت‌بودن:** $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \geq ۰$ و $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = ۰ \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{۰}$

تعریف ۲.۶ (طول بردار)**.**

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_۱^۲ + v_۲^۲ + \cdots + v_n^۲}$$

۴.۶ عمود بودن

قضیه ۳.۶ (شرط عمود بودن)**.** دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بر هم **عمود** هستند اگر و تنها اگر:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = ۰$$

شهود هندسی

اگر $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = ۰$، یعنی $\cos\theta = ۰$، پس $\theta = ۹۰$.
تصویر هر بردار روی بردار عمود بر آن، صفر است.

مثال ۲.۶. بردارهای $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix}$ عمود هستند زیرا:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = ۳ \times ۲ + ۲ \times (-۳) = ۶ - ۶ = ۰$$

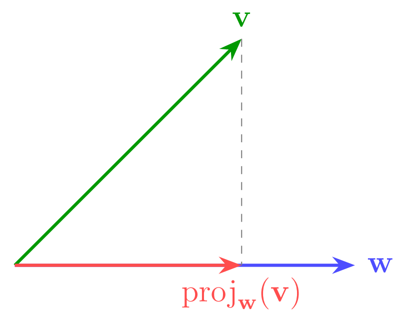
۵.۶ تصویر برداری

تعریف ۳.۶ (تصویر بردار)**.** تصویر بردار $\mathbf{v}$ روی بردار $\mathbf{w}$:

$$\text{proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} \mathbf{w} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^{۲}} \mathbf{w}$$

شهود هندسی

تصویر $\mathbf{v}$ روی $\mathbf{w}$ برداری است در راستای $\mathbf{w}$ که «سایه» $\mathbf{v}$ روی خط $\mathbf{w}$ را نشان می‌دهد.



۶.۶ دوگانگی (Duality)

شهود هندسی

یک بینش عمیق: هر بردار سطری $۱ \times n$ را می‌توان به عنوان یک **تابع خطی** در نظر گرفت که بردارهای n-بعدی را به اعداد می‌برد.
برای مثال، $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ یک تابع خطی است:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ۲x + y$$

قضیه ۴.۶ (دوگانگی)**.** هر تابع خطی $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را می‌توان به صورت ضرب داخلی با یک بردار ثابت نوشت:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$$

برای یک بردار یکتای $\mathbf{v}$.

تعریف ۴.۶ (بردار دوگان)**.** بردار $\mathbf{v}$ که تابع خطی f را نمایش می‌دهد، **بردار دوگان** آن تابع نامیده می‌شود.

کاربرد عملی

کاربرد در یادگیری ماشین:
در شبکه‌های عصبی، هر نورون یک تابع خطی روی ورودی‌ها محاسبه می‌کند:

$$\text{خروجی} = w_۱x_۱ + w_۲x_۲ + \cdots + w_nx_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$$

وزن‌های $\mathbf{w}$ بردار دوگان آن نورون هستند.

۷.۶ کاربردهای عملی

کاربرد عملی

فیزیک: کار مکانیکی
کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ در طول جابجایی $\vec{d}$:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \left\|\vec{F}\right\| \left\|\vec{d}\right\| \cos\theta$$

اگر نیرو عمود بر جهت حرکت باشد، کار صفر است!

کاربرد عملی

گرافیک کامپیوتری: محاسبه نور
شدت نوری که از سطح منعکس می‌شود:

$$I = \max(۰, \vec{n} \cdot \vec{l})$$

که $\vec{n}$ بردار نرمال سطح و $\vec{l}$ جهت نور است.

کاربرد عملی

تشابه متون
برای مقایسه دو سند متنی، هر سند را به بردار تبدیل می‌کنیم (مثلاً TF-IDF) و تشابه کسینوسی محاسبه می‌کنیم:

$$\text{similarity} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|} = \cos\theta$$

۸.۶ تمرین‌ها

تمرین ۱.۶. ضرب داخلی بردارهای زیر را محاسبه کنید:

(آ) $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$

تمرین ۲.۶. آیا بردارهای $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$ عمود هستند؟

تمرین ۳.۶. تصویر بردار $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$ روی بردار $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ را پیدا کنید.

تمرین ۴.۶. زاویه بین بردارهای $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

تمرین ۵.۶ (چالشی). نشان دهید که برای هر دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$:

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^{۲} = \|\mathbf{v}\|^{۲} + ۲(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) + \|\mathbf{w}\|^{۲}$$

مسئله ۱.۶. نیرویی با بزرگی ۱۰ نیوتن تحت زاویه ۶۰ با سطح افقی به جسمی وارد می‌شود. اگر جسم ۵ متر در راستای افقی حرکت کند، چقدر کار انجام شده؟

فصل ۷

ضرب خارجی و کاربردها

ضرب خارجی (ضرب برداری) عملیاتی است که از دو بردار در فضای سه‌بعدی، برداری عمود بر هر دو می‌سازد. در این درس تعریف، خواص، و ارتباط عمیق ضرب خارجی با دترمینان را بررسی می‌کنیم.

۱.۷ ضرب خارجی در دو بعد

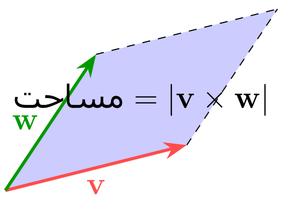
تعریف ۱.۷ (ضرب خارجی دوبعدی)**.** برای دو بردار در $\mathbb{R}^۲$:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = v_۱ w_۲ - v_۲ w_۱ = \det \begin{bmatrix} v_۱ & w_۱ \\ v_۲ & w_۲ \end{bmatrix}$$

نتیجه یک **عدد** است (نه بردار).

شهود هندسی

ضرب خارجی دوبعدی = مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده از دو بردار (با علامت)
علامت مثبت: w در سمت چپ v قرار دارد علامت منفی: w در سمت راست v قرار دارد



۲.۷ ضرب خارجی در سه بعد

تعریف ۲.۷ (ضرب خارجی سه‌بعدی)**.** برای $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{۱} \\ v_{۲} \\ v_{۳} \end{bmatrix}$ و $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_{۱} \\ w_{۲} \\ w_{۳} \end{bmatrix}$:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_{۲}w_{۳} - v_{۳}w_{۲} \\ v_{۳}w_{۱} - v_{۱}w_{۳} \\ v_{۱}w_{۲} - v_{۲}w_{۱} \end{bmatrix}$$

قضیه ۱.۷ (فرمول دترمینان)**.**

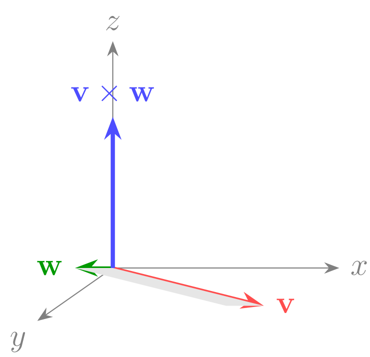
$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ v_{۱} & v_{۲} & v_{۳} \\ w_{۱} & w_{۲} & w_{۳} \end{bmatrix}$$

(بسط نمادین نسبت به سطر اول)

شهود هندسی

ضرب خارجی $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$:

- **جهت:** عمود بر هر دو بردار (قاعده دست راست)
- **اندازه:** مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده از $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$



۳.۷ خواص ضرب خارجی

قضیه ۲.۷ (خواص اصلی)**. پادجابجایی:** $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -(\mathbf{w} \times \mathbf{v})$

۲. **توزیع‌پذیری:** $\mathbf{v} \times (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}$

۳. **همگنی:** $(c\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = c(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

۴. **عمود بودن:** $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \perp \mathbf{v}$ و $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \perp \mathbf{w}$

۵. **صفر شدن:** $\mathbf{v} \times \mathbf{v} =$ ۰

هشدار

ضرب خارجی **جابجایی ندارد!**

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} \neq \mathbf{w} \times \mathbf{v}$$

در واقع برعکس هم هستند.

قضیه ۳.۷ (فرمول اندازه)**.**

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\| \sin\theta$$

که θ زاویه بین دو بردار است.

۴.۷ ضرب خارجی از دیدگاه تبدیلات خطی

شهود هندسی

نگاه عمیق‌تر: ضرب خارجی را می‌توان از طریق دوگانگی تعریف کرد.
تابع $f(\mathbf{x}) = \det[\mathbf{v} \,|\, \mathbf{w} \,|\, \mathbf{x}]$ یک تابع خطی از $\mathbf{x}$ است. طبق دوگانگی، باید برداری وجود داشته باشد که:

$$f(\mathbf{x}) = \cdot\mathbf{x}$$

این همان $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ است!

قضیه ۴.۷.

$$\det[\mathbf{v} \,|\, \mathbf{w} \,|\, \mathbf{x}] = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{x}$$

۵.۷ ضرب‌های پایه

قضیه ۵.۷ (ضرب خارجی بردارهای پایه)**.**

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \qquad \hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}$$
$$\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath} \qquad \hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$$
$$\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \qquad \hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$$

مثال ۱.۷.

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \\ ۷ \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (۳ \times ۷ - ۴ \times ۶)\hat{\imath} - (۲ \times ۷ - ۴ \times ۵)\hat{\jmath} + (۲ \times ۶ - ۳ \times ۵)\hat{k} \\
&= (۲۱ - ۲۴)\hat{\imath} - (۱۴ - ۲۰)\hat{\jmath} + (۱۲ - ۱۵)\hat{k} \\
&= -۳\hat{\imath} + ۶\hat{\jmath} - ۳\hat{k} = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۶ \\ -۳ \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

۶.۷ کاربردها

کاربرد عملی

فیزیک: گشتاور
گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول نقطه‌ای به فاصله $\vec{r}$:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

جهت گشتاور عمود بر صفحه‌ای است که نیرو و بازو در آن قرار دارند.

کاربرد عملی

فیزیک: نیروی لورنتس
نیروی وارد بر ذره باردار متحرک در میدان مغناطیسی:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

کاربرد عملی

گرافیک کامپیوتری: بردار نرمال
برای یافتن بردار عمود بر یک سطح مثلثی با رأس‌های A، B، C:

$$\vec{n} = (\vec{B} - \vec{A}) \times (\vec{C} - \vec{A})$$

کاربرد عملی

محاسبه مساحت مثلث

مساحت مثلث با رأس‌های A، B، C:

$$\text{مساحت} = \frac{۱}{۲}\left\|(\vec{B}-\vec{A})\times(\vec{C}-\vec{A})\right\|$$

۷.۷ ضرب سه‌گانه

تعریف ۳.۷ (ضرب سه‌گانه اسکالر)**.**

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \det[\mathbf{a}\,|\,\mathbf{b}\,|\,\mathbf{c}]$$

نتیجه = حجم متوازی‌السطوح ساخته شده از سه بردار (با علامت)

قضیه ۶.۷ (خاصیت دوری)**.**

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

۸.۷ تمرین‌ها

تمرین ۱.۷. ضرب خارجی بردارهای زیر را محاسبه کنید:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \\ ۶ \end{bmatrix}$$

تمرین ۲.۷. مساحت متوازی‌الاضلاع با اضلاع $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ را پیدا کنید.

تمرین ۳.۷. نشان دهید که $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ بر هر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عمود است.

تمرین ۴.۷. بردار نرمال به صفحه‌ای که از نقاط $(۱,۰,۰)$، $(۰,۱,۰)$، $(۰,۰,۱)$ می‌گذرد را پیدا کنید.

تمرین ۵.۷ (چالشی)**.** نشان دهید که:

$$\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^۲ + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^۲ = \|\mathbf{a}\|^۲\,\|\mathbf{b}\|^۲$$

(این رابطه لاگرانژ نام دارد)

مسئله ۱.۷. حجم متوازی‌السطوح با اضلاع:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

را محاسبه کنید.

فصل ۸

قاعده کرامر

قاعده کرامر روشی زیبا برای حل دستگاه معادلات خطی با استفاده از دترمینان است. در این درس با تفسیر هندسی این قاعده و شرایط کاربرد آن آشنا می‌شویم.

۱.۸ بیان قاعده کرامر

قضیه ۱.۸ (قاعده کرامر)**.** برای دستگاه $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ با ماتریس $n \times n$ و $\det(\mathbf{A}) \neq ۰$:

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})}$$

که $\mathbf{A}_i$ ماتریسی است که ستون iام $\mathbf{A}$ با بردار $\mathbf{b}$ جایگزین شده.

مثال ۱.۸. دستگاه ۲ × ۲:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

جواب:

$$x = \frac{\det\begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}$$

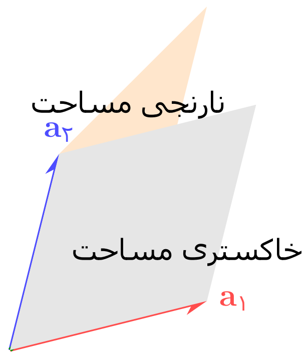
$$y = \frac{\det\begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

۲.۸ تفسیر هندسی

شهود هندسی

در دو بعد، معادله $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ می‌پرسد:
«چه ترکیب خطی از ستون‌های $\mathbf{A}$ برابر $\mathbf{b}$ است؟»
اگر $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2]$ و $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$:

$$x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$$



قضیه ۲.۸ (تفسیر مساحتی)**.**

$$x = \frac{\text{مساحت متوازی‌الاضلاع}(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2)}{\text{مساحت متوازی‌الاضلاع}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}$$

$$y = \frac{\text{مساحت متوازی‌الاضلاع}(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})}{\text{مساحت متوازی‌الاضلاع}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}$$

شهود هندسی

چرا این کار می‌کند؟
متوازی‌الاضلاع $(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2)$ را در نظر بگیرید. چون $\mathbf{b} = x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2$:

$$\text{مساحت}(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2) = \text{مساحت}(x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2)$$

چون $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_2 = 0$:

$$= \text{مساحت}(x\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = x \cdot \text{مساحت}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$$

پس:

$$x = \frac{\text{مساحت}(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2)}{\text{مساحت}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}$$

۳.۸ مثال محاسباتی

مثال ۲.۸. حل دستگاه:

$$\begin{cases} ۳x + ۲y = ۷ \\ x + ۴y = ۹ \end{cases}$$

مرحله ۱: محاسبه $\det(\mathbf{A})$:

$$\det \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix} = ۱۲ - ۲ = ۱۰$$

مرحله ۲: محاسبه x:

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} ۷ & ۲ \\ ۹ & ۴ \end{bmatrix}}{\det(\mathbf{A})} = \frac{۲۸ - ۱۸}{۱۰} = \frac{۱۰}{۱۰} = ۱$$

مرحله ۳: محاسبه y:

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} ۳ & ۷ \\ ۱ & ۹ \end{bmatrix}}{\det(\mathbf{A})} = \frac{۲۷ - ۷}{۱۰} = \frac{۲۰}{۱۰} = ۲$$

بررسی: $۳(۱) + ۲(۲) = ۷$ ☐ و $۱(۱) + ۴(۲) = ۹$ ☐

۴.۸ سه بعد و بالاتر

مثال ۳.۸. دستگاه ۳×۳:

$$\begin{cases} ۲x + y - z = ۳ \\ x - y + ۲z = ۱ \\ ۳x + ۲y + z = ۴ \end{cases}$$

ماتریس ضرایب:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}}{\det(\mathbf{A})}, \quad y = \frac{\det \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}}{\det(\mathbf{A})}, \quad z = \frac{\det \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}}{\det(\mathbf{A})}$$

شهود هندسی

در سه بعد، به جای نسبت مساحت‌ها، نسبت **حجم‌ها** را داریم.
x = نسبت حجم متوازی‌السطوح $(\mathbf{b}, \mathbf{a}_۲, \mathbf{a}_۳)$ به حجم $(\mathbf{a}_۱, \mathbf{a}_۲, \mathbf{a}_۳)$

۵.۸ محدودیت‌ها و کاربردها

هشدار

قاعده کرامر:

- فقط برای دستگاه‌های مربعی (n معادله، n مجهول)
- فقط وقتی $\det(\mathbf{A}) \neq ۰$ (جواب یکتا)
- برای n بزرگ، محاسباتی **بسیار پرهزینه** است

نکته ۱.۸. در عمل برای حل دستگاه‌های بزرگ از روش‌هایی مثل حذف گاوسی استفاده می‌شود که کارآمدتر هستند. اما قاعده کرامر:

- درک نظری عمیق‌تری می‌دهد
- برای فرمول‌های تحلیلی مفید است
- در اثبات قضایا کاربرد دارد

کاربرد عملی

کاربرد: یافتن تقاطع خطوط

دو خط $a_۱x + b_۱y = c_۱$ و $a_۲x + b_۲y = c_۲$ در نقطه زیر تقاطع دارند:

$$x = \frac{c_۱b_۲ - c_۲b_۱}{a_۱b_۲ - a_۲b_۱}, \quad y = \frac{a_۱c_۲ - a_۲c_۱}{a_۱b_۲ - a_۲b_۱}$$

این فرمول مستقیم از قاعده کرامر می‌آید.

۶.۸ تمرین‌ها

تمرین ۱.۸. دستگاه زیر را با قاعده کرامر حل کنید:

$$\begin{cases} ۲x + ۳y = ۸ \\ ۴x - y = ۲ \end{cases}$$

تمرین ۲.۸. دستگاه زیر را با قاعده کرامر حل کنید:

$$\begin{cases} x + y + z = ۶ \\ ۲x - y + z = ۳ \\ x + ۲y - z = ۲ \end{cases}$$

تمرین ۳.۸. نقطه تقاطع دو خط $۲x + ۳y = ۷$ و $x - y = ۱$ را با قاعده کرامر پیدا کنید.

تمرین ۴.۸. تفسیر هندسی قاعده کرامر را برای حالتی که $\det(\mathbf{A}) = ۰$ توضیح دهید.

تمرین ۵.۸ (چالشی)**.** نشان دهید که فرمول کرامر با ضرب $\mathbf{A}^{-۱}\mathbf{b}$ سازگار است.

مسئله ۱.۸. یک مثلث با رأس‌های $A(۱, ۱)$، $B(۴, ۲)$، $C(۲, ۵)$ داده شده. با استفاده از قاعده کرامر، مختصات مرکز ثقل را پیدا کنید.

فصل ۹

تغییر پایه

یک بردار یکسان در پایه‌های مختلف، مختصات متفاوتی دارد. در این درس یاد می‌گیریم چگونه بین دستگاه‌های مختصات مختلف ترجمه کنیم و این مفهوم چه ارتباطی با ماتریس‌ها دارد.

۱.۹ مختصات نسبت به پایه‌های مختلف

شهود هندسی

مختصات یک بردار به پایه انتخابی بستگی دارد. اگر زبان متفاوتی صحبت کنید، همان مفهوم را متفاوت بیان می‌کنید.

مثال: بردار $\mathbf{v}$ که در پایه استاندارد $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ است، اگر پایه‌ای متفاوت داشته باشیم، ممکن است $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ باشد!

تعریف ۱.۹ (مختصات در پایه)**.** اگر $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_۱, \mathbf{b}_۲\}$ یک پایه باشد، مختصات بردار $\mathbf{v}$ در این پایه، ضرایب $c_۱, c_۲$ هستند که:

$$\mathbf{v} = c_۱\mathbf{b}_۱ + c_۲\mathbf{b}_۲$$

نماد: $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_۱ \\ c_۲ \end{bmatrix}$

مثال ۱.۹. پایه $\mathcal{B} = \left\{\mathbf{b}_۱ = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}, \mathbf{b}_۲ = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}\right\}$

بردار $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ را در این پایه بیان کنید.

باید $c_۱, c_۲$ را پیدا کنیم که:

$$c_۱\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} + c_۲\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ۲c_۱ - c_۲ = ۳ \\ c_۱ + c_۲ = ۲ \end{cases}$$

حل: $c_۱ = \frac{۵}{۳}$، $c_۲ = \frac{۱}{۳}$

پس $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} ۵/۳ \\ ۱/۳ \end{bmatrix}$

۲.۹ ماتریس تغییر پایه

تعریف ۲.۹ (ماتریس تغییر پایه)**.** **ماتریس تغییر پایه** از پایه $\mathcal{B}$ به پایه استاندارد، ماتریسی است که ستون‌هایش بردارهای پایه $\mathcal{B}$ هستند:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{b}_۱ \mid \mathbf{b}_۲ \mid \cdots \mid \mathbf{b}_n]$$

قضیه ۱.۹.

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}\,[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

یعنی: مختصات در پایه $\mathcal{B}$ $\times$ ماتریس تغییر پایه = بردار در پایه استاندارد

قضیه ۲.۹.

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{P}^{-۱}\mathbf{v}$$

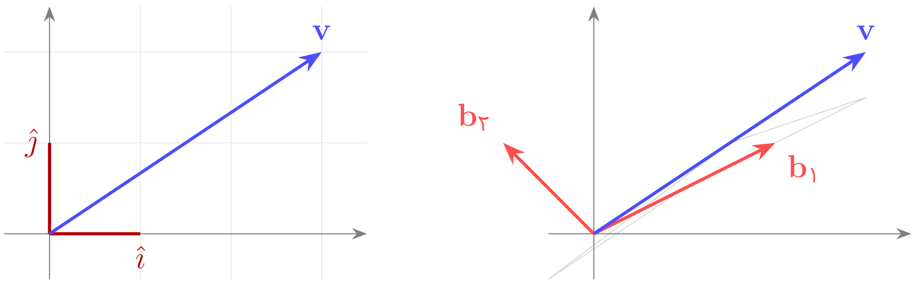
یعنی: برای تبدیل از پایه استاندارد به پایه $\mathcal{B}$، از معکوس استفاده می‌کنیم.

۳.۹ تبدیل تغییر پایه

شهود هندسی

ماتریس $\mathbf{P}$ یک تبدیل هویت است که فقط زبان را عوض می‌کند:

- $\mathbf{P}$: از زبان $\mathcal{B}$ به زبان استاندارد ترجمه می‌کند
- $\mathbf{P}^{-۱}$: از زبان استاندارد به زبان $\mathcal{B}$ ترجمه می‌کند



استاندارد پایه

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

پایه $\mathcal{B}$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix}$$

۴.۹ نمایش تبدیل در پایه‌های مختلف

قضیه ۳.۹ (تبدیل در پایه جدید). اگر $\mathbf{A}$ ماتریس تبدیل T در پایه استاندارد باشد، ماتریس همان تبدیل در پایه $\mathcal{B}$:

$$[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

شهود هندسی

این فرمول سه مرحله دارد:

۱. $\mathbf{P}$: از پایه $\mathcal{B}$ به پایه استاندارد ترجمه کن

۲. $\mathbf{A}$: تبدیل را در پایه استاندارد اعمال کن

۳. $\mathbf{P}^{-1}$: نتیجه را به پایه $\mathcal{B}$ برگردان

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\mathbf{P}"] \arrow[rrr, bend right, "\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}"'] & \mathbf{v} \arrow[r, "\mathbf{A}"] & T(\mathbf{v}) \arrow[r, "\mathbf{P}^{-1}"] & {[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}}}
\end{tikzcd}$$

۵.۹ اهمیت تغییر پایه

شهود هندسی

چرا تغییر پایه مهم است؟
بعضی تبدیلات در پایه‌های خاص **ساده‌تر** به نظر می‌رسند. مثلاً:

- چرخش در پایه استاندارد پیچیده است

- اما در پایه‌ای که یک محور روی محور چرخش باشد، ساده می‌شود

بهترین پایه برای یک تبدیل؟ **پایه ویژه** (eigenbasis) - درس بعدی!

کاربرد عملی

کاربرد: ساده‌سازی محاسبات
فرض کنید می‌خواهید $\mathbf{A}^{100}$ را محاسبه کنید. اگر در پایه‌ای مناسب، $\mathbf{A}$ قطری شود:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D} \quad (\text{قطری})$$

آنگاه:

$$\mathbf{A}^{100} = \mathbf{P}\mathbf{D}^{100}\mathbf{P}^{-1}$$

و $\mathbf{D}^{100}$ بسیار ساده محاسبه می‌شود!

۶.۹ تمرین‌ها

تمرین ۱.۹. پایه $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ داده شده. مختصات بردار $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ را در این پایه پیدا کنید.

تمرین ۲.۹. ماتریس تغییر پایه از $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\}$ به پایه استاندارد را بنویسید.

تمرین ۳.۹. اگر $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 0\end{bmatrix}$ در پایه استاندارد، ماتریس این تبدیل را در پایه $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$ پیدا کنید.

تمرین ۴.۹ (چالشی)**.** نشان دهید که $\det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \det(\mathbf{A})$.

مسئله ۱.۹. دو پایه $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ داده شده. ماتریس تغییر پایه مستقیم از $\mathcal{B}_1$ به $\mathcal{B}_2$ (بدون گذر از پایه استاندارد) را چگونه محاسبه می‌کنید؟

فصل ۱۰

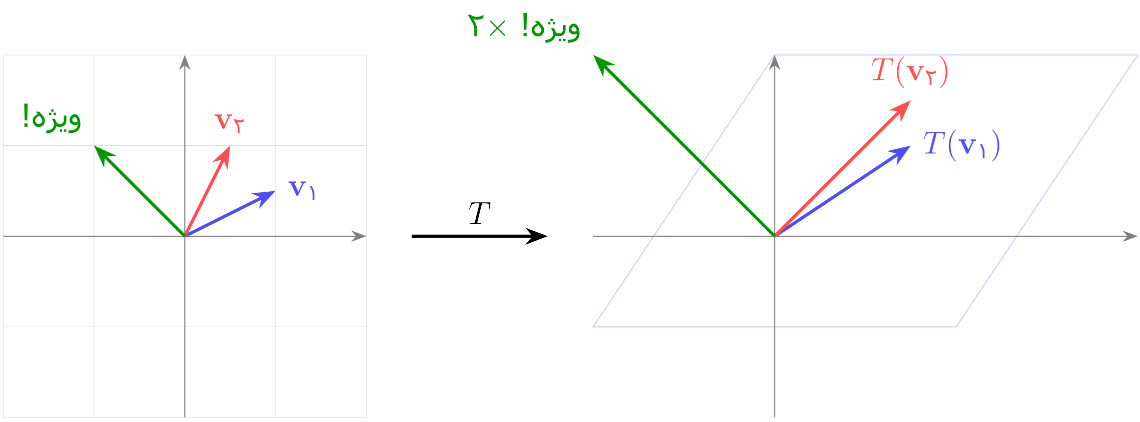
بردارها و مقادیر ویژه

بردارهای ویژه جهت‌های خاصی هستند که تبدیل خطی آنها را فقط مقیاس می‌کند بدون اینکه جهتشان را تغییر دهد. این مفهوم یکی از مهم‌ترین ایده‌های جبر خطی است با کاربردهای گسترده در فیزیک، مهندسی، و علوم داده.

۱.۱۰ انگیزه: بردارهای خاص

شهود هندسی

وقتی یک تبدیل خطی اعمال می‌کنید، اکثر بردارها از جهت اصلی‌شان منحرف می‌شوند.
اما برخی بردارهای خاص فقط کشیده یا فشرده می‌شوند و **روی همان خط** باقی می‌مانند.
این بردارهای خاص، **بردارهای ویژه** نامیده می‌شوند.



تبدیل از قبل

تبدیل از بعد

۲.۱۰ تعریف رسمی

تعریف ۱.۱۰ (بردار ویژه و مقدار ویژه)**.** بردار غیرصفر $\mathbf{v}$ یک **بردار ویژه** ماتریس $\mathbf{A}$ است اگر:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

برای یک عدد λ. این عدد **مقدار ویژه** متناظر نامیده می‌شود.

شهود هندسی

$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ یعنی:

«تبدیل $\mathbf{A}$ روی بردار $\mathbf{v}$ فقط اثر یک ضرب اسکالری دارد»

بردار $\mathbf{v}$ روی همان خط می‌ماند، فقط λ برابر می‌شود.

مثال ۱.۱۰. برای ماتریس $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$:

بردار $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه است:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} = ۲ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = ۲\mathbf{v}$$

مقدار ویژه متناظر: $\lambda = ۲$

۳.۱۰ یافتن مقادیر ویژه

قضیه ۱.۱۰ (معادله مشخصه)**.** λ مقدار ویژه $\mathbf{A}$ است اگر و تنها اگر:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = ۰$$

اثبات. $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ را می‌توان نوشت:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

این معادله جواب غیرصفر دارد اگر و تنها اگر $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ معکوس‌پذیر نباشد، یعنی $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = ۰$. □

تعریف ۲.۱۰ (چندجمله‌ای مشخصه)**.** $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ یک چندجمله‌ای در λ است که **چندجمله‌ای مشخصه** نامیده می‌شود. ریشه‌های آن مقادیر ویژه هستند.

مثال ۲.۱۰ برای $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} ۳-\lambda & ۱ \\ ۰ & ۲-\lambda \end{bmatrix} = (۳-\lambda)(۲-\lambda) - ۰ = ۰$$

ریشه‌ها: $\lambda_۱ = ۳$، $\lambda_۲ = ۲$

۴.۱۰ یافتن بردارهای ویژه

قضیه ۲.۱۰ برای هر مقدار ویژه λ، بردارهای ویژه متناظر از حل دستگاه همگن زیر به دست می‌آیند:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = ۰$$

مثال ۳.۱۰ ادامه مثال قبل با $\lambda = ۲$:

$$(\mathbf{A} - ۲\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_۱ \\ v_۲ \end{bmatrix} = ۰$$

معادله: $v_۱ + v_۲ = ۰$، پس $v_۱ = -v_۲$

بردار ویژه: $\mathbf{v} = t \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ برای هر $t \neq ۰$

۵.۱۰ فضای ویژه

تعریف ۳.۱۰ (فضای ویژه). **فضای ویژه** متناظر با مقدار ویژه λ:

$$E_\lambda = \mathrm{Null}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$$

شهود هندسی

فضای ویژه شامل همه بردارهایی است که تبدیل $\mathbf{A}$ آنها را فقط با ضریب λ مقیاس می‌کند. این فضا همیشه یک زیرفضای برداری است.

۶.۱۰ تفسیر هندسی

کاربرد عملی

چرخش سه‌بعدی

برای یک چرخش در $\mathbb{R}^۳$، بردار ویژه با $\lambda = ۱$ **محور چرخش** است! این بردار ثابت می‌ماند.

توصیف چرخش با محور و زاویه بسیار ساده‌تر از ماتریس ۳×۳ است.

مثال ۴.۱۰. ماتریس برش: $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

مقدار ویژه: $\lambda = ۱$ (مضاعف)

بردار ویژه: $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ (فقط یک جهت ویژه)

تفسیر: برش، محور x را ثابت نگه می‌دارد.

۷.۱۰ حالات خاص

قضیه ۳.۱۰ (چرخش دوبعدی). ماتریس چرخش $_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ برای $\theta \neq ۰, \pi$:

مقادیر ویژه: $\lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta$ (مختلط!)

هیچ بردار حقیقی روی جای خود نمی‌ماند - همه بردارها می‌چرخند.

هشدار

مقادیر ویژه می‌توانند **مختلط** باشند حتی برای ماتریس‌های حقیقی! این در چرخش‌ها اتفاق می‌افتد.

۸.۱۰ کاربردها

کاربرد عملی

PageRank Google

صفحات وب را بردار، لینک‌ها را ماتریس در نظر بگیرید. بردار ویژه غالب (با بزرگ‌ترین مقدار ویژه) اهمیت نسبی صفحات را نشان می‌دهد.

کاربرد عملی

تحلیل مؤلفه‌های اصلی (PCA)
در یادگیری ماشین، بردارهای ویژه ماتریس کوواریانس، جهت‌های اصلی تغییرات را نشان می‌دهند.

کاربرد عملی

مکانیک کوانتومی
مقادیر ویژه عملگرها = نتایج ممکن اندازه‌گیری
بردارهای ویژه = حالت‌های پایدار سیستم

۹.۱۰ تمرین‌ها

تمرین ۱.۱۰. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس زیر را پیدا کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

تمرین ۲.۱۰. نشان دهید که مقادیر ویژه ماتریس قطری، درایه‌های قطری آن هستند.

تمرین ۳.۱۰. مقادیر ویژه ماتریس چرخش ۹۰ را پیدا کنید.

تمرین ۴.۱۰. اگر λ مقدار ویژه A باشد، نشان دهید λ^2 مقدار ویژه A^2 است.

تمرین ۵.۱۰ (چالشی)**.** ثابت کنید که اثر ماتریس (مجموع درایه‌های قطری) برابر مجموع مقادیر ویژه است.

مسئله ۱.۱۰. ماتریس پوپولاسیون:

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

مقدار ویژه غالب را پیدا کنید و تفسیر کنید.

فصل ۱۱

محاسبه مقادیر ویژه و پایه ویژه

در این درس روش‌های سریع‌تر برای محاسبه مقادیر ویژه ماتریس‌های ۲×۲ را یاد می‌گیریم و با مفهوم پایه ویژه و قطری‌سازی آشنا می‌شویم.

۱.۱۱ ترفند سریع برای ماتریس ۲×۲

قضیه ۱.۱۱ (فرمول سریع)**.** برای ماتریس $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$:

حاصل‌جمع مقادیر ویژه:

$$\lambda_۱ + \lambda_۲ = a + d = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$$

حاصل‌ضرب مقادیر ویژه:

$$\lambda_۱ \cdot \lambda_۲ = ad - bc = \det(\mathbf{A})$$

شهود هندسی

با دانستن $m = \lambda_۱ + \lambda_۲$ و $p = \lambda_۱\lambda_۲$، می‌توانید $\lambda_{۱,۲}$ را پیدا کنید:

$$\lambda = \frac{m}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{۲}\right)^۲ - p}$$

یا: دو عدد پیدا کنید که مجموعشان m و حاصل‌ضربشان p باشد.

مثال ۱.۱۱. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$

اثر: $m = ۳ + ۱ = ۴$

دترمینان: $p = ۳ - ۴ = -۱$

مقادیر ویژه: دو عددی که $x + y = ۴$ و $xy = -۱$:

$$\lambda = ۲ \pm \sqrt{۴ - (-۱)} = ۲ \pm \sqrt{۵}$$

۲.۱۱ پایه ویژه (Eigenbasis)

تعریف ۱.۱۱ (پایه ویژه)**.** اگر بردارهای ویژه یک ماتریس بتوانند یک **پایه** تشکیل دهند (یعنی n بردار ویژه مستقل خطی داشته باشیم)، این پایه را **پایه ویژه** می‌نامیم.

قضیه ۲.۱۱. در پایه ویژه، ماتریس تبدیل **قطری** می‌شود:

$$[\mathbf{A}]_{\text{پایه ویژه}} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \lambda_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \ddots \end{bmatrix}$$

شهود هندسی

چرا قطری؟

در پایه ویژه، هر بردار پایه فقط مقیاس می‌شود:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_۱ = \lambda_۱\mathbf{v}_۱ \to \text{ستون اول:} \begin{bmatrix} \lambda_۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_۲ = \lambda_۲\mathbf{v}_۲ \to \text{ستون دوم:} \begin{bmatrix} ۰ \\ \lambda_۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

۳.۱۱ قطری‌سازی

تعریف ۲.۱۱ (قطری‌سازی)**.** ماتریس A **قطری‌پذیر** است اگر:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-۱}$$

که D قطری و P ماتریس بردارهای ویژه است.

قضیه ۳.۱۱ (شرط قطری‌پذیری)**.** ماتریس $n \times n$ قطری‌پذیر است اگر و تنها اگر n بردار ویژه مستقل خطی داشته باشد.

مثال ۲.۱۱. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ با مقادیر ویژه $\lambda_۱ = ۳$، $\lambda_۲ = ۲$

بردارهای ویژه: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$، $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

بررسی: $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ □

۴.۱۱ توان ماتریس با قطری‌سازی

قضیه ۴.۱۱. اگر $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}$$

و $\mathbf{D}^n$ بسیار ساده است:

$$\mathbf{D}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

مثال ۳.۱۱. محاسبه $\mathbf{A}^{100}$ برای مثال قبل:

$$\mathbf{A}^{100} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

بدون قطری‌سازی، باید ۱۰۰ ضرب ماتریسی انجام می‌دادیم!

کاربرد عملی

کاربرد: اعداد فیبوناچی

دنباله فیبوناچی: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

ماتریس:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

با قطری‌سازی، فرمول بسته پیدا می‌کنیم:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

۵.۱۱ ماتریس‌های غیرقطری‌پذیر

مثال ۴.۱۱. ماتریس برش $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$:
چندجمله‌ای مشخصه: $(۱-\lambda)^۲ = ۰$
مقدار ویژه: $\lambda = ۱$ (مضاعف)
بردار ویژه: فقط $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ (یک بعدی)
این ماتریس قطری‌پذیر نیست!

هشدار

مقدار ویژه تکراری لزوماً مشکل‌ساز نیست. مشکل زمانی است که تعداد بردارهای ویژه مستقل کمتر از تعداد تکرار مقدار ویژه باشد.

۶.۱۱ ماتریس‌های متقارن

قضیه ۵.۱۱ (قضیه طیفی)**.** ماتریس متقارن ($A = A^T$):

۱. مقادیر ویژه حقیقی دارد

۲. بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز، عمود هستند

۳. همیشه قطری‌پذیر است (با پایه متعامد)

شهود هندسی

ماتریس‌های متقارن «خوش‌رفتار» هستند. آنها همیشه قطری می‌شوند و بردارهای ویژه‌شان عمود هستند - مثل محورهای اصلی یک بیضی.

۷.۱۱ تمرین‌ها

تمرین ۱.۱۱. با ترفند سریع، مقادیر ویژه ماتریس زیر را پیدا کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

تمرین ۲.۱۱. ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ را قطری کنید.

تمرین ۳.۱۱. با استفاده از قطری‌سازی، $\mathbf{A}^{۱۰}$ را محاسبه کنید:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

تمرین ۴.۱۱. آیا ماتریس زیر قطری‌پذیر است؟

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

تمرین ۵.۱۱ (چالشی)**.** نشان دهید که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{A}^{\top}$ مقادیر ویژه یکسانی دارند.

مسئله ۱.۱۱. جمعیت خرگوش‌ها و روباه‌ها با مدل زیر توصیف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} R_{n+۱} \\ F_{n+۱} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱,۱ & -۰,۴ \\ ۰,۲ & ۰,۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_n \\ F_n \end{bmatrix}$$

رفتار بلندمدت جمعیت را تحلیل کنید.

فصل ۱۲

فضاهای برداری انتزاعی

در این درس پایانی، مفهوم بردار را فراتر از پیکان‌های هندسی گسترش می‌دهیم. خواهیم دید که توابع، چندجمله‌ای‌ها، و حتی موسیقی می‌توانند «بردار» باشند - به شرطی که قوانین جبر خطی را رعایت کنند.

۱.۱۲ انگیزه: بردار چیست؟

شهود هندسی

تا کنون بردار را به عنوان پیکان یا لیست اعداد شناختیم. اما ریاضیدان‌ها سؤال عمیق‌تری می‌پرسند:

«چه چیزهایی مثل بردار رفتار می‌کنند؟»

پاسخ: هر چیزی که بتوان آن را جمع کرد و در اسکالر ضرب کرد!

مثال ۱.۱۲. توابع را می‌توان جمع کرد: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

توابع را می‌توان در عدد ضرب کرد: $(cf)(x) = c \cdot f(x)$

پس توابع می‌توانند «بردار» باشند!

۲.۱۲ تعریف رسمی فضای برداری

تعریف ۱.۱۲ (فضای برداری)**.** یک **فضای برداری** روی میدان $\mathbb{R}$ مجموعه‌ای V با دو عملیات است:

- **جمع:** $+ : V \times V \to V$
- **ضرب اسکالری:** $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$

که اصول زیر (آکسیوم‌ها) را برآورده کند.

قضیه ۱.۱۲ (آکسیوم‌های فضای برداری)**.** برای همه $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ و $a, b \in \mathbb{R}$:
آکسیوم‌های جمع:

۱. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (جابجایی)

۲. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (شرکت‌پذیری)

۳. وجود عنصر خنثی: $\exists \mathbf{۰} : \mathbf{v} + \mathbf{۰} = \mathbf{v}$

۴. وجود قرینه: $\forall \mathbf{v}, \exists (-\mathbf{v}) : \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{۰}$

آکسیوم‌های ضرب اسکالری:

۵. $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$

۶. $۱ \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$

آکسیوم‌های توزیع:

۷. $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$

۸. $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$

۳.۱۲ مثال‌های فضای برداری

۱.۳.۱۲ $\mathbb{R}^n$ - فضای استاندارد

مثال ۲.۱۲. $\mathbb{R}^n = \{(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ با جمع و ضرب معمولی.
این همان فضایی است که تا کنون با آن کار کردیم.

۲.۳.۱۲ فضای چندجمله‌ای‌ها

مثال ۳.۱۲. $\mathcal{P}_n$ = مجموعه چندجمله‌ای‌های با درجه حداکثر n:

$$p(x) = a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + \cdots + a_nx^n$$

جمع: $(p + q)(x) = p(x) + q(x)$
ضرب اسکالری: $(cp)(x) = c \cdot p(x)$
بردار صفر: $p(x) = ۰$
پایه: $\{۱, x, x^۲, \ldots, x^n\}$ - بعد فضا: $n + ۱$

۳.۳.۱۲ فضای توابع

مثال ۴.۱۲. $C[a, b]$ = مجموعه توابع پیوسته روی بازه $[a, b]$
این فضا **بی‌نهایت بعدی** است!

۴.۳.۱۲ فضای ماتریس‌ها

مثال ۵.۱۲. $M_{m\times n}$ = مجموعه ماتریس‌های $m\times n$
جمع: جمع درایه‌ای
ضرب اسکالری: ضرب همه درایه‌ها در اسکالر
بعد: $m\times n$

۴.۱۲ تبدیلات خطی انتزاعی

تعریف ۲.۱۲ (تبدیل خطی بین فضاها)**.** تابع $T:V\to W$ یک **تبدیل خطی** است اگر:

۱. $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$
۲. $T(c\mathbf{v})=c\cdot T(\mathbf{v})$

مثال ۶.۱۲. مشتق‌گیری: $D:\mathcal{P}_n\to\mathcal{P}_{n-۱}$ با $D(p)=p'$
خطی است زیرا $(f+g)'=f'+g'$ و $(cf)'=cf'$.

مثال ۷.۱۲. انتگرال معین: $I:C[۰,۱]\to\mathbb{R}$ با $I(f)=\int_۰^۱ f(x)dx$
خطی است زیرا $\int(f+g)=\int f+\int g$ و $\int cf=c\int f$.

۵.۱۲ توابع به عنوان بردار بی‌نهایت بعدی

شهود هندسی

یک تابع $f:[۰,۲\pi]\to\mathbb{R}$ را می‌توان به عنوان بردار بی‌نهایت بعدی در نظر گرفت:

- هر نقطه x یک «مؤلفه» است
- مقدار $f(x)$ مقدار آن مؤلفه است

ضرب داخلی توابع:

$$\langle f,g\rangle=\int_۰^{۲\pi} f(x)g(x)dx$$

کاربرد عملی

سری فوریه

توابع سینوسی و کسینوسی یک «پایه» برای توابع تناوبی هستند:

$$f(x)=\frac{a_۰}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

ضرایب a_n, b_n مثل «مختصات» تابع در این پایه هستند!

۶.۱۲ چرا انتزاع مهم است؟

خلاصه

قدرت انتزاع:
وقتی چیزی یک فضای برداری است، **همه ابزارهای جبر خطی** قابل استفاده‌اند:

- استقلال و وابستگی خطی
- پایه و بعد
- تبدیلات خطی و ماتریس‌ها
- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه
- تصویر و فضای پوچ

یک قضیه در جبر خطی = قضیه‌ای برای همه این فضاها!

کاربرد عملی

مکانیک کوانتومی
حالت‌های کوانتومی یک فضای برداری (فضای هیلبرت) تشکیل می‌دهند. عملگرهای فیزیکی تبدیلات خطی هستند. مقادیر اندازه‌گیری = مقادیر ویژه!

کاربرد عملی

پردازش سیگنال
سیگنال‌های صوتی بردارهایی در فضای توابع هستند. تبدیل فوریه تغییر پایه است. فیلترها تبدیلات خطی هستند.

کاربرد عملی

یادگیری ماشین
داده‌ها بردارهایی در فضای ویژگی‌ها هستند. مدل‌های خطی تبدیلات خطی هستند. کاهش بعد = یافتن پایه بهتر.

۷.۱۲ نگاه به آینده

نکته ۱.۱۲. این دوره مقدمه‌ای بر جبر خطی بود. موضوعات پیشرفته‌تر:

- **فرم‌های درجه دوم** و دسته‌بندی مقاطع مخروطی
- **تجزیه مقدار تکین (SVD)** - ابزار قدرتمند علم داده
- **جبر خطی عددی** - الگوریتم‌های کارآمد
- **فضاهای هیلبرت** - جبر خطی بی‌نهایت بعدی
- **نظریه نمایش** - گروه‌ها و جبر خطی

۸.۱۲ تمرین‌ها

تمرین ۱.۱۲. نشان دهید که مجموعه ماتریس‌های ۲×۲ متقارن یک فضای برداری است. بعد آن چیست؟

تمرین ۲.۱۲. آیا مجموعه چندجمله‌ای‌هایی که $p(۰) = ۱$ یک فضای برداری است؟ چرا؟

تمرین ۳.۱۲. نشان دهید که مشتق‌گیری $D : \mathcal{P}_۲ \to \mathcal{P}_۲$ یک تبدیل خطی است. ماتریس آن را در پایه استاندارد بنویسید.

تمرین ۴.۱۲. ثابت کنید که در هر فضای برداری: $۰ \cdot \mathbf{v} = \mathbf{۰}$

تمرین ۵.۱۲ (چالشی)**.** فضای جواب‌های معادله دیفرانسیل $y'' + y = ۰$ را در نظر بگیرید. نشان دهید این یک فضای برداری است و پایه‌ای برای آن پیدا کنید.

مسئله ۱.۱۲. برای تبدیل خطی $T : \mathcal{P}_۲ \to \mathcal{P}_۲$ با $T(p) = p + p'$:

(آ) ماتریس T را در پایه $\{۱, x, x^۲\}$ بنویسید

(ب) مقادیر ویژه را پیدا کنید

(ج) چندجمله‌ای‌های ویژه (بردارهای ویژه) را پیدا کنید

۹.۱۲ جمع‌بندی دوره

خلاصه

ذات جبر خطی

از بردارها و ماتریس‌ها شروع کردیم و به فضاهای انتزاعی رسیدیم. ایده‌های کلیدی:

۱. **بردار:** چیزی که جمع و ضرب اسکالری دارد

۲. **تبدیل خطی:** تابعی که خطوط را حفظ می‌کند

۳. **ماتریس:** نمایش عددی تبدیل خطی

۴. **دترمینان:** ضریب تغییر حجم

۵. **مقادیر ویژه:** جهت‌های خاص که فقط مقیاس می‌شوند

۶. **انتزاع:** همه این مفاهیم فراتر از پیکان‌ها کار می‌کنند

جبر خطی زبان مشترک ریاضیات، فیزیک، مهندسی، و علوم کامپیوتر است.

پیوست آ

واژه‌نامه انگلیسی-فارسی

English	فارسی
Vector	بردار
Matrix	ماتریس
Transformation Linear	تبدیل خطی
Determinant	دترمینان
Eigenvalue	مقدار ویژه
Eigenvector	بردار ویژه
Basis	پایه
Span	فضای پوشش
Space Null	فضای پوچ
Space Column	فضای ستونی
Space Row	فضای سطری
Rank	رتبه
Independence Linear	استقلال خطی
Dependence Linear	وابستگی خطی
Product Dot	ضرب داخلی
Product Cross	ضرب خارجی
Matrix Identity	ماتریس همانی
Matrix Inverse	ماتریس معکوس
Transpose	ترانهاده
Basis of Change	تغییر پایه
Eigenbasis	پایه ویژه
Matrix Diagonal	ماتریس قطری
Scalar	اسکالر
Combination Linear	ترکیب خطی
Space Vector	فضای برداری