姓名：

学号：

学院和年级：

上海科技大学

2022-2023 学年第二学期期中考试卷

开课单位：数学科学研究所

授课教师：陈浩，李铮，赵俐俐，朱佐农

考试科目：《高等数学 II》

课程代码：

考生须知：

1. 请严格遵守考场纪律，禁止任何形式的作弊行为.
2. 参加闭卷考试的考生，除携带必要考试用具外，书籍、笔记、掌上电脑和其他电子设备等物品一律按要求放在指定位置.
3. 参加开卷考试的考生，可以携带教师指定的材料独立完成考试，但不准相互讨论，不准交换材料.

考试成绩录入表：

题目	一	二	三	四	五	六	七	总分
计分								
复核								

评卷人签名： **复核人签名：**

日期： **日期：**

一、　选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 三个平面$-x+2y+z-3=0$，$x-z-1=0$，$x-y-z+1=0$的位置关系是（　　　）.

(A)其中两个平面平行，且都与另一个平面相交；

(B)三个平面相交于同一条直线；

(C)两两相交，三条交线相交于一点；

(D)两两相交，三条交线两两平行.

2. 对函数

$$f(x,y)=\begin{cases} y+x\sin\left(\dfrac{1}{y}\right), & y\neq 0; \\ 0, & y=0, \end{cases}$$

下面三个极限（　　　）.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),\quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y),\quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

(A)全都不存在；　　(B)仅有一个存在；

(C)仅有两个存在；　　(D)全都存在.

3. 微分方程 $y''+2y'+y=xe^{-x}$ 的特解是（　　　）.

(A) $(ax+b)e^{-x}$；　　(B) $x(ax+b)\cos x$；

(C) $x^2(ax+b)e^{-x}$；　　(D) $(ax+b)\sin x$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$（　　　）.

(A) $\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$；　　(B) $\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$；

(C) $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$；　　(D) $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$.

5. 设D_k是椭圆区域$D=\{(x,y)|x^2+4y^2\leq 1\}$ 位于第k象限的部分，记二重积分$I_k=\iint_{D_k}(y^2-x^2)dxdy$，则（　　　）.

(A)；$I_1 > 0$；　(B)$I_2 = 0$；　(C)$I_3 < 0$；　(D)$I_4 > 0$.

二、　填空题(每小题 3 分,共 15 分)

6. 若曲线$x = t, y = t^2, z = t^3$在点P处的切线平行于平面$x + 2y + z = 4$，则P点对应的参数$t =$____________________.

7. 设函数$z = e^{xy}$，则$dz|_{(1,2)} =$____________________.

8. 函数$u = x^2 + y^2 + z^2$在椭球面$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$上一点$P_0(1,1,1)$沿椭球面向外的**单位**法线方向的方向导数为____________________.

9. 设锥面S以原点为顶点，以空间曲线$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 6 \\ z = 1 \end{cases}$为准线. S上一点$P_0(4, 2, 2)$处的法线方程为____________________.

10. 交换积分次序$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y)dy =$____________________.

三、　多元函数的微分计算（每小题 7 分，共 14 分）

11. 设隐函数$z=z(x,y)$由方程$x+y+z=e^{-(x+y+z)}$确定.

求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

12. 在$x+2y+3z=6(x,y,z>0)$的条件下，用拉格朗日乘数法求函数$u=xy^2z^3$的最大值点和最大值.

四、　二重积分的计算（每小题 10 分，共 20 分）

13. 计算螺旋面

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = \varphi$$

上满足$0 < r < a$且$0 < \varphi < 2\pi$的部分的面积.

.

14. 计算

$$\iint_D \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy\,,$$

其中D是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$.

五、　三重积分的计算题（每小题 10 分，共 20 分）

15.计算

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz\,,$$

其中V是区域$x^2+y^2+z^2\le z$.

16. 两个大小一样的球体, 每个球的球心都在另一个球的球面上. 求两球相交部分体积占单个球体体积的比例.

六、　应用题（8 分）

17.（费马点）设锐角三角形ABC，平面上一点P到三角形顶点的距离和$|PA| + |PB| + |PC|$最小. 利用多元函数极值的知识，证明$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°$. （提示：作为热身练习，可先验证$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$的梯度是单位向量.）

七、　　证明题（8 分）

18. 设$f(x)$与$g(x)$都是$[a,b]$区间上的连续递增函数．证明不等式

$$\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx \le (b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx\,.$$