多元积分学

重积分

二重积分

若 $f(x, y)$ 是平面中一个有界闭区域 D 上的有界函数。若存在 $L \in \mathbb{R}$，使得对 D 的任意分划 $D_1, \cdots, D_n$，及任意 $(x_i, y_i) \in D_i$，记 $\Delta\sigma_i$ 为 D_i 的面积，$\lambda = \max_i \operatorname{diam}(D_i)$ 为分区的最大直径，有

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i = L,$$

则称 f 在 D 上可积，称 L 为 f 在 D 上的二重积分，记做

$$\iint_D f(x, y)d\sigma.$$

三重积分

若 $f(x, y, z)$ 是空间中一个有界闭区域 Ω 上的有界函数。若存在 $L \in \mathbb{R}$，使得对 Ω 的任意分划 $\Omega_1, \cdots, \Omega_n$，及任意 $(x_i, y_i, z_i) \in \Omega_i$，记 ΔV_i 为 Ω_i 的体积，$\lambda = \max_i \operatorname{diam}(\Delta V_i)$ 是分区的最大直径，有

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i = L,$$

则称 f 在 Ω 上可积，称 L 为 f 在 Ω 上的二重积分，记做

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dV.$$

性质

和一元定积分一样，重积分满足

- 线性
- 积分区域可加性
- 保序性
- 积分中值定理

需要掌握的计算技巧

- 化为累次积分
- 交换积分次序
- 利用对称性

- 变量代换

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw$$

应用

- 体积
- 曲面面积
- 质心
- 转动惯量
- 引力
- ……

曲线与曲面积分

第一类（标量场）曲线积分

若 $f(x,y)$ 在平面内一光滑曲线段 C 上有界。若存在 $L \in \mathbb{R}$，使得对曲线的任意划分 $C_1, \cdots, C_n$，及任意 $(x_i, y_i) \in C_i$，记 Δs_i 为曲线段 C_i 的弧长，$\lambda = \max_i \Delta s_i$，有

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i)\Delta s_i = L,$$

则称 $f(x,y)$ 在曲线 C 上可积，称 L 为 f 在 C 上的（第一类）曲线积分，记为

$$\int_C f(x,y)ds.$$

第一类（标量场）曲面积分

若 $f(x,y,z)$ 在空间内一光滑曲面 Σ 上有界。若存在 $L \in \mathbb{R}$，使得对曲线的任意划分 $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n$，及任意 $(x_i, y_i, z_i) \in \Sigma_i$，记 ΔS_i 为曲线段 Σ_i 的面积，$\lambda = \max_i \operatorname{diam}(\Sigma_i)$ 为分区最大直径，有

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i = L,$$

则称 $f(x,y,z)$ 在曲线 Σ 上可积，称 L 为 f 在 Σ 上的（第一类）曲面积分，记为

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS.$$

第二类（向量场）曲线积分

设向量场 $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ 在有向曲线 C 上有界，$\mathbf{t}(x,y)$ 是曲线上（取向一致）的单位切向量。则

$$\int_C [\mathbf{F}(x,y) \cdot \mathbf{t}(x,y)]ds = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_C \mathbf{F}(x,y) \cdot d\mathbf{s}$$

为 $\mathbf{F}$ 在曲线 C 上的（第二类）曲线积分。以上 $d\mathbf{s} = \mathbf{t}ds$.

第二类（向量场）曲面积分

设向量场 $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$ 在有向曲面 Σ 上有界，$\mathbf{n}(x,y,z)$ 是曲线上（取向一致）的单位切向量。则

$$\iint_{\Sigma}[\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)]dS = \iint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \iint_{\Sigma}\mathbf{F}(x,y,z)\cdot d\mathbf{S}$$

为 $\mathbf{F}$ 在曲面 Σ 上的（第二类）曲面积分。以上 $d\mathbf{S} = \mathbf{n}ds$.

第二类曲线和曲面积分要注意取向！

斯托克斯定理（们）

- Newton-Leibniz 公式

$$\int_a^b df(x) = \left(\int_I df(x) = \int_{\partial I} f(x) = \right) f(b) - f(a)$$

- Green 公式

$$\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

- Gauss 公式（散度公式）

$$\oint_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega}(\nabla\cdot\mathbf{F})dV.$$

- Stokes 公式（旋度公式）

$$\oint_{\partial\Sigma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Sigma}(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}.$$