> “
>
> ***Don't just read it; fight it!***
> *Ask your own questions, look for your own examples, discover your own proofs. Is the hypothesis necessary? Is the converse true? What happens in the classical special case? What about the degenerate cases? Where does the proof use the hypothesis?*
> *—-Paul Halmos*

这套讲义是教材的总结和**补充，不是替代**。教材上讲过的东西，讲义会简要总结。教材上没有讲过的东西，讲义会适当展开。

特别强调，本讲义可以方便复习知识点，但是**没有做题技巧**。

线性代数与解析几何

复习（有限维空间的）线性代数

一个 $n \times m$ **矩阵** (matrix) M 是排成 n 行 m 列的 $n \times m$ 个数。第 i 行第 j 列的数记为 $M_{i,j}$. 矩阵的转置 $M^\intercal$ 是一个 $m \times n$ 矩阵，定义为 $M^\intercal_{i,j} = M_{j,i}$.

一个 $n \times r$ 矩阵 A 和一个 $r \times m$ 矩阵 B 的乘积是一个 $n \times m$ 矩阵

$$(A \times B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{r} A_{i,k} B_{k,j}.$$

一个 $n \times n$ 方阵（square matrix）M 的**行列式**（determinant）为

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) M_{1,\sigma(1)} \cdots M_{n,\sigma(n)}.$$

其中 σ 是 $1, \ldots, n$ 的一个排列，$\operatorname{sgn}(1, \ldots, n) = 1$，且每次交换 σ 中的两个数字，$\operatorname{sgn}(\sigma)$ 都会改变符号。

本学期的课程中，我们会遇到 2×2 和 3×3 矩阵。他们的行列式有以下公式：

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 - c_1 b_2 a_3.$$

一个 n 维**向量**（vector 又称**矢量**）是按顺序排好的 n 个数。取决于约定，向量可以表示成 $n \times 1$ 矩阵（列向量）或 $1 \times n$ 矩阵（行向量）。向量可以做线性运算（加减，数乘）。向量构成的空间为**向量空间**（vector space，又称**线性空间** linear space）。

给定一组 n 个向量 $v_1, \ldots, v_n$ ，则 $v = c_1 v_1 + \cdots c_n v_n$ 称为他们的线性组合（linear combination）。若 $v=0$ 当且仅当 $c_1=\cdots=c_n=0$，则称这组向量是**线性无关**的（linearly independent）；否则称他们是**线性相关**的（linearly dependent）。n 维向量空间中 n 个线性无关的向量称为一组**基**（basis）。给定一组基，任何向量都可以唯一表示成基的线性组合，组合系数称为**坐标**。

三维空间中，通常（但不总是）取标准正交基 $\hat{\imath}=(1,0,0), \hat{\jmath}=(0,1,0)$ 和 $\hat{k}=(0,0,1)$。

平面与空间解析几何

线性代数本质上是关于点、直线、平面（以及高维空间中的子空间）等对象的几何学。

在 n 维欧几里德空间中确定原点后，n 维向量空间中的向量与欧几里德空间中的点一一对应。若允许起点不在原点，且不同起点的向量视作不同的向量，则这些向量构**仿射空间**（affine space）。

基础

练习：对二元线性方程组给出两种几何解读，分别对应平面几何中的「两点确定一条直线」和「两条直线交于一点」。

若向量写成列矩阵，则两个向量 u,v 的**内积**（inner product）为 $u\cdot v=u^\intercal v$。向量 v 与自己的内积 $v\cdot v$ 等于其长度的平方 $|v|^2$。一般的，我们有 $u\cdot v=|u||v|\cos\theta$，其中 θ 是 u,v 间的夹角。特别的，若 $u\cdot v=0$，则 u 与 v 垂直。

我们称 $\dfrac{(u\cdot v)v}{|v|^2}$ 为 u 在 v 方向上的投影向量（projection）；这一定义与几何图像相符。若 v 是单位向量，则 u 在其上的投影长度为 $|u|\cos\theta$。特别的，在标准正交基 $\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}$下，$u$ 的坐标为 $|u|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，其中 α,β,γ 为 u 与三个基向量的夹角，称为 **方向角**。

两个向量 $u=(u_1,u_2,u_3), v=(v_1,v_2,v_3)$ 的向量积（cross product）为向量

$$u\times v=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}.$$

其长度 $|u\times v|=|u||v|\sin\theta$ 是以 u,v 为边的平行四边形的面积。其方向满足右手定则。

三个向量 u,v,w 的混合积（mixed product）为行列式

$$[u,v,w]=(u\times v)\cdot w=\begin{vmatrix}v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\\ u_1 & u_2 & u_3\end{vmatrix}.$$

其几何意义为以 u,v,w 为边的平行六面体的**有向**体积。

练习：从几何角度理解 Cramer 法则。

空间平面

不建议背！

- 点法式：$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot(n_1,n_2,n_3)=0$
- 一般式：$Ax+By+Cz+D=0$.
- 截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.
- 三点式：

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

空间直线

不建议背！

- 参数式：$(x(t), y(t), z(t)) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3)$
- 点向式：$\dfrac{x-x_0}{v_1} = \dfrac{y-y_0}{v_2} = \dfrac{z-z_0}{v_3}$
- 两点式：$\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} = \dfrac{y-y_0}{y_1-y_0} = \dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}$
- 一般式：

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

练习：写出包含给定直线的所有平面的集合。

空间几何

以任何一种等式给定平面或直线，都需要会算：

- 点到直线的距离。
- 点到平面的距离。
- 俩直线距离。
- 俩平面夹角。
- 直线与平面夹角。
- 俩直线夹角。

曲面

曲面对应于一个三元方程 $F(x, y, z) = 0$，也可以由参数方程 $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 给出。

我们需要学会：(1) 给定曲面写出方程；(2) 给写方和描述曲面。

二次曲面

二次曲面的方程是三元二次方程。

我们可以用垂直于坐标轴的平面与曲面相交，由得到的平面图形了解曲面的形状。

我们需要掌握：

- 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$
- 单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$
- 双叶双曲面 $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$
- 椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z.$

- 双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z.$
- 等等

思考：怎样用矩阵的形式表示二次曲面？怎样从更一般的二次方程来判断二次曲面的类型？

由曲线得到的曲面

- **柱面** 是准线 C（空间曲线）沿母线 ℓ（空间直线）的方向平行移动的轨迹。若准线为 $\{(x, y, 0) \mid F(x, y) = 0\}$，母线平行于 z 轴，则柱面方程为 $F(x, y) = 0.$
- **旋转面** 是子午线 C（空间曲线）绕对称轴 ℓ（空间直线）旋转运动的轨迹。若子午线为 $\{(0, y, z) \mid F(y, z) = 0\}$，对称轴为 z 轴，则旋转面方程为 $F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$
- **锥面** 是准线 C（空间曲线）以顶点 M 为中心缩放运动的轨迹。若顶点为原点，锥面方程为 $F(x, y, z) = 0$，则 $\forall t \in \mathbb{R}$，有 $F(tx, ty, tz) = 0.$

空间曲线

空间曲线是两个曲面的交线，因此由两个三元方程给出，也可以用参数方程 $(x(t), y(t), z(t))$ 给出。

消除曲线方程中的一个变量，得到的是曲线在坐标平面上的投影。