多元微分学

一点点 点集拓扑

$\mathbb{R}^n$ 中一点 P 的邻域一般取 δ-圆域

$$U(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n \mid |Q - P| < \delta\},$$

去心邻域为 $\dot{U}(P) = U(P) \setminus \{P\}$.

对集合 $S \subset \mathbb{R}^n$,

- 若存在 P 的邻域 $U(P) \subset S$，称 P 是 S 的内点。
- 若存在 P 的邻域 $U(P) \cap S = \emptyset$，称 P 是 S 的外点。
- 否则称 P 是 S 的边界点。边界点的集合记为 ∂S.

若 S 中的点全是内点，称 S 为 **开集**（open set）。若 S 的补集是开集，称 S 为 **闭集**（closed set）。等价的，闭集是满足 $\partial S \subset S$ 的集合。

若集合中的任意两点都可以通过折线连接，称集合是 **连通的**（connected），或称区域（domain）。

多元函数

本学期研究多元函数 $f : \mathbb{R}^n \supset D \mapsto \mathbb{R}$，即，其定义域是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集，值域是一个实数集。

通常 $n = 2$，即研究二元函数。二元函数 f 的图像由三维空间中满足 $z = f(x, y)$ 的点 (x, y, z) 构成。

极限与连续

定义：若$\exists L \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall Q \in \dot{U}(P), |f(Q) - L| < \varepsilon$，则称 L 为（二重）极限，记 $Q(x, y) \to P(x_0, y_0)$ 时，$f(x, y) \to L$，或

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

习题:

- 试与一元函数的极限定义比较.
- 试比较二重极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ 与 二次极限$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x, y)$.
- 考察 $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ 和 $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ 在原点是否有极限。

若二元函数 f 在 $P(x_0, y_0)$ 有极限且等于 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$，则称函数在 P 连续。否则称函数在 P 间断。

习题：用 $\varepsilon - \delta$ 语言复述连续的定义。

和一元函数类似，我们有:

- 连续函数的四则运算和复合是连续的。
- 初等函数在定义域内连续。

- 连续函数将闭区域映射到闭区间（有界闭区域上的连续函数有界、有最值、有介值性）。

偏导数

定义:

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

即，对一个变量（如 x）的偏导数，是固定其他变量（如 y）后，一元函数 $\phi(x) = f(x, y_0)$ 的导数。偏导数与是一个二元函数，称为偏导函数。

与一元函数（可导必连续）**不同**，多元函数可偏导未必连续。（为什么？？）

习题：考察函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

的可偏导性和连续性。

可以定义高阶偏导数，如二阶偏导 $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$.

定理：若 $f(x, y)$ 在 (x, y) 的混合偏导都连连续，则 $f_{xy} = f_{yx}$.

复合函数的链式法则

若 $u = u(x, y), v = v(x, y)$，则 $z(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ 的偏导数由链式法则决定

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

一般的，$\partial z/\partial x$ 中的每一项对应于自变量 x 通过中间变量影响 z 的一条路径。比如上例中，z 通过中间变量 u, v 成为 x, y 的函数。因此 x 到 z 有 $x \mapsto u \mapsto z$ 和 $x \mapsto v \mapsto z$ 这两条路径。

实践中，函数关系可能并不会通过清晰的符号来明确给出。这未必是因为作者或出题人懒，也可能是因为可用的函数符号真的有限。因此经常需要初学者通过上下文去主动阐明函数关系，然后再去应用链式法则。

隐函数定理

定理：若 $F(x_1, \ldots, x_n, z)$ 在 $P = (x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, z^\circ)$ 的邻域有连续偏导数，且 $F(P) = 0, F_z(P) \neq 0$，则在 P 的邻域内，存在唯一的隐函数 $z = z(x_1, \ldots, x_n)$，满足 $F(x_1, \ldots, x_n, z(x_1, \ldots x_n)) \equiv 0$，$z^\circ = z(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ)$，且有连续偏导数 $\partial z/\partial x_i = -F_{x_i}/F_z$.

隐函数定理有非常重要的地位和非常广泛的应用！

全微分

与一元函数类似（但是不同），若函数在 (x_0, y_0) 附近可以用平面

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

近似，则记 $df = Adx + Bdy$ 为 f 在 (x_0, y_0) 处的全微分。显然全微分可用于近似计算。

与一元函数相同，多元函数 **可微必连续**。

事实上，我们有

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial}dy$$

因此 **可微必可偏导**。反之，若偏导数连续，则可微。即：

$$\text{偏导数连续} \Rightarrow \text{可微} \Rightarrow \text{可偏导}$$

由复合函数的链式法则可以推出，全微分是不会因为换变量而改变的。

方向导数与梯度

若 u 为非零向量，$\hat{u} = (u_1, u_2) = u/|u|$ 是其单位向量，则沿 u 的方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \lim_{t \to 0} = \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2.$$

若定义 **梯度**（gradient）为向量 $\nabla f = \operatorname{grad} f = (f_x, f_y)$，则方向导数可以写成两个向量的点乘 $\partial f / \partial v = \nabla f \cdot \hat{u}$. 由乘可见，**梯度的方向是方向导数最大的方向**。

几何应用

- 曲线的切线和法平面
- 曲面的切平面与法线

Taylor 公式

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\bigg|_{(x_0, y_0)} + R_n$$

其中

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\bigg|_{(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}, \quad (0 < \theta < 1) \quad (\text{Lagrange 余项}),$$

或

$$R_n = o((x^2 + y^2)^{n/2}) \quad (\text{Peano 余项}),$$

极值问题

若二元函数 f 在 $P(x_0, y_0)$ 取到极值，且 f 在 P 的邻域可微，则 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. 满足这一必要条件的点称为驻点。

反之，若 $P(x_0, y_0)$ 是 f 的驻点，且 f 在 P 的邻域有连续的二阶偏导数。记 $H = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$。则

- $H > 0, f_{xx} > 0$ 时，f 在 P 取到极小值。
- $H > 0, f_{xx} < 0$ 时，f 在 P 取到极大值。
- $H < 0$ 时，f 在 P 不是极值。

条件极值

要在 $\phi(x,y,z)=0$ 的条件下求 $f(x,y,z)$ 的极值，可以用Lagrange乘子法：作辅助函数 $L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\phi(x,y,z)$。若 (x,y,z) 是 f 的条件极值点，则 (x,y,z,λ) 是 L 的驻点。即，条件极值的必要条件是解方程组

$$\left\{\begin{array}{c}\nabla f+\lambda\nabla\phi=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial\lambda}=\phi=0\end{array}\right..$$